PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

FUNCIÓN CUADRÁTICA: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDONEO DE PROFESORES EN EJERCICIO

Tesis para obtener el grado académico de Maestra en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Miriam Roxana Pinto Lazares

Asesora:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Lima, 2024

Informe de Similitud

Yo, Jesus Victoria, Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis/el trabajo de investigación titulado “Función cuadrática: Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores en ejercicio”, de la autora Miriam Roxana Pinto Lazares, dejo constancia de lo siguiente:

El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 17%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 11/07/2024.

- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 17 de julio del 2024

<table>
<tr><td colspan="2">Apellidos y nombres de la asesora: Flores Salazar, Jesus Victoria</td></tr>
<tr><td>DNI: 08342853</td><td rowspan="2">Firma:</td></tr>
<tr><td>ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X</td></tr>
</table>

Dedicado a:

A mis padres Máximo y Teodora quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido lograr mis objetivos y a mis sobrinas Cayetana y Doménica.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a Dios, fuente de toda sabiduría y fortaleza, por guiarme a lo largo de este arduo viaje académico. Su gracia y misericordia han sido mi inspiración constante, brindándome la fuerza necesaria para enfrentar los desafíos y superar los obstáculos que surgieron durante la elaboración de esta tesis.

A mi asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por todo su tiempo, dedicación, sus aportes y sus sugerencias siempre acertadas para enriquecer mi investigación.

A los investigadores miembros del jurado, Mg. Flor Carrillo y Mg. Magaly Campos por sus sugerencias y comentarios que contribuyeron a mejorar esta investigación.

A los todos los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas que tuve la oportunidad de conocer y gracias a sus conocimientos fortalecieron mi formación profesional.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática - TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus aportes en la realización de este trabajo.

A la Institución Educativa 6048 “Jorge Basadre” por darme la oportunidad de realizar la presente investigación. Al profesor del cuarto año de secundaria por su apoyo desinteresado, quien desde el inicio no dudó en brindarme sus horas de clase para realizar mi investigación.

Agradezco a mis amigos que han contribuido a mi formación durante esta maestría, así como por todas las experiencias y conocimientos que hemos compartido a lo largo de cada curso que hemos cursado juntos.

Resumen

El propósito de este estudio es investigar la forma en que el profesor de secundaria del área de matemáticas de Educación Básica Regular aborda el análisis, específicamente cuando imparten lecciones sobre la función cuadrática a alumnos de cuarto año de secundaria. Un elemento esencial de este análisis consiste en examinar cómo el profesor organiza los contenidos y las actividades propuestas durante la enseñanza de la función cuadrática.

Esto se respalda con el uso del libro del Ministerio de Educación, "Ficha de matemática 4°", y se emplea el software GeoGebra, considerando las dificultades reportadas en investigaciones previas y relacionadas con el aprendizaje de esta área. Además, los documentos como el Diseño Curricular Nacional (DCN) subrayan la importancia de abordar la función cuadrática.

La problemática que hemos identificado nos lleva a definir el objetivo principal de esta investigación, la cual consiste en examinar el ambiente matemático ideal del profesor de secundaria al impartir lecciones sobre la función cuadrática a estudiantes de cuarto año. Para lograr este fin, nos apoyamos en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesta por Kuzniak. En cuanto a la metodología, hemos optado por un enfoque cualitativo, siguiendo las fases delineadas por Hernández, Fernández y Baptista, las cuales han sido adaptadas para adecuarse a la naturaleza y los objetivos específicos de este estudio.

La investigación se lleva a cabo a través de la observación de una sesión de aprendizaje, complementada con entrevistas. Estos datos nos permiten presentar y analizar las acciones del profesor de secundaria al enseñar la función cuadrática, identificando las génesis y planos activados, así como los paradigmas del análisis que prioriza. Los resultados indican que, durante la sesión de aprendizaje, el profesor activa génesis semiótica, instrumental y discursiva, así como los planos semiótico-instrumental, instrumental-discursivo y semiótico-discursivo. Además, se destaca la preferencia del profesor por trabajar en los paradigmas del Análisis Geométrico/Aritmético y del Análisis Calculatorio.

Palabras clave: Función cuadrática; Génesis; Paradigmas; Trabajo matemático.

Abstract

The purpose of this study is to investigate how a high school mathematics teacher in Basic Regular Education approaches the analysis, specifically when presenting lessons on quadratic functions to fourth-year high school students. An essential element of this analysis involves examining how the teacher organizes the content and proposed activities during the instruction of the quadratic function.

This is supported by the use of the Ministry of Education's book, "Mathematics Worksheet 4th Year," and the use of GeoGebra software, taking into account the problems noted in previous research related to learning in this area. Additionally, documents such as the National Curriculum Design (DCN) emphasize the importance of convering the quadratic function.

The difficulty we have discovered leads us to define the main objective of this research, which is to analyze the ideal mathematical environment of the high school teacher when teaching lessons on the quadratic function to fourth-year students. To achieve this goal, we rely on the theory of the Mathematical Work Space (MWS) proposed by Kuzniak. Regarding the methodology, we have opted for a qualitative approach, following the steps defined by Hernández, Fernández, and Baptista, which have been adapted to fit the nature and specific objectives of this study.

The research is conducted through the observation of a learning session, complemented by interviews. This data allows us to exhibit and examine the actions of the high school teacher when teaching the quadratic function, identifying the activated genesis and planes, as well as the analysis paradigms prioritized. The results reveal that, during the learning session, the teacher activates semiotic, instrumental, and discursive genesis, as well as the semiotic-instrumental, instrumental-discursive, and semiotic-discursive planes. Additionally, the teacher's preference for working within the paradigms of Geometric/Arithmetic Analysis and Calculator Analysis is highlighted.

Keywords: Quadratic function; Genesis; Paradigms; Mathematical work.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

El presente trabajo de investigación surge por el interés de analizar las acciones de los profesores de matemática de Educación Básica Regular (EBR) al enseñar la función cuadrática y las dificultades que muestran los estudiantes de educación secundaria para resolver situaciones problemáticas sobre función cuadrática, carencia evidenciada en el rendimiento estudiantil. Por ello resulta como respuesta de la revisión de investigaciones de referencia, de manera particular aquellas relacionadas a la organización de los conocimientos y actividades que realiza el profesor de matemática para enseñar la función cuadrática y aquellas que estudian la práctica docente de profesores en formación inicial y continua a través de la teoría Espacio de Trabajo Matemático, en las cuales consideran necesario analizar las acciones que realiza el profesor para organizar la enseñanza de la función cuadrática en los estudiantes del cuarto grado de secundaria.

La investigación tiene como objetivo general analizar el Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del cuarto grado del nivel secundaria. Por lo tanto, se considera pertinente utilizar como sustento la teoría Espacio de Trabajo Matemático propuesto por Kuzniak (2011). Además, como la investigación es de corte cualitativo, nuestros procedimientos metodológicos que está basada en el conjunto de fases propuestas por Hernández, Fernández, y Baptista, la cual se adapta a la naturaleza y al objetivo de esta, el cual nos permitirá lograr nuestro objetivo general.

La tesis está constituida por tres capítulos. En el primer capítulo revisamos investigaciones de referencia relacionados al estudio de la práctica de profesores en el dominio del análisis, de manera particular sobre el objeto de estudio la función cuadrática. De acuerdo con lo anterior se establece la justificación de nuestra investigación. Además, se presenta la pregunta y los objetivos que orientan nuestra tesis, incluso los aspectos teóricos y metodológicos que fueron utilizados. En el segundo capítulo se describen aspectos matemáticos y epistemológicos del objeto función cuadrática, aspectos matemáticos para la enseñanza de la función cuadrática en libros universitarios de matemática, por último, aspectos didácticos y matemáticos para la enseñanza de la función cuadrática presente en el material de curso de Matemática “Ficha de matemática 4°”.

En el tercer capítulo se presentan los sujetos de investigación, la estrategia para el análisis del Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de matemática a partir de la información obtenida por la observación de la sesión de aprendizaje y la entrevista semiestructurada.

Finalmente se presentan las conclusiones y sugerencias que surgieron de la investigación y las perspectivas para futuras investigaciones.

Capítulo I: Problemática de la Investigación

En el presente capítulo, realizamos una revisión de otros trabajos relacionados con la enseñanza del objeto matemático función cuadrática e investigaciones de corte teórico, luego presentaremos la justificación del problema de investigación; inmediatamente la pregunta de investigación, el objetivo general y específicos. Finalmente, presentaremos aspectos del marco y la metodología a utilizarse la cual orienta nuestro estudio.

1.1 Investigaciones de referencia

Debido a que estamos interesados en analizar el trabajo matemático idóneo de profesores en ejercicio en la enseñanza sobre función cuadrática en el nivel secundario utilizando tecnología digital, se ha realizado la búsqueda de referencia en diferentes bases de datos, como: Scielo, Springer; Revistas Indexadas como: Delectus, Eurasia Journal of mathematics, International Education Studies, Educación y Humanismo, Polo del conocimiento, Problems of Education; Repositorios de Tesis: Pontificia Universidad Católica del Perú, considerado necesario organizar y clasificar las investigaciones de referencia bajo tres criterios temáticos: investigaciones relacionadas con el objeto de estudio: función cuadrática, las investigaciones que utilizan un medio tecnológico para abordarlo y las investigaciones en Formación continua de profesores.

Investigaciones relacionadas con el objeto de estudio

Entre las investigaciones examinadas de Educación Matemática que tienen como propósito el objeto de estudio a la Función Cuadrática, podemos mencionar la investigación de Almonacid (2020), analiza el Espacio de Trabajo Matemático Personal de estudiantes de humanidades cuando movilizan el concepto de función cuadrática al resolver tareas de modelización con el uso de tecnología digital, asimismo los artículos de Diaz, Aravena y Flores (2020), determinan el rendimiento académico y los errores en la resolución de tipos de problemas de aplicación sobre la función cuadrática. Por otro lado, Espinoza (2020), analiza cómo los estudiantes del quinto grado de educación secundaria, modelan la función cuadrática al resolver una actividad didáctica mediada por Tracker mediante el ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2007); finalmente Molina (2021), su investigación trata de la Identificación de conocimientos didáctico – matemático del profesor de matemática del nivel secundaria sobre función lineal y cuadrática para potenciar su práctica docente.

A continuación, precisaremos las investigaciones antes mencionadas.

Almonacid (2020), analiza cómo los estudiantes (16 –18 años), de carreras humanísticas abordan tareas de modelización relacionadas con funciones cuadráticas, centrándose en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), desarrollado por Kuzniak y estrategias de resolución. Se destaca la importancia de incorporar ambientes de representaciones dinámicas, como GeoGebra, para promover la construcción y comprensión de funciones cuadráticas de manera dinámica. Los hallazgos sugieren que la modelización matemática puede vincular las matemáticas con contextos de otras áreas científicas, lo que beneficia el aprendizaje en carreras humanísticas. Este enfoque puede tener implicaciones significativas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en entornos educativos.

La investigación de Diaz, Aravena y Flores (2020), analiza el rendimiento académico y los errores en la resolución de problemas de aplicación de la función cuadrática en estudiantes de secundaria de la Región de Los Lagos y Región de Los Ríos en Chile. Se utilizó un enfoque cualitativo y descriptivo con estudios de casos, se elaboró y aplicó una prueba de matemáticas y un cuestionario de opinión, observándose que los problemas rutinarios de contexto matemático y fantasioso tuvieron mejor rendimiento, mientras que hubo dificultades en la resolución de problemas no rutinarios. Los errores encontrados estaban relacionados con actitudes afectivas y emocionales, como bloqueos y olvidos al plantear la función cuadrática. Se destaca la importancia de profundizar en la resolución de problemas no rutinarios para el aprendizaje matemático.

Por otro lado, Espinoza (2020) en su estudio analiza cómo los estudiantes de quinto grado de educación secundaria (16 -17 años), modelan una función cuadrática al resolver una actividad didáctica utilizando la herramienta Tracker. En particular, se enfoca en el trabajo en parejas de cuatro de estos estudiantes. La actividad consiste en encontrar el modelo matemático del movimiento vertical de un objeto que se desliza por un plano inclinado. En la realización del análisis del proceso de modelación de los estudiantes, se tomó como referencia el ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2007), que incluye las fases de comprensión, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Además, se empleó una herramienta de análisis desarrollada por Gallart (2015), que consiste en una guía de preguntas para describir el tránsito entre las fases del ciclo de modelación. Los resultados del estudio indican que los estudiantes atraviesan las siete fases del ciclo de modelación matemática. Sin embargo, debido al uso de Tracker, algunas fases son menos observables y más difíciles de describir, lo que sugiere la necesidad de rediseñar las actividades para permitir observar con detalles dichas fases.

Molina (2021) en su investigación identifica el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) del enfoque ontosemiótico (EOS), para identificar los conocimientos que pueden mejorar la práctica docente en matemáticas, específicamente en relación con las funciones lineales y cuadráticas; siguiendo una metodología de tipo cualitativa y como parte del procedimiento metodológico se realizó una entrevista grabada a cuatro profesores en ejercicio por separado donde se les presentó tres situaciones propuestas que tuvo una duración de dos horas para finalmente obtener respuestas escritas (cuestionario con preguntas abiertas) que tenían como objetivo poner en juego los conocimientos didácticos matemáticos. De esta manera el autor espera contribuir en el campo de la Educación Matemática, particularmente en investigaciones que se enfocan en los conocimientos de profesores en formación.

En seguida presentamos el segundo criterio relacionado al uso de la tecnología con la finalidad de revisar referencias donde la tecnología ha servido como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática, los cuales servirán como elementos referenciales para nuestro estudio.

Investigaciones relacionadas al uso de la tecnología

Las investigaciones de referencia que se presentan en este segundo criterio tienen como propósito incorporar el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y en particular de la función cuadrática. Entre las investigaciones tenemos: la investigación de Anato (2022) que vincula al GeoGebra y su incidencia en la enseñanza de la función cuadrática que analiza algunas estrategias metodológicas utilizadas por los docentes de matemáticas, Asimismo Calderón, Franco y Alvarado (2018), gestiona logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del GeoGebra, por otro lado, el artículo presentado por Saravia, Neira y Flores (2021) proponen una enseñanza de funciones cuadráticas con parámetros utilizando GeoGebra como herramienta de apoyo para validar los valores obtenidos en el proceso algebraico. Por último, en el artículo de Rodríguez, Jardey (2022), describe las variables de la motivación cuando estudian la función cuadrática apoyados en el software dinámica GeoGebra.

A continuación, precisaremos las investigaciones antes mencionadas.

Anato (2022), analiza el impacto de GeoGebra en la enseñanza de la función cuadrática, resaltando la importancia de que los docentes dominen el tema para aprovechar al máximo las capacidades del software en estudiantes de la especialidad de informática del Instituto Universitario de Tecnología de Administración Industrial (IUTA). Se mencionan paradojas pedagógicas que pueden dificultar el aprendizaje, como el "Efecto Topaz", y se destaca la necesidad de guiar a los estudiantes en el uso del software matemático para fomentar habilidades de interpretación y pensamiento crítico. Se subraya que las estrategias de enseñanza deben considerar la planificación, el dominio de los conocimientos y la formación continua para promover el desarrollo de habilidades en los estudiantes.

El estudio realizado por Calderón, Franco y Alvarado (2018) se enfoca en la gestión de logros de aprendizaje significativo a través de secuencias didácticas con el respaldo del GeoGebra para el aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en el nivel de Tercero de Bachillerato en una institución educativa de Machala. La investigación revela que la implementación de esta metodología mejoró la comunicación entre docentes y estudiantes, fortaleció el razonamiento matemático y crítico; permitió a los alumnos ser protagonistas de su propio proceso de aprendizaje. Además, se destaca la importancia de investigar el interés de los estudiantes para diseñar actividades que generen un aprendizaje significativo. Este enfoque se alinea con los lineamientos curriculares y estándares de calidad educativa establecidos por el Ministerio de Educación de Ecuador, con el objetivo de mejorar la educación en el país.

Por otro lado, el artículo de Saravia, Neira y Flores (2021) aborda la importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas, destacando su capacidad para facilitar el aprendizaje al permitir la exploración y análisis de conceptos matemáticos como funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas, por esa razón lo divide en tres momentos: exploración de GeoGebra, desarrollo de actividades y análisis de resultados. Se destaca la importancia de la tecnología digital, como GeoGebra, para visualizar diversas representaciones matemáticas, como la Teoría de Registros de Representación Semiótica y se enfatiza la necesidad de reflexionar sobre la integración de GeoGebra en la enseñanza para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, Rodríguez y Jardey (2022) llevaron a cabo una investigación con estudiantes de educación básica en un colegio privado de Bogotá, Colombia, centrada en la motivación académica para el estudio de la función cuadrática utilizando GeoGebra. Se analizan varias variables como la atribución de éxito o fracaso, la percepción de dificultad de las materias y la influencia de la suerte en los resultados académicos. Se destaca la importancia de la motivación intrínseca en el aprendizaje, evidenciando que los estudiantes se sienten motivados cuando descubren algo nuevo al estudiar. Además, se resalta la relevancia de la retroalimentación de los profesores y la autoevaluación en el proceso de aprendizaje. El uso de GeoGebra se presenta como una herramienta que puede mejorar la motivación de los estudiantes y facilitar la comprensión de conceptos matemáticos complejos, contribuyendo así a un aprendizaje más significativo y autónomo.

Investigaciones relacionadas a la Formación de Profesores

Entre las investigaciones examinadas relacionadas a la formación de profesores de Educación Matemática, consideran que es importante identificar los conocimientos pedagógicos que tiene el profesor de secundaria al enseñar función cuadrática. Por eso mencionaremos las investigaciones de Adaobi, Bansilal (2018), presenta el conocimiento de los futuros profesores de matemáticas en la enseñanza de la función cuadrática; por otro lado los artículos de Cervantes, Berrio, Contreras y Martínez (2021), indica los Espacios de trabajos geométricos personal de profesores de matemáticas en formación, Asimismo en los artículos de Mutambara, Tendere y Chaqwiza (2020) presenta un estudio sobre la comprensión del concepto de función cuadrática por parte de los futuros profesores de Zimbabue.

A continuación, precisaremos las investigaciones antes mencionadas.

Adaobi, Bansilal (2018), examina las dificultades de 42 profesores en formación con funciones cuadráticas, destacando la importancia de mejorar la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales. Se enfoca en los desafíos que enfrentan al derivar ecuaciones cuadráticas utilizando diferentes métodos. Se subraya la necesidad de fortalecer la preparación en matemáticas para la enseñanza, especialmente en la comprensión profunda de los conceptos y en el conocimiento de contenido pedagógico. El estudio sugiere que los futuros docentes deberían recibir oportunidades más estructuradas para desarrollar su conocimiento pedagógico del contenido a nivel escolar como parte integral de su programa de formación docente.

Cervantes, Berrío, Contreras y Martínez (2021), analizan los espacios de trabajo geométrico de profesores de matemáticas en formación, específicamente en la articulación entre la geometría sintética y analítica. Se utilizó una metodología cualitativa, entrevistando a cuatro estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública del norte de Colombia. Se observaron dificultades cognitivas y epistemológicas en la resolución de problemas geométricos. Los participantes mostraron falencias en la aplicación de conceptos básicos y estrategias empíricas. Se recomienda profundizar en la teoría de los espacios de trabajo geométrico y desarrollar herramientas metodológicas para fortalecer la conexión entre las geometrías sintética y analítica.

Por otro lado, Mutambara, Tendere y Chagwiza (2020), examinan la comprensión conceptual del concepto de función cuadrática entre futuros docentes en colegios de educación en Zimbabwe. Se investiga cómo los estudiantes de educación comprenden y aplican conceptos matemáticos, centrándose en las funciones cuadráticas. El estudio adoptó el enfoque APOS (acción-proceso-objeto-esquema) para investigar su comprensión conceptual de estos conceptos. Los resultados revelaron que algunos estudiantes muestran una comprensión sólida de los conceptos, mientras que otros operan a un nivel más superficial, lo que puede afectar su capacidad para enseñar efectivamente. Se destaca la importancia de promover metodologías que fomenten la comprensión conceptual en la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, las investigaciones referidas, nos permitirán a continuación establecer la importancia y fundamentar la necesidad de realizar trabajos en esta línea de investigación.

1.2 Justificación

Basándonos en las investigaciones de referencia expuestas en la sección previa, se evidencia la relevancia de nuestra investigación al analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año de secundaria.

En este sentido, Espinoza y Verdugo (2022) respaldan la relación entre la actividad matemática realizada en el aula y el conocimiento que esta fomenta, proporcionando elementos que facilitan la comprensión de la labor docente. Ofrecen una visión completa sobre la importancia del conocimiento especializado del profesor, las representaciones de las funciones, la formación inicial del profesorado y las herramientas utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. Por su parte, Padilla y Acevedo (2022) caracterizan el conocimiento especializado del profesor de matemáticas usando el modelo MTSK como marco de referencia. Este modelo destaca por su enfoque en el estudio del conocimiento matemático y didáctico-pedagógico necesario para la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel educativo. Además, Reyes, Torres, Tumbaco y Zea (2023) subrayan la importancia de utilizar recursos educativos digitales en el tema de funciones cuadráticas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, creemos que es crucial examinar el conocimiento y enfoque que adopta un profesor de secundaria al enseñar un tema específico sobre funciones, centrándonos en la función cuadrática.

Esto se fundamenta en las investigaciones de Almonacid (2020) y Espinoza (2020), quienes aportan justificaciones valiosas para el diseño de un espacio de trabajo matemático idóneo para enseñar funciones cuadráticas. Ambos estudios subrayan la necesidad de capacitar a los profesores en el uso de estas tecnologías para maximizar su impacto positivo en el aula, asegurando así una enseñanza más eficaz y adaptada a las demandas del siglo XXI; mientras los artículos de Díaz, Aravena, Flores (2020) y Molina (2021), proporcionan fundamentos sólidos para el diseño de un espacio de trabajo matemático óptimo para la enseñanza de funciones cuadráticas. Ambos estudios apoyan la idea de que un espacio de trabajo matemático ideal debe incluir una sólida formación inicial del profesorado en tecnologías educativas y estrategias pedagógicas especializadas, así como el uso de recursos digitales interactivos. Esto asegurará que los profesores estén bien equipados para enseñar funciones cuadráticas de manera eficaz y atractiva, promoviendo una comprensión más profunda y un mayor interés en las matemáticas entre los estudiantes.

La implementación de un espacio de trabajo matemático óptimo para enseñar funciones cuadráticas debe considerar la incorporación de tecnologías digitales, la formación continua y especializada de los profesores, y el uso de estrategias pedagógicas innovadoras. Estudios como los de Anato (2022), Calderón, Franco y Alvarado (2018), Saravia, Neira y Flores (2021), Rodríguez y Jardey (2022), Solórzano y Rodríguez (2023) respaldan estas prácticas, demostrando que un enfoque integral y tecnológicamente enriquecido puede mejorar significativamente la comprensión y el interés de los estudiantes en las funciones cuadráticas.

Con base en las investigaciones anteriores se considera pertinente el uso del GeoGebra porque ofrece la posibilidad de asociar las representaciones de objetos geométricos y algebraicos para la enseñanza y aprendizaje. Dado que estas herramientas proporcionan valiosas oportunidades que conllevan a la alteración y adecuación del rol del profesor. La tecnología puede desempeñar ciertas funciones de su rol, pero no reemplazarlo por completo.

En otro sentido respecto a la formación de profesores, entre ellos tenemos Adaobi y Bansilal (2018); Cervantes, Berrio, Contreras y Martínez (2021) y Mutambaro, Tendere y Chagwiza (2020), justifican la necesidad de integrar tecnologías digitales en la enseñanza de las funciones cuadráticas y la formación continua de los profesores en estas herramientas. Estos estudios resaltan que un espacio de trabajo matemático ideal debe incluir el uso de herramientas digitales como GeoGebra para facilitar la visualización y manipulación de funciones cuadráticas, así como estrategias pedagógicas innovadoras que promuevan un aprendizaje activo y significativo. Además, la capacitación adecuada de los profesores en el uso de estas tecnologías es crucial para maximizar su impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

En general, las investigaciones anteriores resaltan la importancia de la teoría Espacio de Trabajo Matemático para analizar la práctica docente de profesores en formación inicial o continua, describiendo e interpretando cuál es el ETM personal o idóneo de los profesores.

En relación a la manera en que el profesor de matemáticas organiza su enseñanza de la función cuadrática en el aula, es importante examinar cómo estructura tanto los conocimientos como las tareas relacionadas con este tema. En este sentido, consideramos valioso utilizar elementos del concepto de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) introducido por Kuzniak (2018). El objetivo es comprender el entorno ideal de trabajo matemático del profesor, que determina la forma en que se aborda la enseñanza de este contenido específico. Además, resulta esencial tener en cuenta el ETM personal del profesor, el cual refleja sus preferencias y enfoques matemáticos durante la resolución de problemas.

En particular en la investigación realizada por (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016), proponen un enfoque innovador para comprender y mejorar la enseñanza de las matemáticas. Su investigación destaca la importancia de analizar cómo los profesores organizan y estructuran el ambiente de aprendizaje matemático en el aula. Sugieren que, al comprender mejor este entorno de trabajo, se puede mejorar la eficacia de la enseñanza y promover un aprendizaje más profundo y significativo para los estudiantes.

Además, es crucial reconocer la relevancia de los diversos planes de estudio para los docentes en formación inicial, los cuales están guiados por los lineamientos oficiales que se reflejan en el Plan de Estudios, tal como se muestra en la figura 1. Este plan de estudios sirve como estructura fundamental para todas las asignaturas, asegurando que los estudiantes de educación con especialización en matemáticas adquieran conocimientos fundamentales para su futura inserción en el ámbito laboral. Hoy en día, este entorno laboral es variado y multidisciplinario, por lo que es fundamental que los futuros docentes estén preparados con una base sólida en conceptos matemáticos básicos.

