PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización.
Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Tesis que presenta

Uldarico Víctor Malaspina Jurado

para optar el grado académico de

Doctor en Ciencias

Lima, enero del 2008

A la memoria de Francisco Malaspina,
mi querido padre,
que me inició en el camino a la vida intelectual.

A Juani, Luis, Oscar y Martín,
mi querida esposa y mis queridos hijos,
que me acompañan con amor en este camino.

Índice

Capítulo 4

Capítulo 5

Un matemático francés dijo "*Una teoría matemática no debe ser considerada completa hasta que sea tan clara de entender que pueda ser explicada al primer hombre que pase por la calle*".

Esta claridad y facilidad de comprensión, que aquí se le exige a una teoría matemática, yo la exigiría, aún con más razón, para un problema matemático perfecto; porque lo que es claro y fácil de comprender nos atrae, lo complicado nos repele.

D. Hilbert[1]

Introducción

En el presente trabajo se plasma mi inquietud de estudiar integradamente la formalización, el rigor y la intuición al aprender y al enseñar matemáticas, surgida en mi experiencia como docente de matemáticas en el nivel universitario y en numerosos cursos y talleres ofrecidos a profesores de secundaria, de primaria y de nivel superior. Es normal en los estudios de matemática pura poner el énfasis fundamental en la formalización y el rigor, sin embargo la experiencia docente me fue enseñando cuan cierto es que "se entiende mejor un tema cuando se hace todos los esfuerzos por lograr que los estudiantes lo entiendan" y cuan valioso es que "para que la enseñanza de un concepto o una demostración vaya más allá de su repetición en la pizarra y de la explicación de un ejemplo, busquemos una comprensión intuitiva del concepto o la demostración". Comprensión

[1] Conferencia en el 2º Congreso Internacional de Matemática, París, Agosto 1900.

intuitiva que interactúa con el lenguaje formal y el rigor y que tendría que estar presente en el profesor para que pueda inducirla a los estudiantes. Las experiencias docentes en clases de pregrado y de post grado me fueron enseñando que una buena opción es iniciar las clases proponiendo un problema relacionado con el concepto que se desea introducir. Con problemas adecuadamente seleccionados o creados y apropiadamente presentados – por ejemplo como punto importante en una secuencia de problemas de dificultad graduada – tuve algunos resultados sorprendentes, pues algunos alumnos encontraron respuestas correctas o muy buenos caminos para resolverlos, sin conocer aún los conceptos que se iban a desarrollar. Esto fue particularmente interesante al trabajar temas de optimización, especialmente los relacionados con teoría de juegos, tanto con los estudiantes de matemática pura como con los estudiantes de economía. Así empecé a conjeturar la existencia de una "intuición optimizadora" y comenzaron a delinearse mis inquietudes por estudiar interrelacionadamente, con fines didácticos, el rigor, la intuición y la resolución de problemas de optimización.

Mis inquietudes didácticas como matemático se incrementaron al conocer más de cerca la realidad educativa en nuestro país y la necesidad urgente de mejorar su nivel de calidad en educación matemática. Comprendí que la formación y capacitación de los docentes de niveles básicos requiere de matemáticos comprometidos con esta tarea y se incrementó mi entusiasmo al conocer las experiencias de matemáticos como José Tola y César Carranza en el Perú, Elon Lima en el Brasil, y Miguel de Guzmán en España, que ya venían trabajando en esta línea, y conversar ampliamente con ellos. Me involucré en muchas más actividades relacionadas con la didáctica de la matemática, tanto en la propia universidad como en la Sociedad Matemática Peruana, y en 1997 empecé a participar en las *Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME)*, cuando en la RELME 11, que se realizó en México, se aceptó mi propuesta de dar un curso corto sobre Aprendizaje y Formalización en Matemáticas y luego se publicó como artículo en las actas correspondientes.

Mi participación en seminarios doctorales de Economía Matemática en la Universidad de Bonn me hizo ver más nítidamente la importancia de la optimización matemática; y mi tarea docente en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), dando cursos de Matemática para Economistas, me ayudó a comprender la importancia didáctica que tiene la contextualización, pues, por ejemplo, el teorema de la función implícita tiene aplicaciones muy concretas en la estática comparativa, y los problemas de optimización son fundamentales en la teoría microeconómica que se enseña en cursos de pregrado y post grado. Más aún, se usa intensivamente la visualización y los "razonamientos intuitivos" para ilustrar el carácter óptimo de las soluciones de los llamados problemas del consumidor y del productor. Me convencí entonces de la importancia de investigar, en una perspectiva didáctica y con un marco teórico adecuado, las interrelaciones entre la intuición, el rigor y la resolución de problemas de optimización, que ya las había expresado – sin ese marco teórico didáctico – en el libro *Matemáticas para el Análisis Económico* que publiqué en 1994 en el Fondo Editorial de la PUCP.

Una consecuencia natural de tal convencimiento fue que intensifiqué mis reflexiones y experiencias didácticas sobre estos temas y participé como ponente – por invitación o por aceptación de mis propuestas de cursos o conferencias – en eventos académicos relacionados con la educación matemática, como las RELMEs realizadas anualmente en diversos países latinoamericanos; las *Mediterranean Conferences on Mathematics Education* realizadas en Chipre en el 2000 y en Italia en el 2005; y las *International Conferences on the Teaching of Mathematics*, realizadas en Grecia en el 2002 y en Turquía en el 2006. Estas fueron ocasiones de ir profundizando reflexiones, tanto al preparar las ponencias, como al escuchar a distinguidos conferencistas y tener la oportunidad de intercambiar ideas con ellos. El *Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathematiques* (IREM) con sede en la PUCP, cuya dirección está a mi cargo, tiene su origen en conversaciones con el doctor André Antibí en la RELME 14, realizada en el 2000 en Panamá. El doctor Antibí es Director del IREM de Toulouse y en las conversaciones tenidas posteriormente en Buenos Aires, Lima y Toulouse estimuló en mí la idea de hacer un doctorado en didáctica de las matemáticas.

La creación del IREM-PUCP con un grupo muy valioso de colegas, y el dedicarnos a la organización de actividades permanentes sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, enriqueció las oportunidades de reflexión y de experiencias didácticas, tanto en los seminarios internos como en los coloquios inicialmente nacionales y últimamente internacionales que venimos realizando. Las conferencias, seminarios y talleres que ofrecieron los doctores Juan D. Godino y Vicenç Font en sus visitas a la PUCP con motivo de los coloquios internacionales de los veranos del 2006 y del 2007, respectivamente, me permitieron conocer más de cerca el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (conocido como EOS) y encontré en él un valioso marco teórico de tipo holístico para investigar integradamente el rigor, la intuición y la resolución de problemas de optimización. Mis lecturas sobre el EOS, mi participación en seminarios sobre este enfoque en las universidades de Granada y de Barcelona y mis amplias conversaciones con los doctores Godino y Font tuvieron como consecuencia el decidirme a escribir esta tesis. Un primer paso en esa línea de trabajo fue escribir el artículo “Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización” con el marco del EOS, que luego del arbitraje internacional fue publicado en el número 3, volumen 10, de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.

El presente trabajo -*Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*- proporciona un aporte teórico con un estudio de la intuición, en particular de lo que llamo “intuición optimizadora”, en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática; y un aporte práctico, con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la educación matemática, haciendo propuestas concretas con fundamento matemático y didáctico para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, de modo que desde la niñez se estimule una intuición optimizadora sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral. Esta tesis se desarrolla respondiendo a cuatro preguntas de investigación, como se explica con detalles en la sección 1.4 del capítulo 1.

Este trabajo no habría sido posible sin la influencia y el apoyo de las personas mencionadas anteriormente, de quienes estoy profundamente agradecido. He aprendido y estoy aprendiendo mucho de ellos, por su gran calidad académica y humana. También quiero expresar mi agradecimiento a la PUCP por haber posibilitado mi participación en los diversos eventos académicos mencionados y apoyado la realización de actividades del IREM y de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana; a los miembros de estas dos instituciones, colegas y alumnos, con quienes he compartido enriquecedoras reflexiones y experiencias didácticas; al doctor Jorge Bazán Guzmán, por su valiosa asesoría; y a todas las personas que de una u otra forma me brindaron su apoyo y comparten conmigo actividades cotidianas en la Universidad. No puedo dejar de mencionar mi agradecimiento a mi esposa e hijos, quienes me apoyaron no sólo con su cariño, comprensión y estímulo sino también con diversas tareas concretas que conlleva la edición final de esta tesis.

Capítulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. RELEVANCIA, OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Resumen

En la sección 1.1 justificamos la relevancia del problema de investigación; en la sección 1.2 presentamos los objetivos y las preguntas de la investigación; en la sección 1.3 explicamos la metodología usada; y finalmente, en la sección 1.4 explicamos la estructura de la presente memoria de investigación.

1.1 RELEVANCIA DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la vida cotidiana con frecuencia estamos afrontando muchos problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, (no necesariamente el más corto), tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, tratamos de enseñar lo mejor posible, escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada y rigurosa para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima.

En una perspectiva más amplia, observamos que los problemas de optimización son parte fundamental de la matemática y ya estaban presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad. Una muestra de ello es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio – considerado uno de los griegos más importantes de la antigüedad, que vivió entre los años 262 y 190 a.C. – en el cual se dedica a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Ciertamente, un hito histórico está marcado por el desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII y el uso de derivadas para resolver problemas de máximos y mínimos, con lo cual se amplió aún más las aplicaciones de las matemáticas en diversos campos de la ciencia y la tecnología y gracias, sobre todo, a Euler se creó el cálculo de variaciones, considerando la obtención de funciones que optimizan funcionales, lo cual proporcionó valiosas herramientas matemáticas para afrontar problemas más avanzados. Otro hito importante en la historia de la optimización se marca en la primera mitad del siglo XX al desarrollarse la programación lineal. Kantorovich y Koopmans recibieron el premio Nobel de economía en 1975, como reconocimiento a sus aportes a la teoría de la asignación óptima de recursos, con la teoría matemática de la programación lineal.

En esta breve mirada histórica, es importante mencionar que Fermat (1601-1665), antes que Newton y Leibinitz publicaran sus trabajos sobre el cálculo diferencial, inventó métodos ingeniosos para obtener valores máximos y mínimos; que Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) mostró aproximaciones intuitivas a métodos de optimización actualmente considerados en la programación lineal; y que el tratamiento riguroso de las ideas de Newton y Leibinitz – y de muchos otros anteriores a ellos, que aportaron ideas relevantes al análisis matemático – fue desarrollado recién en el siglo XIX, con Cauchy, Weierstrass y Dedekind.

Tenemos así, en la historia de la matemática – y en particular en temas vinculados con optimización – hechos que nos muestran la relación estrecha entre intuición y rigor, y que han llevado a destacados personajes de la matemática a tomar posición respecto a este asunto. Baste mencionar a Félix Klein (Alemania, 1849 – 1925), destacado geómetra, autor del famoso programa de Erlangen, quien afirmó que “En cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración” (Perero, 1994, p. 101) y a L.

E. J. Brouwer (Holanda, 1881 – 1966), matemático famoso, conocido ampliamente por su teorema del punto fijo y con significativos aportes a la topología, que es considerado creador de la corriente matemática del intuicionismo.

Es entonces importante estudiar e investigar sobre la intuición y el rigor en las matemáticas, y en particular en la resolución de problemas de optimización, desde la perspectiva de la educación matemática, y ese es el propósito fundamental de la presente tesis.

Para ubicar la relevancia de esta investigación en el marco de la educación matemática a nivel internacional, tomamos como referencia fundamental la conferencia "A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof" impartida por David Tall – destacado matemático contemporáneo, profesor emérito de la Universidad de Warwick – en el *International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, organizado por el Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, en Nivelles (Bélgica) en julio de 2005, publicada en el 2006 en la revista *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Este destacado investigador plantea como una pregunta de investigación para la Didáctica de las Matemáticas la siguiente cuestión:

> *What are the respective roles of intuition and rigor? How could the requirements concerning both aspects be modulated?*
>
> (Tall, 2006, p. 205)

La cuestión que propone investigar Tall (2006) ha sido uno de los temas debatidos en muchos de los congresos que recientemente se han celebrado en el campo de la educación matemática. Para citar un solo ejemplo, está prevista la conferencia plenaria *Intuition and rigor in mathematics education*, en el "Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI" que se celebrará en Roma en marzo del 2008, que estará a cargo de D. Tirosh y P. Tsamir

Desde que Fischbein (1994) nos legó su original enfoque hacia los problemas educativos centrado en la compleja noción de intuición, la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas ha considerado este legado como una herramienta útil para la interpretación de fenómenos en educación, que merece ser desarrollado a la luz de los recientes avances realizados en dicha área del conocimiento.

1.2 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se enmarca en la pregunta que propone Tall (2006), restringida a un cierto tipo de problemas: los problemas de optimización. Investigamos una problemática compleja en la que intervienen tres aspectos relevantes de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje. El primer aspecto tiene que ver con lo que se entiende por intuición y rigor en matemáticas. El segundo tiene que ver con el proceso de resolución de problemas y el tercero con el interés que históricamente ha tenido la matemática para estudiar las situaciones en las que hay que optimizar. Dada la importancia de estos tres aspectos, existen numerosos trabajos de investigación sobre cada uno ellos. En la presente investigación nos proponemos trabajarlos conjuntamente, y consideramos importante hacerlo enmarcándolos en alguno de los programas de investigación que últimamente se están desarrollando en el área de la didáctica de las matemáticas, que permita afrontar la complejidad de los factores asociados a estos aspectos. En tal sentido, optamos por tener como uno de los principales marcos teóricos de referencia para esta investigación el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (en algunas ocasiones referida como EOS) que ha sido desarrollado, entre otros, por Godino, Font y Batanero y las investigaciones realizadas en el marco de dicho enfoque han sido publicadas en prestigiosas revistas de investigación en didáctica de las matemáticas de América y de Europa (Font, V., 2007; Font, V. y Contreras, A. 2008; Font y Godino, 2007; Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. ,2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

Con este marco teórico global en el campo de la educación matemática, los objetivos fundamentales de la presente memoria son responder las siguientes preguntas de investigación:

1) ¿Existe una intuición optimizadora?; ¿cómo se “encaja” el término intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática?; ¿permite este enfoque una visión integrada de las nociones “intuición”, “rigor”, “problema” y “formalización”?

2) ¿Cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización en alumnos universitarios?

3) ¿Cómo están tratados los problemas de optimización en los libros de texto de matemáticas de secundaria en el Perú?

4) ¿Es posible proponer problemas de optimización en la educación básica del Perú, de manera que se estimule una intuición optimizadora que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición?

La primera es una pregunta de carácter teórico; la segunda y tercera son de carácter empírico; y la cuarta es de carácter propositivo, pretendiendo aportar a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica.

Respondiendo a estas preguntas, esperamos contribuir en la ampliación del conocimiento sobre la interrelación entre la intuición, el rigor y la resolución de problemas de optimización y presentamos análisis y propuestas, con fundamento matemático y didáctico, con el propósito de contribuir a mejorar la calidad de la educación matemática en general y de manera especial en el Perú. Por este motivo, en la respuesta a la cuarta pregunta de investigación, proponemos lineamientos para la enseñanza y aprendizaje de los problemas de optimización en la educación básica, llegando al nivel concreto de problemas y actividades específicos, con fundamentos matemáticos y didácticos, que puedan ser de ayuda para los profesores de este nivel educativo y para todas aquellas personas que tienen responsabilidad en la planificación y gestión del currículum.

1.3 METODOLOGÍA

Para responder a la primera pregunta de investigación (de carácter teórico), la metodología consiste, básicamente, en un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, histórico, cognitivo, semiótico y didáctico, adoptando una posición propia sobre las diferentes fuentes.

La investigación para responder a las preguntas 2 y 3 (de tipo empírico), tiene en cuenta básicamente la metodología de investigación propuesta en el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática. En dicho enfoque (Godino, Batanero y Font, 2006) se clasifican las cuestiones de investigación didáctica según cuatro ejes o dimensiones, que se designan el *foco*, el *fin*, la *generalizabilidad y* el *nivel* de la investigación; cada una con varias categorías.

1) Foco:
   - *Epistémico* (significados institucionales);
   - *Cognitivo* (significados personales);
   - *Mediacional* (recursos temporales y tecnológicos)
   - *Emocional* (afectos, motivación, emociones)
   - *Interaccional* (interacción entre significados institucionales y personales)
   - *Ecológico* (relaciones intra e interdisciplinares y sociales)
2) Fin:
   - *Descripción* de significados, procesos y factores (¿Qué es ...?; ¿Cómo es, ...?)
   - *Explicación* de los procesos de enseñanza y aprendizaje y los efectos de los factores intervinientes (¿Por qué ...?)
   - *Actuación* o implementación de acciones para el logro de un fin (¿Cómo diseñar, motivar, ...?)
   - *Valoración* de la idoneidad de un proceso de estudio o alguno de sus componentes (¿En qué medida es adecuado o idóneo este recurso ...?)
3) Generalizabilidad:
   - *Exploratorio* (no se pretende generalizar a otros contextos o poblaciones)
   - *Inferencial* (se pretende generalizar los hechos y relaciones observadas)
4) Nivel de análisis:
   - *Puntual* (hechos y fenómenos ligados al estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado)
   - *Temático* (hechos y fenómenos ligados al estudio de una unidad temática en un nivel educativo determinado)
   - *Global* (hechos y fenómenos ligados al estudio de un área temática en uno o varios niveles educativos)

Para responder a la pregunta 2, los sujetos investigados han sido estudiantes universitarios que cursaban segundo o tercer ciclo universitario, siguiendo estudios generales de diversas especialidades de ingeniería, en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Se trata, por tanto, de un estudio de casos. La información de campo se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados que participaron a petición de su profesor. Los principales instrumentos de recolección de los datos para la segunda pregunta (las producciones escritas de los alumnos) han sido cuestionarios a partir de problemas específicamente diseñados. Usamos las herramientas teóricas "configuraciones epistémicas" y "configuraciones cognitivas" del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática para examinar las soluciones individuales y grupales de los estudiantes.

Para responder a la pregunta 3 hacemos un análisis del significado institucional pretendido en el currículum y en los textos. En este caso el *foco* es e*pistémico* (significados institucionales); el fin es descriptivo, la generalizabilidad es exploratoria y el nivel es global ya que estudiamos los problemas de optimización en varios niveles educativos. Además del currículum, examinamos ampliamente dos colecciones de libros muy utilizados en la enseñanza secundaria del Perú.

También hemos hecho un estudio acerca de las percepciones de los alumnos ingresantes a la universidad sobre sus aprendizajes matemáticos en la secundaria, seleccionando cuidadosamente una muestra entre los ingresantes a la Pontificia Universidad Católica en el 2007. En este estudio empleamos un cuestionario para indagar acerca de las percepciones de los temas de la matemática en la educación secundaria, el uso de materiales para los cursos de matemática, y las actitudes frente a la matemática que tienen los ingresantes. Para los temas de matemáticas presentamos la lista de los contenidos considerados en el currículo del año 2005 y preguntamos acerca de las percepciones de aprendizaje de los ingresantes usando una escala *ad hoc*.

Para la cuarta pregunta, que conlleva la propuesta, el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática nos proporciona los principales instrumentos teóricos (configuraciones epistémicas y configuraciones cognitivas). La metodología para responder a esta pregunta es la puesta en funcionamiento de dichos instrumentos teóricos en un escenario de investigación concreto. Utilizamos el análisis del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú, los mismos libros de texto usados para la tercera pregunta, textos de otros países y problemas de optimización específicamente diseñados, que hemos experimentado con profesores y alumnos de educación básica. Sintetizamos nuestras indagaciones realizadas en la docencia universitaria – en particular en la maestría en enseñanza de las matemáticas – y como profesor en numerosos talleres y cursos a profesores de matemáticas de diversos niveles educativos. Varias de ellas expuestas en foros sobre educación matemática y en artículos publicados (Malaspina, 2005 a y b, 2006 a y b, 2007 a y b).

Para Cohen y Manion (1990, p. 331) puede definirse la triangulación como: *(...) el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano.* En esta investigación consideramos, de acuerdo con Cerda (2000), que el objetivo de la técnica de la triangulación es impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales. De acuerdo con este punto de vista, hemos planteado una triangulación de expertos.

Para validar los análisis hemos planificado un proceso de triangulación, según el cual el primer tipo de análisis, realizado por el doctorando asesorado por el director de tesis, se somete al análisis de especialistas en la resolución de problemas y al análisis de especialistas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y, en general, de expertos en didáctica de las matemáticas interesados tanto en los aspectos semióticos como en la resolución de problemas, ya que los análisis parciales realizados los hemos presentado como comunicaciones en diferentes congresos y en el 2007 ha sido publicado un artículo de investigación en una revista especializada, indexada, en el área de Didáctica de las Matemáticas (Malaspina, 2007a).

1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN

En esta sección describimos la estructura general de la presente memoria de investigación:

En el Capítulo 1, mostramos la relevancia del problema de investigación, exponemos los objetivos y las preguntas de la investigación y explicamos la metodología usada.

En el Capítulo 2 presentamos el marco teórico, haciendo en la primera sección una revisión histórico-epistemológica de la optimización matemática. Mostramos algunos hechos históricos, desde siglos antes de nuestra era, que nos revelan por una parte la importancia que han tenido desde la antigüedad los problemas de optimización – y no sólo dentro de la matemática misma – y por otra, la presencia en la historia de las matemáticas, de aspectos intuitivos en el desarrollo de esta disciplina al existir soluciones de problemas importantes de optimización, sin la formalidad y el grado de rigor que ahora tienen. La segunda sección la dedicamos a destacar la importancia de la resolución de problemas en la matemática y en la didáctica de la matemática, refiriéndonos a hechos históricos y a investigaciones recientes sobre este aspecto, entre las que destacan los trabajos de Schoenfeld (2006) y el de Törner, Schoenfeld y Reiss (2007), que nos permiten aclarar lo que entendemos por problema en la presente investigación. En la tercera sección explicitamos lo que consideramos un problema de optimización en esta investigación, teniendo en cuenta una perspectiva didáctica, con el propósito de dar pautas para iniciar el estudio de los problemas de optimización desde los niveles más básicos de la educación; presentamos muy resumidamente una clasificación de los problemas de optimización y damos ejemplos de estos, con comentarios didácticos sobre los diversos niveles y contextos en los que se les puede aplicar. En la cuarta sección hacemos una síntesis de varios trabajos de investigación didáctica, relacionados con problemas de optimización, publicados en revistas especializadas internacionales. Finalmente, siendo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) uno de los principales referentes teóricos de esta investigación, en la última sección, hacemos una síntesis de este enfoque, ensamblando o resumiendo párrafos y figuras tomados de diversos artículos de la amplia literatura desarrollada principalmente por J. D. Godino, C. Batanero, y V. Font.

En el capítulo 3 respondemos las tres partes de la primera pregunta de investigación, en las secciones 3.5, 3.6 y 3.7. En la primera de éstas, referida a la existencia de la intuición optimizadora, exponemos las razones por las que consideramos que tal intuición (de tipo primario en la terminología de Fischbein) es de carácter comprensivo y puede entenderse como proyección metafórica, en el marco de la "ciencia cognitiva de la matemática" (Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000), según la cual las estructuras matemáticas que construyen las personas tienen su origen en los procesos cognitivos cotidianos. En la sección 3.6 mostramos una manera de "encajar" el término intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, con una metáfora vectorial cuyas componentes son tres procesos del EOS; y en la sección 3.7 evidenciamos que las configuraciones epistémicas y cognitivas permiten una visión que integra las nociones de intuición, rigor, problema y formalización. Las secciones 3.1 a 3.4 están dedicadas a una revisión de las diferentes maneras de conceptualizar la intuición en la filosofía de las matemáticas, en la psicología genética y en la didáctica de las matemáticas. Referencia particularmente importante la constituyen los trabajos de Fischbein, a los que le dedicamos el apartado 3.3.1., como parte de las consideraciones de la intuición en la didáctica de las matemáticas.

En el capítulo 4 respondemos a la segunda pregunta de investigación. Analizamos cualitativa y cuantitativamente las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Usamos un protocolo ad hoc y las herramientas teóricas "configuración epistémica" y "configuración cognitiva", propuestas por el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática. Luego de hacer el planteamiento del estudio de caso en la sección 4.1., en la sección 4.2 enunciamos los problemas (uno de variaciones continuas y otro de variaciones discretas), mostramos soluciones “expertas” de tales problemas y elaboramos sus correspondientes configuraciones epistémicas. La sección 4.3 está dedicada a los aspectos metodológicos, y las secciones 4.4 y 4.5 al análisis de las soluciones individuales y grupales respectivamente, empleando configuraciones cognitivas.

En el capítulo 5, respondiendo a la tercera pregunta de investigación, hacemos un análisis del significado institucional pretendido para el objeto “problemas de optimización”. Comenzamos con una mirada al primer nivel de concreción del currículum que se halla en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (Sección 5.1), y luego analizamos con detalle dos colecciones de libros de texto para los cinco grados de secundaria que concretan dicho currículum, dedicando en ambos casos una atención especial a los problemas de optimización (Sección 5.2). En la sección 5.3 focalizamos la atención sobre la forma en que son tratados tres temas particularmente vinculados con la obtención de valores extremos: funciones, introducción a la programación lineal y máximo común divisor/ mínimo común múltiplo. Hacemos un análisis epistémico global de los enfoques predominantes de estos temas y comentarios y sugerencias para mejorar su tratamiento.

En la sección 5.4 presentamos un estudio realizado con alumnos ingresantes a la Pontificia Universidad Católica del Perú, acerca de las percepciones que ellos tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en secundaria. Dicho estudio es un indicador indirecto que nos da información de la brecha que hay entre la enseñanza planificada en los libros de texto (el significado pretendido en la terminología del EOS) y la enseñanza realmente implementada (el significado implementado en la terminología del EOS).

En el capítulo 6 respondemos afirmativamente a la cuarta pregunta de investigación, sobre la posibilidad de proponer problemas de optimización en la educación básica. En la sección 6.1, usando tanto argumentos matemáticos como configuraciones epistémicas y la dualidad ejemplar-tipo del EOS, mostramos que algunos problemas que son característicos del nivel universitario, por su resolución usando cálculo diferencial, también podrían proponerse en la secundaria, en el marco de actividades individuales y grupales de dificultad graduada que estimulen la intuición y enriquezcan la formación matemática. También proponemos y examinamos un problema de optimización cuyas potencialidades didácticas y matemáticas han sido experimentadas en los niveles básicos y superior. En la sección 6.2 damos tres lineamientos para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, teniendo en cuenta nuestras experiencias en la docencia, los criterios de idoneidad del EOS y algunos principios relacionados con la viabilidad de propuestas de cambio en el significado pretendido, formuladas por otros investigadores. Como parte del primer lineamiento, que es incluir problemas de optimización en todos los grados de primaria y secundaria, en el apartado 6.2.1. proponemos problemas para estos niveles, damos características de un "buen" problema desde el punto de vista didáctico, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad del EOS, y mencionamos algunos métodos generales que pueden servir de orientación al trabajar con problemas de optimización. Como parte del segundo lineamiento, que es modificar los contenidos y la metodología de algunas unidades didácticas, en el apartado 6.2.2. hacemos algunas propuestas específicas para estudiar el concepto de función. Finalmente, en el apartado 6.2.3. exponemos el tercer lineamiento, que es incluir nuevos temas matemáticos en los currículos de educación secundaria, vinculados a problemas de optimización.

En el capítulo 7 resumimos las conclusiones y enunciamos algunas implicancias de la presente investigación.

Finalmente, damos las referencias bibliográficas usadas y presentamos los anexos correspondientes a los capítulos 4, 5 y 6, que los hemos denominado con un número que indica el capítulo, seguido de una letra mayúscula, que indica el orden en que se están presentando los anexos de tal capítulo (por ejemplo, Anexo 4A, Anexo 4B, etc.).

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Resumen

En este capítulo presentamos el marco teórico de esta memoria de investigación. Iniciamos con una reflexión histórico-epistemológica de la optimización matemática, luego hacemos una breve revisión de la investigación didáctica sobre la resolución de problemas, una exposición sobre lo que se entiende por problema de optimización en este trabajo y una breve revisión de algunas investigaciones didácticas sobre la resolución de problemas de optimización. Finalmente, presentamos una síntesis del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, que lo hemos tomado como uno de los principales referentes teóricos de la presente investigación.

2.1. REVISIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA.

En la presente sección exponemos algunos hechos históricos que nos revelan la importancia que los problemas de optimización han tenido desde la antigüedad, tanto en la matemática misma como en otros campos del conocimiento.

Un primer hecho histórico lo constituyen los trabajos de Apolonio, uno de los griegos destacados de la antigüedad, que vivió entre los años 262 y 190 a.C. Apolonio dedicó el Libro V de su obra en ocho tomos sobre Secciones Cónicas, a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Según Boyer (1986) Apolonio sostiene en su introducción, que “el tema es de los que parecen ser dignos de ser estudiados por su propio interés” (p. 203). Kline (1990), nos dice: Apolonio “demuestra que si O es cualquier punto en el interior de una cónica y si OP es el segmento de recta de longitud máxima o mínima desde el punto O a la cónica, entonces la recta perpendicular a OP en P es tangente a la cónica en P; y si O’ es cualquier punto sobre OP producido fuera de la cónica, entonces O’P es el segmento de longitud mínima de O’ a la cónica. Ahora se enuncia esta propiedad como la perpendicularidad entre la tangente y la normal.” (p. 97). Este problema podemos verlo ahora en un marco más general, como parte del estudio de las condiciones de transversalidad en problemas de cálculo de variaciones, que es una teoría creada por Euler en el siglo XVIII, en la cual se optimiza una funcional y el objeto optimizante es una función.

Es pertinente recoger la afirmación de Boyer (1986) sobre el trabajo de Apolonio:

> “Al mismo tiempo que uno no puede por menos de admirar al autor por su elevada actitud intelectual, parece procedente hacer notar que lo que en su día fue simplemente una bella teoría, sin ninguna posibilidad en absoluto de ser aplicada a la ciencia o la tecnología de la época, ha llegado a ser un instrumento teórico fundamental en campos tales como la dinámica terrestre o la mecánica celeste. Los teoremas de Apolonio sobre máximos y mínimos son en realidad teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas. […] Resulta pues meridianamente claro, dicho en otras palabras, que fue la matemática pura de Apolonio la que hizo posible la aparición , unos 1800 años más tarde, de los Principia de Newton…” (p. 203)

El siguiente es otro párrafo del libro citado de Boyer, que nos refiere un hecho histórico de la antigüedad vinculado con problemas de optimización y nos recuerda uno de los principios filosóficos de Aristóteles, que atribuye a la naturaleza un comportamiento optimizador:

> “Herón parece haber sido el primero que demostró por medio de un sencillo razonamiento geométrico, en una obra sobre *Catóptrica* o estudio de la reflexión, que la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión es una simple

consecuencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla o "económica". Es decir, si un haz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM' y se dirige después hacia el ojo E de un observador, entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' sean iguales" (Boyer, 1986, p. 229)

Otro hecho histórico interesante que nos hace ver cómo estaban presentes las ideas de máximo en una perspectiva correcta, aunque no necesariamente rigurosa y formal, es la obra de Pappus de Alejandría, que escribió un libro hacia el año 320 con el título de *Colección matemática*:

> "Pappus parece haber seguido de cerca una obra *Sobre figuras isométricas* escrita casi medio milenio antes por Zenodoro (ca. 180 a.C), de la que nos han llegado algunos fragmentos a través de los comentaristas posteriores. Entre las proposiciones que aparecían en el tratado de Zenodoro, había una que afirmaba que de todas las figuras sólidas con la misma superficie, la esfera es la que tiene un volumen máximo, pero evidentemente sólo se daba una justificación incompleta" (*ibid*, p.242)

En lo que se refiere a problemas propuestos de optimización, recogemos la información que nos proporciona Heinrich Dorrie (1965), acerca del primer problema sobre extremos, encontrado en la historia de las matemáticas:

> "At what point of the Earth's surface does a vertically suspended rod appear longest? (i.e. at what point is the visual angle at a maximum?). This problem was posed in 1471 by the mathematician Johannes Muller, called Regiomontanus.... The problem, which in itself is not difficult, nevertheless deserves special attention as the *first extreme problem* encountered in the history of mathematics since the days of antiquity." (p. 369)

Los *problemas isoperimétricos* tienen un lugar importante en la historia de las matemáticas y en particular de los problemas de optimización. Cabe hacer mención a la leyenda según la cual la princesa Dido – personaje mítico de Fenicia, considerada fundadora de Cartago – cuando llegó en el siglo IX antes de Cristo a lo que actualmente es Túnez, y quiso comprar tierras para establecerse con su pueblo, sólo se le permitió hacerlo en una extensión tal que pudiera ser encerrada por una inmensa cuerda. Es claro que la princesa y los fenicios que la acompañaban, tuvieron que resolver un problema isoperimétrico: determinar la región de mayor área posible, encerrada por la cuerda (el perímetro dado). La solución intuitiva es una región circular, cuya circunferencia es de longitud igual a la de la cuerda; sin embargo la solución formal no es simple y fue escrita después de varios siglos. El destacado matemático germano-suizo Jacob Steiner (1796-1863) resolvió el problema asumiendo la existencia de la solución y considerando tres etapas en su demostración[1]:

i) La curva debe encerrar una región convexa.

ii) Cualquier recta que divida por la mitad el perímetro de la región, también divide a la región en dos partes que tienen la misma área.

iii) La semicircunferencia de longitud P/2 cuyos extremos estén sobre una recta dada, es la curva que encierra una región de área máxima, considerando todas las curvas de perímetro P/2 que encierran regiones convexas a un lado de la recta y con extremos en ella.

El *cálculo diferencial*, con los significativos aportes de Newton y Leibinitz en el siglo XVII, trata de manera sistemática los problemas de máximos y mínimos de funciones continuas de una y de varias variables. Es justo recordar las contribuciones con ideas relevantes (¿intuitivas?) a lo largo de la historia, de personajes como Eudoxo y Arquímedes (antes de Cristo), y de Cavalieri, Kepler, Torricelli y Fermat para la creación del análisis infinitesimal. Destacamos de manera especial los aportes de Fermat (1601- 1665) por sus métodos ingeniosos para resolver problemas de máximos y mínimos, expuestos en su memoria *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Método para investigar máximos y mínimos). En el año 1637 publica su método basado en las siguientes reglas:

[1] Una exposición detallada de la demostración puede verse en Honsberger, R (1977, pp. 67 – 70)

I. *Sea A un término relacionado con el problema.*

II. *La cantidad máxima o mínima está expresada en términos que contienen sólo potencias de A;*

III. *Se sustituye A por A+E , y el máximo o mínimo queda entonces expresado en términos de potencias de A y E;*

IV. *Las dos expresiones del máximo o mínimo se hacen <<adiguales>>, lo que significa algo así como << tan aproximadamente iguales como sea posible>>;*

V. *Los términos comunes se eliminan;*

VI. *Se dividen todos los términos por una misma potencia de E de manera que al menos uno de los términos resultantes no contenga a E;*

VII. *Se ignoran los términos que aún contienen E;*

VIII. *Los restos se hacen iguales.*

(Andersen, 1984, p. 38)[2]

Los aportes de Lagrange y de Euler, destacados científicos del siglo XVIII, permitieron tratar los problemas de optimización con varias variables y restricciones de igualdad e incursionar en problemas de optimización en los cuales el elemento optimizante no es ni un número real ni un vector *n* dimensional, sino una función. Nos estamos refiriendo al cálculo de variaciones y a la solución rigurosa de problemas como el famoso e histórico "problema de la braquistócrona", según el cual, se debe hallar la curva plana a lo largo de la cual una partícula se deslizará únicamente por influencia de la gravedad y sin rozamiento, en un tiempo mínimo, de un punto P a otro Q, considerando estos puntos en un plano vertical, Q más abajo que P pero no ambos en una recta vertical. Ciertamente, hallar tal curva, es hallar la función que la define y hubo soluciones muy ingeniosas, con criterios específicos para este problema, como respuesta al reto planteado por quien lo propuso – Johann Bernoulli en 1696 – a los matemáticos de esa época; entre ellas, la solución del mismo Johann Bernoulli, la de Leibinitz, la de Jacques Bernoulli (hermano de Johann) y la famosa de Newton. El cálculo de variaciones es una teoría que permite resolver rigurosamente éste y muchos otros problemas de optimización, en los

[2] También se puede encontrar una exposición detallada de tales métodos en De la Torre, Suescún y Alarcón, (2005).

que el elemento optimizante es una función, constituyendo un valioso aporte para otras ciencias.

> Los principios de variación de Euler en física, redescubiertos y difundidos por el matemático irlandés W.R. Hamilton (1805 – 1865), han demostrado ser una de las herramientas más poderosas en mecánica, óptica y electrodinámica, con muchas aplicaciones a la ingeniería. Los avances recientes en física – relatividad y teoría cuántica – están llenos de ejemplos que revelan el poder del cálculo de variaciones. (Courant y Robins, 2002, p. 421-422)

Se tienen así *modelos de optimización dinámica,* que en el siglo XX son utilizados en modelos de la teoría económica. Más aún, con los aportes de Pontryagin, Hestenes, y otros distinguidos matemáticos, se consolida en el siglo XX la teoría del control óptimo, que puede verse como un planteamiento más general que el del cálculo de variaciones, pues introduce una variable adicional a estos problemas (la variable de control) y considera entre las restricciones una ecuación diferencial que vincula la variable de estado con la de control. Los aportes de Bellman llevan a la formulación de la programación dinámica que incluye los problemas de control óptimo en una familia de problemas de control y presta especial atención al valor óptimo de la funcional, a diferencia del cálculo de variaciones y el control óptimo, que focalizan su atención en las trayectorias óptimas de las variables de estado y de control. Con este enfoque, se tratan rigurosamente problemas de optimización dinámica, de variación continua y de variación discreta.

Otro gran capítulo de los problemas de optimización está en la *programación lineal*, desarrollada a partir de la cuarta década del siglo XX. La expresión "programación lineal" ya está generalizada, aunque más convendría usar la expresión "optimización lineal", para evitar confusiones con la acepción de programación muy vinculada ahora a la informática. Los métodos desarrollados permiten tratar geométrica y computacionalmente problemas de asignación óptima de recursos, y en los más diversos campos, como la economía, las finanzas, el transporte y los juegos competitivos. En estos problemas, la función cuyo valor óptimo se busca y las funciones que definen las restricciones de las variables, son todas lineales. En muy corto tiempo la programación lineal ha sido aplicada en diversos campos y al mismo tiempo ha desarrollado y perfeccionado métodos de solución de problemas. Cabe mencionar que ya en 1826, Fourier descubrió un método para manipular desigualdades lineales, que está muy relacionado con la solución de problemas de programación lineal, como se expone en Williams (1986). A continuación transcribimos un párrafo del artículo, que da idea de la estrecha interrelación, a pesar de la gran diferencia en el tiempo.

> The theoretical insight given by this method is demonstrated as well as its clear geometrical interpretation. By considering the dual of a linear programming model it is shown how the method gives rise to a dual method. This dual method generates all extreme solutions (including the optimal solution) to a linear programme. Therefore if a polytope is defined in terms of its facets the dual of Fourier's method provides a method of obtaining all vertices (p. 681)

Las valiosas contribuciones de George Dantzig, L.V. Kantorovich y T.C. Koopmans[3] al desarrollo de la programación lineal, pronto devinieron también en la programación no lineal. Son históricos los trabajos de Kuhn y Tucker (1950) estableciendo condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones óptimas de problemas de programación no lineal. Se encontraron relaciones importantes entre la dualidad en la programación lineal, la teoría de juegos de Von Neumann y las condiciones de Kuhn-Tucker. Estas condiciones, que consideran funciones diferenciables de n variables no negativas y m restricciones dadas por desigualdades, pueden aplicarse también a los problemas de programación lineal y hacer evidentes las relaciones entre los resultados de los teoremas de dualidad y análisis de sensibilidad con los multiplicadores de Lagrange. En Malaspina 2004, pp. 243-250, se exponen detalles ilustrativos y con aplicaciones en la teoría económica. Un análisis histórico y matemático sobre los orígenes y la evolución de la programación lineal y la no lineal hace Hoff Kjeldsen en su tesis doctoral (1999).

[3] Koopmans y Kantorovich recibieron el Premio Nobel en Economía en 1975 por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos.

La riqueza teórica en el tratamiento de los problemas de *programación no lineal* y las múltiples aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la tecnología aceleraron tremendamente el desarrollo de la optimización en general y en la actualidad es un campo muy amplio de las matemáticas y con numerosas publicaciones de alto nivel matemático sobre temas como monotonía generalizada, convexidad generalizada, problemas de equilibrio – incluyendo optimización multiobjetivo y teoría de juegos – desigualdades variacionales, puntos fijos, Lagrangianos aumentados, técnicas de regularizaciones, optimización discreta, optimización estocástica, etc.

2.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Es natural que los investigadores en educación matemática en diversos lugares del mundo hayan dedicado y sigan dedicando mucho tiempo a investigar sobre la resolución de problemas en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas, pues la resolución de problemas es esencial en el desarrollo de las matemáticas. La inicial y principal fuente de problemas es la realidad, que permanentemente plantea desafíos al hombre y éste responde con su inteligencia, su capacidad de abstracción y su intuición. Courant y Robins en su famoso libro ¿Qué son las matemáticas? , nos dicen

> Sin duda, todos los avances matemáticos tienen sus raíces psicológicas en requerimientos más o menos prácticos; pero una vez que algún avance ha comenzado bajo la presión de aplicaciones necesarias, inevitablemente gana impulso por sí mismo y trasciende los confines de la utilidad inmediata. (Courant y Robins, 2002, p. 17)

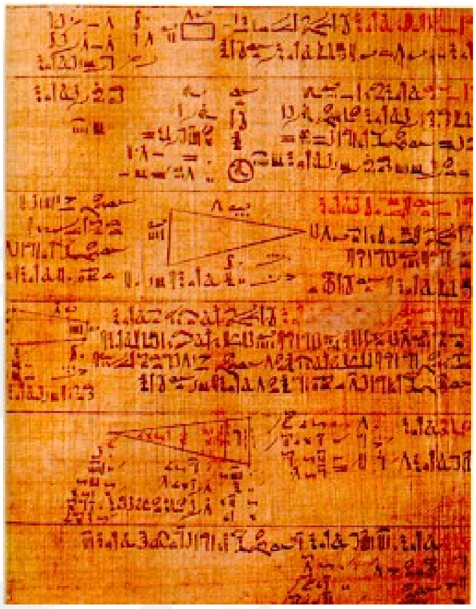
El trascender los confines de la utilidad inmediata es plantearse y resolver nuevos problemas, ya dentro de un modelo, que se desarrolla o se modifica en interacción con la realidad o con otros modelos originados en otros enfoques de la realidad. Así surgen nuevos problemas y formas de resolverlos y en esta interacción permanente se va desarrollando la matemática. Es pertinente recordar lo que al respecto nos dice Dieudonne:

> La historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico. (citado en Kleiner, 1986, p. 31)

A manera de ilustración podemos citar algunos problemas famosos en la historia de las matemáticas y algunos hechos vinculados con ellos.

Papiro de Rhind: Este papiro fue encontrado a mediados del siglo XIX y lleva el nombre de su descubridor A. H. Rhind. Consta de 110 problemas matemáticos que tienen que ver con la vida diaria; y el copista, tal y como aparece en el propio papiro, parece llamarse Ahmose. Está escrito en torno al 1900 a.C. (Foto de Oronoz. Revista MUY ESPECIAL, nº33 ene/feb 98)

Fuente: http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Egipto/papiros.htm



Los 3 famosos problemas griegos: La duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, que datan aproximadamente del siglo V antes de Cristo, que estimuló la actividad matemática entre matemáticos griegos y cuyos tratamientos rigurosos – demostrando la imposibilidad de resolverlos – tienen valiosas vinculaciones con el álgebra moderna.

Hallar la tangente a una curva y el área de una región limitada por una curva. Problemas que en el siglo XVII dieron lugar al cálculo diferencial e integral

El problema de la braquistócrona, al que ya nos hemos referido antes, planteado por Johann Bernoulli en 1696, que dio origen al cálculo de variaciones.

El problema de Fermat, conocido en el siglo XVII y resuelto después de muchos intentos y avances teóricos, a finales del siglo XX , por A. Wiles.

Los 23 problemas de Hilbert, planteados en 1900 en el Congreso Internacional de Matemáticas en París, que estimularon grandemente el desarrollo de la matemática en el siglo XX.

Hechos como estos – y muchos otros en la historia de las matemáticas y de la humanidad – nos hacen afirmar que la matemática es una construcción social dinámica; un conjunto estructurado de conocimientos no acabado, más bien en permanente extensión, no sólo con nuevos resultados sino con nuevos métodos.

Siendo evidente la importancia de los problemas y de su solución en el desarrollo de las matemáticas, es natural que también ocupe un lugar importante en el campo de la educación matemática. Destacados matemáticos e investigadores en educación matemática – entre los cuales George Polya es un pionero, por su famosa obra *How to solve it*, de 1945 – han hecho numerosas e importantes publicaciones, sobre todo a partir de 1980 con exhortaciones a dar énfasis especial a la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. La primera recomendación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos de Norteamérica, en 1980, en su *Agenda for action* fue:

> El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas recomienda que la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas en los ochenta (NCTM, 1980, p. 2)

Y recientes publicaciones confirman la importancia que sigue teniendo en los diversos sistemas educativos a nivel mundial: “Mathematical problem solving is a focus of school mathematics internationally” (Yeap et al., 2006, p. 213). Sin embargo, el gran consenso sobre la importancia de la resolución de problemas, no conlleva un consenso sobre lo que significa “problema” y “resolución de problemas”. Recientemente se ha publicado un amplio trabajo “*Problem solving around the world: summing up the state of the art*” editado por Törner, Schoenfeld y Reiss (2007) con la colaboración de distinguidos investigadores de más de diez países, en el que esto se hace evidente:

> The very term ‘‘problem solving’’ has very different meanings in different countries. Indeed, as the essays in this volume demonstrate, the meaning of the term has often changed dramatically in the same country. For some time, ‘‘problem solving’’ has been a major theme in research and

> in curricula around the world—sometimes labeled as such, sometimes with an emphasis on applications, sometimes through different pedagogies that emphasize making sense, individually or collectively, of mathematical situations. As a result, it has been difficult to develop a sense what problem solving means around the world—a sense of what is being studied and what is being implemented in classrooms. (*ibid*, p. 353)

Ya Schoenfeld (1992, p. 334) hacía notar que se tenían diversos significados de "solución de problemas", variando desde "trabajo memorístico de ejercicios" hasta "hacer matemáticas como un profesional", incluyendo objetivos tan diversos para la solución de problemas, como

"formar estudiantes para pensar creativamente"

"preparar estudiantes para las competencias sobre problemas"

"aprender técnicas estandarizadas en determinados dominios"

"proveer de un nuevo enfoque a las matemáticas remediales (habilidades básicas)"

En la presente investigación, trabajaremos con un criterio muy amplio de lo que es problema, y en consecuencia de lo que es solución de problemas. Seguiremos la línea de Schoenfeld (2006) en su artículo *Problem solving from cradle to grave*, que lo considera un "manifiesto teórico" en el cual hace una revisión crítica de sus artículos anteriores acerca de estos temas, en particular sobre el libro *Mathematical problem solving* que escribió en 1985. Así,

> un *problema* para un individuo en cualquier punto del tiempo es algo que el individuo quiere lograr. Puesto de otra manera, *resolver problemas* se interpretará como *trabajar hacia el logro de un objetivo personal de alta prioridad.* (Schoenfeld, 2006, p. 44. Traducción propia)

En nuestra perspectiva, consideramos que, en términos generales, ese trabajo hacia el logro de un objetivo personal de alta prioridad se realiza analizando la información que se tiene, estableciendo relaciones lógicas y buscando el mejor camino (la solución óptima), según las circunstancias específicas. En esta búsqueda de lo óptimo y en la certeza implícita de haberlo conseguido está presente lo que denominamos "intuición optimizadora" y que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

Ciertamente, podría no seguirse el mejor camino como consecuencia de las distorsiones que producen los métodos rutinarios de resolver problemas, y esto puede percibirse más nítidamente al resolver problemas matemáticos, incluyendo los ejercicios de cálculo aritmético. Así, al tener que obtener el producto de 52 por 98 el camino "natural" puede ser efectuar la multiplicación "estándar", desarrollando el algoritmo, sin seguir un camino mejor, que sería multiplicar 52 por 100 y luego restar 104. Puede considerarse mejor porque es más rápido, no necesita lápiz y papel, y porque, en palabras de Artigue (2006) es una pequeña muestra de "la belleza de este mundo del cálculo, de los tesoros de inteligencia que las prácticas de cálculo contienen" (p. 7).

Estimular el desarrollo de la intuición optimizadora, en la resolución de problemas matemáticos contribuiría a que se encuentre "un equilibrio en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo entre la automatización y la razón", como lo reclama Artigue en el citado artículo; y a que, en general, se siga buscando otras soluciones, cada vez mejores, ante un problema planteado, de modo que la tarea de resolverlo no concluya con encontrar una respuesta correcta, sino que se pase a "actividades de matematización", entre las que se consideran la generalización; el establecimiento de conexiones con otros campos de la matemática, con otros campos del conocimiento o con la realidad; y el planteamiento de nuevos problemas a partir del problema resuelto.[4]

2.3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Referirse a problemas de optimización en general, es referirse a un ámbito muy amplio de las matemáticas, y que está avanzando cada vez más. En diversos campos de las ciencias naturales y sociales se encuentran, se formulan y se resuelven problemas de optimización. Los problemas de programación lineal quizás son los más conocidos o difundidos, pero existen problemas de programación no lineal, de programación dinámica, de optimización discreta, de optimización combinatoria, optimización cóncava, optimización estocástica, etc.

[4] Estas ideas están relacionadas con las de *"matematizar"* , en Freudenthal (1991)

En la presente sección explicitamos lo que consideramos un problema de optimización en esta investigación, teniendo en cuenta una perspectiva didáctica, con el propósito de dar pautas para iniciar el estudio de los problemas de optimización desde los niveles más básicos de la educación. Damos una clasificación y algunos ejemplos con comentarios.

Llamaremos *problema de optimización* a todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable.

Observaciones:

1. Esta perspectiva es consistente con la definición intuitiva que se expone en Pinto Carvalho et al (2003):

    > Intuitively, optimization refers to the class of problems that consists in choosing the *best* among a set of *alternatives*.
    >
    > Even in this simple, imprecise statement, one can identify the two fundamental elements of an optimization problem: *best*, that conveys a choice of criterium used to choose the solution; this is usually expressed by means of a function, that should be minimized or maximized; *alternatives*, that refers to the set of possible solutions that must be satisfied by any candidate solution (p. 17)

2. En el enunciado de un problema de optimización generalmente se usan palabras o expresiones como máximo, mínimo, el más (o la más, lo más), el menos (o la menos, lo menos), el mejor (o la mejor, lo mejor), el peor (o la peor, lo peor), a lo más, por lo menos, el mayor (o la mayor), el menor (o la menor).

3. Al referirnos a valores máximos o mínimos de una variable, debemos precisar que se requiere un conjunto C en el cual se consideren los valores de la variable.

    En términos formales, un primer nivel de problema de optimización es la obtención de un elemento máximo o de un elemento mínimo en un conjunto *C* en el que se ha definido una relación de preorden completo; es decir una relación binaria, que la representamos por $\leq$, reflexiva y transitiva, que puede establecerse entre cualquier par de elementos de *C*. Entonces, el problema de optimización es:

Dado el par ordenado $(C; \leq)$, donde C es un conjunto en el que se ha definido la relación de preorden completo representada por $\leq$, determinar $c_m \in C$ tal que $\forall\, c \in C,\ c_m \leq c$ (c_m el elemento mínimo);

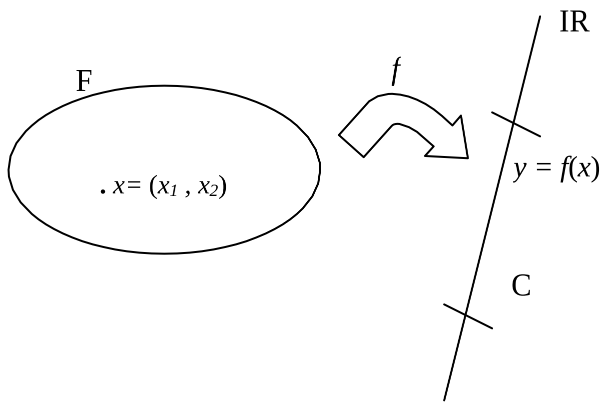
o:

Dado el par ordenado $(C; \leq)$, donde C es un conjunto en el que se ha definido la relación de preorden completo representada por $\leq$, determinar $c_M \in C$ tal que $\forall\, c \in C,\ c \leq c_M$ (c_M el elemento máximo).

Generalmente, tal conjunto es un subconjunto de los números reales y la relación de preorden es la relación de orden canónico. Así, y^* es un valor máximo de la variable y, en el conjunto C, si y^* es mayor o igual que y para todo y que pertenece al conjunto C. Si en lugar de "mayor o igual" se cumple "menor o igual", entonces y^* es un valor mínimo de y.

4. Las condiciones del problema permiten establecer el conjunto C en el cual se debe buscar el valor máximo o mínimo de la variable. En muchos casos esta variable es la variable dependiente de una función explícita f (la "*función objetivo*" del problema), digamos $y = f(x)$, cuyo dominio incluye un "*conjunto factible*" F que es un subconjunto del dominio de la función f y queda determinado por las restricciones que se deducen de la información dada en el problema. Ciertamente, el problema queda resuelto si se determina x^* en F tal que $y^* = f(x^*)$ es máximo o mínimo, según sea el caso.

   En el gráfico se ilustra un caso posible. F puede considerarse un subconjunto del plano (IR^2). En tal caso, x es una variable de dos componentes: $x = (x_1, x_2)$.



5. Puede ocurrir que sea imposible que se alcance un valor máximo o mínimo en el conjunto C. En tales casos, el problema queda resuelto al demostrar que el valor pedido no existe.
6. También puede ocurrir que en F haya más de un elemento maximizante o minimizante; aun casos de infinitos puntos optimizantes.
7. Otra aclaración importante es que según como se considere el subconjunto de F en el cual se analiza el carácter optimizante de un elemento de F, se puede tener un óptimo relativo (en un subconjunto propio de F) o un óptimo absoluto (en todo F).

2.3.1. Clasificación de los problemas de optimización.

Hay varias maneras de clasificar los problemas de optimización, teniendo en cuenta las características de la función objetivo y las del conjunto factible. Para los fines de esta investigación, tomaremos como criterio de tipificación de un problema de optimización la naturaleza del conjunto factible, y como referencia el libro de Pinto Carvalho et al (2003). Así, desde este punto de vista, hay cuatro clases de problemas de optimización: *continua, discreta, combinatoria y variacional*, que pasamos a describirlos brevemente:

Problema de optimización continua: cuando su conjunto factible es un subconjunto continuo de $\mathbb{R}^n$; es decir, cuando todos los elementos del conjunto factible son puntos de acumulación.

Problema de optimización discreta: cuando su conjunto factible es un conjunto discreto; es decir, cuando el conjunto factible no tiene puntos de acumulación.

Lo más frecuente es que tal conjunto discreto sea un subconjunto de $\mathbb{Z}$ o de $\mathbb{Z}^n$.

Problema de optimización combinatoria: cuando su conjunto factible es finito.

Cabe aclarar que en estos problemas los elementos del conjunto factible no están explícitamente determinados, sino indirectamente especificados mediante relaciones combinatorias. Un problema conocido de este tipo es el del agente viajero, que desea encontrar el camino de mínima longitud que comience en un determinado pueblo, recorra los *n* pueblos que debe visitar y regrese al pueblo de partida. El estudio de este tipo de problemas y de métodos eficientes de solución está muy relacionado con los avances en computación.

Problema de optimización variacional: cuando su conjunto factible es un subconjunto de dimensión infinita de un espacio de funciones. El problema de la braquistócrona, los del cálculo de variaciones y los de la teoría de control óptimo son ejemplos de problemas de optimización variacional. Un ejemplo sencillo de formular y examinar es la determinación del camino más corto sobre una determinada superficie, que una dos puntos dados de tal superficie.

Otros criterios de clasificación de los problemas de optimización son:

Teniendo en cuenta el tipo de restricciones en las variables

- Con restricciones dadas por igualdades
- Con restricciones dadas por desigualdades

Teniendo en cuenta las propiedades de la función objetivo y de las que definen las restricciones

- lineales
- no lineales
- convexas, etc.

Para trabajar con problemas de optimización en la primaria y la secundaria, y teniendo en cuenta los recursos matemáticos a usarse en la solución, podemos considerar

- problemas aritméticos
- problemas algebraicos
- problemas geométricos
- problemas de geometría analítica
- problemas de análisis matemático
- problemas mixtos.

También consideraremos problemas de carácter lúdico, que pueden estar en cualquiera de los casos anotados. Los problemas de programación lineal, podemos considerarlos como problemas de geometría analítica, ya que es en ese marco en el que se tratan en la secundaria.

2.3.2. Ejemplos y comentarios

Problema 1

> Encontrar dos números cuya suma sea 15 y cuyo producto sea máximo.

Tal como está planteado, sin restricciones explícitas para los números, es un problema de optimización continua; sin embargo, si se plantea en primaria o cuando sólo se conocen los números enteros, es un problema de optimización discreta.

Formalización

Presentado formalmente, este problema es el de maximizar la función $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, sabiendo que $x_1 + x_2 = 15$. Así, la función objetivo está claramente identificada y la variable x tiene dos componentes. Según el nivel en el que se use el problema, o los objetivos que se busquen, x_1 y x_2 pueden variar en los números enteros, en los números racionales o en los números reales. En el caso más amplio, f está definida en el conjunto $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$ (el plano $\mathbb{R}^2$), el conjunto factible F es el conjunto de puntos (x_1, x_2) del plano, que cumple la ecuación $x_1 + x_2 = 15$ (una recta) y el conjunto C es todo el conjunto $\mathbb{R}$.

Distintos niveles

Según el nivel en el que se explote didácticamente este problema, puede ser aritmético, algebraico o de geometría analítica. Como problema aritmético se usan las operaciones de adición y multiplicación y el ensayo y error; como problema algebraico se usan ecuaciones y un sistema de ecuaciones con dos variables que no es lineal; y como problema de geometría analítica, se usan las gráficas de una recta y de una familia de hipérbolas equiláteras. En el marco más amplio de la optimización matemática, es un problema de programación no lineal.

Contextos

- *Geométrico o mixto*

Podemos tener un problema de optimización continua, geométrico o mixto:

> Determinar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro sea 30 cm y cuya área sea máxima.

Ciertamente, las ecuaciones que hay que usar para resolver este problema, son las mismas que las del Problema 1.

- *Lúdico*

Si para la solución de este problema se propone el uso de una cuerda que anudada por sus extremos tenga longitud 30 cm, el problema adquiere un carácter lúdico, se puede percibir las diversas posibilidades con variaciones continuas de las variables (ancho y largo del rectángulo) jugando con cuatro dedos en la cuerda, y puede encontrarse una solución intuitiva.

Microeconómico

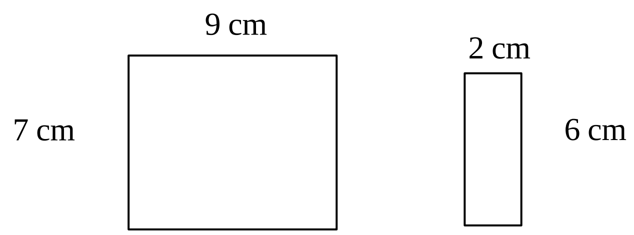
Si se tienen conocimientos de microeconomía, este problema puede plantearse como sigue:

> Considerando sólo dos tipos de bienes de un consumidor, determinar las cantidades de estos que maximizan su función de utilidad. Los precios unitarios de los bienes son de una unidad monetaria cada uno, el consumidor debe gastar 15 unidades monetarias, y su función de utilidad está dada por el producto de las cantidades de bienes.

Usualmente, problemas de este tipo son examinados por métodos gráficos, como puede verse en los libros de nivel introductorio e intermedio de microeconomía.

Problema 2

> Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho. Moviendo libremente las láminas en el plano y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.



Es un problema geométrico, de optimización discreta, pues el conjunto C en el que debe buscarse el valor máximo, es un conjunto finito. Usando material didáctico manipulable, es un problema con características lúdicas.

Formalización

El conjunto F está formado por las infinitas figuras planas que resultan de juntar las dos láminas, según lo indicado en el problema. A cada figura corresponde un perímetro y así queda definida la función objetivo, con valores numéricos. Esta definición no necesariamente es algebraica. Lo importante es que a cada figura formada juntando las láminas, le corresponde un número, que es su perímetro.

Al resolver el problema se van a encontrar situaciones equivalentes, que formalmente determinan dos clases de equivalencia en el conjunto F, en las que se cumple la relación "*tener el mismo perímetro que*".

Distintos niveles

Tal como está planteado, es un problema que se puede usar en clases de primaria. Basta conocer el concepto de perímetro de una figura plana y efectuar operaciones aritméticas.

Si al problema se le hace la ligera modificación de permitir que al unir las láminas por sus lados, la parte común no necesariamente sea de la longitud de uno de los lados, ya tenemos un problema de optimización continua. El conjunto C ya no es finito, aunque es acotado superior e inferiormente. Ciertamente este nuevo problema requiere el conocimiento de los números reales. Puede usarse en clases de secundaria. Si ya se conocen funciones, se puede expresar algebraicamente la función objetivo:

$$f(x) = 48 - 2x ,$$

donde x es la longitud de la parte común al unir las láminas. 48 es la suma de los perímetros de ambas láminas.

Si a la modificación explicada en el párrafo anterior se le añade que la parte común al unir las láminas no puede reducirse a un solo punto, el problema brinda la oportunidad de relacionar conceptos de intervalos semiabiertos, funciones lineales afines, el máximo de funciones lineales afines, etc. y de trabajar con un problema de optimización que queda resuelto cuando se justifica que no es posible encontrar un valor máximo. Está en juego el concepto de supremo.

2.4. INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS SOBRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

A continuación presentamos una relación de investigaciones didácticas relacionadas con problemas de optimización, publicadas como libros o como artículos en revistas especializadas, que muestra que este campo ha despertado interés de investigadores en didáctica de la matemática por estudiarlo y hacer propuestas, en diversos lugares y épocas. Ciertamente la lista no es exhaustiva, pero podemos afirmar que en términos relativos, son pocas las investigaciones en este campo. Cabe mencionar que no hemos encontrado investigación alguna con el enfoque presentado en esta memoria; es decir, usando una perspectiva holística como el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, para hacer un estudio integrado de la resolución de problemas de optimización con la intuición y el rigor. Tampoco hemos encontrado investigaciones ni propuestas de problemas de optimización para el nivel primario.

A continuación, la relación numerada, en orden cronológico, de una parte de los artículos encontrados, relacionados con problemas de optimización.

1. Guenther, K. (1977) Welche Optimierungsprobleme sind fuer die Hauptschule geeignet. Alternativvorschlaege zum Sachrechnen bzw. linearen Optimieren. *Proceedings. Beitraege zum Mathematikunterricht.* (pp. 102-105). Hannover, Germany, F.R.: Schroedel. (Alemania)
2. Geister, D. (1978) Optimierungsaufgaben in der Sekundarstufe I. *12th Federal meeting for didactics of mathematics.* Papers. 12. p. 81. Hannover, Germany, F.R.: Schroedel. (Alemania)
3. Wurz, L. (1982). Kennst du deinen kuerzesten Schulweg. Ein Optimierungsproblem fuer die Mathematik der oberen Hauptschulstufe. *Schule*. v. 50(10) (pp. 646-651) . (Revista, Alemania)
4. Schupp, H. (1991) Optimieren als Leitlinie im Mathematikunterricht *Mathematik in der Schule*, v. 29(2/3) pp. 148-162 (Revista, Alemania)

5. Villers, C. (1997) Optimisation des les premieres annees du secondaire. *Mathematique et Pedagogie.* (no.112) pp. 31-43. (Revista de publicación bimestral, Bélgica)
6. Humenberger, H. (1998). Optimieren im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik.* v. 40(3) pp. 101-108 (Revista, Alemania)
7. Lowther, M. (1999) Optimization: A Project in Mathematics and Communication. *The Mathematics Teacher*. v. 92(9) pp. 764-67, 812. (Revista oficial del National Council of Teachers of Mathematics. Estados Unidos de Norte América)
8. Maass, K. (2000). Optimierung und Funktionen in Klasse 6. Flaecheninhalt und Umfang als Thema zur Behandlung von fundamentalen Ideen. *Mathematica Didactica*. v. 23(1) pp. 83-95. (Revista para didáctica de la matemática, Alemania)
9. Camacho, M., et al (2001). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula.* (no.10) pp. 137-152. (Revista, España)
10. Driscoll, P. and Kobylski, G. (2002). A method for developing student intuition in nonlinear optimization. *PRIMUS.* 12(3) p. 277-286. (Revista, Estados Unidos de Norte América)
11. Crama, Y. (2005). Trente ans de recherche operationnelle et d'optimisation mathematique. *Mathematique et Pedagogie*, (no.153) pp. 23-39 (Revista de publicación bimestral, Bélgica)
12. Schuster, A. (2005) Kombinatorische Optimierung als Gegenstand der Gymnasialdidaktik im Umfeld von Mathematik- und Informatikunterricht. *Journal fuer Mathematik-Didaktik*, v. 26(1) pp. 92-93 (Revista, Alemania)

La mayoría de trabajos encontrados, centran su atención en el nivel de la secundaria (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9) y los otros en el nivel superior.

Nueve de los doce trabajos citados, se basan en problemas específicos (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10), y en algunos de ellos hay propuestas específicas de métodos a emplear para resolver problemas de optimización (en el 9, el uso de la calculadora científica TI 92 y en el 10, el uso del software MAPLE. En el 2 el uso del método de completar cuadrados; en el 3, un método específico para examinar el problema cotidiano de encontrar el camino más corto de la casa a la escuela; y en el 5, se dan métodos algebraicos para resolver problemas de valores extremos en la geometría.).

Los que consideramos que brindan más elementos para reflexiones didácticas son el 4 (modelización), el 6 (teoría de juegos), el 7 (comunicación), el 8 (aproximación), el 10 (intuición y optimización no lineal, para nivel universitario) y el 12 (optimización combinatoria). En el 1, 3, 6 y 12 predominan los problemas de optimización discreta; en el 2, 4, 5, 8, 9 y 10, predominan los problemas de optimización continua; y el 11 tiene una perspectiva histórica.

2.5. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En esta sección presentamos una síntesis de las herramientas básicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS), ensamblando o resumiendo párrafos y figuras tomados de diversos artículos de la amplia literatura desarrollada principalmente por J. D. Godino, C. Batanero, y V. Font. Nuestras referencias fundamentales serán Godino (2003); Godino Batanero y Font (2007); Font (2007); Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006); y D'Amore y Godino (2007).

2.5.1. Reseña histórica

Podría decirse que el artículo de Godino y Batanero (1994) "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", publicado en la revista francesa *Recherches en Didactique des Mathématiques*, marca el inicio del EOS en la comunidad internacional de investigadores en didáctica de las matemáticas, mostrando la intención de construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo - pragmatismo, cognición individual - institucional, constructivismo - conductismo, etc. Desde entonces y con la integración de otros investigadores como Font, vienen desarrollando diversas herramientas teóricas, teniendo en cuenta enfoques conceptuales y metodológicos de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas. Se puede considerar tres etapas en el desarrollo de tales herramientas teóricas:

Primera etapa (1993-1998): Desarrollo y precisión progresiva de las nociones de “significado institucional y personal de un objeto matemático” (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo. (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998)

Segunda etapa (1999- 2005): Consideran necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que los elaborados. Esta reflexión surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Continúan con la elaboración de una ontología para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. En la primera fase proponían como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) “los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas”. En esta fase observan que en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos que desencadenan procesos interpretativos y que ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura. Llegan a la conclusión que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En este periodo trataron de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica. El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es creciente, como se muestra en la monografía editada por Anderson et al. (2003) y el número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006). Los investigadores del EOS trataron de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujeron en Godino y Recio (1998).

Tercera etapa (2006 en adelante): Se interesan por los modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006). Proponen distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: *epistémica* (relativa al conocimiento institucional), *docente* (funciones del profesor), *discente* (funciones del estudiante), *mediacional* (relativa al uso de recursos instruccionales), *cognitiva* (génesis de significados personales) y *emocional* (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas). El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Las herramientas teóricas elaboradas durante estos tres periodos constituyen el modelo ontológico-semiótico que sintetizaremos en los apartados siguientes. El modelo aporta herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

2.5.2. Conceptos básicos

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida; como lenguaje simbólico; y como sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen conceptos teóricos como práctica y objeto y considerando significados personales e institucionales, se muestra, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o bien ser compartidas en una institución.

Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Las instituciones se conciben como “comunidades de prácticas” e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales.

Según el EOS, todo lo que se pueda “individualizar” en matemáticas puede ser considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc.) Es decir, *objeto matemático* es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. (Godino, 2002) Sobre este tema es importante destacar la siguiente referencia textual:

> Los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. El hecho de que en el seno de ciertas instituciones se hagan determinados tipos de prácticas, determinan la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y que su significado esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a su mera definición matemática. (D’Amore y Godino, 2007, p.207)

Los objetos matemáticos y las prácticas están íntimamente relacionados, como veremos en los siguientes apartados.

2.5.3. Significados personales e institucionales de los objetos

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 2.1.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

Con relación a los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

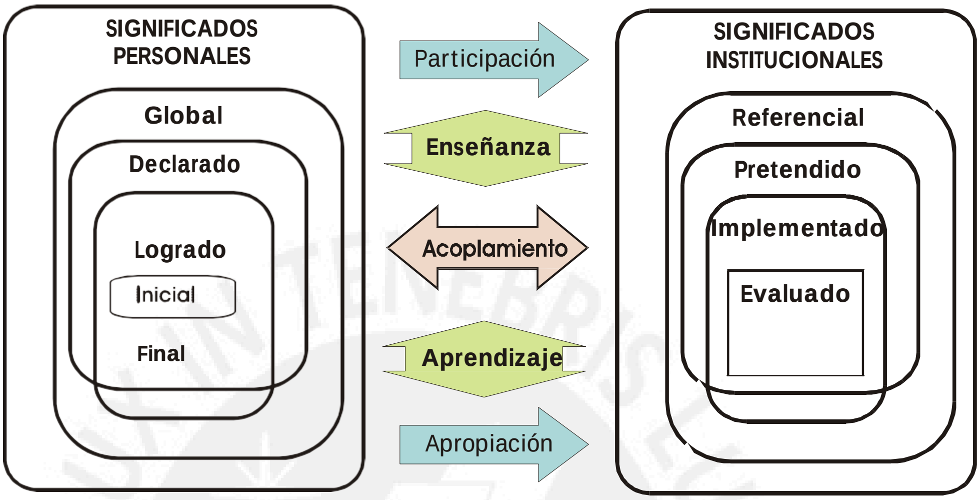


Figura 2.1: Significados personales e institucionales.

En la parte central de la figura 2.1 se indica las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

2.5.4. Objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales"; mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, se consideran como "objetos personales", incluyendo a los constructos cognitivos tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

La noción de emergencia se puede relacionar, desde el punto de vista de los objetos personales, con los procesos cognitivos que Sfard (1991) describe como interiorización, condensación y reificación, mientras que desde el plano institucional se relaciona con los procesos de comunicación, simbolización y regulación. La emergencia de los objetos también está relacionada con la metáfora ontológica (Lakoff y Núñez, 2000), que lleva a considerar acontecimientos, actividades, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.). Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

2.5.5. Configuraciones de objetos

Los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos están relacionados entre sí formando *configuraciones* (Fig. 2.2), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. La figura ayuda a visualizar que las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; y los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos.

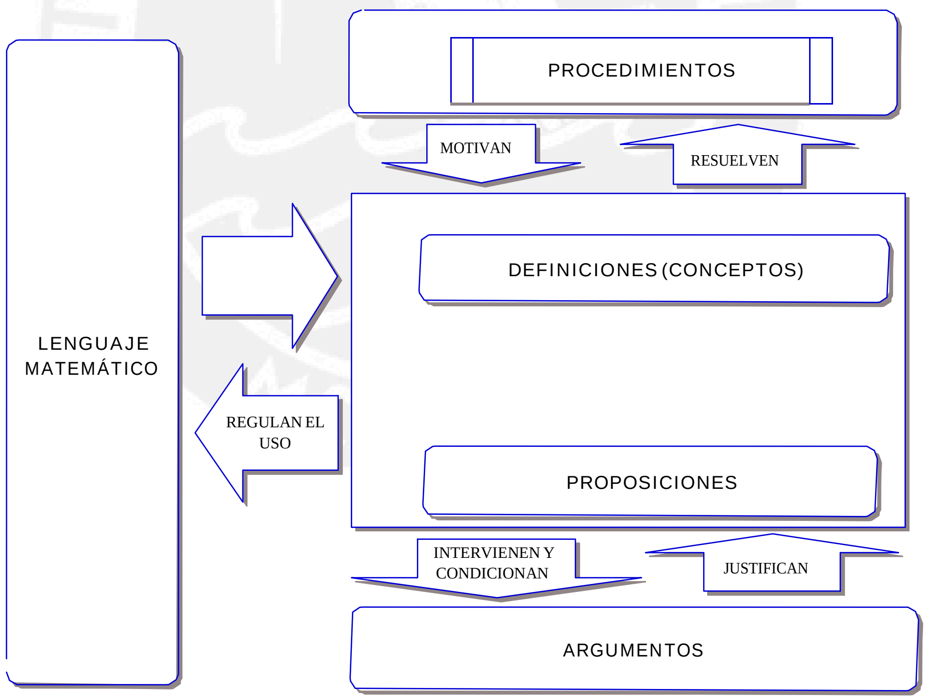


Figura 2.2: Componentes y relaciones en una configuración epistémica

Es importante destacar que en el EOS hay varios usos diferentes del término “objeto” y de “significado”. Por una parte, hay un uso más amplio (débil) en el que “todo “ es objeto y cualquier objeto puede ser significante y significado; después hay un uso más restringido (fuerte) en el que la reflexión se centra en lo que se considera el prototipo de “objeto matemático” (los conceptos) y el significado es el sistema de prácticas operativas y discursivas en que tal objeto desempeña un papel relevante. Además, hay un uso intermedio operativo en el cual por objeto se toma cualquiera de los elementos que forman una configuración. Este uso intermedio permite superar la actitud simplista de que los únicos objetos son los conceptos y hace operativa la idea de que todo sea objeto.

