PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA DE LA ELIPSE: SECUENCIA DE ACTIVIDADES MEDIADA CON EL GEOGEBRA PARA ESTUDIANTES DE QUINTO DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

MARIO FERNANDO OLANO CRUCES

ASESOR

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

Abril, 2018

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica, al favorecer la comprensión de la condición geométrica de la Elipse en estudiantes de quinto año de educación secundaria, en una secuencia de actividades mediada por el GeoGebra. La investigación se realiza con estudiantes de un colegio particular limeño del último año de educación secundaria, cuyas edades están entre los 16 y 17 años. La problemática del estudio se da por los antecedentes de investigación que presentan los inconvenientes que tienen los estudiantes de los últimos años de educación secundaria en comprender el concepto de Elipse, como lugar geométrico, por el abuso por parte de los docentes en el aspecto algebraico que prevalece sobre el aspecto geométrico. Nuestro interés es abordar el estudio de la comprensión de la noción de Elipse, por medio de sus diferentes representaciones. Para este estudio, utilizamos como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica y, en cuanto a la parte metodológica, tomamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica. Con respecto a la experimentación y análisis, elaboramos y aplicamos una secuencia de dos actividades que son elaboradas con la intención que los estudiantes coordinen los registros de lengua natural, figural, gráfico y algebraico, para comprender el concepto de lugar geométrico de la Elipse. En la primera actividad, los estudiantes obtienen el registro figural de la Elipse y coordinan el registro figural y lengua natural, mientras que en la segunda actividad los estudiantes realizan la coordinación del registro gráfico y algebraico. Los resultados que se obtienen muestran que los estudiantes logran coordinar los registros de representación semiótica, lo cual les permiten comprender la noción de Elipse en sus diferentes representaciones.

Palabras clave: Elipse; Registros; GeoGebra; Coordinación de Registros.

ABSTRACT

This research has as its main objective to analyze the coordination of the different registers of the semiotic representation favoring the understanding of the geometric condition of the Ellipse in senior high school students in a sequence of activities mediated by the GeoGebra. The research is conducted with students from a private school in Lima during the last year of secondary education whose ages are between 16 and 17 years old. The problem of the study is given by the research background that present the disadvantages that the students of the last years of secondary education have in understanding the concept of Ellipse as a locus due to the abuse on the part of the teachers in the algebraic aspect that prevails over the geometric aspect. Our interest is to approach the study of the understanding of the notion of Ellipse through its different representations. For this study we use the Theory of Records of Semiotic Representation as a theoretical framework and, as for the methodological part, we take some aspects of the Didactic Engineering. Regarding experimentation and analysis, we develop and apply a sequence of two activities that are developed with the intention that students coordinate the records: natural language, figural, graphic and algebraic, to understand the concept of the locus of the Ellipse. In the first activity the students obtain the figural register of the Ellipse and coordinate the figural and natural language records while in the second activity the students perform the coordination of the graphic and algebraic record. The results obtained show that the students manage to coordinate the registers of semiotic representation which allow them to understand the notion of Ellipse in its different representations.

Keywords: Ellipse; Records; GeoGebra; Records coordination.

A mi madre Rosa que me dio todo su amor.

A mi esposa Edith e hijos Mario, Pamela, Lia

por el apoyo incondicional de siempre.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento muy especial a mi asesora Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo permanente en la investigación, sus enseñanzas, sus recomendaciones, sus sugerencias, sus críticas constructivas, siempre amable y positiva y animándome en todo momento a seguir investigando.

A los miembros del jurado, Dra. Katia Vigo Ingar y Mg. Verónica Neira Fernández por sus sugerencias y observaciones oportunas realizadas durante el proceso de elaboración de la presente tesis, las cuales me permitieron mejorar mi investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas enseñanzas, consejos y exigencia permanente en estos dos años de estudio y trabajo.

Al Colegio Santa María Marianistas por su apoyo económico en mis estudios de Posgrado y brindarme los recursos humanos como logísticos necesarios para realizar la investigación.

A los seis estudiantes de una institución educativa particular de Surco que participaron amablemente de la investigación.

A mi esposa Edith por su apoyo incondicional durante estos dos años de estudios y ser siempre mi soporte emocional y compañera de vida, por sus constantes consejos que me animan a seguir avanzando.