Figura 1. *Plan de Estudios: Matemática*

Ciclo 3

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180301	1	ÁLGEBRA I	4.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–
E180302	1	CÁLCULO I	4.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–
E180303	1	COMPLEMENTO DE MATEMÁTICA	3.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–

Ciclo 4

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180304	1	ALGEBRA II	4.0	O	–	E180301	ÁLGEBRA I	–
E180305	1	CÁLCULO II	4.0	O	–	E180302	CÁLCULO I	–
E180306	1	FÍSICA I	4.0	O	–	NR	NR	–

Ciclo 5

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180307	1	FÍSICA II	4.0	O	–	E180306	FÍSICA I	–
E180308	1	CÁLCULO III	4.0	O	–	E180305	CÁLCULO II	–
E180309	1	ÁLGEBRA III	4.0	O	–	E180304	ALGEBRA II	–

Fuente. Tomada de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Plan de Estudios 2018.

En contraste, las investigaciones llevadas a cabo por Henríquez y Espinoza (2018) exploran en detalle la interacción entre los conceptos de ETM (Entornos de Trabajo Matemático) y MTSK (Conocimiento Especializado del Contenido y Matemáticas para la Enseñanza), enfocándose en una conexión específica: la génesis semiótica y el dominio de los temas, respectivamente. Para alcanzar este objetivo, se ha examinado el análisis de la práctica pedagógica de un profesor en el aula y cómo este aplica su conocimiento en el proceso de enseñanza.

En este sentido Henríquez, Carrillo, Climent y Espinoza (2021), investigan la importancia del empleo de tareas y ejemplos por parte de los profesores en el aula para enseñar conceptos matemáticos. Su estudio analiza la labor matemática de los profesores, destacando el papel crucial de las tareas y ejemplos en la activación de diferentes génesis (semiótica, instrumental, discursiva) y planos verticales (representación, visualización, artefacto, construcción, referencial, prueba). Además, se examina la diferencia entre el trabajo matemático planificado y el implementado, especialmente en lo que respecta al diseño de tareas, enfatizando la necesidad de comprender y fomentar el uso efectivo de tareas y ejemplos por parte de los profesores en el entorno educativo.

Por consiguiente, al abordar la enseñanza del tema de función cuadrática en la práctica profesional de los docentes, revisaremos documentos que nos proporcionan respaldo, como el Diseño Curricular Nacional (DCN). Este documento establece el Perfil de Egreso de la Educación Básica, las competencias nacionales y sus progresiones a lo largo de la educación básica, así como los niveles esperados por ciclo, nivel y modalidades. Además, ofrece orientaciones para la evaluación formativa del estudiante y la diversificación curricular. Nos enfocaremos específicamente en el ciclo VII (cuarto año del nivel secundario) en el área de matemáticas. Luego, nos centraremos en el Diseño Curricular Básico Nacional, el cual se basa en una visión integral y común de las competencias profesionales necesarias para los docentes. Este diseño incluye la atención a la diversidad con el objetivo de desarrollar competencias personales y profesionales en los estudiantes, permitiéndoles desenvolverse de manera ética, pertinente, eficiente y eficaz en su práctica docente, como se muestra en detalle en la tabla 1.

Tabla 1

Diseño Curricular Nacional

Capacidades	Desempeños	Desempeños precisados
Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría, vértice y orientación, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.	• Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría, vértice y orientación • Interpreta soluciones en el contexto de la situación y establece conexiones entre las representaciones matemáticas establecidas.
Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales	Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas, y solucionar ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, usando productos notables o propiedades de las igualdades. Reconoce cómo afecta a una gráfica la variación de los coeficientes en una función cuadrática.	• Reconoce cómo afecta a una gráfica la variación de los coeficientes en una función cuadrática.

Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia	Plantea afirmaciones sobre el cambio que produce el signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica, relaciones entre coeficientes y variación en la gráfica, u otras relaciones que descubre. Justifica y comprueba la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos, propiedades matemáticas o razonamiento inductivo y deductivo.	● Plantea afirmaciones sobre el cambio que produce el signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica. ● Plantea afirmaciones sobre las relaciones entre coeficientes y variación en la gráfica, u otras relaciones que descubre en la función cuadrática.

Nota. Fuente: MINEDU (2016, pp. 161)

El Perfil de Egreso se correlaciona con los dominios y competencias definidos en el Marco de Buen Desempeño Docente (MBDD), tal como se ilustra en la figura 2. Este marco hace referencia a la participación educativa del profesor en la configuración de un entorno favorable para el aprendizaje, la comprensión de los contenidos, la motivación continua de los estudiantes, la aplicación de distintas estrategias metodológicas y de evaluación, así como la utilización de recursos didácticos apropiados y relevantes.

Figura 2. *Los cuatro dominios del Marco de Buen Desempeño Docente*

Fuente: Tomado del Ministerio de Educación. (2020). Marco de Buen Desempeño Docente.

Además, contamos con la Programación Anual, las Unidades de Aprendizaje y, por último, las Sesiones de Clases, las cuales son utilizadas para planificar y organizar de manera secuencial el desarrollo de las competencias y habilidades previstas en la unidad.

De igual manera, el Ministerio de Educación del Perú (2022) ha difundido una serie de cuadernos de trabajo dirigidos a estudiantes de educación secundaria, los cuales incluyen contenido sobre la función cuadrática. En el cuaderno de trabajo titulado "Fichas de matemática 4", específicamente en las páginas (23 - 32), se encuentran actividades relacionadas con la función cuadrática diseñadas para estudiantes del cuarto año de secundaria. Estas actividades requieren que los estudiantes apliquen fórmulas, lo cual implica recordar conceptos previamente enseñados.

La investigación señala que en la formación continua, aún hay demandas de enseñanza y aprendizaje en matemáticas, específicamente en la función cuadrática. Los docentes buscan mejorar, optimizar y actualizar sus habilidades profesionales, lo cual puede lograrse mediante una variedad de cursos especializados, como doctorados, maestrías, diplomados, seminarios y talleres, tanto presenciales como virtuales, ofrecidos por universidades públicas y privadas, dentro y fuera del país. Algunos de estos eventos son proporcionados gratuitamente por el Ministerio de Educación, como parte de un esfuerzo continuo de innovación pedagógica para mejorar la calidad educativa, como se detalla en la tabla 2.

Tabla 2

Malla Curricular matemática de Diplomado de Especialización

Etapa	Asignaturas		Horas	Créditos
Módulo 1	1.	Aritmética	64	8
	2.	Geometría Plana	64	
Módulo 2	3.	Conjuntos,	64	8
	4.	Números y Funciones		
	5.	Geometría Espacial	64	
Módulo 3	6.	Matemáticas Discretas	64	8
	7.	Trabajo Final	64	
	TOTAL		384	24

Nota. Fuente: Diplomatura de Especialización en Matemáticas para la Educación Secundaria (PUCP)

Dado lo mencionado anteriormente, el propósito de nuestro estudio es analizar el ETM Idóneo (Potencial - Actual) de un profesor de educación básica regular al impartir lecciones sobre la función cuadrática a estudiantes de cuarto año de secundaria. Nuestro objetivo es entender cómo el docente caracteriza la enseñanza, qué representaciones privilegia, qué herramientas emplea y otros aspectos relevantes en este contexto.

Para abordar este análisis, consideramos relevante basarnos en aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), según la propuesta de Kuzniak (2023). Por tal motivo, se presenta a continuación el fundamento teórico.

1.3 Espacio de Trabajo Matemático: Aspectos teóricos

Nuestro estudio tiene como objetivo llevar a cabo un análisis detallado del Espacio de Trabajo Matemático del profesor de Educación Básica Regular al enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año del nivel secundario. Así, la fundamentación teórica que respalda nuestra investigación se basa en el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), un modelo desarrollado por Kuzniak (2023).

A continuación, expondremos algunas reflexiones fundamentales. Kuzniak y Richard. (2023), examina en profundidad los espacios de trabajo matemático desde diversas perspectivas y puntos de vista, centrándose en la interacción entre los estudiantes, los materiales y el profesor. Se destaca la relevancia de los entornos de trabajo en matemáticas y se analiza cómo los espacios físicos y virtuales impactan en el proceso de aprendizaje matemático. Asimismo, se enfatiza la importancia de la organización y el diseño de estos espacios para estimular la participación activa y el pensamiento crítico de los estudiantes. Se exploran temas como la colaboración, la creatividad y la resolución de problemas en contextos matemáticos, resaltando la influencia positiva que un entorno adecuado puede tener en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Esta línea, Kuzniak, Montoya y Vivier (2019) abordan en su artículo la importancia de los espacios de trabajo matemático y su impacto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los autores resaltan la interacción entre los estudiantes, los materiales y el profesor como un elemento clave en el desarrollo de habilidades matemáticas. Además, enfatizan la relevancia de la organización y el diseño de los entornos de trabajo para fomentar la participación activa y el pensamiento crítico. Asimismo, exploran cómo la colaboración, la creatividad y la resolución de problemas se ven influenciadas por el entorno matemático en el que se desarrollan las actividades educativas.

Considerando lo expuesto previamente, es esencial considerar que la estructuración y realización de una tarea brinda la posibilidad de analizar la labor matemática realizada por las personas al enfrentarse a ejercicios, problemas o interrogantes que promuevan el crecimiento del entendimiento matemático implicado. Esto se adapta al contexto al que esté relacionada la tarea y a los enfoques que emergen o se buscan generar durante su resolución.

Por ende, la labor matemática se ve influenciada por el entorno y su interacción con las acciones llevadas a cabo por la persona. Por consiguiente, los investigadores se esfuerzan por establecer una relación entre aspectos epistemológicos, como el conocimiento matemático, y aspectos cognitivos, como las actividades realizadas por el individuo al abordar tareas o problemas. Ambos aspectos son fundamentales para la configuración del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual se explicará minuciosamente más adelante.

Espacio de Trabajo Matemático (ETM): De acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), el concepto de "espacio concebido de esta manera" hace referencia a un entorno planificado y ordenado que facilita la labor de las personas al enfrentar desafíos matemáticos (p.6). Por lo tanto, se entiende el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) como un entorno estructurado que permite a los individuos abordar problemas matemáticos, adaptándose al ámbito matemático correspondiente. Según la perspectiva presentada por Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), estos individuos pueden ser expertos ideales (profesionales matemáticos), docentes o incluso estudiantes. Además, señalan que los problemas matemáticos que las personas resuelven no son parte del ETM, pero deben considerarse como su propósito fundamental, ya que el ETM sirve como el medio para resolver los problemas, actuando como un facilitador al estructurar el ETM tanto a nivel institucional como personal.

Por otro lado, sostienen que en el ETM se debe establecer el principio de articulación entre el plano epistemológico y el cognitivo como resultado del trabajo matemático, y estos aspectos se detallan a continuación.

Plano epistemológico y plano cognitivo

Kuzniak et al. (2022) afirma que la comprensión de un conocimiento por parte de un individuo se logra al interactuar con dos dimensiones, una de carácter epistemológico y otra de carácter cognitivo. La primera está estrechamente vinculada a los contenidos matemáticos del tema en estudio, mientras que la segunda se relaciona con los procesos mentales que el sujeto lleva a cabo al resolver problemas matemáticos.

El plano epistemológico: Facilita la organización matemática del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) al ubicar los objetos y/o herramientas que permiten llevar a cabo el trabajo matemático. Esta dimensión se compone de tres elementos.

Signo o representamen: Se entiende que un signo puede adoptar diversas formas, como dibujos geométricos, símbolos, expresiones algebraicas, gráficos, entre otras. Además, desde una perspectiva matemática que se fundamenta en representaciones semióticas, estos elementos pueden ser estructurados dentro de los registros de representación semiótica propuestos por Duval (como se menciona en Kuzniak et al., 2016).

Los artefactos: Colección de sistemas simbólicos que experimentarán cambios mediante la intervención humana, estas pueden incluir instrumentos de dibujo o tecnología digital.

Referencial: Conjunto de características, teoremas, definiciones y axiomas relacionados con un objeto matemático específico, que posibilitan la interpretación de los contenidos de las otras componentes durante la ejecución de tareas matemáticas.

El plano cognitivo: Dado que las matemáticas son una actividad realizada por seres humanos, resulta crucial comprender cómo los estudiantes utilizan, interactúan y se apropian de los conocimientos matemáticos. Por esta razón, Kuzniak (2023) sugiere la inclusión de un segundo plano y la articulación cognitiva de las componentes del Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

La visualización: Vinculada a la interpretación de signos y a la creación de representaciones de objetos y sus interconexiones. En otras palabras, implica la representación semiótica de un concepto matemático, la expresión externa de estos objetos que permite su comprensión a través de la percepción de estímulos.

La construcción: Está relacionada con las acciones que se desencadenan mediante la utilización de herramientas (software), acciones que resultan en producciones tangibles como figuras, gráficos o los resultados derivados de cálculos vinculados a algoritmos.

El proceso de prueba: Se requiere la generación de argumentos y justificaciones utilizando marcos teóricos, según la perspectiva de Kuzniak et al. (2022), que se fundamenta en un discurso deductivo y lógico. Estos argumentos deben sustentarse en afirmaciones con un estatus teórico bien definido. En consecuencia, los argumentos organizados de manera deductiva pueden incluir definiciones, hipótesis, conjeturas o contraejemplos.

Las Génesis del Espacio de Trabajo Matemático

Según Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), se puede operativamente conectar el plano epistemológico con el plano cognitivo a través de las génesis que surgen como resultado del trabajo matemático. Estas génesis articulan un proceso del plano cognitivo con un componente del plano epistemológico, y así se configura el Espacio de Trabajo Matemático (ETM). En este contexto, los autores identifican tres tipos de génesis: la génesis semiótica, relacionada con la visualización y representación; la génesis instrumental, asociada con la construcción y uso de artefactos; y finalmente, la génesis discursiva, vinculada con la argumentación y el referencial. Las génesis que articulan los dos planos son:

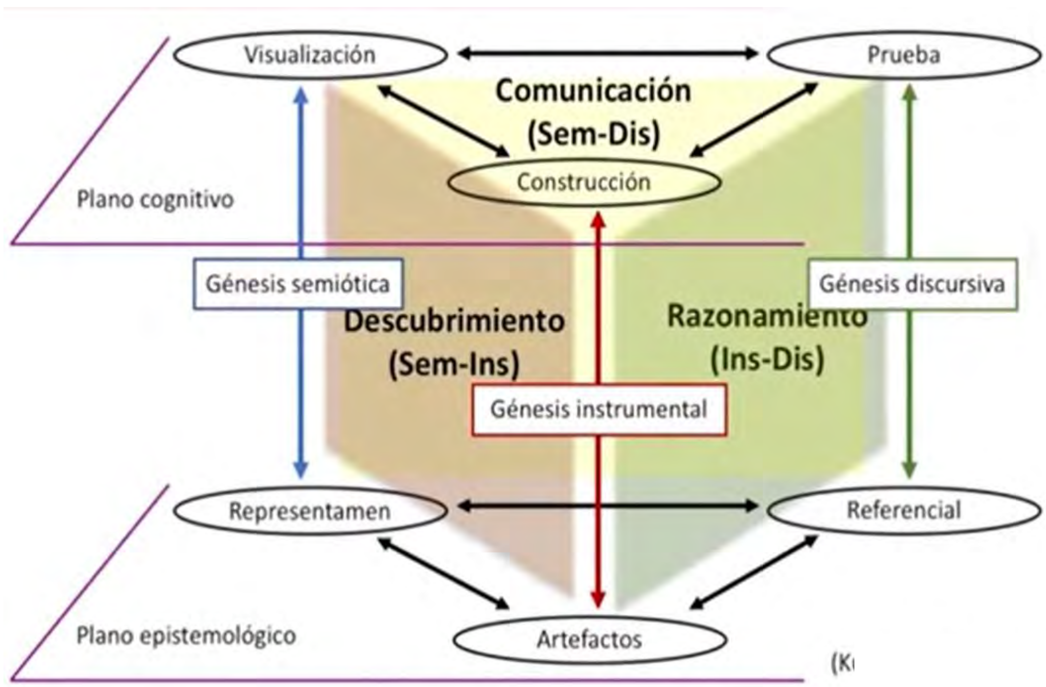
Génesis Semiótica: Relaciona los signos y el representamen con la visualización, explicando la conexión dialéctica entre las perspectivas sintácticas y semánticas de los objetos matemáticos que son representados y organizados por sistemas semióticos. Kuzniak et al. (2016) plantean un proceso circular de vaivén entre el Representamen y el proceso de visualización. En este sentido, se trata de un proceso inicial de decodificación o interpretación, y en sentido opuesto, un proceso subsecuente de codificación.

Génesis Instrumental: Establece las conexiones entre los artefactos y los procedimientos de construcción que contribuyen a la ejecución de tareas matemáticas. La perspectiva ascendente (instrumentación) detalla las acciones mediante las cuales el usuario adquiere las diversas técnicas vinculadas al artefacto. En cambio, la perspectiva descendente (instrumentalización) se relaciona con la selección adecuada del artefacto necesario para llevar a cabo las acciones planificadas.

Génesis Discursiva: Este es el procedimiento mediante el cual las propiedades y los resultados organizados en el referencial se conectan para estar disponibles en el razonamiento matemático y en las validaciones discursivas, superando así la mera verificación gráfica, empírica o instrumental. La génesis ascendente (deducción) se relaciona con un discurso deductivo de prueba respaldado por estructuras presentes en el referencial. En cambio, la perspectiva descendente (inductiva) identifica las propiedades que deben incorporarse al referencial, posiblemente sugeridas por enfoques instrumentales, computacionales o visuales.

A continuación, se presenta un esquema que facilita la comprensión de la interrelación entre las secciones del plano epistemológico y cognitivo, así como la relación que surge entre los componentes de ambos planos, dando origen a la génesis semiótica, instrumental y discursiva, tal como se muestra en la figura 3.

Figura 3. *Planos Epistemológicos y Cognitivos del ETM*



Fuente. Tomado de Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier (2016, p.246)

Los planos verticales y las circulaciones en el ETM

La comprensión de las diversas génesis y de los tres planos de interacción entre estas génesis (Semiótico - Instrumental, Instrumental – Discursivo y Semiótico – Discursivo) se vincula con aspectos metodológicos y análisis más detallados del trabajo matemático. Estos análisis buscan abordar el avance en el aprendizaje de los estudiantes y en la práctica docente. Diversos autores (Kuzniak et al., 2016, Gómez-Chacón et al., 2016 y Kuzniak, 2022) detallan los tres planos verticales:

Plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins]): Establece una conexión entre la génesis semiótica e instrumental, dando importancia a la identificación y exploración de los objetos, fomentando una habilidad asociada al descubrimiento. En esta dimensión, se pueden identificar dos enfoques de trabajo: uno más inclinado hacia la generación de resultados (como figuras o gráficos) que satisfacen ciertas condiciones, y otro centrado en la interpretación de los datos proporcionados por los artefactos.

Plano Instrumental-Discursivo ([Ins-Dis]): La conexión entre la génesis instrumental y discursiva ocurre cuando la creación de una figura o gráfico se fundamenta en una técnica sistemática (posiblemente implementada en un software) y en un algoritmo de construcción vinculado a dicha técnica. Por ejemplo, si se extraen conclusiones a partir de datos proporcionados por instrumentos, se denomina una prueba experimental. De manera diferente, si la prueba o demostración se apoya en un marco teórico, los instrumentos se utilizan para ilustrar o construir configuraciones geométricas.

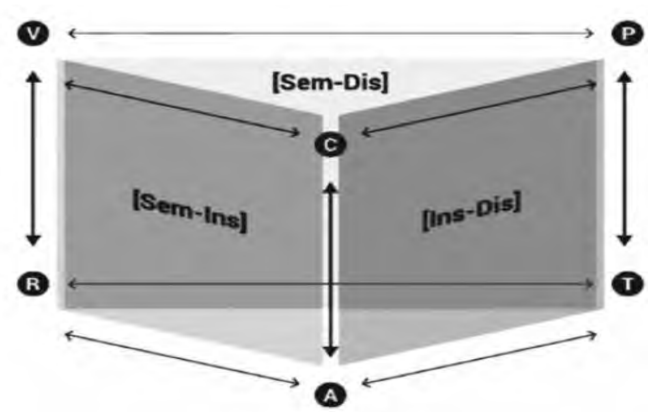
Plano Semiótico – Discursivo ([Sem-Dis]): Las evaluaciones más comunes en el ámbito de las matemáticas escolares dependen fuertemente de la estrecha relación entre las génesis semióticas y discursivas. En este contexto, existen dos enfoques posibles:

a) Cuando se enfoca en el aspecto semiótico, las transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo

b) Si el enfoque se dirige hacia una prueba o demostración, el razonamiento hipotético y deductivo se apoya en propiedades y signos, y la visualización desempeña un papel heurístico.

En la figura 4 se presenta un esquema que permite visualizar los planos Semiótico – Instrumental, Instrumental – Discursivo y Semiótico – Discursivo como herramientas para la interacción entre las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

Figura 4. *Planos Verticales del ETM*



Fuente: Kuzniak, Nechache, Philippe y Richard (2022, p. 11)

Tipos de Espacio de Trabajo Matemático

Según Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Philippe (2022), sostienen que la naturaleza del trabajo matemático está condicionada por quienes lo llevan a cabo, considerando su posición en la institución educativa, especialmente su papel en la formulación del plan de estudios y su ejecución. En este sentido, identifican tres categorías de trabajo matemático: El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de referencia, el ETM idóneo y el ETM personal.

En nuestra investigación se trabajará con el ETM idóneo y ETM personal debido a su capacidad para adaptarse a las necesidades y características individuales de los profesores.
Este entorno se ajusta a cada individuo, permitiendo que se sientan cómodos y capaces de abordar los problemas matemáticos de manera efectiva. Al ser un espacio diseñado específicamente para facilitar la resolución de problemas matemáticos, el ETM se convierte en un medio ideal que se ajusta al dominio matemático correspondiente, brindando las condiciones óptimas para que cada persona pueda desarrollar su labor matemática de manera exitosa.

ETM de referencia.

Según Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), un paradigma se establece cuando una comunidad de individuos llega a un acuerdo sobre cómo formular problemas y organizar sus soluciones, dando prioridad a ciertas herramientas o modos de pensamiento. En relación con esto, Kuzniak y Richard coinciden en que el espacio de trabajo definido por esta comunidad como 'paradigmático' se denomina Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de referencia (2014, p.9). Generalmente, es establecida por individuos u entidades encargadas de la institución educativa y se caracteriza por su relación con el conocimiento, idealmente siguiendo criterios matemáticos. En otras palabras, se trata del espacio paradigmático definido por la comunidad, donde un conjunto de personas acuerda abordar ciertos problemas con soluciones específicas, utilizando determinadas herramientas y adoptando un modo específico de pensamiento.

El ETM Idóneo.

Se alude a este estado intermedio de transmisión y mediación del conocimiento, donde surge una tensión entre las expectativas del profesor y la redefinición de las tareas y del problema para promover el avance en el trabajo individual de los alumnos. Por lo tanto, Henríquez-Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) indican que la finalidad de los estudios sobre Espacios de Trabajo Matemático (ETM) idóneos es investigar cómo se diseñan, ajustan y desarrollan las actividades matemáticas en un entorno escolar e institucional específico. Estos estudios se fundamentan en el análisis de la organización de los componentes y procesos cognitivos del ETM en función de los diversos contenidos y dominios matemáticos enseñados.

Se plantea la importancia de considerar dos estados del Espacio de Trabajo Matemático (ETM): uno potencial, que refleja las expectativas del profesor, y otro actual o efectivo, que exhibe el trabajo llevado a cabo en el aula.

El ETM personal.

Hace referencia a las acciones emprendidas por los individuos al abordar y gestionar la resolución de problemas dentro de su propio Espacio de Trabajo Matemático personal. Es crucial diferenciar entre el ETM personal del estudiante y el ETM del profesor.

En relación al Espacio de Trabajo Matemático (ETM) personal del profesor, los autores indican que está influenciado por sus experiencias, que se manifiestan en sus preferencias matemáticas al enfrentarse a problemas tanto dentro como fuera del aula. Esto es una razón por la cual Kuzniak y Richard (2014) sugieren que el profesor debe ajustar constantemente su ETM idóneo, seleccionando con cuidado las actividades o el trabajo matemático que espera que sus estudiantes realicen. Esto se debe a que las prácticas pasadas del profesor están condicionadas por un determinado ETM personal del estudiante, el cual puede no adaptarse siempre a los estudiantes actuales.

En este sentido, los autores afirman que "estas elecciones y la gestión de las actividades dependerán en gran medida del ETM personal del profesor" (Kuzniak y Richard, 2016, p.10). Con respecto al ETM personal del estudiante, según Kuzniak y Richard (2014, p.10), "cuando se presenta un problema a un alumno, el tratamiento matemático que este le da lo conduce al ETM personal de dicho alumno". Por lo tanto, un estudiante activa su ETM personal al aplicar sus habilidades cognitivas y conocimientos matemáticos para resolver un problema o tarea específica. Además, los autores destacan que el desarrollo de este espacio de trabajo está vinculado al ETM idóneo propuesto, ya que este último compromete al estudiante en la resolución del problema. En este sentido, el desarrollo del ETM personal de un estudiante depende de las tareas seleccionadas en el ETM idóneo estructurado por el profesor.

Paradigmas en el dominio del análisis

En el contexto de los paradigmas de análisis, la investigación de Montoya y Vivier (2016) sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en el dominio del Análisis, así como los paradigmas que surgen en este ámbito, propone un modelo de ETM específico para el análisis real. Los autores describen y presentan los paradigmas generales, tales como el paradigma de análisis estándar, relacionado con los números reales, y el paradigma de análisis no estándar, vinculado a cantidades infinitesimales. Asimismo, explican que ambos paradigmas generales se encuentran en el ETM de referencia, pero el predominante en la educación matemática actual es el paradigma del análisis estándar.