Como respuesta – abierta a revisión y refinamiento – a la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponen el par (*sistema de prácticas, configuración*), entendiendo, además, que tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los atributos contextuales duales introducidos en el modelo teórico (ver siguiente apartado).

La introducción de la noción de configuración permite matizar y operativizar la idea de que el significado de un objeto matemático conceptual es el sistema de prácticas. Ahora podemos decir que el significado de un concepto matemático es el par “Configuración epistémica / prácticas que posibilita”, siendo la definición (explicita o implícita) del concepto matemático uno de los componentes de la configuración epistémica.

En el caso que el concepto tenga otra definición equivalente, tal concepto se puede incorporar a otro par “Configuración epistémica /prácticas que posibilita”, diferente del par considerado anteriormente. En este caso, cada par se puede considerar con diferentes “sentidos” del concepto, mientras que el "significado" del concepto será el conjunto de todos los pares “Configuración epistémica /prácticas que posibilita”

Ciertamente, se trata de un marco teórico complejo pero se está revelando una herramienta potente y útil para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

2.5.6. Facetas duales

Para el EOS resulta especialmente relevante la adaptación sociológica de la noción de “juego de lenguaje” (Wittgenstein, 1953) realizada, entre otros, por Appel (1985) y Habermas (1987), en la cual la comprensión individual es el resultado de la participación en un juego de lenguaje cuyas reglas son públicas. “Comprender” consiste en “saber orientarse” mediante el reconocimiento de la regla o reglas correspondientes. De acuerdo con este punto de vista, se considera que no es posible analizar un proceso de instrucción sin comprender – dicho en términos de Wittgenstein – las reglas del juego de lenguaje en el que se desarrolla. Es decir, el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico en un contexto institucional determinado.

La noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática.
- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …).

- *Unitario – sistémico.* En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica (Eco, 1995). La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
- *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = x^2 + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005).

Las facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos, dando lugar a distintas “versiones” de dichos objetos a través de los siguientes *procesos cognitivos/ epistémicos:*

- institucionalización/personalización;
- generalización/particularización;
- descomposición/reificación;
- materialización/idealización;
- representación/significación.

2.5.7. Procesos matemáticos

La figura 2.3 muestra de manera concisa algunos de los constructos que se han explicado. La actividad matemática tiene un papel central y es modelizada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales. Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos de la figura 2.3.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática. Tales procesos son: algoritmización, argumentación, enunciación, definición, comunicación, problematización, particularización, generalización, materialización, idealización, reificación, descomposición, significación, representación, institucionalización y personalización. Los autores no pretenden incluir en esta lista a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

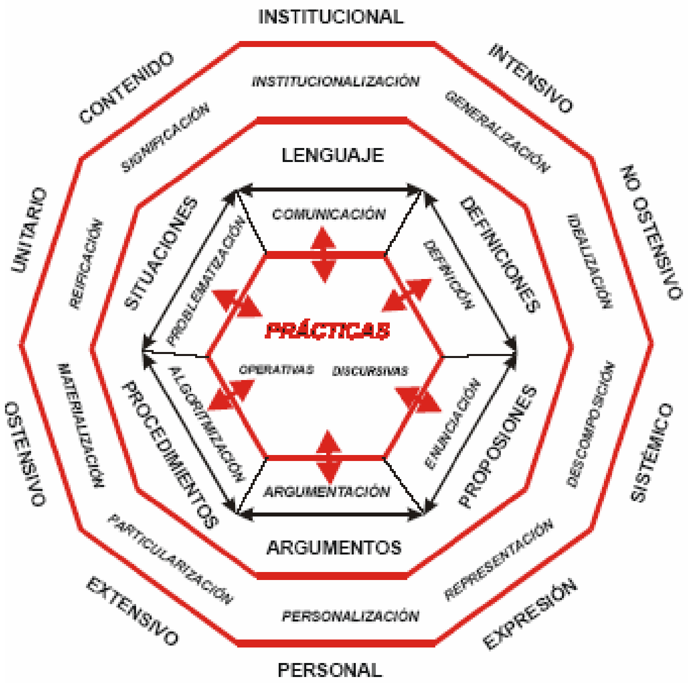


Figura 2.3: Modelo ontosemiótico de los objetos y procesos matemáticos

2.5.8. Comprensión

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001b y Godino, Batanero y Font, 2007). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas) lo cual implica concebirla también como "conocimento y aplicación de las normas" que regulan la práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren.

Por otra parte, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como expresión o contenido. Esta manera de entender la comprensión resulta especialmente útil para hacer análisis "microscópicos" de textos matemáticos como el que se realiza en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005).

2.5.9. Idoneidad didáctica

Las nociones teóricas anteriores se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar las dificultades potenciales de los alumos (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Capítulo 3

INTUICIÓN Y RIGOR. UNA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA

RESPUESTA A LA PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo, en las secciones 3.1 a 3.4, hacemos una revisión de las diferentes maneras de conceptualizar la intuición en la filosofía de las matemáticas, en la psicología genética y en la didáctica de las matemáticas. En la sección 3.5 exponemos las razones por las que consideramos que existe una intuición optimizadora, como una proyección metafórica, en el marco de la ciencia cognitiva de la matemática; en la sección 3.6 mostramos una manera de integrar el término intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, con una metáfora vectorial cuyas componentes son tres procesos del EOS; y en la sección 3.7 evidenciamos que las configuraciones epistémicas y cognitivas permiten una visión que integra las nociones de intuición, rigor, problema y formalización.

En este capítulo respondemos a la primera pregunta de investigación: *¿Existe una intuición optimizadora?¿Cómo se "encaja" el término intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)? ¿permite el EOS una visión integrada de las nociones "intuición", "rigor", "problema" y "formalización"?.*

Las relaciones entre la intuición, la formalización y el rigor han sido y son motivo de estudios y debates en el área de educación matemática y en diversos campos de la matemática. Antes de responder a la primera parte de la pregunta de investigación, hacemos una revisión de las diferentes maneras de conceptualizar la intuición, para tener un marco sobre los enfoques de la intuición en la filosofía de las matemáticas, en la psicología genética y en la didáctica de las matemáticas. Un primer problema es la delimitación de lo que se entiende por intuición y cuáles son sus relaciones con otras nociones con las que está estrechamente ligada, sobre todo, a la noción de "verdad" en matemáticas. Por este motivo, iniciamos este capítulo extractando en la sección 3.1. algunas reflexiones filosóficas que hace Font (2001a y 2003) sobre estos temas, desde la perspectiva de la didáctica de la matemática.

3.1. LA INTUICIÓN EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Font (2003) nos dice "Las matemáticas se pueden considerar como una determinada organización de los productos de la actividad matemática (proceso). Esta organización no es estática sino que va evolucionando históricamente. El análisis de las diferentes organizaciones de los productos de la actividad matemática, según el Positivismo Lógico, se puede hacer desde un punto de vista interno (contexto de justificación) o bien desde un punto de vista externo (contexto de descubrimiento). El contexto de justificación tendría que ver con los criterios metodológicos normativos subyacentes a la ciencia y, consiguientemente, podría ser objeto de un análisis "a priori" y metacientífico, mientras que los procesos de descubrimiento deberían ser objeto de los estudios de historiadores, sociólogos y psicólogos de la ciencia, en tanto que interesados en la descripción "a posteriori" de aspectos diversos vinculados a la actividad científica. Actualmente, después de un largo proceso, se ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia que han dejado de centrarse en las teorías y han pasado al análisis de las prácticas. Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división propuesta por el Positivismo Lógico" (p. 250).

Teniendo en cuenta este marco, a continuación vamos a ver primero el papel que ha jugado la intuición en el contexto de justificación para después pasar a comentar el papel de la intuición en el contexto de descubrimiento.

3.1.1. El papel de la intuición en la teoría clásica de la verdad matemática

Los siguientes párrafos del citado artículo de Font (2003) son un buen resumen de una manera clásica de entender el pensamiento matemático en relación con la realidad y las experiencias:

“A los juicios que nos aportan información sobre las "cosas" como árboles, sillas, etc. se les llama juicios "sintéticos". Estos juicios se distinguen de otra clase de afirmaciones, como por ejemplo el juicio "todos los solteros son no casados", que para muchos lógicos son vacías, y no aportan información. Este tipo de juicios recibe el nombre de "analíticos". Si nos preguntamos cómo podemos averiguar si una afirmación general es verdadera, observamos que por lo que respecta a las implicaciones analíticas, esta cuestión se resuelve fácilmente. La implicación "todos los solteros no son casados" no es sino una consecuencia de la palabra "soltero". Pero sucede una cosa diferente con los juicios sintéticos del tipo "todos los metales se dilatan". El significado de las palabras "metal" y "caliente" no incluye ninguna referencia a la dilatación. La implicación puede, por lo tanto, comprobarse sólo por medio de la observación. Los juicios sintéticos tales que su verdad depende de la experiencia se llaman "sintéticos a posteriori".

Se puede considerar que afirmaciones matemáticas del tipo "los ángulos formados por tres torres suman 180º" son analíticas y que no informan sobre las cosas de nuestra experiencia, o bien considerar que son sintéticas (informativas); en este último caso ¿su verdad depende de la experiencia?. Esta pregunta se puede responder afirmativamente o negativamente. Si se responde negativamente tenemos que, por una parte, la afirmación "los ángulos de un triángulo suman 180º" se considera un juicio sintético que informa sobre las cosas del mundo físico, ya que de él podemos deducir que "los ángulos formados por tres torres suman 180º", y, por otra parte, tenemos que su verdad no depende de la experiencia, ya que no resulta de una generalización de nuestras experiencias en la medición de los ángulos de un triángulo, ni puede ser refutada por el hecho de encontrar un triángulo tal que sus ángulos no sumen 180º. De hecho, la verdad de esta afirmación se demuestra por razonamiento a partir de los axiomas.

Si se considera que las afirmaciones matemáticas son juicios sintéticos que no dependen de la experiencia – son a priori y no a posteriori – se está defendiendo que la razón humana tiene capacidad de descubrir propiedades generales de los objetos físicos independientemente de la experiencia y se tiene que explicar cómo la razón puede descubrir la verdad sintética. Una de las primeras explicaciones se debe a Platón." (p. 251)

Más concretamente, refiriéndose al platonismo y al papel de la intuición en este contexto, Font afirma:

"Platón dice que además de las cosas físicas hay otra clase de cosas que él llama "ideas". Existe, por ejemplo, la idea de triángulo además de las correspondientes figuras trazadas sobre el papel. Las ideas son superiores a los objetos físicos, muestran las propiedades de estos objetos de un modo perfecto, y por ello sabemos más sobre los objetos físicos mirando sus ideas que mirando los objetos mismos. Según Reichenbach (1951) la teoría de las ideas de Platón se puede considerar como un intento para explicar la naturaleza aparentemente sintética de las matemáticas. La visión intuitiva de las ideas se considera como una fuente de conocimiento comparable a la observación de los objetos reales, pero superior a ella por el hecho de que revela propiedades "necesarias" de sus objetos. La observación sensorial no puede darnos la verdad infalible, pero la visión intuitiva sí. Es importante remarcar que, para Platón, los actos de visión intuitiva pueden suministrar conocimiento sólo porque los objetos ideales existen con independencia de las personas. Esta manera de entender la existencia es indispensable para él.

Platón introduce un mundo trascendente de ideas platónicas que está fuera de la mente de las personas. Su existencia es independiente de las personas (consideradas individualmente y colectivamente). Esta manera de considerar la existencia es la esencia del platonismo actual. Según esta concepción, los objetos matemáticos son reales, y su existencia un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Su existencia se halla fuera del espacio y del tiempo. Toda cuestión provista de significado que pueda hacerse al respecto de un objeto matemático tiene respuesta definida, seamos o no capaces de determinarla. Para el platonismo, los matemáticos nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. Según el platonismo tenemos una facultad mental que nos permite intuir ciertas verdades como evidentes y, a partir de ellas, siguiendo demostraciones rigurosas podemos llegar a resultados que, de entrada, permanecen ocultos.

El platonismo entiende las matemáticas como una determinada manera de pensar sobre las cosas del mundo platónico. Las características de este modo de pensar son, entre otras: 1) los objetos producidos (descubiertos) en la actividad matemática son objetos intemporales, 2) las relaciones y propiedades de estos objetos son verdaderas ya que pueden ser demostradas por una prueba lógica a partir de unas verdades que se captan intuitivamente (axiomas). Desde esta perspectiva, el proceso de producción de los objetos matemáticos y su organización en teorías que tienen una evolución histórica no se considera muy relevante ya que, en definitiva, es un descubrimiento de objetos y propiedades preexistentes. Lo que realmente interesa es la demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas entendida como demostración lógica a partir de los axiomas." (p. 252)

A continuación mostramos una manera de ilustrar la relación entre el mundo platónico y el mundo de las experiencias:

Figura 3.1. Mundo platónico y mundo de experiencias

El papel de la intuición en la teoría clásica de la verdad se observa claramente en la geometría de Euclides. En "Los Elementos" se consideran:

a) definiciones,

b) nociones comunes

c) postulados

Un ejemplo de definición es: un punto es aquello que no tiene partes. Un ejemplo de noción común es: cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. Y un ejemplo de postulado es: dados dos puntos se puede trazar una recta que los une. En la terminología que hemos introducido antes, las nociones comunes serían verdades analíticas mientras que los postulados serían juicios sintéticos a priori. En esta estructura, la teoría clásica de la verdad se formularía considerando que ser deducible de axiomas intuitivos es condición necesaria y suficiente para que un enunciado sea matemáticamente verdadero; es decir

1) Un enunciado es matemáticamente verdadero si y sólo si ese enunciado es deducible de axiomas intuitivos.

La puesta en duda del axioma de las pararelas fue el origen de la geometrías no euclideas. Primero se intentó deducir el axioma de las paralelas de los otros cuatro axiomas. Tal como demostraron Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann, dicho axioma no podía probarse a partir de los otros axiomas. Se llegó a la conclusión de que el axioma de las paralelas es independiente (no se puede deducir) del resto. Después se recurrió a la demostración por reducción al absurdo. Gauss, Bolyai y Lobachevski supusieron que el axioma no era cierto y postularon que por un punto exterior pasa más de una paralela. Riemann supuso también que no era cierto, pero él se inclinó por la hipótesis de que no pasara ninguna paralela. Sin embargo, aceptándolas no se llegaba a ninguna contradicción. Los repetidos intentos fallaron pero hicieron aparecer las geometrías no euclideas, la geometría elíptica (sin paralelas) y la geometría hiperbólica (más de una paralela)

Así, la aparición de las geometrías no euclideas llevó a una reformulación de la tesis clásica de la verdad matemática, considerando que ser deducible de axiomas intuitivos es condición suficiente para que un enunciado sea matemáticamente verdadero, y que es fundamental la consistencia del sistema de axiomas; es decir, se modifica la afirmación (1), dada líneas arriba, y aparece una segunda:

1) Un enunciado es matemáticamente verdadero si ~~y sólo si~~ ese enunciado es deducible de axiomas intuitivos.
2) Un enunciado es matemáticamente verdadero si es deducible de un sistema de axiomas no contradictorio.

Se puede decir que la "intuición" pudo resistir a la crisis de las geometrías no euclideas y que sólo tuvo que replegarse. Sin embargo, ya no pudo resistir a la crisis de fundamentos de las matemáticas. La aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos se resolvió con una reformulación radical de la verdad matemática en la que la intuición no tiene cabida. En esta segunda reformulación de la tesis clásica de la verdad matemática, el ser deducible de axiomas intuitivos ya no es condición necesaria ni suficiente para que un enunciado sea matemáticamente verdadero. Lo esencial y condición suficiente es la consistencia del sistema de axiomas:

1) ~~Un enunciado es matemáticamente verdadero si y sólo si ese enunciado es deducible de axiomas intuitivos.~~
2) Un enunciado es matemáticamente verdadero si es deducible de un sistema de axiomas no contradictorio.

Esta reformulación de lo que se debe entender por "verdad" en matemáticas implica que:

a) el carácter intuitivo de los axiomas no es garantía de verdad.
b) no hay explicación satisfactoria de lo que hay que entender por axioma intuitivo

3.1.2. El intuicionismo

Los planteamientos de Kant juegan un papel significativo en el surgimiento de una alternativa ontológica al platonismo y en la aparición de la corriente intuicionista liderada por Brouwer, según la cual la matemática es el estudio de cierto tipo de construcciones mentales. En este sentido, nos parece importante el resumen que hace Font (2003):

"Kant intentó una síntesis entre el racionalismo y el empirismo. Su solución consistió en dar la vuelta a la relación de las personas con el mundo real. En lugar de suponer que los objetos existen independientemente de nosotros, y preguntarnos después cómo podemos conocerlos, Kant sostenía que nuestras actividades cognitivas eran parcialmente constitutivas de los objetos de los cuales tenemos experiencia. Mantenía, además, que es precisamente nuestra propia participación en la construcción de los objetos de percepción lo que hace posible que conozcamos. Al explicar como nuestra actividad cognitiva es constitutiva de los fenómenos que experimentamos, Kant suscribió en parte el enfoque racionalista. Afirmaba que nuestra capacidad de percibir y de pensar sobre la naturaleza dependía de conceptos o categorías del entendimiento que nosotros aportamos a la experiencia, categorías que poseemos de manera innata. Estas categorías se han de aplicar al input sensorial que recibimos, para constituir nuestro mundo de experiencia. Para tener experiencia de un objeto, el intelecto ha de aplicar las categorías a nuestros inputs sensoriales.

Kant mantenía que los objetos que causan las experiencias sensoriales (noúmenos) son incognoscibles para nosotros; por tanto, no tiene sentido investigar qué son. Por otra parte, los objetos de la experiencia fenoménica, los que se construyen aplicando las categorías a los estímulos sensoriales, están dentro de nuestro dominio de conocimientos. Debido a que estos objetos se han construido de acuerdo con nuestras categorías, podemos estar seguros que se adapten a ellas. Por ejemplo, debido a que construimos el mundo de manera que cada suceso tenga una causa, sabemos con certeza que todo suceso tiene una causa. De la obra de Kant nos interesa constatar que: 1) El mundo de los noúmenos queda despojado de las categorías, 2) Las categorías las aporta el sujeto, 3) Las categorías son innatas y 4) el mundo fenoménico deja de ser concebido como la representación pasiva de la realidad exterior y, en su lugar, es visto como una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales.

El punto de vista kantiano permite una alternativa ontológica al platonismo: "el constructivismo". Para Kant, las matemáticas son el resultado de una construcción "a priori", que las personas imponen a la realidad física, y algunos de sus resultados son sintéticos a priori. O sea, incluso antes de la experiencia, algunos juicios matemáticos permiten conocer como han de ser las cosas en la naturaleza. Para Kant, algunos axiomas de la geometría eran sintéticos a priori, pero la aparición de las geometrías no euclídeas tiró por tierra tal suposición.

La aparición de las geometrías no euclídeas obligó a abandonar el apriorismo kantiano del espacio, pero permitía mantener el apriorismo temporal. Esta fue la opción que tomó el intuicionismo de Brouwer al postular que los números naturales se construyen a partir del apriorismo temporal del ser humano. El principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar, pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreducible a otros conceptos más primitivos. Estas construcciones mentales son verdaderas porque son lo que nosotros ponemos en las cosas, pero no implican verdad alguna sobre el mundo si lo consideramos independiente de la experiencia humana.

Según el intuicionismo, los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del sujeto y su verdad se basa en la evidencia de la intuición. A partir de los números naturales los intuicionistas no tienen problemas para construir los racionales. Ahora bien, la necesidad de sujetarse a definiciones estrictamente constructivas excluye las definiciones de número real de Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Para la mayoría de los matemáticos, el aspecto inaceptable del intuicionismo es la mutilación que realiza de la matemática. No obstante, el debate sobre algunos aspectos de la teoría de conjuntos -y en especial sobre el axioma de elección- está produciendo un renacido interés por las ideas constructivistas. Este interés ha sido impulsado en gran medida por Errett Bishop. El trabajo de E. Bishop pone en relieve que los métodos constructivistas pueden ser tan beneficiosos como los formalistas para el desarrollo de las matemáticas. La principal diferencia entre E. Bishop y Brouwer es que el primero no rechaza la teoría de conjuntos de Cantor, sino que intenta modificarla para dotarla de validez constructivista.” (pp. 261-263)

La ontología y la epistemología del intuicionismo matemático se pueden resumir como lo hace Garrido (2003):

Existencia:

- Los objetos matemáticos son entidades producidas en la mente a partir de (1) la intuición fundamental de los naturales y (2) el uso de métodos de construcción efectiva.
- Sólo existen los naturales y todo aquello que puede construirse de modo efectivo a partir de ellos

Verdad:

- Un enunciado matemático *A* es verdadero si y sólo si describe una construcción mental que puede efectuarse.
- Un enunciado (No *A*) es matemáticamente verdadero si y sólo si describe una construcción mental en la cual, supuesta efectuada la construcción descrita por *A*, se deduce una contradicción.

(pp. 199-200)

Y es importante tener en cuenta lo que afirma Font (2003): "La principal repercusión del punto de vista constructivista, propuesto inicialmente por Kant y asumido posteriormente por el intuicionismo, es la aparición de una alternativa ontológica al platonismo. Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos" (p.263).

La otra repercusión importante para nosotros es que, en cierta manera, sitúa el papel fundamental de la intuición en el campo del contexto de descubrimiento y "la constatación de que el mundo fenoménico es una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales. Cómo se realiza esta construcción y el papel que juega en ella la intuición se convierte en una sugerente agenda de investigación para la didáctica de las matemáticas." (Font, 2003, p. 263)

3.1.3. Empirismo e intuición

El empirismo destaca la importancia de la experiencia y la observación en la búsqueda del conocimiento y son particularmente importantes los puntos de vista relacionados con las matemáticas y con la intuición, de empiristas como Locke, Hume y Mill. Un interesante resumen lo encontramos en Font (2003):

"Los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es consecuencia de la observación. Para resolver la paradoja de que por una parte las matemáticas se aplican a la realidad y por la otra sus resultados no dependen de la observación, optaron por diferentes soluciones. Según Davis y Hersh (1988), Locke consideraba el conocimiento matemático como absolutamente seguro, por ser sintético y, por lo tanto, lo distinguía del conocimiento empírico. Las proposiciones necesarias eran, según él, "fútiles" o "instructivas", distinción por medio de la cual, al parecer, anuncia la distinción kantiana entre proposiciones analíticas y sintéticas y que, si se interpreta de este modo, lo convertiría en partidario de la síntesis a priori.

Hume no acepta la solución sugerida por Locke y sólo admite como sintético el conocimiento que depende de la experiencia. Para Hume las matemáticas y la lógica son analíticas ya que no dependen de la experiencia. Hume entiende que la "dependencia" quiere decir no sólo que los conceptos tienen su origen en la percepción sensible, sino también que la percepción sensible es la base de la validez de todo conocimiento no analítico. Para Hume, la adición suministrada al conocimiento empírico por la inteligencia es de naturaleza vacía. La solución de Hume de considerar que el pensamiento matemático no informa sobre las cosas de nuestra experiencia porque son verdades analíticas que no dependen de ella, al no conocer aún las geometrías no-euclidianas, no podía explicar la doble naturaleza de la geometría de la época, tanto como producto de la razón como predictor de observaciones, por lo que su punto de vista tuvo que esperar al Positivismo Lógico del siglo XX para desarrollarse.

Si bien Locke aceptó el principio de que todos los conceptos, aun los de las matemáticas y la lógica, se incorporan a nuestra mente a través de la experiencia; no estuvo dispuesto a ampliarlo hacia la tesis de que todo conocimiento sintético adquiere su valor a partir de la experiencia. Ampliación que si llevó a cabo Mill en "A System of Logic ratiocinative and inductive" publicada en 1843, donde sostiene una concepción claramente empírica de la lógica y las matemáticas ya que considera que las ciencias matemáticas no están fundadas completamente sobre verdades necesarias, sino solamente sobre hipótesis y sobre algunos axiomas que constituyen generalizaciones de la experiencia. Para Mill, las hipótesis son deformaciones de los objetos reales, en donde algunas circunstancias son omitidas o exageradas (por ejemplo, línea sin anchura, etc.); en cambio los axiomas (por ejemplo, "dos líneas rectas no pueden contener un espacio") son verdades inductivamente adquiridas sobre la base de la experiencia y mediante un paso al límite.

El punto de vista de Mill es que las matemáticas son el producto de una determinada manera de pensar sobre las cosas de nuestra experiencia que es la misma que tienen la física o la química. Su propósito era mostrar que las matemáticas eran una ciencia inductiva. El punto de vista de Mill presentaba muchos puntos débiles, el primero es que las ciencias experimentales no funcionan por el método inductivo; el segundo es que tampoco lo hacen las matemáticas, y el tercero es que sólo tiene en cuenta aspectos psicológicos y no considera aspectos sociales. Su propuesta, a pesar del poco éxito que tuvo, tiene aspectos interesantes. Uno de ellos es que, tal como remarca Bloor (1998), el enfoque de Mill está claramente relacionado con ideas educativas.

Según Bloor (1998), la idea fundamental de Mill es que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Algunas de esas experiencias caen bajo categorías que constituirán más tarde las distintas ciencias empíricas; así, por ejemplo, el hecho de que los metales se dilaten pertenece a la física. Paralelamente a este tipo de hechos referentes a ámbitos bastante estrechos, también tenemos conocimiento de hechos que se aplican indiferentemente a ámbitos muy amplios; por ejemplo, existen múltiples colecciones de objetos que pueden ser ordenados y clasificados, organizados según ciertas pautas o series, agrupados o separados, alineados o intercambiados entre si, etc. Es esta categoría de hechos la que Mill piensa que subyace a las matemáticas. El agrupamiento y la organización de objetos físicos suministran modelos para nuestros procesos mentales, de modo que cuando pensamos matemáticamente estamos apelando tácitamente a ese saber. Los procesos de razonamiento matemático no son sino pálidas sombras de las operaciones físicas con objetos, y ese carácter forzoso que tienen los pasos de una demostración y sus conclusiones reside en la necesidad propia de las operaciones físicas que subyacen como modelos. Si el campo de aplicación de los razonamientos aritméticos es tan vasto se debe a que podemos, con mayor o menor dificultad, asimilar a esos modelos una gran variedad de situaciones diferentes.

En Mill se encuentran ideas sobre la enseñanza de las matemáticas que hoy son ampliamente aceptadas. Mill consideraba que en la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan. Sin duda la perspectiva de Mill apunta elementos interesantes. Los objetos físicos, las situaciones y las manipulaciones pueden funcionar claramente como modelos de las diversas operaciones matemáticas básicas. Las experiencias de tales operaciones físicas pueden plausiblemente presentarse como la base empírica del pensamiento matemático. Las ideas de Mill apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas basada en la exploración del alumno." (p. 253-255)

Para los partidarios actuales del empirismo en las matemáticas (Tymoczko, Kitcher y Maddy), la verdad de las proposiciones matemáticas se fundamenta, en último término, en nuestras percepciones sensoriales y en generalizaciones inductivas a partir de ellas. Por ejemplo, para Tymoczko (1991) las verdades matemáticas de nivel medio son conocidas del mismo modo que las verdades científicas de nivel medio, a través de la *evidencia de nuestros sentidos***.** Los axiomas fundamentales de las matemáticas *son conocidos inductivamente,* en razón de su eficiencia en generar verdades de nivel medio.

Así, la perspectiva empirista lleva a suponer la existencia de un tipo de intuición diferente a la intuición platónica o a la que proponen los intuicionistas, nos referimos a una *intuición sensible* que se basa en la evidencia de nuestros sentidos. Llamaremos perspectiva empirista a esta manera de entender la intuición.

3.2. LA INTUICIÓN EN LA PSICOLOGÍA GENÉTICA

Piaget considera varias posibles dicotomías sobre la intuición. La primera que comentaremos es de tipo diacrónico. Piaget en su famosa obra *Seis estudios de psicología* (1992) distingue entre intuición primaria y articulada y las relaciona, sobre todo, con el paso de la etapa preoperatoria a la operatoria.

Piaget, en su teoría de las etapas, considera que todas las personas desarrollan ciertas estructuras, siempre que mantengan una relación normal con el medio físico y social. La idea general es que las personas están conformadas biológicamente para interrelacionarse con su entorno de unas maneras determinadas y, a medida que se va produciendo esta interrelación se va formando una secuencia de estructuras del pensamiento cada vez más complejas. Para clasificar las diferentes estructuras (sensomotriz, preoperatoria, operatoria y formal) Piaget utiliza de entrada el concepto de operación. Una operación no es más que una acción interiorizada reversible. Piaget llegó a la conclusión de que hay épocas en las que los niños piensan de manera operatoria y épocas en que no.

La etapa preoperatoria iría desde los dos hasta los seis años aproximadamente y es una etapa en la que los niños tienen la capacidad de representarse acciones, pero no tienen la capacidad de deshacerlas mentalmente y volver atrás. Esta limitación les lleva a aceptar las cosas tal como se les presentan, más fácilmente de lo que lo hacen las personas adultas. En cambio, los adultos, ante la percepción de las cosas, tienen capacidad de hacer y deshacer acciones mentales que les permiten relativizar aquello que perciben; pero los niños, que no tienen la capacidad de la reversibilidad, están mucho más condicionados por la percepción que las persones mayores. Piaget ilustra este predominio del pensamiento perceptivo y esta incapacidad de pensar de forma reversible con unos estudios sobre la conservación y la clasificación.

La intuición juega un papel fundamental en la teoría de las etapas de Piaget, en concreto la intuición resulta básica para convertir las acciones en operaciones. En la etapa preoperatoria, el niño suple la lógica por la intuición, simple interiorización de las percepciones y los movimientos en forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales", que por tanto prolongan los esquemas senso-motrices sin coordinación propiamente racional. La intuición se basa más en lo perceptible que en la lógica: por ejemplo, para un niño de este periodo, una hilera de 10 fichas rojas y una hilera de 12 fichas azules, ambas de la misma longitud, tienen la misma cantidad de fichas, porque atiende al efecto óptico global, no a las distancias de las fichas entre sí. Cronológicamente, primero aparece la intuición primaria, luego la intuición articulada (y finalmente la operación, pero esto es después de los siete años). La intuición primaria es simplemente una acción senso-motriz convertida en pensamiento, es rígida e irreversible. La intuición articulada sigue siendo irreversible, pero tiene la ventaja que el niño puede prever consecuencias y reconstruir estados anteriores:

> El análisis de un gran número de hechos ha demostrado ser decisivo: hasta los siete años el niño sigue siendo prelógico, y suple la lógica por el mecanismo de la intuición, simple interiorización de las percepciones y los movimientos bajo la forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales", que prolongan de este modo los esquemas sensorio-motores sin coordinación propiamente racional.
>
> (…) ¿En qué consisten pues estas intuiciones elementales de la correspondencia espacial u óptica, del orden directo A B C o del adelantamiento? Se trata, simplemente, de esquemas sensorio-motores, aunque traspuestos o interiorizados en representaciones. Se trata de imágenes o simulaciones de lo real, a medio camino entre la experiencia efectiva y la "experiencia mental", y no son aún operaciones lógicas generalizables y combinables entre sí.
>
> ¿De qué carecen estas intuiciones para ser operatorias y transformarse, de esta forma, en un sistema lógico? Les falta, simplemente, prolongar en ambos sentidos la acción ya conocida por el sujeto de forma tal que se hagan móviles y reversibles. Lo característico de las intuiciones primarias es, en efecto, el ser rígidas e irreversibles: estas intuiciones son comparables a esquemas perceptivos y a actos habituales, que aparecen en bloque y no pueden alterarse. Todo hábito es, en efecto, irreversible: por ejemplo, se escribe de izquierda a derecha y se requeriría un nuevo aprendizaje para hacerlo de derecha a izquierda (y viceversa en el caso de árabes e israelitas). Lo mismo sucede con las percepciones, que siguen el curso de las cosas, y con los actos de inteligencia sensorio-motriz que, también, tienden hacia un objetivo y no retroceden (excepto en algunos privilegiados). Así pues, es totalmente normal que el pensamiento del niño empiece por ser irreversible y que, en particular, cuando este pensamiento interioriza percepciones o movimientos bajo la forma de experiencias mentales, éstos sean poco móviles y poco reversibles. La intuición primaria no es, por tanto, más que un esquema sensorio-motor transpuesto en acto de pensamiento, y este pensamiento hereda naturalmente sus caracteres. Pero estos últimos constituyen una adquisición positiva, y bastará con prolongar esta acción interiorizada en el sentido de la movilidad reversible para transformarla en "operación".

> La intuición articulada avanza, efectivamente, en esa dirección. Mientras que la intuición primaria no es más que una acción global la intuición articulada la supera en la doble dirección de una anticipación de las consecuencias de esta acción y de una reconstitución de los estados anteriores. Sin duda aún sigue siendo irreversible: basta con desbaratar una correspondencia óptica para que el niño no pueda volver a colocar los elementos en su orden primitivo; basta con efectuar un giro del tubo para que el orden inverso sea incomprensible para el sujeto, etc. Pero este inicio de anticipación y de reconstitución preludia la reversibilidad puesto que constituye una regulación de las intuiciones iniciales y esta regulación anuncia las operaciones. La intuición articulada es, pues, susceptible de alcanzar un nivel de equilibrio más estable y más móvil simultáneamente con la acción sensorio-motriz, y esto constituye un progreso del pensamiento característico de esta fase sobre la inteligencia que precede al lenguaje. Comparada con la lógica la intuición se encuentra, por tanto, en un equilibrio menos estable por carecer de reversibilidad, pero comparada con los actos preverbales es, sin duda, una evidente conquista. (Piaget, 1992, pp. 44-48)

En un estudio más amplio sobre la intuición (Piaget y Beth, 1980), Piaget reflexiona sobre las relaciones entre evidencia, intuición e invención y afirma que la intuición matemática es muy difícil de entender para un psicólogo: *“No hay nada más difícil de comprender para un psicólogo que lo que los matemáticos entienden por intuición (o bien, por intuiciones, ya que distinguen múltiples formas de ella)”* (Piaget y Beth, 1980, p. 232). Sus principales conclusiones en el capítulo 9 de este libro son:

1) No hay rasgo positivo común a la diversidad de conocimientos a los que los matemáticos califican de “intuitivos”, pues en sentido amplio, el término intuición cubre sin más todo lo que no esté formalizado y por ello es imposible construir una teoría psicológica coherente del conocimiento intuitivo.

   Se plantea las siguientes preguntas

   a) ¿En qué difieren entre sí las diversas formas de intuición: por características diacrónicas (= genéticas), por sincrónicas o por ambas? Dicho de otro modo, tal intuición ¿es característica de un número limitado de estadios del desarrollo y, por tanto, de un número limitado de niveles de la jerarquía de las funciones (percepción, operaciones concretas, etc.) o constituye una función general que se encuentre a todos los niveles y que pase por sus propios estadios de desarrollo?

b) ¿Qué marcha manifiesta la intuición en el curso del desarrollo: progresiva o por el contrario, regresiva? ¿Asistimos también a un progreso de la intuición o de alguna de sus variedades, ya sea progreso en extensión o en afinamiento cualitativo? O, al revés, ¿No asistimos, o bien a una disgregación de las intuiciones en fiscalizaciones experimentales, por una parte, y deductivas por otra, o a una reducción gradual del papel de la intuición?

Afirma que es imposible responder a ellas si no se empieza por clasificar las distintas variedades de "intuición", no atendiendo a su contenido (tiempo, espacio, número, etc.) sino a su estructura.

Piaget expone las siguientes dicotomías:

Primeramente, distingue entre las intuiciones empíricas y las intuiciones operatorias. Las primeras aparecen inicialmente y son relativas a propiedades físicas de los objetos o a propiedades psicológicas que proporciona la experiencia introspectiva que se va viviendo (por ejemplo, intuición del peso) y las segundas están vinculadas a acciones u operaciones (por ejemplo, intuiciones del orden, el encajamiento sucesivo, la correspondencia término a término).

Las intuiciones operatorias – que para Piaget son las únicas que ofrecen interés desde el punto de vista matemático – están sujetas a una segunda dicotomía: entre las intuiciones geométricas y las no geométricas. Las primeras son las que están "acompañadas de una representación por imágenes de naturaleza homogénea a la de las operaciones en juego" y las segundas son las que no poseen semejante propiedad ("operaciones que versen sobre objetos discretos").

Considerando que cuando se habla de la intuición geométrica se suele pensar más en su carácter imaginatorio que en su aspecto operatorio, Piaget introduce una nueva distinción dentro de las intuiciones operatorias: por una parte la intuición simbolizante (o intuición por imágenes) y por otra, la intuición operatoria en sentido estricto (que por lo tanto, no se refiere a lo simbolizado).

2) Siendo las distinciones anteriores de índole sincrónica, Piaget nos recuerda algunas distinciones diacrónicas (genéticas), ya que cada

una de las categorías anteriores presenta sus propias leyes de evolución.

a) Las intuiciones empíricas evolucionan en función de los progresos de la experimentación.

b) Las intuiciones operatorias en sentido estricto competen a los mecanismos mismos de la inteligencia, y pasan por tres grandes estadios de desarrollo: intuiciones vinculadas a la acción material en los objetos, luego a la acción interiorizada en operaciones (pero todavía aplicable a los objetos), y por fin a operaciones independientes de toda posible acción.

c) Las intuiciones simbolizantes evolucionan de manera subordinada a las operatorias en sentido estricto, que son las únicas que confieren movilidad y adecuación relativa a las imágenes, en particular a las espaciales.

3) En cuanto al papel propiamente cognoscitivo de la intuición, nos dice que aun cuando es efectivo a todos los niveles y se mantiene fundamental desde el punto de vista de la invención, disminuye (en sentido relativo) a lo largo del desarrollo: las intuiciones empíricas ceden el paso o se someten a las técnicas de experimentación estricta; las simbolizantes se subordinan cada vez más a las intuiciones operatorias en sentido estricto. Afirma que éstas, tienen un desarrollo ilimitado, gracias al mecanismo de la “abstracción reflexiva” y que lo propio de ésta es afinar incesantemente las técnicas deductivas de acuerdo con un doble proceso, simultáneamente progresivo y retroactivo; “de donde procede una tendencia interna a la formalización que, pese a que jamás pueda cortar todo contacto con sus raíces intuitivas, limita cada vez más el dominio propio de la intuición (en el sentido de pensamiento operatorio no formalizado)”.

3.3. LA INTUICIÓN EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Las relaciones entre la intuición y la formalización y el rigor han sido y son motivo de estudios y debates en el área de educación matemática. Tenemos, por ejemplo, el libro *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany* (Schubring, 2005); la conferencia plenaria *Intuition and rigor in* *mathematics education*, anunciada para el "Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI" que se celebrará en Roma en marzo del 2008; la conferencia de Tall comentada en el primer capítulo (2006) y, entre otros, los artículos de Cohn (1995), Farmaki y Paschos (2005); Tall (2001); Roldán y Crobeiro (2001). En el último artículo citado, las autoras afirman que *"hacer matemática significa entonces intuir y formalizar. De modo que intuición y formalización son conceptos indisolublemente unidos, siendo así que entrenar la intuición en matemáticas significa a la vez entrenar la capacidad de concientizar dicha capacidad, para poder formalizar los resultados"* (Pág. 135).

3.3.1. La intuición según Fischbein

Con relación al papel de la intuición hay que destacar que Efraim Fischbein nos ha legado un enfoque original hacia los problemas educativos centrado en esta compleja noción (Fischbein, 1990, 1993a y 1993b, 1994, 1998). Las ideas fundamentales de su obra están contenidas en su libro "Intuition in Science and Mathematics" (1994), donde se esboza una "teoría de la intuición" que se ofrece a la comunidad de investigadores como una herramienta útil para la interpretación de fenómenos en educación.

Fischbein (1994) formula una teoría en la cual define la noción de intuición y analiza el rol esencial que ésta juega en los procesos matemáticos y científicos de los alumnos. En su obra, (Fischbein, 1994), considera el término "intuición" como equivalente a *conocimiento intuitivo*. "…in other terms not as a source, not as a method, but, rather, as a type of cognition." (p. 13). Aclara que no debe confundirse intuir con percibir, afirmando que lo segundo es una cognición inmediata, mientras que intuir va más lejos de los hechos dados, implica una extrapolación más allá de la información directamente accesible, y da como ejemplo ilustrativo que se percibe que dos segmentos de recta que se intersecan determinan dos pares de ángulos opuestos de igual medida, pero se intuye que al intersecarse dos rectas cualesquiera quedan determinados dos pares de ángulos de igual medida. Se está aceptando intuitivamente la propiedad general.

En una definición preliminar, establece que

> "…intuitive cognition is characterized by *self evidence, extrapolativeness, coerciveness* and *globality."*
>
> (p. 14)

Clasificación de las intuiciones

Fischbein clasifica las intuiciones de dos maneras: una según sus funciones y otra según sus orígenes. Aclara que las distinciones que hace no deben considerarse como absolutas.

Según sus funciones

a) *Intuiciones de afirmación*: Son representaciones o interpretaciones de varios hechos aceptados como verdaderos, autoevidentes y autoconsistentes. ("Dos puntos determinan una recta")

Éstas, a su vez, pueden ser

- *Semánticas* (referidas al significado de un concepto; por ejemplo significados intuitivos de recta, punto, fuerza);
- *Relacionales* (expresadas en proposiciones aparentemente autoevidentes o autoconsistentes; por ejemplo, "el todo es mayor que cualquiera de sus partes"); o
- *Inferenciales* (inferencias lógicas en las que la relación entre las premisas y la conclusión se aceptan como autoevidentes). Pueden tener una estructura inductiva o deductiva; por ejemplo, las generalizaciones que se hacen al afirmar que toda una categoría de elementos cumple una propiedad luego de observar que cierto número de elementos cumple tal propiedad. El siguiente es un ejemplo deductivo dado por Poincaré (1920, p.19) "si en una recta el punto C está entre los puntos *A* y *B*, y el punto *D* está entre *A* y *C*, entonces *D* está entre *A* y *B*").

Otra manera de clasificar las intuiciones de afirmación es considerándolas

- *básicas* (representaciones e interpretaciones que se desarrollan naturalmente en las personas, generalmente en su niñez, y que son compartidas por todos los miembros de cierta cultura; por ejemplo las representaciones del espacio, del tiempo; la idea de causalidad)
- *individuales* (representaciones o interpretaciones personales, relacionadas a su vida, a su actividad y sus propias experiencias.)

b) *Intuiciones de conjetura*: Son suposiciones, asociadas con la sensación de certeza, acerca de eventos futuros, acerca del desarrollo de ciertos fenómenos. Hay intuiciones de conjetura de legos y de expertos. Fischbein considera que estas intuiciones son de importancia fundamental en toda actividad profesional.

c) Intuiciones de anticipación: También son suposiciones, pero son las que se refieren explícitamente a la actividad de resolución de problemas. Representan la visión preliminar y global de la solución de un problema, que precede a la solución analítica, completamente desarrollada. "Durante el esfuerzo de solución mismo, ellas (las intuiciones de anticipación) pueden aparecer, *subjetivamente*, como momentos de iluminación, como verdades ciertas, evidentes, definitivas, globalmente captadas" (p. 62) A diferencia de las intuiciones de conjetura, las de anticipación representan una fase en el proceso de solución de un problema, "mientras que las intuiciones de conjetura son, más o menos, evaluaciones ad hoc y predicciones que generalmente no se incluyen en una actividad sistemática de solución" (p. 61)

d) Intuiciones de conclusión: Son las que resumen en una visión global y estructurada las ideas esenciales de la solución de un problema previamente elaborado. Son las que añaden a la solución analítica formal una sensación de intrínseca certeza directa.

Según sus orígenes:

a) Intuiciones primarias: Se desarrollan en cada individuo como consecuencia de sus propias experiencias personales, independientemente de cualquier instrucción sistemática.

A su vez éstas pueden ser:

- *Preoperacionales*: Las que están basadas en configuraciones. Por intuición preoperacional un niño de 4 ó 5 años afirmaría que en una fila de 7 caramelos hay más caramelos que en una fila de 8 caramelos, si la primera es más larga que la segunda.

- *Operacionales*: Las que están basadas en estructuras operacionales. Se desarrollan durante el período de las operaciones concretas (etapa de desarrollo definida por Piaget) y permanecen como adquisición estable por toda la vida. Permanecen básicamente inalterables, aunque pueden ganar en precisión y claridad como consecuencia del desarrollo de las capacidades formales.

b) Intuiciones secundarias: Son las que no tienen un origen natural, en la experiencia normal de una persona cualquiera, sino que surgen por influencia de instrucciones sistemáticas, del aprendizaje de conceptos, propiedades o resultados y de razonamientos más avanzados. Son las que Félix Klein[1] denomina "intuiciones refinadas". Ejemplos de éstas son la intuición de espacios de más de tres dimensiones y la equivalencia entre un conjunto infinito y un subconjunto propio de él.

Fischbein afirma que "la categoría de intuiciones secundarias implica asumir que se pueden desarrollar nuevas intuiciones *con raíces no naturales*" (p. 68) y más adelante cita a Patrick Suppes, refiriéndose a la importancia de desarrollar intuiciones para encontrar y dar demostraciones matemáticas:

> Put in another way, what I am saying is that I consider it just as necessary to train the intuition for finding and writing mathematical proofs as to teach intuitive knowledge of geometry or of real number system (Suppes, 1966, p. 70)

3.3.2. La teoría de las reglas intuitivas

Es importante tener en cuenta que la intuición también puede conducir a conclusiones incorrectas y que hay investigaciones al respecto. Algunas de ellas las podemos encontrar en Stavy y Tirosh, 1996 y 2000; Tirosh, Stavy y Tsamir, 2001; Tsamir, Tirosh, Stavy, y Ronen, 2002; Babai, Levyadun, Stavy y Tirosh, 2006; y Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Fou-Lai Lin y Macrobbie, 2006. Estos investigadores están desarrollando una teoría sobre reglas intuitivas. Ellos, basados en sus observaciones a las respuestas de niños, de diversas edades y lugares, a tareas de física, química, biología, y matemáticas han identificado tres reglas intuitivas que las denominan:

a) *más A – más B,*

b) *misma A – misma B,* y

c) *todo puede ser dividido inacabablemente*

y afirman que muchas respuestas incorrectas están relacionadas con ellas.

> We claim that many common incorrect responses to mathematics and scientific tasks can be interpreted as evolving from a small number of intuitive rules, which are activated by specific external task features. We regard these types of responses as intuitive because problem solvers often view them as self-evident (i.e., they perceive their responses as being true and in need of no further justification). (Stavy et al, 2006, p. 418)

[1] *Conférences sur les mathématiques, Conférence VI,* A Hermann, Librairie Scientifique, Paris, 1898

A modo de ilustración sobre la primera regla, resumimos un ejemplo que los autores comentan en el citado artículo:

Cuando a niños de 14 a 15 años se les muestra un gráfico como el que se muestra en la figura 3.2 a, un altísimo porcentaje sostiene que los ángulos α y β son iguales; sin embargo, cuando se les presenta un gráfico como el que se muestra en la figura 3.2 b, un alto porcentaje afirma que β es mayor que α, influenciado por la mayor longitud de los segmentos que forman β

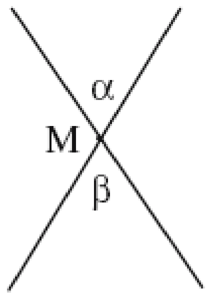


Figura 3.2a

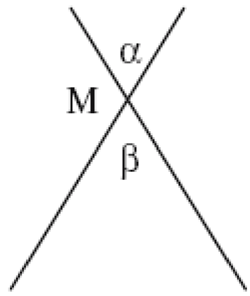


Figura 3.2b

> This judgment exemplifies the effect of the rule *more A – more B* on students' responses. In this case the difference between the two angles in quantity A (the perceived length of the arms) affected students' judgment of quantity B (the size of angles α and β).
>
> The increase in the correct responses in the higher grades probably reflects the impact of specific instruction related to angles.
>
> (Stavy et al, 2006, p 420)

Otros ejemplos trabajados en sus investigaciones son las afirmaciones de que una persona, digamos María, ahorra más que otra, digamos Tomás, si se tiene la información de que María ahorra 20% de su salario y Tomás ahorra 15% de su salario. Este sería otro caso en el que se cumple la regla intuitiva "Más A (porcentaje) – más B (dinero)".

Los autores hacen notar la importancia de hacer más observaciones en diversos lugares y contextos culturales, antes de afirmar la validez universal de estas reglas intuitivas.

3.3.3 Otras maneras de entender la intuición

De una manera menos sistematizada que en los trabajos mencionados anteriormente, en el área de educación matemática, algunas maneras de entender la intuición han sido las siguientes:

1) la intuición es algo opuesto a lo riguroso

2) lo intuitivo es visual

3) la intuición es algo que nos permite conocer la verdad de algo sin necesitar demostración alguna

4) la intuición nos da una perspectiva holística o integradora (entendido como contrario a detallado o analítico).

Un punto de vista sobre la intuición que puede alcanzar un alto grado de consenso es el siguiente: una intuición es una idea que posee dos propiedades fundamentales

(a) inmediatez (evidencia intrínseca) y

(b) certeza (sin necesidad de demostración).

La intuición nos hace sentir seguros de la verdad de lo que afirmamos y hace que consideremos innecesaria su demostración rigurosa. Esta idea está expresada en Fischbein (1994) cuando dice:

> *Intuition is a special type of cognition characterized by self-evidence and immediacy: an intuitive cognition appears subjectively to the individual as directly acceptable, without the need for an extrinsic justification – a formal proof or empirical support.* (p. 200)

3.3.4. Tipos de intuiciones según el contenido

En los apartados anteriores hemos considerado diferentes clasificaciones, por ejemplo, basándonos en un criterio filosófico, podemos considerar tres tipos de intuición (platónica, intuicionista y empirista). Hay otra posible clasificación de tipos de intuición según el contenido matemático al cual se aplica. En la literatura sobre la intuición matemática es habitual encontrar investigaciones, entre otras, sobre

(1) *intuición numérica* (especialmente en la neuropsicología de la aritmética, p. e. Alonso y Fuentes, 2001)[2] pero también en la didáctica de las matemáticas (p.e. Linchevski y Williams, 1999; Raftopoulos, 2002; Giménez, 2006)

(2) *intuición geométrica* (Piaget y Inhelder, 1963; Tall, 1991; Jones, 1998; Fujita, Jones y Yamamoto, 2004),

(3) *intuición del infinito* (Fischbein, Tirosh, y Hess. 1979; Monaghan, 2001; Tirosh, 1991; Turégano, 1996; Montoso y Scheuer, 2006; Tsamir y Tirosh, 2006),

(4) *intuición de la probabilidad y combinatoria* (Fischbein y Grossman, 1997a y 1997b; Fischbein y Schnarch, 1997; Vidakovic, Berenson y Brandsma, 1998; Abrahamson y Cendak, 2006).

Con relación a este tipo de clasificación de la intuición, la pregunta que nos hemos formulado es: ¿Hay una "intuición optimizadora", entendida como la que se genera y se aplica al buscar situaciones óptimas en la vida diaria? Esta cuestión la tratamos en el apartado 3.5.

3.4. RELACIÓN DE LA INTUICIÓN CON OTROS TÉRMINOS HABITUALES EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

En este apartado pretendemos poner de manifiesto el aire de familia que la intuición comparte con otros instrumentos de conocimiento. Consideramos que hay dos grandes tipos de usos del término intuición. Hay un primer uso que es el que se hace en expresiones como "los axiomas son intuitivos". Se trata de un uso, que metafóricamente llamaremos "canónico", del término intuición en el que los sinónimos que se pueden utilizar prácticamente nos dan la misma información que el término "intuitivo" (por ejemplo, evidente, clarividente, etc.). Ahora bien, hay otros usos en los que el término intuitivo se puede sustituir por otros términos que nos dan una información muy diferente. Por ejemplo, hay casos en los que

[2] La intuición numérica, o de la cantidad, suele aparecer en la literatura propia de la didáctica de las matemáticas más como "sentido numérico". Este es el caso, por ejemplo, del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989).

con intuitivo se pretende decir que se ha hecho una conjetura plausible, o que se ha sido creativo, o bien que se ha producido el insight (iluminación), etc.

Un ejemplo ilustrativo de que la intuición tiene un “territorio compartido” con la creatividad lo tenemos en la exposición de Poincaré en 1908, considerada como el intento más famoso de descripción de lo que sucede en la mente de un matemático. Entre otras cosas, Poincaré (1963) sostenía que la intuición del orden matemático que hace adivinar las armonías y las relaciones ocultas, no puede pertenecer a todo el mundo. A lo largo de su discurso insistió en que sólo aquel que disponga de una sensibilidad estética especial puede ser un verdadero inventor. Según el autor, existen diversos tipos de personas que:

a) No poseerán este sentimiento delicado difícil de definir, ni una fuerza de memoria y de atención por encima de lo vulgar, por lo que serán incapaces de comprender las matemáticas un poco más elevadas. Esto ocurre en la mayoría de la gente.

b) No tendrán este sentimiento más que en débil grado, pero estarán dotados de una memoria poco común y de una gran capacidad de atención. Aprenderán de memoria los detalles unos después de los otros, podrán comprender las matemáticas y alguna vez aplicarlas, pero serán incapaces de crear. Así sucede en algunas personas.

c) Poseerán en un grado más o menos elevado una intuición especial, y entonces no solamente podrán comprender las matemáticas aunque su memoria no tenga nada de extraordinario, sino que podrán llegar a ser creativos y tratarán de inventar con más o menos éxito, según que esta intuición esté en ellos más o menos desarrollada. Esto pasa en unos pocos casos.

Otro ejemplo, es el trabajo de Ervynck (1991). Este autor ha hecho una descripción de la naturaleza de la creatividad matemática y de cómo funciona. Parte de una observación detallada de las diferentes clases de actividad matemática (como procedimiento heurístico y registro de ejemplos de creatividad matemática) y deduce algunas características del fenómeno creativo. Describe cinco ingredientes de la creatividad matemática: el estudio, la intuición, la imaginación, la inspiración y los resultados. El estudio consiste en el esfuerzo que se hace al familiarizarse con el problema, lo que crea en la mente estructuras conceptuales sobre datos nuevos. A su vez, las intuiciones pueden llevar a la imaginación y a la inspiración a que formulen los resultados requeridos, al principio de una forma imperfecta pero luego mejorada por reflexión en el orden formal deductivo.

Ervynck habla del poder motivador de la creatividad matemática que resulta de la interacción de comprensión, intuición, inspiración y generalización, como se resume en la siguiente tabla:

Comprensión	Capacidad de regenerar Profundización simultánea del entendimiento Inspiración de un concepto	
Intuición	Formación de imágenes de un concepto Concepción de conjeturas plausibles Imaginación Fantasía matemática Curiosidad	
Inspiración	Formulación de nuevos conocimientos Revisión de los intereses Reordenación Predecir lo que es importante en el futuro	
Generalización	Habilidad para prever lo que será importante en el futuro Extensión de los esquemas actuales en un contexto más amplio	Expansiva: amplía la aplicabilidad de la teoría sin cambiar la naturaleza de la estructura cognitiva. Reconstructiva: requiere una reorganización de la estructura del conocimiento

CUADRO 3.1.
El poder motivador de la creatividad matemática.
Fuente: Ervynck (1991, pp. 47-48))

Queremos destacar, por una parte, que las conclusiones de Ervynck sobre la creatividad se originan en lo que hemos llamado contexto de descubrimiento, más en concreto en la actividad de resolución de problemas. Por otra parte, los indicadores que Ervynck propone para la intuición son ilustrativos de otro de los procesos con los que la intuición tiene un territorio compartido, nos referimos a la visualización. En efecto, cuando se proponen indicadores para la intuición del tipo “imaginación” entramos de lleno en el territorio de la visualización y también en lo que aquí hemos llamado perspectiva empirista sobre la intuición.

Otro de los términos con los que la intuición tiene un territorio compartido es el de “visualización”. En muchos casos, se usan como sinónimos. A título de ejemplo, sigue una pregunta formulada por Duval en la que claramente podemos observar este territorio compartido: *"En estas condiciones, ¿qué poder de visualización o qué soporte intuitivo tienen las gráficas para la mayoría de estudiantes?"* (Duval, 2006, pp. 150-151).

Actualmente el papel que juegan las imágenes visuales y la capacidad de visualización en la comprensión de los contenidos matemáticos ha sido objeto de estudio por parte de investigadores procedentes tanto del campo de la psicología como del campo de la didáctica de las matemáticas (Bettina y Katrin, 2006; Davis 1993; Dreyfus 1994; Duval, 2006; Fischbein 1993b; Guzmán, 1996; Zimmermann y Cunningham, 1991). Estos estudios se han realizado desde marcos teóricos diferentes y en algunos casos enfrentados y, en nuestra opinión muestran que el proceso de visualización "comparte territorio" con la intuición ya que muchas veces se habla de razonamientos intuitivos como equivalente a razonamientos visuales.

En la figura siguiente queremos representar los dos usos diferentes del término intuición. En la parte central hemos situado el uso canónico y en este caso una intuición es una idea que posee dos propiedades fundamentales *(a)* inmediatez (evidencia intrínseca) y *(b)* certeza (sin necesidad de demostración). En la parte que rodea a este núcleo, hemos situado otros usos del término intuición que "comparten territorio" con términos como visualización, formulación de conjeturas, insight, creatividad, etc.

Figura 3.3. Territorio compartido por la intuición con otros términos

3.5. ¿EXISTE UNA INTUICIÓN OPTIMIZADORA?

En el apartado 3.3 hemos visto cómo en la literatura sobre la intuición matemática es habitual encontrar investigaciones, entre otras, sobre la intuición numérica, la geométrica, del infinito, de la probabilidad y combinatoria, etc. Con relación a este tipo de clasificación de la intuición, la pregunta que nos hemos formulado es: ¿Hay una intuición optimizadora, entendida como la que se genera y se aplica al buscar situaciones óptimas en la vida diaria?

Nuestra respuesta es que hay razones para suponer que sí y que esta intuición optimizadora tiene su origen, básicamente, en dos tipos de experiencias cotidianas. El primer tipo de experiencias tiene que ver con el hecho de que en la vida cotidiana, con frecuencia estamos afrontando muchos problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, (no necesariamente el más corto), tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, tratamos de enseñar lo mejor posible, escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución óptima. Este tipo de situaciones conllevan una racionalidad optimizadora que busca encontrar la mejor solución a la situación. Este tipo de experiencias está relacionada con expresiones populares como "la ley del mínimo esfuerzo".

El segundo tipo de experiencias están relacionadas con el hecho de que somos sujetos que experimentamos sobre nosotros mismos cómo, con el paso del tiempo, ciertas características vitales (por ejemplo, la fortaleza física, la salud, etc.) van variando y pasan por momentos críticos (máximos o mínimos).

Estos dos tipos de experiencias vitales de las personas son las que nos dan razones para suponer que existe una "intuición optimizadora" (de tipo primario en la terminología de Fischbein) que tiene dos componentes: una intuición comprensiva y otra actuativa. Como justificaremos a continuación, podemos entender la intuición comprensiva como una proyección metafórica de determinadas experiencias de la vida cotidiana, dicha proyección nos permite tener una comprensión de lo que es un problema de optimización. Por otra parte, como resultado de la resolución de situaciones de optimización cotidianas adquirimos una práctica "optimizadora" que, en algunos individuos, puede llegar al extremo de ser una intuición actuativa. Incluso, se podría considerar que esta intuición actuativa es en sí misma el resultado de un proceso de optimización del esfuerzo. En efecto, al aplicar un proceso recursivo al primer tipo de experiencias, es decir al preguntarnos sobre cuál puede ser el proceso que optimice el esfuerzo que representa la racionalización optimizadora, la respuesta a la que llegamos es que la intuición que nos da la solución óptima es óptima en dos sentidos, por una parte nos da la solución óptima y por la otra economiza el esfuerzo necesario para hallar la solución.

Consideramos, pues, que hay razones para conjeturar que existe una intuición optimizadora comprensiva, de tipo primario, que nos ayuda a entender los problemas de optimización y que, en algunos individuos, puede haber una intuición optimizadora actuativa que lleve a la solución de los problemas sin el predominio de caminos formales.

3.5.1. La intuición optimizadora comprensiva como proyección metafórica

La importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida por una gran mayoría de los investigadores en didáctica de las matemáticas y es el origen de una nueva teoría sobre qué son las matemáticas, propuesta por Lakoff y Núñez (2000) en su libro "Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being" . La nueva disciplina, llamada por sus autores "ciencia cognitiva de la matemática" (Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000), tiene por objetivo estudiar, de manera empírica y multidisciplinar, las ideas matemáticas de las personas como una materia científica. Como bien resumen Acevedo y Font (2004), "el núcleo central de esta teoría está basado en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, y en los relativamente recientes hallazgos en lingüística cognitiva. Su tesis principal afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, hay que buscarlo en los procesos cognoscitivos cotidianos, como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico. Según estos autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos, tanto los personales como los institucionales, está sostenida por la manera de relacionarse nuestro cuerpo con los objetos de la vida cotidiana" (p. 1)

Al igual que la teoría de Piaget, esta teoría afirma que "las matemáticas son el resultado de la experiencia humana, pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las ideas matemáticas" (Font y Acevedo, 2003, p 407). La diferencia con la teoría de Piaget se da, sobre todo, en los mecanismos cognitivos considerados en ambas teorías. Si en Piaget (1992) la génesis de la intuición operatoria se entiende como un proceso de interiorización que convierte la acción en una operación, en la teoría del "embodiment" el mecanismo correspondiente sería la generación de esquemas de imágenes.

Según Johnson (1991) para llegar al pensamiento abstracto es necesario utilizar esquemas más básicos que derivan de la propia experiencia inmediata de nuestros cuerpos. Utilizamos estos esquemas básicos, denominados *esquemas de las imágenes* para dar sentido a nuestras experiencias en dominios abstractos mediante *proyecciones metafóricas*.

Los esquemas se forman por influencia de las diversas experiencias corporales que el individuo experimenta en repetidas ocasiones. Algunas de estas experiencias tienen ciertos rasgos comunes que al abstraerse dan lugar a los *esquemas de las imágenes*.

En la figura siguiente, adaptada de las que usa Johnson (pp. 143-171), vemos un ejemplo de cómo diferentes experiencias corporales como andar en bicicleta, caminar sin caerse, etc. conforman el esquema de *equilibrio.* Dicho esquema, por su parte, se puede proyectar metafóricamente para comprender algunos aspectos de otros dominios, como por ejemplo el equilibrio psicológico, el equilibrio de una obra de arte, etc.

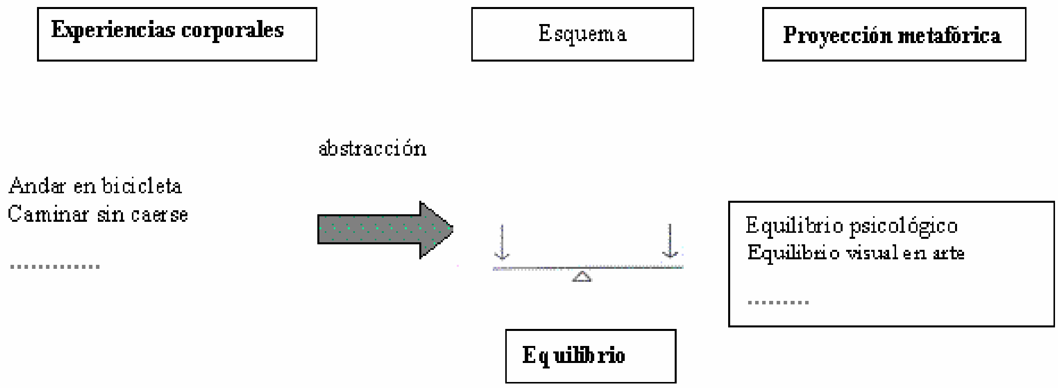


Figura. 3.4. Conformación y proyección metafórica del esquema *equilibrio*.

En este trabajo asumimos, de acuerdo con Lakoff y Núñez (2000) la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. Asumimos que las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se trasladen una serie de características y estructuras. Se aclara que las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad; la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar, y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales en relación con las matemáticas

- “*Conectadas a tierra*” (grounding): Son las que basan nuestra comprensión de las ideas matemáticas en nuestra experiencia cotidiana. Relacionan un dominio de partida fuera de las matemáticas con un dominio de llegada dentro de ellas. Por ejemplo: “Las categorías son contenedores”, “los puntos son objetos”, “una función es una máquina”, etc. Estas metáforas sirven para organizar un dominio de llegada matemático (por ejemplo las categorías) a partir de lo que sabemos sobre un dominio de partida que está fuera de ellas (lo que sabemos sobre los contenedores).
- *De enlace* (linking): Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas y nos permiten conceptualizar un dominio matemático en términos de otro dominio matemático. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, “las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas”, etc. Las metáforas de enlace ocurren cuando una rama de las matemáticas se usa para modelar otra.

Lakoff y Núñez (2000) en la primera parte de su libro analizan cuatro metáforas básicas cuyo dominio de llegada es la aritmética, las cuales son fundamentales en el desarrollo de su teoría: (1)

"Arithmetic is Object Collection", (2) "Arithmetic is Object Construction", (3) "The Measuring Stick Metaphor" y (4) "Arithmetic is motion along a path". En estas cuatro metáforas podemos encontrar una aproximación a la idea de relación de orden, la cual es básica para entender los conceptos de máximo y mínimo. A título de ejemplo, reproducimos (traduciendo) cómo entienden estos autores la metáfora "Arithmetic is Object Construction":

ARITMÉTICA ES CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS

Dominio Fuente OBJETOS CONSTRUIDOS		Dominio de llegada ARITMÉTICA
Objetos (constituidos por unidades)	→	Números
El objeto entero más pequeño	→	La unidad (uno)
El tamaño del objeto	→	El tamaño del número
Más Grande	→	Mayor
Más pequeño		Menor
Actos de construcción de objetos	→	Operaciones aritmética
El objeto construido resultante	→	El resultado de una operación aritmética
Un objeto íntegro	→	Un número entero
Poner objetos junto a otros objetos para formar objetos más grandes	→	Adición
Quitar pequeños objetos de objetos más grandes para formar otros objetos	→	Sustracción

CUADRO 3.2.
Fuente: Lakoff y Núñez, 2000, p.65-66.

Una de las cuestiones que nos hemos planteado es buscar proyecciones metafóricas adecuadas para la comprensión de los problemas de optimización, pues las cuatro metáforas propuestas por Lakoff y Núñez no nos parecen suficientes para explicar dicha comprensión.

Como dijimos en el apartado 2.3, en términos formales, un primer nivel de problema de optimización es la obtención de un elemento máximo o de un elemento mínimo en un conjunto C en el que se ha definido una relación de preorden completo. Entonces, el problema de optimización es:

> Dado el par ordenado $(C; \leq)$, donde C es un conjunto en el que se ha definido la relación de preorden completo representada por $\leq$, determinar $c_m \in C$ tal que $\forall\ c \in C,\ c_m \leq c$ (c_m el elemento mínimo);
>
> o:
>
> Dado el par ordenado $(C; \leq)$, donde C es un conjunto en el que se ha definido la relación de preorden completo representada por $\leq$, determinar $c_M \in C$ tal que $\forall\ c \in C,\ c \leq c_M$ (c_M el elemento máximo).

En los problemas de optimización en los que se tiene una función objetivo y un conjunto factible, esencialmente está presente esta idea, pues el mínimo o el máximo se determinarán en el conjunto de las imágenes de los elementos del conjunto factible, según la función objetivo. Normalmente, la función objetivo toma valores en un subconjunto de los números reales, en donde se tiene el orden canónico establecido.

En nuestra opinión, las dos clases de situaciones de la vida cotidiana que hemos comentado al iniciar el apartado 3.5, permiten hacer proyecciones metafóricas que contribuyen a la comprensión de los problemas de optimización. En primer lugar, considerando que en la vida de las personas, desde su edad más temprana están presentes las preferencias entre elementos de conjuntos de objetos, tales como juguetes, alimentos, prendas de vestir, lugares, amigos, cursos, etc. y que hay una selección natural del elemento más preferido o del menos preferido, a continuación explicitamos una proyección metafórica de tipo grounding de lo que llamamos el dominio de las preferencias:

Dominio de partida **Preferencias**	Dominio de llegada **Optimización**
Juguetes (u otro conjunto)	Conjunto A
Preferencias	Relación de preorden
El más preferido	Elemento máximo
El menos preferido	Elemento mínimo

CUADRO 3.3.
Proyección metafórica de las preferencias en la vida cotidiana

En relación con estas situaciones y experiencias de vida, están ciertas acciones frecuentes también en nuestras vidas, como son el juego competitivo, que está asociado con la búsqueda de un máximo; el premio, asociado también con la idea de máximo; y el castigo, asociado con la idea de mínimo. Castigar a un niño podría ser privarlo de ver televisión, que siendo su "actividad" más preferida, privarse de ella resulta lo menos preferido. Estar en prisión es perder uno de los derechos más preferidos, que es la libertad.

Por otra parte, al tener disponibilidad de dinero para comprar cantidades de bienes, aparecen otras situaciones de optimización en la vida de las personas, que son modelizadas por la teoría neoclásica del consumidor. Así, se considera que el consumidor tiene preferencias entre "canastas" de bienes; por ejemplo, ante los bienes pan y vino, puede preferir la "canasta" conformada por 2 copas de vino y 1 pan a la "canasta" conformada por 1 copa de vino y 3 panes. La relación de preferencia es una relación de preorden completo, (Debreu, G., 1973, pp. 70-71), y conlleva un nivel de satisfacción que en la teoría económica se establece como la función de utilidad del consumidor, que viene a ser la función objetivo. Así, la experiencia cotidiana del consumidor es comprar "canastas" de bienes buscando la maximización de su satisfacción y dentro de las limitaciones de su presupuesto. A continuación explicitamos una proyección metafórica de lo que llamamos el dominio del consumidor

Dominio de partida **Consumidor**	Dominio de llegada **Optimización**
"Canastas" de bienes adquiribles según su presupuesto.	Conjunto factible
Preferencias	Relación de preorden
Niveles de satisfacción (función de utilidad)	Función objetivo
"Canasta" adquirible que brinde mayor satisfacción.	Elemento maximizante de la función objetivo.

CUADRO 3.4.
Proyección metafórica de las preferencias del consumidor

Por otra parte, las propias experiencias corporales facilitan que surja el siguiente esquema de imagen "optimizador", el cual a su vez se puede proyectar a dominios más abstractos:

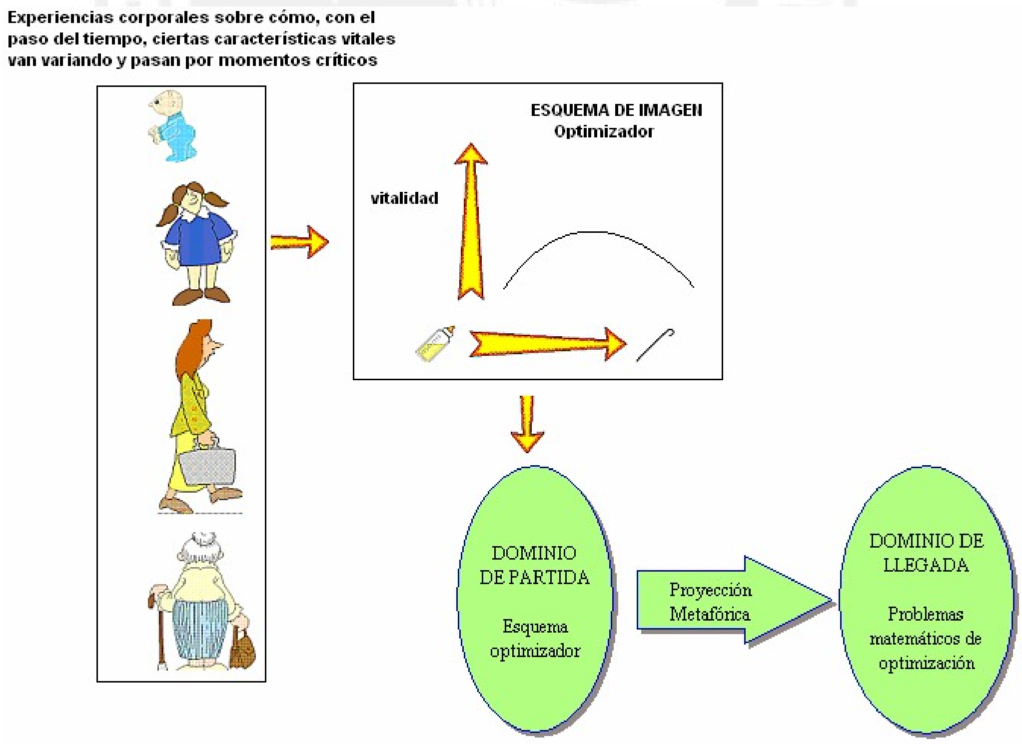


Figura 3.5. Proyección metafórica del esquema "optimizador"

Dominio de partida **Esquema optimizador**	Dominio de llegada **Problemas de optimización**
Paso del tiempo	Una variable independiente
Característica corporal (por ejemplo, vitalidad)	Variable dependiente
Máxima vitalidad	Valor máximo de la variable dependiente
Mínima vitalidad	Valor mínimo de la variable dependiente
Condiciones de alimentación, vivienda, sanidad, seguridad, etc.	Restricciones que determinan el conjunto factible
Dependencia de la vitalidad respecto del tiempo y de las condiciones	Función objetivo

CUADRO 3.5.
Proyección metafórica del esquema "optimizador"

En nuestra opinión, la proyección metafórica de estos dominios de la experiencia (preferencias, consumidor, etc.) y del esquema optimizador produciría una intuición primaria comprensiva de los problemas de optimización. Esta intuición, tomando como referencia la clasificación de Fischbein (1994) que distingue entre intuiciones primarias y secundarias, sería, en nuestra opinión, de tipo primario. En la respuesta a la cuarta pregunta de investigación argumentaremos que, sobre la base de esta intuición optimizadora primaria, es posible desarrollar una intuición optimizadora de tipo secundario que permita desarrollar sobre todo las funciones de conjeturar, anticipar y concluir (según la terminología de Fischbein). Es pertinente recordar que según Fischbein (1994, p. 202) las intuiciones primarias operacionales permanecen como adquisición estable por toda la vida, y que – como consecuencia del desarrollo de las capacidades formales – pueden ganar en precisión y claridad; y también, que "la categoría de intuiciones secundarias implica asumir que se puede desarrollar nuevas intuiciones *con raíces no naturales*" (*ibid*, p. 68). Fischbein asume que “bajo una influencia instruccional sistemática se puede crear nuevas intuiciones, nuevas creencias cognitivas” (*ibid*, p. 202).