A mis hijos, Mario, Pamela y Lia, las razones de mi existencia y de todos mis esfuerzos, que me animan a seguir creciendo como persona para ser ejemplo de vida para ellos.

A mis compañeros de clases de la Maestría que durante estos dos años de estudio con sus experiencias enriquecieron mi práctica profesional y, en forma especial a Melissa Castillo, por sus consejos y apoyo durante las clases y trabajos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

El interés por analizar la coordinación de registros de representación semiótica de la Elipse en estudiantes de quinto de secundaria, surgió a raíz de los antecedentes de investigaciones de las cónicas, especialmente del objeto de estudio, que manifiestan las dificultades de los estudiantes de nivel secundario de diferentes países del mundo en comprender la noción de Elipse, en vista que en su enseñanza prevalece las representaciones algebraicas dejando de lado las representaciones gráficas. La presente tesis tiene como objetivo general analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria cuando desarrollan una secuencia didáctica sobre la Elipse mediada por el GeoGebra.

Por ello, es importante establecer el marco teórico para identificar los diferentes registros de representación semiótica de la Elipse, así como la metodología para alcanzar nuestro objetivo general. Por tal motivo, presentamos la estructura de la tesis en tres capítulos.

En el primer capítulo abordamos la problemática de investigación en la que realizamos una revisión de antecedentes de investigación en diferentes países sobre las representaciones semióticas de la Elipse, así como estudios que utilizan software de geometría dinámica, especialmente un ambiente de representaciones dinámica, GeoGebra, la justificación de nuestra investigación, el marco teórico tomando como referente aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), la pregunta y objetivos de la investigación y, los aspectos metodológicos tomados de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). El segundo capítulo trata sobre aspectos históricos y matemáticos de la Elipse así como los aspectos didácticos presentes en el texto de matemática del quinto año de educación secundaria que utilizan los estudiantes cuyas edades están comprendidas entre 16 y 17 años. Asimismo, el tercer capítulo trata sobre el experimento y análisis de la investigación, en el cual se describe a los sujetos participantes, el medio donde se realiza, los recursos e instrumentos que se utilizan, la descripción de la secuencia de actividades y, los análisis a priori y posteriori de la secuencia de actividades, y la concerniente confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori para la validación de acuerdo con la Ingeniería Didáctica. Finalmente, se presentan los resultados de la investigación, así como, las consideraciones finales y las perspectivas para futuras investigaciones relacionadas con las representaciones de las cónicas.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presenta investigaciones de referencia relacionadas con las diferentes representaciones de las cónicas, en especial del objeto de estudio, la Elipse. Estas investigaciones contienen estudios realizados con estudiantes del último grado de educación secundaria, bachillerato y primeros ciclos de estudios universitarios de diferentes países del mundo, así como estudios de las diferentes representaciones de la Elipse utilizando como medio el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra. Además, se presentan la justificación, aspectos de la Teoría de Registro de Representaciones Semiótica, la pregunta y los objetivos de investigación y la metodología de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

El interés de investigación surge de estudios sobre los problemas que presentan los estudiantes de los últimos años de educación secundaria, de diversos países del mundo, en comprender las diferentes representaciones de las cónicas.

La investigación de Almouloud, Koné y Sangaré (2014) destaca los problemas que tienen los estudiantes del tercer grado de la Escuela Secundaria de Mali, cuyas edades están comprendidas entre 16 y 17 años, en el aprendizaje y enseñanza del concepto de lugar geométrico de las cónicas, porque los profesores enfatizan los aspectos analíticos sobre los geométricos.

Este trabajo se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, que analiza las organizaciones matemáticas y didácticas relacionadas con el estudio de las cónicas, desde el punto de vista de la historia, la epistemología, el concepto, la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas. En este contexto, en el análisis de los cuadernos de los estudiantes se observa discrepancia entre los aspectos geométricos y analíticos de las representaciones de las cónicas.

Siguiendo la misma línea de investigación, el trabajo de Ljajko y Ibro (2013) señala que la enseñanza de las Geometría Analítica, en particular el estudio de la Elipse en tercer grado de la Escuela Secundaria de Serbia en estudiantes de 17 años, se hace con tecnología obsoleta, es decir, con pizarra, tiza, cuaderno y lápiz, de tal forma que los estudiantes usan mucho tiempo en hacer el bosquejo de la Elipse que copiaron de la pizarra y no pudieron entender el concepto que encierra el lugar geométrico de la cónica.