Por esta razón, se considera esencial detallar los paradigmas propuestos para el análisis estándar en la investigación de Montoya y Vivier (2016), los cuales se utilizarán en nuestra investigación, y se describen a continuación:

- El análisis geométrico/aritmético (AG): En este paradigma se permiten interpretaciones y suposiciones implícitas que se originan a partir de la geometría, cálculos aritméticos o del mundo real.
- El análisis del Cálculo (AC): En este paradigma, las reglas del cálculo, como las del cálculo diferencial o integral, son definidas de manera explícita y se aplican sin la necesidad de reflexionar sobre la existencia y la naturaleza de los objetos introducidos. Aquí, los cálculos se realizan de manera algorítmica para expresiones formales con una función representativa, sin reflexionar sobre la naturaleza del objeto matemático.
- El análisis real (AR): Este paradigma implica trabajos que abordan la aproximación y vecindad, incluso en términos topológicos.

La naturaleza de los objetos difiere entre los paradigmas, siendo explícita en AR e implícita en AC y AG.

Por lo expuesto, en nuestra investigación nos proponemos enfocarnos en el ETM idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del cuarto año del nivel secundaria.

A continuación, presentamos el objetivo general del presente estudio.

1.4 Pregunta y Objetivos de la investigación

Por tanto, de acuerdo a las investigaciones de referencia a la problemática establecida en la investigación, se formula la siguiente pregunta que direcciona nuestra investigación:

¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del cuarto grado del nivel secundario?

Objetivo General:

De la formulación anterior, se desprende el siguiente objetivo general de la investigación:

Analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del cuarto año del nivel secundario.

Objetivo Específicos:

Para lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

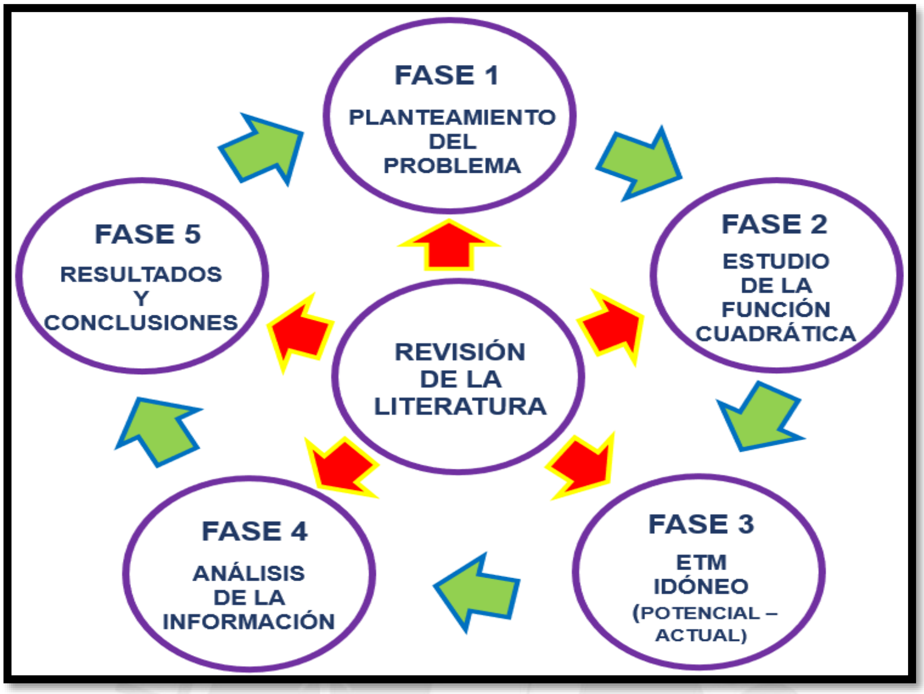
1. Caracterizar el espacio de trabajo matemático potencial del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática.
2. Caracterizar el espacio de trabajo matemático actual del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática.

A continuación, presentamos los aspectos metodológicos de la investigación, así como también los procedimientos a seguir.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

Hernández, Fernández y Baptista (2018) explican que la investigación cualitativa parte de una realidad específica y particular inmersa en un entorno social. En este enfoque, el investigador busca realizar generalizaciones a través del análisis e interpretación de los comportamientos de los sujetos dentro de dicho entorno. En este tipo de estudio, la teoría y los antecedentes del fenómeno estudiado sirven como un marco de referencia y no como parámetros que deben regir la investigación. Considerando la perspectiva de Hernández et al. (2018) y dado que el objetivo de esta investigación es analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar funciones cuadráticas a estudiantes de cuarto año del nivel secundario, se opta por una metodología cualitativa. Basándonos en esto, en el estudio exponemos las siguientes etapas en la figura 5.

Figura 5. *Fases de la Metodología*



Fuente. Adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2014, p,17)

Para nuestro estudio en la parte experimental (fase 3 y 4) nos hemos basado en Henríquez C. (2021) puesto que nos parece más apropiado para esta investigación debido a que los eventos se desarrollan en contextos escolares, y pretende aportar una descripción profunda del trabajo matemático de un profesor, cuya finalidad es que los participantes planteen mejoras en torno a tareas y ejemplos para el aula, en relación con un contenido seleccionado.

Para nuestros análisis de las tres etapas se utilizó un protocolo con descriptores relacionados con criterios que se refieren a las génesis y sus componentes respectivas (figura 6). Luego, la información obtenida nos permitió reconocer los planos verticales activados en nuestro trabajo.

Figura 6. *Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM*

Criterio	*Componentes*	*Descriptor*
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
		El proceso de visualización considera dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no-icónica).
Génesis instrumental	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual).

Fuente: Adaptado de Henríquez, Carrillo, Ponce y Espinoza (2021)

A continuación, se detallan las fases del procedimiento metodológico seguido en esta investigación:

Fase 1: Planteamiento del problema. Esta fase está asociada al capítulo I de nuestro estudio y da inicio al proceso y contiene las investigaciones de referencia que dan sustento al desarrollo de nuestra tesis; la justificación que permite delimitar la pertinencia de nuestro trabajo de investigación; los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos de nuestro trabajo de investigación; además de los aspectos metodológicos y procedimientos, aquí señalados.

Cabe aclarar que, en la presente tesis a diferencia de los autores, la revisión de la literatura se encuentra inmersa en el planteamiento del problema de investigación. Sin embargo, como lo mencionan Hernández et al. (2018), esta revisión puede complementarse en cualquier fase del proceso y apoyar desde el planteamiento del problema hasta las conclusiones.

Fase 2: Estudio de la Función Cuadrática. Esta fase está asociada al capítulo II de la tesis y está constituida por el abordaje a los aspectos histórico – epistemológicos, matemáticos y didácticos de la función cuadrática. Para ello, se revisa el libro de actividades del cuarto año de secundaria del Ministerio de Educación (MINEDU), en donde se aborda el estudio de la función cuadrática, todo esto vinculado a los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que son empleados en este trabajo de investigación.

Fase 3: ETM Idóneo. Está asociada con la primera parte del capítulo III de esta investigación y en ella son presentados, los sujetos de investigación, es decir los dos docentes en ejercicio que imparten el curso de matemática al enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año del nivel secundaria y la investigadora que se encargará de recolectar documentos (sesión de aprendizaje, libro de actividades). Se ha elaborado como instrumento una guía de preguntas de tipo semiestructurado para la recolección de información, utilizando como técnica la entrevista que se realizará a los dos docentes donde se presenta el ETM Idóneo Potencial antes de entrar al aula en la planificación de la sesión de aprendizaje, seleccionar las actividades del libro del Ministerio de Educación (Ficha de matemática 4°) y uso del software GeoGebra.

Para la segunda parte de la fase 3, se ha elaborado como instrumento una Ficha de Observación (Lista de cotejo), utilizando como técnica la observación donde se presenta el ETM Idóneo Actual en el aula durante el proceso de aprendizaje. Además, para registrar tal información, contaremos con una cámara de audio y video, así como el material de curso utilizado por el profesor.

Fase 4: Análisis de la información. Esta fase consiste en la aplicación de los instrumentos elaborados por la investigadora y se llevan a cabo el registro y recojo de la información. En nuestra investigación, en principio, se explica cómo se va a llevar a cabo la investigación con los profesores en ejercicio del nivel secundario. Luego, se aplican los instrumentos elaborados y se realiza el registro de las observaciones de la sesión de aprendizaje realizada. Luego se hará la transcripción de los datos. Posteriormente, se lleva a cabo el análisis de la información, en esta parte se realiza la triangulación de la información, el cual consiste en contrastar los datos recolectados con los instrumentos de nuestra investigación, a partir de ello, se analiza e interpreta la información obtenida en base al marco teórico definido en nuestra investigación, que son aspectos del Espacio de Trabajo Matemático.

Fase 5: Resultados y Conclusiones. Las conclusiones generales, están organizadas de acuerdo con el objetivo general de esta investigación y al marco teórico seleccionado, en este caso el ETM, para esto se analiza cada uno de los objetivos específicos para lograr saber si el objetivo general fue alcanzado de acuerdo con los resultados esperados. Con relación a las perspectivas futuras, se espera que esta investigación pueda posibilitar que, a partir de esta investigación, surjan nuevos trabajos relacionados, para que futuros investigadores puedan utilizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores en ejercicio presentada en esta investigación. Tomando como fundamento a Hernández et al. (2014), las fases del procedimiento metodológico de nuestro trabajo de investigación se describen en las tablas 3, 4 y 5.

Tabla 3

Fases del procedimiento metodológico (Fase 1 y 2)

Fases	Contenidos	Descripción
Fase 1	Planteamiento del problema	Delimitar el problema a partir de las investigaciones de referencia. Identificar los elementos teóricos que sustentan la investigación.
Fase 2	Estudio de la función cuadrática	Realizar estudios de los aspectos histórico - epistemológicos, matemáticos y didácticos del objeto de estudio (función cuadrática).

Nota. Adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2018)

Tabla 4

Parte experimental: Fase 3 y 4

Fases	Contenido	Sujetos	Técnicas	Instrumento	Descripción
Fase 3	ETM idóneo - Potencial	Profesor e Investigadora	Entrevista	Guía de preguntas de tipo semiestructurada	▪ Planificación de la sesión de aprendizaje. ▪ Seleccionar actividades del Libro del Ministerio de Educación (Ficha de Matemática 4°).

					▪ Uso del Software GeoGebra.
Fase 3	ETM idóneo - Actual	Profesor e Investigadora	Observación	Ficha de Observación (Lista de cotejo) Grabación	▪ Análisis de trabajo del profesor en el aula.
Fase 4	Análisis de la información	Investigadora	Triangulación	Software Atlas. ti	▪ Se realiza la triangulación de la información. ▪ Se analiza e interpreta la información obtenida en base al marco teórico definido en nuestra investigación.

Nota. Adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2018)

Tabla 5

Resultados y conclusiones: Fase 5

Fases	Contenidos	Descripción
Fase 5	Resultados y conclusiones	▪ Redactar resultados. ▪ Establecer conclusiones según el análisis. ▪ Se propondrá algunas sugerencias.

Nota. Adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2014)

En el siguiente capítulo, se presenta aspectos matemáticos del objeto función cuadrática, es decir, aspectos históricos, epistemológicos para la enseñanza de este objeto matemático.

Capítulo II: Enseñanza de la Función Cuadrática

En este capítulo presentamos algunos aspectos del objeto función cuadrática, donde se define desde su forma canónica, se listan sus propiedades, y desde el nivel didáctico, en el que se evidencia la forma de presentar la función cuadrática en la Educación Básica Regular.

2.1 Aspectos matemáticos e históricos de la función cuadrática

La revisión histórica realizada por Ruiz Higueras (1998), mencionado por Lávaque, Méndez y Villarroel (2006), identifica y estructura las diversas concepciones de función a lo largo de diferentes periodos de evolución:

La función como variación

Los babilonios desarrollaron una comprensión intuitiva del concepto de función al buscar regularidades en las tabulaciones de fenómenos naturales. Su enfoque consistía en aritmetizar y generalizar las observaciones realizadas, estableciendo relaciones entre las causas y efectos de varios fenómenos cambiantes, como calor, luz, distancia y velocidad. Aunque demostraron un instinto de funcionalidad al asociar elementos de dos conjuntos en las tablas de cálculo que crearon, es importante destacar que existe una considerable brecha entre este instinto y la completa comprensión del concepto de función, según Ruiz (1998).

La función como proporción

Aunque las ideas de cambio y cantidad variable formaban parte del pensamiento griego, se concebía el cambio y el movimiento como elementos ajenos a las Matemáticas. La percepción de los entes matemáticos como estáticos llevó a los matemáticos de esa época a expresarse en términos de incógnitas e indeterminadas en lugar de variables. Según la perspectiva de Ruiz Higueras (1998), citado por Lávaque et al. (2006), este enfoque condujo a la formulación de proporciones y ecuaciones en lugar de funciones.

En ese contexto, la búsqueda de proporcionalidad resaltaba como la conexión preferida entre magnitudes variables y la variabilidad de las magnitudes físicas, las cuales se percibían como diferentes de las Matemáticas. Debido a la relevancia geométrica que los griegos asignaban a las magnitudes variables, solo establecían proporciones de manera homogénea, realizando comparaciones entre longitudes con longitudes, áreas con áreas y volúmenes con volúmenes.

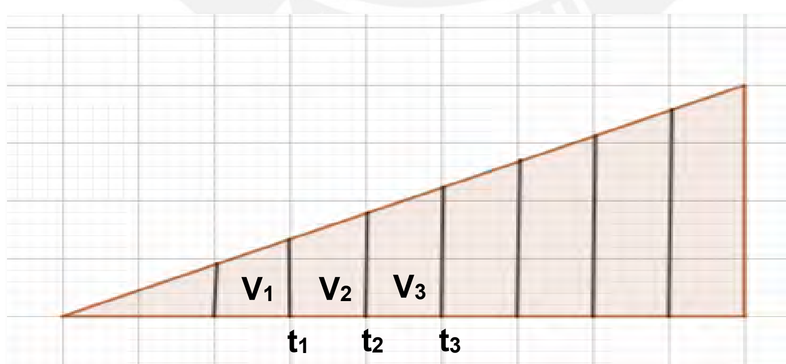
"La uniformidad que implicaba siempre comparar magnitudes de la misma naturaleza pudo representar un obstáculo para el desarrollo de la noción de función, ya que dificultaba encontrar de manera significativa dependencias entre variables de diferentes magnitudes, que son el origen de toda relación funcional" (René de Cotret, 1985). Las perspectivas menos alentadoras y positivas en la evolución del concepto de función incluyeron "la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la marcada disociación en el pensamiento entre número y magnitud" (René de Cotret, 1985 citado en Lávaque et al., 2006).

La función como gráfica

En la Edad Media, se intentó abordar de manera cuantitativa y racional la explicación de fenómenos naturales mediante procesos de abstracción, pero estos intentos se vieron limitados por la separación entre número y magnitud. Durante este período, las escuelas de Oxford y París fueron centros clave de desarrollo. Nicolás Oresme, un destacado representante de la escuela francesa en el siglo XIV, empleó el grafismo como método para representar y describir cambios. Utilizó segmentos para expresar la intensidad de una característica específica de una magnitud continua en relación con otra magnitud continua. En este enfoque, los gráficos se utilizaban como modelos geométricos de relaciones, priorizando lo cualitativo sobre lo cuantitativo, ya que se consideraba que los gráficos representaban relaciones de manera geométrica y no necesariamente con precisión matemática. Oresme trazó segmentos horizontales y marcó puntos en ellos para representar instantes sucesivos en intervalos iguales.

Para cada punto en el tiempo, dibujó un segmento perpendicular cuya longitud indicaba la velocidad en ese instante. La representación de la dependencia se realizaba de manera global, como se ilustra en la figura 7, resaltando la concepción de función principalmente como una gráfica (Lávaque et al., 2006).

Figura 7. *Gráfico Explicativo Diferencia entre Velocidades de Oresme*



Fuente. Tomado de Rendón – Mesa (2009)

Los principios de la noción de función son evidentes, ya que, según René de Cotret (1985, citado en Lávaque et al., 2006), "Oresme ha esculpido el árbol del bosque que posteriormente permitiría a Descartes y a Galileo construir la rueda". Durante los siglos XV y XVI, se realizan contribuciones al concepto de función al establecer las bases de la simbología algebraica. Esta simbología posibilita una manipulación práctica y eficiente al diferenciar entre la "variable" de una función y la "incógnita" de una ecuación.

La función como curva

A principios del siglo XVII, Fermat y Descartes exploraron el ámbito de la representación analítica al fusionar los problemas de dos disciplinas matemáticas: la Geometría y el Álgebra. Se concebía la idea de que una ecuación en x e y proporcionaba un medio para establecer una dependencia entre dos cantidades, permitiendo así determinar los valores de una variable en función de los valores dados de la otra variable. La evolución de la noción de función experimentó un segundo retraso cuando se asoció la función como curva con la trayectoria de puntos en movimiento, en lugar de vincularla con conjuntos de puntos que cumplen condiciones en una relación de dependencia (Lávaque et al., 2006).

La función como expresión analítica

Esta perspectiva surgió en el siglo XVII y fue continuada por Euler y Lagrange en el siglo XVIII. En ese período, se creía que solo las funciones que podían describirse mediante expresiones algebraicas eran objeto de estudio. La concepción de asignar variación a las "cantidades" prevalecía, y surgió la noción de funciones no continuas. Leibnitz introdujo por primera vez el término "función" para referirse a un término general que representaba cantidades arbitrarias dependientes de una variable, lo que condujo a su uso en el contexto de expresiones analíticas.

En el siglo XVIII, Bernoulli y Euler consideraron la función como una expresión analítica. Bernoulli propuso el uso de la letra f para la característica de una función, escribiéndola como $\ll f\ x \gg$.

Posteriormente, en el mismo siglo, Euler adoptó la notación $f(x)$, reemplazando el término "cantidad" por "expresión analítica": "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea de esta cantidad y de números o cantidades constantes". En este período, predominó la perspectiva formal más que la relación entre variables. Se entendía que una función era una combinación de operaciones dada por una expresión analítica (Ruiz Higueras, 1998, citado en Lávaque et al., 2006).

La función como correspondencia arbitraria: aplicación

Esta concepción de la función surgió en el siglo XVIII con los últimos trabajos de Euler sobre "funciones arbitrarias" y continuó en el siglo XIX con las contribuciones de Fourier, Cauchy, Dedekind y otros en el ámbito de los números reales. A partir del problema de la cuerda vibrante planteado por Euler, se desarrolló la noción de correspondencia general, que establece que "una cantidad es función de otra u otras", incluso si no se conoce la serie de operaciones que relacionan una con otra. Euler, posteriormente, amplió su consideración más allá de las funciones analíticas, explorando funciones arbitrarias, especiales, no derivables y con picos, a las que denomino discontinuas o mixtas.

Estas funciones arbitrarias se definían como aquellas en las cuales, si x representa una cantidad variable, todas las demás cantidades dependientes de x, de cualquier manera, que sea, son funciones de x.

El término "función" se asocia con la expresión $f(x)$ y más tarde se representa como $f : X \rightarrow Y$ o $x \rightarrow f(x)$. Aunque los ejes cartesianos continuaron utilizándose, surgieron nuevas representaciones como los diagramas de Venn en este periodo.

La función como terna

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, se asignó el término "función" f: (A, B, G), donde A, B, G son conjuntos sujetos a las condiciones $G \subset A$ x B, $x \in A$, $\wedge$ $y \in B/(x$, $y) \in G$ (Lávaque et al., 2006).

Por otro lado, Mesa y Villa-Ochoa (2008) destacan que elementos como el estudio de ecuaciones, cónicas, cinemática y funciones históricamente contribuyeron a establecer la noción de función cuadrática. Estos elementos son cruciales al considerar la elaboración de una propuesta didáctica sobre el concepto de función cuadrática.

Los autores señalan que el concepto de función cuadrática ha estado históricamente vinculado a la modelación de fenómenos de variación y cambio. Su análisis histórico muestra que lo "cuadrático" implica una sinergia entre la Geometría euclidiana, las cónicas y la Geometría analítica, centrada en el estudio del movimiento. Según los investigadores, es valioso rescatar parte de esta sinergia en el entorno educativo para presentar una comprensión de lo cuadrático desde diversas interpretaciones y contextos.

Finalmente, Hitt (2002, p.75) (citado en Huapaya, 2012) resume las definiciones más comunes presentadas en los libros de texto del siglo XX:

- Función en términos de variable:

  Una función es una variable relacionada dependientemente con otra variable, tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.

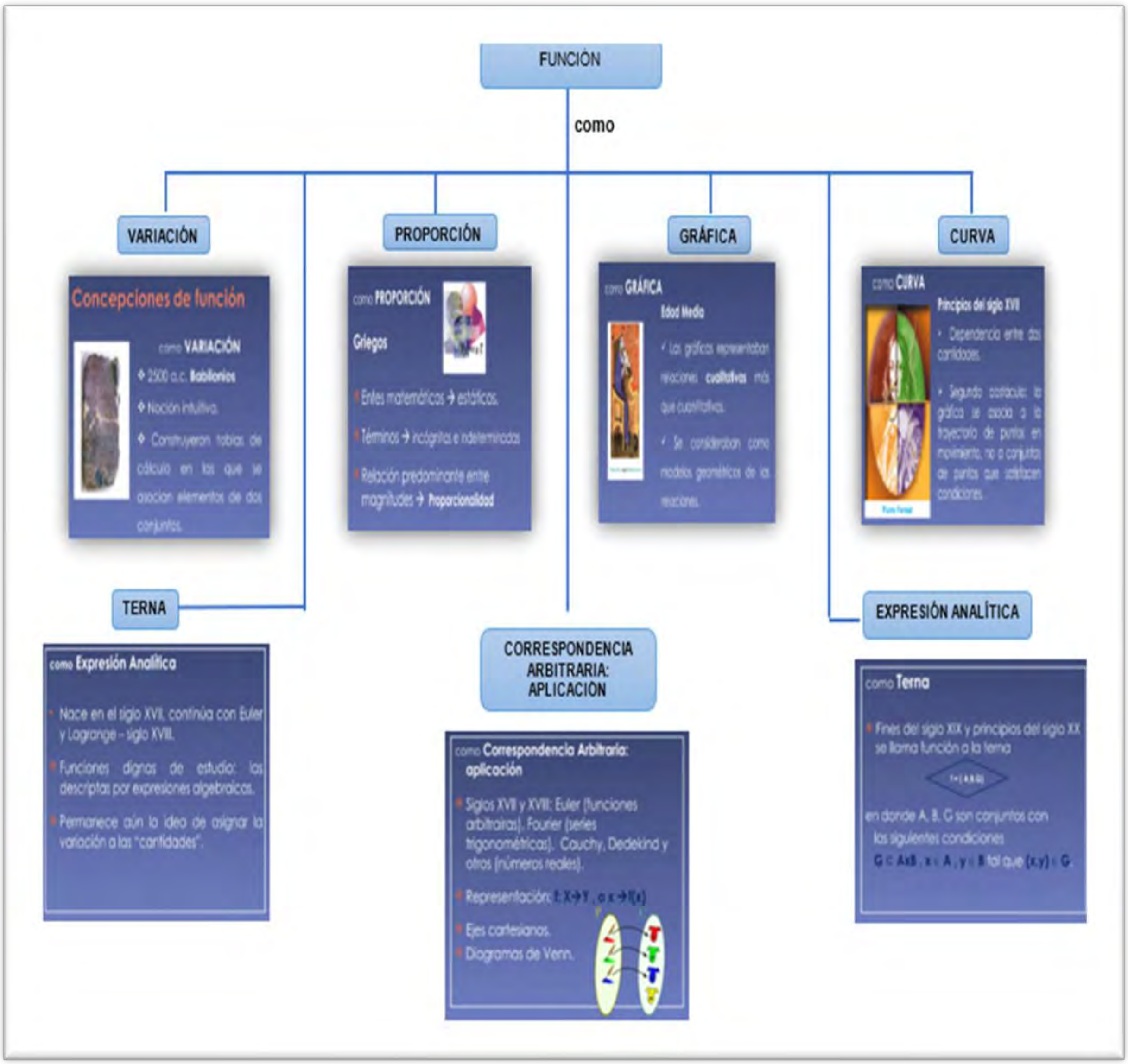
• Función en términos de conjunto de parejas ordenadas:

Una función es un conjunto de pares ordenados, jamás dos de las cuales tienen la misma primera componente.

• Función en términos de regla de correspondencia:

Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x de cierto subconjunto D del conjunto A un elemento único $f(x)$ de B. Como se muestra en la figura 8.

Figura 8. *Aspectos matemáticos e históricos de la de la evolución histórica de la función.*



Fuente. Adaptado de Ruiz Higueras (1998); citado en Lávaque, Méndez, & Villarroel, 2006

Analizado los aspectos matemáticos e históricos de la función, nos focalizaremos en la función como terna que comprenden la función en términos de variable; la función en términos de conjunto de parejas ordenadas y la función en términos de regla de correspondencia.

Por consiguiente, presentaremos algunos aspectos matemáticos sobre el objeto función cuadrática.

2.2 Aspectos matemáticos para la enseñanza de la función cuadrática en libros del nivel superior de matemática.

Se llevará a cabo un análisis de la función cuadrática desde la perspectiva de la matemática formal. Este estudio abordará la definición de la función cuadrática, la forma canónica de la función cuadrática (deduciendo sus propiedades y concluyendo con el desplazamiento horizontal y vertical de las parábolas). Por lo tanto, se considera relevante revisar la información presentada, puesto que, si el docente sostiene que sus conocimientos matemáticos para enseñar la función cuadrática están influenciados por estos libros, permitirá una aproximación al Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de referencia para este objeto matemático.

Estudio de la función cuadrática

Para el desarrollo del contenido del objeto de estudio de nuestra investigación, utilizaremos el enfoque del libro de Lehmann (1998) y Morgado, Wagner, Lima y Pinto (2000). En estos libros los autores definen la función cuadrática como:

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\forall\, a, b\ y\ c\ \in R\ / a\ \neq 0$$

En esta definición, a "a" se le denomina término cuadrático, "b" es el término lineal y a "c" término independiente y su gráfica correspondería a una parábola.
Existen relaciones entre los conceptos de función cuadrática y el trinomio de segundo grado, que es una expresión formal del tipo $ax^2 + bx + c$, con $\mathbb{R}$ siendo $a \neq 0$.

El término formal significa que la letra "x" es un símbolo, además x^2 una forma de escribir $x.\ x$.