3.6. UNA PROPUESTA DE “ENCAJE” DE LOS PROCESOS INTUITIVOS EN EL EOS

En el EOS, una de las maneras de estudiar la relación entre un determinado proceso, en este caso los procesos intuitivos, consiste en situar el proceso que nos interesa en el centro de la figura 2.3 del capítulo 2 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización/personalización; generalización/particularización; descomposición / reificación; materialización/idealización; representación/significación). Esta es una técnica que ya se ha seguido para estudiar los procesos metafóricos en el marco del EOS (Acevedo, 2008) o el proceso de resolución de problemas (Gusmao, 2006).

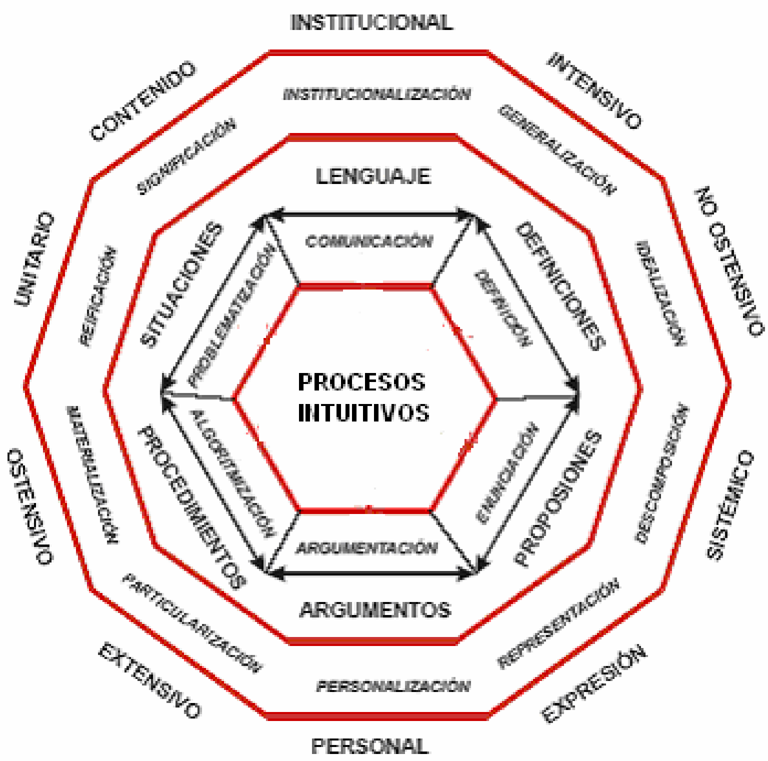
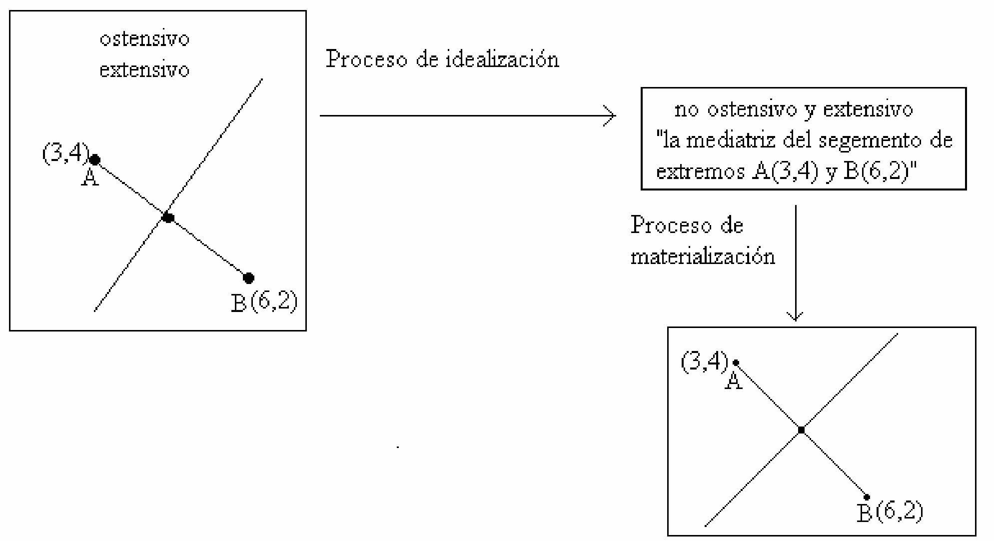


Figura 3.6. Los procesos intuitivos en el EOS

Con relación a la dualidad personal / institucional (personalización / institucionalización) la intuición suele ser considerada en la literatura como algo básicamente personal, es decir se considera como un proceso cognitivo que permite captar las ideas matemáticas, tener la evidencia y la certeza sobre alguna proposición, etc. Considerando que a nivel básico el mecanismo es común a la mayoría de los miembros de la especie humana, los resultados de los procesos intuitivos son objetos matemáticos institucionalizados. Por otra parte, en el proceso educativo se presentan objetos institucionales que serían personalizados por procesos intuitivos.

Con relación a la dualidad ostensivo / no ostensivo (materialización / idealización) la intuición tiene que ver fundamentalmente con la idealización, es decir la intuición permite relacionar un ostensivo con el no ostensivo asociado. En efecto, las diferentes clases de intuición filosófica que hemos considerado (platónica, intuicionista y empirista) son procesos que nos permiten captar las ideas matemáticas. Platón fue uno de los primeros que puso de manifiesto la importancia del proceso de idealización al considerar a los objetos de la experiencia como copias imperfectas de las "ideas" matemáticas y al proponer a la intuición como el mecanismo generador del proceso de idealización. Desde entonces, la necesidad de tener en cuenta el proceso de idealización en la actividad matemática ha sido señalada por muchas personalidades ilustres. En la perspectiva empirista, también es importante el proceso de idealización (entendido como caso límite de lo concreto). Por ejemplo, Kitcher (1984), según Font (2003), "sostiene que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera." "(Para Kitcher) las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual se le atribuyen poderes de actuación superiores a los que tienen las personas normales -por ejemplo, recorrer todos los términos de una progresión geométrica." "Las acciones nuevas que consideramos que son realizables no son acciones cualesquiera sino aquellas que amplían acciones que se consideran realizables por las personas." (p. 274)

Los procesos de materialización-idealización, en el EOS (Font, 2007; Font y Contreras, 2008; Font, Rubio y Contreras, en prensa) están asociados a la faceta ostensivo – no ostensivo. Por ser muy ilustrativo, transcribimos buena parte del ejemplo que dan y de los comentarios que hacen estos autores (Font y Contreras, 2008): supongamos que el profesor ha dibujado en la pizarra la figura de la izquierda (figura 3.7) y que habla sobre ella como si mostrara la mediatriz del segmento que tiene por extremos los puntos A(3,4) y B(6,2) esperando, además, que los alumnos interpreten de esta manera dicha figura:



Figuras 3.7a y **3.7b.** Procesos de idealización y de materialización (Fuente: Font y Contreras, 2008)

Si se observa bien la figura 3.7a de la izquierda se tiene que: (1) en rigor, los trazos no son segmentos de líneas rectas; (2) no se tiene una recta mediatriz, ya que a lo más podría ser un segmento de la mediatriz; (3) además tal segmento tampoco es, en rigor, un segmento de línea recta; y (4) no pasa exactamente por el punto medio. También, (5) los puntos A y B y el punto medio son muy gruesos; (6) el ángulo que forma la supuesta mediatriz con el segmento no es exactamente de 90º, etc.

Según los autores, es evidente que el profesor espera que sus alumnos hagan el mismo proceso de idealización sobre la figura de la pizarra que él ha realizado y su discurso sobre ella omite las imprecisiones comentadas en el párrafo anterior. Es decir, la figura de la pizarra se constituye en una figura ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que el profesor realiza sobre ella. La figura de la pizarra es una figura concreta y ostensiva (en el sentido que está dibujada con el material "tiza" y es observable por cualquier persona que esté en el aula) y como resultado del proceso de idealización se tiene un objeto (la mediatriz del segmento AB) no ostensivo (en el sentido de que se supone que es un objeto matemático que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos asociados) Por otra parte, este objeto no ostensivo es particular, a saber, es la mediatriz del segmento de extremos A(3,4) y B(6,2) y no es, por ejemplo, la mediatriz del segmento de extremos (4,4) y (8,7). A este tipo de objeto “individualizado” en el enfoque ontosemiótico se le llama un extensivo. Por tanto, como resultado del proceso de idealización se pasa de un ostensivo que era extensivo a un no ostensivo que sigue siendo un extensivo.

También sostienen que la otra cara de la moneda es que para poder manipular los objetos no ostensivos necesitamos representaciones ostensivas, las cuales son el resultado de un proceso de materialización (y también de representación). Siguiendo con el ejemplo de la mediatriz dibujada en la pizarra, el profesor podría darse cuenta que la figura no está muy bien hecha para después borrarla y sustituirla por una figura “menos imperfecta” (la figura 3.7b de la derecha).

Finalmente, Font y Contreras afirman que el proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido ya que se considera que el ostensivo es la representación del no ostensivo. La segunda es que la relación de representación se da entre objetos claramente diferentes (ostensivos por una parte y no ostensivos por la otra). Ahora bien, a pesar de que por una parte se acepta que los objetos no ostensivos sólo son accesibles por medio de sus ostensivos asociados, se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo), entre otros motivos porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la “existencia” del objeto matemático como algo independiente de su representación. (Cf.: Font y Contreras, 2008.)

Así, desde la perspectiva extensivo / intensivo (particularización / generalización) se puede considerar la intuición como el proceso que permite ver lo general en lo particular, lo cual es coherente con la perspectiva de Fischbein (1994), cuando afirma que se percibe que dos segmentos de recta que se intersecan determinan dos pares de ángulos opuestos de igual medida, pero se intuye que al intersecarse dos rectas cualesquiera quedan determinados dos pares de ángulos de igual medida. Se está aceptando intuitivamente la propiedad general.

> "An intuition is a theory, it implies an extrapolation beyond the directly accessible information. If one contemplates two intersecting lines one *sees* that the pair of opposite angles are equal. This is not a theory, it does not require any intuition. But the statement "Two intersecting lines determine pairs of opposite equal angles" expresses an intuitive generalization. It is the universality of the property which is accepted intuitively" (Fischbein, 1994, pp. 13 -14)

Con relación al proceso de argumentación, puesto que muchas veces la intuición humana se considera como la sensación intelectual de conocimiento claro y rápido, de comprensión inmediata y directa, sin realizar un proceso de razonamiento lógico consciente y explícito, podemos considerar que en la intuición no hay argumentación explícita, aunque seguramente hay inferencia implícita. Por ejemplo, Crespo (2007) considera que uno de los componentes de la intuición es la razón. Sostiene que "la intuición combina la intuición sensible y la razón, y participa de ambas."

Por otra parte, hay autores que consideran que ciertas inferencias, pruebas o argumentaciones son intuitivas, tal es el caso de Fischbein, que entre las intuiciones de afirmación, considera las inferenciales y da ejemplos para ilustrar que en ellas hay inferencias lógicas intuitivas.

> "They are logical inferences but, nevertheless, the relation between the premises and the conclusion is accepted as self-evident, as intrinsically necessary." (Fischbein, 1994, p.59)

Como conclusión final, podemos afirmar que, en nuestra opinión, la manera de encajar la intuición en el EOS consiste en utilizar una metáfora vectorial en la que el proceso intuitivo sería un vector con tres componentes[3] (alguna de ellas podría ser “cero” en algunos casos), las cuales serían tres de los 16 procesos primarios del EOS: idealización, generalización y argumentación:

Intuición = (idealización, generalización, argumentación)

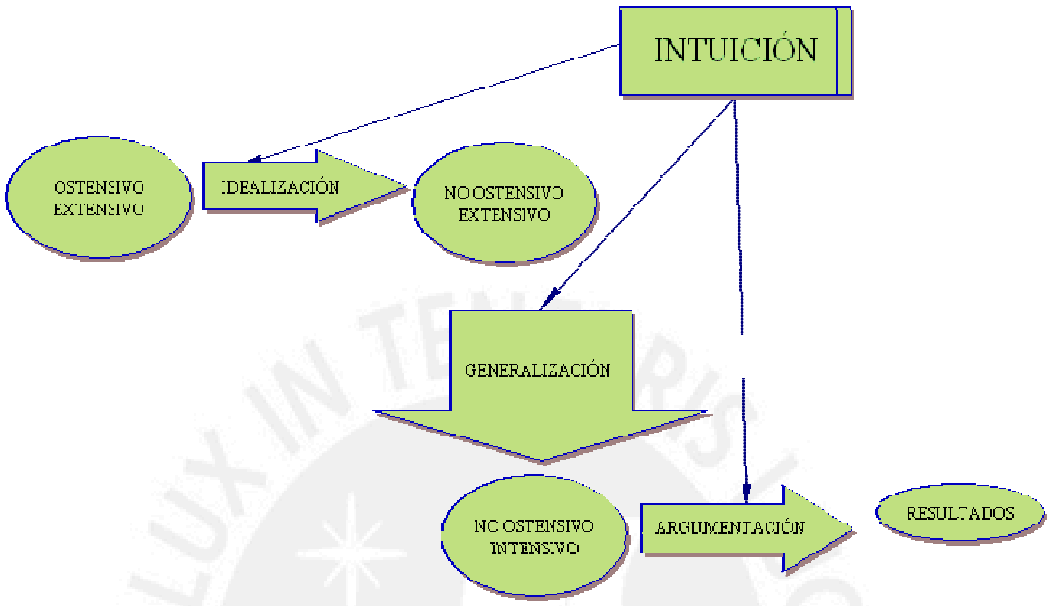


Figura 3.8. Componentes de la intuición

Con este esquema, (figura 3.8), entre otras cosas, se visualiza que la intuición actúa sobre ideas matemáticas universales (que están presentes por medio de sus ostensivos asociados), para llegar a resultados que se consideran verdaderos sin (o casi sin) una argumentación explícita.

Por otra parte, los resultados de este proceso intuitivo de tres componentes puede ser (según el peso dado a las diferentes componentes) un concepto, una propiedad, un procedimiento, un argumento, es decir pueden ser objetos de una configuración cognitiva (ver capítulo 2). Lo cual es coherente con la clasificación de la intuición, según sus funciones, dada por Fischbein (1994).

Para finalizar este apartado queremos hacer notar que, en nuestra opinión, las diferentes maneras de entender la intuición, que se han

[3] Incluso se podría considerar que se trata de un vector de 4 componentes, si se interpreta que la convicción de la verdad de la afirmación o del resultado es un aspecto metacognitivo que se tiene que sacar fuera de la componente “argumentación”.

analizado en los apartados anteriores, difieren en el énfasis que dan a cada una de las tres componentes del "vector intuición".

3.7. PROBLEMA, RIGOR, FORMALIZACIÓN E INTUICIÓN. UNA PERSPECTIVA INTEGRADA

Estamos asumiendo un sentido amplio de lo que significa *problema*, considerando como tal a toda situación que requiera analizar la información que se tiene, establecer relaciones lógicas y obtener conclusiones; y específicamente consideraremos *problema de optimización* a aquel cuyo objetivo fundamental es la obtención de un valor máximo o mínimo de una determinada variable, teniendo en cuenta las restricciones del caso; o la obtención de una estrategia o conjunto de pasos que constituyen la mejor elección para obtener determinado fin. Esta manera de considerar los problemas de optimización incluye los casos sencillos con variaciones continuas (los valores que pueden tomar las variables son todos los elementos de un intervalo de números reales) y con variaciones discretas (los valores que pueden tomar las variables son todos los de un subconjunto de los números enteros). Otra forma de enunciar problemas de optimización es pedir la demostración de que determinado valor (o estrategia) es el óptimo (o la óptima) para una determinada situación.

Ciertamente, los problemas de máximos y mínimos que usualmente se plantean en el cálculo diferencial, son problemas de optimización en los que se definen funciones de variables continuas, aunque no todos requieren de manera indispensable el uso del cálculo diferencial. También resultan incluidos problemas como el que se presenta en el conocido juego de las Torres de Hanoi, al determinar el menor número de movimientos con los que se pueden trasladar, por ejemplo, los cuatro discos de una varilla a otra.

Consideramos que al resolver un problema de optimización hay una *formalización* si el participante usa ecuaciones, define funciones y aplica teoremas o resultados matemáticos; o si usa gráficos, diagramas o cuadros, o establece una notación para un manejo sistemático de la información o de las operaciones que considera necesario hacer. Es pertinente recordar lo que Dubinsky (2000) dice acerca del formalismo en matemáticas:

> *By formalism, I am referring to sets of symbols, put together according to certain rules of syntax or organization, intended to represent mathematical objects and operations*. (p. 224)

En cuanto al *rigor*, usualmente se ha vinculado su estudio a la prueba o demostración, y en ese sentido, al examinar el rigor en la solución de un problema, consideramos a ésta como la "prueba" o demostración de los resultados (parciales y el final) que se obtienen en tal solución. Una solución rigurosa de un problema de optimización deberá mostrar un buen uso de argumentos, con secuencias lógicas en sus afirmaciones y, en particular, con una justificación que el resultado obtenido es óptimo.

Como sostienen Font y Godino (2006), "la respuesta dominante en las instituciones universitarias ante la crisis de fundamentos de finales del siglo XIX consistió en fundamentar toda la matemática sobre los números naturales y éstos sobre la teoría de conjuntos axiomatizada por Zermelo — con axiomas *ad hoc* que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, pero conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Esta solución, llamada normalmente "formalismo contemporáneo" o "conjuntismo" es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no es exactamente lo mismo" (p. 77). En esta perspectiva, Mosterín (1980, p.16) sostiene que "en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas más conocidas se aprecian tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba". Tales estadios son:

- Primer estadio: intuitivo o ingenuo.
- Segundo estadio: axiomático
- Tercer estadio: formalizado

En el primer estadio se hacen "demostraciones" ("pruebas") de los enunciados de la teoría, pero no se precisa ni de donde parten éstas, ni cuales son los procedimientos admisibles para hacerlas. "La prueba consiste aquí en aducir razones que ayuden a ver que las cosas son así como él (el matemático) las ha visto" (*ibid*)

En el segundo, se eligen algunos conceptos como primitivos y a partir de ellos se definen todos los demás, y ciertos enunciados de la teoría se eligen como axiomas. Estos son el punto de partida de las demostraciones. Los demás enunciados de la teoría – los teoremas – deben demostrarse a partir de tales axiomas, pero sigue sin precisarse los procedimientos o reglas o medios para hacer las demostraciones.

En el tercero, el concepto de demostración está completamente precisado: se explicitan no solo los conceptos primitivos y los axiomas como punto de partida de las demostraciones sino también los medios o reglas admisibles para éstas, de modo que consistan en una aplicación sucesiva de tales reglas.

En esta investigación nos hemos situado en el primer estadio (informal o ingenuo). Por tanto, consideramos que un alumno muestra rigor cuando hace algún tipo de prueba que se puede considerar como un intento de dar una justificación correspondiente al primero de los tres niveles que se han comentado en el desarrollo de las teorías matemáticas. Si la investigación se hubiera realizado con universitarios que estudian matemáticas puras, el rigor exigido podría ser el segundo nivel. Una vez situados en el primer nivel de rigor, se puede hacer una gradación según el tipo de prueba que haya realizado el alumno (por ejemplo: ausencia de prueba, razonamiento mediante un ejemplo, razonamiento mediante un ejemplo cuidadosamente seleccionado, razonamiento mediante un ejemplo genérico, razonamiento lógico a partir de proposiciones conocidas, inducción completa, etc.).

Puesto que nuestro objetivo es estudiar la intuición en un contexto de resolución de problemas, en la segunda pregunta de investigación focalizaremos nuestra atención, sobre todo, en el valor de la componente "argumentación" en el vector "intuición". Dado que nos interesan problemas no triviales, no focalizaremos la atención en las intuiciones básicas, dicho en la terminología de Fischbein. Tenemos que pensar, pues, la intuición como aquella en que la inmediatez (evidencia intrínseca) y la certeza (sin necesidad de demostración) sólo se da en algunas personas (que son consideradas como personas "intuitivas") mientras que las otras personas, aunque tengan la convicción de que lo que están conjeturando seguramente es cierto, son conscientes de que es necesario asegurarse de ello dando una argumentación. Dicho en la terminología de Fischbein (1994), en la segunda pregunta de investigación hemos focalizado la atención en las intuiciones individuales.

Para ello, es necesario disponer de herramientas que nos permitan tratar de manera integrada las nociones de "problema", "intuición", "formalización" y "rigor" que acabamos de comentar. Los constructos "Configuración Epistémica" y "Configuración Cognitiva" propuestos desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Font y Godino, 2006; Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R., 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Ramos y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006) han sido las herramientas que han hecho operativo el estudio de este nivel de intuición, que obviamente no es intuición primaria ni intuición básica (en la terminología de Fischbein).

Tal como se ha dicho en el capítulo 2, en el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos:

1. Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
2. Situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios, ...)
3. Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
4. Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
5. Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
6. Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones *epistémicas* (Figura 3.9) si adoptamos un punto de vista institucional o *cognitivas* si adoptamos un punto de vista personal. El análisis de dichas configuraciones nos informa de la "anatomía de la actividad matemática".

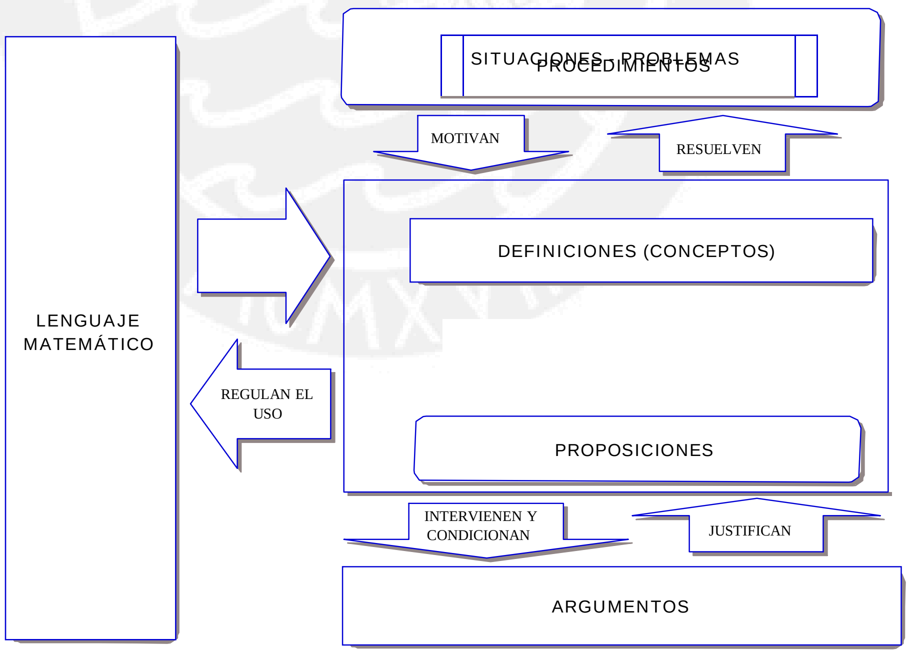


Figura 3.9. Componentes y relaciones en una configuración epistémica (Fuente: Font y Godino, 2007)

Lo característico de una solución intuitiva secundaria a un problema que no sea trivial es que prácticamente no hay configuración cognitiva, ya que el lenguaje queda reducido casi al necesario para dar la respuesta correcta y las propiedades, definiciones y procedimientos quedan implícitos, aunque lo más característico es que el bloque de la argumentación no queda explícita o se limita a apelar a la evidencia.

Así, las configuraciones epistémicas y cognitivas nos permiten tener una visión integrada de las nociones de intuición, rigor, problema y formalización, con lo cual respondemos afirmativamente la tercera parte de nuestra primera pregunta de investigación. La primera parte también ha sido respondida afirmativamente, en la sección 3.5; y en la sección 3.6. hemos mostrado una manera de “encajar” los procesos intuitivos en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, con lo cual ha quedado respondida la segunda parte de la pregunta de investigación.

Capítulo 4

INTUICIÓN Y RIGOR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

RESPUESTA A LA SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

Analizamos cualitativa y cuantitativamente las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Usamos un protocolo ad hoc y las herramientas teóricas "configuración epistémica" y "configuración cognitiva", propuestas por el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática. Los resultados revelan la presencia de intuición optimizadora en las soluciones individuales y grupales e indican que hay deficiencias en el uso de lenguaje formalizado, procedimientos, proposiciones y argumentos; muestran también una inadecuada interacción entre intuición, formalización y rigor.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO DE CASO

En el capítulo anterior, como resultado de la reflexión teórica, hemos proporcionado argumentos para conjeturar la existencia de una intuición optimizadora; en este capítulo hacemos un estudio empírico para examinar si estos argumentos son refutados (o no) cuando sometemos a estudiantes universitarios a una situación experimental de resolución de problemas de optimización.

Así, en este capítulo respondemos a la segunda pregunta de investigación: *¿Cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la universidad?*

Las investigaciones tienen su punto de partida en el interés que despierta al investigador una determinada situación. El primer paso de la investigación permite descubrir qué es lo que constituye el problema – la localización de la dificultad. El progreso hacia el reconocimiento del problema no siempre es tarea fácil, en nuestro caso, esta fase de la investigación se ha realizado en el capítulo anterior y nos ha llevado primero a formular claramente la pregunta de si hay o no hay una intuición optimizadora y, luego, a encontrar razones para suponer que efectivamente puede existir en algunas personas. Como resultado de la amplia reflexión sobre la intuición realizada en el capítulo anterior, y de su encaje en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, la primera pregunta de investigación se ha refinado y expresado de una forma que permite pasar a una segunda fase de la investigación, diseñando una situación experimental para determinar si la hipótesis de que existe tal intuición optimizadora debería mantenerse o rechazarse y, más ampliamente, para examinar cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la universidad.

Hemos diseñado la situación experimental –explicada en detalle en la sección 4.2– entendiendo como tal una situación en la cual se pide a algunos estudiantes que resuelvan problemas de optimización seleccionados bajo criterios controlados, de manera que se tengan elementos para hacer predicciones e interpretaciones y para examinar la existencia de la intuición optimizadota.

De acuerdo con el posicionamiento que tomamos en el último apartado del capítulo anterior usamos las configuraciones epistémicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007). Estas configuraciones nos permitieron examinar cualitativamente las soluciones de los estudiantes a los problemas de optimización propuestos, y registramos la información usando un protocolo ad hoc.

Además de poner a prueba la hipótesis de que existe una intuición optimizadora, nos proponemos analizar:

- La presencia o ausencia de conceptos, proposiciones y procedimientos y las vinculaciones de estos con la obtención de respuestas correctas, al resolver los problemas de optimización planteados.
- Las argumentaciones y las vinculaciones de éstas con el uso de lenguaje formalizado y con la obtención de respuestas correctas a los problemas planteados.
- Si los alumnos consideran la justificación del carácter de óptimo de la respuesta que obtienen en cada problema.
- En qué medida el uso del lenguaje formal contribuye a una argumentación adecuada.
- En qué medida quienes obtuvieron una respuesta correcta usaron un lenguaje formal y justificaron que tal respuesta tiene el carácter de óptimo.

Nuestra primera predicción fue la siguiente: en el caso de existir la intuición optimizadora, un número considerable de dichos alumnos, ante problemas no triviales, darían soluciones intuitivas, entendiendo por ello una producción escrita tal, que analizada, sobre todo, mediante la herramienta configuración cognitiva, permitiera inferir configuraciones cognitivas en las que el lenguaje queda reducido casi al necesario para dar la respuesta correcta; y las propiedades, definiciones y procedimientos quedan implícitos, aunque lo más característico sería que el bloque de la argumentación queda implícito o se limita a apelar a la evidencia.

La existencia de una intuición optimizadora no es la única causa que puede explicar la existencia de respuestas correctas sin justificación explícita (por ejemplo, el factor suerte, o un contrato didáctico que permita respuestas sin justificación). Por ello, tuvimos especial cuidado en que la selección de los alumnos participantes en el experimento permitiera descartar la causa que, en nuestra opinión, podría ser la explicación alternativa más plausible de este tipo de respuesta. Nos referimos al tipo de contrato didáctico al que estaban acostumbrados dichos alumnos; por ello, los alumnos participantes en el experimento se seleccionaron de manera que su contrato didáctico contemplara la regla de que las soluciones de los problemas se deben justificar.

Para descartar completamente que la existencia de respuestas correctas sin justificación pudiera ser debido al contrato didáctico al que estaban acostumbrados los alumnos, hicimos nuestra segunda predicción: en caso que el problema se resuelva por un grupo de alumnos habituados a un contrato didáctico en el que los resultados se tienen que justificar, su producción escrita, analizada, sobre todo, mediante la herramienta configuración cognitiva, permitiría inferir configuraciones cognitivas de grupo en las que habría una argumentación explícita de la respuesta. Dicho de otra manera, en la resolución de problemas en grupo serían escasas las soluciones que se pudieran caracterizar globalmente como intuitivas (lo cual sí era esperable en las respuestas individuales) puesto que el grupo habría aplicado la norma metaepistémica del contrato según la cual las soluciones se han de justificar.

Nuestra tercera predicción es que, aun en aquellos casos en que las configuraciones cognitivas de los alumnos presentan argumentaciones explícitas, alguno de los pasos de la argumentación puede ser un indicio también de la existencia de intuición optimizadora. Incluso este tipo de intuición podría aparecer en alguna respuesta en grupo.

A continuación presentamos un cuadro con un apretado resumen de las tres predicciones:

Primera predicción	Habrá soluciones individuales en las que hallan lo pedido pero no justifican sus resultados (intuitivas)
Segunda predicción	En las soluciones grupales serán escasas las soluciones en las que hallan lo pedido pero no justifican sus resultados (intuitivas)
Tercera predicción	En las soluciones individuales, aun habiendo argumentaciones explícitas, se encontrarán afirmaciones sin justificación, en una línea correcta hacia la solución.

CUADRO 4.1.
Resumen de predicciones para la situación experimental

4.2. PROBLEMAS PROPUESTOS, SOLUCIONES Y CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Para el estudio empírico propusimos a los alumnos los problemas que presentamos en el cuadro 4.2. En el primero hay que considerar variaciones continuas y podría resolverse recurriendo al cálculo diferencial -aunque no necesariamente- y en el segundo las variaciones a considerar son discretas.

Problema 1	Problema con variaciones continuas
Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.	
Problema 2	Problema con variaciones discretas
Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.	

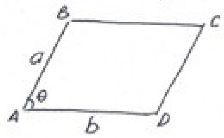
CUADRO 4.2.
Problemas de optimización considerados en el estudio

Como cada problema puede tener más de una configuración epistémica de referencia, dependiendo entre otros aspectos del nivel y del contexto en el que se aplique, en esta investigación, tuvimos en cuenta las soluciones de un reconocido destacado alumno universitario de tercer ciclo, ganador de medallas en olimpiadas matemáticas de ámbito internacional. En lugar de partir de las soluciones de un profesor, preferimos examinar entre varios expertos los modos de enfocar los problemas, de un estudiante con habilidades matemáticas reconocidas, con edad y nivel académico similares a los que tienen los alumnos considerados en el estudio. Sus primeras soluciones a los problemas fueron correctas, pero consideradas muy originales o singulares al examinarlas con los otros expertos. Estuvimos de acuerdo en que muy pocos o ninguno de los estudiantes examinados los resolvería de esa manera y se le pidió que desarrolle otras soluciones, que fueron aceptadas como válidas por los otros expertos y adoptadas como referentes para hacer las correspondientes configuraciones epistémicas.

4.2.1. Solución “experta” del problema 1 (con variaciones continuas).

Sea ▱ABCD el paralelogramo de perímetro 28 tal que:

$AB = a$
$AD = b$
$m\angle BAD = \theta$



El perímetro de ABCD es:

$$AB + BC + CD + DA = a + b + a + b = 28$$
$$a + b = 14$$

El área del ▱ABCD es:

$$S_{\square ABCD} = a.b.\operatorname{Sen}\theta$$

Como $-1 \leq \operatorname{Sen}\theta \leq 1 \rightarrow -ab \leq ab\operatorname{Sen}\theta \leq ab \quad \ldots (1)$

* Además $ab = a(14-a) = 14a - a^2 = 49 - (a^2 - 14a + 49)$

$$ab = 7^2 - (a-7)^2$$

Como $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$ab = 7^2 - (a-7)^2 \leq 7^2 \rightarrow ab \leq 49 \quad \ldots (2)$$

(Otro modo podría ser: Sea $a = 7 + x$, $b = 7 - x$ $\rightarrow ab = (7+x)(7-x) = 49 - x^2 \leq 49$)

Luego

$$ab\operatorname{Sen}\theta \leq ab \leq 49. \quad (\text{de } (1) \text{ y } (2))$$

Donde la igualdad se cumple sólo si:

$\operatorname{Sen}\theta = 1$, $\theta = 90°$ y $(a-7)^2 = 0 \rightarrow a = 7, b = 7$

Luego, el paralelogramo ABCD de mayor área es un cuadrado de lado 7.

Ubicandolo en el plano cartesiano:

$A = (0;0)$
$B = (0;7)$ cumplen las cond
$C = (7;7)$
$D = (7;0)$

4.2.2. Configuración epistémica del problema 1.

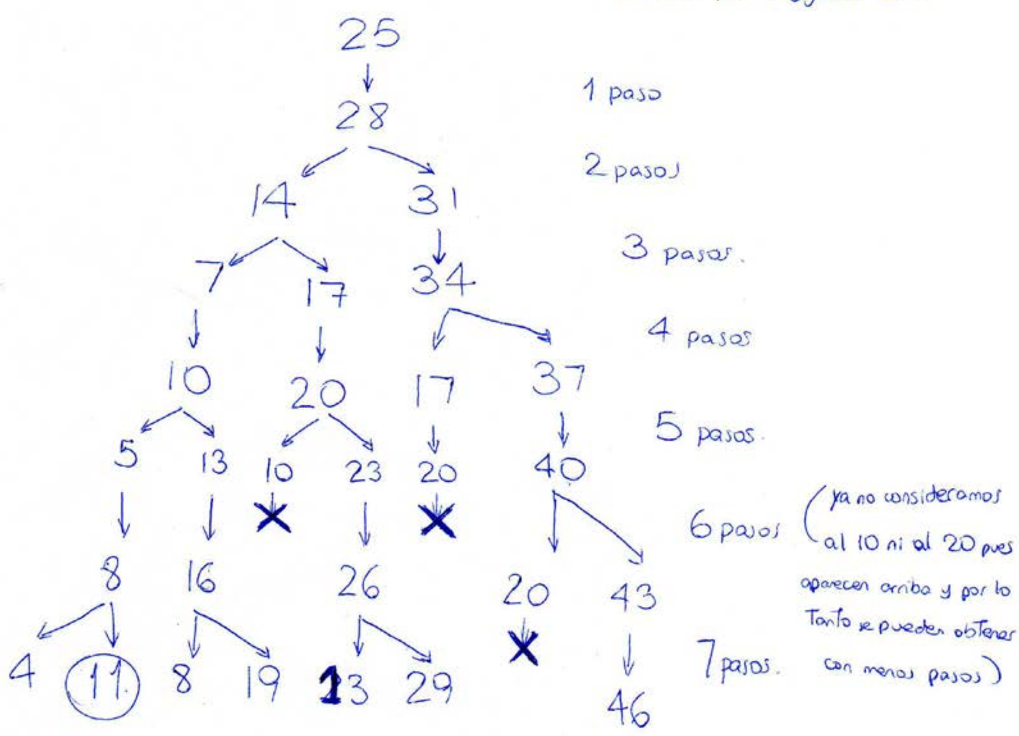
Objetos matemáticos	***Especificaciones***
Lenguaje	• Términos y expresiones: Área, longitud, expresiones algebraicas, desigualdades e igualdades. • Representaciones: Dibuja un paralelogramo con lados no perpendiculares, asignando variables a las longitudes de sus lados y a un ángulo interior.
Situación - Problema	Problema intramatemático, de contexto geométrico, isoperimétrico, con variaciones continuas.
Conceptos	Paralelogramo, perímetro, área, vértices, números enteros, seno de un ángulo, cuadrado de una diferencia, coordenadas cartesianas.
Proposiciones	• El área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de dos lados y del seno del ángulo que forman estos. • En una diferencia de cuadrados, si el minuendo es constante y el sustraendo es variable, el minuendo es el valor máximo que puede tener tal diferencia. • El máximo valor de la función seno, si el ángulo está entre 0º y 180º, es cuando el ángulo mide 90º.
Procedimientos	• Observar que, manteniendo el perímetro, se obtienen distintas áreas del paralelogramo: variando las longitudes de los lados, variando los ángulos entre los lados, o variando longitudes y ángulos. • Usando las proposiciones obtener dos desigualdades para concluir que el área de un paralelogramo de perímetro 28 no puede ser mayor que 49. • Concluir que el paralelogramo es un cuadrado de lado 7. • Escoger las coordenadas de los vértices
Argumentos	• Razonamiento deductivo • Si todo elemento de un conjunto de números es menor o igual que un cierto número y existe un elemento particular que satisface la igualdad, entonces tal elemento es el máximo del conjunto.

Cuadro 4.3.
Configuración epistémica del problema de optimización con variación continua

Cabe precisar que las variables en este problema son: un ángulo entre los lados del paralelogramo y las longitudes de estos lados, con sus restricciones correspondientes.

4.2.3. Solución "experta" del problema 2 (con variaciones discretas)

Retrocedamos, paso a paso, por los posibles números previos a 25. Estos "pasos inversos" modificarán a un número, bien sumándole 3, o dividiéndolo entre 2. La única condición es que, si el número es impar, el "paso inverso" es sumarle 3. De ahí, el diagrama sería:



Vemos que luego de 7 "pasos inversos" aparece por primera vez el 11. Luego, como hemos tomado todos los casos posibles desde donde se pudo haber obtenido el 25, el número mínimo de pasos para llegar a 25 desde 11 es 7:

$$((((((11-3)-3)\times 2)-3)\times 2)\times 2)-3=25$$

(7 pasos)

4.2.4. Configuración epistémica del problema 2.

Objetos matemáticos	*Especificaciones*
Lenguaje	Paso; multiplicar; disminuir; dividir; sumar Representaciones: Diagrama de árbol
Situación -Problema	Problema intramatemático, de contexto aritmético, con variaciones discretas.
Conceptos	Multiplicación; sustracción; número par; número impar; orden en los números naturales. Implícitos: Funciones inversas correspondientes a “multiplicar por 2” y a “disminuir 3 unidades”
Proposiciones	• Con sólo multiplicaciones por 2 o con sólo sustracciones de 3 unidades, no se puede llegar a 25, partiendo de 11. • Para llegar a un número impar, el último paso no puede ser una multiplicación por 2. • Para llegar a 25, en el penúltimo paso se debe llegar a 28 y en consecuencia el último paso es disminuir 3.
Procedimientos	• Tanteo (Aplicar algunos pasos) • Analizar todas las posibilidades empezando por el final, • Usar un diagrama de árbol, dando “pasos inversos” a los definidos: “dividir entre 2” y “añadir 3”, y eliminando ramas que se repiten. Observar que de los números impares saldrá solo una rama. • Descartar algunas ramas del árbol observando las repeticiones. • Contar el número de pasos seguidos al obtener “por primera vez” el número deseado. Las otras posibilidades, con mayor número de pasos quedan eliminadas, al ir eliminando ramas que se repiten.
Argumentos	• Razonamiento inductivo – deductivo • Examinando todos los posibles “caminos” de 28 a 11, se puede escoger el “camino” más corto de 11 a 25, usando los pasos definidos.

CUADRO 4.4.
Configuración epistémica del problema de optimización con variación discreta.

Cabe precisar que en este problema la variable es el número de pasos para llegar a 25, partiendo de 11.

También es bueno aclarar que en el EOS las proposiciones consideradas no necesariamente tienen que ser conocimientos previos; se consideran también proposiciones que resultan en el proceso de resolución del problema y podrían estar explícitas o implícitas en las soluciones desarrolladas.

4.3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Tal como se ha dicho en el capítulo 1, la metodología que utilizamos tuvo en cuenta cuatro ejes o dimensiones, que en el enfoque ontosemiótico se designan como el *foco*, el *fin*, la *generalizabilidad y* el *nivel* de la investigación. En este estudio, el *foco* fue *epistémico* (configuraciones epistémicas institucionales) y, sobre todo, *cognitivo* (configuraciones cognitivas de los alumnos); el *fin* fue, sobre todo, la *descripción* de significados personales de los alumnos, mediante el estudio de sus configuraciones cognitivas; el nivel de *generalizabilidad* fue e*xploratorio*, ya que no se pretende generalizar los resultados a otros contextos o poblaciones; y el *nivel* de análisis fue *puntual*, puesto que se pretendió investigar hechos y fenómenos ligados al estudio de una cuestión matemática específica en un contexto determinado.

Propusimos dos problemas de optimización, uno con variación continua y otro con variación discreta, a 38 alumnos que cursaban segundo o tercer ciclo universitario, siguiendo estudios de diversas especialidades de ingeniería. Todos estaban matriculados en el curso electivo Matemática Recreativa y ya habían aprobado un curso de Matemática básica y un curso de Cálculo 1. Algunos estaban cursando Cálculo 2 y otros ya habían aprobado este curso y estaban cursando Cálculo 3. Se les pidió que resolvieran los problemas primero individualmente, escribiendo en la hoja que se les entregó todos sus cálculos, diagramas, dibujos, etc., los preliminares y los definitivos. Después se les pidió que volvieran a resolverlos en grupos de a lo más cuatro alumnos (ver anexo 4A). Por último, se les aplicó un cuestionario (ver anexo 4B) para conocer sus impresiones sobre los problemas y sus propias resoluciones.

Las soluciones individuales fueron examinadas, una a una, tomando como referencia la configuración epistémica elaborada para cada problema, con el objetivo de hacer una tipología de niveles de resolución de problemas. Para ello, utilizamos como criterio la "calidad" o "riqueza" de su configuración cognitiva, entendida como "distancia" respecto a la configuración epistémica de referencia. Para la reducción de la información dada por las configuraciones cognitivas se usó un protocolo ad hoc (ver anexos 4C y 4D), prestando atención fundamentalmente a los procedimientos y las argumentaciones, y entre éstas a la argumentación del carácter de óptimo del resultado obtenido, que es propia de las soluciones rigurosas de problemas de optimización.

Por otra parte, el análisis de nuestros datos está enmarcado por un proceso de triangulación de "opinión de expertos", lo cual permite un análisis más cuidadoso y más fino de los datos, no dejando que prevalezcan sólo las primeras impresiones del investigador. Después de elaborada una primera versión del análisis ésta fue sometida a la apreciación de expertos tanto en el EOS como en la resolución de problemas, tratando como ya hemos dicho de refinar los análisis.

4.3.1. Criterios para la selección de los dos problemas del cuestionario

En la selección de la muestra de alumnos que han participado en la situación experimental, ya nos referimos a la importancia que se ha dado al tipo de contrato didáctico. Para el experimento diseñado tuvimos en cuenta específicamente la dimensión epistémica del contrato didáctico. En concreto, hemos tenido en cuenta que los problemas propuestos formen parte de las configuraciones epistémicas correspondientes a los cursos universitarios que los alumnos habían estudiado y que estén considerados en la norma epistémica que regula lo que se entiende por argumentación en matemáticas.

Se decidió proponer sólo dos problemas, uno de variaciones continuas y otro de variaciones discretas.

El primer problema fue pensado, en principio, para que los alumnos no se quedasen sólo en respuestas intuitivas, ya que cumplía tres condiciones que facilitaban que sus configuraciones cognitivas incorporasen procedimientos, propiedades, definiciones y argumentos explícitos. Estas tres condiciones eran: 1) ser solucionable usando normas epistémicas estudiadas en cursos anteriores; 2) estar siendo propuesto a alumnos de un curso en el que se daba mucha importancia a las reglas metaepistémicas que regulan la argumentación matemática y que, además, ya habían vivido contratos didácticos anteriores con tales reglas; y 3) ser un problema rutinario.

El segundo problema se pensó precisamente para que sólo se mantuviera la segunda condición, con el objetivo de facilitar la emergencia de soluciones intuitivas. Al ser un problema no rutinario y carecer el alumno de normas epistémicas específicas, era de esperar que la metanorma sería insuficiente para asegurar que sus configuraciones cognitivas incorporasen proposiciones, procedimientos, definiciones y argumentos explícitos.

	TIPOS DE PROBLEMAS	
CONTRATO DIDÁCTICO	Problema con variaciones continuas	Problema con variaciones discretas
Normas epistémicas específicas (de cursos previos como álgebra, geometría, cálculo diferencial)	Sí	No
Normas metaepistémicas (Las afirmaciones deben justificarse)	Sí	Sí
Problemas rutinarios	Sí	No

CUADRO 4.5.
Problemas seleccionados y contrato didáctico

El cuestionario del anexo 4B, tenía entre otros objetivos, comprobar que en las respuestas de los alumnos se reconocían explícitamente las características recogidas en el cuadro anterior. Esto efectivamente sucedió, ya que, por ejemplo, a la pregunta del cuestionario: *"Cuál de los dos problemas te pareció más interesante? ¿Por qué?* hallamos respuestas como las siguientes que evidencian claramente que el problema 1 era rutinario y el 2 no:

> *"El problema 2, ya que se necesitaba mayor ingenio, mientras que el otro era solo usar una fórmula"*

> *"El problema 2. Me hace razonar un poco más, además el otro es ya muy conocido".*

Con relación al conocimiento de las normas epistémicas necesarias para la resolución del problema 1, a la misma pregunta del cuestionario hallamos respuestas como la siguiente:

“El problema 1. Porque se necesita de conocimientos matemáticos aprendidos en cursos anteriores (Cálculo 1)”.

“El problema 1. Porque te permitía aplicar tus conocimientos adquiridos en los cursos de mate”.

Mientras que en las siguientes respuestas a la misma pregunta se manifiesta la falta de conocimiento de las normas epistémicas necesarias para la resolución del problema 2:

“El problema 2, ya que se necesitaba mayor ingenio, mientras que el otro era solo usar una fórmula”

“El problema 2, porque no era tan matemático, era más cosa de maña”

Las siguientes respuestas a la pregunta *¿Qué crees que debe tener una solución para considerar que el problema está completamente resuelto?* evidencian que los alumnos eran conscientes de las normas metaepistémicas que regulan las justificaciones de afirmaciones en matemáticas:

“La demostración fehaciente y objetiva que tu solución es la correcta”

“Un sustento matemático y riguroso razonamiento”

Para la reducción de la información dada por las configuraciones cognitivas que se podían inferir de las soluciones de los alumnos a los problemas propuestos (ver cuadro 4.2), se usó un protocolo ad hoc con los descriptores del cuadro 4.6, prestando atención fundamentalmente a los procedimientos y las argumentaciones, y entre éstas a la argumentación del carácter de óptimo del resultado obtenido, que es propia de las soluciones rigurosas de problemas de optimización:

Halla lo pedido	Sí No
Procedimiento que sigue	Tantea Considera todos los casos Formaliza Muestra sólo resultados
Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo	No Incorrectamente Correctamente

CUADRO 4.6.
Protocolo ad hoc para el análisis de la resolución de problemas de optimización

4.4. ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES INDIVIDUALES

Ciertamente hay muchas maneras de interrelacionar la información que se obtiene usando el protocolo. Para esta investigación hemos considerado importante destacar cuatro casos con ítems de observación comunes para ambos problemas. Como quinto caso, examinamos la presencia de intuición optimizadora en alguna parte de las soluciones presentadas por los alumnos. Tengamos en cuenta que el problema 1 es de variaciones continuas (VC) y que el problema 2 es de variación discreta (VD):

I. Casos en los que mostraron sólo sus resultados. (Ausencia de *argumentos* y de *procedimientos* explícitos). Examinamos los subcasos de respuestas correctas y presentamos los porcentajes correspondientes. (Figura 4.1)

II. Casos en los que presentaron formalizaciones. (Uso de *lenguaje* formalizado.) Examinamos los subcasos de respuestas correctas (IIa) y también – independientemente de la corrección de sus respuestas - los subcasos en que justificaron si el resultado obtenido es óptimo (IIb). (Uso de *argumentos*.) Presentamos los porcentajes correspondientes. (Figuras 4.2 y 4.3)

III. Casos en los que hallaron lo pedido en el problema. Examinamos los subcasos de formalización (IIIa) (Uso de *lenguaje* formalizado.) y también – independientemente de que hayan formalizado o no – los subcasos de justificación de que el resultado obtenido es óptimo (IIIb) (Uso de *argumentos*.) (Figuras 4.4 y 4.5)

IV. Casos en los que intentaron justificar que los resultados obtenidos son óptimos (Uso de *argumentos*.) Examinamos los subcasos de explicación correcta y presentamos los porcentajes correspondientes. (Figura 4.6.)

V. Casos de alumnos que en alguna parte de su producción escrita muestran indicios de intuición optimizadora.

Caso I

Teniendo como referencia las configuraciones epistémicas mostradas en los cuadros 4.3. y 4.4., hemos elaborado configuraciones cognitivas de las soluciones de los estudiantes, correspondientes a cada caso. Mostramos algunas de éstas, como representativas de sus similares.

I. Mostraron sólo sus resultados

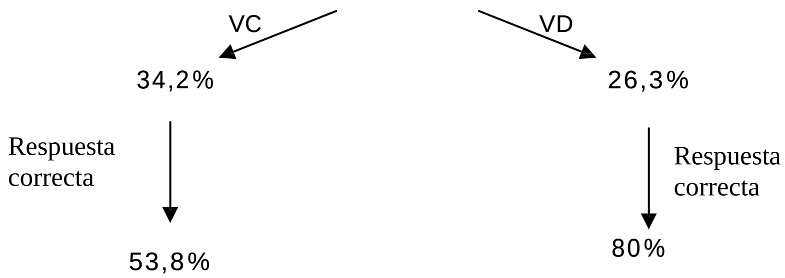


Figura 4.1. Análisis de ausencia de argumentos y procedimientos

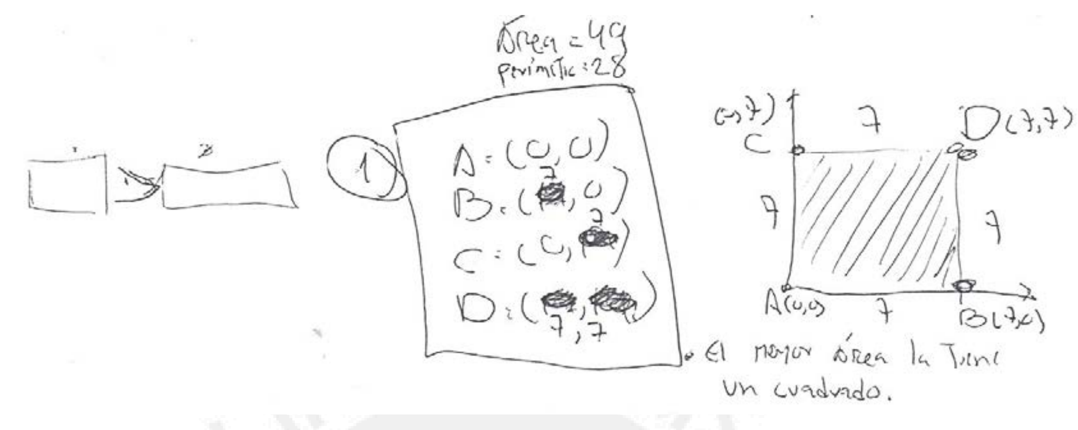
Estos casos llaman nuestra atención porque simplemente escriben una respuesta. No se encuentran procedimientos ni argumentos explícitos y no se puede percibir qué proposiciones han usado. Esto revela que ante la tarea de resolver el problema se quedan en lo que en esta investigación se ha llamado una aproximación intuitiva. Siendo alumnos que ya han aprobado un curso de cálculo diferencial y cuyo contrato didáctico les "obligaba" a justificar sus respuestas, podemos afirmar que hay una débil influencia de su enseñanza y de su aprendizaje para ir más allá de una solución intuitiva. Es oportuno recordar lo que nos dice Fischbein (1994)

> "*The educational problem is to develop new, adequate, intuitive interpretations as far as possible, together with developing the formal structures of logical reasoning*" (p. 211)

En la Figura 4.1 mostramos en qué proporción las respuestas que dan son correctas, con el propósito de tener una información sobre la calidad de su aproximación intuitiva a los problemas. Vemos que en el problema de variable discreta el porcentaje de los que muestran sólo su resultado es menor que en el problema de variable continua, pero de éstos, el porcentaje de los que dan una respuesta correcta (80%) es mayor que en el problema de variable continua (53,8%), por lo cual podríamos decir que para el problema de variable discreta hay una aproximación intuitiva mejor que para el problema de variable continua, o que el grado de efectividad de la intuición fue mayor al tratar de resolver el problema de variable discreta. Como esperábamos, se halló que la respuesta intuitiva se dio en mayor proporción en el problema de variable discreta. Ahora bien, queremos resaltar que, en contra de lo esperado, en el problema de variable continua se dio un porcentaje no desdeñable.

A modo de ilustración, a continuación mostramos una solución del problema de variación continua, ubicada en este caso, y su correspondiente configuración cognitiva:

Alumno 29: Problema con VC (Sólo muestra su resultado y la respuesta es correcta.)



Configuración cognitiva:

Lenguaje:
Representaciones: Representa un cuadrado y un rectángulo relacionados por el símbolo de mayor. Dibuja un cuadrado en un sistema de coordenadas cartesianas.
Expresiones simbólicas: Especifica las coordenadas de los vértices con letras y pares ordenados, correspondientes a un cuadrado de lado 7 y con un vértice en el origen.
Situación-problema:
Problema isoperimétrico de rectángulos.
Conceptos:
Paralelogramo, perímetro, área de rectángulos, vértice, números enteros.
Proposiciones:
(Implícitas) Un cuadrado es un paralelogramo.
Un cuadrado de igual perímetro que un rectángulo, tiene mayor área que el rectángulo.
Procedimientos:
Ninguno.
Argumentos:
Ninguno.

La ausencia de procedimientos, proposiciones y argumentos explícitos es clara y la diferencia con la configuración epistémica de referencia es muy grande.

Caso II

IIa. Presentaron formalizaciones

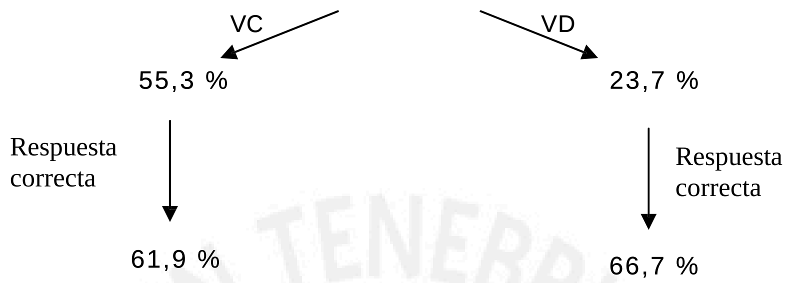


Figura 4.2. Análisis del uso de lenguaje formalizado

IIb. Presentaron formalizaciones

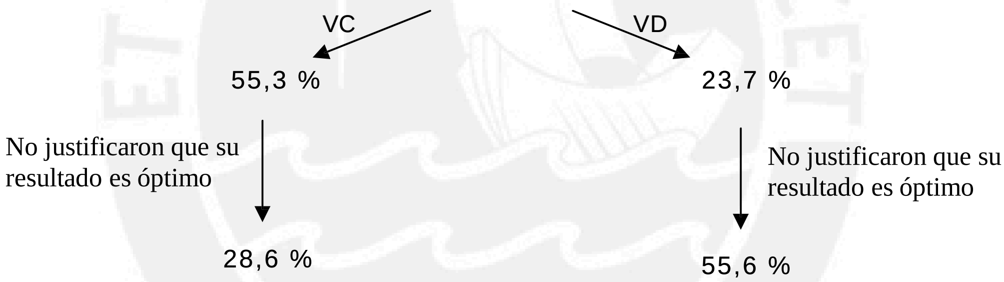


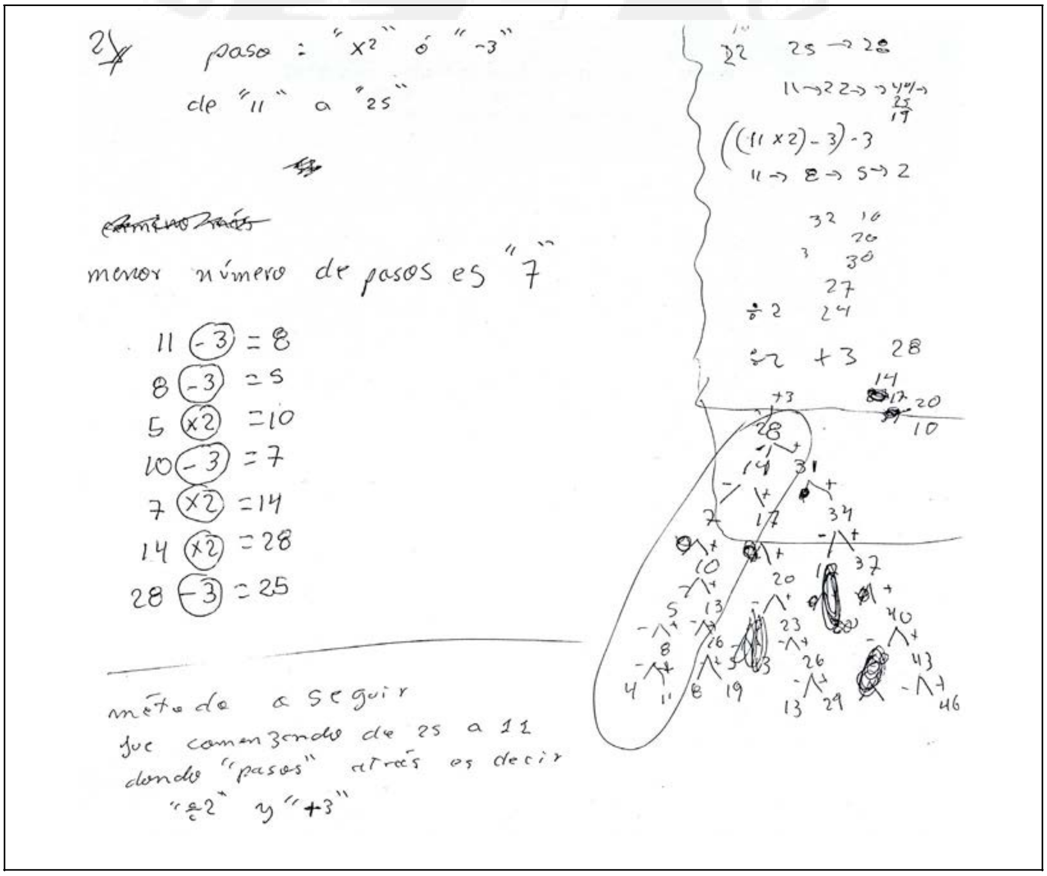
Figura 4.3. **.** Análisis del uso de argumentos

Como ya lo manifestamos anteriormente, el criterio de formalización es bastante amplio y tratándose de jóvenes del segundo o tercer ciclo universitario (entre 17 y 18 años) no somos especialmente exigentes, pero distinguimos entre aquellos que sólo escriben algunos números o dibujan sólo un paralelogramo, de aquellos que usan expresiones algebraicas, ecuaciones, notación funcional, teoremas, diagramas, notaciones propias, etc. En el problema de variable discreta era de esperar un porcentaje no muy elevado de casos en los que hay formalizaciones. Sorprende, en cambio, que también se dé un porcentaje no muy elevado (55,3%) en el problema de variable continua. Una explicación coherente con las soluciones específicas encontradas, es la existencia de deficiencias en el manejo formal de argumentos, procedimientos y proposiciones como los descritos en el análisis epistémico de los problemas; más aún observando que no es muy alto el porcentaje de los que llegan a una respuesta correcta usando formalizaciones.

Cuantitativamente, podríamos decir que las deficiencias son más serias al resolver el problema con variación discreta. (Figura 4.2); sin embargo cabe destacar soluciones de este problema, con formalizaciones, respuesta correcta y una aproximación a una argumentación del carácter de óptimo de la solución hallada. A continuación mostramos una de estas pocas soluciones del problema discreto y aspectos saltantes de su correspondiente configuración cognitiva, que muestran que tiene bastante en común con la configuración epistémica de referencia.

Alumno 6

Problema con VD (Formaliza y da respuesta correcta.)



Configuración cognitiva

Lenguaje:
Representaciones: Usa diagrama de árbol. Representa simbólicamente los pasos definidos y los pasos "hacia atrás".
Situación-problema:
Problema de contexto aritmético.
Conceptos:
(Implícitos) Funciones inversas correspondientes a "multiplicar por 2" y a "disminuir 3 unidades"
Proposiciones:
(Implícita) Con las reglas dadas, para llegar a 25, necesariamente hay que llegar antes a 28.
Procedimientos:
Analiza empezando por el final y usando "pasos inversos" a los definidos: "dividir entre 2" y "añadir 3".
Argumentos:
(Implícitos) Un diagrama de árbol permite examinar todos los posibles "caminos", usando los pasos definidos o sus respectivos inversos.
Si se examinan todos los posibles "caminos" de 28 a 11, se puede escoger el "camino" más corto de 11 a 25, usando los pasos definidos.

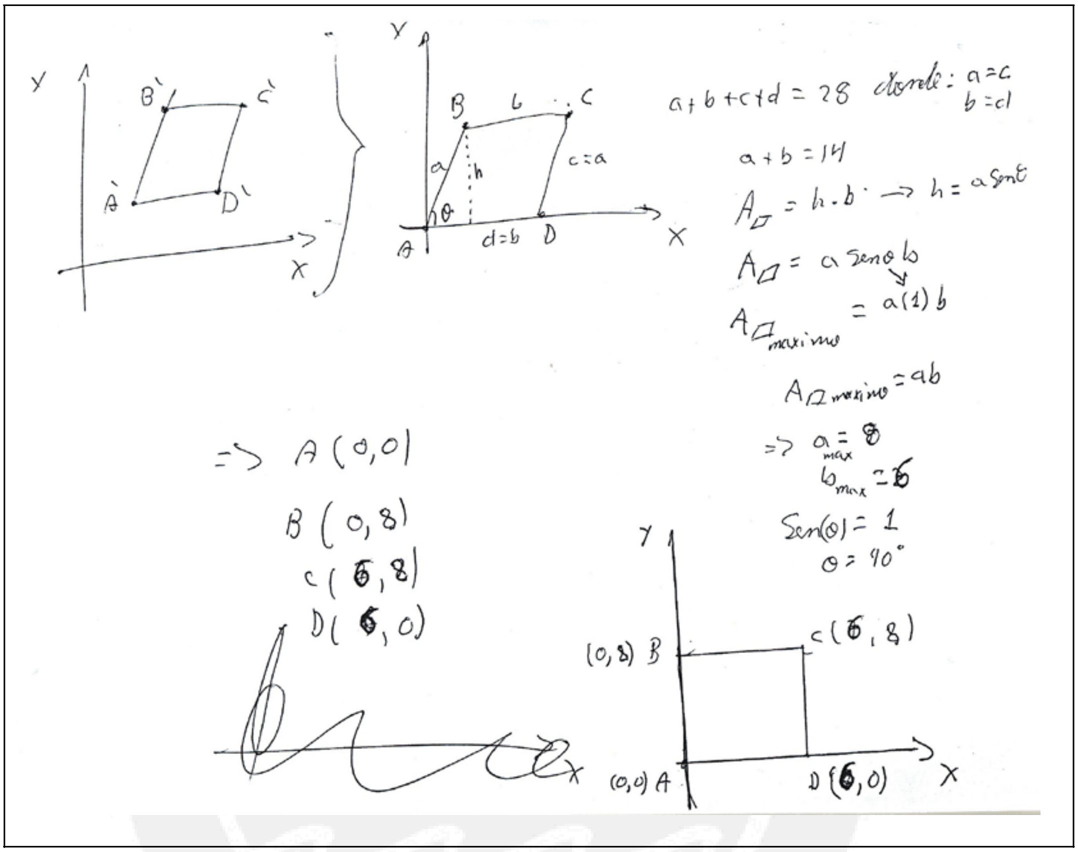
Otra mirada a los casos que presentaron formalizaciones, es observando si justificaron o no que la solución que obtuvieron – independientemente de que sea correcta o no – es un máximo o un mínimo, según el problema. (Figura 4.3)

Una de las ventajas de las formalizaciones es contribuir a una exposición rigurosa de las ideas, que se perciba en la interrelación clara y ordenada de conceptos, proposiciones, argumentos y procedimientos. Una solución correcta de un problema de optimización debería incluir la justificación de que el resultado obtenido es óptimo, pero vemos que hay un porcentaje considerable de estudiantes que no lo hacen – sobre todo en el problema con variable discreta – a pesar de que formalizan. Esta constatación nos lleva a afirmar que se debe prestar más atención a la formación en el pensamiento riguroso y al uso adecuado de la formalización.

Es ilustrativo mostrar una solución del problema de variación continua en la que se usa lenguaje formalizado, pero se llega a una respuesta incorrecta y no se da una justificación de que el resultado obtenido es óptimo. (En rigor no podría haberla, siendo incorrecta la respuesta, pero es precisamente por no buscar una justificación que la búsqueda formal termina en un caso particular no óptimo.)

Alumno 6

Problema de VC (Formaliza, pero no concluye correctamente)



Configuración cognitiva

Lenguaje: Representaciones: Dibuja un paralelogramo con lados no perpendiculares, en un sistema de coordenadas cartesianas. Uno de los lados sobre el eje de abscisas y un vértice en el origen. Asigna variables a las longitudes de los lados y a un ángulo. Términos y expresiones: Área, expresiones algebraicas. *Situación – problema:* Problema isoperimétrico de paralelogramos. *Conceptos:* Paralelogramo, área, perímetro, función seno, vértices, números enteros.

Proposiciones:

El área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de dos lados y del seno del ángulo que forman estos.

Implícita: Si un paralelogramo tiene un ángulo interior de 90º, entonces es un rectángulo.

Procedimientos:

Observa que, manteniendo el perímetro, se obtienen distintas áreas del paralelogramo variando las longitudes de los lados, variando los ángulos entre los lados, o variando longitudes y ángulos.

Asume que para que el área sea máxima, el seno de tal ángulo debe ser 1.

Escoge las coordenadas de los vértices.

Argumentos:

Deduce que el paralelogramo de área máxima tiene que ser un rectángulo y asigna valores a las variables que representan a las longitudes de los lados.

El estudiante concluye, erradamente, que el paralelogramo de área máxima buscado es un rectángulo cuyos lados miden 6 y 8 unidades, pero podemos observar que hay similitudes entre la configuración epistémica de referencia y la configuración cognitiva de su solución y que el estudiante llega, formalmente, muy cerca de la solución correcta, a la cual llegaron otros estudiantes sin formalizar. Por casos como estos nos preguntamos si el rigor y las formalizaciones que se inducen en los cursos de matemáticas están realmente complementando la intuición (¿el alumno formaliza sin buscar una aproximación intuitiva a la solución del problema?).

Caso III

IIIa. Hallaron lo pedido

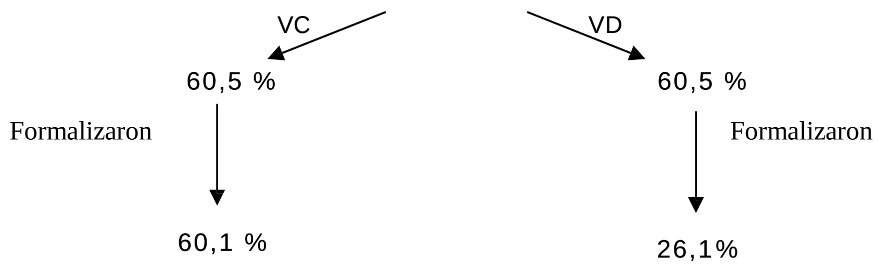


Figura 4.4 Análisis de respuesta correcta usando lenguaje formalizado

IIIb. Hallaron lo pedido

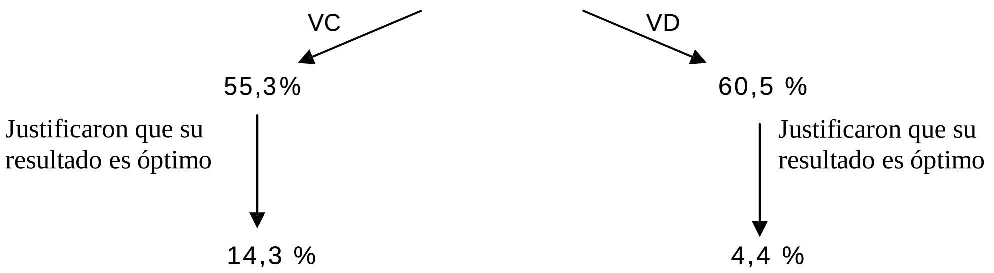
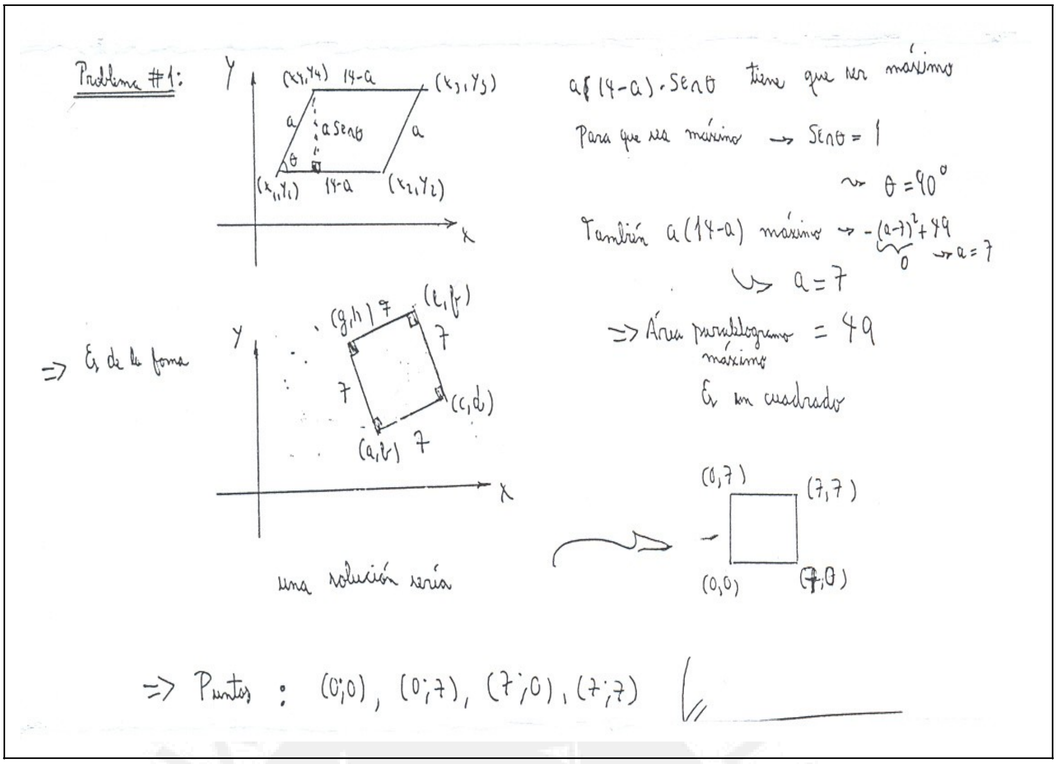


Figura 4.5. Análisis de respuesta correcta con argumentación de resultado óptimo

Los resultados que mostramos en las figuras 4.4 y 4.5 nos indican también que hay deficiencias formativas en la formalización y en la actitud científica para canalizar adecuadamente las conjeturas y las aproximaciones intuitivas a los problemas, pues vemos que no son muchos los que hallaron una respuesta correcta usando lenguaje formal, sobre todo en el problema con variable discreta, y son pocos los que encontrándola, justificaron – es decir, argumentaron correctamente – que cumple con la característica de ser el óptimo que se pide en el problema. Cabe destacar que muy pocos alumnos hallaron lo pedido formalizando y justificando que lo obtenido es óptimo: 7,9 % en el problema con variación continua y 2,6 % en el problema con variación discreta. Sólo un estudiante (2,6 %) halló de esta manera lo pedido en ambos problemas. A continuación mostramos sus soluciones y omitimos transcribir sus correspondientes configuraciones cognitivas, por su gran similitud con las configuraciones epistémicas de referencia.

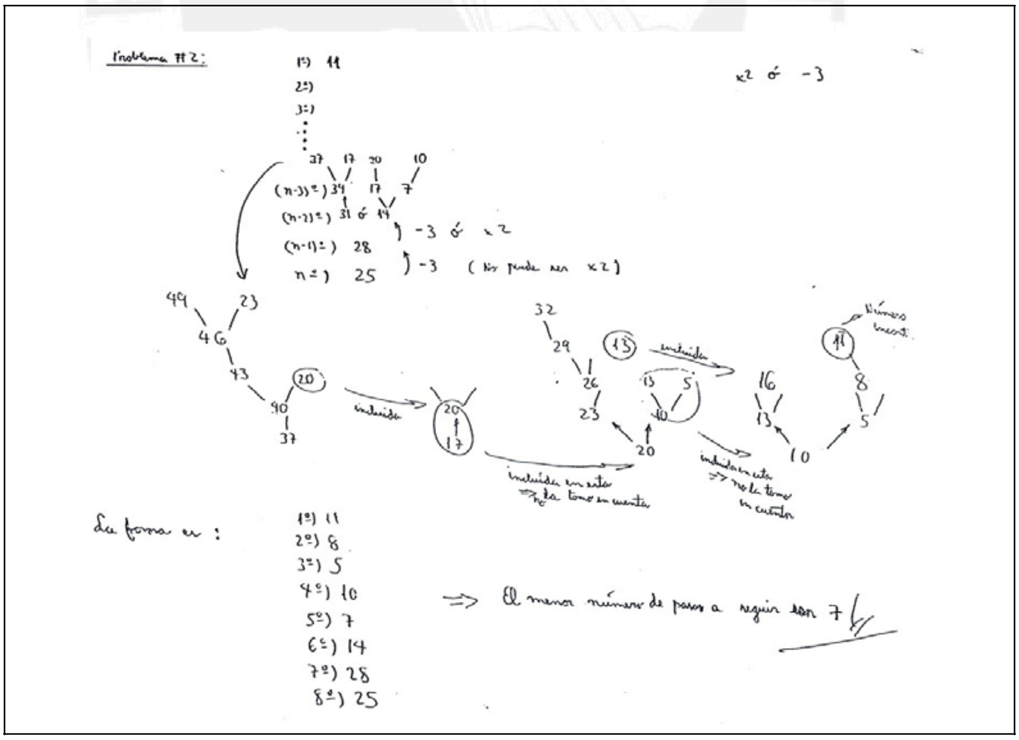
Alumno 3

Problema con VC (Halla lo pedido, formaliza y justifica que su resultado es óptimo)



Alumno 3

Problema con VD (Halla lo pedido, formaliza y justifica que su resultado es óptimo)



Caso IV

IV. Intentaron justificar que sus resultados son óptimos

VC — 42,1 % — Justificaron — 18,8 %

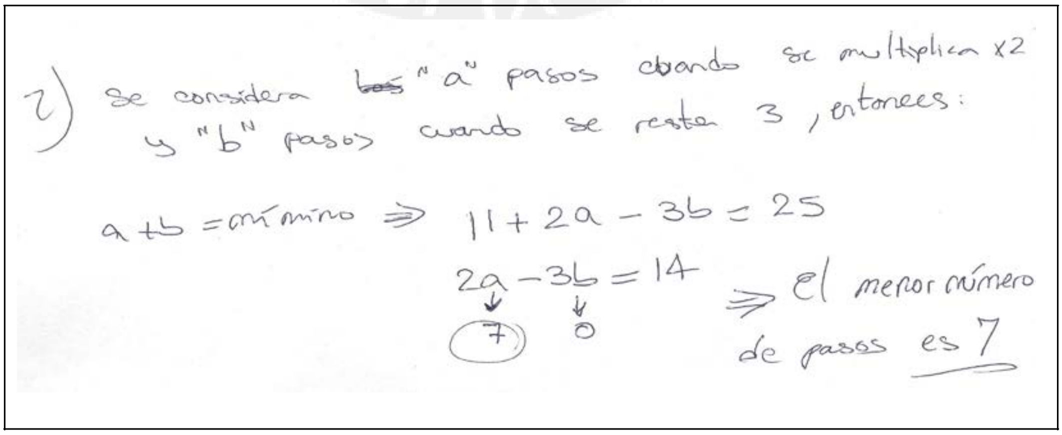
VD — 13,2 % — Justificaron — 20 %

Figura 4.6. Análisis de la argumentación del carácter de óptimo de sus resultados

Vemos que son pocos los que intentaron justificar que sus resultados obtenidos son óptimos y que de ellos, son pocos también los que realmente justificaron (dieron una explicación correcta). Para el problema de variación discreta y otros con carácter lúdico, muchos consideran suficiente llegar a una solución que parece convincente. Estas son deficiencias en el pensamiento riguroso y en el uso de lenguaje formalizado y de argumentos para demostrar la validez de resultados. Por otra parte, hemos encontrado casos en los que parece que el uso de lenguaje algebraico para formalizar y la búsqueda de justificaciones formales los alejan de una mirada más natural de la situación planteada, sobre todo al resolver el problema con variación discreta. A modo de ilustración, mostramos una solución y su configuración cognitiva.

Alumno 27

Problema con VD (Formaliza e intenta justificar que su resultado es óptimo)


2) Se considera ~~los~~ "a" pasos cuando se multiplica x2 y "b" pasos cuando se resta 3, entonces:

a+b = mínimo ⇒ 11+2a − 3b = 25

2a − 3b = 14 ⇒ el menor número de pasos es 7

7 0

Configuración cognitiva

Lenguaje:
Asigna variables para el número de veces que se use cada paso.
Situación – problema:
Problema de contexto algebraico.
Conceptos:
Ecuaciones, números enteros no negativos
Proposiciones:
(Implícita) Existen valores que minimizan la suma de dos números enteros no negativos sujetos a una restricción lineal de igualdad
Procedimientos:
Establece una ecuación usando las variables adoptadas para relacionar 11 y 25.
Busca que la suma de las variables adoptadas sea mínima.
Argumentos:
Razonamiento deductivo

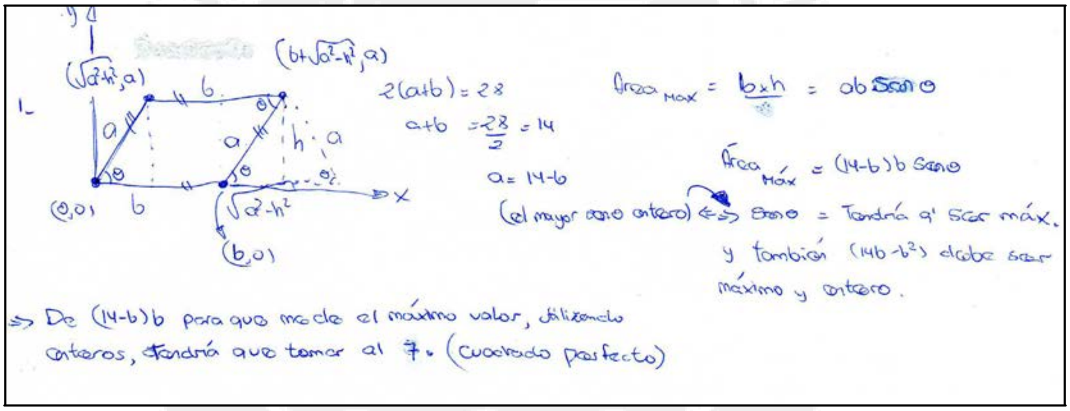
Se percibe que hay uso de lenguaje formalizado y una intención de ser riguroso, quizás influenciado por los cursos universitarios de matemática ya aprobados, pero que tal actitud no está complementando una reacción natural ante este problema, de ubicarlo en un contexto aritmético y tantear algunos pasos. No llega a percibir que su ecuación no está formalizando o modelizando la situación planteada. Si bien es cierto que cuando a y b son no negativos y cumplen que $2a - 3b = 14$ entonces el mínimo valor de $a + b$ es 7 (con $a = 7$ y $b = 0$), al aplicar 7 veces el paso "multiplicar por 2", partiendo del número 11, no llegará al 25. Recordemos que una de las proposiciones en la configuración epistémica de referencia es que con sólo multiplicaciones por dos no se puede llegar a 25, partiendo de 11. Proposición casi obvia e intuible por el alumno, pero que no la aplica para verificar su respuesta obtenida "formalmente".

Caso V

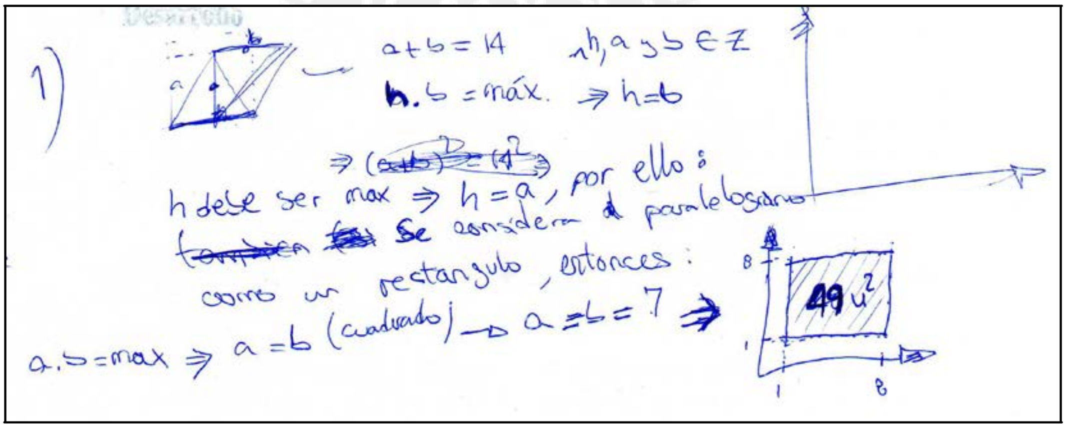
Podemos decir que en las soluciones de los problemas encontramos indicios de lo que llamamos una intuición optimizadora global en aquellos casos en los que hallan lo pedido y muestran sólo su resultado; sin embargo, examinando las soluciones y sus configuraciones cognitivas, encontramos varias afirmaciones sin justificación, en una línea correcta hacia la solución, que también podríamos considerar como indicios de una intuición optimizadora; así, en el problema 1, encontramos 18 casos en los que se afirma o se asume que el paralelogramo que se busca es un rectángulo; o, más específicamente, que es un cuadrado; o que es un paralelogramo con lados de la misma longitud; o que los números cuyo producto es máximo y su suma es 14 tienen que ser ambos iguales a 7. Las soluciones de los alumnos 8, 13, 29 y 31son ejemplos con las tres primeras afirmaciones; las de los alumnos 30 y 36 con la primera y la cuarta; la del alumno 27 con la primera, tercera y cuarta; y la del alumno 24 con la tercera. La del alumno 29 ya la hemos mostrado, y – como ilustración – a continuación mostramos las de los alumnos 24, 27 y 30, que no están entre los que muestran sólo su resultado.

Problema 1, de VC.

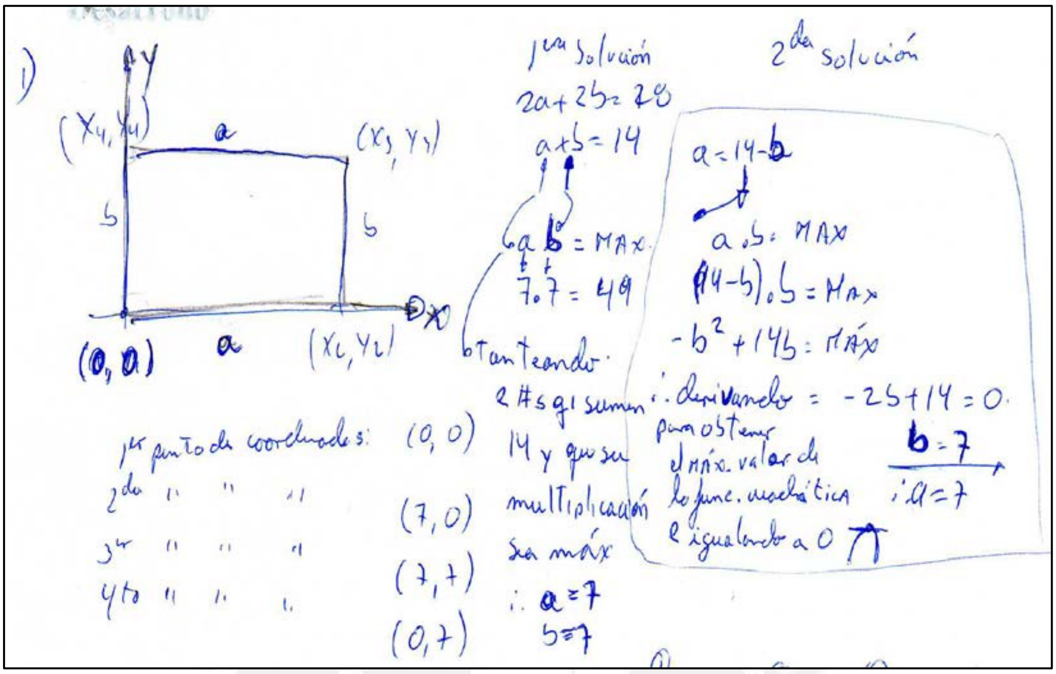
Solución del alumno 24



Solución del alumno 27



Solución del alumno 30



En cuanto al problema 2, son mayores los indicios de la intuición optimizadora global, como hemos visto al examinar los casos I y IIIb. Así, el 91,3% de los que hallan lo pedido no justifican que su resultado es óptimo (en el problema 1 esto ocurre en el 38% de los casos). Sin embargo, examinando las soluciones y sus configuraciones cognitivas, encontramos también varias afirmaciones sin justificación, en una línea correcta hacia la solución, que podríamos considerar como indicios de una intuición optimizadora; por ejemplo en las soluciones de los alumnos 4 y 17 (que no hallan lo pedido) se destaca la importancia de pasar por 28 y 14 para llegar a 25; y en las soluciones de los alumnos 9, 16 y 19 se percibe que el haber encontrado un camino con siete pasos, luego de haber hallado caminos con nueve u ocho pasos, ya los convence (¿intuitivamente?) que el camino con siete pasos es el óptimo. A manera de ilustración, mostramos las soluciones de los alumnos 4 y 16, que no están entre los que muestran sólo sus resultados.

Problema 2, de VD

Solución del alumno 4

2) i) Para llegar a 25, se observa que: $14 \times 2 = 28$, $28 - 3 = 25$; entonces lo q' se podría hacer es buscar la forma de llegar a 14 rápidamente.

ii) Partiendo del 11, $11 - 3 = 8$; $8 - 3 = 5$, $5 \times 2 = 10$, $10 \times 2 = 20$, $20 - 3 = 17$, $17 - 3$, 14.

iii) Entonces al unir las dos partes se llega a:

a) $11 - 3 = 8$
b) $8 - 3 = 5$
c) $5 \times 2 = 10$
d) $10 \times 2 = 20$
e) $20 - 3 = 17$
f) $17 - 3 = 14$
g) $14 \times 2 = 28$
h) $28 - 3 = 25$

} se han necesitado 8 pasos

Solución del alumno 16

2.- $11 \xrightarrow{\times 2 \text{ ó } -3} 25$

de atrás a adelante: (al invertir el orden, un "paso" sería dividir entre 2 ó sumar 3)
→ al 25 solo se le puede sumar 3

- $25 \to 28 \to 14 \to 7 \to 10 \to 5 \to 8 \to 11$ 7 pasos
- $25 \to 28 \to 31 \to 34 \to 17 \to 20 \to 10 \to 11$ 9 pasos
  3 pasos

→ mínimo 7 pasos

4.4.1. Tipología de configuraciones cognitivas de los alumnos

La “distancia” que separa la configuración cognitiva del alumno respecto de la configuración epistémica de referencia permite realizar una gradación de niveles en la resolución de los problemas trabajados. En concreto, hemos distinguido hasta nueve niveles, de menor a mayor, siendo el nivel cero el de los que no se involucran en el problema y los otros ocho los describimos muy resumidamente en el cuadro 4.7 (para más detalles ver los cuadros presentados en los anexos 4C y 4D, donde se indica el nivel de cada estudiante).

NIVEL	Halla lo pedido		Procedimiento				Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo		
	Si	No	Tantea	Considera todos los casos	Formaliza	Muestra sólo su resultado	No	Incorrecta mente	Correcta mente
1		X				X	X		
2		X	Algo en estas columnas			X	X		
3		X	Algo en estas columnas				X		
4		X	Algo en estas columnas					X	
5	X		Algo en estas columnas				X		
6	X			Algo en estas columnas				X	
7	X			Una de estas columnas					X
8	X			X	X				X

CUADRO 4.7.
Tipología de configuraciones cognitivas de los alumnos

El cuadro 4.8 resume el número de alumnos que se encuentra en cada nivel, según cada problema, y da elementos para considerar agrupaciones de niveles:

NIVEL	NÚMERO DE ALUMNOS SEGÚN EL PROBLEMA 1 (VARIACIONES CONTINUAS)	NÚMERO DE ALUMNOS SEGÚN EL PROBLEMA 2 (VARIACIÓN DISCRETA)
0	1 (2,6%)	5 (13,2%)
1	1 (2,6%)	2 (5,3%)
2	6 (15,8%)	5 (13,2%)
3	6 (15,8%)	0 (0%)
4	3 (7,9%)	3 (7,9%)
5	8 (21%)	21 (55,3%)
6	10 (26,3%)	1 (2,6%)
7	0 (0%)	0 (0%)
8	3 (7,9%)	1 (2,6%)

CUADRO 4.8.
Distribución por niveles

A continuación mostramos algunos ejemplos de soluciones y configuraciones cognitivas de alumnos que están en los niveles 5-8 (que son los que han hallado lo pedido), según los problemas:

Problema 1

El alumno 29 resulta ubicado en el nivel 5. Su solución y correspondiente configuración cognitiva las expusimos cuando tratamos el Caso I.

El alumno 30 resulta ubicado en el nivel 6. Su solución la mostramos al tratar el Caso V y a continuación mostramos la configuración cognitiva de su solución.

Lenguaje:

Representaciones: Dibuja un rectángulo en un sistema de coordenadas cartesianas. Uno de los lados sobre el eje de abscisas y un vértice en el origen. Asigna variables a las longitudes de los lados. Esboza el gráfico de una función cuadrática

Términos y expresiones: Área, expresiones algebraicas.

Situación – problema:

Problema isoperimétrico de paralelogramos.

Conceptos:

Paralelogramo, área, perímetro, vértices, números enteros.

Proposiciones:

El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de sus lados.

Procedimientos:

Muestra dos soluciones: una por tanteo y otra definiendo la función área del rectángulo y derivando.

Escoge las coordenadas de los vértices.

Argumentos:

(Implícitos) El paralelogramo maximizante es un rectángulo.

El valor que hace cero la derivada de la función área, maximiza tal función.

El alumno 3 resulta ubicado en el nivel 8. Su solución fue expuesta al tratar el Caso III y la configuración cognitiva se omitió por su gran similitud con la configuración epistémica de referencia.

Problema 2

El alumno 6 resulta ubicado en el nivel 5. Su solución y correspondiente configuración cognitiva fueron expuestas al tratar el Caso II.

El alumno 16 resulta ubicado en el nivel 6. Su solución la mostramos al tratar el caso V y a continuación mostramos la configuración cognitiva de su solución

Lenguaje:

Representaciones: Representa simbólicamente los pasos definidos y describe los correspondientes pasos "hacia atrás".

Situación-problema:

Problema de contexto aritmético.

Conceptos:

(Implícitos) Funciones inversas correspondientes a "multiplicar por 2" y a "disminuir 3 unidades"

Proposiciones:

(Implícita) Con las reglas dadas, para llegar a 25, necesariamente hay que llegar antes a 28.

Procedimientos:

Muestra dos posibilidades empezando por el final y usando "pasos inversos" a los definidos: "dividir entre 2" y "añadir 3".

Argumentos:

(Implícito) Si existen sólo dos posibilidades, la solución es la que tiene menor número de pasos.

El alumno 3 resulta ubicado en el nivel 8. Su solución fue expuesta al tratar el Caso III y la configuración cognitiva se omitió por su gran similitud con la configuración epistémica de referencia.

4.5. SOLUCIONES GRUPALES

Tal como se ha dicho al principio de este capítulo, la existencia de una intuición optimizadora no es la única causa que puede explicar la presencia de respuestas correctas sin justificación explícita. Para descartar completamente que la existencia de respuestas correctas sin justificación pudiera ser debido al contrato didáctico al que estaban acostumbrados los alumnos, hicimos nuestra segunda predicción: en el caso de que el problema se hubiera resuelto por un grupo de alumnos, habituados a un contrato didáctico en el que los resultados se tienen que justificar, su producción escrita, analizada, sobre todo, mediante la herramienta configuración cognitiva, permitiría inferir configuraciones cognitivas de grupo en las que habría una argumentación explícita de la respuesta. Dicho de otra manera, en la resolución de problemas en grupo serían escasas las soluciones que se pudieran caracterizar globalmente como intuitivas (lo cual sí era esperable en las respuestas individuales) puesto que el grupo habría aplicado la norma metaepistémica del contrato según la cual las soluciones se han de justificar.

Para ver si la predicción se cumplía (o no) se pidió a los alumnos que volvieran a resolver en grupos – de a lo más cuatro integrantes – los dos problemas que antes habían resuelto individualmente (ver anexo 4A). Se puso especial énfasis en que los alumnos fueran conscientes de la norma metaepistémica de su contrato didáctico habitual según la cual las soluciones se han de justificar y para ello se les pidió literalmente “Presentar soluciones del grupo de ambos problemas, justificando rigurosamente los valores óptimos obtenidos”.

A continuación mostramos dos cuadros en los que se ha reducido la información dada por las configuraciones cognitivas grupales que se podían inferir de las soluciones de los grupos de alumnos a los dos problemas propuestos. En dichos cuadros hemos utilizado los mismos descriptores que para las soluciones individuales:

Grupo	Halla lo pedido	Procedimiento				Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo		
		Tantea	Considera todos los casos	Formaliza	Muestra sólo su resultado	No	Incorrectamente	Correctamente
1	1		1	1			1	
2	1		1	1			1	
3	1		1	1				1
4	1		1	1			1	
5	1	1			1	1		
6	1		1	1			1	
7	1		1	1			1	
8	1	1	1	1			1	
9	1		1	1				1
10	1		1	1			1	

CUADRO 4.9.
Análisis de las soluciones grupales al problema 1, con variaciones continuas

Grupo	Halla lo pedido	Procedimiento				Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo		
		Tantea	Considera todos los casos	Formaliza	Muestra sólo su resultado	No	Incorrectamente	Correctamente
1	1			1			1	
2	1			1			1	
3	1		1	1				1
4	1		1	1				1
5	1			1	1	1		
6	1			1			1	
7	1			1			1	
8	1	1					1	
9	1		1	1				1
10	1			1	1	1		

CUADRO 4.10.
Análisis de las soluciones grupales al problema 2, con variaciones discretas

4.5.1. Análisis de las diez soluciones grupales

Observaciones a las soluciones del problema 1, con variaciones continuas

1. Todos los grupos hallan lo pedido
2. Nueve grupos usan lenguaje formalizado y cuatro de ellos no usan el cálculo diferencial. Estos nueve grupos intentan dar argumentos que justifiquen que el valor obtenido es óptimo.
3. Dos grupos explican correctamente por qué el valor obtenido es óptimo y no son de los que usan cálculo diferencial para resolver el problema.
4. Hay cinco grupos que usan cálculo diferencial, pero ninguno de ellos justifica correctamente que el valor obtenido es óptimo.
5. El grupo 5 muestra sólo su resultado y no da explicación alguna del carácter de máximo del valor obtenido.

Comentarios

Consideramos que hay razones para afirmar que la intuición optimizadora también está presente en varias soluciones grupales, y con un nivel de presencia mayor que el esperado, sobre todo para este caso, por tratarse de un problema con las tres características anotadas en el apartado 4.3.1, y porque los alumnos tenían fortalecida la influencia del contrato didáctico, con su norma metaepistémica de justificar las aseveraciones. Esto haría pensar en la "potencia" de esta intuición. A continuación algunas razones:

a) Los grupos mencionados en la observación 4, no examinan si el valor que hace cero la primera derivada de la función que expresa el área del paralelogramo es un valor maximizante; y esta tarea debería hacerse como parte de la formación en el rigor matemático, según la norma metaepistémica del contrato didáctico establecido en sus estudios universitarios y en particular al estudiar cálculo diferencial. Consideramos que una razón para no hacerlo, habiéndoles recordado esta norma al pedirles expresamente que justifiquen rigurosamente, es la presencia de la intuición optimizadora, pues ella les haría considerar como evidente – en el contexto del problema – que el valor que hace cero la primera derivada es un valor maximizante. Esto es coherente con las respuestas al cuestionario, pues entre las razones que dan respecto a su convencimiento de la obtención de un paralelogramo de área máxima está el haber usado derivadas.

b) La ausencia de argumentación en el grupo 5, a pesar del pedido explícito, nos hace pensar en la presencia de la intuición optimizadora en los miembros del grupo, que los estaría haciendo considerar como evidentemente óptima la solución que muestran.

Observaciones a las soluciones del problema 2, con variaciones discretas

1. Todos los grupos hallan lo pedido.
2. Nueve grupos usan lenguaje formalizado, entendiendo como tal el uso de algún simbolismo distinto al de la mera expresión de operaciones aritméticas.
3. Ocho grupos intentan justificar que el resultado obtenido es óptimo.
4. Tres grupos explican correctamente por qué el valor obtenido es óptimo.

5. Los grupos 5 y 10 muestran sólo su resultado y no dan explicación alguna del carácter de mínimo del valor obtenido.

Comentarios

Consideramos que hay razones para afirmar que la intuición optimizadora también está presente en varias soluciones grupales de este problema. Podría decirse que el hecho de ser un problema no rutinario y carecer de normas epistémicas específicas, influyen más que la norma metaepistémica para dar como óptimo el valor encontrado apoyándose esencialmente en la intuición optimizadora. A continuación algunas razones:

a) Los grupos 1 y 7 dan razones “intuitivamente ciertas” para argumentar sus procedimientos. No analizan los diversos casos posibles.

b) El grupo 8 examina dos casos con los que llega al 25 con diez y con nueve pasos respectivamente, y luego exhibe la solución con siete pasos, afirmando que es la óptima. Consideramos que es la intuición optimizadora la que los hace concluir que ya no es posible obtener otra forma de llegar a 25 en menor número de pasos.

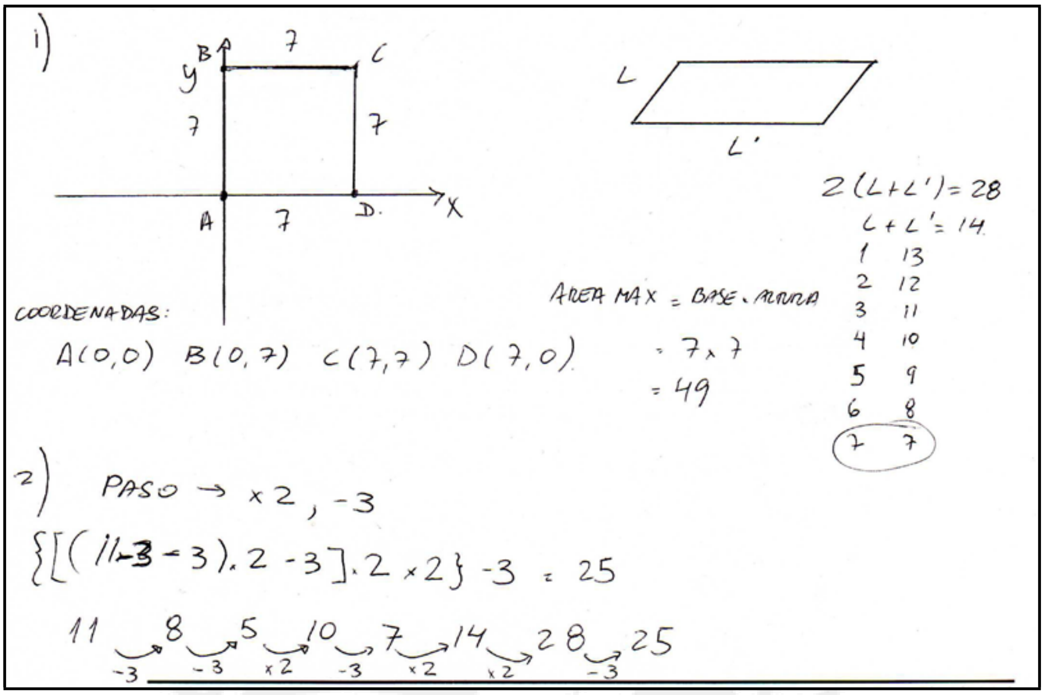
c) La ausencia de argumentación en los grupos 5 y 10, a pesar del pedido explícito, nos hace pensar en la presencia de la intuición optimizadora, que los estaría haciendo considerar como evidentemente óptima la solución que muestran.

d) El grupo 5, muestra sólo sus resultados correctos en ambos problemas, lo cual nos hace considerar que presentan soluciones globalmente intuitivas, por la presencia de intuición optimizadora.

El análisis de las respuestas permite concluir que la segunda predicción se cumplió, ya que se encuentra en la mayoría de las soluciones una intención de aplicar la norma metaepistémica de justificar las afirmaciones y sólo hay un grupo cuya respuesta se podría llegar a calificar de intuitiva en ambos problemas, pues no hay argumentación explícita, sobre todo en el problema 2. Se trata precisamente del grupo 5, el único que estaba formado sólo por dos alumnos. A continuación mostramos sus soluciones:

Grupo 5

Soluciones de los problemas 1 y 2



Configuración cognitiva de la solución del problema 1:

Lenguaje:

Términos y expresiones: Área, expresiones algebraicas, coordenadas.

Representaciones: Dibujan un paralelogramo con lados no perpendiculares y otro correspondiente a la solución, ubicado en un sistema de coordenadas.

Situación – problema:

Problema de contexto geométrico.

Conceptos:

Área y perímetro

Proposiciones:

(Implícita) Un cuadrado es un paralelogramo

Procedimientos:

Muestran posibles valores enteros de las longitudes de los lados del paralelogramo.

Argumentos:

Ninguno

Configuración cognitiva de la solución del problema 2:

Lenguaje:
Términos y expresiones: operaciones indicadas y signos de agrupación

Situación – problema:
Problema de contexto aritmético.

Conceptos:
Sustracción y multiplicación.

Proposiciones:
Ninguna

Procedimientos:
Ninguno

Argumentos:
Ninguno

4.6. CONCLUSIONES

Con relación al papel de la intuición en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la universidad, nuestra primera conclusión es que la situación experimental realizada – para determinar si la hipótesis de que existe una intuición optimizadora primaria debería mantenerse o rechazarse – permite concluir que no hemos encontrado razones para rechazar dicha hipótesis, puesto que consideramos que se han cumplido las tres predicciones realizadas previamente al experimento.

Nuestra primera predicción fue la siguiente: en el caso de existir la intuición optimizadora, un número considerable de los alumnos de la situación experimental, ante problemas no triviales, darían soluciones intuitivas, entendiendo por ello una producción escrita tal, que analizada, sobre todo, mediante la herramienta configuración cognitiva, permitiera inferir configuraciones cognitivas en las que el lenguaje queda reducido casi al necesario para dar la respuesta correcta; y las propiedades, definiciones y procedimientos quedan implícitos, aunque lo más característico sería que el bloque de la argumentación queda implícito o se limita a apelar a la evidencia. Consideramos que esta predicción se ha cumplido en un porcentaje suficientemente significativo de alumnos, como se muestra en la figura 4.1 y también en las figuras 4.3 y 4.5.

Nuestra segunda predicción fue, que al resolver los mismos problemas en grupo, la presencia de soluciones intuitivas sería muy escasa. Esta predicción también se ha cumplido, pues en la mayoría de las soluciones grupales se encuentran afirmaciones con el propósito de aplicar la norma metaepistémica de justificar los pasos que se van dando. Al resolver el problema 1, el grupo 5 es el único que muestra sólo su resultado y al resolver el problema 2, los grupos 5 y 10 son los únicos que sólo muestran sus resultados. Podríamos afirmar entonces, que los alumnos del grupo 5 han superado el filtro de la solución grupal y que sus soluciones a ambos problemas revelan intuición optimizadora. Así, metafóricamente, podríamos decir que dan sustento a un "teorema de existencia".

Nuestra tercera predicción fue que, incluso en aquellos casos en que las configuracionescognitivas de los alumnos presentan argumentaciones explícitas, alguno de los pasos de la argumentación puedeser unindicio también de laexistencia de intuición optimizadora**.** Esta predicción también se ha cumplido – y no solo a nivel de soluciones individuales – como hemos ilustrado mostrando diferentes ejemplos en las soluciones individuales (Caso V) y como hemos comentado en la sección 4.4.1, luegode hacer las observaciones a las soluciones grupales de cada uno de los problemas.

Con relación al papel del rigor y la formalización en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la universidad, nuestra segunda conclusión, como resumen de los resultados obtenidos, es que se perciben deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos. Hay casos en los que estos no se muestran explícitamente, como se ilustra en la figura 4.1 y en la configuración cognitiva de la solución del alumno 29; y casos en los que se muestran usando lenguaje formalizado, pero sin llegar a una respuesta correcta, como se ilustra en la figura 4.2 y en la configuración cognitiva de la solución del problema de variación continua hecha por el alumno 6, así como en la correspondiente a la solución del problema con variación discreta hecha por el alumno 27.

Una tercera conclusión es que una deficiencia específica en la argumentación al resolver los problemas de optimización propuestos, es la poca presencia de justificación de que el resultado que obtienen es óptimo; y es más notoria al resolver el problema de variaciones discretas, como se ilustra en las figuras 4.3 y 4.6.

Como conclusión más general queremos resaltar que el uso de herramientas teóricas propuestas por el EOS, como son la “configuración epistémica” y la “configuración cognitiva”, permite un estudio integrado de las nociones de problema, intuición, rigor y formalización. Por otra parte, dicha herramienta, permite también realizar una gradación de niveles en la resolución de los problemas trabajados, según la distancia que hay entre las configuraciones cognitivas de los alumnos y las epistémicas de referencia.

Capítulo 5

LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EL PERÚ

RESPUESTA A LA TERCERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo, atendiendo a la tercera pregunta de investigación, hacemos un análisis del significado institucional pretendido para el objeto “problemas de optimización”. Comenzamos con una mirada al primer nivel de concreción del currículum que se halla en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCNEBR), y luego analizamos con detalle dos colecciones de libros de texto para secundaria que concretan dicho currículum, dedicando en ambos casos una atención especial a los problemas de optimización.

Además, presentamos un estudio realizado con alumnos ingresantes a la Pontificia Universidad Católica del Perú, acerca de las percepciones que ellos tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en secundaria. Dicho estudio es un indicador indirecto que nos da información de la brecha que hay entre la enseñanza planificada en los libros de texto (el significado pretendido en la terminología del EOS) y la enseñanza realmente implementada (el significado implementado en la terminología del EOS).

Nuestra tercera pregunta de investigación es: *¿Cómo están tratados los problemas de optimización en los libros de texto de matemáticas de secundaria en el Perú?* En la perspectiva del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, el análisis no puede reducirse a conceptos y procedimientos sino contemplar una ontología más amplia, formada por el lenguaje, las situaciones-problema, los conceptos, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos; así, no sólo queremos mostrar el vacío que existe con la poca presencia de problemas de optimización, sino hacer comentarios globales y en algunos casos específicos y adelantar algunas ideas que contribuyan a que se incluyan adecuadamente problemas de optimización en los textos, y en general para su uso en el diseño de unidades didácticas en la secundaria.

5.1. EL DISEÑO CURRICULAR DE MATEMATICA PARA SECUNDARIA EN EL PERÚ

El Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCNEBR) vigente en el Perú fue publicado en noviembre del 2005 por el Ministerio de Educación. Al presentar los programas curriculares, hacen una fundamentación para el área Lógico Matemática de primaria, en la cual destacan la importancia de la resolución de problemas.

> “la resolución de problemas, permitirá que el estudiante manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione y mejore un proceso de pensamiento. Esto exige que los docentes planteen situaciones que constituyan desafíos, de tal manera que el estudiante observe, organice datos, analice, formule hipótesis, reflexione, experimente, empleando diversas estrategias, verifique y explique las estrategias utilizadas al resolver el problema; es decir, valorar tanto los procesos como los resultados. La capacidad para plantear y resolver problemas, dado su carácter integrador, posibilita el desarrollo de otras capacidades, la conexión de ideas matemáticas, la interacción con otras áreas y con los intereses y experiencias de los estudiantes” (p. 123)

Similarmente, en la fundamentación que hacen al presentar los programas curriculares para el Área de Matemática de secundaria, destacan la importancia de la resolución de problemas, considerándola como una de las tres capacidades a desarrollar.

> "Es de suma importancia por su carácter integrador, ya que posibilita el desarrollo de otras capacidades. Resolver problemas posibilita el desarrollo de capacidades complejas y procesos cognitivos de orden superior que permiten una diversidad de transferencias y aplicaciones a otras situaciones y áreas; y en consecuencia, proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo. De allí que resolver problemas se constituye en el eje principal del trabajo en matemática; de este modo se posibilita, además, que se den cuenta de la utilidad de la matemática". (p. 165)

Por otro lado, las áreas temáticas para la secundaria, establecidas en el DCNEBR, por grado, son las que se muestran en el cuadro 5.1

Componente	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado
Numero, relaciones y funciones	El sistema de los números naturales	El sistema de números reales	Ecuaciones e inecuaciones	Funciones y progresiones	Introducción a la programación lineal
	El sistema de los números enteros	Polinomios	Sistema de ecuaciones lineales		Funciones exponencial y logarítmica
	El sistema de los números racionales				
Geometría y medida	Polígonos	Figuras y ángulos	Nociones básicas de geometría plana	Polígono y circunferencia	
	Transformaciones geométricas		Congruencia, perpendicularidad y paralelismo	Semejanza de triángulos de regiones poligonales y circulares	
				Razones trigonométricas en el triangulo rectángulo	Razones Trigonométricas
	Geometría del espacio: sólidos geométricos	Geometría del espacio: nociones básicas	Geometría del espacio: nociones básicas	Geometría del espacio: prisma y pirámide	Geometría del espacio: superficies de revolución
				Introducción a la geometría analítica plana. La recta	Introducción a la Geometría analítica plana, circunferencia, parábola y elipse
	Medida	Medida	Medida	Medida	Medida
Estadística y probabilidad	Estadística	Estadística	Estadística	Estadística	Estadística
	Probabilidad	Probabilidad	Probabilidad	Probabilidad	Probabilidad

CUADRO 5.1.
Áreas Temáticas para la Secundaria (Fuente: Ministerio de Educación, 2005)

En la revisión de este documento no hemos encontrado explícitamente la expresión “problemas de optimización”, equivalentes, o similares. Sólo hemos encontrado una alusión explícita a la optimización en el capítulo *Introducción a la Programación Lineal* que se considera para el quinto grado de secundaria (el último de la educación básica regular), en el componente del área denominado Número, Relaciones y Funciones, del cuadro de contenidos básicos (Pág. 168). Como se observa en dicha página los contenidos básicos de esta área temática son:

- Sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con dos variables.
- Determinación de la región factible.
- Valores máximos y mínimos en un polígono convexo.
- Métodos gráfico y analítico de optimización lineal.

Cabe mencionar que programación lineal es un tema muy vinculado con situaciones de la realidad, sin embargo no se sugiere – como se hace en el mismo documento para temas de geometría – “resolución y planteamiento de problemas vinculados con la realidad”; por otra parte, aparecen por primera vez y juntos, temas nuevos como sistemas de inecuaciones lineales de dos variables y la búsqueda de valores óptimos de funciones de dos variables. No se considera en grados anteriores temas y conceptos relacionados; por ejemplo, en el tercer grado se considera sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, pero no se considera explícitamente su representación gráfica ni la de inecuaciones lineales de dos variables; en el cuarto grado se incluye la recta, en una introducción a la geometría analítica plana, pero tampoco se consideran las regiones del plano determinadas por una recta; y en el cuarto grado se considera el tema funciones, pero no el de examinar si una función alcanza valores máximos o mínimos en su dominio o en un subconjunto de él. Así “Introducción a la programación lineal”, que brinda excelentes oportunidades de relacionar – no sólo de manera formal sino creativa e intuitivamente – ecuaciones e inecuaciones lineales de dos variables, funciones, geometría plana y geometría analítica, aparece aislado y sin sugerir un tratamiento intuitivo y aportando a ampliar la visión de los estudiantes sobre las múltiples aplicaciones de la matemática a la realidad.

Finalmente, regresando a una mirada global vinculada con problemas de optimización, destacamos que la ausencia de estos como parte de los significados pretendidos, a nivel del diseño curricular nacional para la educación básica, está muy relacionada con la casi nula presencia de problemas de optimización en los textos que veremos en el siguiente apartado y, en consecuencia, con la ausencia de problemas de optimización en las clases de matemáticas en la primaria y en la secundaria, lo cual también se verá reflejada cuando analicemos en la sección 5.4 las declaraciones de alumnos egresados de la secundaria sobre sus percepciones de la enseñanza y aprendizaje de temas de matemáticas en este nivel educativo.

5.2. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LIBROS DE TEXTO PARA SECUNDARIA EN EL PERÚ

Los buenos textos de matemáticas son instrumentos de gran apoyo en la tarea docente, pues presentan los contenidos con el rigor adecuado y organizados de manera apropiada, atractiva y hasta desafiante para el alumno. Los problemas son parte fundamental, tanto en los ejemplos explicados como en los propuestos. Es deseable y conveniente que se propongan problemas no rutinarios; enunciados con pasos que vayan orientando el análisis y la búsqueda de un camino para su solución; que se presenten secuencias de problemas, adecuadas según su dificultad; que se muestren íconos que indiquen la conveniencia del uso de calculadoras o computadoras; y – en la perspectiva de esta investigación – que se aprovechen las ocasiones que brindan los diversos temas que se tratan, para proponer y examinar problemas de optimización.

Hemos revisado minuciosamente dos colecciones de textos de matemáticas de los cinco años de secundaria usados en el Perú, buscando la presencia de problemas de optimización en sus diversos capítulos y entre los diversos tipos de problemas que proponen. Una colección es la que conforman los textos que distribuye el Ministerio de Educación a los colegios estatales (la llamaremos A) y la otra de una editorial bastante usada en centros educativos no estatales (la llamaremos B). Una revisión somera de otros textos nos hace ver que no hay diferencias sustanciales en cuanto al uso de problemas de optimización.

Grado	Colec-ción	Autor	Editorial	Año	Págs.	Capí-tulos	Total de problemas
1	A	Vera	El Nocedal	2004	247	6	792
	B	Veiga, et al	Santillana	2005	383	12	3922
2	A	Gómez, et al	Quipu	2004	207	8	820
	B	Veiga, et al	Santillana	2004	383	12	3439
3	A	Doroteo y Gálvez	El Nocedal	2005	192	7	562
	B	Veiga, et al	Santillana	2004	399	12	3730
4	A	Mina, Salcedo,	Santillana	2005	190	7	1682
	B	Veiga, et al	Santillana	2005	399	12	4119
5	A	Doroteo y Gálvez	El Nocedal	2005	190	6	496
	B	Veiga, et al	Santillana	2004	399	12	4145

CUADRO 5.2
Textos considerados para el análisis

En cada colección, para cada texto y grado, hemos hecho un análisis de la presencia de problemas de optimización en los textos revisados. También hemos seleccionado y comentado algunos de los problemas de optimización encontrados.

5.2.1. Análisis de la presencia de problemas de optimización en los textos revisados

Analizamos cuantitativamente, detallado por capítulos en cada grado, la presencia de problemas de optimización respecto al total de problemas en los textos seleccionados; luego hacemos comentarios en cada grado y unos comentarios finales.

5.2.1.1. Problemas de optimización en primer grado

Colección A

Capítulos	PO	Total de problemas	% de PO
Conjuntos	0	62	0.0
Números Naturales	16	122	13.1
Números enteros	0	92	0.0
Números racionales	1	233	0.4
Sólidos geométricos, simetría y medición	0	195	0.0
Estadística y probabilidades	0	88	0.0
Total	17	792	2.1

CUADRO 5.3
Número de problemas de optimización (PO) por capítulos en el texto de la colección A de primer grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (2,1% del total de problemas en el libro), están sólo en los capítulos de números naturales (13,1% del total de problemas en este capítulo, siendo el 59% de éstos sobre máximo común divisor o mínimo común múltiplo) y en el de números racionales (0,4% del total de problemas en este capítulo. Es un problema resuelto, usando una inecuación en los números enteros).

Colección B

Capítulos	PO	Total	% de PO
Conjuntos	0	324	0.0
Números Naturales	8	328	2.4
Números enteros	0	440	0.0
Números racionales	0	434	0.0
Expresiones algebraicas	0	360	0.0
Ecuaciones e Inecuaciones	12	347	3.5
Proporcionalidad numérica	0	384	0.0
Unidades de medida	0	269	0.0
Rectas y ángulos	0	278	0.0
Figuras planas	0	290	0.0
Funciones	0	228	0.0
Estadística y probabilidad	2	240	0.8
Total	22	3922	0.6

CUADRO 5.4
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección B de primer grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (0,6% del total de problemas en el libro, siendo el 86,4% de éstos, problemas propuestos como práctica, refuerzo y ampliación), están sólo en los capítulos de números naturales (2,4% del total de problemas en este capítulo); ecuaciones e inecuaciones (3,5% del total de problemas en este capítulo y 54,5% del total de problemas de optimización en el libro); y en el de estadística y probabilidad (0,8% del total de problemas en este capítulo.

Comentarios

a. Al trabajar con conjuntos, no se proponen problemas con conjuntos de números en los que se tenga que encontrar un valor máximo o un valor mínimo, "jugando" con los números bajo ciertas condiciones sencillas. Cuando se tiene un conjunto finito de números descrito "por extensión", es evidente cuál es el máximo y cuál es el mínimo; sin embargo, cuando está descrito "por comprensión", ya no es tan sencillo, según la condición que lo caracterice, y es posible proponer problemas desafiantes, usando los conocimientos que los estudiantes traen de la primaria. Parte del problema puede ser caracterizar bien al conjunto de números y cuando haya claridad en ello, determinar su máximo o su mínimo, según el caso, sin necesidad de pasar a describirlo "por extensión", ya sea por tener muchos elementos o por ser innecesario. En muchos problemas de optimización, tal es la situación.

b. Los capítulos relacionados con los números naturales, enteros y racionales brindan excelentes ocasiones para proponer problemas de optimización, con el uso inteligente de la numeración de posición para encontrar el mayor o el menor número como resultado de una operación con números construidos con dígitos dados, con el uso adecuado de inecuaciones con números racionales, planteando situaciones que lleven al convencimiento de la inexistencia de un valor máximo o mínimo en determinados conjuntos de números claramente determinados "por comprensión", etc. En los pocos problemas resueltos que se presentan buscando un máximo o un mínimo, la solución es práctica, sin examinar las diversas posibilidades y sin analizar si el valor obtenido es óptimo.

c. La geometría, desde la más elemental, brinda ocasiones para proponer situaciones de optimización; más aún tratando temas vinculados con áreas y con medición. Por lo menos, podría introducirse, con situaciones lúdicas, la idea de buscar rectángulos de área máxima con perímetro dado.

d. En los temas introductorios de estadística y probabilidades no se enfatiza en los valores máximo y mínimo que se presentan en los gráficos ni se emplean expresiones como "a lo más", o "por lo menos", que son frecuentes en la vida diaria y que muchas veces se usan erradamente.

5.2.1.2 Problemas de optimización en segundo grado

Colección A

Capítulo	PO	Total	% de PO
Números reales	1	77	1.3
Potenciación y radicación en R	0	149	0.0
Expresiones algebraicas y operaciones	0	116	0.0
Productos y cocientes notables. Factorización	0	92	0.0
Proporcionalidad numérica	0	161	0.0
Ecuaciones e Inecuaciones de primer grado	7	87	8.0
Medidas y geometría	0	98	0.0
Estadística y probabilidad	1	40	2.5
Total	9	820	1.1

CUADRO 5.5
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección A de segundo grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (1,1% del total de problemas en el libro), están sólo en tres capítulos: números reales (1,3% del total de problemas en este capítulo. Es un problema lúdico, para resolverlo grupalmente y con calculadora); ecuaciones e inecuaciones de primer grado (8 % del total de problemas en este capítulo y el 77,8% del total de problemas de optimización del libro); y estadística y probabilidades (2,5% del total de problemas en este capítulo. Es un problema resuelto, interesante pero aislado al ser el único en el capítulo).

Colección B

Capítulos	PO	Total	% de PO
Conjuntos. Sistemas de numeración	0	240	0.0
Números racionales	0	324	0.0
Números reales	1	381	0.3
Proporcionalidad numérica	0	239	0.0
Expresiones algebraicas	0	390	0.0
Factorización	0	341	0.0
Ecuaciones e Inecuaciones	13	227	5.7
Ecuaciones de segundo grado	0	345	0.0
Geometría	1	283	0.4
Proporcionalidad geométrica	0	199	0.0
Relaciones y Funciones	1	175	0.6
Estadística y Probabilidad	0	295	0.0
Total	17	3439	0.5

CUADRO 5.6
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección B de segundo grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (0,5% del total de problemas en el libro) están en los capítulos de números reales (0,3% del total de problemas en este capítulo); ecuaciones e inecuaciones (5,7% del total de problemas en este capítulo y el 76,5% del total de problemas de optimización en el libro); geometría (0,4% del total de problemas en este capítulo); y relaciones y funciones (0,6% del total de problemas en este capítulo).

Comentarios

a. Un tema central en el segundo grado es el capítulo de números reales, y si bien es cierto que no es la ocasión de introducir el axioma del supremo, con el cual se establece la diferencia fundamental entre la estructura del conjunto de números reales y la de los números racionales, sí podría trabajarse con problemas de determinación de valores máximos o mínimos de conjuntos, que proporcionen experiencias relacionadas con el supremo y el ínfimo de conjuntos acotados.

b. Respecto al capítulo de conjuntos (Texto de la colección B), de geometría, y de estadística y probabilidades, son igualmente pertinentes los comentarios hechos para el primer grado.

c. En ambos libros, en el capítulo que más problemas de optimización se encuentran es en el de ecuaciones e inecuaciones (6 de 9 en total en el de la colección A y 13 de 17 en total en el de la colección B); sin embargo hay situaciones forzadas y en sentido estricto sin solución, como en el siguiente problema

> Los vehículos de reparto de una empresa de transporte permanecen siempre a una distancia de la central de distribución por el valor de x en la expresión: $3x + 6 < 210$ km. ¿Cuál es la distancia máxima a la central en la que se puede encontrar un vehículo de reparto?
>
> (Colección B, p. 221, No. 112)

Al resolver la inecuación se obtiene $x < 68$, y la respuesta que se da en el libro como correcta es 67 km, a pesar de que ya se estudió el capítulo de números reales. La respuesta es incorrecta, pues el conjunto de los números reales menores que 68 no tiene un máximo. Tiene un supremo, que es 68, y que no es elemento del conjunto. La respuesta dada sería correcta si se pidiera un número entero de kilómetros. Ciertamente, es preferible plantear situaciones intramatemáticas si no se encuentran contextos adecuadamente modelizados y se debe tener mucho cuidado al dar las respuestas, pues se pueden inducir a crear concepciones equivocadas o criterios erróneos de simplificación. Cabe mencionar también que se debe ser muy cuidadoso con la redacción.

En los problemas de este capítulo no se encuentran situaciones con expresiones “a lo más”, o “por lo menos”, muy usadas en el lenguaje coloquial y cuya expresión formal correcta en cada contexto particular es importante para los problemas de optimización.

5.2.1.3 Problemas de optimización en tercer grado

Colección A

Capítulos	PO	Total	% de PO
Nociones de lógica	0	85	0.0
Ecuaciones e Inecuaciones	0	80	0.0
Sistemas de ecuaciones lineales	0	91	0.0
Geometría plana	1	98	1.0
Triángulos	3	68	4.4
Estadística	0	66	0.0
Probabilidades	0	74	0.0
Total	4	562	0.7

CUADRO 5.7
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección A de tercer grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (cuatro problemas, que son el 0,7% del total de problemas en el libro), están sólo en dos capítulos: Geometría plana (un problema, que es el 1% del total de problemas en este capítulo); y Triángulos (tres problemas, que son el 4,4% del total de problemas en este capítulo y el 75% del total de problemas de optimización del libro).

Colección B

Capítulos	PO	Total	% de PO
Números reales. Operaciones	0	382	0.0
Expresiones algebraicas	1	366	0.3
Factorización. Fracciones algebraicas	0	399	0.0
Matrices. Sistemas de ecuaciones lineales	0	308	0.0
Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado	11	352	3.1
Figuras planas y cuerpos geométricos	0	321	0.0
Relaciones métricas	0	225	0.0
Semejanza. Trigonometría	1	299	0.3
Funciones	13	225	5.8
Sucesiones y progresiones	0	307	0.0
Estadística	0	168	0.0
Lógica. Probabilidad	1	378	0.3
Total	27	3730	0.7

CUADRO 5.8
Número de problemas de optimización (PO) por capitulo en el texto de la colección B de tercer grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (27 problemas, que son el 0,7% del total de problemas en el libro) están en los capítulos de Expresiones algebraicas (un problema, que es el 0,3% del total de problemas en este capítulo); Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado (11 problemas, que son el 3,1% del total de problemas en este capítulo); Semejanza y trigonometría (un problema, que es el 0,3% del total de problemas en este capítulo); Funciones (13 problemas, que son el 5,8% del total de problemas en este capítulo); y Lógica y Probabilidad (un problema, que es el 0,3% del total de problemas en este capítulo).

Comentarios

a. Respecto a las inecuaciones lineales, siguen siendo pertinentes los comentarios para grados anteriores. Sin embargo, en este grado ya se tratan las inecuaciones de segundo grado y al resolverlas completando cuadrados, y aun graficando la función cuadrática asociada, no se hace mención a los valores máximo o mínimo que puede alcanzar, como consecuencia de ser una suma de un binomio al cuadrado y una constante, lo que favorece un manejo más analítico y menos algorítmico, o por lo menos interpretar y verbalizar expresiones formales con desigualdades y encontrar vinculaciones claras entre lo gráfico y lo algebraico.

b. Al estudiar funciones (texto de la colección B) se presta atención a los valores extremos que puede alcanzar una función. Se menciona que pueden tener valores máximos y mínimos, pero sólo para los casos correspondientes a elementos interiores de su dominio. Esto se retoma al presentar las funciones cuadráticas, pero sin tener un enfoque como el anotado en el comentario anterior. No se mencionan el valor extremo que tiene cada función valor absoluto que se presenta, y en ninguna ocasión se plantean situaciones de búsqueda de valores óptimos en los extremos de un intervalo en el que esté definida una función de alguno de los tipos que se estudian.

c. En el capítulo de Estadística y probabilidades, en el texto de la colección B se presenta un único problema de optimización, propuesto, y entre los que son extraídos de exámenes de admisión a universidades. Es un buen problema:

   > En una academia se hizo un simulacro de examen y el promedio de 30 estudiantes fue 950 puntos. Si ninguno de ellos obtuvo menos de 948 puntos, cuál es el máximo puntaje que pudo obtener algún estudiante?
   >
   > (Colección B, p. 397, No. 23)

   Habría sido muy ilustrativo examinarlo y resolverlo. Lamentablemente queda aislado, como lo fue otro similar propuesto y desarrollado en el libro de la colección A del segundo grado.

d. Los temas de geometría no son adecuadamente aprovechados para examinar problemas de optimización. Por ejemplo, en el problema 1 (resuelto) de la página 135 del libro de la colección A, se pide encontrar el menor valor entero que puede tomar la suma de las distancias desde un punto interior de un triángulo, de lados conocidos, a cada uno de los tres vértices. Con una aplicación mecánica de la desigualdad triangular se resuelve fácilmente el problema, pero se pierde la oportunidad de preguntar y examinar cuál sería el mayor valor entero que podría tomar esa suma, lo cual invita a reflexionar sobre cotas superiores de conjuntos, rangos de valores posibles, y a observar detenidamente la situación planteada. Además, el problema podría presentarse contextualizado.

También hay que destacar que son muy pocos los problemas de optimización que se presentan en total en ambos libros.

5.2.1.4 Problemas de optimización en cuarto grado

Colección A

Capítulos	PO	Total	% de PO
Funciones y progresiones	5	356	1.4
Polígonos y circunferencia	0	160	0.0
Semejanza y área de regiones	0	224	0.0
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo	0	263	0.0
Poliedros: Prisma y pirámide. Medida	0	215	0.0
La recta	0	187	0.0
Estadística y probabilidades	0	277	0.0
Total	5	1682	0.3

CUADRO 5.9
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección A de cuarto grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (5 problemas, que son el 0,3% del total de problemas en el libro), están sólo en el capítulo de Funciones y progresiones (5 problemas, que son el 1,4% del total de problemas en este capítulo).

Colección B

Capítulos	PO	Total	% de PO
Lógica proposicional y conjuntos	0	331	0.0
Números reales y complejos	1	555	0.2
Ecuaciones e inecuaciones	5	324	1.5
Funciones	0	438	0.0
Elementos de geometría	0	269	0.0
Polígonos	0	309	0.0
Circunferencia	0	263	0.0
Proporcionalidad geométrica	2	321	0.6
Cuerpos geométricos	0	279	0.0
Trigonometría. Geometría analítica	1	422	0.2
Análisis combinatorio y probabilidad	0	381	0.0
Distribuciones estadísticas	1	227	0.4
Total	10	4119	0.2

CUADRO 5.10
Número de problemas de optimización (PO) por capítulo en el texto de la colección B de cuarto grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (10 problemas, que son el 0,2% del total de problemas en el libro) están en los capítulos de Números reales y complejos (un problema, que es el 0,2% del total de problemas en este capítulo); Ecuaciones e inecuaciones (5 problemas, que son el 1,5% del total de problemas en este capítulo y el 50% del total de problemas de optimización del libro); Proporcionalidad geométrica (2 problemas, que son el 0,6% del total de problemas en este capítulo); Trigonometría y geometría analítica (un problema, que es el 0,2% del total de problemas en este capítulo); y Distribuciones estadísticas (un problema, que es el 0,4% del total de problemas en este capítulo).

Comentarios

a. En el capítulo Funciones y progresiones de la colección A, se tratan los temas Función lineal afín, Función cuadrática y Función raíz cuadrada de manera totalmente similar a como se tratan en el texto de la colección B del tercer grado. Prácticamente es una trascripción, que incluye los problemas y en consecuencia los comentarios sobre estos son los mismos que los formulados en el punto (b) del tercer grado. Tratándose ahora del cuarto grado, se esperaría con mayor razón un tratamiento que supere las omisiones anotadas para el tercer grado y que tenga algunos avances en calidad y cantidad de problemas.

b. En la sección Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, del texto de la colección B, se presenta como primer ejemplo un problema desarrollado de programación lineal con dos variables y cuatro restricciones (p. 94). Es buena la idea de relacionar este tema con la programación lineal, pero no debería hacerse de manera tan repentina y sin explicación alguna a la búsqueda de los valores óptimos de la función objetivo calculando sus valores en los vértices de la región poligonal. No se trata explícitamente la representación en el plano de la innegatividad de las variables, que es un aspecto propio del tema de inecuaciones y fundamental para obtener la región poligonal correspondiente al problema.

c. Los temas de geometría e introducción a la trigonometría son centrales en este grado y ofrecen múltiples ocasiones para problemas de optimización, que están ausentes en los textos examinados. En el de la colección B se proponen dos en geometría y uno en trigonometría, sobre distancias mínimas.

5.2.1.5 Problemas de optimización en quinto grado

Colección A

Capítulos	PO	Total	% de PO
Número, relaciones y funciones	22	41	53.7
Funciones exponencial y logarítmica	0	82	0.0
Razones trigonométricas	3	167	1.8
Geometría del espacio	0	71	0.0
Introducción a la geometría plana	1	63	1.6
Estadística y probabilidad	0	72	0.0
Total	26	496	5.2

CUADRO 5.11
Número de problemas de optimización (PO) por capitulo en el texto de la colección A de quinto grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (26 problemas, que son el 5,2% del total de problemas en el libro), están mayoritariamente en el capítulo de Introducción a la programación lineal (Hay 22 problemas, que son el 84,6% del total de problemas de optimización en el libro y el 53,7% del total de problemas en este capítulo). En el capítulo de Razones trigonométricas hay 3 problemas (el 1,8% del total de problemas en este capítulo) y en el capítulo de Introducción a la geometría plana hay 1 problema (el 1,6% del total de problemas en este capítulo).

Colección B

Capitulo	PO	Total	% de PO
Del número real al número complejo	0	489	0.0
Álgebra	0	384	0.0
Análisis combinatorio y probabilidad	0	334	0.0
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo	0	372	0.0
Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud	0	283	0.0
Identidades y funciones trigonométricas	0	422	0.0
Vectores y rectas en el plano	1	362	0.3
Secciones cónicas	2	327	0.6
Funciones	3	377	0.8
Introducción al análisis	0	423	0.0
Estadística	0	169	0.0
Programación lineal	73	203	36.0
Total	79	4145	1.9

CUADRO 5.12
Número de problemas de optimización (PO) por capitulo en el texto de la colección B de quinto grado de Secundaria

Los escasos problemas o situaciones de optimización que se presentan (79 problemas, que son el 1,9% del total de problemas en el libro) están mayoritariamente en el capítulo de Programación lineal (hay 73 problemas, que son el 92,4% del total de problemas de optimización en el libro). Los otros 6 problemas están en los capítulos de Vectores y rectas en el plano (1 problema, que es el 0,3% del total de problemas en este capítulo); Secciones cónicas (2 problemas, que son el 0,6% del total de problemas en este capítulo); y Funciones (3 problemas, que son el 0,8% del total de problemas en este capítulo).

Comentarios

a. Las ecuaciones de segundo grado no se resuelven vinculándolas con las funciones cuadráticas. No se presenta el método de expresarla usando un binomio al cuadrado, que da ocasión a examinar valores máximo o mínimo obtenibles.

b. Al estudiar las parábolas con eje focal vertical, no se vinculan con las funciones cuadráticas ni se hace alusión alguna a los valores máximo y mínimo que pueden alcanzar.

c. Al estudiar funciones, no se hace mención especial a las funciones cuadráticas y a su característica de alcanzar valores máximos o mínimos.

d. Al tratar las funciones seno y coseno podrían mencionarse y luego usarse sus valores máximo y mínimo, ilustrando gráficamente. No se usa ni se menciona la desigualdad tan importante y sencilla $|sen\ x| \leq 1$ para todo valor real de *x*.

e. El tema Introducción a la Programación Lineal es el que más problemas de optimización tiene en ambos libros. En los ejemplos de solución de problemas se da un conjunto de reglas para hallar el punto maximizante de la región factible, sin una reflexión sobre lo que significa hallar el máximo o el mínimo de una función lineal de dos variables en un determinado conjunto de puntos posibles. El problema puede plantear una situación contextualizada interesante, pero la solución se obtiene siguiendo ciertas reglas, sin estimular la intuición y sin evidenciar las relaciones con el contexto. No abundamos en comentarios, pues ya hemos hecho algunos en la sección 5.1 y los hacemos más ampliamente en el apartado 5.3.2.

5.2.1.6 Comentarios finales

1. Hay una presencia muy reducida de problemas de optimización en todos los grados de secundaria.
2. Los diversos temas que se desarrollan brindan ocasiones que no son aprovechadas para proponer problemas interesantes de optimización.
3. Cuando se usan las palabras mínimo y máximo no se hace tomar conciencia de lo que eso significa en el contexto que se está usando.

4. En el aspecto de resolución de problemas, se presenta un enfoque que brinda al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, que estimulen su intuición y creatividad.

En general, consideramos que en los textos revisados está presente la concepción de una matemática con "productos" acabados y con muchas reglas que aprender; que el papel fundamental de los problemas es aplicar conocimientos y no ser puntos de partida para descubrirlos o construirlos; y que predomina el criterio de poner a disposición del alumno muchos problemas para que se prepare para las evaluaciones – y en particular para los exámenes de admisión en las universidades – adquiriendo práctica en el uso de reglas, recomendaciones y algoritmos, y no el criterio de usar los problemas para desarrollar la capacidad de análisis, la creatividad, la intuición y en general el pensamiento matemático. Esto se percibe también en la clasificación de los problemas que figuran en algunos libros ("razonamiento matemático", "preguntas de ingreso a la universidad").

5.2.2 Algunos problemas de optimización encontrados en los textos

A continuación copiamos algunos de los problemas de optimización propuestos en los textos revisados, que son una muestra concreta de que, aunque escasos, ya se proponen problemas de optimización en diversos temas y grados de la secundaria. La mayoría de los problemas propuestos podrían ser calificados como rutinarios, pero hemos seleccionado los que consideramos tienen mejores condiciones para ser potenciados didácticamente por los profesores, trabajándolos en grupos, examinando diversas maneras de resolverlos y buscando generalizaciones, modificaciones o contextualizaciones ilustrativas. Por ejemplo, el problema del triángulo puede contextualizarse, considerando instalaciones eléctricas o de agua, que lleguen a tres puntos, partiendo de un punto interior de la región triangular e invitar a pensar en la ubicación del punto y en los casos en los que se tenga otro polígono.

Ideas y formas concretas sobre cómo usar didácticamente diversos problemas, y en particular problemas de optimización, pueden encontrarse en Malaspina (2005b, 2006b, 2007b).

Problemas de resolución aritmética:

1. Halla el máximo valor que puede tomar $\overline{abcd}$, si:

   $\overline{aaa} + b = \overline{acd}$; $(a \neq b \neq c \neq d)$.

   (Colección B, 2º grado, p. 107, problema 8)

2. En una urna hay 13 fichas verdes, 15 azules, 19 rojas y 10 blancas. ¿Cuál es el mínimo de fichas que hay que extraer para tener la seguridad de haber sacado 13 fichas de uno de los colores?

   (Colección B, 5º grado, p. 398, problema 18; pregunta de ingreso a la universidad)

3. En una academia se hizo un simulacro de examen y el promedio de 30 estudiantes fue 950 puntos. Si ninguno de ellos obtuvo menos de 948 puntos, cuál es el máximo puntaje que pudo obtener algún estudiante?

   (Colección B, p. 397, No. 23, pregunta de ingreso a la universidad)

Problemas de resolución algebraica:

1. En un campeonato participan 16 equipos. Si se juegan dos ruedas y el campeón absoluto resultó con 88 puntos, ¿Cuál es el máximo número de partidos empatados?

   Nota: A partido ganado corresponden 3 puntos y a partido empatado 1 por equipo.

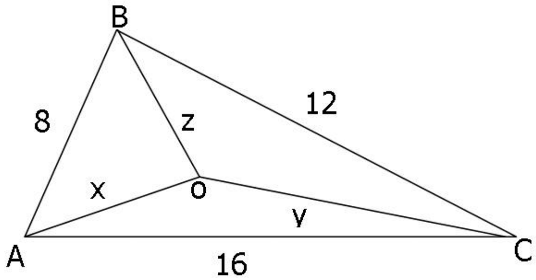
   (Colección B, 4º grado, p. 398, problema 17; pregunta de ingreso a la universidad)

2. ¿Cuál es el mayor número entero cuyo doble aumentado en 8 es menor que 5?

   (Colección A, 1er grado, p. 106, problema 8)

Problemas de resolución geométrico-algebraica:

2. En el triángulo con lados 8, 12, 16. ¿Cuál es el menor valor entero que puede tener x + y + z?



(Colección A, 3er. grado, p. 135, problema 1)

Problemas de resolución gráfico-algebraica:

1. Determina el máximo valor de

   a. $y = \text{sen}(x)$

   b. $y = 2 - 3\text{sen}(x)$

   c. $y = 1 - \cos(x)$

   (Colección A, 5º grado, p. 104, problema 8)

2. (Programación lineal)

   Una persona desea programar una dieta con dos tipos de alimentos: A y B. Cada unidad del alimento A contiene 250 calorías y 20 gramos de proteínas. La unidad del alimento B contiene 300 calorías y 10 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 1200 calorías y 60 gramos de proteínas diarias. El precio de cada unidad del alimento A es de S/. 6 y el de cada unidad del alimento B es de S/. 5. ¿Cuántas unidades de cada alimento debe contener la dieta para minimizar el costo?

   (Colección B, 5º grado, p. 389, problema 58)

Cabe mencionar que en los exámenes de admisión a las universidades se encuentran interesantes problemas de optimización. Un estudio minucioso y comparativo con los problemas que hay en los textos de secundaria, sería materia de otra investigación complementaria a la presente.

5.3. ANÁLISIS EPISTÉMICO DE ALGUNOS TEMAS VINCULADOS CON PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

La revisión hecha en el apartado anterior nos ha permitido ver también la forma en que son tratados algunos temas particularmente importantes en la perspectiva de esta investigación, por su vinculación con problemas de optimización. Considerando que los textos reflejan parte del significado institucional atribuido a los problemas de optimización, a continuación usaremos la herramienta teórica “configuración epistémica” para examinar globalmente la forma en que en estos textos se tratan Funciones, Introducción a la Programación Lineal, y Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Usando la terminología de Font y Godino 2007, en general percibimos que en ambas colecciones de textos se reflejan configuraciones epistémicas “formalistas”, en el sentido de revelar un enfoque adaptado – sin tener el rigor correspondiente – de textos universitarios que expresan una perspectiva fundamentalmente axiomática.

En términos generales, en las entidades básicas de las configuraciones epistémicas correspondientes, observamos lo siguiente:

Lenguaje:

Predominan expresiones verbales y simbólicas; son escasos los gráficos.

Situaciones:

Predominan los problemas descontextualizados, los ejemplos y los problemas propuestos. El énfasis no es orientar el descubrimiento o reconstrucción de los conceptos que se tratan, ni de estimular una aproximación intuitiva a la solución

Conceptos:

Se usan conceptos previos y se definen los nuevos de manera descontextualizada.

Proposiciones:

Se dan propiedades o teoremas como propiedades, generalmente sin demostrar.

Procedimientos:

Se describen o explican algoritmos para obtener resultados o criterios para reconocer definiciones. Se ejemplifican técnicas. No se estimula el uso creativo de procedimientos ya conocidos, el reconocimiento de la insuficiencia de ellos o la creación de procedimientos propios.

Argumentos:

Ejemplifican los algoritmos. Hay algunas deducciones a partir de las definiciones.

5.3.1. Funciones

Funciones es un tema esencial en la matemática – en particular en la optimización – y en consecuencia lo es también su enseñanza y aprendizaje. Se han hecho muchas investigaciones sobre este tema y en la presente sólo usaremos las configuraciones epistémicas para hacer un análisis global y evidenciar algunos aspectos esenciales, encontrados en las dos colecciones de textos examinadas, sobre todo los aspectos más vinculados con los problemas de optimización en la educación secundaria, como las funciones cuadráticas. Encontramos capítulos o partes de capítulos dedicados a funciones en los textos correspondientes a primero, cuarto y quinto grado en la colección A y en los correspondientes a primero, tercero y cuarto grado en la colección B.

Como hemos dicho, las configuraciones epistémicas son de tipo formal, con las características anotadas anteriormente, que se ven más nítidamente en este caso. Veamos más específicamente:

Lenguaje: Las expresiones verbales van acompañadas de gráficos y de símbolos del lenguaje conjuntista. También se presentan tablas con valores de las variables. *Situaciones:* Predominan los problemas propuestos y descontextualizados. Los problemas contextualizados que hay – vinculados con optimización – casi todos tienen ya una función cuadrática definida, con lo cual la solución del problema de optimización se reduce a aplicar un algoritmo o una fórmula para obtener el vértice de una parábola. *Conceptos:* Conceptos previos: conjuntos, producto cartesiano, correspondencia, plano cartesiano, variable. Se define formalmente una función. Gráfico de una función, dominio, rango. Tipos de funciones. Máximos y mínimos. Operaciones con funciones *Proposiciones:* Se enuncia propiedades de las operaciones de adición y multiplicación de funciones. *Procedimientos:* Se describe técnicas para reconocer funciones y tipos de funciones. También para graficar funciones. *Argumentos:* Se explica los ejemplos. No hay demostraciones.

Consideramos que en una presentación conjuntista muy formal de las funciones, como subconjunto de un producto cartesiano, se pierden aspectos intuitivos fundamentales para su comprensión y aplicaciones. Los problemas contextualizados deberían servir de base para la "construcción" del concepto de función, con trabajos en grupo y orientaciones adecuadas del profesor, y en los textos deberían proponerse situaciones-problema que favorezcan este tipo de trabajo, más que el manejo formal de la notación en situaciones artificiosas.

La función cuadrática es la más vinculada con los problemas de optimización y en su desarrollo podemos encontrar un lenguaje formal, desde su presentación descontextualizada. Se afirma inmediatamente, sin argumentos de ningún tipo, que su representación gráfica es una parábola (sin haber introducido antes lo que es una parábola); que la función alcanza un máximo o un mínimo en el vértice de la parábola; y se usa innecesariamente expresiones como "concavidad" y "continuas" (Colección A, cuarto grado, p. 21; Colección B, tercer grado, p. 288).

Se presenta una situación-problema contextualizada (Colección A, cuarto grado, p. 23; Colección B, tercer grado, p. 291), con el propósito de ilustrar que se modeliza con una función cuadrática y que es importante la obtención de un valor maximizante. Ciertamente la intención es buena, pero la situación no es muy motivadora, en la perspectiva del estudiante, pues se pide encontrar "la cantidad de estudiantes que debe ir a una excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio".

A continuación reproducimos la página con la situación-problema y la solución, y hacemos algunos comentarios.

Análisis de problemas sobre funciones cuadráticas

Muchas situaciones requieren de la aplicación de las funciones cuadráticas para poder solucionarlas. Frecuentemente es necesario averiguar en qué condiciones estas funciones alcanzan un valor **máximo** o un valor **mínimo**.

Ejemplo 19

Los alumnos de un colegio quieren ir de excursión. Una empresa de turismo les cobra S/. 70 por persona si van 40 alumnos y les rebaja S/. 1 por persona por cada alumno adicional. Además, acepta que viajen 65 alumnos como máximo y no la organiza si viajan menos de 40. Determinamos la cantidad de alumnos que deben ir de excursión para que la empresa de turismo realice el mejor negocio.