A cada trinomio $ax^2 + bx + c$ le corresponde la función cuadrática definida por $f(x) = \ ax^2 + bx + c$; lo cual significa que a cada trinomio de segundo grado le corresponde una única función.

Los autores exponen cómo expresar la función cuadrática en su forma canónica y las propiedades que se deducen: puntos máximos, mínimos y el vértice de la parábola.

La forma canónica del trinomio

Realizando tratamientos en el registro algebraico, consideramos el siguiente trinomio:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right]$$

Los dos primeros sumandos dentro del corchete son los mismos que del desarrollo del cuadrado $(x + \frac{b}{2a})^2$. Completando el cuadrado, podemos escribir:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\ \frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Esta forma de escribir se denomina forma canónica, que conduce a la fórmula que da las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si $a \neq 0$, encontramos las siguientes equivalencias.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \qquad (2)$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

$$\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

Es paso de la línea (2) a la línea (3) sólo tiene sentido cuando el discriminante (Δ): $\Delta = b^2 - 4ac$ es positivo o cero. Es decir, $b^2 - 4ac \geq 0$. Si fuera que $\Delta < 0$, significa que la ecuación no tiene solución real, debido a que $(x + \frac{b}{2a})^2$, no puede ser negativo.

De la línea (4) se concluye que, si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Tiene dos raíces reales distintas.

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Con α < β; cuya suma es $\frac{-b}{a}$ y cuyo producto es:

$$\frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

La media aritmética de las raíces es $\frac{-b}{2a}$. De esto se concluye que las raíces α y β equidistan del punto $\frac{-b}{2a}$. Si el caso fuera que Δ= 0, la ecuación tiene una única raíz, a la que se denomina raíz doble, igual a $\frac{-b}{2a}$.

Si a > 0, la forma canónica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

Dentro de los corchetes, se observa una suma. El primer término depende de x y es siempre positivo o cero y el segundo término es constante. El menor valor de la suma se da cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Es decir, cuando x = $\frac{-b}{2a}$. En este punto, $f(x)$ tiene su valor mínimo. Cuando a > 0, el menor valor asumido por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es $f(\frac{-b}{2a})$ = c – $(\frac{b^2}{4a})$

Si a < 0, el valor de $f(\frac{-b}{2a})$ es el mayor de los números $f(x)$, para cualquier $\mathbb{R}$.

Cuando a > 0, $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene un valor máximo, es una función ilimitada superiormente. Por analogía, cuando a < 0, $f(x)$, no tiene un valor mínimo es ilimitada inferiormente.

Dada una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿para qué valores $x \neq x'$ se tiene que $f(x)$ = $f(x')$?

Observando la forma canónica, vemos que:

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Como partimos asumiendo que $x \neq x'$ esto nos da que:

$$-\left(x + \frac{b}{2a}\right) = x' + \frac{b}{2a}$$

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Por lo tanto, la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; asume el mismo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$, si y solo si, los puntos x y x' son equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

Además, según Lima et al. (2000), se ilustra en el registro gráfico el desplazamiento horizontal, vertical, alargamiento y encogimiento de las parábolas a través de la verificación de su congruencia.

En particular la función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sabemos que su representación gráfica es una parábola, cuyo vértice tiene abscisa igual a $m = -\frac{b}{2a}$. Sometiendo esa parábola a la traslación horizontal $(x, y) \leftrightarrow (x - m, y)$ obtenemos una nueva parábola, cuyo vértice tiene abscisa igual a cero, esto es, esta sobre el eje OY. Por lo que vimos antes, esta nueva parábola es el gráfico de la función cuadrática, obtenida de acuerdo al siguiente tratamiento y en la figura 9.

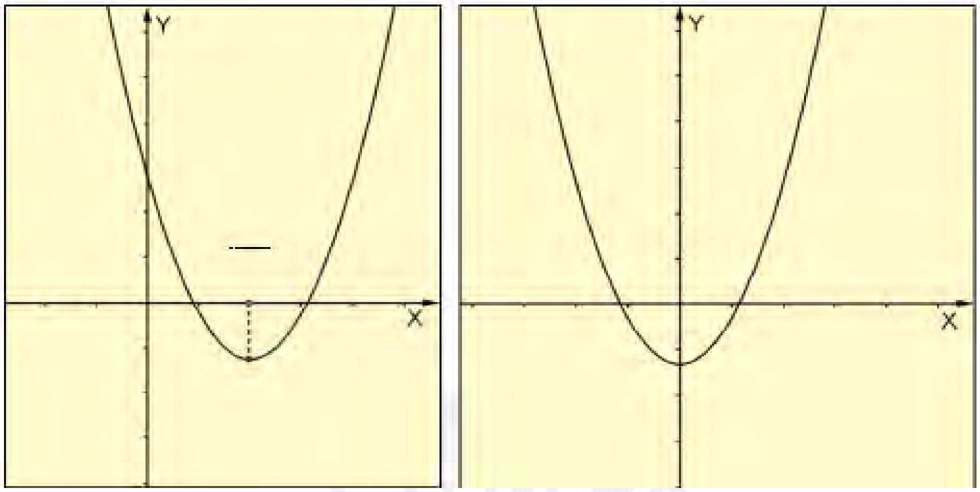
$$g(x) = f(x - m) = f\left(x - \frac{b}{2a}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x - \frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= ax^2 + k$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

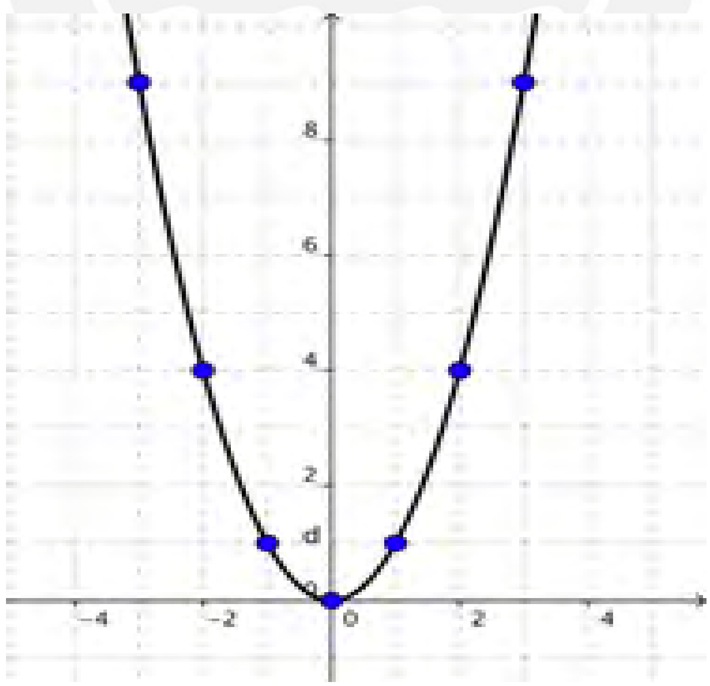
Figura 9. *Parábolas congruentes*



Fuente. Morgado, Wagner, Lima y Pinto (2000, p. 124).

En seguida, aplicamos a esta segunda parábola la traslación vertical $(x, y) \leftrightarrow (x - m, y)$, obteniendo una nueva representación gráfica, cuyo vértice coincide con el origen 0 = (0, 0). Por la segunda observación, esta última parábola es el gráfico de la función. Lo apreciamos en la figura 10.

Figura 10. *Representación gráfica de la función cuadrática*

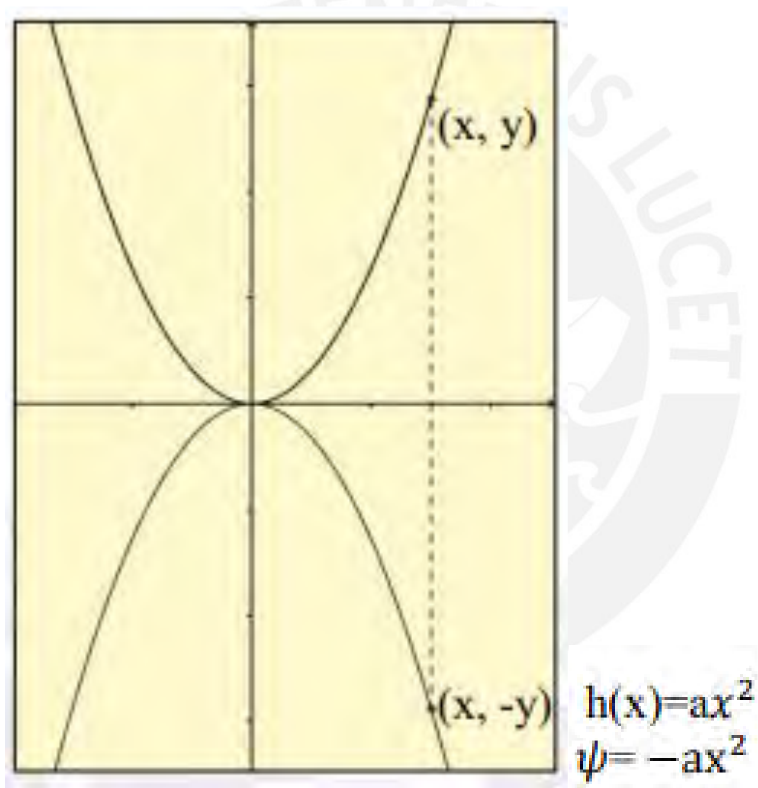


Fuente. Morgado, Wagner, Lima y Pinto (2000, p. 124).

Asimismo, Lima et al (2000) describen la combinación de los dos tipos de traslaciones, donde describen que la parábola que es el gráfico de la función $f\ (x) = -ax^2 + bx + c$ se transforma en la representación gráfica de la función, mediante una traslación horizontal seguida de una traslación vertical. Esto significa que esas dos parábolas son congruentes.

Así el gráfico de la función $\varphi\ (x) = -ax^2 + bx + c$ es congruente al gráfico de $\varphi\ (x) = -ax^2$. A su vez, la reflexión alrededor del eje horizontal. O sea, el cambio de $(x, y) \leftrightarrow (x, -y)$, transforma el gráfico de $h(x) = ax^2$. Observamos en la figura 11.

Figura 11. *Traslación vertical de la parábola*



Fuente. Morgado, Wagner, Lima y Pinto (2000, p. 125).

Los mismos autores resumen el planteamiento anterior: a´ = ± a entonces las representaciones gráficas de la función cuadrática $f\ (x) = -ax^2 + bx + c$ y $\varphi\ (x) = -a'x^2 + b'x + c'$ son parábolas congruentes.

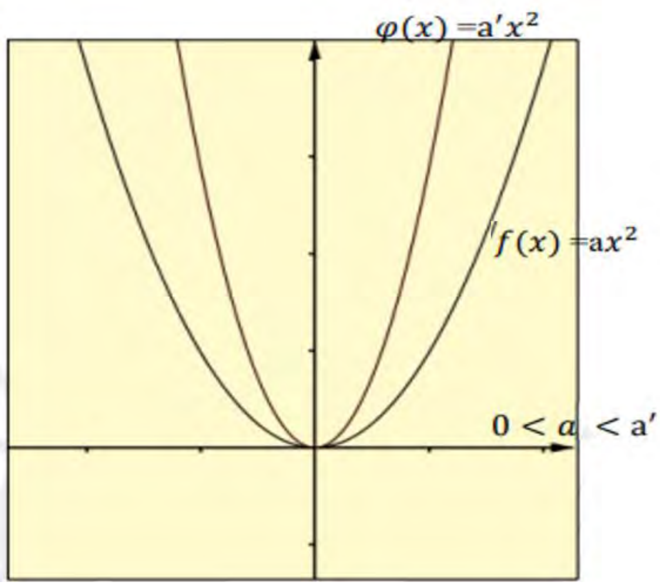
Cuando a´ = a, se transforma una de esas parábolas en la otra por medio de una traslación horizontal seguida de una parábola vertical, Si a' = a, se debe aumentar también la reflexión alrededor del eje OX.

Vemos así que, para la congruencia de las parábolas, en las representaciones gráficas de la función cuadrática $f\,(x) = -ax^2 + bx + c$ y $\varphi\,(x) = -a´x^2 + b´x + c´$, no importan los coeficientes $-b´x^2 + b$, b´ni c, c´. Ellos apenas determinan la posición de la parábola en relación a los ejes: c es la ordenada del punto en que la parábola corta al eje vertical, mientras que b es la inclinación de la tangente en ese mismo punto.

Cabe, naturalmente preguntar si los gráficos de las funciones f y φ pueden ser congruentes aun cuando a´$\neq\ \pm a$. La respuesta es negativa. Más explícitamente, vale la recíproca del enunciado anterior: si los gráficos de la función cuadrática $f\,(x) = -ax^2 + bx + c$ y $\varphi\,(x) = -a´x^2 + b´x + c´$, son parábolas congruentes entonces a´$\neq\ \pm a$.

Para mostrar esto, por lo que vimos arriba, basta considerar las funciones f(x) =ax^2 y $\varphi\,(x) = -a´x^2$, con a > 0 y a´ > 0. Si fuera a < a´ entonces ax^2 < -a´x^2 (y si a > a´ entonces ax^2 > -a´x^2) para todo x ∈ R.

Figura 12. *Parábolas no congruentes*



Fuente. Morgado, Wagner, Lima y Pinto (2000, p. 126).

La figura 12, muestra la representación gráfica y deja claro que las dos parábolas consideradas no son congruentes. En efecto, dos parábolas con el mismo vértice y el mismo semieje son como dos ángulos que tienen el mismo vértice y la misma (semirrecta) bisectriz: sólo son congruentes si son iguales, esto es, si coinciden.

Lehmann (1998), explica la determinación algebraica de los valores extremos (máximos y mínimos) de la función cuadrática $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, en donde a, b, c y x son números reales.

Primero se observa que el cuadrado de cualquier número real o es cero o es positivo. Por tanto, el valor mínimo del cuadrado de una expresión real es cero.

Transformamos la función cuadrática completando cuadrados resulta:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a'}$$

De donde:

(1) $$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Para una función cuadrática dada a, b y c son constantes y “x” es la única variable. Por lo tanto, el valor de “y” queda determinado por el valor asignado a “x”. Examinemos ahora la relación (1) para los dos casos siguientes: a > 0 y a < 0.

a > 0. En este caso “y” no posee valor máximo (finito), ya que puede hacerse tan grande como se quiera asignando a “x” un valor absoluto suficientemente grande. Pero si tiene un valor mínimo cuando:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

O sea, x = $-\frac{b}{2a}$. Este valor mínimo es $c - \frac{b^2}{4a}$.

$a < 0$. En este caso y no tiene valor mínimo (finito), ya que puede hacerse tan pequeño como se quiera asignando a "x" un valor absoluto suficientemente grande. Pero si tiene un valor máximo cuando:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

O sea, para x = $-\frac{b}{2a}$. Este valor máximo es $c - \frac{b^2}{4a}$.

Estos resultados que concuerdan con el teorema 6 (Art. 5.8), se resumen en el teorema siguiente:

Teorema 7. La función cuadrática $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, en donde a, b, c son constantes reales, tiene un valor máximo o mínimo igual a $c - \frac{b^2}{4a}$ cuando x = $-\frac{b}{2a}$. Este valor es un mínimo cuando $a > 0$ y es máximo cuando $a < 0$.

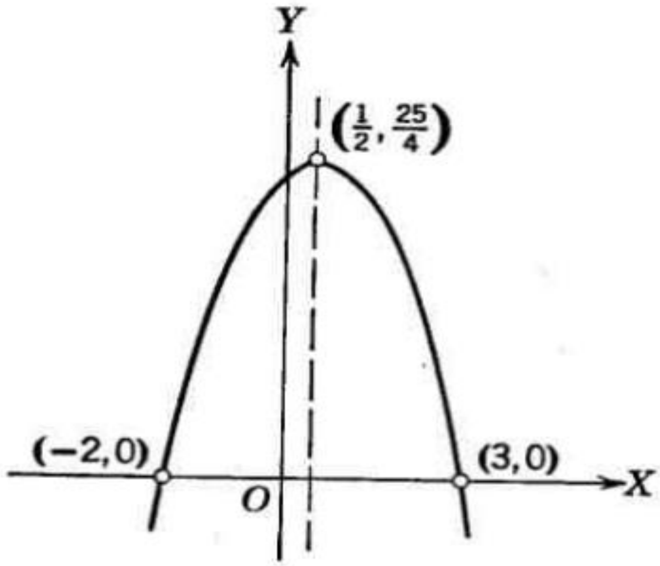
La utilidad de este teorema está en el hecho de que puede ser usado para resolver cualquier problema de máximos y mínimos que dependa de una función cuadrática de una variable. El problema general de la determinación de máximos y mínimos para una función cualquiera pertenece al cálculo diferencial y no se considerará aquí.

Ejemplo 1. Calcular el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $6 + x - x^2$. Comprobar el resultado gráficamente.

Solución. Ya que el coeficiente de x^2 es negativo, la función tiene un máximo que puede obtenerse por sustitución directa en las fórmulas del teorema 7. Así, para a = -1, b = 1, c= 6, el valor máximo es c - $\frac{b^2}{4a}$ = 6 - $\frac{1}{-4}$ = $\frac{25}{4}$, para x = - $\frac{b}{2a}$ = - $\frac{1}{-2}$ = $\frac{1}{2}$.

La gráfica de la función se muestra en la figura 13. En ella se indican el punto máximo y los ceros.

Figura 13. *Puntos máximos*



Fuente. Lehmann (1998 p. 122)

Ejemplo 2. La suma de dos números es 8. ¿Cuáles son estos números, si la suma de sus cuadrados debe ser mínimo?

Solución. Sea “x” uno de los números, Entonces 8 – x = segundo número.

El procedimiento general en problemas de este tipo consiste en expresar la cantidad que desea que sea máxima o mínima como una función de una sola variable. Así, si S representa la suma de los cuadrados de estos números, escribimos:

$$S = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64$$

Por el teorema 7, S tiene un valor mínimo cuando:

$$X = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{4} = 4$$

Por lo tanto, los números buscados son 4 y 4

Posteriormente desde el nivel didáctico, en el que se mostrará la forma cómo se propone la enseñanza de la función cuadrática en la Educación Básica a partir del estudio del libro oficial del Ministerio de Educación del cuarto año de educación secundaria.

2.3 Aspectos didácticos y matemáticos en el material del curso de matemáticas para la enseñanza de la función cuadrática

En esta sección de nuestra investigación, presentaremos la información referida al tratamiento de la función cuadrática en el libro del cuarto año del nivel secundario (Ficha de Matemática 4°, 2023).

Este libro es distribuido por el Ministerio de Educación para ser usado por el profesor y para el estudiante según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), en la que se busca que el estudiante logre las siguientes competencias:

- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

En donde se especifica que, el estudiante resuelve problemas de su contexto cotidiano, reconoce modelos matemáticos, aplica conocimientos y procedimientos matemáticos apoyado de la tecnología, y comprueba, interpreta y comunica los resultados obtenidos. En ese sentido, el estudio del material del curso nos dará indicios sobre el ETM idóneo de la institución.
Respecto a la parte del material del curso donde se trabaja la función cuadrática, consta de:

1. Situación Problemática.
2. Definiciones, característica y representaciones.
3. Gráficas de la función cuadrática.
4. Una actividad guiada por el docente para la aplicación del GeoGebra.
5. Finalmente, se sugieren tres actividades propuestas del libro del Ministerio de Educación (Ficha de matemática 4°) que el docente ha adquirido para que los estudiantes las realicen en casa.

Debido a que nos centraremos en el aspecto intra-matemático del objeto función cuadrática, a continuación, presentamos el análisis de los puntos detallados en el párrafo anterior. Se introduce el tema mediante la situación problemática extraída del libro del Ministerio (Ficha de matemática 4°) en lengua natural (ver figura 14). Esta problemática, nos orienta a resolverlo con el apoyo de una representación tabular y gráfica, lo cual permita pasar de lo discreto, mediante los puntos obtenidos en la tabulación, a lo continuo, expresado como la curva que pasa por esos puntos, con ello activar la génesis semiótica.

Figura 14. *Situación Problemática*

La utilidad (U) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresion $U(x) = -x^2 + 12x - 24$, donde x representa el número de cientos de unidades vendidas.

Con la información dada, responda lo siguiente:

a) Halle el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible.

b) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si vende 600 unidades.

c) Si la utilidad es cero, ¿Cuántas unidades se vendió? Grafica la situación.

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Posteriormente, se define la función cuadrática, la cual inicia como herramienta teórica. Luego, esta definición de función cuadrática, representada algebraicamente, es utilizada como herramienta semiótica, representamen.

Finalmente, será considerada como artefacto simbólico que permita y determine la regla de correspondencia de toda función cuadrática (Ver figura 15).

Figura 15. *Definición de la función cuadrática en el material de curso*

La función cuadrática

- Es una función polinomial de segundo grado, cuya forma general es:

$f(x) = a x^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

También se representa:

$f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde $a \neq 0$ y $a, k, h \in \mathbb{R}$

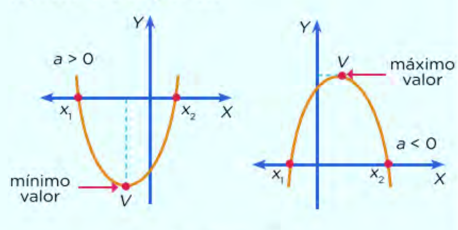
Ejemplo:

$f(x) = y = 2(x - 5)^2 + 3$

Algunos valores para x e y se muestran en la tabla de valores:

x	y
-2	101
-1	75
0	53
1	35

- La función cuadrática se representa con una gráfica parabólica. En ella se pueden observar un vértice y puntos de corte con los ejes X e Y.
- Los valores de a, h y k determinan esta representación gráfica.

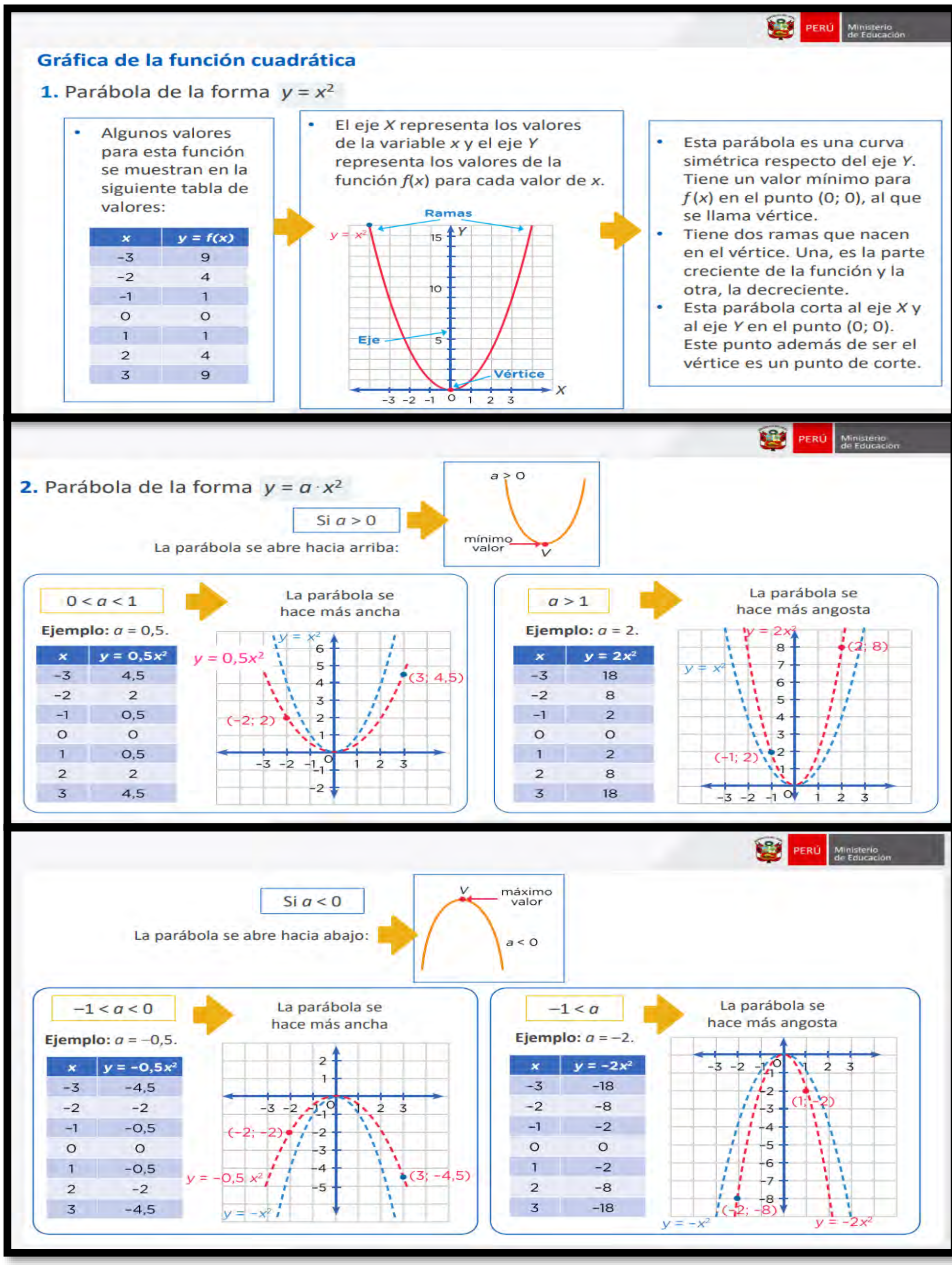


Vértice $V = (h, k)$

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

En el material de curso se considera pertinente establecer algunas propiedades y características de la función cuadrática a partir de su representación algebraica, con la finalidad de que sea utilizado como un artefacto simbólico para realizar su representación gráfica, pretendiendo activar la génesis instrumental, el cual se observa en la figura 16.

Figura 16. *Gráfica de la función cuadrática en el material de curso*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Respecto a la actividad que presenta el material del curso, tenemos un ejemplo guiado por el docente, donde el propósito es representar gráficamente la función cuadrática con la aplicación del GeoGebra. Se observa en la figura 17, aquí se pretende que se utilice la información presente en cada caso de la función cuadrática como un artefacto simbólico para su solución, con el objetivo de activar la génesis semiótica e instrumental.