- Elaboramos una tabla para obtener una expresión que nos permita hallar el precio total que cobra la empresa de turismo según la cantidad de alumnos que van de excursión.

Cantidad total de alumnos		Precio por alumno (S/.)	Precio total (S/.) → $f(x)$
Si van 40 alumnos:	40	70	40 · 70
Si va 1 alumno más:	40 + 1	70 – 1	(40 + 1)(70 – 1)
Si van 2 alumnos más:	40 + 2	70 – 2	(40 + 2)(70 – 2)
Si van 3 alumnos más:	40 + 3	70 – 3	(40 + 3)(70 – 3)
Si van x alumnos más:	40 + x	70 – x	(40 + x)(70 – x)

Observamos que el precio total depende de la cantidad de alumnos x que vayan.

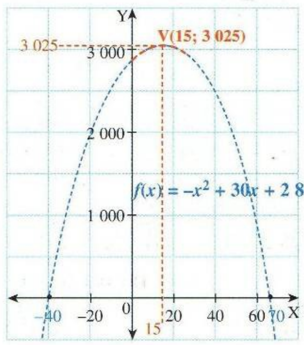
- Resolvemos $f(x) = (40 + x)(70 - x)$ y obtenemos $\mathbf{f(x) = -x^2 + 30x + 2\,800}$.
- Como queremos averiguar el mayor precio total que puede cobrar la empresa de turismo por la excursión, buscamos el **máximo** de la función.
- Como la cantidad total de alumnos no puede ser mayor que 65, averiguamos la cantidad de alumnos x que podrían ir:

$40 + x \leq 65 \rightarrow x \leq 25 \rightarrow D(f) = [0; 25]$ alumnos

- Hallamos los puntos de intersección de la parábola con el eje X:

$$x = \frac{-(30) \pm \sqrt{(30)^2 - 4(-1)(2\,800)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-30 \pm 110}{-2} \rightarrow x_1 = -40 \text{ y } x_2 = 70$$



- Hallamos la abscisa del vértice:

$$x = \frac{-40 + 70}{2} = 15$$

- Hallamos la ordenada del vértice:

$f(15) = -(15)^2 + 30(15) + 2\,800 = 3\,025$

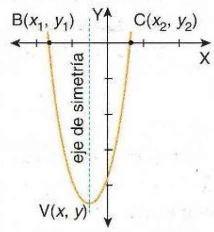
Entonces el punto máximo de la función es V(15; 3 025), vértice de la parábola.

- Interpretamos: El mayor precio total (S/. 3 025) se puede cobrar cuando viajan 15 alumnos más.

Para que la empresa de turismo realice el mejor negocio, deberán ir de excursión 40 + 15 = 55 alumnos. En este caso, obtendrían S/. 3 025.

Sean B(x_1, y_1) y C(x_2, y_2) los puntos de intersección de la parábola con el eje X. La abscisa del vértice es la semisuma de los valores x_1 y x_2, ya que la parábola es simétrica con respecto a su eje.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



Comentarios:

1. En general se percibe un procedimiento formal y rígido.
2. La inducción que se hace para obtener la expresión general de la función cuadrática correspondiente, la consideramos adecuada.
3. La descripción de la variable x no corresponde con el uso que se hace de esta variable en la tabla para inducir la función. La variable x no representa "la cantidad de alumnos que vayan", como se dice a continuación del cuadro, sino la cantidad adicional de alumnos, sobre 40, que podrían ir a la excursión. (Como se dice respecto al valor maximizante, 15, en los párrafos finales).
4. El valor maximizante de la variable se obtiene usando la propiedad de ser semisuma de las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje X. Propiedad cierta pero innecesaria, en este caso, que se enuncia al margen, sin argumento alguno. Para hallar tales puntos de intersección se resuelve la ecuación cuadrática empleando la fórmula general, a pesar de que la forma original de la función es un producto de dos binomios de primer grado, lo cual permite obtener inmediatamente las raíces de la ecuación cuadrática.
5. Consideramos que para ilustrar que la función alcanza un valor máximo para un determinado valor de la variable, es más adecuado expresar la función cuadrática completando un binomio al cuadrado:

$$f(x) = -x^2 + 30x + 2800 = 3025 - (x - 15)^2$$

   Así, siendo $(x - 15)^2 \geq 0$, a 3025 "siempre se le quita algo" salvo que tenga el valor cero; es decir, cuando $x = 15$, que es, entonces, el valor maximizante de la variable. De este modo, se observa que el valor máximo alcanzable por $f(x)$ es 3025.
6. Antes de hacer un desarrollo formal para la obtención del valor máximo, sería ilustrativo y estimulante de la intuición optimizadora, hacer conjeturas sobre la existencia de un valor maximizante o minimizante de la variable. Observar en el contexto del problema, mostrando tablas y haciendo gráficas, por ejemplo, que al dar valores crecientes a la variable los valores crecen y luego decrecen, lo cual hace intuir un valor maximizante que se puede conjeturar e ir aproximando. Así se brindaría

oportunidades para usar el ensayo y error, el cálculo mental y la calculadora, y para mostrar las ventajas de la modelización y de los recursos algebraicos.

La función valor absoluto también es apropiada para determinar y mostrar valores extremos. Encontramos un problema en el que se alude al mínimo de esta función, (colección B, cuarto grado, p. 28).

Ejemplo 29

Analizamos y graficamos la función $y = |x + 3| - 1$.

- Usamos la definición de función valor absoluto:

$$y = |x+3| - 1 = \begin{cases} x + 3 - 1, \text{ si } x + 3 \geq 0 \rightarrow x + 2; \text{ si } x \geq -3 \\ -(x+3) - 1, \text{ si } x + 3 < 0 \rightarrow -x - 4, \text{ si } x < -3 \end{cases}$$

- Hallamos el punto de intersección con el eje Y, cuando $x = 0$:

$$y = |0 + 3| - 1 = 3 - 1 \rightarrow y = 2$$

El punto de intersección con el eje Y es (0; 2).

- Hallamos los puntos de intersección con el eje X, cuando $y = 0$:

$$|x + 3| - 1 = 0 \rightarrow |x + 3| = 1 \begin{cases} x + 3 = 1 \rightarrow x = -2 \\ x + 3 = -1 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje X son (–2; 0) y (–4; 0).

- Al ubicar en el plano cartesiano los puntos de intersección con los ejes, deducimos que la gráfica se abre hacia arriba, y por tanto, tiene un punto mínimo.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2...
y	1	0	–1	0	1	2	3	4...

- Hallamos el punto mínimo de la función, haciendo que $|x + 3| = 0$:

Abscisa: $|x + 3| = 0$

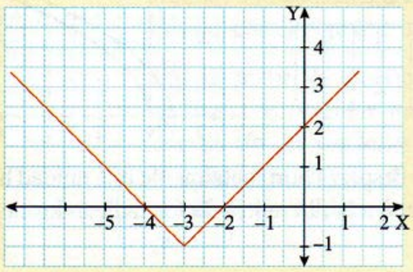
$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

Ordenada: $y = |x + 3| - 1$

$$= 0 - 1 \rightarrow y = -1$$

El punto mínimo es (–3; –1).

- En el gráfico notamos que el dominio es el conjunto de los números reales y el rango es $R(f) = [-1; \infty[$.



28

Podemos ver que para hallar el “punto mínimo” se usa un procedimiento sin argumento explícito. No se dice por qué para obtener el valor de la variable que minimiza la función se iguala a cero la expresión | x + 3|. Al no dar una razón – que es fácil intuirla – el alumno podría hacer lo mismo si la función fuera $f(x) = |x^2 + 3| - 1$ y concluir que la función no tiene mínimo porque $x^2 + 3 = 0$ no tiene solución real. Otra vez, el mensaje es aprender y aplicar técnicas mecánicamente, y se pierde la oportunidad de ejercitar la intuición y de hacer un análisis de la expresión algebraica que define la función y su correspondiente representación gráfica. (En la función $y = | x + 3| - 1$ del texto, al número -1 siempre "se le añade algo" por ser $| x + 3|$ mayor o igual que cero y entonces es natural que su valor mínimo sea -1, que ocurre cuando "se le añade lo menos posible", que en este caso es cero. Con esta interpretación, en la función $f(x) = | x^2 + 3| - 1$, lo menos que se le puede añadir a -1 es 3, pues $x^2 + 3 \geq 3$. Esto ocurre cuando $x = 0$ y se puede verificar que el mínimo valor de la función es 2, que es el mismo que corresponde al expresar la función como una cuadrática: $f(x) = x^2 + 2$, al prescindir del valor absoluto, por ser $x^2 + 3 \geq 0$.)

Ciertamente, no sólo al tratar la función cuadrática o la función valor absoluto pueden plantearse situaciones relacionadas con problemas de optimización. Algunas de ellas pueden ser examinar el carácter creciente o decreciente de funciones, definidas en conjuntos finitos de números o en intervalos, y determinar o conjeturar la existencia de valores máximos o mínimos en subconjuntos de sus dominios, usando tablas de valores y representaciones gráficas. Esto puede hacerse con funciones lineales, valor absoluto, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y con todas las funciones que se estudian en la secundaria. Teniendo en cuenta el teorema de Weierstrass[1] (obviamente sin enunciarlo) se pueden plantear diversas situaciones con cumplimiento y con incumplimiento de sus condiciones suficientes, para examinar la existencia de valores extremos de funciones dadas. Además, podrían plantearse problemas no rutinarios – contextualizados o no – en los que la dificultad sea obtener el máximo o el mínimo de una función y permitan al alumno ejercitar su intuición optimizadora. El problema de las láminas rectangulares expuesto en el capítulo 2 es un ejemplo, con una función lineal afín, en el que además se usan conceptos geométricos elementales y se pueden considerar variaciones discretas y continuas.

5.3.2. Introducción a la programación lineal

Este es un tema que se consideró oficialmente para la educación secundaria del Perú, por primera vez, en febrero del 2003, en el Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Se mantiene para el quinto grado de secundaria, según el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular vigente desde

[1] Si f es una función real continua definida en un conjunto X de números reales, no vacío, cerrado y acotado, entonces existen un máximo y un mínimo absolutos de f en X.

setiembre del 2005, y – en ambas colecciones examinadas – está tratado con dos variables, en los textos para el quinto grado de secundaria. En la colección A en el capítulo 1 y en la colección B como capítulo 12. Evidentemente está directamente vinculado con la resolución de problemas de optimización y por su propia naturaleza, en sus configuraciones epistémicas predominan los procedimientos.

Lenguaje:

Las expresiones verbales van acompañadas de gráficos de rectas y de inecuaciones lineales en dos variables. Se usan cuadros (tablas) para resumir información.

Situaciones:

Predominan los problemas propuestos. Hay problemas intramatemáticos y también contextualizados introductorios y de aplicación.

Conceptos:

Conceptos previos: inecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Se define región factible, función objetivo y solución óptima. Las definiciones son descontextualizadas.

Proposiciones:

(Implícita) La función objetivo alcanza su valor óptimo en un vértice de la región factible.

Procedimientos:

Se describe técnicas para graficar la región factible y para encontrar la solución óptima. Se usa cuadros (tablas) para organizar la información dada en los problemas.

Argumentos:

Se dan algunos argumentos visuales. No hay demostraciones.

Esta "radiografía" hace evidente la ausencia de procedimientos que estimulen una percepción intuitiva de los problemas y de la búsqueda de la solución óptima y que se enfatiza en el manejo de técnicas que el alumno tiene que aceptar y aprender. A continuación algunos comentarios como producto del análisis hecho:

1. Dada una situación-problema no se presentan secuencias de situaciones-problema conducentes a una comprensión clara de la

situación planteada, estableciendo correspondencias entre las condiciones dadas en el problema y los recursos gráficos que se van usando. Es importante identificar puntos del plano que satisfacen sólo una, varias, todas o ninguna de las restricciones, gráficamente y en el contexto de la situación-problema planteada. La determinación de la región factible no debería verse, desde el inicio, como un mero ejercicio de gráfica de inecuaciones lineales.

2. No se comparan diversos valores de la función objetivo en puntos interiores, fronterizos y exteriores de la región factible para ir intuyendo la obtención del valor óptimo en un vértice.

3. Privilegiando la explicación de las técnicas, se descuida el contexto del problema y el uso de los términos que dan verdadero sentido a la situación problemática. En el problema introductorio del texto de la colección A (Quinto grado, p. 14) se crea una situación confusa para el estudiante, ya que dando sólo precios de venta, se pide maximizar <u>beneficios</u> y al definir la función objetivo se la llama <u>costo</u>, usando los precios de venta. Finalmente, queda "resuelto" un problema de maximización de beneficios (que requeriría conocer los costos, pues éstos deben descontarse para obtener los beneficios) usando una función objetivo que es de costos. Así, quizás el alumno entienda la técnica explicada, pero no tendrá claro qué ha maximizado (lo natural es minimizar costos).

4. El primer procedimiento que se indica (en la colección A el único) para resolver un problema planteado es el de calcular los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible y escoger el mayor o el menor de tales valores, según se busque maximizar o minimizar. Esto se establece como una regla, sin ningún argumento visual o comparativo con los valores de la función objetivo en puntos que no son los vértices. Así, el mensaje al estudiante es de aceptar y aplicar una regla, lo cual no estimula su intuición ni su curiosidad científica.

5. El método gráfico de las rectas de nivel se presta para una argumentación visual que no se hace. En la colección B se presenta este método de manera muy esquemática y rígida, sin explicar el significado de los niveles en el contexto del problema, de sus diversos valores en puntos de la región factible y sin relacionar los coeficientes de la función objetivo con el paralelismo de las rectas de nivel.

6. Se dan definiciones confusas e innecesarias, como la siguiente:

> "Solución no acotada": "cuando la función objetivo no tiene valores extremos, pues la región factible es no acotada" (Colección B, p. 383)

Que la región factible sea no acotada no implica que la función objetivo no tenga un valor extremo. Son frecuentes los problemas de minimización con conjuntos factibles no acotados, cuyo valor óptimo es un número bien determinado.

5.3.3. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

No son temas que se encuentren en los libros de optimización, pero en la perspectiva general que estamos considerando éstos, sí los consideramos en esta investigación; máxime siendo temas ineludibles en la secundaria y que brindan oportunidades para reflexionar sobre la importancia de obtener valores máximos o mínimos de conjuntos discretos – cuyos elementos son divisores comunes o múltiplos comunes de un conjunto determinado de números – y sobre el uso de algoritmos que faciliten su obtención, luego de comprender la necesidad de hallarlos, sin tener que conocer previamente los conjuntos de divisores comunes o de múltiplos comunes.

Son temas tratados en el capítulo de *Números naturales*, en el primer año de secundaria, como parte de la sección correspondiente a divisibilidad. En la colección B se plantea un problema contextualizado al iniciar cada tema e inmediatamente después se da una solución directa y algoritmos, sin explicación, para obtener de forma práctica el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. En la colección A se parte de un problema contextualizado para tratar el mínimo común múltiplo e igualmente se pasa a resolverlo usando un algoritmo que no se explica. En ninguna colección se destaca la importancia de seleccionar un valor mínimo y un valor máximo en cada caso ni se induce a buscar un algoritmo simplificador para obtener el máximo o el mínimo buscado.

Explicitamos la configuración epistémica:

Lenguaje:

Expresiones verbales: máximo, mínimo, múltiplo, divisor, común. Símbolos: Los del lenguaje conjuntista y las abreviaciones m.c.m. y m.c.d. Se usan los conocidos cuadros para los algoritmos correspondientes.

Situaciones:

Predominan los problemas propuestos.

Conceptos:

Conceptos previos: divisor, múltiplo. Se define el m.c.m. y m.c.d.

Procedimientos:

Se describe algoritmos para obtener el m.c.m. y el m.c.d. y se dan ejemplos.

Proposiciones:

Se da propiedades como definiciones alternativas, que resumen la aplicación de los algoritmos correspondientes. En la colección B se enuncia el siguiente teorema como "ayuda" para resolver un problema propuesto:

$$\text{m.c.m.}(a,b) \times \text{m.c.d.}(a,b) = a \times b$$

Argumentos:

Se explica los ejemplos introductorios. (No se da argumentos para los algoritmos ni explicación o comentario alguno para la "ayuda" mencionada.)

Sobre las situaciones problema, es importante destacar dos hechos que se dan en varios textos, que los consideramos deficiencias didácticas y desaprovechamiento de oportunidades de aprendizaje a partir de problemas:

a. Se enuncian en la sección correspondiente a m.c.m. o a m.c.d., con lo cual resulta casi obvio que para resolverlo hay que obtener el número correspondiente aplicando el algoritmo. (Esto ocurre, por ejemplo en el texto de la colección A)
b. Los enunciados suelen no ser muy claros en el planteamiento de la situación a resolver. A pesar de ello, por analogía con los ejemplos expuestos, incluso sugeridos; o por la presencia de la palabra máximo o mínimo; o por la orientación implícita que dan

las alternativas en las opciones para las respuestas, los estudiantes suelen hallar lo pedido aplicando mecánicamente el algoritmo al conjunto de números que se da en el enunciado. Un ejemplo es el siguiente (Colección B, p. 57, problema 104) :

> Halla el menor número de hojas necesario para repartir entre tres salones de 20 alumnos, 25 alumnos y 30 alumnos, de modo que cada uno reciba un número exacto de hojas.
>
> a) 450 b) 400 c) 350 d) 300
>
> Ver ejemplo 31

Ante este enunciado parecería natural que la respuesta correcta es 75, ya que así se puede entregar una hoja (un número exacto) por alumno en cada salón. Según el enunciado no se ve por qué hay que calcular el m.c.m., pero ante la palabra “menor”; la alusión al ejemplo; y las alternativas propuestas, las experiencias nos dicen que es muy poco probable que el estudiante no opte por hallar el m.c.m. de 20, 25 y 30 y que use el algoritmo (que puede saberlo aunque no lo entienda). Obtendrá la “respuesta correcta” (que puede verificar viendo las respuestas de los problemas propuestos), aunque no sepa explicar por qué es correcta en el contexto del problema. Puede darse entonces situaciones lamentables de alumnos que en el tiempo que dedican a estudiar, resuelven “correctamente” problemas que no entienden; usando conceptos cuya aplicabilidad al problema no es clara; y aplicando algoritmos que aprendieron a usarlos sin entenderlos.

Si la situación-problema se enuncia de otra manera, se puede usar para una mejor interrelación entre los conceptos, las propiedades, los procedimientos y los argumentos. Así, puede explotarse didácticamente para mejorar la comprensión del concepto de múltiplo, de múltiplo común y de m.c.m.; para utilizar el ensayo y error; para ver la ventaja del algoritmo; y para dar argumentos sobre la validez del número obtenido, escogido por ser el menor de un conjunto (infinito) de números que cumplen condiciones similares en el contexto descrito. Una manera alternativa que proponemos es la siguiente:

> Carmen debe llevar hojas a un salón para repartirlas entre los alumnos, de modo que cada uno reciba la misma cantidad de hojas. Si en el salón puede haber 20, 25 ó 30 alumnos, ¿cuál es el menor número de hojas que debe llevar Carmen para que en ningún caso le sobren hojas?

Esta situación-problema, bien podría tomarse como problema en el capítulo de divisibilidad, antes de definir el concepto de m.c.m. y de estudiar el algoritmo, para ser discutido y resuelto en clase, en grupos. A partir de las discusiones y las preguntas orientadoras se podría ir descubriendo el concepto y buscando una manera práctica de hallar el m.c.m. usando los conceptos dados en la divisibilidad.

5.4 ESTUDIO DE ALGUNAS PERCEPCIONES DE LOS INGRESANTES UNIVERSITARIOS ACERCA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA SECUNDARIA

Teniendo información sobre los significados institucionales pretendidos, a través del currículo y de libros de texto, en esta sección buscamos información sobre los significados implementados, a través de las percepciones de los estudiantes. Para ello, nos proponemos conocer, muestralmente, cómo perciben los ingresantes universitarios de la Pontificia Universidad Católica del Perú la enseñanza que recibieron de los temas de Matemática en sus colegios, así como indagar acerca del uso de materiales en colegios, y las actitudes frente a la Matemática que estudian. La metodología considerada en este estudio también tiene foco epistémico, fin descriptivo, generalizabilidad exploratoria y nivel de análisis global.

Según el currículo establecido en el año 2005, tenemos un sistema articulado para la educación básica, que se inicia a los 3 años (Ministerio de Educación, 2005). Así, podría sostenerse que se debería evaluar los resultados de la implementación de dicho currículo, en particular de los aprendizajes de los temas matemáticos, cuando terminen secundaria los niños que inician su escolaridad con este currículo. Sin embargo, en nuestro país, lamentablemente la vigencia de los currículos es corta; por ello, a pesar de que se debe reconocer que un currículo se considera implementado en la medida que los estudiantes que inician la educación formal siguen dicho currículo, en este trabajo recogemos información de los estudiantes de la PUCP que terminaron la secundaria en el 2006 acerca de su estudio y aprendizaje de los temas de la matemática propuestos en dicho currículo Una mayor discusión acerca de la importancia del conocimiento matemático subyacente al enfoque que se emplea en el diseño del currículo de matemática en la secundaria puede ser revisada en Socas y Camacho (2003).

Otro aspecto que sin duda es importante como oportunidad de aprendizaje para la matemática, es qué materiales son usados en la clase de Matemática. Fuller (1987) revisó veinticuatro estudios multivariados que analizaban el efecto de los textos escolares sobre el rendimiento. Encontró que dicho efecto era estadísticamente significativo en dieciséis de estos casos.

Como es conocido en nuestro país, las desigualdades en la calidad de la enseñanza de la matemática en la educación secundaria se dan entre escuelas privadas y públicas y entre escuelas de Lima y de provincias. Resultados de las evaluaciones nacionales de rendimiento, dan cuenta de estas diferencias. Véase por ejemplo Díaz y Elespuru (2007) para un recuento reciente de los resultados nacionales. Así, se espera que estudiantes provenientes de escuelas privadas de Lima identifiquen una mayor temática de conceptos previos recibidos en la escuela. También deberían presentar mejor actitud hacia la Matemática según el estudio hecho por Bazán, Espinoza y Farro (2002)

5.4.1. Metodología

Participantes

Para este estudio consideramos como población de interés, los ingresantes 2007-I de la PUCP que culminaron sus estudios en el año 2005 ó 2006 e ingresaron a la PUCP en 2006 o en el primer semestre 2007 matriculados en el semestre 2007-1. Este número asciende a 1610 estudiantes. La población fue divida en tres sub poblaciones correspondientes a los alumnos matriculados en los cursos de Introducción a las Matemáticas Universitarias (806), Matemática Básicas (83) y Matemática 1 (721).

Realizamos un muestreo en dos etapas. En la primera etapa seleccionamos horarios (conglomerados) por curso y en la segunda etapa seleccionamos al azar 30 alumnos (unidades de muestreo) por curso. Para extrapolar los resultados a la población original, consideramos ponderaciones adecuadas. En el cuadro 5.13 aparece información relativa a la muestra.

Características de la muestra		Ciencias	Letras	Total
Curso	Introducción a la matemática universitaria	90.7		50.1
	Matemáticas Básicas	9.3		44.8
	Matemática 1		100	5.2
Colegio	Estatal	7.8	3.3	5.8
	Particular	92.2	96.7	94.2
Procedencia	Lima	80.8	84.7	82.5
	Provincia	19.2	15.3	17.5
Año de finalización de secundaria	2005	17.4	18.7	18.0
	2006	82.6	81.3	82.0
Año de ingreso a la PUCP	2006	65.9	57.3	62.0
	2007	34.1	42.7	38.0

CUADRO 5.13
Distribución porcentual de las características de la muestra de interés en este estudio (n=340)

De acuerdo a este resultado identificamos que los ingresantes proceden principalmente de escuelas privadas (92 %), son de Lima (81 %), concluyeron sus estudios en el 2006 (83 %).

Instrumento

En este estudio hemos empleado un cuestionario (ver Anexo 5A) en el cual consideramos los temas de la matemática en la educación secundaria, el uso de materiales para los cursos de matemática, y las actitudes frente a la matemática que tienen los ingresantes.

Para los temas de la matemática presentamos la lista de los temas considerados en el currículo del año 2005 e indagamos acerca de las percepciones de aprendizaje de los ingresantes en una escala ad hoc

(No me enseñaron el tema, no entendí el tema, entendí pero no lo aprendí, aprendí el tema, y aprendí el tema y me gustó).

Para el uso de materiales en la escuela se trata de identificar los tipos de materiales empleados en la escuela.

Finalmente, para evaluar acerca de las actitudes frente a la Matemática tomamos en cuenta las preguntas consideradas en el estudio de Bazán, Espinoza, Farro (2002) que indagan acerca de la percepción de competencia, el nivel de agrado, el nivel de inseguridad y la percepción de dificultad frente a la Matemática.

El cuestionario fue aplicado de manera anónima, en la tercera semana de clases, en los horarios seleccionados, contando con las facilidades otorgadas por las autoridades correspondientes y los docentes seleccionados.

5.4.2. Resultados

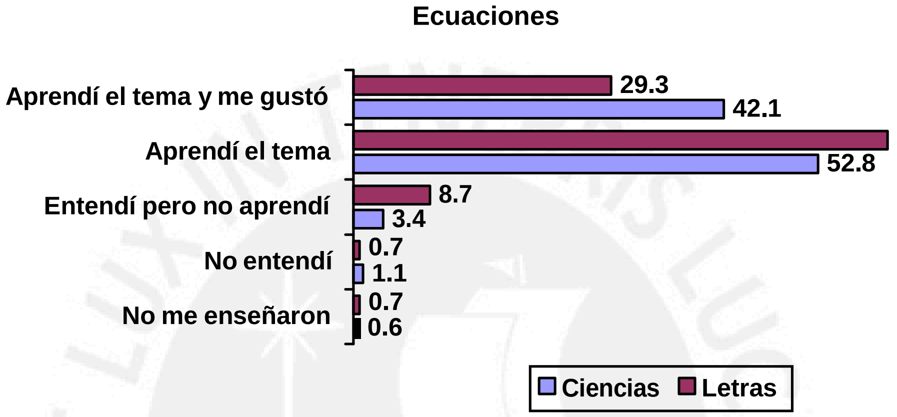
a) *Temas de la matemática*

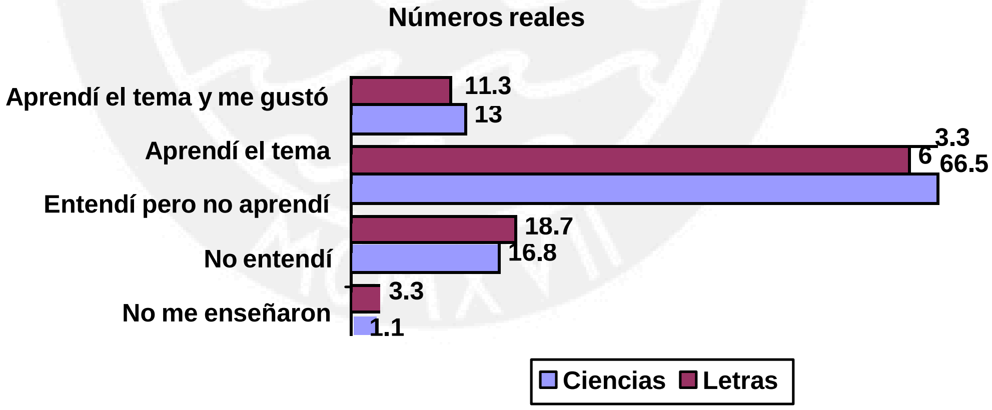
En el Anexo 5B, presentamos un cuadro con información sobre la manera como los ingresantes universitarios de la PUCP perciben la enseñanza que recibieron de los temas de Matemática en el colegio. Estas distribuciones las presentamos en gráficos de barras y organizadas en cuatro grupos, considerando los porcentajes de respuesta con las opciones “aprendí el tema y me gustó” o “aprendí el tema”:

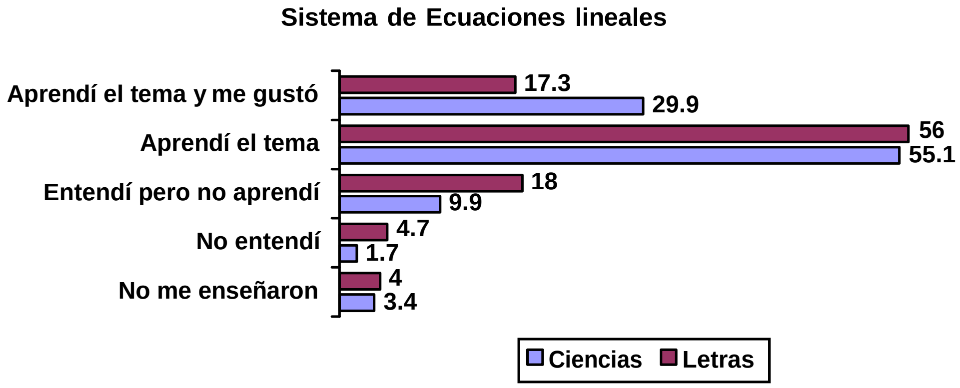
- *Conocimientos previos frecuentes:* Los que han sido considerados por más del 60 % con las opciones “aprendí el tema y me gustó” o “aprendí el tema”
- *Conocimientos previos regulares:* Los que han sido considerados por más del 40 % pero por menos del 60 % con las opciones “aprendí el tema y me gustó” o “aprendí el tema”
- *Conocimientos previos poco frecuentes:* Los que han sido considerados por más del 20 % pero por menos del 40 % con las opciones “aprendí el tema y me gustó” o “aprendí el tema”
- *Conocimientos previos muy pocos frecuentes: bajos*: Los que han sido considerados por menos del 20% con las opciones “aprendí el tema y me gustó” o “aprendí el tema”.

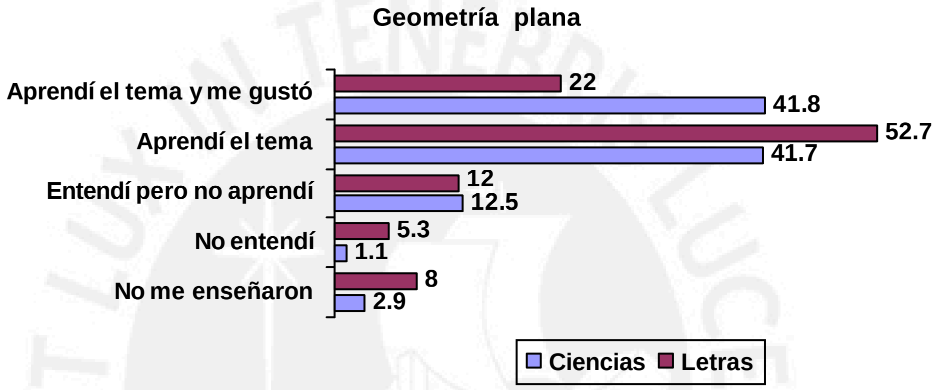
Conocimientos previos frecuentes

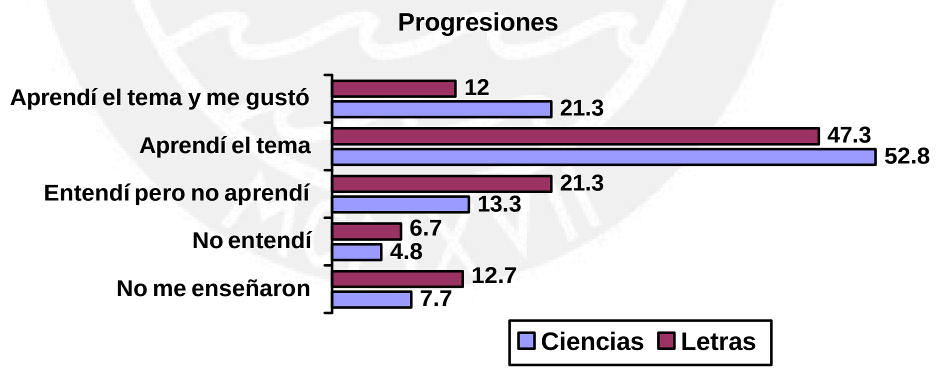
Hemos identificado como conocimientos previos frecuentes entre los ingresantes a la PUCP, en orden descendente de mayor a menor percepción, a las Ecuaciones, Números reales, Sistema de ecuaciones lineales, Inecuaciones, Geometría plana, Progresiones, unidades de medida. Cuando comparamos estas percepciones entre ingresantes a letras y ciencias encontramos que excepto en Números reales, los conocimientos previos frecuentes son percibidos aún mejor entre los ingresantes a ciencias.

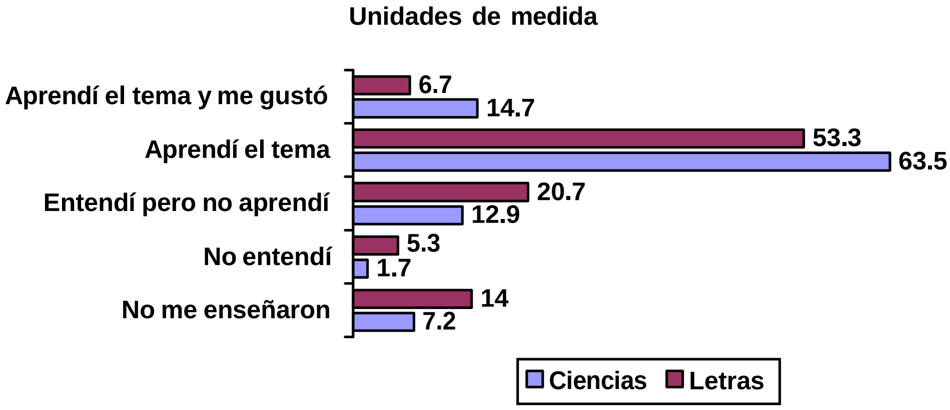





Sistema de Ecuaciones lineales
Aprendí el tema y me gustó
Aprendí el tema
Entendí pero no aprendí
No entendí
No me enseñaron
17.3
29.9
56
55.1
18
9.9
4.7
1.7
4
3.4
Ciencias
Letras

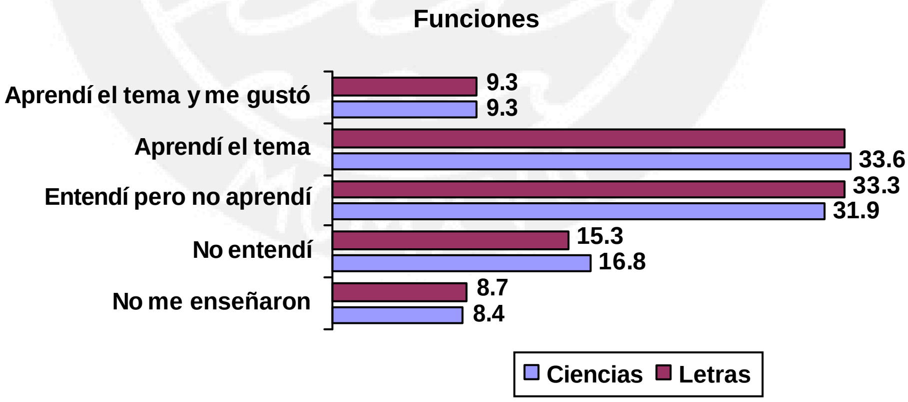

Geometría plana
Aprendí el tema y me gustó
Aprendí el tema
Entendí pero no aprendí
No entendí
No me enseñaron
22
41.8
52.7
41.7
12
12.5
5.3
1.1
8
2.9
Ciencias
Letras

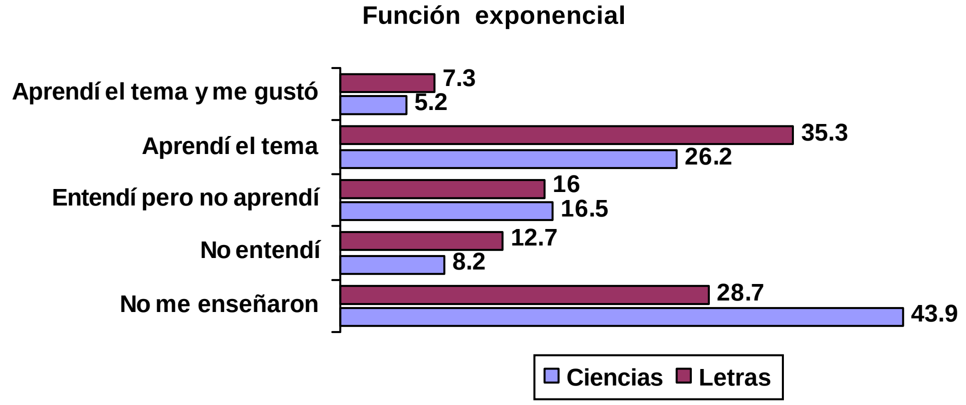

Progresiones
Aprendí el tema y me gustó
Aprendí el tema
Entendí pero no aprendí
No entendí
No me enseñaron
12
21.3
47.3
52.8
21.3
13.3
6.7
4.8
12.7
7.7
Ciencias
Letras

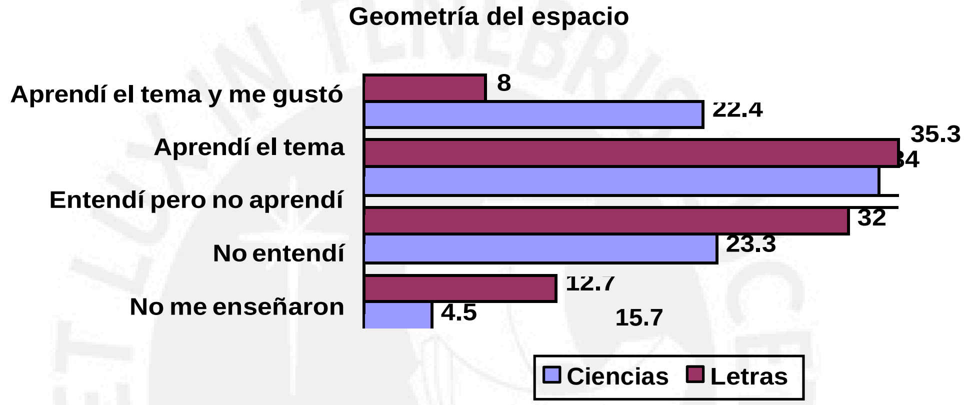


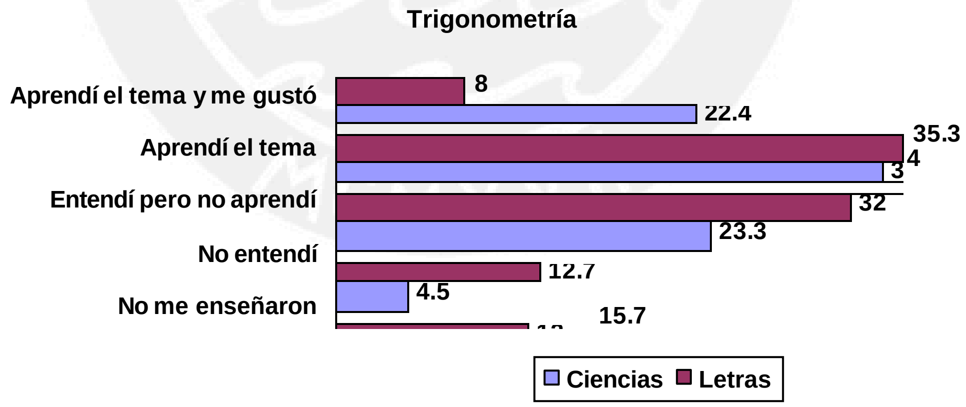
Conocimientos previos regulares

Hemos identificado como conocimientos previos regulares entre los ingresantes a la PUCP, en orden descendente de mayor a menor percepción, a las Funciones, Función exponencial, Estadística, Geometría del espacio, Trigonometría. Cuando se comparan estas percepciones entre ingresantes a letras y ciencias se encuentra que las percepciones son similares en Funciones, Función exponencial, Estadística. Sin embargo los conocimientos previos de Geometría del espacio y Trigonometría son percibidos mejor entre los ingresantes a ciencias.





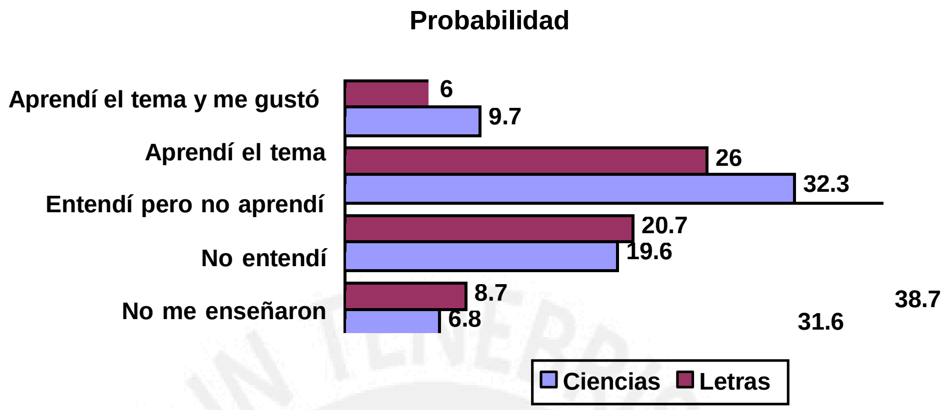


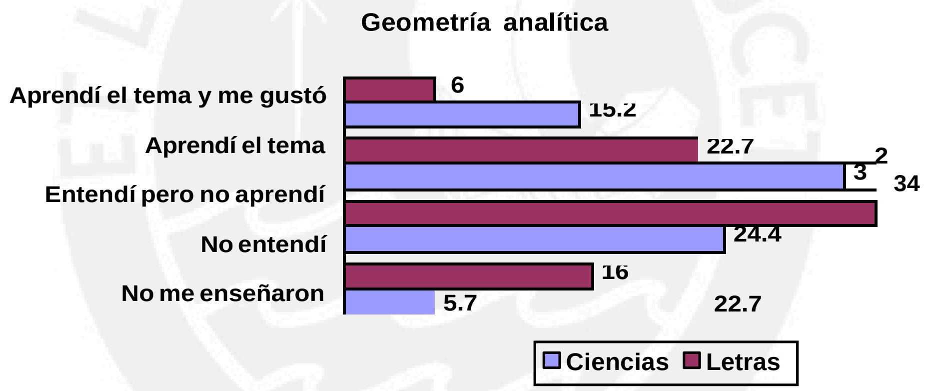


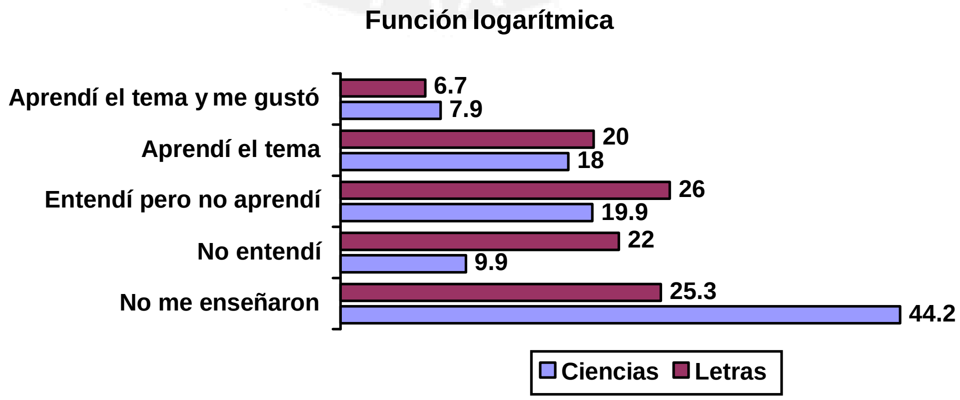
Conocimientos previos poco frecuentes

Hemos identificado como conocimientos previos poco frecuentes entre los ingresantes a la PUCP, en orden descendente de mayor a menor percepción, a la Probabilidad, Geometría Analítica y

Función logarítmica. Cuando se comparan estas percepciones entre ingresantes a letras y ciencias se encuentra que las percepciones son similares en Función logarítmica. Sin embargo los conocimientos previos de Probabilidad y Geometría analítica son percibidos mejor entre los ingresantes a ciencias.

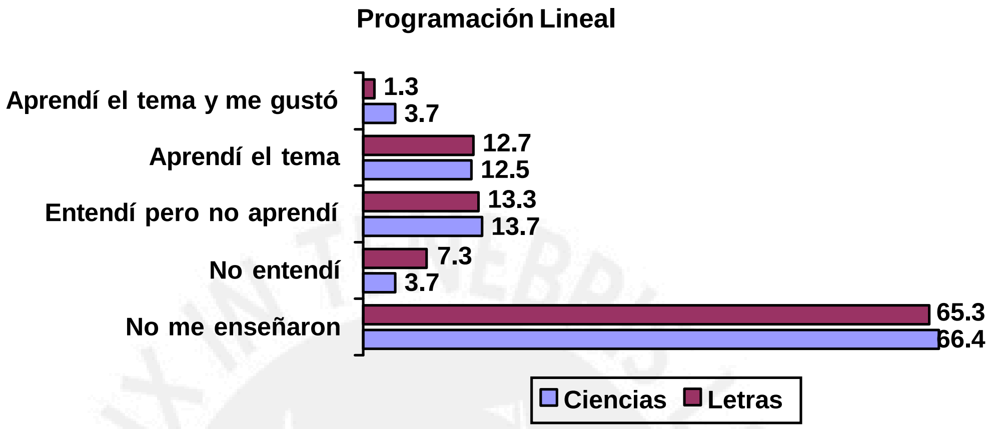






Conocimientos previos muy poco frecuentes

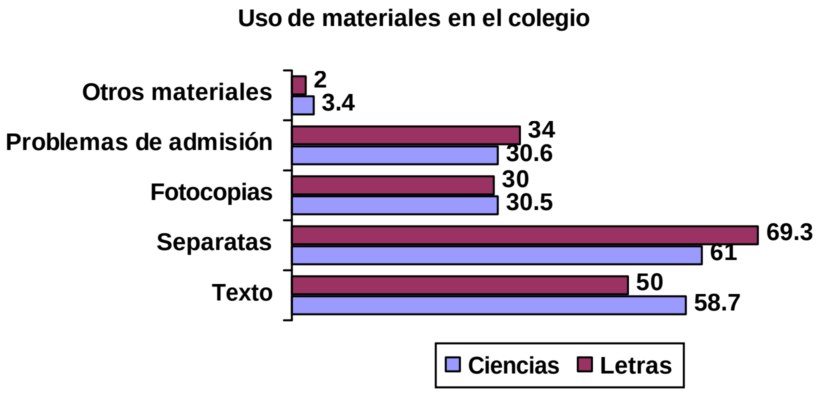
Se ha identificado la Programación Lineal como conocimiento previo muy poco frecuente negativo entre los ingresantes a la PUCP, con percepciones similares entre ingresantes a letras y ciencias.



Cabe destacar que entre un 23 y un 32% de los estudiantes manifiestan haber entendido pero no aprendido temas tan importantes de la matemática básica como Funciones, Geometría del Espacio, Geometría Analítica y la Función logarítmica. Ciertamente habría que profundizar la investigación considerando cómo distinguen los alumnos entre entender y aprender, pero estos resultados pueden reflejar una enseñanza algorítmica, que se "entiende" porque se puede reproducir el algoritmo, pero que no se ha aprendido porque no se puede aplicar para resolver problemas o en situaciones que no sean del mismo tipo que el que se puede reproducir.

También llama fuertemente la atención que más de un 35% de estudiantes manifieste que no le enseñaron probabilidades, Estadística, Función logarítmica y Programación lineal. Destaca en este aspecto la Programación lineal, pues un 66% manifiesta que no le enseñaron, lo cual revela la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización.

b) *Materiales usados en las clases de Matemática*



Los ingresantes de Letras y Ciencias presentan una distribución similar con respecto al uso de materiales en la escuela. El material más usado es el de separatas (69.3 % en Letras y 61 % en Ciencias), luego el texto (50 % y 58.6 % respectivamente), y casi en el mismo porcentaje fotocopias, problemas de admisión y otros materiales.

5.4.3. Comentarios

Un primer resultado encontrado en este estudio es que los ingresantes a la PUCP presentan diferentes niveles de percepción, respecto a los temas matemáticos considerados en el plan curricular de la secundaria. Estas percepciones se pueden agrupar en cuatro niveles:

- conocimientos previos frecuentes: Ecuaciones, Números reales, Sistema de ecuaciones lineales, Inecuaciones, Geometría plana, Progresiones, unidades de medida.
- conocimientos previos regulares: Funciones, Función exponencial, Estadística, Geometría del espacio, Trigonometría
- conocimientos previos poco frecuentes: Probabilidad, Geometría Analítica y función logarítmica
- conocimiento previo muy poco frecuentes: Programación Lineal

Este resultado es un indicador de la brecha existente entre la enseñanza planificada en el currículo y los libros de texto y la enseñanza realmente implementada, pues los ingresantes identifican diversos temas de matemática previstos en el currículo, que no han sido desarrollados en sus colegios. Este es el caso de Probabilidad, Geometría analítica, Función logarítmica y Programación lineal.

Un segundo resultado es que los ingresantes de Letras y Ciencias presentan una distribución similar con respecto al uso de materiales en el colegio. El material más usado es el de separatas, luego el texto y casi en el mismo porcentaje fotocopias, problemas de admisión y otros materiales.

Una primera reflexión sobre este resultado es que esperábamos que el uso de un texto apareciera en primer lugar, pero encontramos que es el caso de las separatas. Las separatas, que generalmente son fotocopias parciales de textos, usualmente son heterogéneas entre colegios, descontextualizadas, y no con uso uniforme de notaciones matemáticas ni haciendo uso de los mismos conocimientos previos, al provenir de diferentes textos. Las razones para el uso de separatas son también un tema a investigar, sin embargo consideramos, siguiendo los resultados de Fuller (1987), que el uso de textos es significativo para el aprendizaje de la matemática, no solo porque los buenos textos presentan también un número suficiente de ejercicios y problemas resueltos o no, como suele ser el caso de las separatas, sino porque ofrecen un cuerpo estructurado con orientaciones para un aprendizaje activo y una notación unificada al presentar los diferentes temas del grado y de grados previos y futuros.

Otro resultado que merece atención es que entre un 23% y un 32% de los estudiantes manifiestan haber entendido pero no aprendido temas tan importantes de la matemática básica como Funciones, Geometría del espacio, Geometría analítica y la Función logarítmica. También, más de un 35% de estudiantes manifiesta que no le enseñaron Probabilidades, Estadística, Función logarítmica y Programación lineal y destaca en este aspecto la Programación lineal, pues un 66% manifiesta que no le enseñaron. Esto último revela claramente la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización. Cabe mencionar que la programación lineal fue introducida en el 2003 en el quinto año de secundaria del Perú y los profesores tienen poca familiaridad en este tema, tanto por formación, como por experiencia.

La existencia de temas entendidos pero no aprendidos es fuertemente preocupante, porque más allá de las precisiones sobre entender y aprender, revelaría un reconocimiento por los estudiantes de que tales temas se trataron inadecuadamente o insuficientemente. Lo referido a Probabilidades, Estadística, Función logarítmica y Programación lineal, es un llamado de atención a la formación de los profesores en los institutos pedagógicos, en las facultades de educación y en los cursos de capacitación docente.

5.5. CONCLUSIONES

De la revisión hecha a los textos, obtenemos como primera conclusión que las oportunidades que brindan los diversos temas matemáticos que se tratan en la secundaria no son aprovechadas para proponer problemas interesantes de optimización y así, proporcionalmente a la cantidad total de problemas que se presentan en los libros, son muy pocos los de optimización (excepcionalmente en un caso llega a ser el 5,2% del total de problemas, pero en todos los demás está por debajo del 2,2%).

En general – más allá de los problemas específicos de optimización – consideramos que en los textos revisados está presente la concepción de una matemática con “productos” acabados y con muchas reglas que aprender; que el papel fundamental de los problemas es aplicar conocimientos y no ser puntos de partida para descubrirlos o construirlos; y que predomina el criterio de poner a disposición del alumno muchos problemas para que se prepare para las evaluaciones – y en particular para los exámenes de admisión en las universidades – adquiriendo práctica en el uso de reglas, recomendaciones y algoritmos, y no el criterio de usar los problemas para desarrollar la capacidad de análisis, la creatividad, la intuición y en general el pensamiento matemático.

Del estudio sobre algunas percepciones de los ingresantes universitarios acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la secundaria, ya hemos anotado varias conclusiones al hacer los comentarios en la sección 5.4.3., pero queremos destacar que muestra la brecha existente entre la enseñanza planificada, tanto en el currículo como en los libros de texto, y la enseñanza realmente implementada. En cuanto a problemas de optimización, si bien hallamos algunos de estos en los libros de texto, muchos de ellos desaparecen en el paso que va de la planificación a la implementación. Donde más evidente es este fenómeno es en los problemas de optimización correspondientes a la programación lineal.

Capítulo 6

LINEAMIENTOS PARA LA INCLUSIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

RESPUESTA A LA CUARTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo, dando respuesta afirmativa a la cuarta pregunta de investigación, sobre la posibilidad de proponer problemas de optimización en la educación básica, mostramos que algunos problemas que son característicos del nivel universitario, por su resolución usando cálculo diferencial, también podrían proponerse en la secundaria en el marco de actividades individuales y grupales de dificultad graduada que estimulen la intuición. Proponemos y examinamos un problema de optimización de buenas potencialidades didácticas y matemáticas en los niveles básicos y superior, y damos tres lineamientos para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, teniendo en cuenta las experiencias del investigador, los criterios de idoneidad del EOS y algunos principios relacionados con la viabilidad de propuestas de cambio en el significado pretendido.

Nuestra cuarta pregunta de investigación es: *¿Es posible proponer problemas de optimización en la educación básica del Perú, de manera que se estimule una intuición optimizadora que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición?* La respuesta a esta pregunta es de carácter propositivo, pretendiendo aportar a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica en el Perú, pues proponemos lineamientos para la inclusión de problemas de optimización en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en la educación básica; lineamientos que consideramos serán útiles para los profesores de esta etapa y para todas aquellas personas que tienen responsabilidad en la planificación y gestión del currículum.

6.1. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

Observamos que en la vida cotidiana con frecuencia estamos buscando lo óptimo y en consecuencia resolviendo o tratando de resolver problemas de optimización con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición; que se usan técnicas y teorías de optimización matemática para resolver problemas en modelos teóricos de las ciencias sociales y naturales; y que la optimización matemática es un campo de amplio y rápido desarrollo y de múltiples aplicaciones; sin embargo, en la mayoría de los casos, sólo quienes estudian cálculo diferencial o programación lineal en el nivel de educación superior tienen en estos cursos la primera ocasión de conocer los enfoques de la matemática y su didáctica para resolver problemas de optimización. Por ello, consideramos que es fundamental la inclusión de problemas de optimización desde la primaria y la secundaria. Ciertamente, la idea no es – por lo menos en una primera fase – crear nuevos capítulos de optimización en estos niveles; y tampoco se trata de la mera inclusión de problemas de optimización en las listas de problemas propuestos o en las evaluaciones. Nuestra propuesta está dada en tres lineamientos que desarrollamos en el apartado 6.2, pero para concretarlos es fundamental: seleccionar y crear problemas adecuados de optimización para trabajarlos en las clases, en los diversos capítulos del plan curricular, aprovechando las potencialidades didácticas que tienen estos problemas; usar los recursos que existen en la matemática y su didáctica para complementar y potenciar las soluciones intuitivas de problemas cotidianos o lúdicos de optimización; fomentar en los alumnos tanto el análisis individual e intuitivo como la discusión y el trabajo en grupos; inducirlos a clarificar conceptos y usar adecuadamente proposiciones, procedimientos y argumentos; y reforzar en ellos la interacción entre la intuición, la formalización y el rigor. Como ya lo expresamos anteriormente, "hay y es posible crear muchísimas situaciones atractivas y lúdicas, donde la dificultad principal es obtener un valor máximo o mínimo. Ante ellas, los estudiantes de primaria y secundaria pueden ejercitar su intuición y capacidades de conjeturar, demostrar o rechazar sus conjeturas, y otras vinculadas con el pensamiento matemático, que fortalecen el pensamiento científico, tan necesario y útil en la sociedad del conocimiento y la información en la que estamos inmersos." (Malaspina, 2007a, p. 367)

En el EOS se considera que la situación-problema es la parte visible de un "iceberg", que es la configuración epistémica en la que hay que enmarcarla para resolverla. Basta pensar que normalmente un problema se puede resolver de diferentes maneras y que cada una de ellas conlleva una configuración diferente que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos diferentes (por ejemplo geometría y álgebra), como se visualiza en la figura 2, tomada de Font y Godino 2007, p. 95.

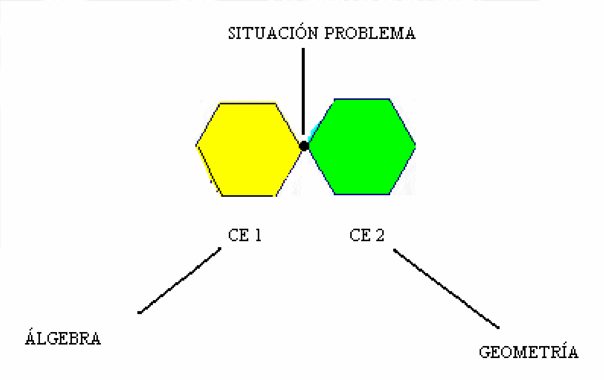


Figura 6.1. Configuraciones que comparten la misma situación - problema

Los caminos que permiten pasar de una configuración epistémica a la otra son diversos. En Acevedo (2008) se postula que la comprensión de la relación que se produce entre las dos maneras de resolver el problema, en algunos casos es el resultado de establecer una metáfora de enlace (linking metaphor, en la terminología de

Lakoff y Núñez) que permite la proyección de una de las dos configuraciones en la otra. En algunos casos la metáfora de enlace se limita a producir el paso de una configuración que no permitía resolver el problema a otra configuración diferente que sí permite la resolución de dicho problema.

Con este marco referencial, en este apartado examinamos algunos problemas de optimización – conocidos, modificados o creados – y formas de resolverlos; proponemos actividades individuales y grupales que conducen a la solución de tales problemas, teniendo configuraciones epistémicas referenciales adecuadas; examinamos configuraciones cognitivas de soluciones de alumnos; y consideramos generalizaciones, teniendo en cuenta la dualidad ejemplar-tipo.

6.1.1. De la universidad a la educación básica

Afirmamos que un número importante de problemas de optimización que normalmente se proponen en la universidad son resolubles de manera que la configuración epistémica activada en la resolución corresponda al nivel secundario, e incluso, en algunos casos, al de primaria. A continuación vamos a poner algunos ejemplos para sustentar esta afirmación, mostrando la solución usual con el cálculo diferencial, sugiriendo actividades individuales y grupales y desarrollando soluciones alternativas sin usar cálculo diferencial, y más bien mostrando las oportunidades que brinda para usar la intuición y relacionar conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos manejables por estudiantes de secundaria y aun de primaria, que actualmente son poco o nada usados.

Comenzamos con un problema que se encuentra – con pequeñas variaciones – en casi todos los textos de Cálculo Diferencial que se usan en el nivel universitario y que no está entre los problemas de las colecciones examinadas ni en texto alguno para secundaria que hemos revisado.

Problema 1

> Se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, usando una lámina cuadrada cuyos lados miden 18 cm de longitud. Para hacerlo se recortará en cada esquina de la lámina un cuadrado y luego se harán los dobleces necesarios, como se ilustra en la figura 6.2. ¿Cuál debe ser la longitud de los lados de los cuadrados que se recorten, para que el volumen de la caja que se construye sea el máximo posible?

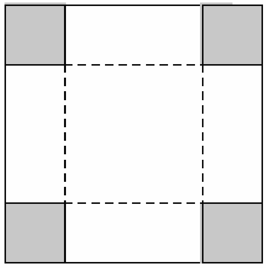


Figura 6.2

Solución.

Usando cálculo diferencial:

Llamando x a la longitud de los lados de los cuadrados que se recortarán – que será a su vez la altura de la caja – obtenemos la función objetivo, que en este caso es el volumen de la caja construida:

$$V(x) = (18 - 2x)^2 x$$

Tenemos una función derivable, cuyo dominio, según el contexto del problema es el intervalo]0; 9[.

Según los procedimientos conocidos del cálculo diferencial:

$$V'(x) = 2(18 - 2x)(-2x) + (18 - 2x)^2 = 0$$

De donde $$V'(x) = (18 - 2x)(18 - 6x) = 0$$

Y entonces $x = 9$ ó $x = 3$.

Como $V''(x) = 24x - 144$ y $V''(3) < 0$, concluimos que el valor maximizante es $x^* = 3$. (No es necesario analizar $x = 9$, porque no tiene sentido en el contexto del problema.) Así, el volumen máximo es V(3) = 432.

Ciertamente es una manera sencilla de resolver el problema, pero desde el punto de vista didáctico, así resuelto, es sólo un ejemplo ilustrativo de la aplicación de los procedimientos del cálculo diferencial. Es posible resolverlo en la secundaria – y aun trabajarlo en la primaria – sin usar este recurso y aprovechar sus características para estimular la intuición, usar la conjetura, la gráfica de funciones y las calculadoras, y para efectuar experimentaciones matemáticas usando un software de geometría dinámica como el Cabrí Géomètre.

A continuación una propuesta de actividades:

El profesor pedirá a sus estudiantes que desarrollen actividades, primero individuales y luego grupales, teniendo la siguiente situación-problema como referencia para él:

> Disponiendo de una lámina cuadrada cuyos lados miden 18 cm, se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, que tenga la mayor capacidad posible.

Para que los alumnos desarrollen las actividades entregará, a cada estudiante una hoja de papel en la que estén escritas las actividades que deben hacer, y varias hojas cuadradas de papel cuyos lados midan 18 cm. Les indicará que pueden usar lápiz, reglas y escuadras, tijeras y cinta adhesiva

Actividades individuales

1. Construir una caja cuya base sea cuadrada, recortando cuadrados en las esquinas de la hoja.
2. Calcular el volumen de la caja construida.

Pasado un tiempo prudencial, que en buena medida dependerá del criterio del profesor, según sus observaciones al desarrollo de las actividades de los estudiantes, el profesor pedirá que se formen grupos de a lo más cuatro estudiantes y repartirá otras hojas en las que estén impresas las actividades grupales a realizar:

Actividades grupales

1. Comparar los volúmenes de las cajas construidas por los integrantes del grupo.
2. Examinar si hay cajas de diferente altura y del mismo volumen.
3. Hacer un cuadro que resuma la información usada para obtener el volumen de cada una de las cajas.
4. Examinar si es verdad que cuanto mayor sea la altura de la caja mayor será su volumen.
5. Hacer un dibujo que explique cómo se ha construido cualquiera de las cajas.
6. Examinar si existe una caja cuyo volumen sea el mayor posible. En caso afirmativo, estimar la altura de esa caja.

7. Examinar si existe una caja cuyo volumen sea el menor posible. En caso afirmativo, estimar la altura de esa caja.
8. Expresar el volumen de la caja en función de la altura de la caja.
9. Examinar una forma de determinar cuál debe ser la altura de la caja para que tenga el mayor volumen posible y cuál es ese volumen.

Con estas actividades y la adecuada orientación del profesor, se pretende activar una configuración epistémica como la siguiente [1] :

Situación-problema:

Problema de contexto geométrico-algebraico, en el que se busca una situación óptima.

Lenguaje:

Cuadros, gráficos, símbolos, fórmulas.

Conceptos:

Caja (como paralelepípedo), volumen, función, función inyectiva y función creciente (implícitos).

Proposiciones:

El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de su base por su altura.

Procedimientos:

Constructivos, experimentales, gráficos y analíticos.

Argumentos:

Inductivos, intuitivos y analíticos.

La práctica matemática que se estimule, permitirá la interacción de estos objetos matemáticos en las diversas actividades propuestas. Cabe explicitar que el concepto de caja como paralelepípedo y de su volumen, así como la proposición para obtener tal volumen estarán presentes en todas las actividades, y los conceptos relacionados con funciones en las actividades 4, 8 y 9. También, que las actividades 3, 5, 8 y 9 ponen más énfasis en el uso del lenguaje; las actividades

[1] En este apartado nos limitaremos a esbozos de las configuraciones epistémicas

individuales y las 1, 2, 4, 8 y 9 grupales más énfasis en los procedimientos; y las 4, 6, 7 y 9 en los argumentos.

Las actividades 8 y 9 están más relacionadas con los procedimientos y argumentos analíticos, pues una de las formas de aproximarse bien a la altura maximizante del volumen es obteniendo valores con ayuda de una calculadora y graficando la función volumen. Si se dispone de un software de geometría dinámica como el Cabrí Géomètre, se puede visualizar simultáneamente los cambios en el tamaño de la caja y los valores que va tomando el volumen conforme cambia la altura, con el movimiento de un punto en la gráfica de la función volumen. (González, M.; 2006). Las experiencias tenidas en talleres con profesores muestran las potencialidades de este recurso tecnológico para la visualización geométrica, el estímulo de la intuición y el afianzamiento del concepto de función con un valor máximo.

Otra solución.

El mismo problema se puede solucionar también sin usar el cálculo diferencial y activando una configuración epistémica en la que aumenta el grado de rigor y formalización, lo cual puede servir para complementar los argumentos visuales e intuitivos de la configuración epistémica anterior. A continuación mostramos una manera rigurosa de obtener la altura maximizante y el volumen máximo, sin usar el cálculo diferencial:

La función volumen, en términos de la altura x es

$$V(x) = (18 - 2x)^2 x \qquad (1)$$

y debemos obtener el máximo valor de $(18 - 2x)^2 x$.

Cuando la función objetivo es un producto, en muchos casos es útil usar una desigualdad básica entre las medias aritmética y geométrica de un conjunto finito de números positivos. Para el caso de tres números positivos a, b y c, se tiene la siguiente proposición:

Proposición

Si a, b y c son números enteros positivos, siempre se cumple que

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \qquad (2)$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$.

Para aplicar a (1) podemos escribir (2) de manera equivalente:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \qquad (3)$$

Podemos observar que en el segundo miembro de esta desigualdad tenemos el máximo valor alcanzable por el producto de tres números reales positivos y que tal valor se alcanzará cuando se cumpla la igualdad; es decir, si y sólo si los tres factores son iguales entre sí. Si la suma de los tres factores es una constante, entonces se conoce el valor máximo alcanzable por el producto, cuando los factores son iguales entre sí. Como se puede ver de (3), tal valor será el cubo de un tercio de esa suma.

Esta proposición es la que aplicaremos para determinar el máximo volumen:

Los tres factores de (1) no tienen una suma constante, así que no se trata de una aplicación directa.

Observamos que

$$\begin{aligned} V(x) = (18-2x)^2 x &= (18-2x)(18-2x)x \\ &= 4(9-x)(9-x)x \\ &= 2(9-x)(9-x)(2x) \qquad (4) \end{aligned}$$

Así, en el último producto la suma de los tres factores entre paréntesis es constante e igual a 18. En consecuencia, el máximo valor de $V(x)$ será $2.\left(\frac{18}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}18^3 = 432$ y tendrá lugar cuando los tres últimos factores en (4) sean iguales; es decir, cuando $9 - x = 2x$; según lo cual, el valor maximizante de x es $x^* = 3$.

Comentarios

1. Las actividades sugeridas pueden modificarse o reducirse, según el nivel de los estudiantes con los que se trabajen. Los conceptos previos fundamentales para desarrollar las actividades son los de paralelepípedo y de volumen, y éstos ya están considerados en el tercer grado de primaria (Ministerio de Educación, 2005, p. 127 y 128). En el cuarto grado de secundaria se consideran más formalmente los conceptos de prisma recto, volumen y funciones (Ministerio de Educación, 2005, p. 168 y 170), lo cual posibilita proponer en este grado la secuencia completa de actividades sugerida.

2. En primaria puede trabajarse en un contexto lúdico y estimulando el manejo de instrumentos, la medición, la realización de operaciones en un contexto concreto y el uso de calculadoras.
3. Es importante estimular el análisis sobre la existencia de valores extremos (Actividades 6 y 7). En general, es muy importante examinar la existencia de elementos que cumplen determinadas especificaciones. Se hace mucho en la matemática, pero muy poco en las actividades de enseñanza y aprendizaje. Los problemas de optimización son una buena ocasión, con la ventaja adicional de estimular la intuición optimizadora. Será importante que los estudiantes descubran (intuyan) la relación entre un comportamiento creciente y luego decreciente de una función (no necesariamente explícita) y la existencia de un máximo de tal función, así como la relación entre un comportamiento decreciente y luego creciente de una función (no necesariamente explícita) y la existencia de un mínimo de tal función. Las aproximaciones intuitivas pueden pasarse a expresiones más formales, dependiendo del nivel, haciendo cuadros con datos de la variable y valores de la función, y graficando la función.
4. Una capacidad importante a desarrollar es la de estimar y debería estar presente en las diversas actividades de resolución de problemas relacionadas con la obtención de resultados numéricos. Evidentemente, estimar no es lo mismo que adivinar. La estimación tiene referentes que se obtienen de las experiencias, las observaciones y los análisis que se hagan; sin embargo, no hay que dejar de lado los casos de estimación puramente intuitiva.
5. La solución formal mostrada, como complementación formativa y enriquecedora a las aproximaciones con argumentos gráficos, visuales e intuitivos, incluye el uso de una proposición que no está considerada en el Diseño Curricular Nacional vigente, pero que es pertinente incluirla por su importancia para numerosos problemas y porque es una ocasión para un manejo de las desigualdades con mayores conexiones con otros campos de la matemática. La proposición correspondiente al caso de dos números es consecuencia natural de examinar un producto notable (el cuadrado de una diferencia) y relacionarlo con la no negatividad de todo número real elevado al cuadrado. La demostración para los casos con cuatro números es consecuencia de sumar las desigualdades correspondientes a dos números y

aplicar esta misma desigualdad; y la demostración para tres números se hace aplicando la desigualdad para cuatro. La demostración del caso general, para *n* números positivos, requiere la inducción matemática, pero no es necesario usar ese nivel de generalidad, aunque es intuible. Cauchy estudió y demostró esta importante desigualdad en su *Cours d'analyse* publicado en 1821 (Niven, 1981, p. 24) pero se pueden encontrar demostraciones generales en libros que tratan sobre desigualdades, como (Bulajich, R. et al, 2005, pp. 10-12); o (Davidson, L. et al, 1987, pp. 209-211). Esta importante desigualdad forma parte de los temas que se proponen incluir en la educación secundaria, para fortalecer la resolución de problemas de optimización.

6. Un aspecto también importante en el EOS es considerar algunas facetas duales de los objetos matemáticos en juego. Una faceta especialmente importante es la extensivo-intensivo (o ejemplar-tipo) y en esa perspectiva examinar las posibilidades de considerar el problema como caso particular de un problema más general, y dilucidar sobre los recursos matemáticos disponibles para resolver tal problema. Esto será muy enriquecedor tanto por la visión más amplia que se genera como por la búsqueda de herramientas matemáticas. Puede ocurrir que se encuentren y se pueda resolver el problema general, o puede ocurrir que no se encuentren y entonces se vea la importancia de conocer nuevas herramientas. Con el problema que estamos analizando, cabe un primer nivel de generalización, que es considerar al cuadrado con lados de longitud cualquiera, digamos k. Otros niveles de generalización son considerar una lámina rectangular en lugar de una lámina cuadrada, o un polígono regular. Lo esencial no es resolver exactamente el problema sino desarrollar la capacidad de crear, generalizar, plantear nuevos problemas y examinar las potencialidades y limitaciones de los procedimientos usados para resolver el problema original.
7. Cabe destacar que la función objetivo del problema es una función polinómica de tercer grado. Subrayamos este hecho porque en los problemas encontrados en los textos para niveles básicos la función objetivo generalmente es cuadrática (salvo los problemas de programación lineal) y la solución es reducida al cálculo del vértice de la parábola correspondiente, como hemos visto en el capítulo anterior.

El siguiente es también un problema casi infaltable en los textos de Cálculo Diferencial. Como en el caso del problema anterior, además de la solución muy conocida usando cálculo diferencial y otra determinando el vértice de la función cuadrática que resulta, propondremos algunas actividades y mostraremos sus potencialidades didácticas.

Problema 2

Un granjero dispone de 300 metros de alambrado para cercar un terreno rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que la región rectangular cercada tenga área máxima?

Solución.

Usando cálculo diferencial:

Denotando con x a la longitud de uno de los lados, tenemos que la longitud de cualquiera de sus lados adyacentes es 150 - x, y en consecuencia la función objetivo (área del rectángulo) es

$$A(x) = x(150 - x)\ ; \quad x \in]0; 150[$$

En consecuencia $A'(x) = 150 - 2x$.

$A'(x) = 0$ si y sólo si $x = 75$, y como $A''(x) < 0$ para todo x, concluimos que el valor maximizante es $x^* = 75$, que el rectángulo de área máxima es un cuadrado y que el área máxima es 5625m^2.

A continuación proponemos algunas actividades individuales y grupales. Ya no entraremos en los detalles especificados para el problema 1.

Situación-problema:

Determinar las dimensiones de un rectángulo de perímetro 30, para que tenga área máxima.

Actividades individuales

Se entregará a los estudiantes una hoja de papel cuadriculado y otra con las actividades a desarrollar. Se les indicará que deben considerar que los cuadraditos más pequeños del papel cuadriculado son de lado 1

1. Dibujar cinco rectángulos que tengan perímetro 30 y distintas áreas. Indicar las dimensiones de cada uno.
2. Hacer un cuadro que resuma la información sobre las dimensiones y el área de los rectángulos dibujados

Actividades grupales

Se les entregará una hoja de papel cuadriculado y otra con las actividades grupales a desarrollar. Se les entregará también cuatro cordeles del mismo tamaño, aproximadamente de 35 cm de longitud y se les indicará que pueden usarlos para las actividades que consideren conveniente. Todas las actividades se refieren a rectángulos con perímetro 30.

1. Hacer un solo cuadro que resuma la información sobre las dimensiones y el área de los rectángulos distintos dibujados por los integrantes del grupo.
2. Examinar si es verdad que cuanto mayor sea el largo del rectángulo, mayor será su área.
3. Examinar si existe un rectángulo cuya área sea la mayor posible. En caso afirmativo, estimar las dimensiones de ese rectángulo.
4. Examinar si existe un rectángulo cuya área sea la menor posible. En caso afirmativo, estimar las dimensiones de ese rectángulo.
5. Llamar x e y a las longitudes de los lados del rectángulo y expresar una de las variables en función de la otra.
6. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.
7. Examinar una forma de determinar cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que tenga la mayor área posible y cuál es esa área.
8. Proponer problemas de obtención de área máxima, haciendo modificaciones o generalizaciones al problema propuesto.

La configuración epistémica tiene similitudes con la del problema 1.

Situación-problema:
Problema de contexto geométrico-algebraico, en el que se busca una situación óptima.
Lenguaje:
Cuadros, gráficos, símbolos, fórmulas
Conceptos:
Rectángulo, área, función y función creciente
Proposiciones:
El área de un rectángulo es el producto de las longitudes de su largo y de su ancho.
Procedimientos:
Constructivos, experimentales, gráficos y analíticos.
Argumentos:
Inductivos, intuitivos y analíticos.

Destacamos el hecho de haber repartido cordeles y no haber propuesto ninguna actividad específica con ellos. La intención es estimular su imaginación e intuición para el uso de los cordeles. En las experiencias tenidas, ha habido reacciones positivas, usándolos para las actividades 2, 3 y 4. Destacamos también el hecho de pedir explícitamente, en la actividad 8, proponer problemas de maximización, a partir del problema dado. La intención es estimular la creatividad de los estudiantes y considerar la faceta dual extensivo-intensivo (o ejemplar-tipo) para comentar aspectos históricos y matemáticos de los problemas isoperimétricos. Más adelante nos detendremos a analizar un planteamiento más general.

También este problema se puede solucionar mediante una configuración epistémica en la que aumenta el grado de rigor y formalización, lo cual puede servir para complementar los argumentos visuales e intuitivos de la configuración epistémica anterior. A continuación mostramos una manera rigurosa de obtener la longitud maximizante y el área máxima, sin usar el cálculo diferencial:

La función área, en términos de la longitud x de uno de los lados del rectángulo es

$$A(x) = x(15 - x)\,; \quad x \in]0; 15[$$

Para encontrar el máximo valor de $x(15 - x)$, aplicaremos la desigualdad entre media aritmética y media geométrica, como lo hicimos en el problema anterior, pero esta vez para dos números reales positivos.

Específicamente, la desigualdad que se cumple para todo par de números reales positivos *a* y *b*, es

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad (5)$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$[2].

También, la desigualdad se puede escribir equivalentemente como

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad (6)$$

Aplicándola, de manera similar a la hecha para el problema 1, tenemos que el máximo valor de $x(15 - x)$ es $\left(\frac{15}{2}\right)^2$ y este valor se alcanza cuando se cumple que $x = 15 - x$; es decir, cuando $x = 7.5$.

Otra manera más conocida de resolver este problema, sin usar cálculo diferencial, es escribiendo la función objetivo, que es una función cuadrática, completando el cuadrado de un binomio:

$$A(x) = x(15 - x) = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{15}{2}\right)^2$$

Se ve claramente que el valor máximo del área y el correspondiente valor de *x* coinciden con los obtenidos antes. Este procedimiento es específico para funciones cuadráticas.

Otra de las ventajas de usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica en este problema, es que también podemos aplicarla para resolver un problema de minimización, haciendo una lectura "de derecha a izquierda". A continuación veremos tal problema, que podría considerarse una especie "dual" del problema que estamos examinando y que bien podría surgir de ideas en torno a la actividad 8, eventualmente por orientaciones del profesor.

[2] Como ya lo dijimos, esta proposición es consecuencia natural de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \quad \forall a,b \in R^+$

Problema 2´

Un granjero debe cercar un terreno rectangular que tenga 1000 m^2 de área. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que la cantidad de alambrado sea la mínima?

Solución

En este caso, conociendo el área del rectángulo, debemos minimizar su perímetro.

Llamemos x a uno de los lados del rectángulo. Como el área es 1000, el otro lado es $\frac{1000}{x}$ y el perímetro es $2\left(x+\frac{1000}{x}\right)$. Entonces debemos minimizar $x+\frac{1000}{x}$.

Según la desigualdad de medias aritmética y geométrica para dos números reales positivos:

$$x.\frac{1000}{x} \leq \frac{\left(x+\frac{1000}{x}\right)^2}{4},$$

de donde

$$4000 \leq \left(x+\frac{1000}{x}\right)^2$$

y así

$$20\sqrt{10} \leq x+\frac{1000}{x}$$

En consecuencia $20\sqrt{10}$ es el mínimo valor que puede alcanzar $x+\frac{1000}{x}$, que se logrará cuando $x=\frac{1000}{x}$; es decir, cuando $x=10\sqrt{10}$.

Concluimos entonces que el terreno de área 1000 con perímetro mínimo es un cuadrado de lado $10\sqrt{10}$ y que el perímetro es $40\sqrt{10}$.

Ciertamente, lo importante será que al llegar a proponerse el problema, el profesor estimule una respuesta intuitiva de los alumnos y la búsqueda de una justificación a ella. La solución dada líneas arriba deben conocerla los estudiantes, pero luego de intentos propios para resolver el problema. Una actividad inicial puede ser dibujar en papel cuadriculado varios rectángulos de área dada, por ejemplo 18 y anotar ordenadamente, en un cuadro, los diversos perímetros.

En las experiencias tenidas con estudiantes de quinto de secundaria, algunos intuyeron rápidamente que se trataba de un cuadrado, pero no se llegó a la demostración. Una limitación fuerte es que la función objetivo es una función no cuadrática (ni polinómica) y el desconocimiento de la desigualdad entre medias aritmética y geométrica. Situación similar ocurrió con alumnos de segundo ciclo universitario y con profesores en un curso de maestría en enseñanza de las matemáticas, cuando se les pidió no usar cálculo diferencial para resolver este problema.

Dualidad ejemplar-tipo

Queremos detenernos en las posibilidades de relacionar la intuición con el rigor que ofrece considerar la dualidad ejemplar-tipo con el problema 2. Una manera natural de considerar un caso general es ampliar el conjunto de posibilidades en el que se debe buscar el área máxima. En el problema analizado, la búsqueda de la figura (o el terreno) de área máxima fue entre los rectángulos de igual perímetro.

¿Qué pasa si la búsqueda del área máxima es entre los cuadriláteros de igual perímetro?

Pregunta interesante que al plantearse a los estudiantes (mejor si llegan a planteársela ellos mismos) suele llevarlos a intuir que la conclusión será la misma: el cuadrilátero de mayor área será el cuadrado. Para esta afirmación resultan útiles los tanteos visuales que se hagan con el cordel anudado y formando cuadriláteros con los dedos pulgar e índice de las dos manos, y las discusiones en los grupos de trabajo.

Ante la afirmación intuitiva de que el cuadrado es el cuadrilátero de mayor área con perímetro dado, surge la necesidad de una justificación rigurosa, que hacemos a continuación, teniendo como referencia a Niven (1981). Es particularmente interesante trabajar de manera interactiva esta demostración con los estudiantes, por los razonamientos sencillos con simetrías y con las desigualdades de origen trigonométrico y aritmético.

Demostrar que entre todos los cuadriláteros de perímetro dado, el cuadrado es el que tiene área máxima.

Formalmente:

Sea el cuadrilátero RSTU, *de lados a, b, c* y *d. Demostrar que*

$$\text{\textit{Área de} RSTU} \le \frac{(a+b+c+d)^2}{16}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si RSTU es un cuadrado.

Veamos:

1. Al referirnos a cuadriláteros en general, tenemos que considerar los convexos y los no convexos; sin embargo basta considerar los convexos, pues todo cuadrilátero no convexo siempre se puede sustituir por otro cuadrilátero convexo del mismo perímetro y mayor área, como puede verse en la figura 6.3, si sustituimos el cuadrilátero no convexo *ABCD* por el cuadrilátero convexo *ABC'D*, donde los segmentos *BC'* y *C'D* son simétricos, respecto a *BD*, de los segmentos *BC* y *CD* respectivamente.

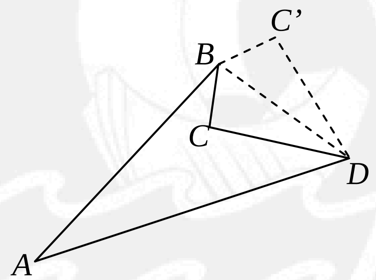


Figura 6.3

2. Consideremos el cuadrilátero convexo *RSTU* de la figura 6.4, de lados *a*, *b*, *c*, *d*. Llamando *A* al área del cuadrilátero, observamos que:

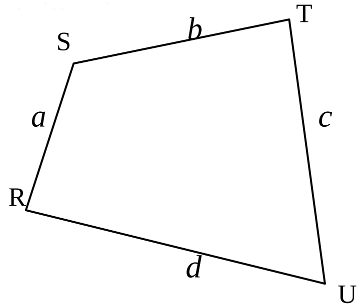


Figura 6.4

$$A = \text{Área de } \Delta STU + \text{Área } \Delta SRU$$
$$= \frac{1}{2} bc \cdot sen\hat{T} + \frac{1}{2} ad \cdot sen\hat{R}$$
$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2} ad \qquad (*)$$

3. Análogamente

$$A = \text{Área de } \Delta RST + \text{Área de } \Delta RUT$$
$$= \frac{1}{2} ab \cdot sen\hat{S} + \frac{1}{2} dc \cdot sen\hat{U}$$
$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} dc \qquad (**)$$

4. Sumando las desigualdades obtenidas en (*) y (**):

$$2A \leq \frac{1}{2}(bc + ad + ab + dc)$$
$$\Rightarrow 4A \leq (b+d)(c+a)$$

5. Aplicando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica a los números positivos $(b + d)$ y $(c + a)$, tenemos

$$4A \leq \left(\frac{(b+d)+(c+a)}{2}\right)^2$$

Y así:

$$A \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{16} \qquad (***)$$

6. En las desigualdades (*) y (**) se cumple la igualdad si y solo si los ángulos correspondientes son de 90º, por lo cual podemos afirmar que en (***) se cumple la igualdad si y solo si el cuadrilátero *RSTU* es un rectángulo.

7. Por otra parte, según la desigualdad entre media aritmética y geométrica, la igualdad en (***) se cumple si y solo si $b + c = c + a$, entonces concluimos que la igualdad se cumple si el rectángulo *RSTU* es un cuadrado, con lo cual concluye la demostración.

Evidentemente, también se debe considerar la dualidad ejemplar-tipo al trabajar con el Problema 2´. Un primer nivel de generalización es considerar un número positivo A como área dada y obtener conclusiones generales respecto a las dimensiones del rectángulo de tal área y perímetro mínimo.

Problema 2A

A continuación mostramos una solución no muy difundida de una variación bastante conocida del problema 2:

> Un granjero dispone de 300 metros de alambrada para cercar un terreno rectangular, debiendo ser uno de sus lados parte de una larga pared rectilínea ya construida. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que la región rectangular cercada tenga área máxima?

La idea es resolverlo usando el resultado obtenido anteriormente, con argumentos predominantemente geométricos:

1. Supongamos que *RSTU* es el rectángulo de área máxima. En la figura 6.4 se muestra este rectángulo, uno de cuyos lados es parte de la pared rectilínea representada por la recta que pasa por *R* y *U*. Los lados de longitudes *a* y *b* deben ser construidos con el alambrado de 300 metros; así $2a + b = 300$

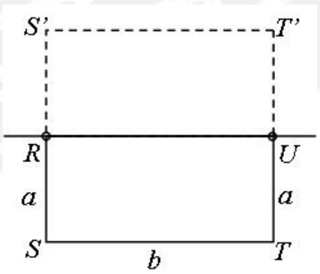


Figura 6.5

2. Con los puntos *S’* y *T’*, simétricos de *S* y *T* respecto a la recta $\overleftrightarrow{RU}$ tenemos el rectángulo *S’STT’* que debe tener área máxima, siendo su perímetro 2 (2a + b); es decir 600.

3. Por la solución del problema 2 y su versión general, el rectángulo *S'STT'* tiene que ser el cuadrado de perímetro 600, lo cual nos dice que el rectángulo *RSTU* tiene que ser la mitad de un cuadrado, con $2a = b$. Así las dimensiones del rectángulo buscado tienen que ser 75 y 150.

Recordemos que en el capítulo 2 dimos dos problemas como ejemplos de problemas de optimización. El primero de ellos:

> Encontrar dos números cuya suma sea 15 y cuyo producto sea máximo.

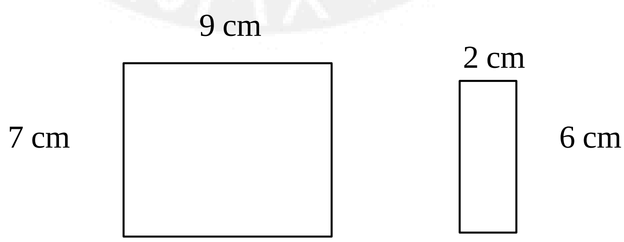
es del mismo tipo que el *Problema 2* que estamos resolviendo y comentando. Es pertinente recordar las acotaciones hechas en el Capítulo 2 sobre los diversos niveles y contextos en los que se puede trabajar.

6.1.2. Un problema de optimización para varios niveles educativos

El Problema 2 del Capítulo 2 es un ejemplo de problema de optimización, que no es de los típicos en textos universitarios ni de educación básica y que tiene muchas potencialidades didácticas en diversos niveles educativos, como se resume brevemente en el Capítulo 2.

Problema

> Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho. Moviendo libremente las láminas en el plano y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.



Este problema lo creamos especialmente para la conferencia ofrecida en la 4^{th} *Mediterranean Conference on Mathematics Education*, (Italia, 2005) y con las adecuaciones del caso, hemos desarrollado experiencias didácticas con alumnos de primaria y de secundaria, con alumnos universitarios y con profesores, y en todos los casos hemos encontrado que brinda ocasiones importantes de aprendizaje, de estímulo de la intuición, y de formación matemática. Algunas experiencias han sido expuestas en Malaspina (2005a, pp. 493-495 y 2005b, No. 1, pp. 105, 106). Por su importancia, en el contexto que estamos examinando los problemas de optimización, reproducimos algunos párrafos de estos artículos, relacionados con este problema

De Malaspina (2005b, No. 1):

> Si el profesor deja tiempo para que los alumnos examinen el problema con tranquilidad y tiene suficiente cuidado para orientar adecuadamente y no hablar más de lo indispensable, el problema brinda excelentes oportunidades para ejercitar el ensayo y error; para estimular la intuición y hacer conjeturas; para rechazar o mantener una conjetura; para agudizar la capacidad de observación buscando la forma más fácil de obtener el perímetro de cada figura que forme; para encontrar situaciones equivalentes; etc.
>
> Es muy importante en la formación del pensamiento matemático de los niños pasar – por propio descubrimiento - de la obtención del perímetro haciendo sumas de longitudes muy concretas, a la obtención por casos equivalentes, y aun a la obtención por una sustracción. Para estos pasos es fundamental el adecuado y oportuno papel del profesor, que en muchos casos será el de guardar silencio, sin dejar de estimular.
>
> (…)
>
> Posiblemente la parte más difícil del problema es la justificación. Lo más frecuente es encontrar un convencimiento de haber llegado a una solución correcta, pero no poder sustentar una justificación rigurosa. Según mis experiencias, esto ocurrió en todos los niveles que planteé el problema.
>
> (…)
>
> Nuevas preguntas:
>
> *a) ¿Cómo es la figura plana de <u>menor</u> perímetro que se puede formar pegando un lado completo de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*
>
> *b) ¿Cómo es la figura plana de <u>mayor</u> perímetro que se puede formar pegando <u>parte</u> de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*
>
> *c) ¿Cómo es la figura plana de <u>menor</u> perímetro que se puede formar pegando <u>parte</u> de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra? Justificar e ilustrar gráficamente.*

d) ¿Cómo es la figura plana de mayor perímetro que se puede formar pegando parte de un lado de una de las láminas a uno de los lados de la otra, si no pueden estar unidas sólo por un punto? Justificar e ilustrar gráficamente.

La pregunta (a) suele ser propuesta por los participantes de manera bastante natural cuando se les pide que piensen en alguna otra pregunta relacionada con la situación planteada. En las experiencias tenidas, las preguntas (b) y (c) surgieron pocas veces. Más bien las propuse para actividades grupales. La pregunta (d) sólo la propuse trabajando con estudiantes de segundo ciclo universitario y con profesores de matemática de secundaria. Lo interesante es que partiendo de una situación muy simple, se llega a un problema de optimización que no tiene máximo. Es una linda oportunidad para relacionar conceptos de intervalos semiabiertos, funciones afines, el máximo de una función continua y decreciente definida en un intervalo semiabierto, etc. y para trabajar con un problema que queda resuelto cuando se concluye que no es posible encontrar una situación óptima. La función f(x) = 44 – 2x, definida en el intervalo]0; 2] no tiene máximo". (pp. 105, 106)

De Malaspina (2005a):

i) It allows the manipulation and experimentation with concrete materials, and the consideration of various possibilities and their corresponding arithmetic operations whose usefulness is perceived (a non-boring way of doing arithmetic exercises in primary school).

ii) It captures the interest of those people to whom the problem is proposed and is adequate for group work.

iii) It requires the use of basic mathematical concepts: arithmetic operations, perimeter, intersection of sets, measurement of segments and comparison of numbers, concepts which are applied creatively, for example, verifying that the given condition to join them is fulfilled, finding equivalent situations, and seeking the easiest way to obtain the perimeter in each case: from the simple and naïve addition of the lengths of the segments of each one of the sides to more simplified forms always using as a referent the addition of the perimeters of both rectangles and subtracting the length of the corresponding common part.

iv) The use of intuition to reach a conjecture of the solutions and a conviction of the truthfulness of this conjecture either examining all the possible cases or examining the minimum and the maximum that can be lost in the common part.

v) Its level of complexity can be graded to match the educational level of the participants: from operating only with integers, and then with decimal numbers, to seeking generalizations and examining the case

> The common part of the two given rectangles does not necessarily have to have the same length as one of the sides of the rectangles, but it can not be only one point.

vi) This is the case of an optimization problem in which there is a solution when you minimize, but there is no solution when you maximize. A limit situation can be perceived. A university student justified the inexistence of a solution to the maximization by expressing the perimeter of p as a function of the length of the common part of both rectangles (x), defined on a semi open interval. (With the data of this problem, $p(x)=44-2x$, with $0 < x \leq 2$)

vii)The didactical experiences obtained with this problem tell us about its great potential to develop mathematical thinking. It is important to note the generalizations for the problem suggested by the participants: to consider two rectangles of dimensions a and b, and c and d respectively, and to study the various cases according to the order relations among a, b, c, and d; to work with more than two rectangles; to work with parallelepipeds, and to work with other geometric figures.

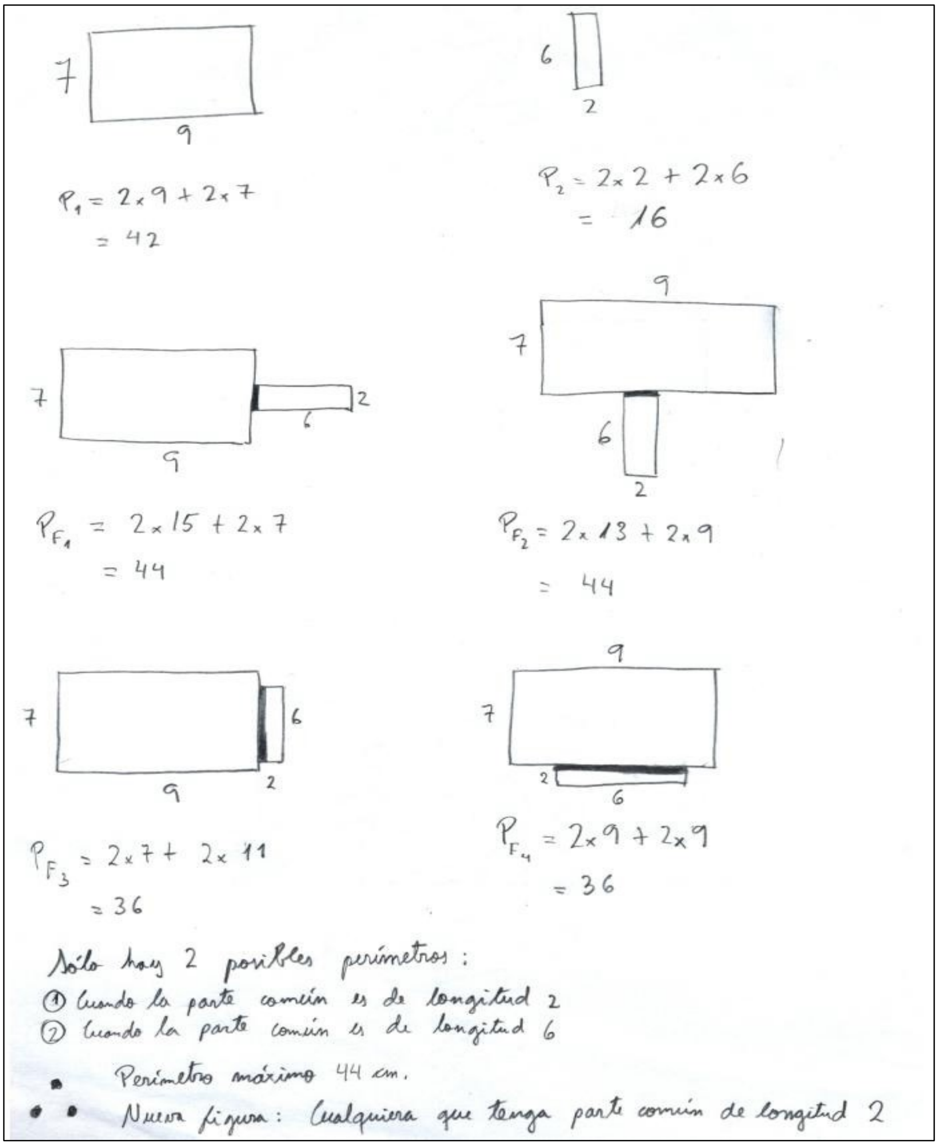
viii) Starting from this simple problem, we were able to see with participants of different levels that there are various mathematical connections, touching different topics from geometry, arithmetic, equivalence classes, real numbers, the maximum of a bounded set of real numbers, functions, continuity of functions, and maximum and minimum values of a function. The participants stated that problems like this appear in carpentry and sewing. All these experiences contribute to make the student realize that mathematics is an integrated field of study.

ix) The primary school students who worked with this problem understood more clearly the concept of perimeter of a plane shape and began to perceive the concept of tangency between arcs of circumferences when they worked on the variation of the problem considering, instead of rectangles, two semi circumferences of different radii. (pp. 494, 495)

6.1.2.1. Algunas soluciones y configuraciones epistémicas / cognitivas

A continuación mostramos algunas soluciones expertas de referencia y sus configuraciones epistémicas, así como algunas soluciones de estudiantes y de profesores, con sus configuraciones cognitivas, que permiten hacer las comparaciones correspondientes. Las soluciones que se muestran – de los estudiantes y del profesor – fueron hechas en aulas, respondiendo sólo al pedido de solución del problema propuesto en una hoja impresa, no como parte de un conjunto de actividades individuales y grupales.

Una solución experta, considerando el nivel secundario:



A continuación, la configuración epistémica correspondiente:

Lenguaje:

Términos y expresiones: Rectángulos, largo, ancho, lado, figura plana, perímetro.

Representaciones:

Dibujos de casos representativos de las nuevas figuras, con sus respectivos perímetros.

Situación problema:

Problema de maximización, de contexto geométrico.

Conceptos

Rectángulo, perímetro de figura plana, relación de orden en N.

Proposiciones

- El perímetro de la figura plana formada por dos rectángulos unidos de modo que uno de los lados está incluido completamente en la parte común, es mayor que el perímetro de cualquiera de los rectángulos considerados, y menor que la suma de los perímetros de tales rectángulos.
- El perímetro de la nueva figura plana no puede considerar el doble de la longitud del lado que queda completamente incluido en la parte común.
- Cuanto mayores sean los lados de los rectángulos que se incluyan en el perímetro de la nueva figura plana, mayor será su perímetro.
- Cuanto menor sea la longitud del lado que esté en la parte común, mayor será el perímetro de la nueva figura.

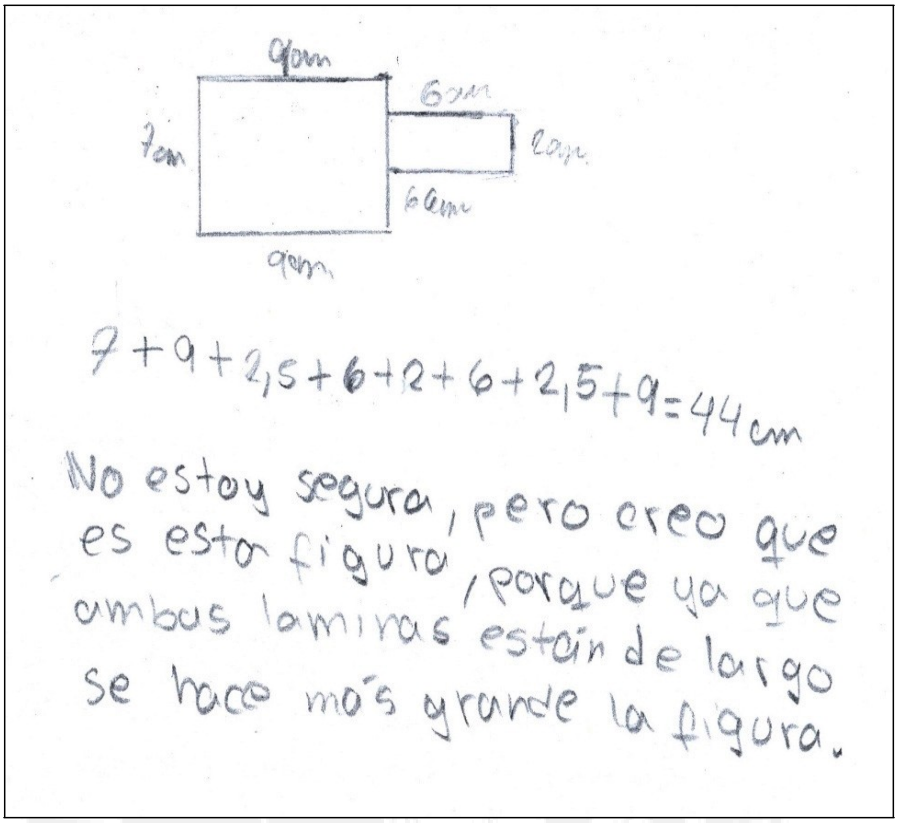
Procedimientos

- Dibujar figuras que resulten de imaginar el traslado de una lámina hasta pegarla a la otra por uno de sus lados.
- Calcular el perímetro de las nuevas figuras.
- Observar que todas las figuras que resulten con el mismo lado incluido en la unión, tendrán el mismo perímetro.
- Observar que sólo hay dos posibles valores para el perímetro de la nueva figura que se forme.
- Escoger cualquier figura que tenga como perímetro el mayor de los dos valores posibles.

Argumentos

- Razonamiento por observación de casos.
- Conclusión encontrando y comparando casos equivalentes.

Solución de una alumna de secundaria



Configuración cognitiva de esta solución

Lenguaje:

Términos y expresiones: Rectángulos, largo, figura plana, perímetro.

Representaciones: Dibujo de un caso de la nueva figura, con su respectivo perímetro.

Situación problema:

Problema de maximización, de contexto geométrico.

Conceptos

Rectángulo, perímetro de figura plana, adición de números naturales y decimales, relación de orden en N.

Proposiciones

(Implícitas)

- El perímetro de la nueva figura plana no puede considerar el doble de la longitud del lado que queda completamente incluido en la parte común.

- Cuanto mayores sean las longitudes de los lados de los rectángulos que se incluyan en el perímetro de la nueva figura plana, mayor será su perímetro.

Procedimientos

- Dibuja una figura que resulta de imaginar el traslado de la lámina pequeña hasta pegarla a la otra por el lado de longitud 2 cm.
- Calcula el perímetro de la nueva figura.

Argumentos

Razonamiento por observación de un caso representativo y aplicando la segunda de las proposiciones anotadas.

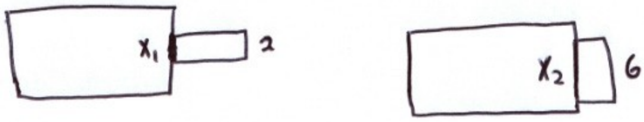
Comentarios

1. Las diferencias fundamentales con la configuración epistémica de referencia están en el lenguaje, los procedimientos y argumentos. La alumna sólo presenta un caso de los infinitos posibles, o uno de los cuatro tipos posibles de unión de las dos láminas. Su argumentación es más bien intuitiva, pues da una razón correcta "ambas láminas están de largo", pero no una justificación de que la forma que presenta las láminas es representativa de esa situación, observando que de esa forma se está "perdiendo" menos centímetros al hacer la unión por el lado de longitud 2.
2. La inseguridad explícita revela falta de argumentos y la corrección de su respuesta revela una intuición optimizadora.

Como referencia más específica de las experiencias con este problema en otros niveles educativos, mostramos una solución experta y su configuración epistémica, considerando a alumnos de primeros años de ingeniería, aplicable también a profesores de secundaria; así como la solución de un alumno universitario y de un profesor.

Solución experta:

$P_1 = 18+14 = 32$ $\qquad$ $P_2 = 12+4 = 16$



$$P_{F(x)} = P_1 + P_2 - 2x$$
$$P_{F(x)} = 32 + 16 - 2x$$
$$= 48 - 2x \quad ; \quad x \in \{2,6\}$$
$$= \begin{cases} 44 \\ \text{ó} \\ 36 \end{cases}$$
$$\Rightarrow P^*_{F(x)} = 44 \ \checkmark$$

Habiendo sólo dos posibles valores para el perímetro de la nueva figura, es claro que el mayor de ellos es el máximo. En este caso: 44.
Hay infinitas figuras con los dos rectángulos y perímetro 44. Todas con la parte común de longitud 2.

Configuración epistémica de esta solución:

Lenguaje

Términos y expresiones: Símbolos, expresiones algebraicas, rectángulos, largo, ancho, lado, figura plana, perímetro.

Representaciones: Dibujos de casos representativos.

Conceptos

Rectángulo, perímetro de figura plana, función, relación de orden en N.

Proposiciones

Si dados dos polígonos convexos, se construye un nuevo polígono uniéndolos de modo que tengan en común un segmento de sus fronteras, la diferencia entre la suma de sus perímetros y el perímetro del nuevo polígono, es el doble de la longitud del segmento de la intersección.

Procedimientos

- Definir la función "perímetro de la nueva figura" teniendo como variable la longitud del segmento común.
- Observar que, según el problema, la variable sólo puede tomar dos valores.
- Obtener los correspondientes valores de la función.
- Escoger el mayor de los dos valores obtenidos.
- Concluir que hay infinitas figuras con el máximo perímetro.

Argumentos

- Razonamiento por observación de casos en marco general.
- Conclusión encontrando y comparando valores correspondientes a dos casos representativos

Solución de un profesor de secundaria

Consideremos la fig. ①: ⇒ $P_1 = 2\,(9+7)\text{ cm} \Rightarrow P_1 = 32\text{ cm}$

fig. ②: ⇒ $P_2 = 2\,(2+6)\text{ cm} \Rightarrow P_2 = 16\text{ cm}$

* Si estuvieran separados ⇒ $P_{TOTAL} = P_1 + P_2 = 48\text{ cm}$.

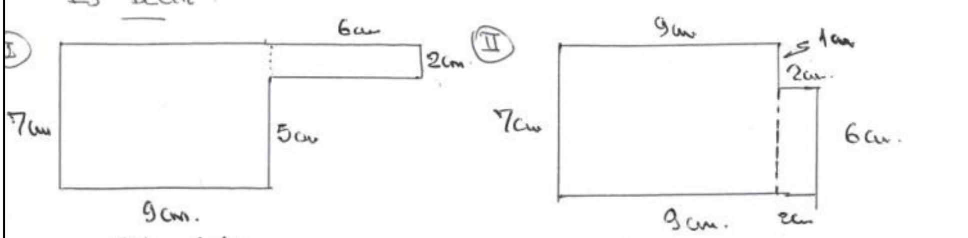
* Pero al superponerse completamente uno de los lados, entonces tenemos 2 casos:

(I) $P' = (P_1 + P_2) - 2\,(2\text{cm}) \Rightarrow P' = (48-4)\text{cm} \Rightarrow P' = 44\text{ cm}$

↑ lado menor de fig ②

(II) $P'' = (P_1 + P_2) - 2\,(6\text{ cm}) \Rightarrow P'' = (48-12)\text{ cm} \Rightarrow P'' = 36\text{ cm}$

Es decir:

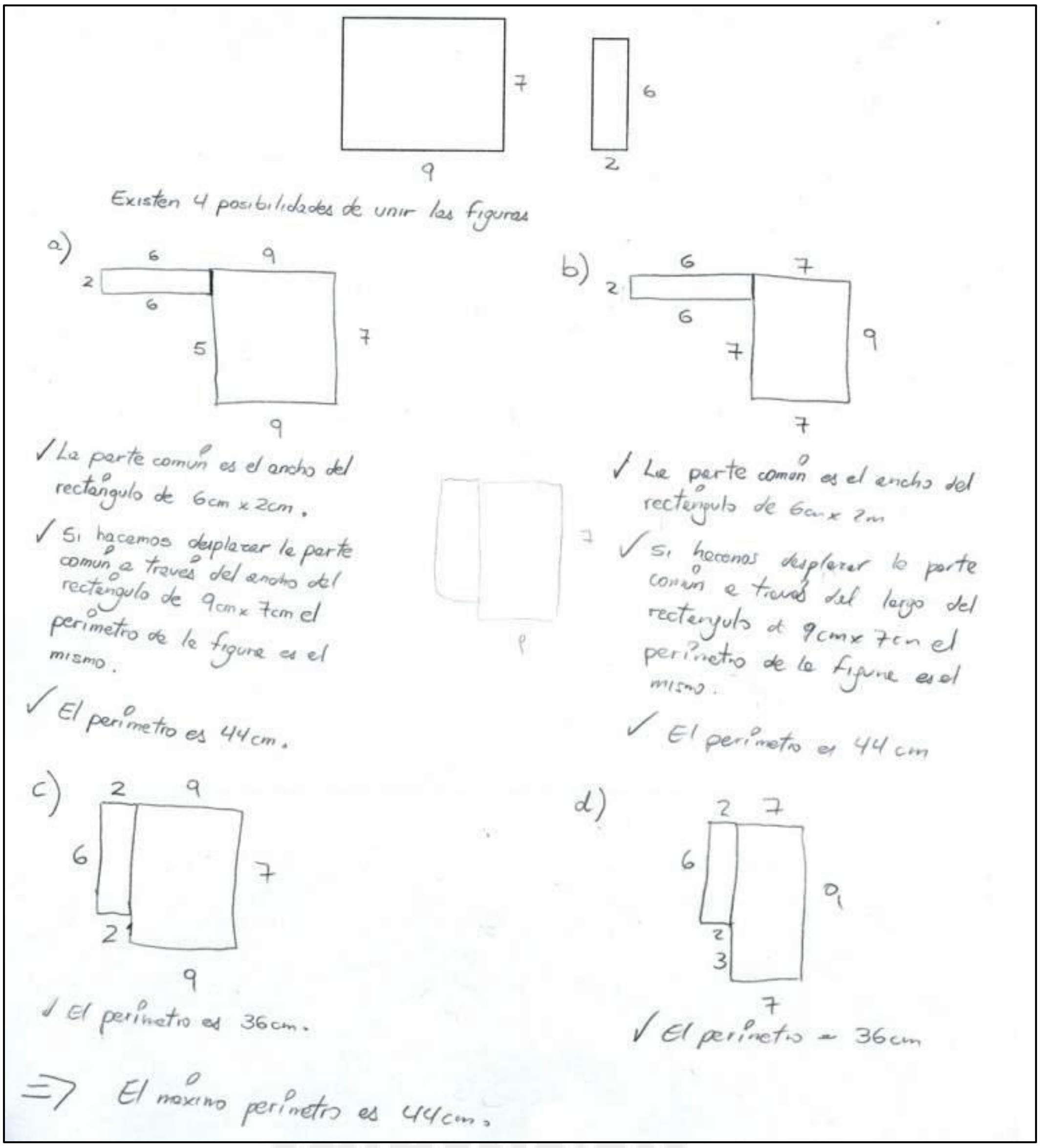


$P' = 44\text{ cm}$. $P'' = 36\text{ cm}$.

$P' > P''$

∴ La fig (I) tiene mayor perímetro

Solución de un alumno universitario.



6.1.2.2. Reacciones de alumnas de secundaria

Con el propósito de indagar reacciones de alumnos de secundaria ante problemas de optimización, sin que hayan tenido experiencias previas ante estos problemas, aplicamos este problema a 57 alumnas de primero y segundo grado de secundaria de un colegio parroquial de un distrito de clase media en Lima, preparando un instrumento ad hoc. En el Anexo 6A presentamos el instrumento empleado y a continuación resumimos parte de la importante información recogida:

		%
Percepciones iniciales	El problema me parece interesante	98.2
	El problema me parece útil	93.0
	El problema me parece fácil de entender	50.9
	El problema me parece fácil de resolver	42.1
	Me gusta (n = 56)	76.8
Reacciones ante el problema	Intenta el problema	82.5
	Halla lo pedido	10.5
	Presenta dibujo correcto	22.8

CUADRO 6.1
Percepciones y reacciones

			%
Conocimientos previos	Identifica	No	38.6
		Vagamente	57.9
		Con claridad	3.5
	Revela	No	33.3
		Parcialmente	29.8
		Con claridad	36.8
Procedimiento	No presenta		15.8
	Hace cálculos o dibujos iniciales		45.6
	Tantea (examina por los menos dos opciones)		5.3
	Muestra sólo su resultado		33.3
Explica que su resultado es óptimo (n = 49)	No		53.1
	Correctamente		8.2
	Incorrectamente		38.8

CUADRO 6.2
Conceptos, procedimientos y argumentos

Comentarios

1. Es claro que hay una percepción positiva del problema.
2. El bajo porcentaje que halla lo pedido debemos entenderlo teniendo en cuenta que solo un 3,5% identifica claramente los conceptos previos necesarios para resolver este problema y sólo el 36,6 % revela con claridad esos conocimientos previos. Demás, debemos considerar lo atípico del problema, la falta de experiencia de las alumnas en problemas de optimización y el estar respondiendo en una evaluación y no como parte de una secuencia de actividades.
3. Coherentemente con la buena percepción, hay un alto porcentaje que intenta resolverlo y un 22.8% que presenta un dibujo correcto, lo cual está revelando una solución gráfica o intuitiva del problema y una dificultad para hallar el perímetro, por la no convexidad de la figura y por no tener explícitas las medidas de algunos lados (como lo manifestaron verbalmente algunas alumnas)
4. En cuanto a procedimientos, predomina el hacer un dibujo mostrando una de las posibilidades y hacer algunos cálculos. Un porcentaje considerable (33,3%) sólo muestra su resultado y son muy pocas las que muestran el análisis de varios casos o de casos representativos de las diversas posibilidades.
5. En cuanto a argumentos, que el 53,1% no dé explicación alguna de que su resultado es óptimo (independientemente de que realmente lo sea), a pesar de que se les pide claramente esta explicación, consideramos que revela por una parte no tener experiencias con el concepto de máximo y por otra un contrato didáctico en el aula que no enfatiza la justificación de los resultados.
6. Consideramos que esta experiencia enriquece las que hemos tenido en grupos pequeños con alumnos de varios niveles educativos y con profesores de primaria y secundaria, en las cuales hemos presentado el problema en un contexto de aprendizaje y en el marco de una secuencia de actividades, y ha mostrado sus bondades didácticas, como lo hemos manifestado al iniciar este apartado y en los artículos citados. Con base en experiencias como éstas, formulamos en la siguiente sección algunos lineamientos para incluir problemas de optimización en la educación básica.

6.2 LINEAMIENTOS GENERALES

Los problemas examinados en la sección anterior, a la luz de las experiencias desarrolladas y los análisis efectuados en el marco del EOS, nos llevan a considerar que es fundamental, por razones matemáticas y didácticas, incluir problemas de optimización en la educación básica y desarrollar actividades individuales y grupales con los estudiantes para estimular su intuición optimizadora, su capacidad de conjeturar y su capacidad de hacer razonamientos rigurosos, como parte de su formación científica que complementa la intuición. Evidentemente un importante punto de partida es contar con los problemas de optimización y en esa perspectiva está nuestro primer lineamiento, que lo consideramos más viable en el corto plazo. Los otros dos lineamientos no descartan o sustituyen el primero. Son un tanto más ambiciosos, y complementarios al primero, pues el segundo se refiere a modificaciones en los métodos de enseñanza aprendizaje, por lo menos en algunos capítulos de la matemática – en este caso los más vinculados a problemas de optimización – y el tercero se refiere a la inclusión de nuevos temas en el currículo de la educación básica.

En Font (2000, pp. 281-282) y Ramos (2006, pp.171-173) se reflexiona sobre la viabilidad de una nueva propuesta de significado pretendido utilizando la metáfora "zona de desarrollo próximo", (ZDP) la cual estructura la problemática de la viabilidad de una propuesta nueva en los términos de la teoría psicológica de Vygotsky. Dicha metáfora la concretan estos autores en los siguientes principios que la hacen operativa:

1. La institución puede permitir una modificación del significado pretendido siempre que la nueva propuesta se sitúe dentro de la ZDP de la institución. Dicho de otra manera, la institución no está en condiciones de asumir "cualquier" innovación. Los motivos pueden ser diversos, pero uno de los más determinantes para rechazar una nueva propuesta es que el profesorado considere que no tiene las competencias que la nueva propuesta requiere.
2. Esta ZDP depende de la historia de la institución, del tipo de organización, de lo que los profesores "saben" (por ejemplo, si tienen las competencias que la nueva propuesta requiere), etc. Esto quiere decir, que nuevas propuestas que se pueden convertir en el significado pretendido en otras instituciones escolares no tienen porque tener futuro en la institución considerada.

3. La posibilidad de supervivencia de la nueva propuesta de significado institucional pretendido es inversamente proporcional a la distancia que la separa de la propuesta actual. Pequeñas variaciones tienen más posibilidad de convertirse en habituales, mientras que grandes variaciones corren el peligro de desaparecer más fácilmente.

4. Las posibilidades de supervivencia de la nueva propuesta son inversamente proporcionales a la complejidad organizativa que implica la nueva propuesta. Si la nueva propuesta implica condicionantes horarios, aumento de las horas dedicadas a la asignatura, uso del aula de informática, reducción de ratios, etc. tiene menos posibilidades de supervivencia que si no lo hace.

5. Puesto que un cambio en el significado pretendido puede conllevar un cambio importante en el contrato didáctico asociado, la posibilidad de supervivencia de la nueva propuesta de significado institucional pretendido es inversamente proporcional a la distancia que separa el nuevo contrato didáctico asociado del vigente antes del cambio.

6. Cuando se prima el criterio de la falta de medios (sobre todo temporales), a la hora de valorar la idoneidad de un posible cambio, de hecho se está dirigiendo la atención hacia el punto 4 y se desplaza la responsabilidad del cambio a la "institución escolar". En cambio, si se priman otros criterios (por ejemplo la motivación, el interés para el desarrollo profesional, etc.) se está dirigiendo la atención hacia el punto 5 y la posibilidad del cambio queda en manos tanto de la institución como de cada profesor. Dicho de otra manera, cuando no se prima el criterio mediacional (tiempo) las posibilidades de supervivencia de la nueva propuesta aumentan ya que los cambios a realizar son más próximos al docente (cambio de metodología, de contrato didáctico, etc.).

7. Si una propuesta innovadora presenta un alto grado de acuerdo con una parte del significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado (lo que se debería hacer) y, por otra parte, el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado presenta un alto grado de conflicto con el significado pretendido actualmente vigente en la institución, dicha propuesta innovadora tiene posibilidades de convertirse en una parte de un nuevo significado pretendido, implementado y evaluado cuando la institución implicada tiene autonomía para decidirlos.

En nuestra opinión, los principios anteriores muestran la dificultad que implica el "cambio institucional", por lo que en esta tesis ponemos énfasis en nuestra propuesta de introducir problemas de optimización en la educación básica (primer lineamiento) teniendo en cuenta, sobre todo, los principios 3 y 5 que acabamos de comentar.

6.2.1. Primer Lineamiento

Incluir problemas de optimización en todos los grados de la primaria y la secundaria. Basta saber reconocer la relación de orden entre números naturales para poder plantear a los alumnos situaciones en las que deben encontrar el mayor o el menor número, de entre un conjunto de alternativas. Ciertamente, en cada grado hay temas de matemática que se prestan de manera especial para proponer problemas interesantes de optimización y es fundamental que en los profesores, en los autores de textos y en los diseñadores de planes de estudio haya el convencimiento y la decisión de considerar estos problemas, con creatividad y buscando estimular la intuición y el pensamiento matemático de los estudiantes. La vida diaria desafía cada vez más a tratar de elegir lo óptimo en diversas circunstancias. Demos a nuestros estudiantes oportunidades de ejercitar su intuición optimizadora y sus recursos formales de optimización, proporcionándoles problemas de búsqueda de máximos y mínimos desde los primeros grados.

Ya hemos visto varios problemas que sirven como referencia para su construcción, para la propuesta de actividades y para su solución; a continuación sugerimos algunos problemas para primaria, indicando la parte del diseño curricular con el que se corresponden y el grado de primaria en el que se podrían trabajar, tomando como referencia esencialmente los logros de aprendizaje que figuran en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (DCNEBR) vigentes (Ministerio de Educación, 2005). En algunos casos sugerimos la forma concreta en la que podría presentarse el problema a los niños, según las experiencias tenidas. Ciertamente, la ubicación del problema en un grado específico hay que relativizarla, teniendo en cuenta la brecha que hay entre la enseñanza planificada (el significado pretendido en la terminología del EOS) y la enseñanza realmente implementada (el significado implementado en la terminología del EOS). Según los niveles que se hayan alcanzado en grados anteriores o los que se vayan alcanzando en el mismo grado, pueden hacerse las adecuaciones del caso o plantearlos en grados superiores a los que acá sugerimos.

6.2.1.1. Propuestas de problemas para primaria

Ƴ **En el DCNEBR dice:**

Logros de aprendizaje en el III Ciclo de Educación Básica Regular

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

“Resuelve problemas para cuya solución se requiere aplicar estrategias y conceptos de las operaciones de adición y sustracción de números naturales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones”

Primer grado de primaria

Capacidades y actitudes

- Establece relaciones “mayor”, “menor”, “igual” y ordena números naturales menores o igual que 20.
- Resuelve problemas de adición de números naturales cuyo resultado sea menor que 100, sin canjes y con canjes.
- Resuelve problemas de sustracción de números naturales menores que 100, sin canjes.

En este marco, se pueden usar en clases problemas de optimización como los siguientes:

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

Ideas generales

a) Hallar el mayor (o el menor) valor de la suma de dos elementos de un conjunto dado de números naturales.

b) Hallar el mayor (o el menor) valor de la diferencia de dos elementos de un conjunto dado de números naturales.

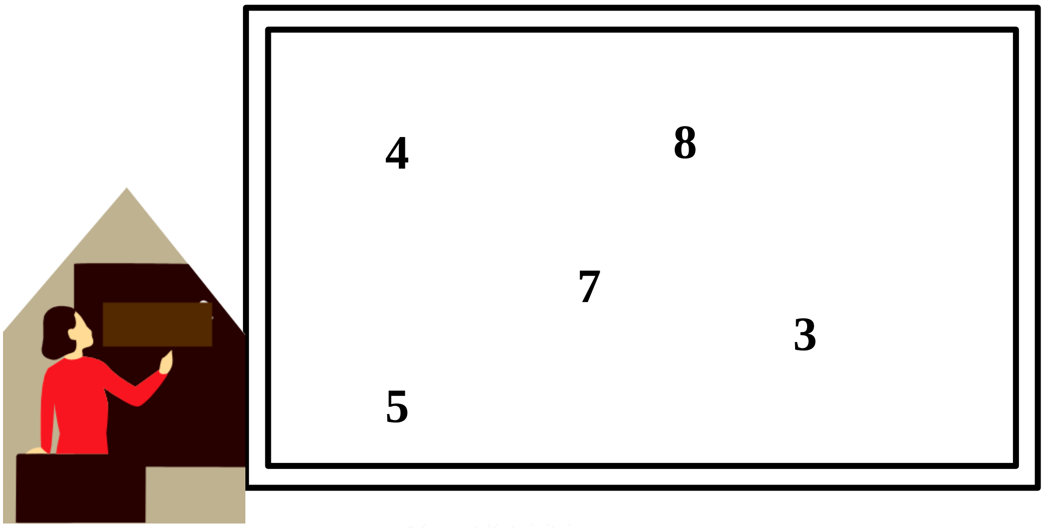
Problemas concretos

1. Jorge escribe en la pizarra los números 4, 7, 3, 8, y 5. ¿Cuál es el mayor número que se puede obtener sumando dos de los números que escribió Jorge?

2. Jorge escribe en la pizarra los números 4, 7, 3, 8, y 5. ¿Cuál es el menor número que se puede obtener sumando dos de los números que escribió Jorge?

Con estas ideas se pueden formular muchos otros problemas, considerando otros conjuntos de números y efectuando sustracciones en lugar de adiciones. Algunas reflexiones, problemas y situaciones lúdicas pueden encontrarse en Malaspina, U. (2005b, 2006b, 2007b); en particular en UNION, No. 9

A continuación mostramos una forma concreta de presentar problemas como estos a los niños:



En la pizarra están los números que escribió la profesora Norma.

1. Panchito escogió dos números de la pizarra y los copió en los cuadros de abajo.
   Escribe tú el resultado de sumar dichos números.

   $\boxed{4} + \boxed{5} =$

2. Ahora tú escogerás dos números de la pizarra, que sean diferentes entre sí.
   Debes escogerlos de tal manera que cuando los copies en los cuadros de abajo y los sumes, obtengas como resultado un número mayor que el que resultó al hacer la suma con los números que escogió Panchito.

   $\boxed{} + \boxed{} =$

3. Y ahora escoge dos números de la pizarra, siempre diferentes entre sí, de tal manera que cuando los copies en los cuadros de abajo y los sumes, obtengas como resultado el <u>mayor</u> número que es posible conseguir.

   $\boxed{} + \boxed{} =$

Segundo grado de primaria

Capacidades y actitudes

- Representa gráficamente la adición y sustracción de números naturales menores que 100 en una recta graduada.
- Resuelve problemas de multiplicación de números de un solo dígito y de números de un dígito por 10

En este marco, se pueden usar en clases problemas de optimización como los siguientes:

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

Ideas generales

a) Hallar las distancias máxima y mínima entre determinados puntos de una recta.

b) Dados tres dígitos adecuados, expresar otro número como suma de algunos de estos, de modo que se tenga el mínimo de sumandos.

c) De un conjunto dado de números naturales, escoger aquellos cuyo resultado con una operación esté determinado y cuyo resultado con otra operación sea el máximo o el mínimo.

Problemas concretos

1. María ha marcado en su regla los números 15, 12, 28, 7 y 21. ¿Cuál es la <u>menor</u> distancia que hay entre dos de los números que ha marcado María?
2. María ha marcado en su regla los números 15, 12, 28, 7 y 21. ¿Cuál es la <u>mayor</u> distancia que hay entre dos de los números que ha marcado María?
3. Rita vende leche y tiene tres baldes para medir: uno de 2 litros, otro de 3 litros y el tercero de 5 litros.¿Cuál es el menor número de veces que puede usar sus baldes para medir 14 litros?
4. En la expresión 10 = + , escribe números en las casillas, de modo que al multiplicarlos, el resultado sea el mayor posible.
5. Carmen ha escrito en la pizarra los números 5, 8, 2, 6 y 9. Escoge dos de estos números, de manera que cumplan las dos condiciones siguientes: que su suma sea menor que 15, y que su producto sea el mayor posible.

Ÿ **En el DCNEBR dice:**

Logros de aprendizaje en el IV Ciclo de Educación Básica Regular

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

"Resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales y de la adición y sustracción de fracciones. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones"

Tercer grado de primaria

Capacidades y actitudes

- Resuelve problemas de multiplicación de dos números naturales de un dígito y de un número natural de dos dígitos por otro de un dígito.
- Resuelve problemas que implican la estimación y el cálculo de operaciones combinadas de adición y sustracción con números naturales menores que 1000, aplica propiedades.

En este marco, se pueden usar en clases problemas de optimización como los siguientes:

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

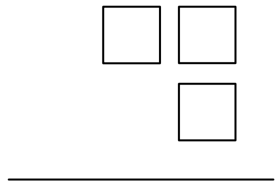
Ideas generales

a) Dado un conjunto de dígitos, usarlos para dar ejemplos de multiplicaciones de un número de dos dígitos por otro de un dígito, de modo que el producto sea máximo o mínimo.

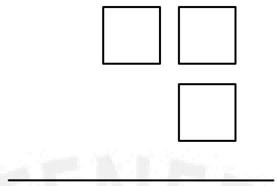
b) Construir secuencias de números, con término inicial y final dados, de modo que se pueda pasar de un término al siguiente sólo multiplicándolo por un número de un dígito o sumándole (o restándole) un número pequeño. La secuencia debe tener el menor número posible de términos.

Problemas concretos

1. Juan escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3. Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el <u>mayor</u> posible



2. Juan escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3. Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el <u>menor</u> posible



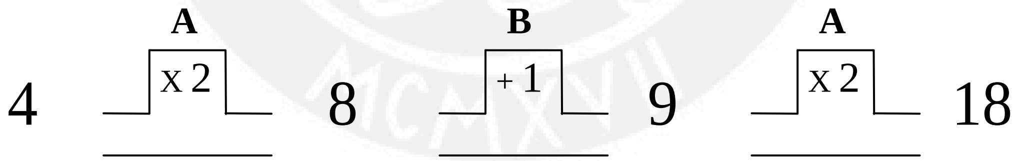
3. Se dispone de dos "máquinas" que transforman números: la máquina A multiplica por 2 y la máquina B suma 1. Partiendo del número 5, llegar al número 32 usando las máquinas el menor número posible de veces.

A continuación mostramos una manera concreta de presentar este problema a los niños:

Se tienen dos máquinas que transforman números: La máquina **A** multiplica por 2 y la máquina **B** suma 1.

Utilizando solamente las máquinas, se puede partir de un número y se puede llegar a otro número.

Por ejemplo, se puede partir del número 4 y llegar al número 18:



1. Haz un dibujo que indique cómo llegar a 32, partiendo del número 5, usando solamente las máquinas **A** y **B.** Tú decides el orden y el número de veces que uses las máquinas **A** y **B.**

5 32

2. ¿Cómo harías para llegar a 32, partiendo de 5, pero usando las máquinas **A** y **B** el <u>menor número de veces</u>?

5 32

Logros de aprendizaje en el V Ciclo de Educación Básica Regular

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

Formula y resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de las operaciones con números naturales, fracciones y decimales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.

Sexto grado de primaria

Capacidades y Actitudes

- Establece relaciones "mayor", "menor", "igual" y ordena números naturales, fracciones y números decimales exactos hasta los centésimos.
- Resuelve y formula problemas de operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones.
- Resuelve problemas que implican el uso del MCM y el MCD.

En este marco, se pueden usar en clases problemas de optimización como los siguientes:

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

Ideas generales

a) Hallar los elementos mínimo y máximo de un conjunto finito de fracciones
b) Determinar el valor mínimo y el máximo que puede tomar una o más variables, si éstas tienen la restricción de pertenecer a determinado conjunto finito de fracciones.
c) Plantear situaciones problemáticas de MCM o de MCD que no estén directamente relacionadas con las palabras mínimo y máximo respectivamente, a fin de pensar en el concepto y no seguir mecánicamente una sugerencia implícita para la solución.

Problemas concretos

1. Si A = {2/3, 3/ 4, 7/9, 3/5},

   ¿Cuál de los elementos de A es el mínimo?

   ¿Cuál de los elementos de A es el máximo?

2. Si x es una variable que sólo puede tomar valores en el conjunto
   A = {2/3, 3/ 4, 7/9, 3/5},

   a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar x?
   b) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x?

3. Si a es una variable que sólo puede tomar valores en el conjunto

   A = {2/3, 3/ 4, 7/9, 3/5} y b es una variable que sólo puede tomar valores en el conjunto B = { 3/2, 4/3, 9/7, 5/3},

   a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $a + b$?
   b) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $a – b$?
   c) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $b – a$?

   Con los mismos conjuntos de números o con otros similares puede construirse problemas en los que se tenga que examinar, algunas de las siguientes preguntas

   a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar ab?
   b) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar a / b?
   c) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar b / a?
   d) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar $a + b$?
   e) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar $a – b$?
   f) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar $b – a$?

4. Si p y q son variables que sólo pueden tomar valores en el conjunto

   A = {2/3, 3/ 4, 7/9, 3/5},

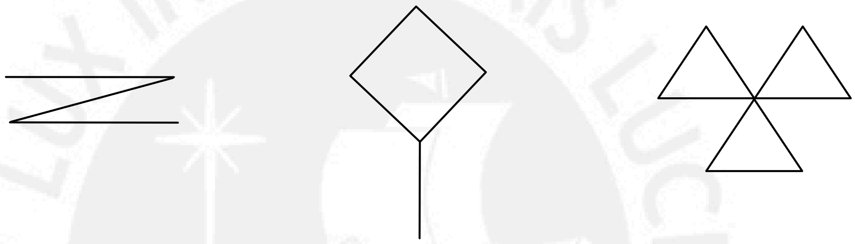
   a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $p + q$?
   b) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $p – q$?

   Con el mismo conjunto de números o con otros similares puede construirse problemas en los que se tenga que examinar, algunas de las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar pq?
b) ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar p / q?
c) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar $p + q$?
d) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar $p - q$?
e) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar pq?
f) ¿Cuál es el menor valor que puede tomar p / q?

Se puede pedir examinar las preguntas considerando dos situaciones: se admite que p igual a q, y no se admite que p igual a q.

5. Un alambre se debe doblar en tramos iguales formando cualquiera de las siguientes figuras



Si en cada caso, cada lado o tramo de la figura que se forme debe tener un número entero de centímetros y el alambre debe medir menos de un metro ¿cuál es la mayor longitud que puede tener el alambre?

- **En el DCNEBR dice:**

Componente GEOMETRIA Y MEDIDA

• Formula y resuelve problemas que implican relaciones métricas: longitud, superficie, volumen, tiempo, y masa. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.

Sexto Grado de primaria

Capacidades y Actitudes

- Resuelve problemas que implican relaciones entre áreas y perímetros de figuras geométricas: triángulo, cuadrado, rectángulo.
- Resuelve problemas sobre volúmenes de prismas y cilindros en dm^3 y cm^3.

En este marco, se pueden usar en clases problemas de optimización como los siguientes:

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ideas generales

a. Luego de experimentar que es posible tener rectángulos con el mismo perímetro y áreas diferentes, hacer lo mismo para triángulos y proponer problemas de optimización isoperimétricos.

b. Dadas dos figuras planas de perímetro conocido, formar otras pegándolas por sus lados, de modo que la nueva figura plana tenga perímetro máximo o mínimo.

c. Dada una hoja rectangular de papel, usarla para construir, sin cortar, las paredes de un prisma recto de base cuadrada que tenga el máximo volumen posible.

Problemas concretos

1. Examinar experimentalmente, usando material concreto (hilos, papel milimetrado, etc.), la construcción de
   a) Rectángulos del mismo perímetro y áreas diferentes
   b) El rectángulo de mayor área cuyo perímetro es conocido
   c) El rectángulo de menor área cuyo perímetro es conocido

2. Con una cuerda que unida por sus extremos mida 25 cm, examinar, manipulando con tres dedos, la construcción de:
   a) Triángulos de perímetro 25 cm y áreas diferentes
   b) Triángulos de perímetro 25 cm y de la misma área
   c) El triángulo de mayor área cuyo perímetro sea 25 cm.
   d) El triángulo de menor área cuyo perímetro sea 25 cm.

3. Problema de las láminas rectangulares (Comentado ampliamente en el apartado 6.1.2.)

4. Dada una hoja rectangular de papel ¿cómo debo doblarla para formar las cuatro paredes de un prisma recto de base cuadrada, cuyo volumen sea el mayor posible? ¿Se haría lo mismo con otra hoja de dimensiones diferentes?¿Se puede obtener conclusiones generales?

En el Anexo 6B reproducimos el artículo de Malaspina (2007a, 11, pp. 197-204) en el cual se trata ampliamente sobre uno de los problemas sugeridos.

6.2.1.2. Propuestas de problemas para secundaria

Como ya hemos examinado los problemas de los textos de secundaria y hemos comentado ampliamente algunos problemas para este nivel, y sugerido secuencias de actividades individuales y grupales, en esta parte nos limitamos a dar una lista de problemas de optimización que pueden aplicarse en clases en secundaria, ubicándolos en el grado más conveniente según los conocimientos previos que tengan los alumnos y como parte de los contenidos básicos más pertinentes. Algunos de ellos ya los hemos comentado, pero los volvemos a enunciar como parte de la propuesta.

Problema A

> Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.
>
> (Lo hemos comentado en el capítulo 4.
>
> Para quinto grado de secundaria. Podría usarse también en cuarto.)

Problema B

> Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.
>
> (Lo hemos comentado en el capítulo 4.
>
> Para primer grado de secundaria.)

Problema C

> Problema de las láminas rectangulares
>
> (Lo hemos comentado ampliamente en la sección 6.1.1.
>
> Para primer grado de secundaria. Puede usarse en cuarto grado para ilustrar el uso de funciones lineales afines. Por su sencillez, también puede usarse en primaria.)

Problema D

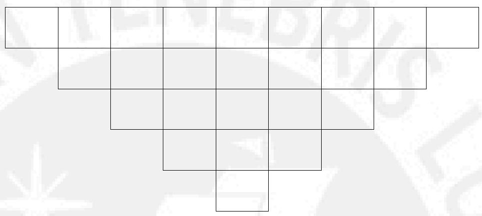
Determinar el perímetro mínimo que puede tener una región poligonal construida con *n* cuadrados, cada uno de área 1.

(Ampliamente comentado en Malaspina 2006b, 6, pp. 73-78. Lo comentamos también en la sección 6.2.2. a propósito de la construcción de funciones.

Para quinto grado de secundaria.)

Problema E

Considera un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.



En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa, con letras, de acuerdo con la siguiente regla: si se eligen tres casillas consecutivas de una fila entonces se escribe debajo de la casilla del centro la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas.

¿Cuál es la mínima cantidad de letras A que se debe escribir en la primera fila para asegurar que, en cualquier orden en que estas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

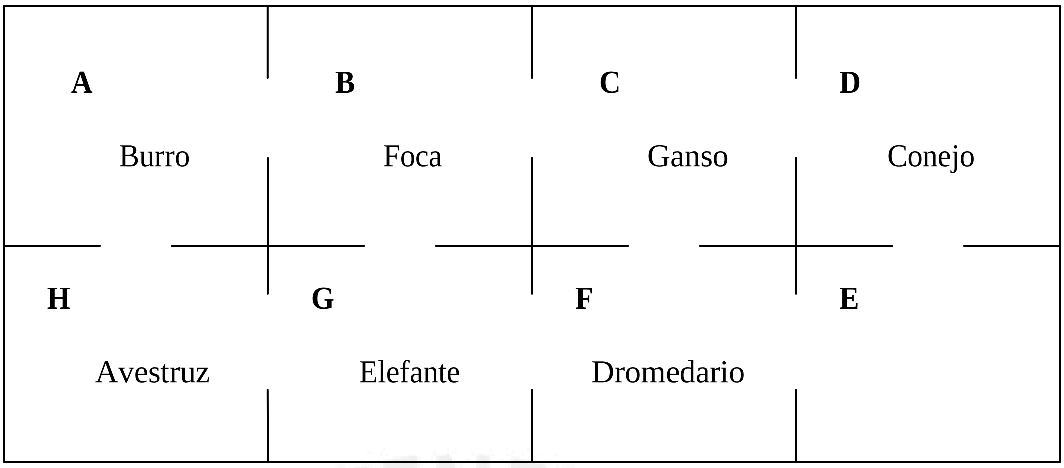
(Ampliamente comentado en Malaspina 2006b, 8, pp. 113-117.

Para cualquier grado de secundaria. Ilustrativo para el uso de condiciones suficientes y contraejemplos.)

Problema F[3]

En un zoológico las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura:

[3] Problema proporcionado por el doctor Andre Antibí



Halla el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal, teniendo en cuenta que

- Un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente.
- Nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula.

(Se da la solución en el Anexo 6C.

Para cualquier grado de secundaria. Ilustrativo por no requerir conocimientos matemáticos previos específicos de la secundaria y mostrar un método de solución de problemas de optimización.)

Problema G

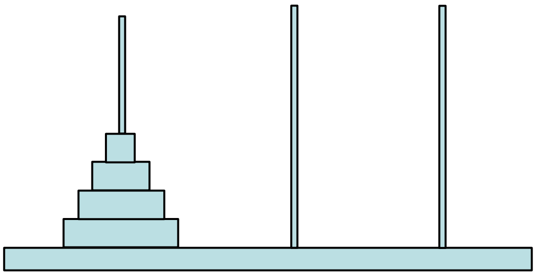
Dada una recta L y dos puntos, A y B, ambos en uno de los semiplanos determinados por la recta, determinar el punto P en L de modo que la suma de la distancias de A a P y de P a B sea la menor posible.

(Problema muy conocido – Problema de Herón, del rayo de luz – muy interesante por su solución geométrica usando el simétrico de uno de los puntos, digamos de B, respecto a la recta y trazando el segmento de A al simétrico de B. Interesante también por sus vinculaciones con la física y las múltiples posibilidades de contextualizarlo y de hacerle diversas variaciones.

Para cualquier grado de secundaria, según los significados pretendidos.)

Problema H

Se tienen tres varillas y cuatro discos de diferentes tamaños, apilados como se muestra en la figura. Los discos tienen una perforación en el centro para insertarlos en las varillas.



Se deben trasladar los cuatro discos a otra de las varillas, previamente determinada, ubicándolos en el mismo orden y respetando las siguientes reglas de juego:

1) Un movimiento es el traslado de un disco de una varilla a otra.
2) Sólo se puede mover un disco a la vez.
3) Cada disco que se retira de una varilla debe llevarse directamente a otra varilla.
4) En ningún momento debe estar ubicado un disco cualquiera sobre otro de menor tamaño.

¿Cuál es el menor número de movimientos?

(Antiguo problema conocido como "*Las torres de Hanoi*", planteado como uno de optimización discreta. En el Anexo 6D se reproduce el artículo de Malaspina (2007b, 10, pp. 175-181) en el que se muestra el uso de una notación ad hoc, diagramas de árbol, razonamiento inductivo y diversas formas de obtener una función cuando se tienen *n* discos.

Para cualquier grado de secundaria como problema lúdico y para cuarto grado si se usa en los capítulos de sucesiones y funciones.)

En el Anexo 6E damos una lista de algunos problemas adicionales de optimización, no rutinarios, relacionados con temas matemáticos en los que normalmente no se proponen problemas de optimización. Como hemos comentado en el capítulo anterior, hay pocos problemas de optimización en los textos de educación básica; por ello, para seguir el primer lineamiento que estamos proponiendo, se requiere buscarlos en otros libros o en problemas de competencias matemáticas o crearlos.

6.2.1.3. Creación de problemas

Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor sabe la realidad específica en su aula y en consecuencia los estímulos y desafíos que debe brindar a sus alumnos mediante problemas adecuados, que no siempre se encuentran en los textos. Surge entonces el desafío para el propio profesor de crear los problemas matemáticos y las secuencias de actividades con las que debe presentarlos a sus alumnos. Consideramos que la actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada.

Además, la tarea de crear problemas no debe ser actividad exclusiva de los profesores, sino también estimulada por estos a sus alumnos, como parte de las actividades en la solución de problemas, buscando variaciones al problema dado, casos particulares, generalizaciones, conexiones y contextualizaciones. Se genera así una dinámica interesante en las clases, pues generalmente se llega a nuevas dificultades creadas por los mismos estudiantes, que requieren la introducción de nuevos conceptos o técnicas para superarlas, o a ser conscientes de las limitaciones de los recursos matemáticos disponibles y de la importancia de conocer nuevos campos de la matemática.

Si bien es cierto que puede ser muy subjetivo considerar un problema como bueno – porque esto depende no sólo de quien resuelve o crea el problema, sino de los objetivos y del contexto en el que se propone – los criterios de idoneidad establecidos en el EOS pueden ayudar a valorar la "bondad" o "idoneidad de un problema". Dichos criterios son la idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica, que han sido detallados en la sección 2.5.9 del capítulo 2 de esta investigación.

Teniendo en cuenta estos criterios de idoneidad y, sobre todo, por las experiencias desarrolladas en diversos niveles educativos, consideramos – ampliando lo que dijimos en Malaspina 2004, p. 492 – que la configuración epistémica de un "buen" problema desde el punto de vista didáctico, debería cumplir con lo siguiente:

Lenguaje:

Claridad en el enunciado, de modo que

- *Los alumnos perciban claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)*
- *La dificultad no sea demasiado grande y se perciba que la solución es alcanzable.*
- *Los alumnos perciban que es interesante o útil resolver el problema.*

Conceptos:

Los alumnos tienen conceptos previos suficientes para que

- *Perciban claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.).*
- *La dificultad no sea demasiado grande y se perciba que la solución es alcanzable.*
- *Favorezca establecer conexiones matemáticas, ya sea entre temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.*
- *Favorezca crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.*

Proposiciones:

Los alumnos conocen proposiciones y propiedades suficientes para que

- *La dificultad no sea demasiado grande y se perciba que la solución es alcanzable.*
- *Favorezca establecer conexiones matemáticas, ya sea entre temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.*
- *Favorezca crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.*

Procedimientos:

Hallar lo que se pide estimule procedimientos que

- *Favorezcan intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.*
- *Favorezcan hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas.*

Argumentos:

Que la obtención de resultados parciales y el resultado final

- *Favorezca el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos.*
- *Favorezca hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas.*

Así, a continuación enunciamos algunas características de un "buen" problema desde el punto de vista didáctico y entre paréntesis indicamos la o las idoneidades con las que están vinculadas.

a. La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (cognitiva)

b. Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (interaccional, emocional y cognitiva)

c. Favorece hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas. (interaccional y mediacional)

d. Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (emocional y ecológica)

e. Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (epistémica y ecológica)

f. Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (interaccional y cognitiva)

g. Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos (epistémica)

h. Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (epistémica)

Observaciones:

1. La idoneidad epistémica tiene que ver con "hacer matemáticas". Es en este sentido su vinculación con *e*, *g* y *h*, pues establecer conexiones matemáticas, usar relaciones lógicas y crear nuevos problemas es esencial en la actividad matemática.

2. La idoneidad interaccional tiene que ver con el "camino" que permite superar las dificultades para hallar la solución. Es en este sentido su vinculación con *b*, *c* y *f*: la *f* permite ver el inicio del camino, la *b* el camino, y la *c* "hacer el camino".

3. La característica *b*, además de su vinculación con la idoneidad interaccional la vinculamos con la emocional, pues consideramos que si se intuye un camino para resolver el problema, no habrá frustración, ya que algo se intentará. También - en cierta medida - cognitiva, porque abre las posibilidades para resolver el problema.

4. La vinculación de la característica *d* con la idoneidad ecológica es por la utilidad que se perciba en la solución del problema.

6.2.1.4. Algunos métodos a tener en cuenta

Para concluir esta sección, daremos una lista con algunos métodos que suelen utilizarse en la solución de problemas de optimización; sin embargo, damos antes algunas recomendaciones:

1. Partir de situaciones muy sencillas y con problemas de dificultad baja.
2. Hacer modificaciones al problema introduciendo dificultades mayores gradualmente.
3. Dar tiempo para que los estudiantes tengan aproximaciones intuitivas a una solución del problema.
4. Para cada problema, tener una visión global de los métodos para resolverlo.
5. Se debe tratar de educar en el rigor, pero sin sacrificar la intuición.
6. Las exigencias de rigor y de formalización deben ser de acuerdo al nivel de los estudiantes.

Según las experiencias tenidas y los problemas expuestos en esta investigación, mencionamos algunos métodos que pueden servir de orientación al resolver problemas de optimización, complementarios a los métodos y recomendaciones para la resolución de problemas en general:

I. Hacer representaciones gráficas y visualizaciones geométricas

   (Problemas A, B, C, D, G)

II. Usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica

   (Problemas isoperimétricos y sus “duales” de área dada y perímetro mínimo)

III. Si se busca un camino para llegar a determinado objetivo, “pensar en el camino inverso”

   (Problema B)

IV. Usar diagramas de árbol

   (Problemas B y H)

V. Identificar situaciones equivalentes en el conjunto en el que se busca el máximo o el mínimo

(Problemas C, D y E)

VI. Definir una función objetivo, graficarla y hacer operaciones algebraicas

(Problema A y 3 de sección 6.2.3.)

VII. Mostrar una cota inferior *k* del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el mínimo es *k*.

(Problema F)

Argumento similar, con las adecuaciones del caso, se puede aplicar a algunos problemas de búsqueda de máximo.

6.2.2. Segundo Lineamiento

En el primer lineamiento estamos proponiendo una variación respecto de la enseñanza habitual, que es la incorporación puntual de problemas de optimización en diferentes unidades didácticas. Se trata de una pequeña variación que no implica condicionantes horarios, aumento de las horas dedicadas a la asignatura, uso de laboratorios de informática, etc. En todo caso, se trataría de un pequeño cambio del contrato didáctico para dar cabida a la resolución de problemas (dejar un tiempo para su resolución, trabajo individual y en grupo, etc.).