Figura 17. *Actividad 1°: función cuadrática*

Situación

José y Pedro son dueños de una empresa de alquiler de autos. La utilidad en soles que tienen por alquilar un auto durante un tiempo t (en horas) está dada por $U(t) = -t^2 + 8t$.

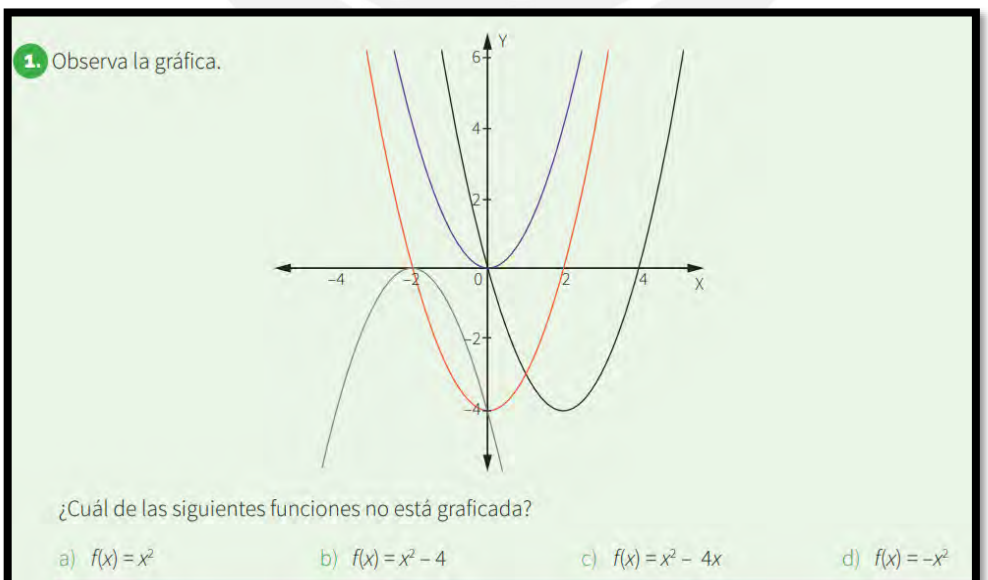
a) Cuánto es su máxima utilidad y en qué tiempo.

b) Grafica la situación.

Nota. Adaptado por el docente

Las actividades propuestas que se presenta en el material de curso (Ficha de matemática 4°) en la figura 18, 19 y 20, permite activar la génesis semiótica ya que las representaciones remiten al objeto matemático por medio del proceso de visualización.

Figura 18. *Actividades Propuestas: Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Figura 19. *Actividades Propuestas: Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°*

2. Dada la función $g(x) = x^2 - 8x + 18$, ¿cuál de las siguientes alternativas representa el rango de dicha función en el conjunto de los números reales?

a) $[2 ; +\infty[$ b) $[4 ; +\infty[$ c) $[2 ; 4 [$ d) $[0 ; +\infty[$

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

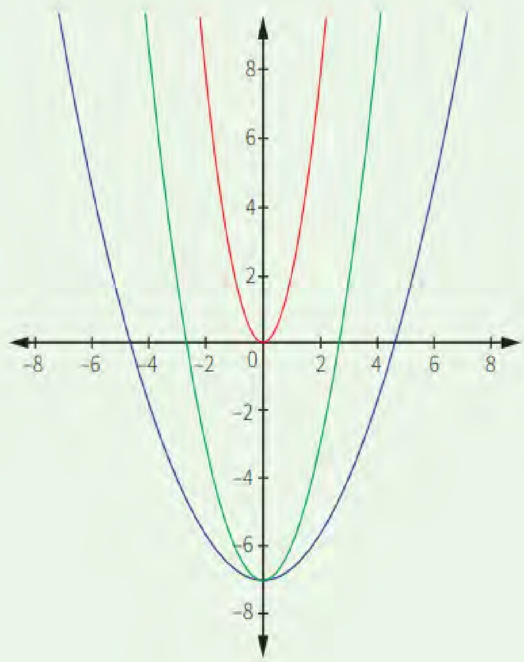
Figura 20. *Actividades Propuestas: Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°*

4. Observa la gráfica de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 7$

$g(x) = 2x^2$

$h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 7$



Si las funciones tienen la forma $ax^2 + p$, ¿cuál es el valor de p en la función g? Relaciona cada función con su gráfica.

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Según el enfoque del ETM, las acciones específicas y claras mencionadas en el contenido del curso se abordan desde la perspectiva del cálculo, ya que se emplean la definición, los elementos y las características de la función cuadrática sin profundizar en su naturaleza y ciertas reglas de cálculo.

En el siguiente capítulo, se presenta Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del profesor de educación básica regular, en particular, se analiza el trabajo matemático actual realizado por el profesor para la enseñanza de la función cuadrática.

Capítulo III: Espacio de Trabajo Matemático Idóneo del Profesor del nivel secundario

En el presente capítulo analizaremos el Trabajo Matemático del profesor de secundaria al enseñar la función cuadrática (ETM idóneo), para ello necesitamos conocer las acciones que el profesor de Educación Básica Regular (EBR), planifica, organiza y ejecuta al enseñar este tipo de función. Por consiguiente, en este capítulo, se estudia las definiciones, características, gráficas y actividades sobre función cuadrática que presentan los profesores de educación básica regular (EBR) a sus estudiantes, los cuales fueron obtenidos de la entrevista, observación y grabación durante el desarrollo de clase.

Escenario, sujetos e instrumentos

El curso de Matemática se imparte a estudiantes del cuarto grado de secundaria y es enseñado por dos profesores con varios años de experiencia en la Educación Básica Regular de una Institución Educativa Nacional en el distrito de Villa El Salvador perteneciente a la Ugel 01.

En el desarrollo del curso de matemáticas, los profesores de nivel secundario tienen la responsabilidad de impartir las lecciones a través de una secuencia didáctica y de guiar a los estudiantes en la comprensión del tema durante las actividades en clase. Además, el curso consta de cuatro horas semanales, divididas en dos bloques de dos horas, equivalentes a noventa minutos cada uno, dirigidas por los dos docentes del curso. Los profesores que participarán en nuestra investigación trabajan en la Institución Educativa Nacional, y a partir de ahora los llamaremos Juan y Pedro, como seudónimos.

El Profesor Juan es Licenciado en Matemática – Física, con una experiencia alrededor de 15 años enseñando matemática al nivel secundario en la Educación Básica Regular y 05 años dictando el curso de matemática a estudiantes del 4to grado de secundaria de la Institución Educativa Nacional en el distrito de Villa El Salvador.

Por otro lado, el Profesor Pedro es Licenciado en Matemática con 05 años de experiencia como docente en Instituciones Privadas en el nivel secundario y lleva 01 año trabajando en la Institución Educativa Nacional dictando el curso de matemática a estudiantes del 4to grado de secundaria.

Cabe precisar que, los profesores están habituados en el uso de software GeoGebra para el desarrollo del curso.

Por otra parte, resulta necesario recolectar información sobre las acciones que realizan los profesores y la organización de su Espacio de Trabajo Matemático (ETM), los cuales permiten describir las génesis y los planos que se activan en su ETM idóneo, incluso, permite identificar los paradigmas que él privilegia.

Asimismo, según Kuzniak, Montoya y Vivier (2016), las génesis semiótica, instrumental y discursiva solo se activan como resultado del trabajo matemático realizado por el individuo. Además, de acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), este trabajo del profesor de matemáticas podría activar los planos Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis]. Según Montoya y Vivier (2016), los paradigmas de análisis que el profesor podría preferir al enseñar la función cuadrática son: el paradigma del análisis geométrico/aritmético (AG), el paradigma del análisis calculatorio (AC) y el paradigma del análisis real (AR).

Espacio de Trabajo Matemático Idóneo

3.1 Espacio de Trabajo Matemático Potencial

Según Kuzniak y Nechache (2017), nos adherimos a la noción de "ETM idóneo potencial", esto se refiere a las tareas propuestas que pueden ser llevadas a cabo en clase. En otras palabras, se trata de lo que el profesor sugiere para realizar, incluyendo aquellas actividades que el docente considera previamente como efectivas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

En nuestra investigación nos enfocaremos en el ETM idóneo del profesor de cuarto grado de secundaria antes de entrar al aula, donde organiza, planifica y selecciona de manera coherente las actividades del libro del Ministerio de Educación "Ficha de matemática 4°". Para ello, se ha diseñado una guía de preguntas semiestructuradas como instrumento para la recolección de información, empleando la entrevista como técnica.

Entrevista

Para comparar la información obtenida de la observación, se utilizó la entrevista semiestructurada en este estudio. Según Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 403), este tipo de entrevista "se basa en una guía de temas o preguntas, y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para aclarar conceptos o obtener más información", lo cual facilita la comunicación y crea un ambiente más coloquial entre el entrevistador y el entrevistado.

A continuación, en la tabla 6, se presenta la guía de preguntas semiestructuradas que se realizó al profesor, bajo el seudónimo Pedro, antes de entrar al aula de clases.

Tabla 6

Preguntas de la entrevista semiestructurada que se realizará a los profesores del cuarto grado de secundaria.

Preguntas	Objetivo	Tiempo real
(1) ¿Cómo planifica el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes del cuarto año de secundaria?	Planifica los conocimientos que se utiliza en el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación que organiza en su ETM Potencial.	5 min
(2) ¿Qué estrategias y técnicas de evaluación emplea con intención formativa en los estudiantes del cuarto año de secundaria?	Determina las estrategias y técnicas de evaluación a utilizarse en la secuencia didáctica en su ETM Actual.	5 min
(3) Como indica el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) "Ficha de Matemática 4° que es necesario iniciar la sesión de aprendizaje con una situación problemática para enseñar función cuadrática (nociones fundamentales – Ver ficha 1). ¿Le parece adecuado este método? Si ☐ No ☐ De otro ejemplo de alguna situación problemática que Ud. propondría_____________________	Reconocer las acciones que permite la activación de las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG.	5 min
(4) De estas definiciones dadas para la función cuadrática como muestra el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) "Ficha de Matemática 4° (Ver ficha 2), considera que es la más adecuada para los estudiantes del cuarto año de secundaria. ¿Por qué? ____________________________ Usted presenta otra manera de definir la función cuadrática. Fundamente su respuesta__________	Identificar las representaciones semióticas que utiliza para definir la función cuadrática, sin privilegiar al paradigma AR.	5 min

(5) De acuerdo a la forma de describir la gráfica de la función cuadrática y sus características (Ver ficha 3), considera que es adecuado para la enseñanza a estudiantes del cuarto año de secundaria este proceso que presenta el libro del Ministerio de Educación. “Ficha de Matemática 4° Si ☐ No ☐ ¿Por qué? ____________________ ¿Usted lo presenta de otra manera diferente en el desarrollo de su sesión de aprendizaje? Si su respuesta es afirmativa, describa el porqué______________	Reconocer las acciones que activan las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG y AC.	4 min
(6) Sobre el desarrollo sobre cómo graficar la función cuadrática. (Ver ficha 4), usted se guía del libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4° o propone otro tipo de desarrollo. Fundamente su respuesta ________	Analizar las acciones que realiza el profesor, las cuales activan las génesis de su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	4 min
(7) Según los siguientes ejemplos (Ver ficha 5) que se indica en el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4°, ¿usted utiliza estos modelos en la misma secuencia para el desarrollo de su clase o cambia el orden de la secuencia. ¿Porqué? ___	Analizar las tareas que organiza en su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	5 min
(8) ¿Usted utiliza como fundamento solo el libro que proporciona el Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4° o además utiliza otro libro de texto? __________________ Si utiliza otro libro, ¿por qué lo utiliza?, ¿qué lo hace adecuado? ___ ¿Qué características puntuales llamó más su atención para la enseñanza de la función cuadrática? _________	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	5 min
(9) ¿Cuál es la secuencia de actividades que usted recomendaría a un profesor que va a enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año de secundaria?	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	2 min

En la tabla 6, se presentan las preguntas formuladas, el propósito de cada una de ellas dirigida al profesor con el seudónimo Pedro, y la duración exacta de cada pregunta durante la entrevista.

3.2 Espacio de Trabajo matemático actual

Según las contribuciones de Gómez y Chacón (2016), el trabajo matemático actual del profesor se conceptualiza como las acciones realizadas en el aula, las cuales pueden ser adaptadas, como la introducción de un nuevo concepto, para superar los obstáculos que puedan surgir entre los estudiantes. En nuestra investigación, se ha desarrollado un instrumento denominado Lista de cotejo, que se presenta en el Anexo. Este instrumento utiliza la técnica de observación para registrar el ETM Idóneo Actual en el aula durante el proceso de aprendizaje. Además, se empleó una cámara de audio y video para registrar esta información.

En este contexto, se presenta el trabajo matemático actual del profesor, identificado con el seudónimo de Pedro. Se recopiló toda la información necesaria para nuestro estudio a partir de la observación de sus acciones al enseñar la función cuadrática a estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Momento de clase del profesor Pedro

La lección impartida por el profesor Pedro, titulada función cuadrática según la sesión de aprendizaje, consiste en una única sesión de 90 minutos dirigida a 25 estudiantes de cuarto año de secundaria.

Esta sesión de aprendizaje se divide en tres partes. La primera es el inicio de la sesión, que comienza con la motivación, activación de conocimientos previos y un conflicto cognitivo para llegar al propósito de la sesión. Su objetivo es describir las acciones del profesor que activan las génesis y planos de su ETM idóneo. La segunda parte es el desarrollo de la sesión, donde se procesa la información sobre la función cuadrática (definición, características, gráficas, actividades), identificando los paradigmas del dominio del análisis que el profesor privilegia. Finalmente, la tercera parte es el cierre de la sesión, que incluye el desarrollo de actividades propuestas al estudiante, reflexión y metacognición, con el objetivo de describir las génesis y planos de su ETM idóneo que se activan al enseñar la función cuadrática.

En esta sección de nuestro estudio, describimos tres etapas, detalladas en la tabla 7, que nos permiten observar, describir y analizar las acciones del profesor con el seudónimo Pedro al enseñar la función cuadrática. Estas etapas revelan los conocimientos sobre la función cuadrática que él organiza y las actividades que propone para su clase, especificadas en cada etapa.

Tabla 7

Etapas del trabajo matemático actual del profesor sujeto a nuestra investigación con el seudónimo Pedro

Etapas	Descripción
Exploración	Las acciones del profesor están dirigidas a explorar la solución de una situación problemática con el fin de motivar la enseñanza de la función cuadrática.
Estudio de la función cuadrática	Las acciones del profesor se centran en explicar la definición, la representación gráfica, los elementos y las características de una función cuadrática.
Resolución de actividades propuestas	Las acciones del profesor están estructuradas para presentar la solución de una actividad propuesta en equipos, guiado por el docente, y tres actividades asignadas para realizar en casa del libro “Ficha de matemática 4°”. Estas actividades incluyen: graficar la función cuadrática a partir de su regla de correspondencia, su representación gráfica, el rango de la función y la altura máxima.

Es importante aclarar que, a partir de esta sección de nuestro estudio, en la transcripción de las interacciones durante la sesión de aprendizaje en el aula sobre la función cuadrática con los estudiantes de cuarto grado de secundaria, nos referiremos al profesor con el seudónimo Pedro simplemente como "profesor". El grupo formado por el profesor y los estudiantes se denominará "todos", mientras que al grupo de estudiantes se les llamará "estudiantes". Aquellos estudiantes que participen más activamente en la clase serán identificados como estudiante A, estudiante B y estudiante C.

a) **Exploración**

El profesor presentó una situación problemática (ver figura 21) con el objetivo de guiar a sus estudiantes en la identificación de un modelo relacionado con la función cuadrática al resolver el problema. Para ello, empleó estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros métodos para resolver problemas vinculados con la función cuadrática, incluyendo la búsqueda de máximos o mínimos.

Figura 21. *Situación problemática de exploración sobre función cuadrática*

La utilidad (*U*) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresion $U(x) = -x^2+10x-21$, donde *x* representa el número de cientos de unidades vendidas.

Con la información dada, responda lo siguiente:
a) Halle el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible.
b) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si vende 4 cientos de unidades.
c) Si la utilidad es cero, ¿Cuántas unidades se vendió? Grafica la situación.

Profesor: Buenos días, chicos. ¿Cómo están? Espero que estén tan entusiasmados como siempre por la clase. Solo les pido que presten atención y sigan las normas de convivencia. Participen activamente levantando la mano. Les recuerdo que no está permitido usar el celular durante la clase.

En esta ocasión, les presento un desafío [...] para que observen cómo se construyen este tipo de funciones, que dice: La utilidad (U) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresión (U) = - x^2 + 10x - 21, donde “x” representa el número de cientos de unidades vendidas, ¿de qué trata la situación?

Estudiante A: la utilidad en miles de dólares que tiene una empresa

Profesor: Muy bien; entonces para saber la utilidad, debemos de saber que representa la variable “x”

Estudiante B: “x” representa el número de cientos de unidades vendidas.

Profesor: Claro. Utilizando la información proporcionada en el inciso (a), determinaremos la cantidad de unidades que deben venderse para alcanzar la máxima utilidad posible. ¿Cómo lo lograremos?

Estudiante A: Hallamos los vértices de la parábola

Profesor: Excelente, así encontraremos el número de unidades y la utilidad máxima […]

En esta parte de la clase, el profesor discute la información presentada en la situación problemática. También vincula este desafío con su referencial teórico (aplicación de fórmulas matemáticas), explicando que al encontrar el vértice de la parábola V(x, y), resolveremos lo solicitado en el inciso (a), donde "x" representa el número de unidades e "y" la utilidad máxima.

Con ello se activa la génesis discursiva y privilegia el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG).

Luego, el profesor aborda la situación problemática de exploración efectuando cálculos algebraicos y utilizando la fórmula para encontrar el vértice de una función cuadrática. A continuación, explica cómo determina la cantidad de unidades que deben venderse para alcanzar la máxima utilidad posible.

Profesor: Muy bien chicos, de acuerdo a la situación problemática: $U(x) = -x^2 + 10x - 21$; vamos a comenzar identificando los coeficientes de: a, b, c […]

Estudiantes: a = -1; b= 10; c= - 21

Profesor: Excelente, como “a” es negativo la parábola siempre adopta la forma de una U invertida, por lo que se abre hacia abajo y el vértice representa un máximo. Ahora, veamos cómo encontrar el vértice.

Estudiante A: Aplicando la formula $x = \frac{-b}{2a}$

Profesor: Perfecto chicos, el valor de “y” o f(x)

Estudiante B: Se sustituye el valor de “x” en la ecuación cuadrática de la utilidad.

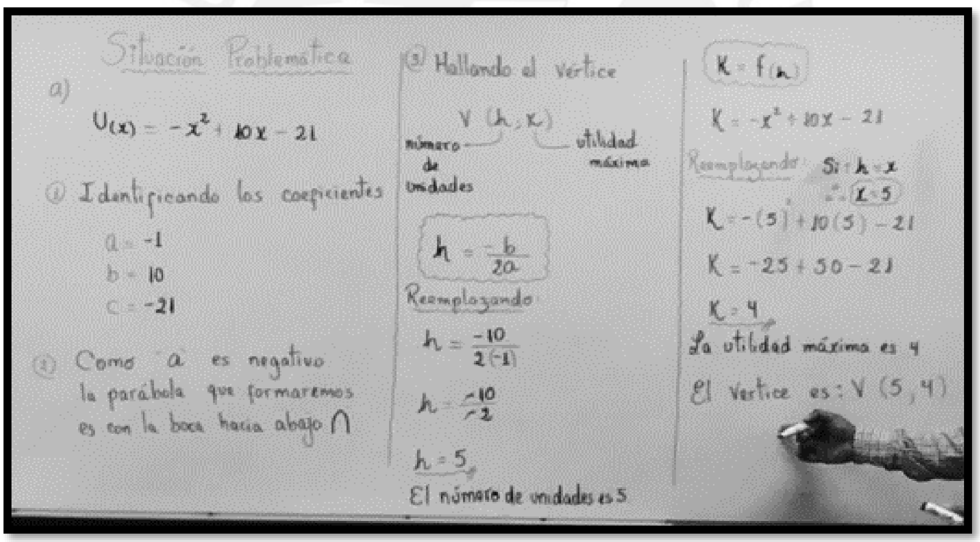
Profesor: Muy bien chicos […]

El profesor les pidió que usen las fórmulas para encontrar el vértice y determinar el número de unidades y la utilidad máxima. En el inciso b, calculamos la utilidad que obtendrá la empresa si vende 4 cientos unidades, y en el inciso c, nos indica: ¿cuántas unidades se vendió? Si la utilidad es cero. Luego, deben desarrollar estos problemas en sus cuadernos, activando así la génesis discursiva.

Durante el desarrollo de la situación problemática, se emplean los conceptos básicos: definición y características de la función cuadrática. En el inciso (a), determinamos el vértice y obtuvimos V (5; 4), lo que implica que deben venderse 5 unidades para lograr una utilidad máxima de 4. En el inciso (b), al sustituir x=4 cientos unidades en la ecuación cuadrática, se obtiene U(x) = 3. En el inciso (c), si la Utilidad es U(x) = 0, al resolver esto como una ecuación cuadrática, implica que se vendieron 3 y 7 unidades respectivamente, activando así la génesis discursiva. En este contexto, se activa el plano [Sem-Dis].

Las actividades mencionadas anteriormente motivaron el trabajo en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético y en el paradigma del Análisis Calculatorio. Consulta la figura 22 para más detalles.

Figura 22. *Situación problemática de exploración sobre función cuadrática.*



Nota. Solución de la situación problemática realizada por el profesor Pedro.

Después, el profesor representa gráficamente utilizando el sistema de coordenadas cartesianas (x, y).

Profesor: Ahora podemos graficar utilizando los valores obtenidos anteriormente. ¿Cuál fue el vértice encontrado?

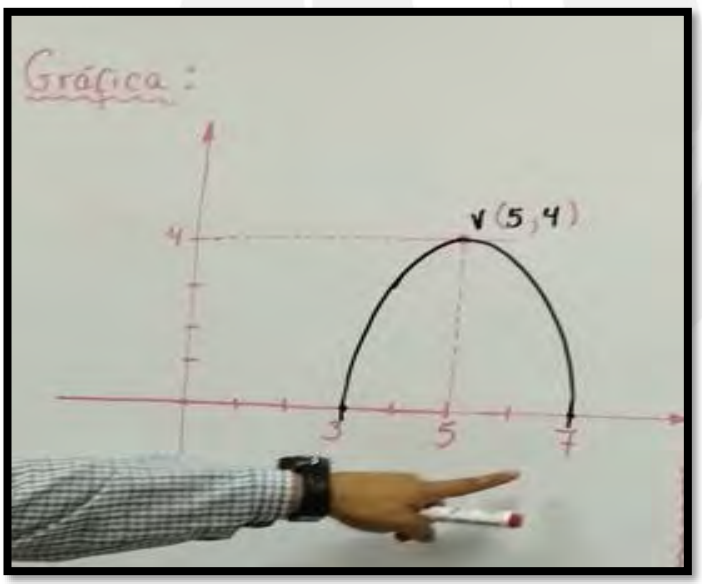
Estudiante C: x = 5 ; y = 4

Profesor: Muy bien, y los puntos de corte […]

Estudiantes:	Si la Utilidad es cero, se procede a resolver y se obtienen los puntos de intersección, llamados puntos de corte profesor.
Estudiante A:	También se puede hallar con la fórmula general
Profesor:	Perfecto, excelente. Con esos puntos se grafica la parábola.

Ahora que hemos identificado los coeficientes de la situación problemática: $U(x) = -x^2 + 10x - 21$, donde a= -1, b= 10 y c = -21, observamos que el valor de "a" es negativo, lo que indica que nuestra parábola se abre hacia abajo. Luego, encontramos el vértice, recordando los valores de "x", "y" o f(x), que son cinco y cuatro respectivamente. Así, el vértice es (5, 4), que ubicamos en el plano cartesiano para representar gráficamente. Finalmente, encontramos los puntos de intersección cuando la utilidad es cero, obteniendo (3, 7), que también representamos en la gráfica. Ahora revisamos los puntos en el plano cartesiano y obtenemos esta gráfica. (Ver en la figura 23)

Figura 23. *Representación gráfica de la situación problemática de exploración de la función cuadrática*

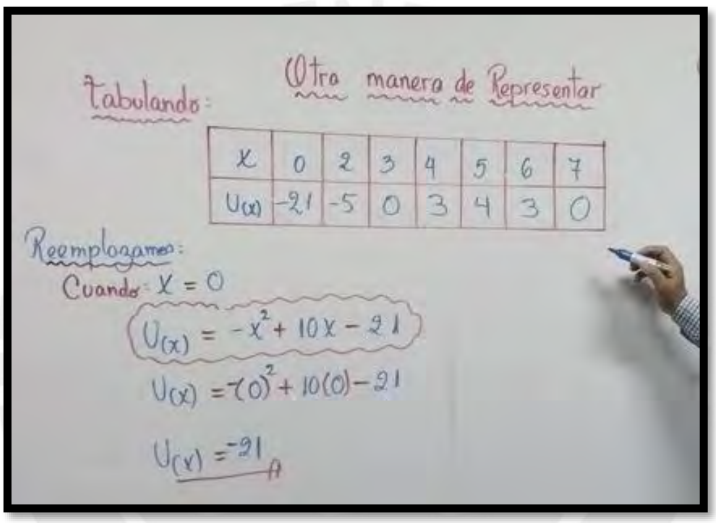


Nota. Solución de la Gráfica de la situación problemática realizada por el profesor Pedro.

El profesor presenta otra forma de construir la gráfica y aborda los ítems utilizando una representación tabular, que es un método sencillo. Empezamos dando valores a nuestra función cuadrática: $U(x) = -x^2 + 10x - 21$

Cuando x=0, lo reemplazamos en la función: menos, cero al cuadrado más diez por cero menos veintiuno, luego procedemos con las operaciones y obtenemos el valor de menos veintiuno; ahora realizamos el mismo procedimiento x=2, resolviendo la función nos resulta -5, así seguimos encontrando los valores x = 3, U(x) = 0, x = 4, U(x) = 3, x = 5, U(x) = 4, x = 6, U(x) = 3, x = 7, U(X) = 0. Ahora que tenemos todos los valores en nuestra tabla, procedemos a graficarlos, colocando los pares ordenados en el plano cartesiano y uniéndolos. (Ver en la figura 24)

Figura 24. *Representación tabular de la situación problemática de exploración de la función cuadrática*



Nota. Solución tabular de la situación problemática realizada por el profesor Pedro

Posteriormente el profesor establece la regla de correspondencia basándose en los valores encontrados en la tabla, de la siguiente manera.

Profesor:	Utilizando la expresión cuadrática, vamos a dar valores para encontrar la Utilidad: U(x). Si x = 0
Estudiantes:	La Utilidad es -21
Profesor:	Si x = 2, la U(x) es….
Estudiante A:	-5
Profesor:	Si x =3, la U(x) es….
Estudiante B:	0
Profesor:	¡Muy bien chicos! Si x = 4, la U(x) es….

Estudiante C: 3

Profesor: Si x = 5, la U(x) es….

Estudiantes: La Utilidad es 4

Profesor: Si x = 6, la U(x) es….

Estudiantes: 3

Profesor: Si x = 7, la U(x) es….

Estudiantes: 0

Profesor: Estos puntos representan puntos de la parábola. ¿Cuáles son los valores de "x" cuando U(x) = 0?

Estudiante C: 3 y 7

Profesor: Esto indica que son puntos de intersección o corte de la parábola.

En este sentido, emplea los datos de la tabla para transformar la representación tabular a la forma algebraica de la función cuadrática, activando la génesis instrumental. Además, utiliza la expresión (U) = $- x^2 + 10x - 21$ de su referencial teórico, para que a partir de ella pueda justificar si una función es cuadrática, activándose la génesis semiótica. Por lo tanto, las acciones descritas permiten la activación del plano [Sem-Ins] e instó a trabajar en el paradigma AC.

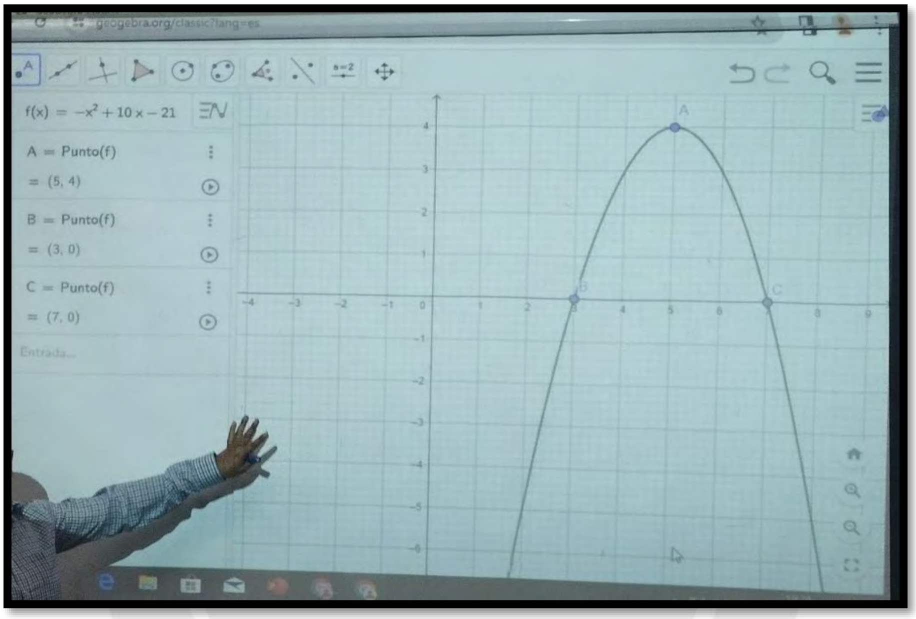
Se observa que el profesor coordinó la tabla de valores con la representación gráfica de la función cuadrática. Su explicación se basa en la definición y características de la gráfica de una función de la forma $f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$, que se encuentran detalladas en la "Ficha de matemática 4°". Primero, utiliza el plano cartesiano (x, y) y luego emplea el software GeoGebra para su visualización.

En términos del ETM, activó la génesis instrumental y semiótica del plano [Sem-Ins], privilegiando el paradigma del Análisis Calculatorio.

Por último, con la asistencia del GeoGebra, el profesor visualiza gráficamente la situación problemática y fomenta el aprendizaje de manera visual, creativa y original, lo cual incentiva a los estudiantes a explorar la función cuadrática.

Profesor: Chicos aquí tenemos la aplicación del software GeoGebra que nos ayudará a visualizar mejor la gráfica. Primero, introducimos la expresión cuadrática en la pestaña de entrada y automáticamente aparece la gráfica de $U(x) = -x^2 + 10x - 21$ en la vista gráfica. Luego, observamos que la expresión cuadrática de nuestra situación problemática también aparece en la vista algebraica en el lado derecho (ver figura 25).

Figura 25. *Representación gráfica de la situación problemática de exploración de la función cuadrática*



Nota. Solución gráfica de la situación problemática utilizando el GeoGebra realizada por el profesor Pedro.

Para finalizar con la situación problemática, el profesor buscó que sus estudiantes interpretaran algunas características de la función cuadrática a partir de su gráfica.

Profesor: De acuerdo con la gráfica observada en la aplicación del Software GeoGebra, ¿cuál sería el dominio?

Estudiante A: Todos los Reales

Profesor: Perfecto, ¿y cuál es el rango según la gráfica?

Estudiante B: de $< -\infty, 4]$

Profesor: Excelente chicos.

El profesor explica la monotonía de la función cuadrática utilizando su representación gráfica y aborda los diferentes casos a través de esta gráfica. Además, moviliza las definiciones, elementos y características de la función cuadrática, activando la génesis semiótica, y emplea el referencial teórico de la función cuadrática, activando la génesis discursiva. En consecuencia, las acciones del profesor activan el plano [Sem-Dis], favoreciendo el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético, que permite realizar interpretaciones mediante la gráfica de la función cuadrática, y el paradigma del Análisis Calculatorio, aplicando conceptos, propiedades y métodos numéricos para realizar cálculos precisos y eficaces.

b) Estudio de la función cuadrática

El profesor muestra una diapositiva y explica que una función cuadrática es una función real de una variable real.

$$f : R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\forall\, a, b\ y\ c\ \in R\ / a\ \neq 0$$

Profesor: La forma en que se presentan las funciones cuadráticas varía en los libros; en ocasiones se escribe como y = f(x) = $ax^2 + bx + c$, y en otras como $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes y a ≠ 0

Esta función es muy importante y aparece con frecuencia no solo en el álgebra, sino también en otras ramas de las matemáticas, así como en física e ingeniería. A continuación, en la figura 26, se muestra la definición que el docente utiliza en el libro "Ficha de matemática 4°".

Figura 26 *Definición de la función cuadrática utilizada por el profesor*

- Es una función polinomial de segundo grado, cuya forma general es:

$f(x) = a\,x^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

También se representa:

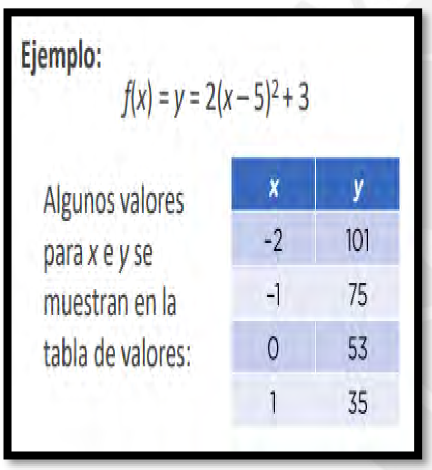
$f(x) = a\,(x - h)^2 + k,$ donde $a \neq 0$ y $a, k, h \in \mathbb{R}$

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

En términos del ETM, al definir la función cuadrática, se activó la génesis semiótica al representarla algebraicamente, lo que nos remite al objeto matemático. Además, su definición se basa en que las funciones cuadráticas tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, lo que activa su génesis discursiva. Por lo tanto, las acciones del profesor activan las génesis del plano [Sem-Dis] y se favorece el paradigma del Análisis Calculatorio.

Posteriormente, se analizó un ejemplo práctico del libro "Ficha de matemática 4°", en el que se muestra que la parábola puede abrirse indefinidamente hacia arriba o hacia abajo. Se destaca que, cuando a > 0, la parábola se abre hacia arriba y su valor mínimo es el vértice; mientras que, cuando a < 0, la parábola se abre hacia abajo y su punto más alto, el vértice, representa el valor máximo (ver figura 27).

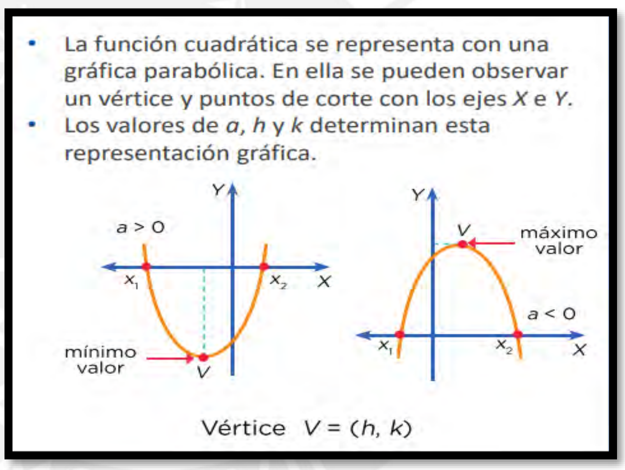
Figura 27. *Característica de la función cuadrática*


Ejemplo:

$f(x) = y = 2(x-5)^2 + 3$

Algunos valores para x e y se muestran en la tabla de valores:

x	y
-2	101
-1	75
0	53
1	35

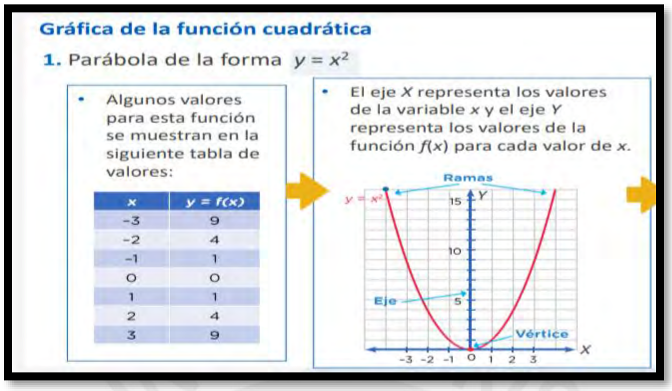


Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

El profesor explica, usando el ejemplo anterior, que la parábola obtenida a partir de los datos que se muestran en la tabla de valores, se abre hacia arriba, lo que significa que su vértice V (1,35) representa el valor mínimo.

En otra imagen, el profesor explica que esta parábola es una curva simétrica respecto del eje Y. Su valor mínimo para f(x) se encuentra en el punto (0,0), conocido como vértice. La parábola tiene dos ramas que se originan en el vértice: una creciente y otra decreciente. Esta parábola corta tanto el eje X como el eje Y en el punto (0,0), que es tanto el vértice como el punto de intersección. La figura 28 muestra las representaciones gráficas de la función cuadrática.

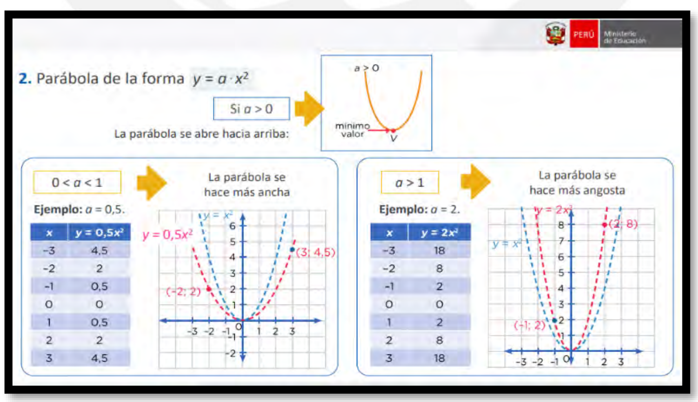
Figura 28. *Representaciones gráficas de la función cuadrática y= x^2*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

A continuación, se observa que en esta parábola se grafica la función y = ax^2. Si a > 0, la parábola se abre hacia arriba y presenta los siguientes casos: cuando 0 < a < 1, se comparan las variaciones respecto a la función y = x^2. El efecto producido por a >1 se denomina dilatación vertical, mientras que si 0 < a < 1, se le llama compresión vertical. Esto se muestra en la figura 29.

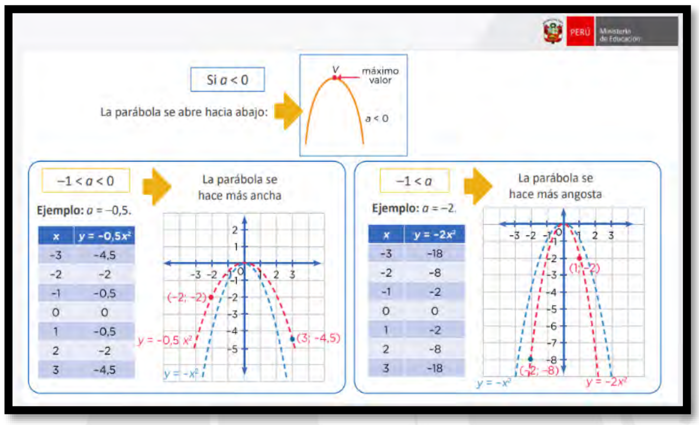
Figura 29. *Gráfica de la función cuadrática en el material de curso*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Posteriormente el profesor presenta el caso donde a < 0 en este caso, la parábola se abre hacia abajo y alcanza su valor máximo en el vértice. Luego se detallan algunos cuando −1 < a < 0, la parábola se ensancha, mientras que cuando a < − 1, la parábola se estrecha. Estos casos se pueden observar en la figura 30, donde se muestra un ejemplo de cada situación.

Figura 30. *Gráfica de la función cuadrática en el material de curso (a < 0)*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

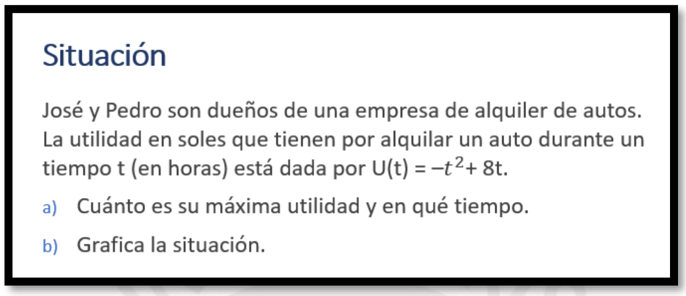
Se notó que el profesor integró las representaciones en lenguaje natural, algebraico y gráfico, luego explicó el concepto basado en las propiedades de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$. De esta manera, activó las génesis discursiva y semiótica en el plano [Sem-Dis], dando prioridad al paradigma del Análisis Calculatorio.

c) Resolución de actividades propuestas

En esta sección de las actividades propuestas, el profesor divide el trabajo en dos partes: la primera implica resolver una situación problemática en equipos bajo su supervisión constante a lo largo de todo el proceso. El objetivo es que los estudiantes logren graficar la función cuadrática utilizando su regla de correspondencia o las fórmulas explicadas en clase. La segunda parte de las actividades consiste en tareas asignadas que se encuentran detalladas en el libro "Ficha de matemática 4", las cuales deben realizarse en casa para reforzar las definiciones, características y gráficas aprendidas.

A continuación, describimos la actividad presentada: El profesor organiza a los estudiantes en 5 equipos de 5 integrantes y les proporciona un papelógrafo y 3 marcadores por equipo. Una vez organizados, muestra la imagen de la situación problemática a trabajar, que se encuentra en la figura 31.

Figura 31. *Actividad 1°: Situación problemática*



Nota. Trabajo en equipo en el aula del cuarto grado de secundaria

Después, el profesor establece el tiempo asignado para la actividad y las instrucciones sobre cómo cada equipo presentará su trabajo. Todos los equipos trabajan de manera organizada, supervisados por el profesor, y consultan sus dudas sobre propiedades, fórmulas para encontrar puntos de corte y dimensiones de la gráfica. Durante el tiempo dedicado al desarrollo de la situación problemática. Finalmente, un estudiante de cada equipo presenta y explica cómo desarrollaron e interpretaron la gráfica obtenida, además de responder a las preguntas formuladas por el profesor. Esto se puede apreciar en la figura 32.

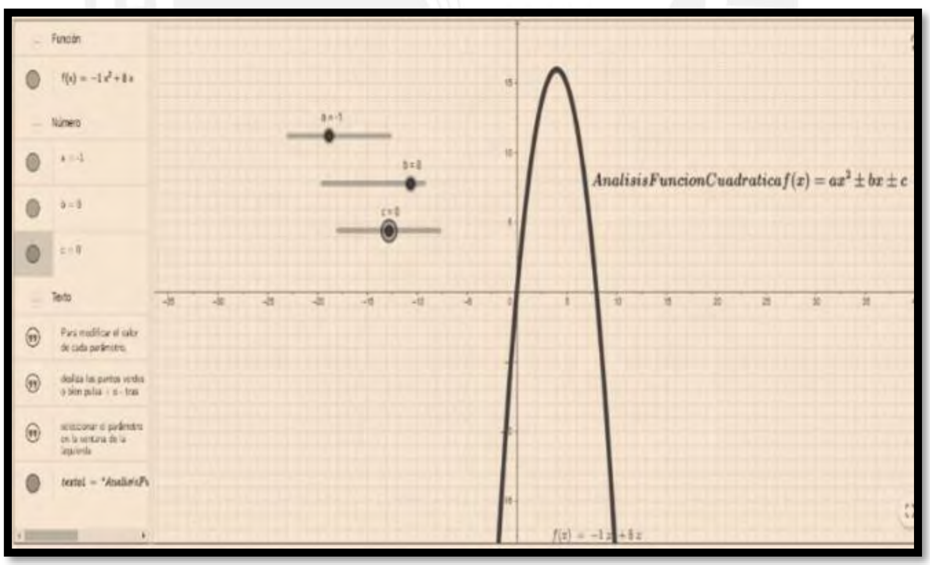
Figura 32. *Actividad 1°: Monitoreo y Exposición del Trabajo en equipos*

Nota. Trabajo en equipo en el aula del cuarto grado de secundaria

Se puede observar que se activaron las tres génesis, lo cual implica la activación de los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]. Esto comenzó con la interpretación y uso de símbolos matemáticos para representar la función cuadrática de manera algebraica. Posteriormente, se emplearon métodos y propiedades matemáticas para resolver la situación problemática, que incluía la determinación del vértice y los puntos de corte. Finalmente, se concluyó con la representación gráfica de la función, lo que permitió visualizarla y resolver los aspectos planteados en el problema, donde explicaron y justificaron los pasos seguidos, y compartieron los resultados obtenidos de manera clara y precisa.

Después de haber trabajado en equipos, el profesor utiliza herramientas informáticas como GeoGebra para reforzar los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre la función cuadrática. Presenta esta herramienta como complemento para mejorar la comprensión creativa y dinámica de conceptos, así como para desarrollar el pensamiento crítico-analítico, el razonamiento lógico-matemático y el razonamiento numérico. Analizan la situación problemática utilizando deslizadores, como se muestra en la figura 33.

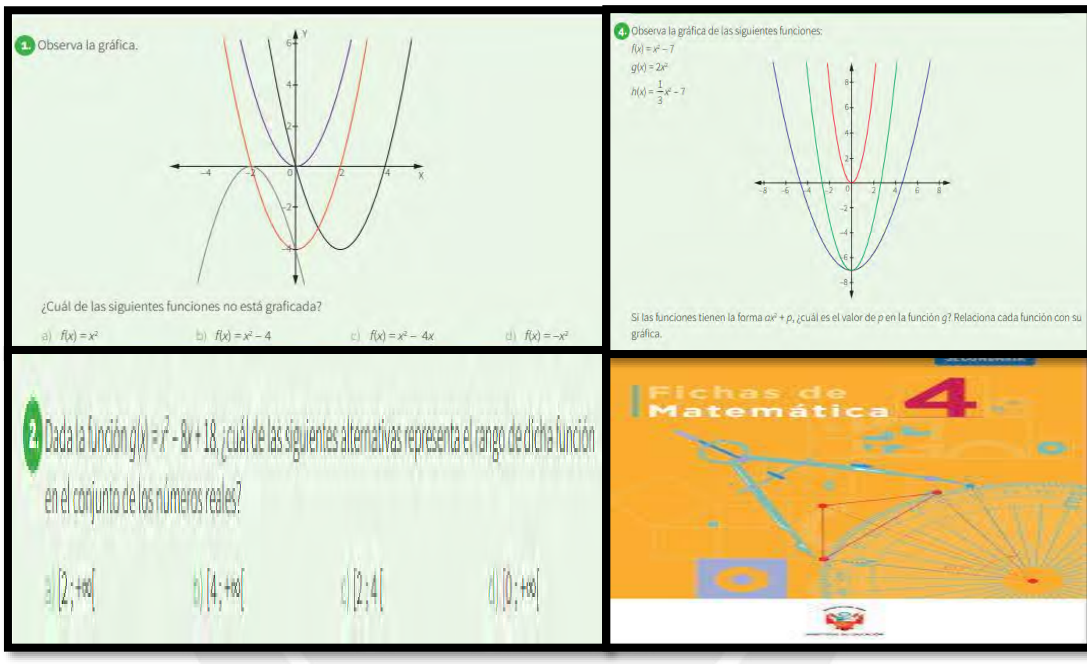
Figura 33. *Análisis de la situación problemática utilizando el GeoGebra*



Nota. Solución gráfica de la situación problemática realizada por el profesor Pedro

Por último, el profesor muestra tres actividades propuestas que se encuentran en el libro "Ficha de matemática 4°". Estas actividades tienen como objetivo clarificar la conceptualización de la función, estimar sus características en forma analítica, crear la representación gráfica en el plano cartesiano, y determinar el dominio y el rango de la función. Esto se puede observar en la figura 34.

Figura 34. *Actividades Propuestas: Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°*



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Análisis del ETM Idóneo

En esta parte del análisis de la respuesta a la pregunta 3 de la entrevista semiestructurada realizada al profesor con el seudónimo de Pedro, se destaca que enseñar la función cuadrática a estudiantes de cuarto año del nivel secundario implica comenzar con una situación problemática que les permita comprender el concepto de función cuadrática y resolverla tanto algebraica como gráficamente. Además, Pedro recomienda el uso del software GeoGebra para facilitar la visualización gráfica y comprender características específicas de la función.

En este contexto, se confirma que el profesor Pedro prioriza trabajar dentro del paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético y del Análisis Calculatorio, como se observa en la tabla 8.

Tabla 8

Pregunta 3 de la entrevista semiestructurada realizada al profesor Pedro.

Pregunta	Respuesta del profesor
(3) Como indica el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” que es necesario iniciar la sesión de aprendizaje con una situación problemática para enseñar función cuadrática (nociones fundamentales - Ver ficha 1). ¿Le parece adecuado este método? Si ■ ☐ No Dé otro ejemplo de alguna situación problemática que Ud. propondría. _________	Porque antes se les daba conceptos a los estudiantes y ellos preguntaban para que me sirve, por esa razón ahora se le da una situación problemática donde se busca diversas estrategias para llegar a la solución, donde el docente actúa como guía para que el aprendizaje sea el más adecuado. Propondría un modelo matemático donde se halle el máximo y mínimo de una función cuadrática, ahí yo utilizaría el software GeoGebra ya que es practico y motivador para los chicos.

En esta etapa del análisis del trabajo matemático en el aula, con el profesor conocido como Pedro, durante la etapa de exploración, se observó que el profesor alentó a sus estudiantes a evaluar numéricamente en una tabla de valores utilizando la función cuadrática, con el objetivo de identificar patrones entre los valores obtenidos. A partir de estos puntos discretos, los estudiantes podían representar la parábola que los conecta en el sistema de coordenadas. En términos del ETM, se activaron los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis], y el profesor promovió el trabajo en los paradigmas del Análisis geométrico/aritmético y del Análisis calculatorio. Esto se puede observar en la tabla 9.

Tabla 9

Análisis del trabajo matemático en el aula del Profesor Pedro en la etapa de exploración

Acciones matemáticas realizadas por el profesor (Episodios)	Tipos de génesis activadas (Criterios)	Planos activados	Paradigmas del análisis que privilegia
E1: Identifica la utilidad de la función cuadrática para la solución de la situación problemática e identifica las variables.	Génesis discursiva: Relaciona con su referencial sobre incrementos constantes para "x" y genera la utilidad U(x).	-	AG

E2: Construye una tabla de valores donde se calcula la Utilidad U(x) de una empresa.	Génesis semiótica: Emplea el registro tabular para calcular valores discretos de la función cuadrática. Génesis instrumental: Utiliza el proceso de calcular el valor numérico de una expresión cuadrática. Génesis discursiva Emplea la definición de una secuencia que sigue la fórmula cuadrática dada para el cálculo de la Utilidad U(x).	[Sem-Ins] [Sem-Dis]	AG AC
E3: Determina la regla de correspondencia de la función.	Génesis semiótica: En el registro tabular calcula la Utilidad de una empresa mediante símbolos matemáticos, fórmula, efectúa el cambio a su representación algebraica para definir la regla de correspondencia de la función cuadrática. Génesis instrumental: Para el cálculo de la $U_{(x)}=-x^2+10x-21$, utilizamos la regla de correspondencia de la función cuadrática, se hace énfasis en el uso de la fórmula y la aplicación práctica de esta para obtener los valores de la función.	[Sem-Ins]	AC
E4: Gráfica los puntos en el sistema de coordenadas y después traza una curva que los conecte para crear la parábola que atraviesa esos puntos.	Génesis semiótica: Coordina el registro tabular, algebraico y gráfico para representar la parábola que pasa por los puntos dados en el plano cartesiano. Génesis discursivo: Fundamenta su explicación con las características de	[Sem-Dis] [Sem-Ins]	AG AC

	una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ Génesis instrumental: Utiliza herramientas como GeoGebra y métodos matemáticos precisos para lograr la representación gráfica de una parábola que pase por los puntos establecidos en el sistema de coordenadas.		
E5: Determina la monotonía de la función cuadrática a partir de su representación gráfica.	Génesis Semiótica: Interpretar y comunicar de manera efectiva cómo los signos y símbolos matemáticos se utilizan para representar la relación entre “x” e “y” en la función cuadrática.	[Sem-Dis]	AG AC
	Génesis discursiva: Fundamenta su explicación de la monotonía al eje “x” de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$		

En las respuestas a las preguntas 4, 5 y 6 dadas por el Profesor Pedro, vemos que sus acciones reflejan sus respuestas. Él favorece trabajar en el enfoque del Análisis calculatorio, utilizando la definición y las características gráficas de la función cuadrática sin detenerse a reflexionar sobre su esencia, basándose en el libro "Ficha de Matemática 4°" del docente.