Se puede ir más allá y optar por variaciones más significativas en la enseñanza habitual, que las que sugerimos en el primer lineamiento. Así, nuestro segundo lineamiento es modificar los contenidos y la metodología de algunas unidades didácticas de manera que se tengan mejores condiciones para la incorporación de problemas de optimización, su análisis y su solución.

Evidentemente, un tema fundamental – y no sólo para los problemas de optimización – es el de *funciones*. Ya nos hemos referido a él al examinar los textos de secundaria y al hacer las configuraciones epistémicas en el capítulo anterior. Nuestra propuesta es tratar seriamente las funciones, con una metodología activa, basada en la resolución de problemas, en el marco de una configuración epistémica empírica y teniendo en cuenta los criterios de idoneidad que considera el EOS en la instrucción matemática. Esto implica, en términos prácticos, no encasillarse en el formalismo, estimular las percepciones intuitivas y fomentar pasos frecuentes entre lo gráfico, lo formal, lo intuitivo y un contexto adecuado.

A continuación explicitamos una configuración epistémica sobre este tema:

Lenguaje:

Verbal: enunciados que expresan relaciones entre dos magnitudes

(Ejs. en cada instante del tiempo una persona tiene un determinado peso; a la longitud de cada lado de un cuadrado le corresponde el cuadrado de esa longitud, que expresa su área)

Simbólico: (Ej. $f(x) = x^2$)

Cuadros: Presentación de diversos datos en tablas (tabulaciones)

Gráfico: Representar en el sistema cartesiano los pares de puntos correspondientes a una función.

Situaciones:

Problemas introductorios contextualizados, relacionando magnitudes.

Conceptos:

Conceptos previos: magnitud, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, área de un cuadrado

Definidos: función, variable, dominio, rango, función creciente, función decreciente, valor máximo y valor mínimo de una función. Función suma y función producto, composición de funciones, función inyectiva, función inversa, función definida por tramos.

Procedimientos:

Graficar funciones, reconocer funciones y tipos de funciones, gráfica y analíticamente, relacionando ambos procedimientos. Visualizar traslaciones, dilataciones y contracciones. Sumar funciones y visualizar gráficamente la operación. Examinar gráficamente los valores extremos de una función y cómo se afectan (o no) por traslaciones verticales y horizontales y por dilataciones y contracciones

Proposiciones:

Propiedades de las operaciones de adición y multiplicación de funciones. No conmutatividad de la composición

Argumentos:

Razonamientos inductivos y visuales. Ejemplos y contraejemplos.

Encontramos gran coherencia entre esta perspectiva y la importante observación de carácter matemático y didáctico que hacen sobre la definición de función Elon Lages Lima y colaboradores en el libro *La Matemática de la Enseñanza Media* (Lages Lima, E. et al, 2000, Vol. 1):

> Prácticamente todos los textos escolares de uso en el país definen una función $f : X \to Y$ como un subconjunto del producto cartesiano X x Y con las propiedades G1 y G2 arriba enunciadas[4]. Esa definición presenta el inconveniente de ser formal, estática y no transmitir la idea intuitiva de función como correspondencia, transformación, dependencia (una magnitud función de otra) o resultado de un movimiento. ¿Quién pensaría en una rotación como un conjunto de pares ordenados?. Los matemáticos y (principalmente) los usuarios de la Matemática miran a una función como una correspondencia, no como un conjunto de pares ordenados. Se podría tal vez abrir una excepción para los lógicos, cuando quieren mostrar que todas las nociones matemáticas se reducen, en último análisis, a la idea pura de conjunto. Pero ciertamente este no es el caso aquí. Si definimos una función f : $X \to Y$ como un subconjunto particular del producto cartesiano X x Y, ¿Cuál sería la definición matemática del gráfico de una función? (p. 76)

Seguidamente, proponemos un ejemplo de cómo conjugar la perspectiva desarrollada sobre funciones, en una situación concreta, con actividades en una clase que podría ser en el cuarto año de secundaria:

A continuación se muestran las gráficas de las funciones f y g.

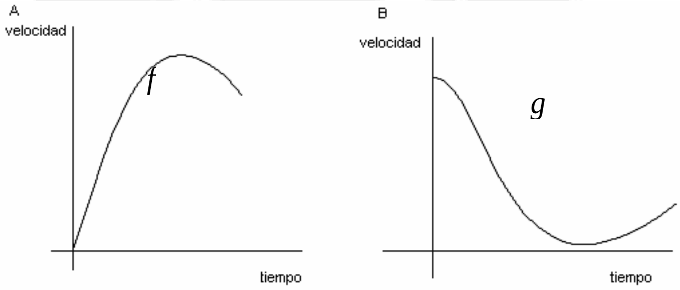


Figura 6.6

[4] G (f) = $\{(x, y) \in X \times Y ; y = f(x)\}$

G1: Para todo $x \in X$ existe un par ordenado (x, y) $\in$ G cuya primera coordenada es x.

G2: Si $p = (x, y)$ y $p' = (x, y')$ son pares pertenecientes a G, con la misma primera coordenada x, entonces $y = y'$ (esto es $p = p'$).

Actividades individuales.

1. Observando las gráficas y recordando que las funciones hacen corresponder a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente, explica qué cómo son las correspondencias en las funciones f y g.
2. Marca en cada gráfica el punto en el que la función correspondiente hace coresponder a la variable dependiente el valor más alto (el máximo) y también el punto en el que hace corresponder el valor más bajo (el mínimo). Puedes usar las letras M para máximo y m para mínimo.
3. Examina cuál es la diferencia esencial, en las formas de hacer corresponder valores, de las funciones f y g.

Actividades grupales

4. Comparar y discutir los trabajos individuales de los integrantes del grupo.
5. Marcar en el eje de la variable independiente de cada gráfico los tramos en los que la variable dependiente crece, según *f* y según *g* respectivamente.
6. Marcar en el eje de la variable independiente de cada gráfico los tramos en los que la variable dependiente decrece, según *f* y según *g* respectivamente.
7. Examinar cuál de las gráficas podría representar la variación de la velocidad de una pelota de básquetbol lanzada hacia la canasta, desde que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta. Explicar.
8. Describir con palabras el movimiento de un corredor, sabiendo que en cierta circunstancia (imaginarla y describirla) e intervalo de tiempo su velocidad varía como la función *f*.
9. Describir con palabras el movimiento de un corredor, sabiendo que en cierta circunstancia (imaginarla y describirla) e intervalo de tiempo, su velocidad varía como la función *g*.
10. Juan fue de su casa al colegio en 22 minutos, transcurridos de la siguiente manera: caminó 3 minutos hasta el paradero de microbuses, esperó 4 minutos la llegada del microbús, recorrió 15 minutos en el microbús, sin paradas y descendió en la puerta del colegio. Imaginar las velocidades que sean necesarias y hacer la gráfica de una función que represente las velocidades a las que recorrió Juan, en los 22 minutos.

6.2.2.1. Algunas conexiones intramatemáticas

Hay aspectos muy importantes vinculados con las propiedades de los números reales, con las desigualdades, con las funciones, con sus valores extremos, con sus gráficas y con la geometría analítica, que no son tratados en la secundaria y que son muy significativos tanto desde el punto de vista matemático como didáctico. Evidenciar las conexiones entre los temas citados da oportunidades de ejercicio de la intuición, de la formalización y el rigor.

A continuación damos algunas pautas en la línea de lo que acabamos de plantear:

I. Una propiedad fundamental de los números reales, que se enuncia pero que se la relaciona poco con otros temas es

$\forall \quad x \in \Re: \quad x^2 \geq 0$, y la igualdad se cumple si y solo si $x = 0$.

II. Una consecuencia natural de (I) es

$\forall \quad x, y \in \Re: \quad (x-y)^2 \geq 0$, y la igualdad se cumple si y solo si $x = y$.

III. Aplicando (II) para $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$ y propiedades conocidas de desigualdades, se obtiene la importante desigualdad entre media aritmética y media geométrica para dos números reales, que tampoco se usa en la secundaria, cuya aplicación hemos visto al iniciar este capítulo:

$\forall a,b \in \Re^+ : \quad \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, y la igualdad se cumple si y solo si $a = b$.

Vimos que una forma equivalente muy útil es:

$\forall a,b \in \Re^+ : \quad ab \leq (\dfrac{a+b}{2})^2$, y la igualdad se cumple si y solo si $a = b$.

IV. Conociendo la desigualdad entre medias aritmética y geométrica de dos números, resulta natural conjeturar su cumplimiento para más de dos números. Es importante manejar esa conjetura, hacer ejercicios de verificación de su cumplimiento y hacer la demostración para cuatro números, partiendo de la desigualdad entre medias para dos números, aplicando propiedades sencillas de desigualdades y nuevamente la desigualdad entre medias para dos números. En líneas generales:

$$\forall a,b \in \Re^+ : \quad \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$\forall c,d \in \Re^+ : \quad \sqrt{cd} \le \frac{c+d}{2}$$

Entonces $\forall a,b,c,d \in \Re^+ : \quad \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \le \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}$.

Por otra parte, por la desigualdad entre medias, aplicada a los números $\sqrt{ab}$ y $\sqrt{cd}$:

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \le \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} .$$

Así $\qquad 2\sqrt[4]{abcd} \le \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

Y en consecuencia, por transitividad y división entre 2:

$$\sqrt[4]{abcd} \le \frac{a+b+c+d}{4}.$$

La demostración para tres números puede verse como una aplicación de esta última desigualdad, considerando los números a, b, c y $\sqrt[3]{abc}$. [5]

V. Usando las desigualdades entre medias aritmética y geométrica se resuelven problemas interesantes de optimización, entre ellos los isoperimétricos y sus versiones "duales". Ilustremos, considerando sólo dos números reales positivos y la proposición final dada en (III):

$\forall a,b \in \Re^+ : \quad ab \le (\frac{a+b}{2})^2$, y la igualdad se cumple si y solo si $a = b$.

Si se conoce la suma de dos números reales positivos, entonces se puede conocer el valor máximo de su producto, que está dado por el segundo miembro de la desigualdad. Además, tal máximo se alcanza si se cumple la igualdad; y ésta ocurre cuando los números son iguales. Un caso concreto es que entre los rectángulos de perímetro dado (se asume lados de longitudes a y b y se conoce $2(a + b)$ y en consecuencia $a + b$), el que tiene mayor área es el cuadrado (ab, con tal condición, es máximo cuando $a = b$) y tal área (ab) es la potencia dos de la mitad del semiperímetro; esto es, $(\frac{a+b}{2})^2$.

[5] Con estas ideas se desarrolla la demostración general de Cauchy, usando inducción matemática.

Por otra parte, analizando la misma desigualdad, vemos que si se conoce el producto de dos números reales positivos, entonces se puede conocer el valor mínimo de su suma, que está dado por el doble de la raíz cuadrada del primer miembro de la desigualdad. Además, que tal mínimo se alcanza si se cumple la igualdad; y ésta ocurre cuando los números son iguales. Un caso concreto es que entre los rectángulos de área dada (se asume lados de longitudes *a* y *b* y se conoce *ab*), el que tiene menor perímetro es el cuadrado (*a* + *b*, con tal condición, es mínimo cuando *a* = *b*) y tal perímetro (2(*a* + *b*)) es 4 veces la raíz cuadrada del área ($4\sqrt{ab}$).

VI. Poco se avanzaría en el estímulo de la intuición y la formación científica si lo expuesto se diera como reglas o fórmulas a memorizar, sin que los alumnos las intuyan ni las entiendan. La relación entre lo algebraico, lo numérico y lo geométrico es fundamental. Si ya se sabe graficar rectas e hipérbolas equiláteras de la forma *xy* = K, se puede ilustrar en el plano cartesiano estas interpretaciones de la desigualdad entre medias. En el primer caso, trazando una recta *a* + *b* = C (por ejemplo *a* + *b* = 8) y buscando el rectángulo de mayor área con este semiperímeto. Reconociendo que los vértices de estos rectángulos son el origen de coordenadas, un punto de la recta trazada y puntos correspondientes en los ejes coordenados, se puede encontrar "experimentalmente", que – siguiendo el ejemplo – el rectángulo buscado es el cuadrado cuya área es $(\frac{8}{2})^2$.

Análogamente, graficando en el primer cuadrante una rama de una hipérbola de la forma *ab* = C (por ejemplo *ab*=4), se puede encontrar "experimentalmente" que el rectángulo de menor perímetro y área 4 (siguiendo el ejemplo) es el cuadrado cuyos lados miden 2 unidades, con lo cual su perímetro es $4\sqrt{4}$.

Para estas experimentaciones gráficas es suficiente usar papel cuadriculado (mejor si es milimetrado), pero si se dispone de software de geometría dinámica, puede experimentarse mejor, con variaciones continuas y números que se pueden ir mostrando en la pantalla conforme se va moviendo el punto en la recta (primer caso) o en la hipérbola (segundo caso).

Con un mayor manejo de la geometría analítica, también se pueden "descubrir" estos resultados fijando una gráfica y moviendo otra, según el caso. Así para el caso del perímetro dado se grafica una recta fija (el perímetro dado) y se busca la hipérbola de la forma xy = C que se interseque con esta recta para el mayor valor posible de C. Con "desplazamientos" de la hipérbola alejándose del origen ("hacia el Nor Este") se puede ver que la hipérbola tangente a la recta fija da la solución. Este es un método intuitivo muy usado en teoría económica. Para el otro caso se fija la hipérbola y se mueven las rectas paralelamente, acercándose al origen. Se puede ver también que el punto de tangencia da la solución.

VII. Veamos ahora algunas conexiones de la desigualdad referida en (I) con las funciones cuadráticas, sus valores extremos y el valor de la variable que da ese valor extremo.

Es importante notar (descubrir) que si $f(x) = x^2$ entonces $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Re$ y que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$; en consecuencia su gráfica está sobre el eje de abscisas y en este eje sólo tiene un punto, que es el (0; 0) y es el que se encuentra más abajo que todos los otros; es decir, f tiene un valor mínimo que es cero y que se obtiene cuando $x = 0$.

Conociendo la gráfica de f y verificando lo observado, se puede hacer razonamiento similar para funciones $g(x) = x^2 + K$, para diversos valores positivos y negativos de K. Como

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + K \geq K \ \forall K$ y la igualdad se cumple si y sólo si $x = 0$,

se puede ver gráfica y analíticamente que K es el valor mínimo de g y que éste se alcanza cuando $x = 0$; es decir, para el mismo valor de x que minimiza a f. La gráfica de g es sólo una traslación vertical de $|K|$ unidades hacia arriba o hacia abajo, según K sea positivo o negativo.

Análisis similares se pueden inducir mediante actividades y problemas, considerando las funciones

$h(x) = ax^2 + K$, con $a > 0$

$j(x) = ax^2 + K$, con $a < 0$ (caso de máximo)

$m(x) = a(x\text{-}c)^2 + K$, con $a > 0$, c cualquier número real (mínimo K, para x = c)

$n(x) = a(x\text{-}c)^2 + K$, con $a < 0$, c cualquier número real (máximo K, para x = c)

Y se puede hacer generalizaciones que permitan optimizar funciones como

$$q(x) = s(x) + K,$$

cuando $s(x) \geq 0$ ó $s(x) \leq 0$ para todo valor de x en el dominio de análisis del problema, o cuando se conocen los valores óptimos de s y en qué valores de x los alcanza.

6.2.2.2. Construir funciones

Lo que más se encuentra en los problemas relacionados con funciones es el tener que encontrar dominios, hacer las gráficas, hacer operaciones, etc., pero son poco frecuentes los problemas de construcción de funciones. Las situaciones de optimización también brindan oportunidades para construir funciones, teniendo en cuenta varias de las conexiones que acabamos de mencionar, como mostramos con el siguiente problema, examinado con detalle en Malaspina (2006, 6), narrando las experiencias didácticas de su uso en talleres con profesores de secundaria y con alumnos universitarios, pero que bien podría trabajarse con alumnos de secundaria, en el marco del lineamiento que estamos proponiendo.

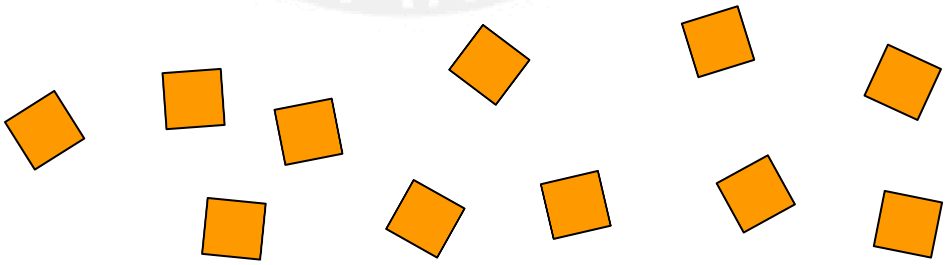
Problema:

> Determinar el perímetro mínimo que puede tener una región poligonal construida con n cuadrados, cada uno de área 1.

El problema fue trabajado presentando una situación particular y proponiendo actividades individuales y grupales:

Situación:

Se tiene 11 fichas cuadradas, todas del mismo tamaño.



Actividades individuales

Asumir que cada ficha es de perímetro 4

I. Construir con las 11 fichas, sin superposiciones, una región poligonal que tenga perímetro 18.

II. Construir con las 11 fichas, sin superposiciones, una región poligonal que tenga el menor perímetro posible.

Actividades grupales

1. Explicar cómo se construiría una región poligonal con 476 cuadrados, cada uno de área 1, de modo que tenga perímetro mínimo.
2. Hallar el perímetro de la región poligonal correspondiente a la actividad anterior.
3. Determinar el perímetro mínimo que puede tener una región poligonal construida con *n* cuadrados, cada uno de área 1.
4. Proponer otras actividades u otro problema a partir de lo trabajado.

Se llegó a obtener la función

$$P(n) = \begin{cases} 4\sqrt{n} & si \quad n = k^2, \quad k \in Z^+ \\ 4\sqrt{n-v}+2 & si \quad n = k^2+v, \; v \in Z, \quad 0 < v \le k, \\ & k^2 \, el\, entero\, más\, próximo\;\; a\;\; n \\ 2(1+\sqrt{4n-4w+1}) & si \quad n = k^2+k+w, \quad w \in Z, \; 0 < w \le k+1, \\ & k^2\, el\;\; entero\;\; más\; próximo\;\; a\;\; n \end{cases}$$

Relacionándola con la función “máximo entero” (o “mayor entero”), se usó la notación $k = \left[\sqrt{n}\right]$ (el mayor entero menor o igual que la raíz cuadrada de *n*) y la función *P*(*n*) se escribió como:

$$P(n) = \begin{cases} 4\sqrt{n} & si \quad n = [\sqrt{n}]^2 \\ 4[\sqrt{n}]+2 & si \quad n = [\sqrt{n}]^2+v, \; v \in Z, \quad 0 < v \le [\sqrt{n}] \\ 4[\sqrt{n}]+4 & si \quad n = [\sqrt{n}]^2+[\sqrt{n}]+w, \quad w \in Z, \; 0 < w \le [\sqrt{n}]+1 \end{cases}$$

Como comentamos en el capítulo anterior, otros temas muy importantes y naturalmente vinculados a los problemas de optimización son *Introducción a la programación lineal* y *Máximo* *común divisor y mínimo común múltiplo*. En ambos temas es frecuente reducir las clases a la enseñanza y aprendizaje de algoritmos para hallar los máximos y los mínimos, perdiendo valiosas oportunidades de ejercitar la intuición optimizadora desarrollando sesiones de trabajo en las que se resuelvan problemas efectuando actividades de dificultad graduada que vayan haciendo comprender los conceptos, entender los algoritmos y relacionarlos con otros temas de la matemática y de otros campos del conocimiento. En las secciones 5.2.2. y 5.2.3. hemos hecho observaciones y comentarios que consideramos deberían tenerse en cuenta por profesores y autores de textos al tratar ambos temas.

6.2.3. Tercer Lineamiento

Se podría ir más allá de los dos primeros lineamientos y optar por variaciones aún más significativas de la enseñanza habitual, como sería la inclusión de contenidos de matemáticas que no suelen incluirse en los currículos de educación secundaria, pero que dados los avances de las matemáticas, de la computación y de la ciencia en general, es necesario prever su inclusión, considerando la exclusión de algunos temas tradicionalmente integrantes de los planes de estudio en los niveles básicos, o la disminución de su énfasis. Uno de esos nuevos temas, a nivel elemental o introductorio, que tiene vinculaciones estrechas con la optimización, es la *teoría de juegos*, y varios otros son los considerados en las *matemáticas discretas*, entendida, de manera amplia, como la parte de la matemática que estudia las estructuras finitas y las numerables. Entre tales temas podemos considerar *elementos de teoría de grafos* y *teoría elemental de números* (en la cual se ubicaría la divisibilidad, m.c.m., m.c.d. y las ecuaciones diofánticas)

Reconocemos la dificultad de concretar esta propuesta, teniendo en cuenta las experiencias examinadas y comentadas de la inclusión relativamente reciente del capítulo de introducción a la programación lineal en el quinto año de secundaria. Hemos visto que su inclusión en los textos tiene más énfasis en aspectos algorítmicos que formativos y que para un significativo número de estudiantes universitarios, es uno de los temas que menos recuerdan haberlo estudiado en la secundaria.

Consideramos que las sesiones de resolución de problemas son buenas formas de aproximarse a estos temas y a continuación proponemos y comentamos algunos.

Problema 1[6]

> Con motivo de las fiestas navideñas, Carlos propone a sus dos únicos asistentes, Arturo y Benito, lo siguiente: ustedes, sin ponerse de acuerdo, ahora mismo deben hacerme un pedido por escrito. Lo que me pidan, yo lo haré. Tal pedido sólo puede ser uno de los siguientes:
>
> P1: Dele 300 soles a mi compañero.
>
> P2: Deme 100 soles.
>
> ¿Es predecible lo que pedirán Arturo y Benito, sabiendo que sus decisiones en casos como éste son muy racionales?
>
> El pedido que cada uno haga, ¿le hará ganar lo máximo que puede ganar en este juego?

Entender bien el problema, sistematizar la información adecuadamente y hacer uso de la intuición y la razón son esenciales para resolverlo.

En el Anexo 6F reproducimos el artículo de Malaspina (2002) de la exposición hecha en la *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*, realizada en la Universidad de Creta, en el cual se comentan aspectos matemáticos y didácticos sobre este problema y se presentan varios problemas similares.

Problema 2

> En una librería todos los precios de los libros están en números enteros y de esa librería Carmen compró 15 libros, entre libros para primero y para segundo grado. Compró más de los libros de segundo grado, aunque éstos son un poco más caros, pues cuestan 5 soles más que los de primero. Si en total pagó 205 soles, ¿cuántos libros de cada grado compró Carmen si se sabe que debió comprar por lo menos 2 libros de primer grado y el mayor número posible de libros de segundo grado?

Este es un problema con más variables que ecuaciones. Finalmente se llega a una ecuación con dos variables enteras. Es una ecuación diofántica lineal de dos variables. Este tipo de ecuaciones generalmente se estudia en capítulos de teoría elemental de números, por su vinculación con la divisibilidad y las congruencias aritméticas. En general, una ecuación diofántica lineal es de la forma $ax + by = c$, con a, b y c enteros, en la que se requiere determinar las soluciones enteras. El siguiente es un teorema conocido de existencia de solución

[6] Problema creado a partir de la versión de Aumann del conocido juego "el dilema del prisionero"

de una ecuación diofántica, que muestra una aplicación poco conocida del m.c.d. :

> La ecuación $ax + by = c$, con a, b y c enteros admite una solución entera (x_0 , y_0) si y sólo si el máximo común divisor de a y b es divisor de c.

En el Anexo 6G reproducimos una parte del artículo de Malaspina (2004b, Actas RELME 17, pp. 932-934) en el cual se comenta y examina algunas experiencias con profesores usando el siguiente problema de optimización en el que se llega a una ecuación lineal diofántica de dos variables.

Problema 3

> Entre varios amigos han reunido 4 soles para comprar chocolates y encargan a Juanito que vaya a comprar el mayor número posible de chocolates, debiendo gastar completamente los 4 soles. Juanito va a la bodega y encuentra que sólo hay chocolates de 0,30 soles y de 0,50 soles. Cuál es el mayor número de chocolates que puede comprar Juanito?

Se comentan varias formas de resolverlo, entre ellas el ensayo y error, revelando intuición optimizadora; sin embargo es importante, formativo e integrador, conocer métodos formales. Uno de ellos es considerando la ecuación diofántica $3x + 5y = 40$, donde x e y representan números de chocolates de 30 y de 50 céntimos respectivamente. Observemos que la existencia de soluciones enteras está garantizada porque 3 y 5 son primos entre sí, y en consecuencia su m.c.d. es 1, que obviamente es divisor de 40. Despejando y obtenemos

$$y = \frac{40 - 3x}{5} = 8 - \frac{3x}{5}.$$

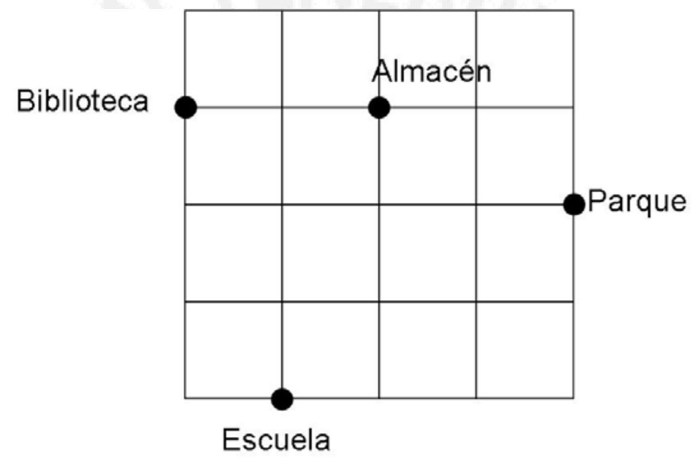
Como y debe ser entero no negativo, $\frac{3x}{5}$ debe ser un entero menor o igual que 8. Así, x debe ser múltiplo de 5 y los únicos valores posibles de x son 5 y 10. Con el primero, y es 5 y con el segundo y es 2. Como el segundo caso nos da un valor de $x + y$ mayor que en el primero, ya tenemos la solución: 10 chocolates de 30 céntimos y 2 de 50 céntimos.

Este problema ha sido resuelto también por estudiantes universitarios y de secundaria.

Los tres problemas siguientes, como ejemplos de problemas que pueden ubicarse en el marco de una teoría elemental de grafos, han sido tomados de NCTM (2003)

Problema 4

¿Cuál es el trayecto más corto desde la escuela al parque, a través de las calles (líneas horizontales y verticales)? ¿Cómo lo sabes? ¿Puede haber varios "caminos más cortos" iguales en longitud? En caso de que los haya, ¿cuántos? Si tienes que partir de la escuela, ir al parque a recoger a tu hermana pequeña, parar en la tienda e ir a la biblioteca, ¿en qué orden deberías pasar por estos lugares para que la distancia recorrida sea la mínima?



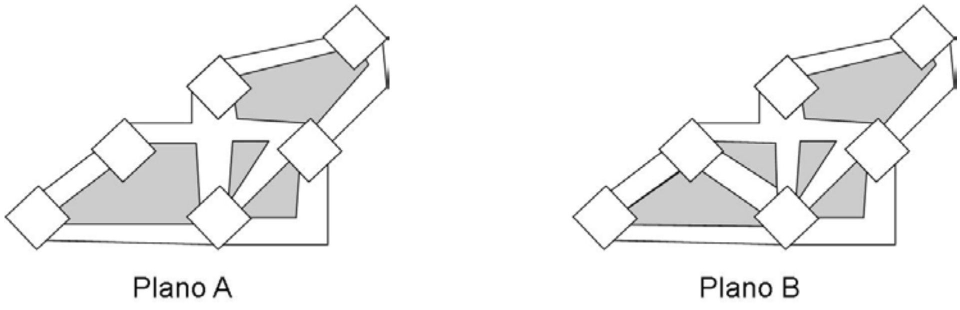
(p. 171, sugerido para la etapa 3-5)

Problema 5

El trabajo de Carolina es recoger el dinero de los parquímetros [7]. Ella quiere encontrar una ruta óptima que empiece y termine en el mismo lugar y recorra cada calle una sola vez.

a. en el plano A se muestran las calles que tienen que recorre. Hallar y trazar la ruta deseada.
b. En el plano B aparece una nueva calle, que puede añadirse a su ruta ¿puedes encontrar una ruta eficiente que la incluya?

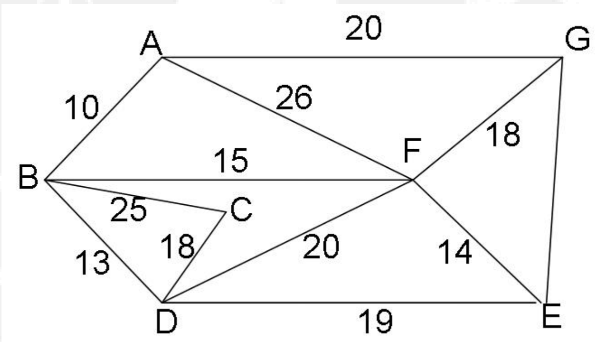
[7] Aparatos en los que se deposita monedas según el tiempo que se deje estacionado un auto en un lugar de la calle.



(p. 242, sugerido para la etapa 6-8)

Problema 6

Siete pequeñas ciudades del condado de Smith están conectadas por caminos de tierra como se muestra en el diagrama (El diagrama sólo indica los comienzos, los finales y las longitudes de los caminos. Éstos pueden ser rectos o curvos). Las distancias están dadas en kilómetros. El condado, que tiene un presupuesto limitado, quiere asfaltar algunos caminos para ir directa o indirectamente de una ciudad cualquiera a otra, pero se desea minimizar el número total de kilómetros asfaltados. Hallar una red de caminos asfaltados que cumpla completamente estas condiciones.



(p. 321, sugerido para la etapa 9-12)

La teoría de grafos es amplia y su estudio profundo corresponde al nivel universitario, sin embargo, es posible presentar situaciones-problema que pueden abordarse con recursos no muy formales y que brindan la oportunidad de vivir experiencias de búsqueda de situaciones óptimas en contextos reales y de estimular la intuición optimizadora. La dificultad de los problemas debe ser cuidadosamente pensada y graduada. A continuación narramos la experiencia tenida con un niño de 7 años, resolviendo un problema elemental, de este campo teórico, creado especialmente pensando en niños de los primeros grados de primaria, que muestra la intuición optimizadora aun a temprana edad y la importancia de estimularla con problemas adecuados y muy claramente expresados.

Se le pidió resolver el siguiente problema, impreso en una hoja de papel:

Mario debe ir de su casa a un castillo y en el camino tiene que comer el mayor número posible de hongos. De su casa salen dos caminos y puede escoger cualquiera de ellos. Luego debe continuar por cualquiera de otros tres caminos. En cada parte del camino hay hongos, como se muestra en el dibujo. Marca con un lápiz de color el recorrido que debería hacer Mario para comer el mayor número posible de hongos.

Para hacer una narración resumida de la experiencia, reproducimos los caminos asignándoles letras para identificarlos.

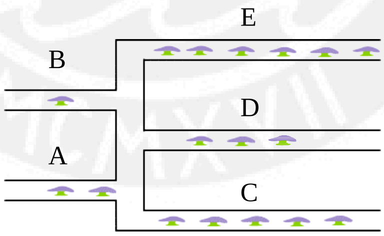


Figura 6.7

El niño muestra vehemencia por resolver el problema. Su primera solución no es la correcta. Indica A con C Ante la sugerencia de buscar otro camino señala B con D

Ante la sugerencia de buscar un camino que tenga 8 hongos, imagina, partiendo por B y recogiendo hongos de A.

Se le dice que no debe retroceder.

No ve la solución y juega “pidiendo hongos al castillo” y “fabricando un hongo adicional con su lápiz”

Se le aclara que si parte de A puede continuar por C, D ó E y que si parte de B también puede continuar por C, D ó E.

El niño percibe con alegría la solución, señala el camino A con E, cuenta los hongos y escribe el número 8 al final del camino (Han transcurrido 7 minutos) y luego escribe los números 7 y 5 al final de los caminos C y D, correspondiendo al camino que marcó inicialmente y al camino A con C que también marca.

Luego de una pausa breve se le propone un problema similar, pero con una presentación menos acabada. (Figura 6.8) Tres posibles caminos de salida que llegan a un “parque” y dos posibles caminos del parque al castillo. En los tres primeros están escritos los números 5, 3 y 4 (de arriba hacia abajo) respectivamente y en los dos siguientes los números 2 y 3 (también de arriba hacia abajo) respectivamente.

Se le explica muy bien que puede usar cualquiera de los tres caminos iniciales y que comenzando con cualquiera de ellos, al llegar al parque puede continuar al castillo usando cualquiera de los dos caminos.

Tan pronto se termina la explicación, el niño marca la solución correcta.

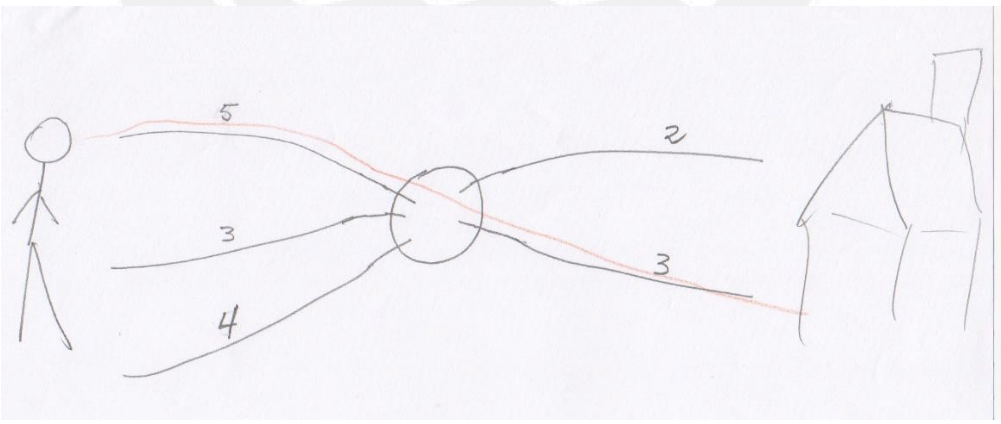


Figura 6.8

Cuando se le pregunta si está seguro de su respuesta, contesta con seguridad, que sí porque 5 es el número mayor entre los caminos al parque y 3 es el número mayor en los caminos del parque al castillo. El niño da la solución correcta sin hallar la suma total. (Que no es necesario hallarla)

Al preguntársele si eso es suficiente para asegurar que en total tendrá la suma mayor, realiza las sumas (sin escribir, sólo indicando con el lápiz), compara sus resultados y reafirma que su solución es correcta.

Se le presenta una hoja con un problema similar, pero con mayor complicación: tres caminos que llegan a un parque, del cual salen dos caminos que a su vez llegan a otro parque y finalmente otros tres caminos que van de este segundo parque al castillo. En cada camino está escrito un número (5, 3 y 4; 2 y 3; y 4, 6 y 3, respectivamente en los tramos inicial, intermedio y final.) (Figura 6.9)

Tan pronto ve la hoja, el niño da muestras de saber lo que tiene que hacer.

Se le pide que él explique cuál es el problema y lo hace con seguridad.

Resuelve correctamente el problema, sin indicar la suma total.

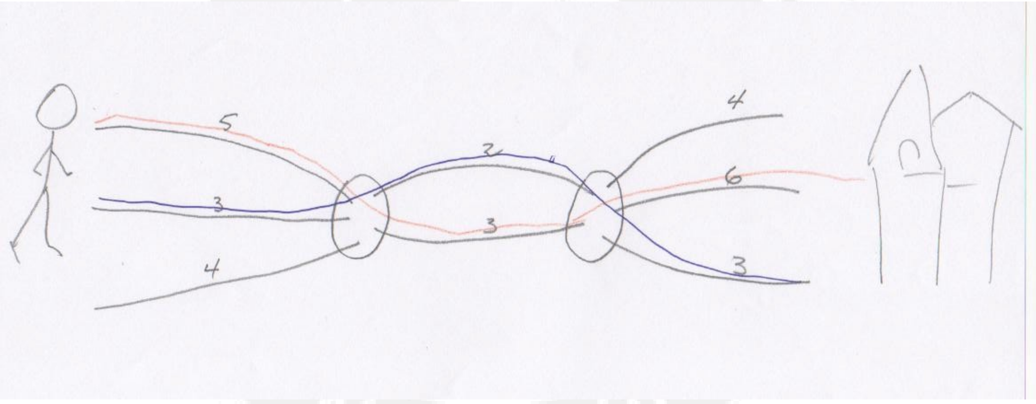


Figura 6.9

Al preguntársele si está seguro, dice que sí, porque ha escogido los números mayores en cada tramo.

Se le pide entonces que marque con otro color el camino que seguiría Mario si tuviera que recoger el menor número de hongos.

El niño resuelve inmediata y correctamente.

Ante el pedido de justificación, explica que ha escogido el número menor en cada tramo.

Finalmente se le presentó una hoja similar a la anterior, pero con cuatro caminos iniciales y también resolvió inmediata y correctamente, indicando los caminos con el mayor y con el menor número de hongos. (Figura 6.10)

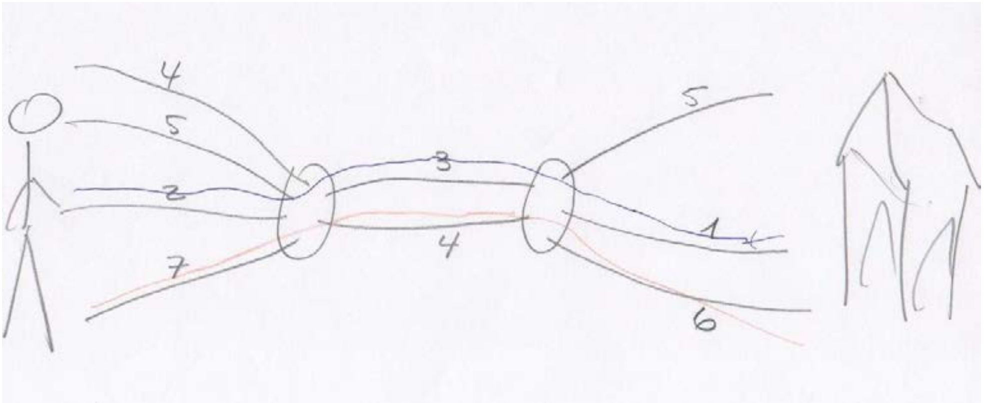


Figura 6. 10

Esta experiencia nos refuerza varios puntos de vista y afirmaciones en torno a la intuición, la resolución de problemas y la optimización, que las resumimos en los siguientes comentarios:

1. Para el éxito en una sesión de resolución de problemas es fundamental la motivación del alumno. Que él tenga alguna razón por la cual quiera y decida resolver el problema.
2. La claridad en la propuesta del problema es muy importante. Fue evidente la diferencia entre la actitud del niño antes y después de entender claramente que escogiendo cualquiera de los caminos de partida, también podía escoger cualquiera de los siguientes caminos. Antes, parece que había una tendencia natural a considerar sólo los caminos “más cercanos entre sí”. (Esta “tendencia” se repitió en otras experiencias similares con otros niños.)
3. Se pueden intuir criterios optimizantes, sin experiencias formales tenidas antes, encaminadas a ese logro. Es muy significativo que el niño encuentre la ruta con más hongos sin efectuar las sumas parciales, usando como criterio que en cada tramo debe escoger el camino que tenga más hongos. Cuando se le pregunta sobre su seguridad de su respuesta él afirma que sí, antes de hacer las sumas. Cuando se insiste y se pregunta sobre la suficiencia del argumento de escoger en cada tramo el camino con más hongos, efectúa las sumas y ratifica su posición.

4. Al ver claramente un criterio optimizador en determinado contexto, se puede reconocer lo fundamental de esa estructura en un contexto similar y aplicar intuitivamente el criterio optimizador con un cierto grado de generalización. Esto ocurrió al presentarle las hojas sin los acabados que tenía la hoja original, con números en lugar de hongos dibujados y con más caminos alternativos que escoger. Un grado mayor de generalización y de percepción intuitiva de cierta "dualidad" se da cuando resuelve muy fácilmente problemas similares de minimización y escogiendo caminos de tres tramos.

Para finalizar, recordemos que en una clasificación de las intuiciones que hace Fischbein, la que percibimos en el niño de la experiencia anterior es una intuición optimizadora de tipo primario, pues las intuiciones secundarias son las que surgen por influencia de instrucciones sistemáticas, del aprendizaje de conceptos, propiedades o resultados y de razonamientos más avanzados, lo cual no ocurre, en lo que a optimización se refiere, en nuestro sistema educativo.

Teniendo en cuenta todas las experiencias comentadas y las propuestas metodológicas formuladas a partir de ellas, usando criterios de idoneidad didáctica, concluimos que, sobre la base de la intuición optimizadora primaria, es posible estimular una intuición optimizadora de tipo secundario que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición.

Capítulo 7

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Resumen

En este último capítulo presentamos una síntesis de los aportes y conclusiones obtenidos en esta tesis, como respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1. También explicitamos algunas perspectivas para seguir investigando aspectos de la educación matemática relacionados con el presente trabajo.

7.1. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra primera pregunta de investigación: *¿Existe una intuición optimizadora?¿Cómo se "encaja" el término intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)? ¿Permite el EOS una visión integrada de las nociones "intuición", "rigor", "problema" y "formalización"?* nos llevó a una investigación de carácter teórico, poniendo en evidencia relaciones entre la intuición y las matemáticas en la historia, desde el punto de vista filosófico, psicológico y didáctico. Entendiendo la intuición optimizadora como un proceso cognitivo que permite comprender una situación-problema de búsqueda de lo óptimo entre alternativas explícitas o implícitas; o que permite obtener una solución óptima, o próxima a ella, sin el apoyo manifiesto de recursos formales, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. Hay dos tipos de experiencias vitales que nos dan razones para suponer que existe una intuición optimizadora. El primer tipo de experiencias tiene que ver con el hecho de que en la vida cotidiana, con frecuencia estamos afrontando problemas de optimización (buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra, buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro, etc.); y el segundo tipo de experiencias está relacionado con el hecho de que somos sujetos que experimentamos sobre nosotros mismos cómo, con el paso del tiempo, ciertas características vitales (por ejemplo, la fortaleza física, la salud, etc.) van variando y pasan por momentos críticos (máximos o mínimos). Un sustento importante para esta conclusión está en la "ciencia cognitiva de la matemática" (Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000), según la cual las estructuras matemáticas que construyen las personas tienen su origen en los procesos cognitivos cotidianos.
2. La intuición optimizadora sería de tipo primario (en la terminología de Fischbein) y con dos componentes: una intuición comprensiva y otra actuativa. Podemos entender la intuición comprensiva como una proyección metafórica de determinadas experiencias de la vida cotidiana, que nos permite tener una comprensión de lo que es un problema de optimización (desarrollado en el apartado 3.5.1). Por otra parte, como resultado de la resolución de situaciones de optimización cotidianas, adquirimos una práctica "optimizadora" que, en algunos individuos, puede llegar al extremo de ser una intuición actuativa, que lleve a la solución de problemas de optimización, predominando la autoevidencia y la inmediatez.
3. Una manera de encajar la intuición en el EOS consiste en utilizar una metáfora vectorial, considerando el proceso intuitivo como un vector con tres componentes: idealización, generalización y argumentación, que son tres de los 16 procesos primarios del EOS.

   Intuición = (idealización, generalización, argumentación)

   Esta conclusión tiene sustento tanto en las perspectivas de Fischbein y otros estudiosos de la intuición en las matemáticas, como en el análisis hecho relacionando el proceso intuitivo con los procesos que considera el EOS. (Sección 3.6)

Con esta perspectiva, las diferentes maneras de entender la intuición, que se han analizado en los apartados del capítulo 6, difieren en el énfasis que dan a cada una de las tres componentes del "vector intuición".

4. Las configuraciones epistémicas y cognitivas, como constructos teóricos del EOS, permiten una visión que integra las nociones de intuición, rigor, problema y formalización, pues éstos se consideran en alguno o algunos de los objetos matemáticos que interactúan en la configuración, a saber, situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Lo característico de una solución intuitiva secundaria a un problema que no sea trivial, es que el bloque de la argumentación no queda explícito o se limita a apelar a la evidencia.

7.2. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra segunda pregunta de investigación *¿Cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la universidad?* surge en busca de sustento empírico para refutar (o no) los argumentos dados en el capítulo 3 al conjeturar la existencia de una intuición optimizadora. Diseñamos y desarrollamos una situación experimental haciendo tres predicciones que consideramos deberían cumplirse en caso de existir la intuición optimizadora: que encontraríamos soluciones individuales en las que los estudiantes hallan lo pedido pero no justifican sus resultados (soluciones intuitivas); que en las soluciones grupales serían escasas las soluciones en las que hallan lo pedido pero no justifican sus resultados; y que en las soluciones individuales, aun habiendo argumentaciones explícitas, se encontrarían afirmaciones sin justificación, en una línea correcta hacia la solución. Examinando cualitativamente las soluciones de los problemas seleccionados y propuestos, empleando configuraciones epistémicas y cognitivas, obtenemos las siguientes conclusiones:

5. No hemos encontrado razones para rechazar la conjetura de existencia de la intuición optimizadora, puesto que

consideramos que se cumplieron las tres predicciones realizadas previamente a la situación experimental.

6. Percibimos deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos; y una deficiencia específica en la argumentación, es la poca presencia de justificación de que el resultado que obtienen es óptimo; y es más notoria al resolver el problema de variaciones discretas.
7. Confirmamos que el uso de configuraciones epistémicas y configuraciones cognitivas, viabilizan un estudio integrado de las nociones de problema, intuición, rigor y formalización y permiten también realizar una gradación de niveles en la resolución de los problemas trabajados, según la distancia que hay entre las configuraciones cognitivas de los alumnos y las epistémicas de referencia.

7.3. RESPUESTA A LA TERCERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra tercera pregunta de investigación: *¿Cómo están tratados los problemas de optimización en los libros de texto de matemáticas de secundaria en el Perú?* la hemos respondido examinando dos colecciones de libros de primero a quinto de secundaria: una de ellas es la que distribuye el Ministerio de Educación del Perú a los centros educativos estatales y la otra es de una editorial privada de bastante aceptación y uso en centros educativos privados. Hemos tenido como referencia el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular vigente desde el 2005. La revisión ha sido minuciosa y hemos hecho comentarios globales para cada grado de secundaria acerca de los temas vinculados con problemas de optimización y hemos hecho comentarios específicos a algunos problemas. En virtud de tal revisión, afirmamos que

1. Las oportunidades que brindan los diversos temas matemáticos que se tratan en la secundaria no son aprovechadas para proponer problemas interesantes de optimización y así, proporcionalmente a la cantidad total de problemas que se presentan en los libros, son muy pocos los de optimización (excepcionalmente en un caso llega a ser el 5,2% del total de problemas, pero en todos los demás está por debajo del 2,2%).

2. En el aspecto de resolución de problemas, lo que predomina es brindar al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, de modo que estimulen su intuición y creatividad. En particular, cuando se usan las palabras mínimo y máximo no se hace tomar conciencia del significado de estos conceptos en el contexto que se está usando, ni hay énfasis en la verificación de que lo obtenido es realmente óptimo.
3. En general, consideramos que en los textos revisados está presente la concepción de una matemática con “productos” acabados y con muchas reglas que aprender; que el papel fundamental de los problemas es aplicar conocimientos y no ser puntos de partida para descubrirlos o construirlos; y que predomina el criterio de poner a disposición del alumno muchos problemas para que se prepare para las evaluaciones – y en particular para los exámenes de admisión en las universidades – adquiriendo práctica en el uso de reglas, recomendaciones y algoritmos, y no el criterio de usar los problemas para desarrollar la capacidad de análisis, la creatividad, la intuición y en general el pensamiento matemático.

Usamos configuraciones epistémicas para analizar globalmente la forma en que son tratados tres temas particularmente relacionados con la obtención de valores máximos y mínimos, a saber, funciones, introducción a la programación lineal y mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y encontramos que en general predominan los problemas propuestos; que en cuanto al lenguaje las expresiones no siempre son suficientemente claras para entender bien la situación-problema; que en los pocos ejemplos explicativos se induce a seguir procedimientos algorítmicos, sin recurrir a argumentos experimentales, visuales o intuitivos. Así, no se cumplen los criterios de idoneidad didáctica establecidos en el EOS, y como una muestra de ello, examinamos un problema de mínimo común múltiplo enunciado de tal forma, que puede ocurrir que los alumnos “estudiando” en su texto, lleguen a resolver “correctamente” un problema que no entienden, usando un concepto cuya aplicabilidad al problema no es clara y aplicando un algoritmo que aprendieron a usarlo sin entenderlo.

Nuestra visión de los significados institucionales pretendidos a través del diseño curricular, y principalmente de los libros de texto, fue complementada recogiendo percepciones de estudiantes universitarios sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la secundaria. De esta manera, obtuvimos un indicador indirecto de la brecha que hay entre los significados pretendidos y los significados implementados.

Entre un 23% y un 32% de los estudiantes manifestó haber entendido pero no aprendido temas tan importantes de la matemática básica como funciones, geometría del espacio, geometría analítica y la función logarítmica. Por otro lado, más de un 35% de estudiantes manifestó que no le enseñaron probabilidades, estadística, función logarítmica y programación lineal. Destaca en este aspecto la programación lineal, pues un 66% manifestó que no le enseñaron, lo cual revela la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización.

Este estudio nos hace concluir que si bien hallamos algunos problemas de optimización en los libros de texto, muchos de ellos desaparecen en el paso que va de la planificación a la implementación. Donde más evidente es este fenómeno es en los problemas de optimización correspondientes a la programación lineal.

7.4. RESPUESTA A LA CUARTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra cuarta pregunta de investigación *¿Es posible proponer problemas de optimización en la educación básica del Perú, de manera que se estimule una intuición optimizadora que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición?* ha sido respondida afirmativamente y proponiendo problemas de optimización para la primaria y para la secundaria. La propuesta no es sólo el enunciado de problemas sino también sugerencias de actividades concretas individuales y grupales, con dificultades graduadas, encaminadas a estimular la intuición y la creatividad, sin descuidar el rigor.

Mostramos la posibilidad de trabajar con alumnos de secundaria dos problemas de optimización que son típicos en los libros de cálculo diferencial, tanto usando procedimientos constructivos y argumentos visuales e intuitivos, como usando rigurosamente desigualdades entre media aritmética y media geométrica de números reales positivos.

Empleando configuraciones epistémicas y cognitivas examinamos las soluciones en diversos niveles educativos, de un problema de optimización especialmente creado (el de las láminas rectangulares), y mostramos y comentamos cuadros que resumen las reacciones de alumnas de primero y segundo grado de secundaria, al pedirles que resuelvan tal problema.

Hacemos también propuestas metodológicas, destacamos la importancia de que profesores y alumnos creen problemas, y damos algunas características de un buen problema desde el punto de vista didáctico, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad del EOS.

Proponemos tres lineamientos para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, con base en nuestras experiencias y en algunos principios relacionados con la viabilidad de cambios en el significado implementado, enunciados en investigaciones previas en el marco del EOS. Los lineamientos propuestos son:

1. Incluir problemas de optimización en todos los grados de la primaria y la secundaria.
2. Modificar los contenidos y la metodología de algunas unidades didácticas de manera que se tengan mejores condiciones para la incorporación de problemas de optimización, su análisis y su solución. Damos lineamientos específicos para el estudio de las funciones.
3. Incluir algunos contenidos de matemáticas relacionados con optimización, que no suelen incluirse en los currículos de educación secundaria, como elementos de teoría de juegos y temas seleccionados de matemáticas discretas; entre estos últimos podría considerarse elementos de teoría de grafos y elementos de teoría de números, incluyendo ecuaciones diofánticas lineales.

Finalmente concluimos que, sobre la base de la intuición optimizadora primaria (usando la terminología de Fischbein), es posible estimular una intuición optimizadora de tipo secundario que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición.

7.5. CONSIDERACIONES FINALES E IMPLICACIONES

La presente investigación ha permitido reflexionar sobre aspectos teóricos y empíricos muy importantes en la matemática y en su enseñanza y aprendizaje en diversos niveles educativos, como son la intuición, el rigor, la resolución de problemas y la optimización. Por la complejidad y relevancia de cada tema, son numerosas las investigaciones que hay sobre cada uno de ellos. La novedad de la presente memoria está en haberlos trabajado conjuntamente y estar haciendo un aporte teórico al encajar la intuición en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, usando una metáfora vectorial cuyas componentes son tres de los procesos primarios considerados en este enfoque. Otro aporte lo constituyen las propuestas concretas para la inclusión de problemas de optimización en la educación básica, de modo que desde la niñez se estimule una intuición optimizadora sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral.

Consideramos que las respuestas dadas a las preguntas de investigación y todo el trabajo desarrollado para llegar a ellas, con alumnos, profesores, textos e investigaciones previas, pueden ser puntos de partida o referencia para nuevas interrogantes e investigaciones y propuestas en educación matemática. Por ejemplo:

a. Diseñar y desarrollar interdisciplinariamente situaciones didácticas en diversos niveles educativos y realidades sociales en torno a la existencia y el estímulo de la intuición optimizadora. En particular, ¿cómo es la intuición optimizadora en niños y jóvenes talentosos?¿cuál es la mejor manera de estimularla?

b. Examinar, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS, en qué medida la manera de usar las formalizaciones y el rigor en las clases de matemáticas en los primeros ciclos universitarios, particularmente en los cursos de cálculo diferencial, aportan al desarrollo de la intuición para resolver problemas de optimización que no son propios del cálculo diferencial.

c. Diseñar y desarrollar propuestas que den mayor viabilidad a los lineamientos planteados.

   En este sentido, es importante tener en cuenta que la viabilidad de las propuestas, aun de la primera que tiene mayores posibilidades de concretarse porque sería un pequeño cambio del contrato didáctico para dar cabida a la resolución de problemas de optimización, depende fundamentalmente de la formación matemática y didáctica de los docentes y de la decisión de asumir como significados institucionales – a nivel de centros educativos, textos y planes curriculares – los enfoques desarrollados en esta investigación.

d. Considerar los criterios de idoneidad didáctica del EOS para redactar o recomendar la redacción de textos – especialmente de educación primaria y secundaria – con un enfoque de matemática activa y basada en la resolución de problemas, que incluya problemas de optimización.

e. Proponer unidades didácticas que incluyan algunos de los temas sugeridos en el tercer lineamiento, considerando problemas de optimización adecuados.

f. Diseñar unidades didácticas de matemáticas para los cursos de formación y capacitación de docentes, que incluyan la resolución de problemas de optimización para diversos temas de la primaria y la secundaria.

g. Examinar cualitativa y cuantitativamente los problemas de optimización en los exámenes de admisión a las universidades y la idoneidad didáctica de la forma en que se enseña a resolverlos en los centros de preparación para estos exámenes.

Referencias Bibliográficas

Abrahamson, D. y Cendak, R. M. (2006). The odds of understanding the law of large numbers: a design for grounding intuitive probability in combinatorial analysis. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 1-8. prague: PME.

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Acevedo, J. y Font, V. (2004). Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*, España.

Artigue, M. (2006). La inteligencia del cálculo. *Matematicalia*, Vol. 2, 5. http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=327&Itemid=200

Alonso, D. y Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático, *Revista de neurología*, 33 (6): 568-576.

Andersen, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Grattan-Guinness (comp.). Madrid, Alianza Universidad.

Anderson, M.; Sáenz-Ludlow, A.; Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Otawa: Legas.

Appel, K.O. (1985). *Transformación de la filosofía*, vols I y II. Madrid: Taurus.

Babai, R., Levyadun, T., Stavi, R. y Tirosh, D. (2006). Intuitive rules in science and mathematics: a reaction time study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 37, No. 8, 15, 913–924.

Bazán, J., Espinosa G. y Farro Ch. (2002) Rendimiento y actitudes hacia la matemática en el sistema escolar peruano. En Rodriguez, J. , Vargas, S. (eds.). *Análisis de los Resultados y Metodología de las Pruebas Crecer 1998*. Documento de trabajo 13. Lima: MECEP-Ministerio de Educación. 55-70.

Bettina, R. y Katrin, R. (2006). A picture is worth a 1000 words. The role of visualization in mathematics learning. E Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 457-464. Prague: PME.

Bishop, A. J. (1988). A review of research on visualization in mathematics education. In A. Borbás (Ed.), Proc. 12th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 170-176). Veszprém, Hungary: PME.

Bloor, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona: Gedisa.

Boyer, C. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Bulajich R., Gómez J. A. y Valdez R. (2005). *Inequalities*. México: Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemáticas. UNAM

Cerda, H. (2000). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: El Buho.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumental, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Cohen, L y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*.. La Muralla. S.A.: Madrid

Cohn, R. (1995) Entrenando la intuición, *Siglo XXI. Perspectivas de la Educación desde América Latina*, 2, México.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas ?* México : Fondo de Cultura Económica (Primera edición en español).

Crespo (2007). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. *Conferencia en RELME 21*, Maracaibo, Venezuela.

D´Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10*(2), 191-218.

Davidson, L. et al (1987). *Problemas de matemática elemental 1*. Cuba: Ministerio de Educación.

Davis, P. J.: (1993). Visual theorems, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 4, 333-344

Davis, P.; Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Labor-MEC.

Debreu, G. (1973). *Teoría del valor*. Barcelona: Bosch

De la Torre, Suescún y Alarcón (2005). El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de Investigación.* Vol. 2, No. 2, pp 31-37.

Díaz H. y Elespuru O. (2007). *Informe de Educación*. Instituto de Investigación para el Desarrollo y la Defensa Nacional – INIDEN. Marzo 2007. 16 (3).

Dorrie, H. (1965). *100 Great problems of elementary mathematics. Their history and solution*. New York: Dover Publications, Inc.

Dreyfus, T.: (1994). Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en C. Gaulin y otros (eds.): ICME 7 (1992) . *Selected Lectures* (pp. 107-123). Québec: Les Presses de l’Université Laval.

Dubinsky, E. (2000) Meaning and formalism in mathematics, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Volume 5, Number 3, 211-240.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1, pp. 143–168

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. En D.O. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer

Farmaki, V., y Paschos, T. (2005). The shift from intuition to formal mathematics: A case study. *Proceedings of 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Palermo, Italy, Vol. II, pp.423-434.

Fischbein, E. (1990). *Intuition and information processing in mathematical activity*. International Journal of Educational Research, 14 (1).

Fischbein, E. (1993a). The interaction between the formal and the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231–345). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Fischbein, E. (1993b). *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics*. Holland: Reidel Publishing Company. Second printing.

Fischbein, E. (1998). *Conoscenza intuitiva e conoscenza logico in attività matematica*. La Matematica e la sua didattica, 4.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997a). *Schemata and intuitions in combinatorial reasoning*. Educational Studies in Mathematics.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997b). Tacit mechanism of combinatorial intuitions. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. Lahti, Finland.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). *The evolution with age of probabilistic, intuitively-based misconceptions.* Journal for Research in Mathematics Education, 28 (1).

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2001a), Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Educaçao Matematica Pesquisa*, 3 (2), 59-112.

Font, V. (2001b). Processos mentals versus competència, *Biaix* 19, pp. 33-36.

Font, V. (2003), Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol X, n. 2, 249-279.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, vol 19, 2, pp. 95-128.

Font, V. y Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las ciencias*, 2003, 21 (3), 405–418.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa)

Font, V. y Godino, J. D. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Font, V., Contreras, A. y Rubio, N. (2007). Procesos en Matemáticas. Una mirada desde un enfoque ontosemiótico. *Conferencia Especial en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* Maracaibo, Venezuela.

Font, V., Rubio, N. y Contreras, A. (en prensa). Procesos: Una mirada desde el Enfoque OntoSemiótico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fujita, T., Jones, K. y Yamamoto, S. (2004) The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century. En, *10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10*), Copenhagen, Denmark, 4-11 July 2004. 15pp.

Fuller, B. (1987) "What school factors raise achievement in the third world". En: *Review of Educational Research* 57(3).

Garrido, J. (2003). *Verdad matemática*. Madrid: Nivola.

Giménez, J. (2006). *Algunos elementos en la construcción de un sentido numérico en aritmética.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*, 237-284.

Godino, J. D. (2003). T*eoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2007), The Onto Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, ZDM The *International Journal on Mathematics Education*, vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J. D., D. Bencomo, V. Font y M. R. Wilhelmi (2007), "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas", *Paradigma*, vol. XXVII, núm. 2, 221-252.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. Especial, 131-155.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(1), 117-150.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J.D.; Batanero, C. y Font, V. (2006). *Una agenda de investigación en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Documento interno. Universidad de Granada.

González, M. (2006). Solución de problemas de optimización usando geometría dinámica. *Conferencia en el III Congreso Iberoamericano de Cabri*. Bogotá, Colombia.

Gusmao, T.R.S. (2006) *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica.* Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela. España.

Guzmán, M. de: (1996) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.

Hoff Kjeldsen, T. (1999). *En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-linear programmering: udviklingshistorie og multipel opdagelse.* Ph. D.-afhandling. IMFUFA, Roskilde Universitetscenter. Denmark.

Honsberger, R (1977). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid, España: La tortuga de Aquiles.

Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Madrid: Debate.

Jones, K. (1998): Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. En: Mammana, C. Y Villani, V. (Eds.). *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, pág. 78-83 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Kleiner, I. (1986). : *Famous problems in mathematics: An outline of a course*. For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, Vol6,1 p31-38

Kline, M. (1990). *Mathematical though from ancient to modern times*, Tomo I, New York: Oxford University Press, Inc.

Lages Lima, E., et al (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media, volumen 1*. Lima: IMCA.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics* (39), 131-147.

Malaspina, U. (2002). Elements for teaching game theory, *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. University of Crete. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap293.pdf

Malaspina, U. (2004). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2005a). Motivation and development of mathematical thinking using optimization problems. *Proceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education*. Volume II, pp. 491- 500, Italy.

Malaspina, U. (2005b) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 1 al 4. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2006a) Problemas: oportunidades de aprendizaje para alumnos y profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Volumen 19, pp. 688 – 694) México: CLAME

Malaspina, U. (2006b) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 5 al 8. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Malaspina, U. (2007a). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3) pp. 365-399

Malaspina, U. (2007b) El rincón de los problemas. *Unión. Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática*. España: Números del 9 al 12. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Ministerio de Educación del Perú (2003). *Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores*. Lima.

Ministerio de Educación del Perú (2005). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima.

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 239-258.

Montoso, V. y Scheuer, N. (2006). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios, en J. Aymerich, S. Macario (Eds.). *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 257-266).

Mosterin, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona: Ariel.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1980). *An agenda for action. Reston*: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Primera edición en castellano.

Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. USA: Mathematical Association of America.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En T. Nakaora y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Perero, M. (1994) *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Piaget, J. y Beth, E.W. (1980). *Epistemología matemática y psicología.* Crítica, Grupo Editorial Grijalbo: Barcelona.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1963). *The child's conception of space.* Routledge and Kegan, Paul: London.

Piaget, J.(1992). *Seis estudios de psicología.* Labor: Barcelona

Pinto Carvalho, P. et al (2003). *Mathematical Optimization in Graphics and Vision.* Lima: Monografías del IMCA.

Poincaré, H. (1920). *The Value of Science*. Dover Publications Inc. New York.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y Método.* Madrid: Espasa-Calpe.

Raftopoulos, A. (2002). The spatial intuition of number and the number line. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 1 (2), 17-36.

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales,* Tesis Doctoral, Barcelona, Universitat de Barcelona.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535-556.

Reichenbach, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy*. Berkeley: University of California Press.

Roldán, R. y Cribeiro, J. (2001) Entrenando la intuición en la matemática superior. *Revista Ciencias Matemáticas*. (Volumen 19, Nº 2, pp 133 - 141). Cuba

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* 61 (1-2): 1-10.

Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general.* Madrid: Alianza, 1991.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metcognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334 - 370). New York: MacMillan Publishing Company.

Schoenfeld, A. (2006). Problem solving from cradle to grave. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 11, pp. 41-73.

Schubring, G. (2005) *Conflicts between generalization, rigor and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany*. New York, USA: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 1-36.

Socas, M.; Camacho, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexione. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* 10 (2), 20.

Stavy, R. & Tirosh, D. (1996). Intuitive rules in science and mathematics: The case of “more of A-more of B”. *International Journal of Science Teaching* 18, 653–667.

Stavy, R. et ál (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education* 4: p. 417 – 436

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics: Intuitive rules.* New York: Teachers College Press.

Suppes, P. (1966). ·The axiomatic method in high school mathematics· in ·The role of axiomatics and problem solving in mathematics·, *The conference Board of Mathematical Sciences (*Ginn and Co.) Washington, D.C.

Tall, D. O. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus, in W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and learning Mathematics. Mathematical*. Association of America, Washington, DC, pp. 105-119.

Tall, D. O. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg. 11, 195–215.

Tirosh, D. (1991). The role of students’ intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 199-214). Dordrecht: Kluwer.

Tirosh, D., Stavy, R., & Tsamir, P. (2001). Using the intuitive rules theory as a basis for educating teachers. In F. L. Lin, & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics education* (pp. 73–85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Törner, G., Schoenfeld, A. y Reiss, K (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol 39, 5-6, pp. 353-563.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (2006). PME 1 to 30 – summing up and looking ahead: a personal perspective on infinite sets. E Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 49-63. Prague: PME.

Tsamir, P., Tirosh, D., Stavy, R. y Ronen, I. (2002). Intuitive Rules: A Theory and its Implications to Mathematics and Science Teacher Education, en H. Behrendt et al. (eds.), *Research in Science Education – Past, Present, and Future*, 167–175. Netherlands: Kluwer.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de B.U.P., *Epsilon*, 34, 11-46.

Tymoczko, T (1991). Mathematics, Science and Ontology. *Synthese* 88 (2): 201 - 228.

Vidakovic, D., Berenson, S. & Brandsma, J. (1998). Children's Intuitions of Probabilistic Concepts Emerging from Fair Play. In Pereira-Mendoza, Kea, Kee & Wong (Eds.) *Proceedings of the International Conference On the Teaching of Statistics* (ICOTS-5) Singapore 1998, v. 1, 67-73.

Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007), Configuraciones epistémicas asociadas a la noción desigualdad de números reales, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 27, núm. 1, 77-120.

Williams, H. (1986). Fourier's Method of Linear Programming and Its Dual. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 93, No. 9, pp. 681-695.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

Yeap, B., Ferrucci, B. J., & Carter, J. A. (2006). Comparative study of arithmetic problems in Singaporean and American mathematics textbook. In F. K. S. Leung, Graf, K. D., & Lopez-Real F. J. (Eds.) *Mathematics education in different cultural traditions—A comparative study of east Asia and the West. The 13th ICMI Study* (pp. 213–226). New York: Springer.

Zimmermann, W.; Cunningham, S.: (eds.): (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.*. Notes 19. Washington DC: MAA.

Anexos

ANEXO 4A

Dos problemas de optimización para resolverlos en grupos, propuestos a alumnos universitarios

Grupo No. ------------

Problemas

1. Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.

2. Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Actividades grupales

1. Discutir las soluciones individuales de los integrantes del grupo, de los dos problemas planteados.

2. Presentar soluciones del grupo de ambos problemas, justificando rigurosamente los valores óptimos obtenidos.

ANEXO 4B

Cuestionario sobre percepciones acerca de los problemas propuestos y sus soluciones

A

1. ¿Cuál de los problemas te pareció más interesante?

2. ¿Por qué?

B (Sobre el problema 1)

1. Cuando resolviste el problema 1 y escribiste las coordenadas de los vértices ¿Estabas convencido de que habías obtenido un paralelogramo de área máxima?

2. ¿Qué te daba el convencimiento?

3. ¿Cuál crees que es el problema fundamental?

4. ¿Podrías enunciar alguna propiedad o proposición que hayas descubierto o recordado al haber resuelto el problema?

5. ¿Qué variables fundamentales encuentras en el problema?

6. ¿Crees que definir una función ayuda a resolver el problema?

7. ¿Qué crees que debe tener una solución para considerar que el problema está completamente resuelto?

C (Sobre el problema 2)

1. Cuando resolviste el problema 2 y describiste los pasos para llegar del 11 al 25 ¿Estabas convencido de que era el menor número de pasos?

2. ¿Qué te daba el convencimiento?

3. ¿Podrías enunciar alguna propiedad o proposición que hayas descubierto o recordado al haber resuelto el problema?

4. ¿Cuál o cuáles consideras la o las variables del problema?

5. ¿Qué diferencia habría entre una solución formal de este problema con una solución que no sea formal?

6. ¿Qué crees que debe tener una solución para considerar que el problema está completamente resuelto?

ANEXO 4C

Cuadro sobre soluciones del problema con variaciones continuas

Análisis de las soluciones de los estudiantes, del problema 1:

Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.

Alumno	**Halla lo pedido**	**Procedimiento**				**Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo**			**Nivel**
		Tantea	**Considera todos los casos**	**Formaliza**	**Muestra sólo su resultado**	**No**	**Incorrectamente**	**Correctamente**	
1	1	1	1	1			1		6
2		1	1			1			2
3	1		1	1				1	8
4		1	1	1		1			2
5	1	1	1	1		1			5
6			1	1		1			2
7	1				1	1			5
8	1		1		1	1			5
9	1		1	1			1		6
10	1		1	1				1	8
11				1					0
12			1		1	1			3
13	1		1	1			1		6
14	1		1	1			1		6
15			1	1		1			2
16		1	1			1			2
17			1		1	1			3
18					1	1			1
19			1	1		1			3
20	1		1	1			1		6
21			1			1			3
22			1		1		1		4
23			1	1		1			2
24			1	1			1		4
25	1		1	1			1		6
26			1		1	1			3
27	1		1	1			1		6
28	1		1	1			1		6
29	1				1	1			5
30	1	1		1			1		6
31	1		1		1	1			5
32	1	1				1			5
33	1		1		1	1			5
34	1		1		1		1		6
35			1	1			1		4
36	1				1	1			5
37	1		1	1				1	8
38			1		1	1			3
Totales	**21**	**7**	**31**	**21**	**13**	**21**	**13**	**3**	

ANEXO 4D

Cuadro sobre soluciones del problema con variaciones discretas

Análisis de las soluciones de los estudiantes, del problema 2

Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Alumno	**Halla lo pedido**	**Procedimiento**				**Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo**			**Nivel**
		Tantea	**Considera todos los casos**	**Formaliza**	**Muestra sólo su resultado**	**No**	**Incorrectamente**	**Correctamente**	
1	1	1		1		1			5
2	1	1				1			5
3	1		1	1				1	8
4		1					1		4
5				1		1			2
6	1		1	1		1			5
7	1				1	1			5
8	1		1	1		1			5
9	1	1				1			5
10		1				1			2
11	1				1	1			5
12	1				1	1			5
13	1			1		1			5
14		1				1			2
15		1				1			2
16	1			1			1		6
17		1				1			2
18	1	1				1			5
19	1				1	1			5
20									0
21					1	1			1
22				1			1		4
23					1	1			1
24									0
25									0
26	1	1				1			5
27				1			1		4
28	1				1	1			5
29	1	1				1			5
30	1				1	1			5
31	1	1				1			5
32	1	1				1			5
33	1	1				1			5
34	1				1	1			5
35	1				1	1			5
36	1	1				1			5
37									0
38		1							0
Totales	**23**	**15**	**3**	**9**	**10**	**28**	**4**	**1**	

ANEXO 5A

Cuestionario sobre percepciones de aprendizaje, uso de materiales y actitudes ante la matemática, aplicado a ingresantes a la PUCP en el semestre 2007-1

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (IREM) - PUCP

Estimado alumno, te agradeceremos colaborar con una investigación sobre la enseñanza de matemáticas, completando el siguiente cuestionario. La información que nos brindes es individual y anónima.

Parte I. Responde, considerando el colegio en el cual estudiaste 5to de secundaria

1. Mi colegio es

Estatal	
Particular	
Parroquial	
Religioso	
Militar o Policial	
Pre-universitario	
Con Bachillerato Internacional	
Fe y Alegría	
Otro (Especificar)	

2. Mi colegio está ubicado en:

Callao	
Lima Metropolitana	
Una provincia fuera de Lima	
Una provincia de Lima	
Otro país (Especificar):	

3. Terminé la secundaria en el año: ____________________

Ingresé a la PUCP en el año: ____________________

4. En tus clases de Matemática se usó: (Puedes marcar más de una opción)

Un texto	
Separatas	
Fotocopias	
Ejercicios y problemas de exámenes de admisión pasados	
Otros materiales escritos	
Otro (Especificar):	

Parte II

En el siguiente cuadro aparecen temas de Matemática que se deben enseñar en la secundaria. Señala si no te enseñaron esos temas. Si te enseñaron, señala alguna de las alternativas indicadas. Considera sólo si a ti te enseñaron esos temas en el colegio, no en otros lugares como academias, clases particulares, grupos de estudio, etc.

Temas de Matemática	No me enseñaron	Me enseñaron			
		No entendí	Entendí el tema	Aprendí	Aprendí el tema
Sistema de Números reales					
Ecuaciones					
Inecuaciones					
Sistema de ecuaciones lineales					
Funciones					
Progresiones					
Unidades de Medida					
Geometría plana					
Trigonometría					
Geometría del espacio					
Geometría analítica					
Programación lineal					
Función exponencial					
Función logarítmica					
Estadística					
Probabilidad					

Parte III

1. En tus clases de Matemática entiendes:

Nada	
Casi nada	
Sólo algunas cosas	
Casi Todo	
Todo	

	Si	No
2. ¿Te gustan las clases de Matemática?		
3. ¿Te sientes nervioso cuando tienes que hablar en clase de Matemática?		
4. ¿Aprender Matemática es difícil para ti?		

5. Indica la especialidad que piensas estudiar: ________________________________

¡Muchas gracias por tu colaboración!

ANEXO 5B

Percepciones de los ingresantes a la PUCP en el semestre 2007-1 sobre temas de matemática en la secundaria. Distribución porcentual. (n = 340)

Temas de Matemática	No me enseñaron			No entendí el tema			Entendí el tema pero no lo aprendí			Aprendí el tema			Aprendí el tema y me gustó		
	C	L	T	C	L	T	C	L	T	C	L	T	C	L	T
Sistema de números reales	2.6	3.3	2.9	1.1	3.3	2.1	16.8	18.7	17.6	66.5	63.3	65.1	13	11.3	12.3
Ecuaciones	0.6	0.7	0.6	1.1	0.7	0.9	3.4	8.7	5.8	52.8	60.7	56.3	42.1	29.3	36.4
Inecuaciones	1.7	5.3	3.3	2	4.7	3.2	18.4	23.3	20.6	55.4	56	55.6	22.5	10.7	17.2
Sistema de ecuaciones lineales	3.4	4	3.7	1.7	4.7	3.0	9.9	18	13.6	55.1	56	55.5	29.9	17.3	24.2
Funciones	8.4	8.7	8.5	16.8	15.3	16.1	31.9	33.3	32.5	33.6	33.3	33.5	9.3	9.3	9.3
Progresiones	7.7	12.7	9.9	4.8	6.7	5.7	13.3	21.3	16.9	52.8	47.3	50.4	21.3	12	17.1
Unidades de Medida	7.2	14	10.2	1.7	5.3	3.3	12.9	20.7	16.4	63.5	53.3	58.9	14.7	6.7	11.1
Geometría plana	2.9	8	5.2	1.1	5.3	3.0	12.5	12	12.3	41.7	52.7	46.6	41.8	22	32.9
Trigonometría	2.3	5.3	3.6	1.7	12	6.3	16	24.7	19.9	44.8	37.3	41.4	35.3	20.7	28.7
Geometría del espacio	15.7	12	14.1	4.5	12.7	8.2	23.3	32	27.2	34	35.3	34.6	22.4	8	15.9
Geometría analítica	22.7	21.3	22.1	5.7	16	10.3	24.4	34	28.7	32	22.7	27.8	15.2	6	11.1
Programación lineal	66.4	65.3	65.9	3.7	7.3	5.3	13.7	13.3	13.5	12.5	12.7	12.6	3.7	1.3	2.6
Función exponencial	43.9	28.7	37.1	8.2	12.7	10.2	16.5	16	16.3	26.2	35.3	30.3	5.2	7.3	6.1
Función logarítmica	44.2	25.3	35.8	9.9	22	15.3	19.9	26	22.6	18	20	18.9	7.9	6.7	7.4
Estadística	36.6	38	37.2	4.5	4	4.3	19.3	17.3	18.4	33	33.3	33.1	6.6	7.3	6.9
Probabilidad	31.6	38.7	34.7	6.8	8.7	7.6	19.6	20.7	20.1	32.3	26	29.5	9.7	6	8.1

C: Ciencias L: letras T: Total

ANEXO 6A

Cuestionario a alumnos de secundaria sobre un problema de optimización geométrico

COLEGIO **GRADO**

Estimado(a) alumno(a), has sido seleccionado(a) para colaborar con una investigación sobre resolución de problemas, respondiendo las cuatro partes de este cuestionario. Te agradecemos tu colaboración.

Parte 1. Datos

- Por favor llena los siguientes datos de tu nacimiento:
  Día ________ Mes _______ Año _______

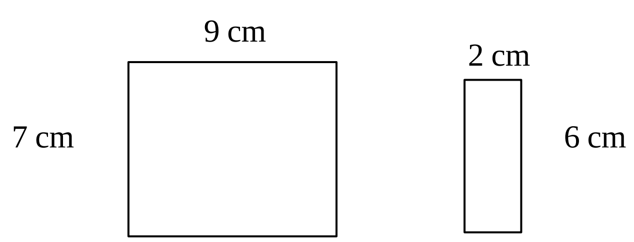
- De qué sexo eres. ? Masculino ______ Femenino _______

Parte 2. Preguntas

A continuación encontrarás el enunciado de un problema y algunas preguntas. Por favor lee con atención el problema y responde las preguntas antes de resolverlo.

Problema

Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho. Moviendo libremente las láminas y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.



1. ¿Qué te parece el problema? (Marca con un SI o un NO para cada opción en la tabla.)

	SI	**NO**
Me parece Interesante		
Me parece Útil		
Me parece fácil de entender		
Me parece fácil de resolver		
Me gusta		

2. ¿Qué conocimientos de Matemática consideras importantes para resolver el problema?

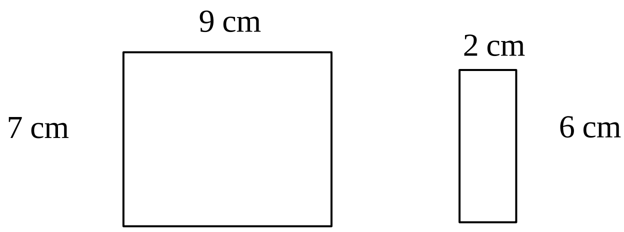
3. Si tienes una lámina cuadrada de 10 cm de lado y una lámina triangular que tiene cada uno de sus tres lados de longitud 10 cm ¿Cuál es el perímetro de la nueva figura plana que se forma uniendo las láminas por uno de sus lados? Haz un dibujo y escribe el perímetro que tiene.

Parte 3. Solución del Problema

Ahora resuelve el problema. Hazlo tú solo(a), justificando tus afirmaciones. Por favor**, no uses otro papel**; haz todos tus dibujos, cálculos, afirmaciones, etc. - sea en borrador o en limpio – **solamente en esta hoja.**

Problema

Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho. Moviendo libremente las láminas y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.



Parte 4. Otras preguntas

1. ¿Te gustó el problema?. Marca una opción.

Mucho _______ Poco _______ Nada _________

2. ¿Estás seguro o segura que tu solución es correcta?. Marca una opción.

Si ________ No mucho _________ No _________

Gracias por tu colaboración.

ANEXO 6B

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2007, Número 11, páginas 197-204
ISSN: 1815-0640

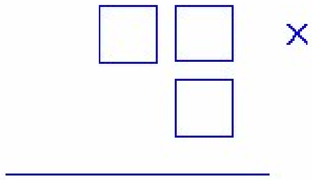
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Juan escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3. Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el mayor posible



Este es un problema que puede ser abordado por alumnos de primaria que ya sepan multiplicar números de dos dígitos por otro de un dígito. Plantea una situación sencilla de búsqueda de un valor óptimo, ofrece interesantes posibilidades de explotarlo didáctica y matemáticamente, y hace más entretenido el ejercicio de multiplicar, al hacer varias multiplicaciones en el marco de un desafío alcanzable o tratar de hacer el menor número posible de cálculos buscando una racionalidad para obtener lo pedido. Presentamos una experiencia didáctica en el nivel de educación primaria y hacemos algunos análisis – primero para este nivel y luego para niveles más avanzados – usando criterios del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática que se viene desarrollando por Juan Godino, Vicenç Font y otros investigadores(*).

(*) Ver, por ejemplo:
Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, Vol. Especial, 131-155.
Un artículo que muestra relaciones con otros enfoques didácticos, se encuentra en:
Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)* *9*(1), 117-150.

Una experiencia didáctica

A manera de ilustración, comento la experiencia tenida al pedirle a David, de11 años y cursando el quinto grado de primaria, que resuelva este problema.

Es pertinente mencionar que en el enunciado que tenía la hoja que se le entregó a David, no decía explícitamente que los números que escoja tenían que ser diferentes entre sí. David escogió el número 6, lo escribió en todas las casillas y efectuó la multiplicación.

Estrictamente, su solución es correcta y revela el criterio intuitivo de usar el máximo de un conjunto finito de números para la obtención de otro máximo. David encontró el mayor número que se puede obtener efectuando una multiplicación de un número de dos dígitos por otro de un dígito, escogiendo los dígitos del conjunto $\{2, 5, 6, 3\}$.

A David se le pidió que continúe trabajando con el problema, pero ahora escribiendo tres números diferentes en las casillas y escogiendo tales números de los que escribió Juan en la pizarra, que son el 2, el 5, el 6 y el 3

David efectuó diecisiete multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{cccl} & \boxed{5} & \boxed{3} & \times \\ & & \boxed{6} & \\ \hline 3 & 1 & 8 & \end{array}$$

Su respuesta es correcta y al preguntársele si estaba seguro, respondió que sí. Al preguntársele por qué, respondió que ya no se puede conseguir otro número más grande.

Cuando se le propuso el problema, cambiando el conjunto de números a escoger por $\{3, 5, 7, 4\}$, David efectuó sólo seis multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{r} \boxed{7}\ \boxed{4}\ \times \\ \boxed{5} \\ \hline 3\ \ 7\ \ 0 \end{array}$$

El máximo buscado es 378 (54 x 7) y vemos que David obtuvo el producto más próximo a tal máximo. Cabe anotar que cuando propusimos este problema a varios estudiantes universitarios y a algunos profesores, 370 es el producto que inicialmente consideraron como el máximo. Parece que una primera aproximación intuitiva a la solución del problema, lleva a considerar que el máximo se obtendrá poniendo el dígito mayor en el lugar de las decenas.

Al percibir que David estaba mostrando una capacidad intuitiva de encontrar un valor óptimo en este contexto aritmético, le pedimos que escoja los números, siempre diferentes entre sí, del mismo conjunto $\{3,\ 5,\ 7,\ 4\}$ y que los escriba en las casillas, de modo que al efectuar el producto indicado el resultado sea el número ***menor*** posible.

David efectuó cinco multiplicaciones, tres de ellas considerando al 3 como factor de un solo dígito (en las otras dos consideró el número 5) y ninguna de las cinco considerando al 7 en el lugar de las decenas. Dio como solución:

$$\begin{array}{r} \boxed{4}\ \boxed{5}\ \times \\ \boxed{3} \\ \hline 1\ \ 3\ \ 5 \end{array}$$

Es la solución correcta y podríamos afirmar que David ha ido desarrollando una "intuición optimizadora" para resolver las dificultades planteadas.

Uno de los aportes concretos de David es que en el enunciado del problema ahora se diga explícitamente que los números que se escojan sean diferentes entre sí o no.

Una mirada más sistemática

Resulta interesante examinar la solución del problema inicialmente planteado, considerando elementos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Un importante instrumento de análisis en tal enfoque es la noción de *configuración epistémica*. Para resolver un problema la persona necesita una serie de conocimientos (conceptos, propiedades y procedimientos) tiene que utilizar representaciones (lenguaje) y tiene que hacer algún tipo de argumentación. También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general. La unidad formada por la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos y las argumentaciones que son necesarios para su resolución recibe el nombre de *configuración epistémica* si adoptamos un punto de vista institucional o referencial y de *configuración cognitiva* si adoptamos un punto de vista *personal*. El análisis de dichas configuraciones nos informa de la "anatomía de la actividad matemática". Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos, son necesarias otras herramientas, en especial los procesos asociados.

Una situación-problema podría resolverse por diferentes métodos, y así podría formar parte de dos o más configuraciones epistémicas/cognitivas diferentes que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra)

Una de las ventajas de tener una configuración epistémica institucional es que tenemos una referencia para valorar la configuración cognitiva personal que ha utilizado el alumno en su resolución del problema.

En este marco, resumido muy brevemente, pasemos ahora a examinar soluciones del problema propuesto. Haremos una primera configuración epistémica institucional teniendo en cuenta el uso del problema con alumnos de primaria, y luego la configuración cognitiva de la solución de David.

Consideremos una solución con la siguiente pauta:

Observar que para obtener el producto máximo, usando sólo tres de los cuatro dígitos dados, no será necesario usar el dígito 2.

Escribir las seis maneras posibles de ubicar en las casillas los dígitos 3, 5 y 6. Efectuar las multiplicaciones y escoger el mayor de los productos obtenidos.

Configuración epistémica:

Lenguaje: números, multiplicación, producto, mayor, menor.

Situación-Problema: Búsqueda de un valor máximo en un problema intramatemático, de contexto aritmético.

Conceptos: Multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales, numeración posicional, decenas y unidades.

Proposiciones: Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Procedimientos: Comparar números naturales. Seleccionar los casos relevantes. Efectuar las multiplicaciones en tales casos. Comparar los productos obtenidos y escoger el máximo.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Hagamos ahora la *configuración cognitiva* de la solución de David.

Lenguaje: números, producto, multiplicación, mayor, menor

Situación - Problema: Encontrar el mayor producto efectuando multiplicaciones de números de dos dígitos por un número de un dígito.

Conceptos: multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales.

Proposiciones: Si *a*, *b* y *c* son números naturales, tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Procedimientos: Comparación de números naturales. David advierte que usando el mayor de los números dados en todas las casillas obtendrá el mayor producto que se puede obtener multiplicando números de dos dígitos y un dígito. Con dígitos diferentes para cada casilla, David hace inicialmente multiplicaciones al azar, y va descartando las que le dan un número menor que otro producto. Luego advierte que es mejor usar los dígitos mayores.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Podemos observar que la diferencia fundamental con la configuración epistémica tomada como referencia, está en los procedimientos, pues David no inicia sus cálculos descartando el número 2, por ser el menor de los dígitos dados y tener que escoger sólo tres; sin embargo, una aproximación a esta manera de resolver un problema como éste se percibe en la solución de David al problema de encontrar el producto mínimo, pues usa muy poco el 7 (que es el mayor de los dados en ese problema) y cuando lo usa, no lo ubica en el lugar de las decenas.

Descartar el menor de los números dados supone intuir la proposición dada en la configuración epistémica y nos sugiere la posibilidad de proponer ejercicios previos que faciliten esta intuición, o proponer el problema considerando como paso previo uno que haga pensar al alumno cuál de los números dados no usaría en sus cálculos para buscar el producto máximo.

La proposición aludida y explicitada en la configuración epistémica que hicimos de este problema, es una formalización y generalización de la acción intuitiva de descartar el número 2 por ser el menor de los cuatro dados. Es ilustrativo demostrar que la proposición es verdadera, como una manera de hacer evidente la relación entre intuición y formalización en la actividad matemática.

<u>Proposición</u>: Dados los dígitos positivos a, b y c, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

<u>Demostración</u>: Sea $h < \text{mín}\,\{a, b, c\}$.

$\overline{ab} \times c > \overline{hb} \times c$, pues $\overline{ab} > \overline{hb}$

$\overline{ab} \times c > \overline{ah} \times c$, pues $\overline{ab} > \overline{ah}$

$\overline{ab} \times c > \overline{ab} \times h$, pues $c > h$.

Para otros niveles

Otra solución referencial y su configuración epistémica, considerando la aplicación del problema a estudiantes de secundaria o post secundaria, sería siguiendo la pauta que describimos a continuación, observada en algunos casos que el problema fue propuesto a estudiantes universitarios y a profesores:

Descartar el uso del número 2.

Siendo 6 y 5 los dígitos dados más altos, examinar las dos posibilidades de obtener en el producto un número que tenga más de 6x5 decenas:

$$\begin{array}{r} 63\ \times \\ \underline{\quad 5\ } \\ 315 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 53\ \times \\ \underline{\quad 6\ } \\ 318 \end{array}$$

Descartar 63 x 5 y concluir que el máximo buscado es 318, obtenido como producto de 53 y 6. (Observar que en 63 x 5 hay 30 decenas más 15 unidades y en 53 x 6 hay 30 decenas más 18 unidades.)

Configuración epistémica:

El *lenguaje, la situación–problema*, los *conceptos* y el *procedimiento* general son los mismos que los explicitados en la configuración epistémica anterior.

Veamos los otros dos objetos matemáticos restantes:

Proposiciones: Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, si en el producto $\overline{ab}$ x *c* se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab}$ x *c*.

Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, tales que $a < b < c$, el mayor número que se puede obtener como producto de un número con dos de estos dígitos y otro de uno de estos dígitos, es un número que tenga por lo menos *b* x *c* decenas.

(Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de esta proposición)

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Argumentos:

Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener.

Los casos más relevantes corresponden a la obtención del mayor número de decenas.

Verificación empírica.

Esta configuración epistémica, nos abre otras posibilidades para proponer y orientar ejercicios, problemas, juegos y demostraciones previos y posteriores al trabajo con el problema presentado. Un juego atractivo puede ser pedir a un grupo de estudiantes que resuelva el problema, estableciendo que el ganador será el que encuentre el número máximo con el menor número de multiplicaciones y justifique su procedimiento.

El enfoque ontosemiótico propone que las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde diversas facetas o dimensiones duales y una de ellas es la dualidad entre ejemplar y tipo, en la cual se refiere a una de las actividades fundamentales de la matemática, que es la generalización. Ya ha estado presente esta dualidad en las configuraciones epistémicas realizadas, pues a partir del caso concreto se ha construido proposiciones generales, pero es enriquecedor mostrar algunas otras posibilidades de generalización del problema presentado y proponerlo – inclusive en un contexto lúdico – por ejemplo en cursos de formación o de capacitación de profesores. A continuación dos posibilidades:

a) Juan dice que es capaz de resolver el problema propuesto sin necesidad de hacer multiplicación alguna. ¿Es esto posible? ¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? ¿Cómo se puede justificar?
b) María propone otro desafío: Escribe en la pizarra cinco dígitos positivos a, b, c, d y e tales que $a < b < c < d < e$ y pide elegir tres de esos dígitos, diferentes entre sí, para formar el multiplicando, y otro más para formar el multiplicador, de manera que el producto sea el menor posible.

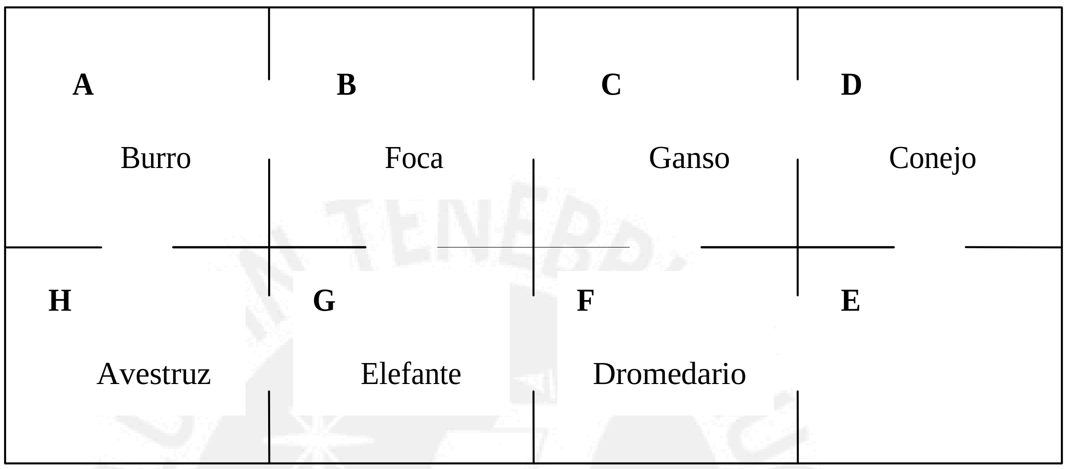
Invitamos al lector a justificar un procedimiento para elegir y ubicar los dígitos.

ANEXO 6 C

Solución de un problema de optimización discreto y no rutinario (el problema F)

Problema

En un zoológico las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura:



Determinar el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal. (Un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente.)

Solución *

Analicemos primero cada animal por separado:

- El avestruz necesita al menos 1 movimiento para ir a su jaula.
- El burro necesita al menos 1 movimiento para ir a su jaula.
- El conejo necesita al menos 1 movimiento para ir a su jaula.
- El dromedario necesita al menos 2 movimiento para ir a su jaula.
- El elefante necesita al menos 2 movimiento para ir a su jaula.
- La foca necesita al menos 2 movimiento para ir a su jaula.
- El ganso necesita al menos 2 movimiento para ir a su jaula.

Por lo tanto, para que cada animal llegue a su jaula correspondiente se necesitan al menos 1+1+1+2+2+2+2=11 movimientos. Veamos ahora que, efectivamente, 11 es el mínimo número de movimientos

* Jorge Tipe, alumno universitario

necesarios, para esto cada animal debe realizar exactamente la cantidad de movimientos que indica la lista anterior.

Basta dar una secuencia de 11 movimientos que haga que todos los animales lleguen a sus jaulas correspondientes:

- Movemos al dromedario, elefante, foca, ganso y conejo (en ese orden) en sentido antihorario. La distribución de los animales sería la siguiente:

A Burro	**B** Ganso	**C** Conejo	**D**
H Avestruz	**G** Foca	**F** Elefante	**E** Dromedario

Hasta ahora hemos hecho 5 movimientos. Notemos que el conejo ya no puede hacer más movimientos (pues tenía que hacer exactamente uno) y a los demás animales les queda exactamente un movimiento a cada uno.

- Movemos al dromedario, elefante, foca, ganso (en ese orden) en sentido antihorario. La distribución de los animales sería la siguiente:

A Burro	**B**	**C** Conejo	**D** Dromedario
H Avestruz	**G** Ganso	**F** Foca	**E** Elefante

Hasta ahora hemos hecho 5+4=9 movimientos. Notemos que el conejo, dromedario, elefante, foca y ganso ya están en sus jaulas correspondientes.

- Movemos al burro y avestruz (en ese orden) de la única forma posible, es decir, el burro a la derecha y después el avestruz hacia arriba. Con esto ya se consigue que todos los animales estén en sus jaulas correspondientes y hemos hecho en total 5+4+2=11 movimientos.

Concluimos, luego de ver este ejemplo, que el mínimo número de movimientos necesarios es 11.

ANExo 6D

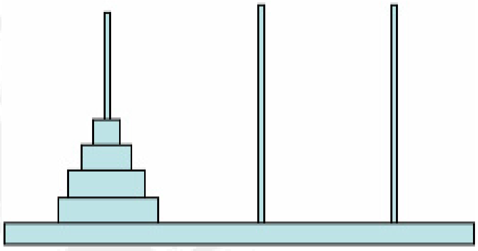
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2007, Número 10, páginas 175-181
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema



Se tienen tres varillas y cuatro discos de diferentes tamaños, apilados como se muestra en la figura. Los discos tienen una perforación en el centro para insertarlos en las varillas.

Se deben trasladar los cuatro discos a otra de las varillas, previamente determinada, ubicándolos en el mismo orden y respetando las siguientes reglas de juego.

1) *Un movimiento es el traslado de un disco de una varilla a otra.*
2) *Sólo se puede mover un disco a la vez.*
3) *Cada disco que se retira de una varilla debe llevarse directamente a otra varilla.*
4) *En ningún momento debe estar ubicado un disco cualquiera sobre otro de menor tamaño.*

¿Cuál es el menor número de movimientos?

Estamos ante un antiguo problema de carácter lúdico, conocido como *Torres de Hanoi.* Se ha escrito bastante sobre este juego y se puede jugar hasta en algunas agendas electrónicas. En este articulo veremos algunos aspectos matemáticos de este interesante juego en el marco de los problemas de optimización e ilustraremos el uso de una notación adecuada en la resolución de algunos problemas.

Observemos que el problema está planteado como uno de optimización discreta, pues se pide realizar el traslado de discos en el *menor* número de movimientos y es obvio que la variable "número de movimientos" toma valores sólo en los números enteros.

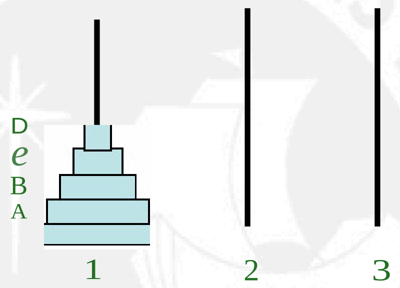
Seguramente, luego de algunos intentos lograremos ubicar los cuatro discos en otra varilla, como pide el problema. Si jugamos tratando de minimizar el número de movimientos, posiblemente llegaremos a un número de movimientos que

1•.,!5 1 ı. El rincón de los problemas

consideraremos es el mínimo. Sin embargo, ¿cómo estar seguros que tal número es el mínimo? Una posibilidad es examinar todos los casos y convencemos que nuestra secuencia de movimientos es la que tiene el menor número de elementos. Para ello puede ser muy útil un diagrama de árbol que nos vaya mostrando todas las posibilidades. Con ese propósito adoptamos una notación:

Notación

1. A las varillas las llamaremos 1, 2 y 3
2. Llamaremos A, B, C y D a los discos, considerando que A es el más grande y que los otros tienen tamaños decrecientes, siguiendo el orden alfabético



3. Usaremos ternas ordenadas para representar el conjunto de discos que hay en cada varilla, antes o después de cada movimiento.
4. La varilla en la que inicialmente están los discos es la 1 y la varilla a la que se desea hacer el traslado es la 3.
5. La situación inicial del juego propuesto queda descrita por la tema.

(AB CD, ©, ©)

que indica que los cuatro discos están en orden decreciente en la varilla 1 y que en las varillas 2 y 3 no hay disco alguno (un conjunto vacío de discos).

Con la notación adoptada, en un diagrama de árbol, con el punto inicial especificado, tendríamos dos posibles situaciones siguientes:

(ABCD, ©, ©) < *(ABC, O, ©)* / *(ABC, ©, O)*

Así podemos desarrollar el árbol completo, pero es fácil imaginar que será muy frondoso.

Diversos casos

La notación adoptada nos puede servir para mostrar fácilmente todos bs movimientos posibles cuanco tenemos menos discos; así, si llamamos n al número de discos, tendremos:

Cuando n = 1

Situación inicial: (A, e¡¡, <l>). Situación final buscada (ql, e¡¡, A).

Es obvio que uno es el menor número de movimientos *para* trasladar un disco de una varilla a otra.

Cuando n = 2

Situación inicial: (AB, e¡¡, <l>). Situación final buscada (<l>, e¡¡, AB).

(A B,4>, 4>}

A,B,4>

4>, B,A

B,4>, A

A. B.4>

A,4>, B

4>,4>,AB

AB,4>,4>

A,<l>,B

A, B,4>

B,A,4>

4>, A, B

4>,AB,4>

AB,4>,4>

A,4>,B

Se puede ver que se llega a la situación buscada en tres movimientos y no hay manera de hacerlo en un número menor de movimientos; así, tres es el número óptimo de movimientos cuando se tienen dos discos.

Observemos que bs puntos de bs cuales no salen ramas, ya han aparecido antes y no se continúan porque obviamente se repetiría la rama ya desarrollada y la llegada al punto deseado seria con un mayor número de movimientos.

Cuando n = 3

Situación inicial: (ABC, Φ, Φ). Situación final buscada: (Φ, Φ, ABC).

Es claro que para trasladar tres discos, tenemos que trasladar también dos discos. Como ya tenemos una forma óptima de trasladar dos discos, usemos esa forma para trasladar dos de los tres de este caso. Usamos tal forma para trasladar los dos discos más pequeños – B y C -, considerando el disco A como "piso" de esta torre de dos discos.

Veamos las tres etapas:

i) Consideramos BC como una torre de dos discos y la trasladamos a la varilla 2. (*3* movimientos)
ii) Trasladamos el disco A a la varilla 3. (*1* movimiento)
iii) Trasladamos la torre BC del poste 2 al poste 3, sobre el disco A (*3* movimientos)

Así se realizan en total *3* + *1* + *3* = **7** movimientos

Con este análisis, podemos afirmar entonces que **siete es el número mínimo de movimientos para trasladar 3 discos** de una varilla a otra, siguiendo las reglas establecidas, aun sin haber efectuado los movimientos específicos. El carácter de óptimo queda justificado por haber hecho uso solamente del número óptimo de movimientos (tres) para trasladar dos veces 2 discos (B y C) y una vez del número óptimo de movimientos (uno) para trasladar 1 disco (A). Podemos decir que el problema de trasladar 3 discos lo hemos convertido en tres subproblemas, cada uno de los cuales ha sido resuelto óptimamente, y esto garantiza que el problema también se ha resuelto óptimamente[1]. Esto es consistente con un principio mucho más general de la programación dinámica, conocido como el principio de optimalidad de Bellman.

Si hacemos un diagrama de árbol usando la notación adoptada, veremos claramente que con la secuencia óptima de movimientos se tienen las siguientes situaciones:

(ABC, Φ, Φ); (AB, Φ, C); (A, B, C); (A, BC, Φ);

(Φ, BC, A); (C, B, A); (C, Φ, AB); (Φ, Φ, ABC)

Se pueden distinguir los **siete** movimientos y las etapas (i), (ii) y (iii)

[1] Otra posibilidad sería considerar que la torre de dos discos está formada por los discos A y B, pero se ve fácilmente que así no tenemos los tres subproblemas con soluciones óptimas y que se emplean más de 7 movimientos.

Cuando n = 4

Siguiendo el mismo razonamiento, ya podemos responder a la pregunta del problema planteado, y sin necesidad de realizar los movimientos específicos:

Necesitamos 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos (B, C y D) a la varilla 2, luego 1 movimiento para trasladar el disco A a la varilla 3 y finalmente otros 7 movimientos para trasladar la torre de tres discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco A. Así, el mínimo número de movimientos que se necesita para trasladar los cuatro discos de la varilla 1 a la varilla 3 es

$$7 + 1 + 7 = \mathbf{15}$$

El lector queda invitado a hacer la verificación empírica, jugando con los discos.

Generalización

Llamemos ***M(n)*** al menor número de movimientos que se requieren para trasladar una torre de *n* discos de un poste a otro determinado. Luego del análisis hecho hasta ahora, es lógico concluir que para trasladar *n* discos de la varilla 1 a la varilla 3, en el menor número de movimientos, se procederá como sigue:

i) Considerar el disco más grande como piso de una torre de n-1 discos y trasladar esta torre a la varilla 2. (**M(n-1)** movimientos)
ii) Trasladar el disco más grande a la varilla 3. (**1** movimiento)
iii) Trasladar la torre de n-1 discos de la varilla 2 a la varilla 3, sobre el disco más grande ya trasladado (Otros **M(n-1)** movimientos)

Así se realizan en total $2M(n-1)+1$ movimientos y tenemos la expresión recursiva

$$\mathbf{M(n) = 2\,M(n-1) + 1, \text{ para todo entero } n > 1, \text{ con } M(1) = 1} \qquad (1)$$

Determinemos ahora una expresión general para $M(n)$, pues (**1**) sólo nos da una expresión en términos de $M(n-1)$.

- ***Una forma de obtener M(n):***

$M(1) = 1$

$M(2) = 2\,M(1) + 1 = 2\,(1) + 1 = 2 + 1$

$M(3) = 2\,M(2) + 1 = 2\,(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$

$$M(4) = 2\,M(3) + 1 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

En general,

$$M(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1$$

Y observando que tenemos la suma de una progresión geométrica cuya razón es 2,

$$\mathbf{M(n) = 2^n - 1}$$

- ***Otra forma de obtener M(n):***

La expresión anterior también la podemos obtener empleando el método general de resolución de ecuaciones en diferencias de primer orden, no homogéneas, con coeficientes constantes y condición inicial dada, pues la relación establecida en (**1**) es un caso particular de este tipo de ecuaciones.

Usamos la notación habitual al trabajar con ecuaciones en diferencias: escribimos $M(n) = x_n$, y reescribimos (**1**):

$$x_{n+1} - 2x_n = 1, \text{ con } x_1 = 1 \qquad (\mathbf{1'})$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$(x_n)_h = K\,2^n ,$$

donde K es una constante por determinar.

La solución particular de la ecuación dada es

$$(x_n)_p = -1$$

La solución general de (**1'**) es, entonces

$$x_n = K\,2^n - 1$$

Usando la condición inicial $x_1 = 1$, obtenemos que $K = 1$, y en consecuencia, la solución de (**1'**) es

$$\mathbf{x_n = 2^n - 1},$$

que es la misma expresión que obtuvimos de (**1**) usando la suma de una progresión geométrica.

Observaciones

a) Suele ocurrir que obteniendo experimentalmente que con 1 disco el número de movimientos es 1, con 2 discos es 3, con 3 discos es 7 y con 4 discos es 15, ya se afirma que con n discos el número mínimo de movimientos es $\mathbf{2^n - 1}$. Esto es interesante y revela una capacidad de intuir una fórmula general; sin embargo sólo es una conjetura y habría que probar la validez de esta fórmula para todo valor entero positivo de n.

b) También podemos demostrar que $\boldsymbol{M(n) = 2^n - 1}$ usando el método de *inducción matemática*. Se requerirá usar también la conclusión ya obtenida en (1) que podemos escribir

$$M(n+1) = 2M(n) + 1 \text{ para todo entero } n > 0, \text{ con } M(1) = 1. \qquad (\mathbf{2})$$

Veamos brevemente tal demostración:

- Ya verificamos que la fórmula es válida para $n = 1$; es decir

$$M(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

- Supongamos que es válida para n = h (*Hipótesis inductiva*):

$$M(h) = 2^h - 1$$

- Debemos probar que es válida para $n = h + 1$; es decir, que

$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 1 \text{ (\textit{Tesis inductiva})}$$

- La prueba es sencilla:

$$\begin{aligned} M(h + 1) &= 2M(h) + 1 && \text{(Por (\textbf{2}))} \\ &= 2\,(2^h - 1) + 1 && \text{(Por la hipótesis inductiva)} \end{aligned}$$

Luego,

$$M(h + 1) = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

ANEXO 6E

Una propuesta adicional de problemas de optimización, para secundaria.

A partir de estos problemas, puede crearse muchos otros. En particular, en algunos casos puede ser interesante intercambiar el pedido de máximo por el de mínimo o viceversa. Es importante proponer actividades individuales y grupales y estimular intercambios de ideas.

Números naturales

1. Juan escribe el número 4 2 1 5. Si escribimos el número 3 al inicio, al final o entre los dígitos del número dado, obtenemos otro número de cinco dígitos. ¿Dónde debemos ubicarlo para que el número que se obtenga sea el mayor posible?

2. María tiene las siguientes fichas:

17	28	61	75	76	65

¿Cómo debe ordenarlas en una fila para que se pueda leer el mayor número posible?

3. Similar al anterior, con la restricción adicional de que las fichas $\boxed{75}$ y $\boxed{76}$ no deben estar juntas.

4. Similar al (2), con la restricción adicional que el número buscado sea el mayor número par posible.

5. ¿En cuál de los siguientes 650 números naturales consecutivos
   1001, 1002, 1003, ... , 1648, 1649, 1650
   la suma de sus dígitos es la mayor posible?

6. Un padre de familia compra 9 bolsas de canicas para sus dos hijos. La primera tiene 1 canica, la segunda 3 canicas, la tercera 5, la cuarta 7, y así, hasta la novena, que tiene 17. ¿Cómo debe repartir las bolsas a sus hijos para que la repartición sea lo más equitativamente posible?

7. Similar al anterior, con bolsas que contengan 1, 4, 9, 16 y 25 canicas.

8. ¿Cuál es la mayor cantidad de sumandos, no necesariamente diferentes, que se pueden usar para expresar el número 21 como una suma de números primos?

9. ¿Por qué número debe dividirse 101 para que el cociente sea positivo y el residuo sea máximo?

10. ¿Cuál es el mayor número de elementos que puede tener un conjunto de dígitos diferentes de 0, si la diferencia entre dos cualesquiera de ellos no debe ser 1? ¿Cómo se modifica la respuesta si se incluye el 0?

11. Similar al anterior, pero exigiendo que la diferencia entre dos cualesquiera de ellos no debe ser 2.

12. Un grupo de piratas encontró un cofre que contenía 400 monedas iguales de oro. Según las leyes piratas el reparto se debe hacer de la siguiente forma: El capitán debe recibir más de la mitad del botín, y cada uno de los demás piratas debe recibir más de la vigésima parte del botín. ¿Cuál es el mayor número de piratas que puede haber , aparte del capitán, para que el reparto del botín se pueda hacer siguiendo las leyes piratas?

Números enteros

13. Escoger dos números del conjunto $\{-6, -5, 1, 2, 4, 5\}$ de modo que su producto sea el mayor posible.

14. Escribir los números del conjunto {1, 2, 3 4} en los espacios indicados, para obtener el menor número posible

$$\big|\,|\ldots.-\ldots..|-|\ldots-\ldots.|\,\big|$$

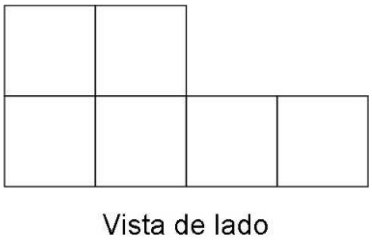
15. Similar al anterior, con números del conjunto {1, 2, 3, 5}

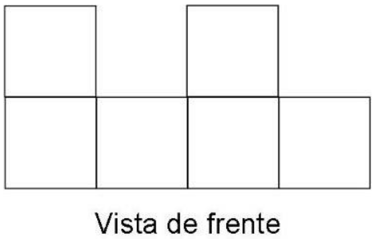
16. Escoger un número *n* del conjunto {2, 3, 4, 5} de modo que 2^n sea mínimo

17. Similar al anterior, pidiendo que $(-2)^n$ sea máximo o mínimo.

Geometría del espacio

18. Una estructura sólida construida con cubos, se ve de lado y de frente como se muestra en las figuras. ¿Cuál es el menor número de cubos necesario para construir tal estructura?[1]





[1] Problema adaptado de un comentario en NCTM (2003, p. 46)

ANEXO 6F

ELEMENTS FOR TEACHING GAME THEORY

Uldarico MALASPINA

Pontificia Universidad Católica del Perú

Av. Universitaria, cuadra 18, Lima 32, Perú

umalasp@pucp.edu.pe

ABSTRACT

Game Theory should be included in the undergraduate programs of many majors, specially in those of economics, business administration, industrial engineering and, of course, of mathematics and statistics. It becomes indispensable in a globalized and technified society to become acquainted with theoretic points of view that help make decisions in conflict of interests situations. Game Theory gives a nice opportunity for university lecturers to carry out the essential role of stimulating the attitudes of observing, analyzing and theorizing in our future professionals, as a way to build a better world. Moreover, it is highly formative to know the basic results of a theory developed in the 20th century and to use the elements of probability to examine multiperson decision problems.

In the teaching-learning processes of mathematics, we should be careful about how and when to present the rigorous formalization of concepts and the use of specific techniques since we must always bear in mind the importance of stimulating both an intuitive approach to the concepts that we are introducing and a creative use of the previous knowledge of our students. When we teach Game Theory we have a nice opportunity to apply these criteria through the collaborative learning and solving problems according to the following sequence: understanding the problem (includes organization of the information and representation), intuitive approach to the solution, solution (or attempts of it) using previous knowledge, intuitive introduction of new concepts or theorems related with the problem, solution (or attempts of it) using the new concepts or theorems, formal and rigorous presentation of the new concepts or theorems, formal solution of the problem, search of other ways to solve it, explorations modifying the problem, and a deep study of the theoretical aspects using intuition and formalization. With this didactical propose, I made it easy for my students to understand the concepts of Game Theory, specially Nash equilibrium and mixed strategies for non zero-sum games and their applications.

1. Introduction

A fundamental task of teachers of any subject, but specially of mathematics, is to guide their students in learning to learn, and helping them become self-confident about their learning capabilities. Game Theory is specially favorable for the performance of this task, because it deals with topics related with our daily life, which are becoming more important: situations in which there are conflicts of interests, in which it is necessary to decide looking for the most suitable choice and considering what the other persons, with similar interests, may do. It is very good for the motivation to be aware that these situations happen not only in parlor games, but also in games in a wider sense, which we play or whose play we see day to day: driving a car in a big city, trading the price of a commodity (as buyer or as seller), advertising, defending or accusing a prisoner, proposing a salary, designing economic policies in a country, facing a war, etc. All this favors the motivation and contributes to the presentation and development of the concepts starting from problems and making dynamical and collaborative classes with intuitive approaches prior to the formalizations proper of the theory. The cases of noncooperative games with two players and a finite number of strategies are particularly interesting because the students, appropriately guided in using their intuition and with the aid of relatively elementary mathematics, usually arrive at solutions or criteria that are in fact part of the theory, even though not yet formalized. When the students verify this, they strengthen their self-confidence about their learning capabilities.

Regarding intuition and mathematics, it is appropriate to recall what Efraim Fischbein wrote in his book *Intuition in science and mathematics*. He does not believe intuitive reasoning to be present in certain stages of the development of intelligence only, but instead that typically intuitive forces guide the way we solve problems and carry out interpretations, no matter how old -or young- we are. Furthermore, even when faced with highly abstract concepts, we tend - almost automatically- to represent them in a way that makes them intuitively accessible. However, we must bear in mind that this same author warns that “by exaggerating the role of intuitive prompts, one runs the risk of hiding the genuine mathematical content instead of revealing it. By resorting too early to a ‘purified’, strictly deductive version of a certain mathematical domain, one runs the risk of stifling the student’s personal mathematical reasoning instead of developing it”. (p.214)

The present article is meant to show a way of working with basic aspects of Game Theory, which agrees with the outline of the previous paragraphs.

2. Playing in the classroom

Students are divided into two groups: Alpha and Beta. From each group two students are selected to be the players (P1 and P2) of games whose rules are to be announced. So that in each group there is a P1 and a P2. The idea is to obtain results in the separate groups for later comparison. Each player calls from his group a team of "advisers" that will help him make the best decision. Neither players nor different teams are allowed to communicate, and the decision must be rational.

Game 1

For this game I give each player two cards, named C1 and C2. Each card holds a written demand that I will fulfill:

C1: Give the other player 3 dollars.

C2: Give me 1 dollar.

Each player must choose one card only, and give it back to me. So they must decide which card to choose in order for them to get the greatest possible benefit from their participation in the game.

After a prudential time for discussion with their advisers, players from both groups turn in one card each. After reading them, I fulfill each card's demand.[2]

Understanding the problem is a fundamental stage and generally, after some time for group deliberation, the information is organized in one of the following forms:

- *Lists of payoffs*

Payoffs to P1:

P1's choic	P2's choi	Payoff to
C1	C1	3
C1	C2	0
C2	C1	4
C2	C2	1

Payoffs to P2

P1's choi	P2's choi	Payoff to
C1	C1	3
C1	C2	4
C2	C1	0
C2	C2	1

- *Matrix tables*

Payoffs to P1:

P2

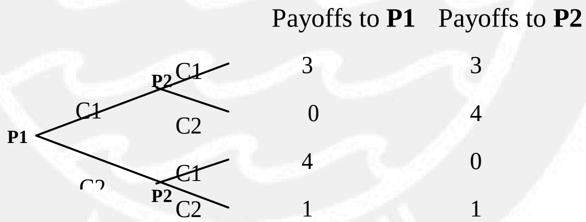
		C1	C2
	C1	3	0
P1	C2	4	1

Payoffs to P2:

P2

		C1	C2
	C1	3	4
P1	C2	0	1

- *Trees*



It is of great stimulus for the student's learning to learn capacities to realize later that, without consciously knowing it, they had been using concepts and representations that are common use in Game Theory. Thus, their way of organizing the information by means of "payoff lists" corresponds to the *payoff functions* of the proposed game, and the two other ways are just the two major representations for describing games: the *normal form* and the *extensive form*, respectively. It is then a very simple task to resume the two matrix tables in a bimatrix table, just as the ones used for the analysis of normal form games.

P2

	C1	C2
C1	(3, 3)	(0, 4)
C2	(4, 0)	(1, 1)

[2] This game is based on Aumann's version of the known game "prisoner's dilemma"

It is generally the case that in both groups, Alpha and Beta, players use the C2 option. When they are asked to explain the rationale behind their choice, they do it by means of the scheme they used to organize information and by certain criteria that are in fact intuitive approximations to the notion of *strict domination of strategies*. It is clear that even when apparently they would be better off using both C1, rationality (and a certain sense of self-assurance) forces them to choose C2. Next they are asked to relate this game to similar real-life situations. In one occasion a group showed that the same situation could be observed in an arms race between two countries: both are conscious of the convenience of decreasing their expenses in weapon systems, but neither will risk to do so without being reasonably sure that the other also would. As a result of distrust, they continue spending enormous amounts of money in weapons.

We continue posing two new problems; both already resumed in their bimatrix form:

Game 2

		P2		
		Red	Yellow	Green
P1	White	(4, 3)	(3, 4)	(4, 5)
	Black	(0, 6)	(5, 0)	(3, 4)

Game 3

		P2		
		Red	Yellow	Green
P1	White	(1, 9)	(3, 4)	(3, 8)
	Black	(2, 4)	(0, 4)	(4, 6)
	Brown	(3, 5)	(2, 6)	(3, 4)

Working in groups as before, I give the students enough time to study the problems. By using the notion of strictly dominated strategies, but without any further formalization, they find the solution for *Game 2*: P1 chooses White and P2 chooses Green, and the players receive the payoffs 4 and 5, respectively. Through this problem students learn to work with the rationality of Game Theory; they realize that at first P1 has no strictly dominated strategy, but that on the other hand Yellow is strictly dominated by Green for P2, so this starts their process of finding a solution.

Game 3 brings a particular difficulty: neither player has a strictly dominated strategy. However, students generally come to the solution that corresponds to a Nash equilibrium: the best choice for P1 is Black and the best one for P2 is Green. Difficulties they find to explain how they came to such a solution, added to the lack of formal algorithms, make us think that their solution is purely intuitive. The fact of receiving the teacher -and the whole class's- approval of their solution reinforces their self-confidence; the next task is to find a rational way to arrive at the solution. This is a crucial part of the learning process of Game Theory since the search for a more careful description of the player's rationality is in turn the beginning of an understanding of the rationality behind this theory. At this stage they are not yet informed of formal definitions or techniques, which when given from the beginning lead to a purely deductive learning, and sometimes to a merely mechanical application of techniques, shortening so this important phase of intuitive and creative approach. It takes a little time, but it is generally the case that after a period of discussion within the groups, and between groups, students grasp the idea of thinking what a player would do if he knew the other player's choice in advance. So they start ticking the "most convenient" payoffs in each case, and the solution is then determined by the strategies that correspond to a box having both components of the pair of payoffs ticked. After this experience, it is clear for the students that the absence of strictly dominated strategies does not imply the absence of a solution, and it is interesting to ask them to attempt a definition of the concept of "rational solution", which in the theory corresponds to Nash equilibrium. The students clearly perceive the necessity of formalization, and they are asked to take care of it. Regarding this stage, I had an excellent experience when receiving the following explanation, as an attempt to define a Nash equilibrium for games similar to the given ones:

Two lists are made:

If P2 chose	*then P1 would choose*
Red	Brown
Yellow	White
Green	Black

If P1 chose	*then P2 would choose*
White	Yellow
Black	Green
Brown	Red

Since Green - Black is in the first list and Black - Green is in the second, this pair of strategies is the rational solution for the game. These lists are in fact the *best-response correspondences* for the players; so essentially the definition is that of Nash equilibrium in pure strategies in terms of the best response correspondences that are commonly given for finite two-person games[3].

3. Creating games

An activity that is frequently given little importance is that of creating problems. This task should parallel that of solving problems, since it stimulates creativity, helps to fix ideas and concepts that are being introduced, and presents new difficulties that require the introduction of new concepts or techniques in order for them to be overcome. It is very attractive and motivating for the students to attempt to get through with the difficulties created by themselves; specially when they are conscious of the criteria they should use, but they find them insufficient. When asked to create games similar to those ones they were faced with, students easily come with games having more than one Nash equilibrium, games in which a player's best response to a certain strategy from his opponent is not unique (this is taken to introduce the concept of correspondence, rather than that of function); and -more interesting- games that have no Nash equilibrium according to the given criterion. After discussing some selected problems, formal definitions of game, payoff function, strictly dominated strategy, best-response correspondence and Nash equilibrium are presented for two-person games. The equivalence of the definitions of Nash equilibrium in terms of the best-response correspondence and of the payoff functions is highlighted. By observing a bimatrix game with a Nash equilibrium, they verify that being (s, t) an equilibrium point, if player 1 changes his strategy while player 2 does not, then the payoff received by the former is never as good as that he would receive in (s, t). A symmetric verification is made for the case of player 2: if he deviated from his equilibrium strategy while player 1 did not, then his payoff would never increase. After that, the statement of Nash theorem is presented: in every finite game (a game with a finite number of players, each one having a finite number of strategies only) there is a Nash equilibrium.

[3] If R_1 and R_2 are correspondences defining the sets of players' best response to each other's strategy, the pair of strategies (s, t) is a Nash equilibrium if and only if $s \in R_1(t)$ and $t \in R_2(s)$

Here is a selection of games, taken from those presented by the students:

Game (a)

	S	T	U
A	(3, 6)	(7, 1)	(2, 6)
B	(4, 1)	(7, 5)	(5, 8)

Game (b)

	S	T
A	(2, 4)	(3, 9)
B	(5, 3)	(2, 1)

Game (c)

	S	T	U	V
A	(2, 4)	(3, 9)	(7, 1)	(7, 0)
B	(5, 3)	(2, 1)	(6, 4)	(4, 1)
C	(0, 5)	(4, 3)	(3, 3)	(9, 2)

Game (d)

	S	T
A	(2, -2)	(-6, 6)
B	(-3, 3)	(4, -4)

In the four of them students use the technique of underlining the payoffs that correspond to a player's best response, when considering that his opponent uses some fixed strategy.

-In *Game (a)* it is easily seen that player 1 is indifferent to choosing his strategies between A or B if he knew that player 2 will choose T. Similarly, player 2 is indifferent between S and U, as long as he is certain that player 1 will choose A. Using the best-response correspondences, we have:

$R_1(S) = \{B\}$; $R_1(T) = \{A, B\}$; $R_1(U) = \{B\}$

$R_2(A) = \{S, U\}$; $R_2(B) = \{U\}$

It is a simple matter to see that the pair (B, U) is a Nash equilibrium, and we can find this point either by the elimination of dominated strategies, or by observing that $B \in R_1(U)$ and at the same time $U \in R_2(B)$.

-In *Game (b)* two Nash equilibria are obtained. This fact causes controversy on which one should be used, and motivates commentaries on the interchangeability and equivalence of equilibria, as well as on the idea of subgame perfect equilibrium. Furthermore, when the concept of mixed strategy was introduced later, it was very interesting that they found out their proposed game had a third Nash equilibrium.

-In *Game (c)*, formed from *Game (b)* by adding strategies to both players, no Nash equilibria could be obtained. Expectative and doubt arose among students, since it was natural for them to think that a counter-example had been found for the Nash theorem, stated before. Then they were suggested to look for more simple games having this property. That is how *Game (d)* came into scene; the latter has also another interesting particularity: it is a zero-sum game, that is, a game in which the amount obtained by a player is the amount lost by the other.

-In *Game (d)*, in the absence of strictly dominated strategies, and being “unable” to find a clear criterion to guide the players' choice, I suggested them to think that the players have actually more than two ways to carry out their choice. In most cases, students found, as a third way to "choose" an alternative, a random device: tossing a coin. At this point the natural question is: why not to use a dice instead of a coin? Or why not a roulette? Thus, for instance, player 1 could choose between A or B by tossing a coin: if it comes up heads, he chooses A, and if it comes up tails, he chooses B; and player 2 has the possibility of choosing between S or T by throwing a dice: if the outcome is 1 he chooses S, while if the outcome is 2,3,4,5 or 6, he chooses T. It is clear that when using a dice to "choose" between two alternatives, many different assignments could be done between numbers and strategies. A question is now in order: are these random devices the most convenient? Were the students to accept that random devices are indeed necessary, the formalization suggests the use of probabilities and expectation. With the aid of these tools, the students themselves redefine in a natural way the (expected) payoff for each player, and it is interesting to guide them towards an extension of the definition of Nash equilibrium, by asking them to compute and compare some expected payoffs. For instance, in *Game (d)*, assuming that players carry out their choices by tossing a coin and throwing a dice, respectively, and thinking of the correspondence between outcomes and strategies given above, this means that player 1 chooses A with probability 1/2 and B with probability 1/2 as well; while player 2 chooses S with probability 1/6 and T with probability 5/6. The expected payoff for player 1 corresponding to these probabilities, which we may call $EP_1((1/2,1/2), (1/6,5/6))$, or simply $EP_1(1/2, 1/6)$, can be obtained from the matrix of payoffs for player 1, in which the probabilities are written too:

		1/6	5/6
		S	T
1/2	A	2	-6
1/2	B	-3	4

$$EP_1(1/2, 1/6) = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}-6\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}-3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=-\frac{11}{12}$$

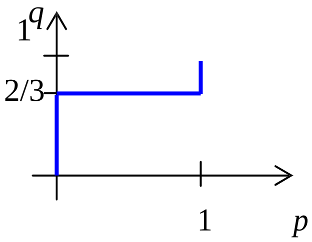
With a similar computation we obtain $EP_2(1/2, 1/6) = \frac{11}{12}$. However, this random device to choose their strategies is not the most convenient for any of them. To see this we can consider, for instance, that player 1 decides to use a dice instead of a coin while player 2 maintains his previous device. In this case, assigning a probability of 1/6 to A and 5/6 to B, we would obtain $EP_1(1/6, 1/6) = 2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}-6\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}-3\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+4\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{19}{12}$, which means that player 1 has improved his expected payoff. The moral is that (1/2, 1/2) for player 1, and (1/6, 5/6) for player 2 cannot be a Nash equilibrium. The search for the most convenient device for choosing at random a strategy makes them think of the most convenient probability that should be assigned to each strategy. With a little help they come to realize that the best "practical" device is neither a coin nor a dice, but something like a two-color roulette, with the portion covered by each color being proportional to the assigned probabilities. Thus, for instance, player 1 could use a roulette having 3/5 of its area painted in Green and 2/5 in Blue; if the roulette stops in Green he chooses A, if it stops in Blue he chooses B. After these experiences it is natural to extend the set of strategies for each player, calling *pure strategies* the original strategies they had been working with, and introducing the concept of *mixed strategies* as probability assignments over the pure ones. Restricting our work to two-person games with only two pure strategies for each player, and recalling the best-response criterion used to define the concept of Nash equilibrium in pure strategies, we look at the general expression for the expected payoff for each player and plot the best-response correspondences; next we intuitively conclude that the points where these two curves intersect determine all Nash equilibria, including pure strategy equilibria, if any. Furthermore, looking at the graphics we can figure out that in two-person games with only two strategies for each one, there will always be at least one Nash equilibrium. In the case of *Game (d)*, assigning probabilities p and $(1-p)$ to player 1's pure strategies A and B, respectively; and probabilities q and $(1-q)$ to player 2's strategies S and T, respectively, we obtain:

$EP_1(p, q)=15pq-10p-7q+4 = p(15q-10)-7q+4.$

Since p and q can only take values in the interval [0, 1], and since this function is linear in p, it can be seen that player 1's best response to values of q that make the expression $15q-10$ positive (i.e., $q\in]2/3, 1]$) is choosing the greatest possible value for p, that is $p=1$. Analogously, his best response to values of q that turn the expression $15q-10$ negative (i.e., $q\in [0, 2/3[$) is choosing the least possible value for p, that is $p=0$. If $q=2/3$, the expression $15q-10$ vanishes and the expected payoff for player 1 no longer depends on the value he chooses for p; in consequence, p can take any value in the interval [0, 1]. To resume, player 1's best response to the mixed strategy (q, $1-q$) of player 2, which we call $R_1(q)$ for short, is

$$R_1(q) = \begin{cases} \{1\} \text{ if } & q \in]2/3, 1] \\ \{0\} \text{ if } & q \in [0, 2/3[\\ [0, 1] \text{ if } & q = 2/3 \end{cases}$$

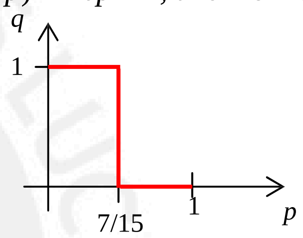
; and graphically:



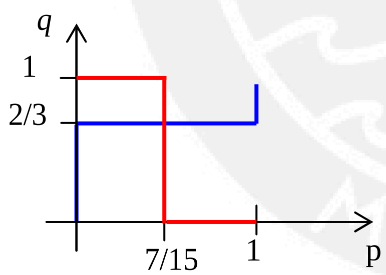
With a similar reasoning, we obtain, $EP_2(p, q) = q\,(7 - 15p) + 10p - 4$, and from this

$$R_2(p) = \begin{cases} \{1\} \text{ if } & p \in [0, 7/15[\\ \{0\} \text{ if } & p \in]7/15, 1] \\ [0, 1] \text{ if } & p = 7/15 \end{cases}$$

; and graphically:



When plotted in the same coordinate system, the intersection of these two graphs gives us, for each player, a mixed strategy that is the best response to his opponent's choice. Thus, we see that the only Nash equilibrium is the pair of mixed strategies ((7/15, 8/15), (2/3, 1/3)).



This visualization of Nash equilibria is a very interesting tool for the analysis, creation of problems and the stimulus of research. It is very important to induce the students to make conjectures on the existence of Nash equilibria and on the greatest possible number of these, as well as having them design their own examples and counter-examples to support or discard their conjectures. We can thus obtain a whole rank of cases, from the "intuitive security" of the existence of at least one Nash equilibrium, up to the design of games with infinitely many equilibrium points.

REFERENCES

- Binmore, K., 1994, *Teoría de Juegos*, Madrid, McGraw-Hill.
- Dutta, P., 1999, *Strategies and Games*, Cambridge, MIT Press.
- Fishbein, E., 1987, *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Reidel Publishing Company.
- Gibbons, R., 1992, *A primer in game theory*, New York, Harvester Wheatsheaf.
- Malaspina, U., 1997, Aprendizaje y formalización en matemáticas, Actas XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, México, CLAME.

ANEX0 6G

PR013LE'vlAS DEOl'Tl \llZACIÓN Y PENSAMIENTO M'\TE\IÁTICO

Uld<Wico \1alaspina Juraóo
Pontificia Universidad Católica d'I Pelli
umal:ispr@pucp edu.re

Rtsum!n
s;bien es amo "''' ь IYSOlacim de p<obbmas .,ruo.lJmest31 ..i.n:.a\J:v;a do W ''"'mticas. a ...-bien cicrlo q1J0..: ca una. va. rN)'OCÚ de dproC:t0t dt makmilic:as no t3srom1adode nt31le,. ad1.:eu:..1a para oncntir I!!S scs.il;Hg de n:sol xión de prtbl<nnsbo M a·urnnos. EnruclotiL y Cf'C'e\ isas r<.-f il.ad:u a tTUr<>' de profsoics do nivel Wsi.:o)' superi.>r. rcrhin :tUC- en un alto porcert:1je ns c'(pericnc:ia.s ca rc.'"°luci6n de rlcmlJ K itdu<:cn a "ri:tikihKWlcs) a Ll kxtLra d: libros} f:Jl<lOS mn probk:mi. f\. kos.. -iwchac de h$ cwL:J ro1csnd dmcnt.c aJ pria:n oos,, ... y an dif .:Wt3CCS watr"1.: en ko¡"CU .,-o. Una m1flcradc co rribui' a lkw \X-b es l.Uldo t15:'.'1" k · . uciOO de fll'\bkaas coir'i pco e:lOl"Ci.. en d m3JO) 4:los pb:Teani "! de l,,lya ? do: $. C-1.:. . El autx dt :sa1I'JI ironsi1cra q.ic los probbrw Je O(*niOOóo Stn Plf'1cul t·in.?n1e.1:n;'O-rJr l..fll>!S a ('lplirniiación <s un> acti\ ;bd n'tl)' ni mal m el 101111.:i.y en l:i \i.JJ C4..ÜJi31U frecucnl.: 11'tlle estarnos C Jlvicrdo O llJl.11111() di! nsohct pr.>IJ1Crt13S ck Optini7.JCi"ll :l¡:\J}'adot fucnn_)il en inlsición) hJdcndo conj.:.ur !! Trabaj.i: con rrohl"fn;a.3 d<. OpIIIru.J,.a..;i es mQ.(U"Cknte op:xtuniJad c-;.ti:nular l di:•;?ffOllG 4.:1 pe: nicn:om1t...1\tico •e-onillIf di\-'f"lt: «"iu·:l:·:.i sltwctoncs ('lrı .a-.a,. b3ocr rcrn:scnXioncs :t;ri6cas. -aa.fonuli?a.. ccnChftl) 'ra 7. tiu5lar Mlitraejc:ctr)o\. p::nw tn la Cl.iucnci1 ck s;>111C ¡i r.lliz:icior.es,. rul!'as d lte:uud.:s., cte.. – ptra m1111.r.'"'3J" :-1 e-1.Ji() 4e tcalu t1:lte1nttica.s .¡ui: rtsuelvtta ri.¡;..izU).lSlencc IOi p:-oblcmu plan.teadn o os pr:>bknlli dc1i\·11dos de la.c.;f':tul:ic.i6r.es rm•tmlicas a partir &: cls.

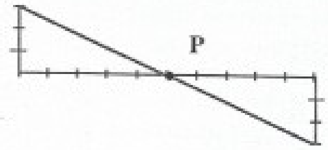
[n el pr::scnlc a:'.\ktl..>, oomo pvt.: d: una in,c31ipcién am¡i1a.) fruto de la. oe,teicne1.lis rc(cxlon,::s) 11 cxp.rienciJ. d.!l ai.Wr como profe<Ot <k um C13C$t:"b en cnsedl:Ua dt bs n.Un-.l!:ic:ls...) anirrundu bUc9CS ca.doce'.1tes:4k mui:miias<k scachria u a>! con es:-un \Q'SQrios. x prcsenur di'IINOS bt... ce orbmi.L.ación. con <omen::?rios $Obrt" los cnfoqtA:S ideados tJ res>h·er-Jqs·lª sea p:W inicil .i·asd.:tus¡xmic:p:i.nt.:i:o por s:ugccnc:ii:Sckl a&lf al&l1.iJ de cllm..

Introd ucció1

Cs importarte e¡1e los docentes conozcamos um ari!d:>d amplia de problero:is de o¡-limiz:ic:ióc: lo que e pn:;enu1en a ,-ica cotidiani losque tienca que ver con jtEgosy es1rategias, lo> rd:>eiO<la.IOS con consnicciones. los de gcometris, bs que tieoen que v,r coi el u.ar, i::IC. Reíle>:iona1 sobre ellos, m.lllcj:r ade ua.da1ncntc el ensayo)' mor, busci.r B vi sualización, proponer •1uevos enunciados o contcxtuali7.:i:ioncs, resotv'" et mismo probleraa de varias fo:mas, ha:er YaÓ3AtCS al problcna y II" 01.leVOS proticmas, coitribaye t contar cxi auyor<s clemeros (XU"3 oñent.u a 1uest:os cstudiltltCS t.ant:> csiimulmdo su pcns:nientc ma1cmáti:o y valor:mdo sus lPfOX maci<>nes intuilívas. coma mostrárdoles un.a visión más amplia e integrad de las maremáti::as, pues o p:.tir oo problemas s:ncillos so puodn '.rotar tcrms de geometrin, ar rmética, :íl¡cb11, Análisis, probabil idadts, m.

Er el marco de un estudie de '"50; se ha enconnado uc de manera esial en lm probleraas dt O(lt1ni23!ión. ju¡; un Jl'1I mu) impman:e la irruicin, ya se.t f>3la prever J3 solución '' r:trl una bueu a¡l'Oximaci(n a .\ so\!ci61. sin 1J.. .. recurso 1"1iltern.titicos refinados. ; t.. c:apacijad 1un1a.n3 puede potenciaf'S! grandcn1ente en ruc .ir.is atJ1nnas orientando tdccmdamcntc sus aproximacionc1 intuiliva! a p·oblemas de oitimizació1 cuid3.dc:sanH.lllC Jecc·on:.l:t:>, Qraduados) rrcrtados.

obviamente sus coordenadas serán enteras.



De esta observación se pasó a generalizar un poco: *si en esta recta existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.*

La observación anterior puede expresarse más formalmente usando ecuaciones y considerando que el punto P de la recta tiene coordenadas enteras (x_0, y_0):

$$\begin{cases} x = x_0 + 5t, & t \in Z \\ y = y_0 - 3t, & t \in Z \end{cases}$$

Si consideramos que P es un punto cualquiera de la recta y que el parámetro t varía en R y no sólo en Z, tenemos las **ecuaciones paramétricas** de la recta, obtenidas de manera natural.

Otro nivel de generalización que se examinó: *¿Si en una recta cualquiera existe un punto de coordenadas enteras, entonces existen infinitos puntos de coordenadas enteras.?*

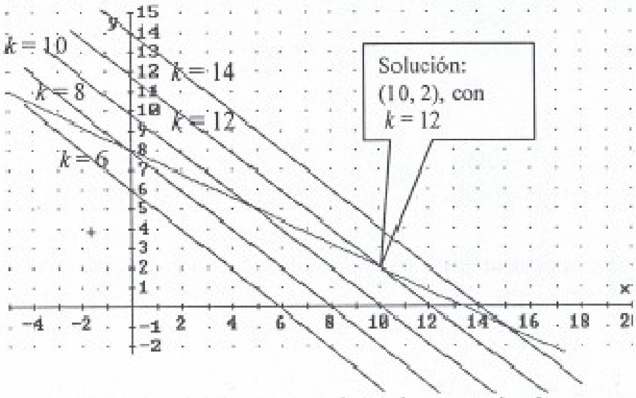
ii) *¿Todos los problemas similares tienen solución?*
Esta pregunta llevó a pensar en variantes al problema, de modo que se obtenga un problema que no tiene solución. La idea del *contraejemplo*, tan importante en matemáticas, resulta de manera natural.

iii) *¿Cómo garantizar que un problema similar tiene solución?*
Esta pregunta llevó a examinar aspectos teóricos y prácticos para resolver **ecuaciones diofánticas:** la ecuación $ax + by = c$, con $a,b,c \in Z$ admite una solución entera (x_0, y_0) si y sólo si el máximo común divisor de a y b es también divisor de c; y en consecuencia, si a y b son primos entre sí, la ecuación admite una solución entera. Utilizando las ecuaciones paramétricas obtenidas anteriormente, se llegó fácilmente a utilizar el método de Euler para resolver ecuaciones diofánticas.

8. También se trabajó con un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 40 \\ x + y = k, \text{ con } x, y, k \in Z; \quad x, y, k \geq 0; \ k \text{ debe ser máximo.} \end{cases}$$

Haciendo representaciones gráficas (considerando por razones prácticas variaciones de x e y en R) y examinando las intersecciones de una recta fija ($3x + 5y = 40$) con las rectas $x + y = k$, para diversos valores enteros positivos de k, hasta encontrar el punto de coordenadas enteras no negativas que corresponda al mayor valor posible de k, se está empleando, de manera natural, un método de la **programación lineal,** y más específicamente de la programación entera:



9. Ciertamente, todas las disquisiciones anotadas se hacen teniendo en cuenta el nivel de los participantes. Es destacable el hecho de poder incursionar en conceptos y métodos de diversos campos de la matemática a partir de un problema sencillo y "real", y respetando las iniciativas de los participantes.

Otro problema sencillo, complementario al anterior

Carlos dispone de 50 monedas de medio sol y de 60 monedas de un quinto de sol. Si desea entregar a María S/. 13,10 empleando sólo estas monedas, pero el menor número posible de ellas, ¿cuál es el número de monedas de cada denominación que debe emplear Juan?.

Comentarios

1. Resulta interesante plantear un problema como éste, luego de haber trabajado el anterior (de maximización), pues brinda la oportunidad de afianzar reflexivamente los métodos empleados, tratándose ahora de un problema de minimización.
2. Algunos intentos del autor por lograr que los participantes inventaran un problema con estas características, luego de trabajar con el anterior, no fueron muy exitosas.

El problema de la viga

Un tronco de madera tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo largo mide 3 metros y cuya sección transversal tiene 20 centímetros de diámetro. Se desea obtener una viga de sección rectangular minimizando el desperdicio de madera en el corte. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de tal rectángulo?

Comentarios

1. En un 90% de los casos observados, se abordó este problema empleando cálculo diferencial, o se percibió resistencias a tratar de resolverlo al ser consciente de no recordar bien las técnicas de este campo de la matemática. Muchos intuyeron, sin poder explicarlo, que el rectángulo debería ser un cuadrado. Quienes lo resolvieron planteándolo formalmente como

$$\textit{maximizar } 4xy\textit{, sabiendo que } x^2 + y^2 = 100$$

y haciendo las derivadas correspondientes, no encontraron novedad en el problema.

2. En las experiencias tenidas, se percibió cierto escepticismo en los participantes cuando se les pidió resolver el problema sin emplear cálculo diferencial. Se sugirió usar un gráfico que muestra un rectángulo inscrito en una circunferencia, con una de sus diagonales (que es un diámetro del círculo) y pensar en maximizar el área de uno de los triángulos que la diagonal determina con los lados del rectángulo, considerando la diagonal como base de longitud fija y su correspondiente altura variando al moverse el vértice en la circunferencia. Entonces no resultó difícil obtener la solución: cuando la altura es un radio; lo cual lleva al cuadrado.
3. El impacto que produjo el razonamiento geométrico para resolver este problema, sobre todo a quienes lo identificaron como uno propio del cálculo diferencial y se esforzaron por recordar sus métodos, fue ocasión propicia para conversar sobre la *belleza de las matemáticas*, lo cual es sumamente importante para quienes aprenden y para quienes enseñan esta disciplina.

Problemas de optimización en juegos

i) Con el conocido juego de las *torres de Hanoi*, se planteó el problema de determinar el menor número de movimientos para trasladar los discos de un poste a otro bien determinado, considerando inicialmente cuatro discos y luego n discos.

Comentarios:

1. Este problema-juego brinda una buena oportunidad para experimentar – y con material concreto - la importancia de considerar un problema más simple que ayude a resolver el problema planteado (en este caso, considerar menos de cuatro discos); para estimular el razonamiento inductivo; para tomar conciencia de la importancia de la demostración y para adoptar una notación adecuada para representar las situaciones.
2. Se decidió usar ternas para indicar la ubicación de los discos en su posición inicial y después de cada movimiento. En el caso de dos discos, A y B, ubicados en el primer poste: pasar de (AB, Φ, Φ) a (Φ, Φ, AB). Empíricamente es fácil concluir que se requieren sólo tres movimientos. ¿Y la demostración? Un diagrama de árbol con todas las posibles secuencias de dos movimientos, demuestra que es imposible llegar a (Φ, Φ, AB) en menos de tres movimientos. Es muy enriquecedor matemáticamente deducir el menor número de movimientos teniendo 4 discos en base al conocimiento del menor número de movimientos con 3 discos y luego obtener la *expresión recursiva* general para el menor número de movimientos: $M(n) = 2M(n-1) + 1$, siendo $M(1) = 1$. La obtención de una expresión funcional para $M(n)$ lleva a trabajar con *progresiones geométricas* o con *ecuaciones en diferencias de primer orden*.
3. Otra línea de trabajo fue usar la obtención experimental del mínimo número de movimientos con 1, 2 y 3 discos y la conjetura que en general el menor número de movimientos con n discos será $2^n - 1$. Fue ocasión adecuada para reflexionar sobre la demostración matemática y en este caso para usar la *inducción matemática*.

ii) Otro juego muy interesante es el denominado *"sol y sombra": en una fila de 7 casillas se ubican 3 fichas azules en cada una de las tres casillas de la izquierda y 3 fichas rojas en cada una de las 3 casillas de la derecha. El problema-juego consiste en determinar el menor número de movimientos necesarios para intercambiar la ubicación de las fichas azules y rojas. Un movimiento es: o el desplazamiento a una casilla adyacente vacía, o el salto por encima de una ficha de otro color a una casilla vacía adyacente a ésta. Cada casilla puede estar ocupada a lo más por una ficha.*

Comentarios

Como en el caso anterior, la experimentación y la intuición llevan a la solución, pero no es fácil pasar a una demostración y a una generalización. Fue una oportunidad para evaluar en qué medida usarían creativamente las experiencias tenidas con las torres de Hanoi. Adoptaron una notación y usaron diagramas de árbol, pero el análisis de los casos sencillos no llevó muy fácilmente a una explicación lógica del número mínimo de movimientos. (En este caso no hay un planteamiento recursivo como en el problema de las torres.) Fue útil sugerir que expresen el número que encontraban experimentalmente distinguiendo entre desplazamientos y saltos. Tomó tiempo demostrar que $n^2 + 2n$ es el mínimo número de movimientos, teniendo n fichas azules y n rojas en una fila de $2n + 1$ casillas.

Problemas de optimización y geometría

Personajes de la historia de las matemáticas, como Herón de Alejandría y Jacob Steiner están vinculados al paso de la intuición a la demostración de conjeturas sobre la solución de problemas de optimización en geometría. Es enriquecedor matemáticamente trabajar con problemas isoperimétricos; en particular, iniciar con el problema-juego de *construir una figura plana de perímetro dado, teniendo suficientes cuadrados de la misma área, de modo que el área total sea máxima.* Es muy formativo hacer el análisis de los casos sencillos y llegar a una solución general.

Otra línea de trabajo es la búsqueda de los caminos más cortos. Pasar de problemas en un cilindro circular recto o en un cubo – solucionables con argumentos de geometría plana - a problemas en una esfera, lleva de manera natural a comentar y trabajar intuitivamente temas importantes en la cultura matemática y en las aplicaciones actuales, como las geometrías no euclídeas y el cálculo de variaciones. La limitación de espacio no permite exponer las interesantes experiencias tenidas con universitarios y docentes.

A modo de conclusión

Los cursos, talleres y sesiones de trabajo tenidos por el autor con problemas de optimización como los expuestos, fueron muy motivadores para los participantes y brindaron experiencias en las que interactuaron la intuición, los conocimientos matemáticos, la creación de nuevos problemas y la metacognición, lo cual fue reconocido como muy importante para aprender y para que los docentes orienten mejor la formación matemática de sus estudiantes.

Bibliografía

Corbalán, F. (1998). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid, España: Editorial Síntesis.
Courant, R and Robbins, H. (1963). *What is mathematics?* New York, USA:Oxford University Press.
Guzmán, M. de, et al. (1994*). Matemáticas - Bachillerato 3.* Madrid, España: Grupo Anaya.
Guzmán, M de (1994). *Para pensar mejor*. Madrid, España: Pirámide.
Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 15, Tomo 1, pp 43- 48). México: CLAME.
Mlodinow, L. (2001). *Euclid's window*. New York, USA: The Free Press.
Polya, G. (1957). *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton, USA: Princeton University Press.
Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: Macmillan.