Para finalizar esta etapa, el profesor empleó el software GeoGebra para su presentación, con el objetivo de ayudar a sus estudiantes a comprender la monotonía de la función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$,. Esto se logró al visualizar su representación gráfica utilizando los deslizadores disponibles en GeoGebra. Ver tabla 10.

Tabla 10

Pregunta 4, 5, 6 de la entrevista semiestructurada realizada al profesor Pedro.

Preguntas	Respuesta del profesor
(4) De estas definiciones dadas para la función cuadrática como muestra el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” (Ver ficha 2), considera que es la más adecuada para los estudiantes del cuarto año de secundaria. ¿Por qué? _______________	Para los chicos del cuarto grado del nivel secundario, si considero apropiado porque les explica de forma general los conceptos, aunque en el libro más se enfoca a la resolución de problemas.
Usted presenta otra manera de definir la función cuadrática. Fundamente su respuesta_____________	Me guio del libro del Ministerio de Educación “Ficha de matemática 4”, del Libro del docente que nos proporciona el Ministerio.
(5) De acuerdo a la forma de describir la gráfica de la función cuadrática y sus características (Ver ficha 3), considera que es adecuado para la enseñanza a estudiantes del cuarto grado de secundaria este proceso que presenta el libro del Ministerio de Educación. “Ficha de Matemática 4” Sí ■ No □ ¿Por qué? _____________________	Si es adecuado para los estudiantes ya que especifican los casos de cada gráfica de la parábola. En la ficha 3 se presenta un caso de una parábola de la forma y = $x^{2.}$ Esta curva es simétrica respecto al eje Y y tiene un punto mínimo en f(x) en el punto (0, 0), conocido como vértice.
¿Usted lo presenta de otra manera diferente en el desarrollo de su sesión de aprendizaje? Si su respuesta es afirmativa, describa el por qué ______________________________	Me baso en la misma metodología como indica el libro, lo diferente es que busco estrategias para la enseñanza y ejecución del problema en el proceso didáctico.
(6) Sobre el desarrollo de cómo graficar la función cuadrática. (Ver ficha 4), usted se guía del libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” o propone otro tipo de desarrollo. Fundamente su respuesta.	Bueno me guio del libro ya que es el libro base, pero trato de incluir mis propias estrategias para el desarrollo de la sesión de aprendizaje.

En el análisis de la tabla 11, el profesor no se centra en el paradigma del Análisis Real (AR). En su lugar, adopta los paradigmas del Análisis Aritmético/Geométrico y del Análisis Calculatorio, utilizando la definición de función cuadrática como un marco teórico de referencia.

Además, se activaron las génesis del plano [Sem-Dis], ya que la función cuadrática se presenta tanto en el registro algebraico como gráfico. Esta representación nos permite visualizar el objeto función cuadrática, basándose en sus características fundamentales. Además, mediante la representación gráfica facilitada por GeoGebra, se pudieron establecer diversas características de la función cuadrática, como su monotonía. En este caso, se activaron las génesis del plano [Ins-Dis].

El profesor da prioridad al paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG) en su clase, utilizando la representación gráfica para interpretar y deducir las características inherentes a toda función cuadrática. Además, los elementos y propiedades identificados en la función cuadrática son utilizados para el cálculo de manera independiente a su naturaleza, por lo tanto, el profesor también favorece el paradigma del Análisis Calculatorio (AC).

Tabla 11

Análisis del trabajo matemático en el aula del Profesor Pedro en la etapa de estudio de la función cuadrática.

Acciones matemáticas realizadas por el profesor (Episodios)	Tipos de génesis activadas (Criterios)	Planos activados	Paradigmas del análisis que privilegia
E1: Define la función cuadrática	Génesis semiótica: Utiliza el lenguaje algebraico para establecer la definición de la función cuadrática. Génesis discursiva: Una función cuadrática está definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$	[Sem - Dis]	AC
E2: Define las características de la función cuadrática definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$	Génesis semiótica: Integra el uso de la expresión verbal, el lenguaje algebraico y la representación gráfica para definir los componentes y propiedades de la función cuadrática. Génesis discursiva: Apoya su explicación utilizando las propiedades inherentes de una función cuadrática. $f(x) = ax^2 + bx + c$	[Sem-Dis]	AC

E3: Define la función cuadrática $f(x)$ = ax^2 + bx + c ; por medio de casos particulares.	Génesis semiótica: Integra el uso de la representación algebraica y gráfica para definir la parábola con la forma y = a.x^2. Si a > 0; la parábola se abre hacia arriba; o en caso contrario si a < 0, se abre hacia abajo. Génesis discursiva: Reconoce el valor del número "a”	[Sem-Dis]	AG
E4: Determina la monotonía de la función definida por $f(x)$ = ax^2 + bx + c empleando un ambiente de representaciones dinámicas en el GeoGebra.	Génesis Semiótica: Aplica la definición de función cuadrática y las modificaciones gráficas de una función. Génesis discursiva: Apoya su explicación utilizando las propiedades de una función cuadrática expresada como $f(x)$ = ax^2 + bx + c, que describe la transformación de la función cuadrática.	[Sem-Dis]	AG AC

La acción del profesor Pedro es consistente con lo expresado en la respuesta a la pregunta 7 durante la entrevista, ya que elige sus ejercicios del libro "Ficha de matemática 4°". Esto se evidencia en la tabla 12.

Tabla 12

Pregunta 7 de la entrevista semiestructurada realizada al profesor Pedro.

Preguntas	Respuesta del profesor
(7) Según las siguientes actividades (Ver ficha 5) que se indica en el libro del Ministerio de Educación (Minedu) “Ficha de matemática 4”, ¿usted utiliza estos modelos en la misma secuencia para el desarrollo de su clase o cambia el orden de la secuencia? ¿Porqué?	Cambio el orden, según el nivel de los estudiantes y también a veces aumento alguna actividad puesto que conocen los conceptos de la función cuadrática y pueden resolverlos.

En la tabla 13, se observa que el profesor da prioridad al paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG), empleando las características de la gráfica de la función cuadrática para deducir elementos como el intercepto con el eje "x". Además, favorece el paradigma del Análisis Calculatorio (AC), utilizando el marco teórico como justificación y herramienta semiótica para el cálculo.

Tabla 13

Análisis del trabajo matemático en el aula del Profesor Pedro en la etapa resolución de Actividades propuestas (Actividad 1 en grupo) de la función cuadrática.

Acciones matemáticas realizadas por el profesor (Episodio)	Tipos de génesis activadas (Criterios)	Planos activados	Paradigmas del análisis que privilegia
E1: Identifica las variables y la regla de correspondencia.	Génesis semiótica: Identifica la expresión algebraica de una función cuadrática y sus variaciones. Génesis discursiva: Reconoce que $f(x)$ = ax^2+bx+ c son reglas de correspondencia que relaciona las variables entre sí, explicando cómo cada valor de una variable se corresponde con un valor especifico de otra variable.	[Sem - Dis]	AC
E2: Construye tablas de valores y realiza operaciones aritméticas para obtener la función cuadrática.	Génesis semiótica: Utiliza una tabla para obtener las coordenadas de puntos específicos que forman parte de la gráfica de la función. Génesis instrumental: utiliza herramientas y métodos matemáticos específicos para generar y verificar tablas de valores que ayuden a establecer la función cuadrática de manera efectiva y precisa.	[Sem-Ins]	AG AC

E3: Representa gráficamente la función cuadrática en el papelógrafo con su respectivo dominio y rango.	Génesis semiótica: Interpreta y representa visualmente la función cuadrática en un papelógrafo, utilizando símbolos matemáticos para comunicar su dominio, rango y otras características esenciales de manera gráfica y comprensible. Génesis Instrumental: Uso de herramientas físicas y matemáticas para crear una representación gráfica precisa y comprensible de la función cuadrática, mostrando explícitamente su dominio, rango y otras propiedades matemáticas. Génesis Discursiva: Guía a través de la explicación y la narración de cómo representar gráficamente una función cuadrática en un papelógrafo, enfatizando la comprensión del dominio, rango y otras propiedades matemáticas a través de la interpretación visual.	[Sem-Ins] [Ins-Dis]	AG AC
E4: Determina la monotonía de la función a partir de su representación gráfica y de los valores tabulados.	Génesis instrumental: Uso de herramientas matemáticas y gráficas para analizar la monotonía de una función cuadrática, proporcionando una base sólida para entender su comportamiento en diferentes intervalos de su dominio. Génesis discursiva: Fundamenta su explicación de la gráfica y la tabla de valores para determinar la monotonía de la función si es creciente, decreciente, puntos críticos.	[Ins-Dis]	AG AC

En el análisis de la fase de resolución de actividades propuestas, se nota que el profesor Pedro se enfoca en el paradigma del Análisis Geométrico/Aritmético (AG). Esto se debe a que la representación gráfica de la función cuadrática, tal como se presenta en el libro "Ficha de Matemática 4°", facilita la identificación de las coordenadas cartesianas de los puntos y la comprensión de su representación algebraica correspondiente. Además, da prioridad al paradigma del Análisis Calculatorio (AC). Consultar tabla 14 para más detalles.

Tabla 14

Análisis del trabajo matemático en el aula del Profesor Pedro en la etapa resolución de Actividades propuestas de la función cuadrática.

Acciones matemáticas realizadas por el profesor (Episodios)	**Tipos de génesis activadas (Criterios)**	**Planos activados**	**Paradigmas del análisis que privilegia**
E1: Reconoce las coordenadas de los puntos que pertenecen a la gráfica de una función.	Génesis semiótica: Interpreta y representa de manera visual las coordenadas de los puntos en la gráfica de una función cuadrática, empleando símbolos matemáticos y convenciones gráficas para expresar de forma precisa la relación entre las variables implicadas. Génesis discursiva: Interpreta la gráfica de la función cuadrática en un plano cartesiano, destacando que cada punto en la gráfica corresponde a un par ordenado (x,y), donde “x” es la abscisa (coordenada horizontal) e “y” es la ordenada (coordenada vertical).	[Sem-Dis]	AG

E2: Reconoce la cantidad puntos pertenecientes a la gráfica $f(x) = ax^2 + bx + c$, para determinar su regla de correspondencia.	Génesis Instrumental: Realiza cálculos específicos para determinar los puntos, construyendo una tabla de valores donde se seleccionan diferentes valores de x, se calculan los correspondientes valores de f(x), y se identifican los puntos específicos en la gráfica. Génesis discursiva: Explica de manera estructurada cómo se determinan los puntos en la gráfica de la función cuadrática. Involucra la interpretación de la regla de correspondencia $f(x)=ax^2+bx+c$; donde a, b y c son coeficientes que afectan la forma y la posición de la parábola en el plano cartesiano.	[Ins-Dis]	AG
E3: Determina la regla de correspondencia de la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$	Génesis discursiva: Identifica y explica cada término de la función ax^2+bx+c, donde a, b, y c son coeficientes que determinan la forma y el comportamiento de la parábola en el plano cartesiano. Génesis instrumental: Realiza cálculos específicos con la función cuadrática, como la evaluación de la función para valores dados de “x”, la construcción de tablas de valores, y el análisis de las propiedades algebraicas y geométricas de la parábola.	[Dis-Ins]	AC

Finalmente, los resultados indican cómo el enfoque efectivo del profesor en el uso de actividades propuestos en el aula activa las génesis, componentes y planos verticales del ETM ideal. La tabla 15 resume los análisis de cada episodio en las tres etapas correspondientes.

Tabla 15

Resumen del ETM idóneo

Etapas y Episodio		Tipificación de las génesis, componentes y planos verticales activados						
		Genesis Semiótica		Genesis Instrumental		Genesis Discursiva		Plano vertical
		Representamen	Visualización	Artefacto	Construcción	Referencial	Prueba	
Etapa 1	Episodio 1	-	-	-	-	X	-	-----
	Episodio 2	X	-	-	X	X	X	[Sem-Ins] [Sem-Dis]
	Episodio 3	X	X	-	X	-	-	[Sem-Ins]
	Episodio 4	X	X	X	X	X	X	[Sem-Dis] [Sem-Ins]
	Episodio 5	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
Etapa 2	Episodio 1	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
	Episodio 2	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
	Episodio 3	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
	Episodio 4	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
Etapa 3	Episodio 1	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
	Episodio 2	X	X	X	X	-	-	[Sem-Ins]
	Episodio 3	X	X	X	X	X	X	[Sem-Ins] [Ins-Dis]
	Episodio 4	-	-	X	X	X	X	[Ins-Dis]
	Episodio 1	X	X	-	-	X	X	[Sem-Dis]
	Episodio 2	-	-	X	X	X	X	[Ins-Dis]
	Episodio 3	-	-	X	X	X	X	[Dis-Ins]

Basándonos en todo lo descrito y analizado en el capítulo III, presentamos las conclusiones en la siguiente sección.

Conclusiones

A continuación, se exponen las consideraciones finales y perspectivas para futuras investigaciones relacionadas al Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores de secundaria que enseñan la función cuadrática a estudiantes del cuarto grado de secundaria.

Respecto a los antecedentes de investigación

Se concluye que la enseñanza de las matemáticas sobre la función cuadrática es un tema que cuenta con varios estudios, los cuales han tenido resultados similares a este. Así, Adaobi y Bansilal (2018) comunicaron la necesidad de desarrollar el conocimiento de los docentes para enseñar la función cuadrática, aspecto necesario en el perfil idóneo del docente. De la misma forma, Almonacid (2020), así como el de Díaz, Aravena y Flores (2020), quienes centraron su investigación en la función cuadrática y priorizaron el análisis del ETM a través de una secuencia de actividades. Además, el trabajo de Cervantes, Berrio, Contreras y Martínez (2020) nos sirve de guía para enfocar nuestra investigación, especialmente en la definición y establecimiento de los procedimientos metodológicos y tipos de instrumentos para realizar nuestro análisis.

Estas investigaciones nos llevaron a examinar los estudios de Espinoza (2017) y Henríquez (2017), quienes subrayan la utilidad de la teoría del ETM, proporcionando herramientas conceptuales para describir e interpretar las acciones de los profesores a partir del análisis de su práctica docente. En particular, ambos estudios priorizan el análisis del ETM ideal del profesor de matemáticas.

Así, esto nos lleva a reflexionar sobre la constante inquietud de contar con un equipo docente que esté fortalecido tanto en aspectos pedagógicos como en el análisis de su Espacio de Trabajo Matemático.

Respecto a los objetivos y pregunta de esta investigación

Por tanto, se concluye que se ha alcanzado el objetivo general de la investigación, el cual es "Analizar el Espacio de Trabajo Matemático adecuado del profesor de secundaria al enseñar la función cuadrática a estudiantes de cuarto año del nivel secundario". De esta manera, se responde a la pregunta de investigación planteada: "¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático adecuado del profesor de secundaria al enseñar la función cuadrática a estudiantes de cuarto grado del nivel secundario?". Este espacio de trabajo se define por las acciones realizadas con artefactos, registros de representación y referencias teóricas relacionadas con los procesos de construcción, visualización y justificación, respectivamente.

Sobre el primer objetivo específico, que consiste en “caracterizar el espacio de trabajo matemático potencial del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática", se concluye que este espacio potencial se sostiene en tres fases: exploración, estudio de la función cuadrática y resolución de actividades propuestas.

Acerca del segundo objetivo específico, que consiste en "caracterizar el espacio de trabajo matemático actual del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática”, se concluyó que, en el estado actual, se activan las tres génesis (semiótica, instrumental y discursiva), así como los tres planos verticales ([Sem-Dis], [Sem-Ins] y [Ins-Dis]).

Respecto a los fundamentos teóricos de esta investigación

En relación con el marco teórico basado en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de Kuzniak (2011). Se concluyó que esta teoría define el ETM como un entorno que facilita la resolución de problemas matemáticos, integrando componentes epistemológicos (Representamen, Artefacto, Referencial) y cognitivos (Visualización, Construcción, Prueba). Asimismo, la investigación identifica tres tipos de ETM: de referencia, idóneo y personal, según el individuo.

Respecto a perspectivas futuras de investigación

El uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje es fundamental, según lo destacan varios investigadores, ya que puede ofrecer herramientas potenciales que faciliten procesos cognitivos, particularmente en relación con el Espacio de Trabajo Matemático, favoreciendo la visualización, construcción y prueba. Por tanto, se sugiere la exploración de software o programas que promuevan el aprendizaje y que sean un recurso valioso para los docentes en su labor educativa.

Por tal motivo se considera fundamental realizar un análisis del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) ideal del profesor, resultante de esta investigación, en relación con el objeto de estudio, la función cuadrática y se sugiere complementar este análisis con investigaciones que se centren en examinar tanto el ETM potencial como el ETM efectivo del profesor en el nivel secundario. El objetivo es establecer conexiones entre lo que el profesor organiza y lleva a cabo durante la sesión de aprendizaje en el aula.

Referencias

Adaobi J.,Ifunanya U., Sarah B. (2018). *Pre-Service Mathematics Teachers' Knowledge Of Mathematics For Teaching: Quadratic Functions. University of Kwazulu-Natal, South Africa. Problems of education in the 21 stcentury 76(6)*. https://doi,org/10.33225/pec/18.76.847

Almonacid, A. (2020). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades*. Tesis de Maestría. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://hdl.handle.net/20.500.12404/12602

Anato, P. (2022). *Geogebra y su incidencia en la enseñanza de la función cuadrática. [GeoGebra and its impact on the teaching of the quadratic function].* Delectus.5(1). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela. Recuperado de http://portal.amelica.org/ameli/journal/390/3902822003/3902822003.pdf

Calderón. R, Franco. F, Alvarado T. (2018). *Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del Geogebra*. Revista: Polo del Conocimiento, 3 (22), 449 – 470. https:// doi,org/10.23857/pc.v3i8.624

Carrillo L. y Trujillo J. (2021). *Espacio de trabajo matemático idóneo de un profesor universitario con respecto a la derivada de una función real*. Quintaesencia, 12. https://doi.org/10.54943/rq.v12i.102

Cervantes J, Berrío J, Contreras M y Martínez V. (2020). *Espacios de trabajo geométrico personal de profesores de matemáticas en formación*. *Educación y Humanismo*, *23*(40). https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4083

Climent, N., Espinoza, G., Carrillo, J., Henríquez C., y Ponce, R. (2021). A lesson on thales' theorem viewed from the specialized teacher's knowledge. *Educacion Matematica*, *33*(1). https://doi.org/10.24844/EM3301.04

Contreras, L., Carrillo, J., Climent, N. y Montes, M. (2019). *Del trabajo matemático del aula al conocimiento del formador.* Universidad de Huelva. España. https:// doi.org/www.researchgate.net/publication/338356791

Díaz, V., Aravena, M., Flores G. (2020). *Solving Problem Types Contextualized to the Quadratic Function and Error Analysis: A Case Study*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16(11). https://doi.org/10.29333/ejmste/8547

Espinoza, C. (2020). *Modelización de la función cuadrática mediada por tracker en estudiantes de quinto grado de secundaria.* Tesis de Maestría. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio//handle/20.500.12404/17784

Espinoza G., & Verdugo P. (2022). *Las representaciones de la función durante la enseñanza.* Huaman Review, 6-18. Revista Internacional de Humanidades https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4082

Flores Salazar, J. V., Vivas Pachas, J. L., & Ticse Aucahuasi, M. A. (2021). Una mirada al Trabajo Matemático de los Estudiantes en el Dominio del Análisis. REMATEC, 16. https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2021.n.p262-276.id485

Kuzniak, A. (2016). *La Teoría de los Espacios de Trabajo Matemáticos Desarrollo y Perspectivas,* 41- 60. Universidad de Paris, LDAR, Francia.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). *El espacio de trabajo matemático y sus génesis. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 237-251. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23942/24097

Hernández, R., M., Fernández, C. y Baptista, M. d. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta edición). McGRAW – Hill/Interamericana Editores S.A.

Henríquez C., Rodrigo P., Espinoza G. (2021). *Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza*. Enseñanza de las ciencias. Enseñanza de las Ciencias 39(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Henríquez Rivas, C., Menares Espinoza, R., & Montoya Delgadillo, E. (2014). *Construcción de un espacio de trabajo matemático en la formación de profesores*. XIX JNEM.

Henríquez, C., Espinoza, G. (2018). *Relación ETM-MTSK: Conexiones entre la Génesis Semiótica y el Conocimiento de los Temas.* En Acta Simposio Internacional, 6, pp. 507-511. DOI: 10.13140/RG.2.2.22952.72962

Lehmann Ch. (1998). *Álgebra*. Editorial Limusa. 101 - 134. México

Neira V, y Flores M. (2021). *Estudio de la función cuadrática, que involucran parámetros, con el apoyo del GeoGebra*. Quintaesencia, 12, 146-152. https://doi.org/10.54943/rq.v12i1.48

Ministerio de Educación del Perú (2016). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Ministerio de Educación del Perú (2016). *Programación curricular de Educación Secundaria*. Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Ministerio de Educación del Perú (2022). *Cuaderno de trabajo de matemática, Ficha de matemática 4.* Obtenido de https://materialeducativoperu.com/cuadernos-de-trabajo/secundaria/cuarto/matematica/

Ministerio de Educación del Perú (2022). *Cuaderno del docente de matemática, Ficha de matemática 4.* Obtenido de https://drive.google.com/file/d/16ISMdAwHaguS2C-EksEZ4rhZMPYSaX0J/view

Molina, L. (2021). *Identificación de conocimientos didáctico matemático del Profesor de secundaria sobre Funciones Lineales y Cuadráticas*. Tesis de Maestría. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú Recuperado de https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/19814

Morales, J., Alpízar, M., Quesada, S. & Fernández, H. (2023*). Diseño de material didáctico para la enseñanza de la función lineal y la función cuadrática*. *Repertorio Científico*, *26*(2), 61–75. https://doi.org/10.22458/rc.v26i2.5066

Morgado, A., Wagner, E., Lima, E. y Pinto Carvalho, P. (2000). *La matemática en la enseñanza media*. Lima, Peru.

Mutambara, LHN, Tendere, J. y Chagwiza, CJ (2020). *Exploring the Conceptual Understanding of the Quadratic Function Concept in Teachers' Colleges in Zimbabwe.* Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16 (2), em1817. https://doi.org/10.29333/ejmste/112617

Padilla, I. y Acevedo, J. (2022). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. *Sophia*, *18*(2). https://doi.org/10.18634/sophiaj.18v.2i.1175

Reyes, Á., Torres, I., Tumbaco, A., & Zea, R. (2023). *Recursos educativos digitales y el proceso de enseñanza aprendizaje sobre funciones cuadráticas en la unidad educativa Ancón.* Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7(1), 3207-3246. DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.4651

Rodríguez, R. y Jardey, O. (2022*). La motivación y el estudio de la función cuadrática con GeoGebra. Educación y Humanismo*, 24(42), 46-67. https://doi.org/10.17081/eduhum.24.42.4864

Solorzano-Marín, J. O., & Rodríguez-Cedeño, F. V. (2023). *GeoGebra como herramienta interactiva en la resolución de problemas de función cuadrática. MQRInvestigar*, *7*(4), 1706–1720. https://doi.org/10.56048/MQR20225.7.4.2023.1706-1720

Anexos

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América.

SUM UNMSM

SISTEMA ÚNICO DE MATRÍCULA

Plan de Estudios

Facultad : 6 - EDUCACIÓN
Escuela : 1 - E.P. de Educación
Especialidad : 1 - Matematica y Fisica
Plan : 2018 - Plan de Estudios 2018

Ciclo 3

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180301	1	ÁLGEBRA I	4.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–
E180302	1	CÁLCULO I	4.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–
E180303	1	COMPLEMENTO DE MATEMÁTICA	3.0	O	–	HSO104	MATEMÁTICA APLICADA A LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS	–

Ciclo 4

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180304	1	ALGEBRA II	4.0	O	–	E180301	ÁLGEBRA I	–
E180305	1	CÁLCULO II	4.0	O	–	E180302	CÁLCULO I	–
E180306	1	FÍSICA I	4.0	O	–	NR	NR	–

Ciclo 5

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180307	1	FÍSICA II	4.0	O	–	E180306	FÍSICA I	–
E180308	1	CÁLCULO III	4.0	O	–	E180305	CÁLCULO II	–
E180309	1	ÁLGEBRA III	4.0	O	–	E180304	ALGEBRA II	–

Ciclo 6

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180310	1	FISICA III	4.0	O	–	E180307	FÍSICA II	–
E180311	1	GEOMETRÍA	3.0	O	–	NR	NR	–
E180312	1	ESTADISTICA INFERENCIAL	3.0	O	–	E180020	ESTADISTICA APLICADA A LA EDUCACIÓN	–

Ciclo 7

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180313	1	DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA I	4.0	O	–	E180017	DIDÁCTICA GENERAL	–
E180314	1	ECUACIONES DIFERENCIALES	3.0	O	–	E180305	CÁLCULO II	–
E180315	1	FÍSICA IV	3.0	O	–	E180310	FISICA III	–
E180323	1	PRÁCTICA PREPROFESIONAL III	3.0	O	–	E180024	PRACTICA PRE PROFESIONAL II	–

Ciclo 8

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América.

SUM UNMSM

SISTEMA ÚNICO DE MATRÍCULA

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E180316	1	DIDACTICA DE LA MATEMATICA II	4.0	O	–	E180313	DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA I	–
E180317	1	ANÁLISIS REAL	3.0	O	–	E180305	CÁLCULO II	–
E180318	1	HISTORIA DE LA MATEMÁTICA	3.0	O	–	E180305	CÁLCULO II	–
E180318	1	HISTORIA DE LA MATEMÁTICA	3.0	O	–	E180304	ALGEBRA II	–
E180324	1	PRÁCTICA PREPROFESIONAL IV	3.0	O	–	E180323	PRÁCTICA PREPROFESIONAL III	–

Ciclo 9

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E1800E01	1	EDUCACION Y DESARROLLO HUMANO SOSTENIBLE	4.0	E	GC	NR	NR	–
E1800E02	1	EDUCACION COMPARADA	4.0	E	GC	NR	NR	–
E180319	1	DIDÁCTICA DE LA FISICA I	4.0	O	–	E180017	DIDÁCTICA GENERAL	–
E180320	1	HISTORIA DE LA FÍSICA	2.0	O	–	E180310	FISICA III	–
E180325	1	PRÁCTICA PREPROFESIONAL V	5.0	O	–	E180324	PRÁCTICA PREPROFESIONAL IV	–

Ciclo 10

Asignatura						Pre-Requisito		
Código	Esp.	Nombre Descriptivo	Créd.	Tipo	Grupo	Código	Nombre Descriptivo	Grupo
E1800E03	1	EVALUACION INSTITUCIONAL	4.0	E	GC	NR	NR	–
E1800E04	1	EDUCACION PARA LA SALUD Y PRIMEROS AUXILIOS	4.0	E	GC	NR	NR	–
E180321	1	DIDÁCTICA DE LA FISICA II	4.0	O	–	E180319	DIDÁCTICA DE LA FISICA I	–
E180322	1	INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA	3.0	O	–	E180317	ANÁLISIS REAL	–
E180326	1	PRÁCTICA PREPROFESIONAL VI	5.0	O	–	E180325	PRÁCTICA PREPROFESIONAL V	–

Resumen de Créditos Aprobados	
Créditos obligatorios estudios generales	107.0
Créditos obligatorios especialidad	107.0
Créditos electivos generales	4.0
Créditos electivos especialidad	8.0
Créditos alternativos	0.0
Créditos optativos	0.0
Creditaje total	213.0

Leyenda:

O : Obligatorio **E** : Electivo

AL : Alternativo **Créd** : Créditos de la asignatura

GUÍA DE ENTREVISTA

Las respuestas que Ud. nos brinde en esta entrevista son de importancia para nuestra investigación. Les pedimos, por favor, responda con absoluta confianza y sinceridad, ya que todas sus respuestas se mantendrán en reserva. Gracias.

Información personal

1. ¿Cuántos años de experiencia tiene como Docente?
2. Su especialidad es:
   ( ) Matemática
   ( ) Matemática e Informática
   ( ) Matemática – Física
3. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando el curso de matemática? ¿En qué grados y niveles?
4. ¿Cuántos años va enseñando el curso de matemática en esta Institución Educativa?

Información sobre la enseñanza

A partir de su experiencia docente en la enseñanza,

1. ¿Cómo planifica el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes del cuarto año de secundaria?
2. ¿Qué estrategias y técnicas de evaluación emplea con intención formativa en los estudiantes del cuarto año de secundaria?

A partir de su experiencia docente en la enseñanza de la **función cuadrática** a estudiantes del cuarto año de secundaria,

3. Como indica el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” que es necesario iniciar la sesión de aprendizaje con una situación problemática para enseñar función cuadrática (nociones fundamentales - Ver ficha 1).
   ¿Le parece adecuado este método? Sí ☐ No ☐
   Dé otro ejemplo de alguna situación problemática que Ud. propondría.
   ____

4. De estas definiciones dadas para la función cuadrática como muestra el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” (Ver ficha 2), considera que es la más adecuada para los estudiantes del cuarto año de secundaria. ¿Por qué? _____
Usted presenta otra manera de definir la función cuadrática.
Fundamente su respuesta. ____

5. De acuerdo a la forma de describir la gráfica de la función cuadrática y sus características (Ver ficha 3), considera que es adecuado para la enseñanza a estudiantes del cuarto grado de secundaria este proceso que presenta el libro del Ministerio de Educación. “Ficha de Matemática 4”
Sí ☐ No ☐
¿Por qué? ____
¿Usted lo presenta de otra manera diferente en el desarrollo de su sesión de aprendizaje?
Si su respuesta es afirmativa, describa el por qué ___________________________

6. Sobre el desarrollo de cómo graficar la función cuadrática. (Ver ficha 4), usted se guía del libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” o propone otro tipo de desarrollo.
Fundamente su respuesta. ____

7. Según los siguientes ejemplos (Ver ficha 5) que se indica en el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4”, ¿usted utiliza estos modelos en la misma secuencia para el desarrollo de su clase o cambia el orden de la secuencia? ¿Por qué?
____

8. ¿Usted utiliza como fundamento solo el libro que proporciona el Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” o además utiliza otro libro de texto? ______________
Si utiliza otro libro, ¿por qué lo utiliza?, ¿qué lo hace adecuado? ____________________
¿Qué características puntuales llamó más su atención para la enseñanza de la función cuadrática? ____

9. ¿Cuál es la secuencia de actividades que usted recomendaría a un profesor que va a enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año de secundaria?

	DIMENSIONES	PREGUNTA	OBJETIVO	ITEMS
ETM IDÓNEO	ETM POTENCIAL	¿Cómo planifica el proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes del cuarto año de secundaria?	Planifica los conocimientos que se utiliza en el proceso de enseñanza y aprendizaje que organiza en su ETM Potencial.	**(1)**
		Como indica el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” que es necesario iniciar la sesión de aprendizaje con una situación problemática para enseñar función cuadrática (nociones fundamentales - Ver ficha 1). ¿Le parece adecuado este método? Si ☐ ☐ No Dé otro ejemplo de alguna situación problemática que Ud. propondría. ___________	Reconocer las acciones que permite la activación de las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG	**(3)**
		De acuerdo con la forma de describir la gráfica de la función cuadrática y sus características (Ver ficha 3), considera que es adecuado para la enseñanza a estudiantes del cuarto año de secundaria este proceso que presenta el libro del Ministerio de E☐cación☐Ficha de Matemática 4”. Si No ¿Por qué? ____________________________ ¿Usted lo presenta de otra manera diferente en el desarrollo de su sesión de aprendizaje? Si su respuesta es afirmativa, describa el por qué________________________________	Reconocer las acciones que activan las génesis del ETM idóneo del profesor, privilegiando el paradigma AG y AC.	**(5)**
		¿Usted utiliza como fundamento solo el libro que proporciona el Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” o además utiliza otro libro de texto? __________________________ Si utiliza otro libro, ¿por qué lo utiliza?, ¿qué lo hace adecuado? _____________ ¿Qué características puntuales llamó más su atención para la enseñanza de la función cuadrática? ___________________	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	**(8)**

ETM IDÓNEO		¿Cuál es la secuencia de actividades que usted recomendaría a un profesor que va a enseñar la función cuadrática a estudiantes del cuarto año de secundaria?	Identificar los conocimientos y tareas que organiza en su ETM idóneo.	**(9)**
	ETM ACTUAL	¿Qué estrategias y técnicas de evaluación emplea con intención formativa en los estudiantes del cuarto año de secundaria?	Determina las estrategias y técnicas de evaluación a utilizarse en la secuencia didáctica en su ETM Actual	**(2)**
		De estas definiciones dadas para la función cuadrática como muestra el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” (Ver ficha 2), considera que es la más adecuada para los estudiantes del cuarto año de secundaria. ¿Por qué? ______________ Usted presenta otra manera de definir la función cuadrática. Fundamente su respuesta____________	Identificar las representaciones semióticas que utiliza para definir la función cuadrática, sin privilegiar al paradigma AR.	**(4)**
		Sobre el desarrollo de cómo graficar la función cuadrática. (Ver ficha 4), usted se guía del libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4” o propone otro tipo de desarrollo. Fundamente su respuesta____________	Analizar las acciones que realiza el profesor, las cuales activan las génesis de su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	**(6)**
		Según los siguientes ejemplos (Ver ficha 5) que se indica en el libro del Ministerio de Educación (MINEDU) “Ficha de Matemática 4”, ¿usted utiliza estos modelos en la misma secuencia para el desarrollo de su clase o cambia el orden de la secuencia. ¿Porqué? _________________________	Analizar las tareas que organiza en su ETM idóneo, privilegiando el paradigma AG y AC.	**(7)**

LISTA DE COTEJO - SESIÓN DE APRENDIZAJE

Docente:	
Asignatura:	
Tema de clase:	
Fecha:	Duración:
Observador:	

Instrucciones:

A continuación, se presentará una serie de enunciados, las cuales deben ser leídas con atención, luego marque con un aspa (x) la columna (alternativas de respuesta) que mejor se adecue a cada criterio a evaluar. Duración de la escala 20 minutos aproximado.

1	2	3	4	5
Muy Bajo	**Bajo**	**Medio**	**Alto**	**Muy Alto**

CRITERIOS A EVALUAR						
PLANIFICACIÓN						
1	El docente ha preparado adecuadamente los recursos para la clase (sesión de aprendizaje, Libro del Ministerio de Educación 4°, Ficha de Lectura, Ficha de actividades)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	El docente ha seleccionado materiales con ejemplos y actividades que logran que el aprendizaje sea significativo.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
3	El docente ha presentado los contenidos de manera organizada.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
INICIO						
4	El docente ha utilizado los procedimientos adecuados para recuperar los saberes previos de sus estudiantes.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
5	El docente inicia la sesión con una actividad para motivar a los estudiantes.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
6	El docente despierta el interés hacia el tema de la clase.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
7	El docente comunica el contenido, propósito y aprendizaje esperado.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

DESARROLLO						
8	El docente ha preparado adecuadamente las actividades de aprendizaje para lograr los objetivos de la sesión de clase.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	El docente aplica estrategias diferenciadas a estudiantes con dificultades y/o barreras para el logro de aprendizajes esperados.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
10	El docente ha utilizado adecuadamente los recursos didácticos.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11	El docente sigue una secuencia lógica que facilita al estudiante el proceso de análisis, relación y aplicación de los conceptos.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
12	El docente utiliza el libro del Ministerio de Educación (Ficha de Matemática 4°) en la ejecución de las actividades.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	El docente ha evidenciado el dominio de los recursos tecnológicos para el logro de aprendizajes esperados.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
14	El docente logra que los grupos se mantengan activos y logren los resultados esperados.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
CIERRE						
15	El docente promueve actividades metacognitivas que permite a los estudiantes identificar fortalezas y debilidades de su proceso de aprendizaje.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
16	El docente emplea distintas formas de evaluación (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
17	El docente ha explicado adecuadamente las actividades que hay que realizar para la siguiente sesión.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Observaciones

FICHA 1

Introducción a la enseñanza de la función cuadrática

La utilidad (U) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresion $U(x) = -x^2 + 12x - 24$, donde x representa el número de cientos de unidades vendidas.

Con la información dada, responda lo siguiente:

a) Halle el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible.

b) Halle la utilidad que obtendrá la empresa si vende 4 cientos de unidades.

c) Si la utilidad es cero, ¿Cuántas unidades se vendió? Grafica la situación.

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

FICHA 2

Definición de la función cuadrática

La función cuadrática

- Es una función polinomial de segundo grado, cuya forma general es:

$f(x) = a\,x^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$

También se representa:

$f(x) = a\,(x - h)^2 + k,$ donde $a \neq 0$ y $a, k, h \in \mathbb{R}$

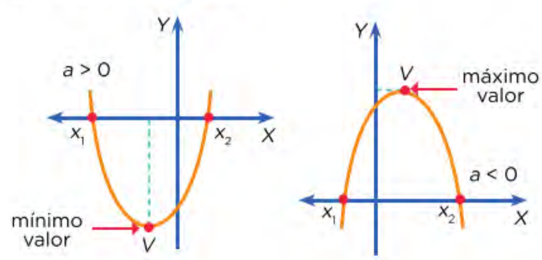
Ejemplo:

$f(x) = y = 2(x - 5)^2 + 3$

Algunos valores para x e y se muestran en la tabla de valores:

x	y
-2	101
-1	75
0	53
1	35

- La función cuadrática se representa con una gráfica parabólica. En ella se pueden observar un vértice y puntos de corte con los ejes X e Y.
- Los valores de a, h y k determinan esta representación gráfica.

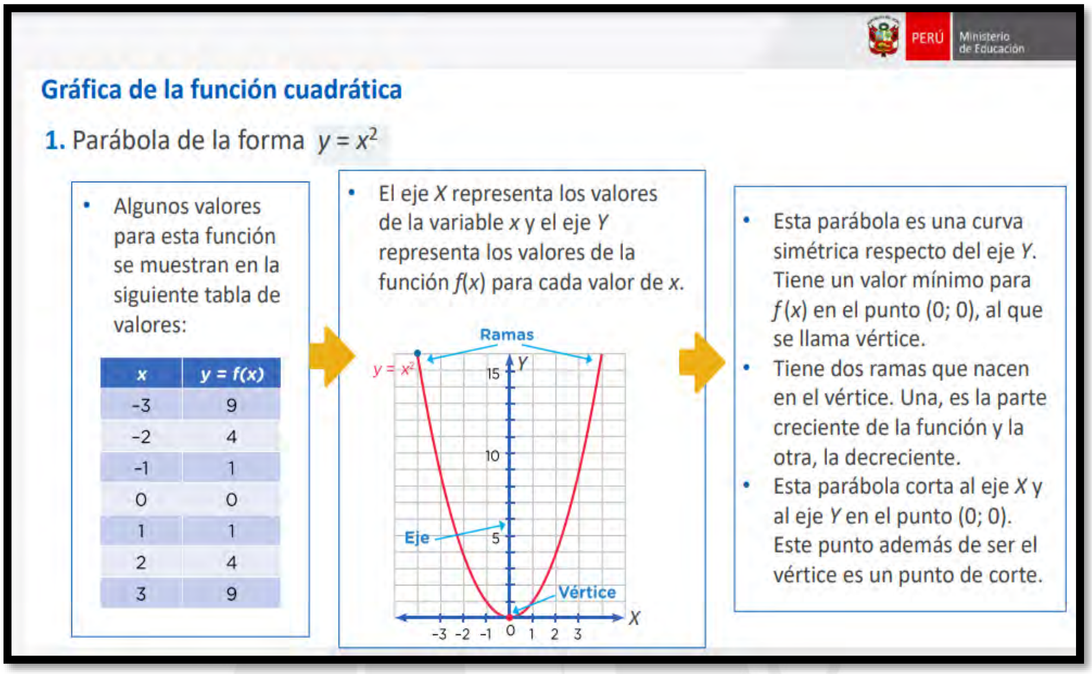


Vértice $V = (h, k)$

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

FICHA 3

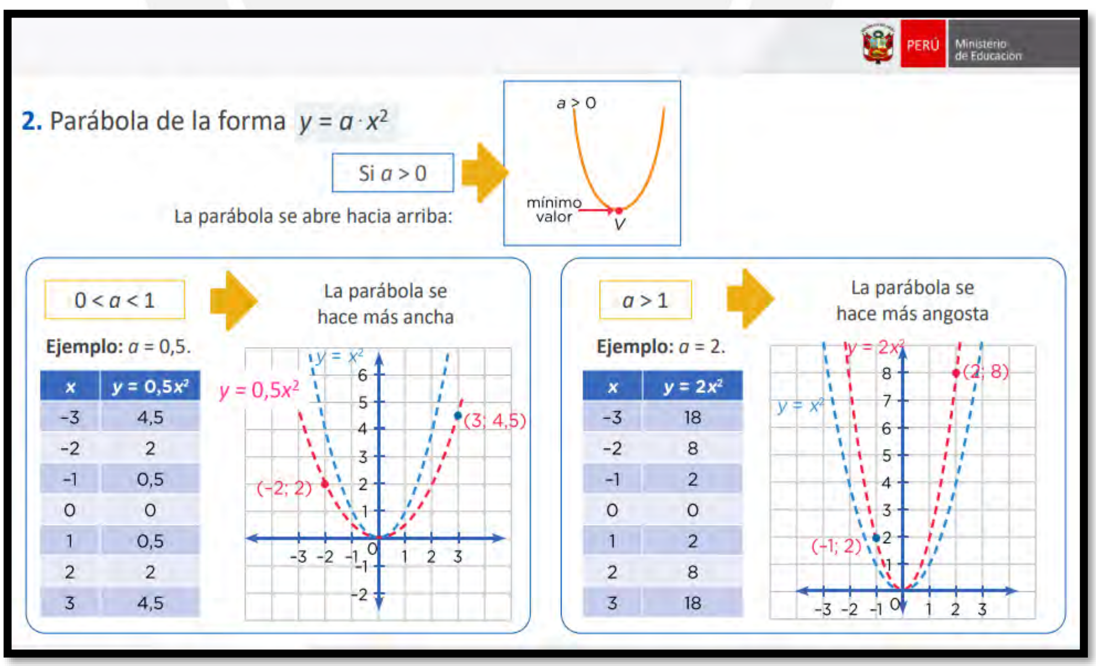
Gráfica y características de la función cuadrática



x	$y = f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

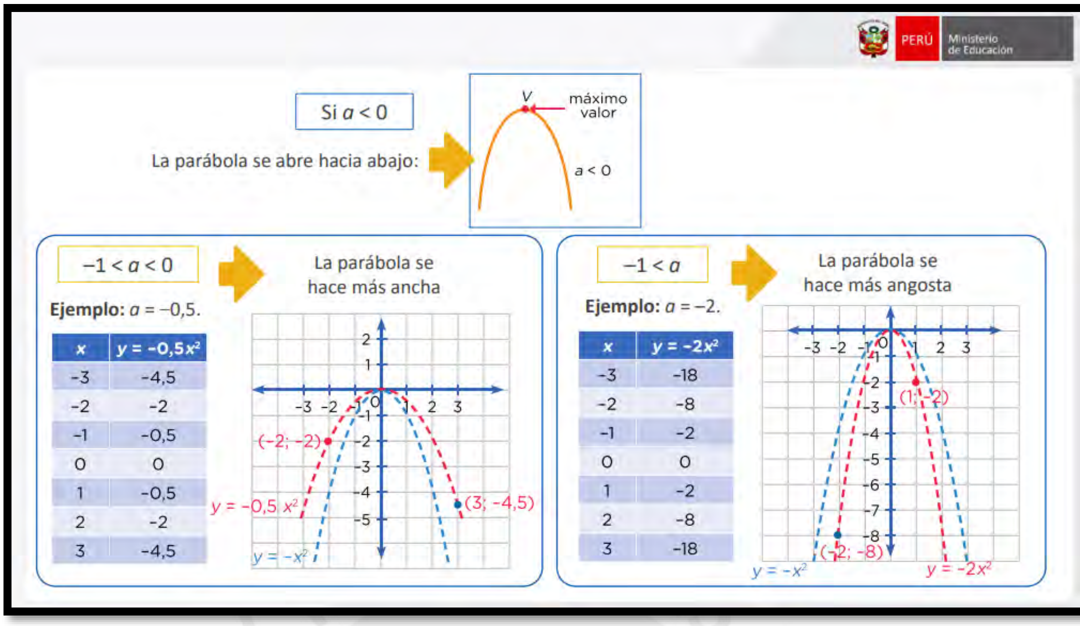
FICHA 4 *Gráficas de la parábola según casos*



x	$y = 0,5x^2$
-3	4,5
-2	2
-1	0,5
0	0
1	0,5
2	2
3	4,5

x	$y = 2x^2$
-3	18
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8
3	18

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

FICHA 5

Actividad 1°: función cuadrática

Situación

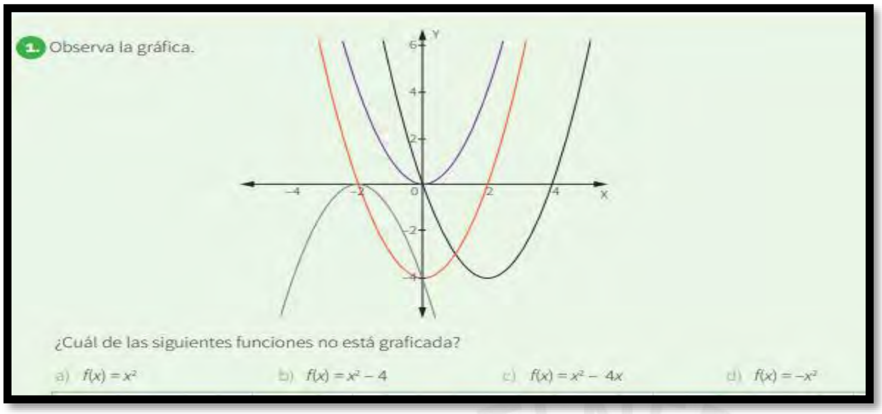
José y Pedro son dueños de una empresa de alquiler de autos. La utilidad en soles que tienen por alquilar un auto durante un tiempo t (en horas) está dada por $U(t) = -t^2 + 8t$.

a) Cuánto es su máxima utilidad y en qué tiempo.

b) Grafica la situación.

Nota. Adaptado por el docente

Actividades Propuestas : Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

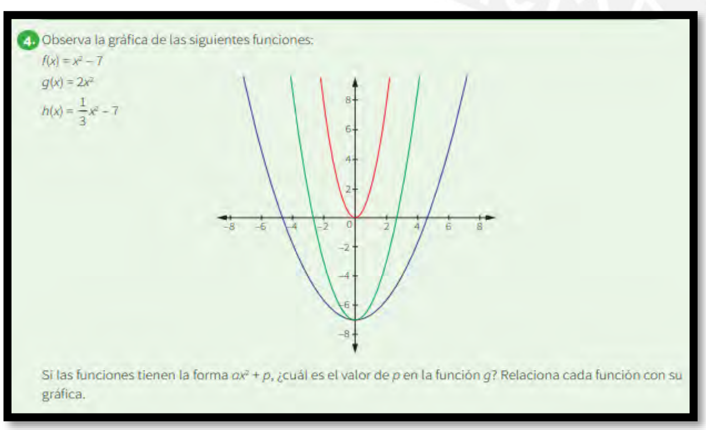
Actividades Propuestas : Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°

2. Dada la función $g(x) = x^2 - 8x + 18$, ¿cuál de las siguientes alternativas representa el rango de dicha función en el conjunto de los números reales?

a) $[2; +\infty[$ b) $[4; +\infty[$ c) $[2; 4[$ d) $[0; +\infty[$

Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

Actividades Propuestas : Función cuadrática en la Ficha de matemática 4°



Nota. Fuente: Ficha de Trabajo MINEDU (2022)

PUCP

Lima, 26 de septiembre de 2023

Director de la IE 6048 "Jorge Basadre" V.E.S.

Prof. Hernán Romero Islas

Presente. -

De mi mayor consideración,

Por medio de la presente, me dirijo a usted para solicitar la autorización de aplicación de la secuencia didáctica que forma parte del proyecto de tesis titulado "Función Cuadrática: Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores en ejercicio" (título provisional).

La secuencia didáctica tiene como objetivo principal analizar el espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del tercer año del nivel secundario.

Esta secuencia didáctica contará con dos partes:

- Parte 1: Entrevista a los profesores de matemáticas del Tercer año del nivel secundario.
- Parte 2: Grabación de la sesión de clases en el aula.

Para la segunda parte de la secuencia didáctica, es necesario que los estudiantes puedan hacer uso de la sala de informática de la institución educativa.

Agradezco su atención y espero su pronta respuesta.

Atentamente,

Dra. Jesús Flores Salazar

Comité directivo de la Maestría en
Enseñanza de las Matemáticas - PUCP

INSTITUCION EDUCATIVA N° 6048 JORGE BASADRE
DIRECCION

CONSENTIMIENTO LIBRE E INFORMADO DEL DOCENTE

El objetivo de este formulario es explicar aspectos de la investigación que tiene como objetivo analizar el Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor de secundaria al enseñar función cuadrática a estudiantes del tercer año del nivel secundario, bajo la responsabilidad de la estudiante de la maestría **Miriam R. Pinto Lázares**, del Programa de Maestría en la enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, sobre los procedimientos de la investigación, de acuerdo con el reglamento del comité de ética para la investigación con seres humanos y animales de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
Los registros de su participación serán confidenciales, y sólo el investigador responsable tendrán acceso a la información. No se revelará la identificación del participante, se utilizará un seudónimo, para preservar el anonimato del individuo.
Además, toda participación es voluntaria y no hay penalizaciones para quienes decidan no participar en este estudio. Nadie será penalizado si decide no participar en el estudio en cualquier momento, y puede retirarse de la investigación sin riesgo y sin sufrir daños personales.

Después de conocer y comprender el objetivo de la investigación, así como estar consciente de la necesidad de utilizar mi testimonio para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias).
Yo JESUS REYES MELO acepto participar como sujeto en la investigación, que se realizará en el mes de octubre del 2023, y estoy dispuesto a responder a los cuestionarios relativos a la investigación y algunos datos personales confidenciales.
por este medio **AUTORIZO** a la investigadora **Miriam R. Pinto Lázares** a tomar fotografías, grabar audio y video, recopilar producción escrita de las sesiones didácticas y actividades realizadas, que sean necesarias para recoger mi testimonio sin carga económica para ninguna de las partes.
Al mismo tiempo, cedo el uso de imágenes (fotos), audio, video y/o testimonios para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias) a favor del investigador arriba especificados.

Firma del participante

He leído y acepto participar como voluntario en la investigación descrita anteriormente.

Miriam R. Pinto Lázares
investigadora

Contacto con el investigador responsable:
Si necesita más información sobre este estudio, llame al investigador: Teléfono: 969- 840083