Por lo tanto, la finalidad del trabajo es comparar los resultados del aprendizaje de la Elipse por medio del uso de un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra.

Ljajko y Ibro (2013) señalan que los estudiantes que utilizan el software dinámico obtienen mejores resultados en la resolución de problemas y tareas en lugar de hacerlos con lápiz y papel, pero indican que aún no hay una comprensión profunda de los conceptos matemáticos de la cónica.

En Latinoamérica, la investigación de Santa y Jaramillo (2014) manifiesta que los alumnos de los primeros ciclos de estudios universitarios de Colombia, con edades comprendidas entre los 17 a 18 años, no lograron razonar sobre el concepto de lugar geométrico de las cónicas, porque en sus estudios predominan las ecuaciones algebraicas de estas curvas y, por ende, no reconocieron las ecuaciones y menos los conceptos correspondientes.

Los investigadores confirman, con su estudio, que uno de los problemas que se presenta en el aprendizaje de las Matemáticas, en particular de la Geometría, es la desarticulación entre los conceptos y procedimientos, en especial en el estudio de las cónicas.

En ese sentido, mediante un estudio de casos cualitativo, analizan y caracterizan el proceso de comprensión de los estudiantes del concepto de Elipse como lugar geométrico, usando el doblado de papel.

Asimismo, Santos (2014) constata que muchos estudiantes brasileños presentaron dificultades en el aprendizaje de la Geometría Analítica al tratar con las diversas representaciones gráficas y algebraicas de curvas planas, como la circunferencia y las cónicas en general.

El autor presenta una investigación cualitativa sobre la conversión de la representación de la Elipse, en diferentes registros, con estudiantes de enseñanza media de una escuela pública de la ciudad de Caieiras, en el estado de São Paulo, cuyas edades están comprendidas entre 16 y 18 años, con la finalidad de mostrar cómo fue el aprendizaje de la Elipse, tanto en su representación algebraica como la gráfica, que permitirá, a la luz de los resultados, poder evaluar nuevas formas de abordar la enseñanza de está curva.

Para lograr este objetivo, el autor realiza un cuestionario diagnóstico con preguntas que permitieron analizar si los estudiantes lograban hacer la conversión de la representación de la Elipse del registro en lengua materna al registro gráfico. El investigador muestra que los estudiantes presentaron conocimientos limitados sobre el concepto de la Elipse, en vista que, en ninguna de las cuestiones planteadas, los estudiantes desarrollaron aprendizajes para efectuar las conversiones propuestas y presentaron problemas para efectuar todos los cambios de registros formulados en el cuestionario.

Santos (2014) señala que las causas probables fueron generadas en función de las carencias de otros aprendizajes, tales como las dificultades en la resolución de ecuaciones en el aprendizaje de los contenidos de Geometría Analítica.

Además, el autor señala que la instrucción de Geometría Analítica, en la enseñanza media, es fundamental para el desarrollo del raciocinio del estudiante, principalmente en lo que se refiere a la representación de las formas en gráficas y sus relaciones matemáticas.

De la misma forma, Mosquera (2013), en su investigación, presenta una propuesta cuyo objetivo principal es revertir la forma en que los estudiantes de 15 a 16 años del grado décimo de la Institución Educativa Federico Sierra Arango, del municipio de Bello, Antioquia, Colombia, aprenden el concepto de la Elipse en la enseñanza de la Matemática.

En vista que lo hacen en forma mecánica al aplicar procedimientos algorítmicos y, donde el docente es el que transmite el contenido a los estudiantes, propone ejemplos, ejercicios y los evalúa sin profundizar en la comprensión del concepto evaluado. En ese sentido, el autor busca que los estudiantes alcancen un aprendizaje significativo de la Elipse, por lo que necesitó hacer que ellos sintieran la necesidad y el interés por aprender comprensivamente sobre la cónica.

El investigador señala que se puede lograr por medio de situaciones problema, en donde el estudiante pueda establecer conjeturas, proponer posibles soluciones a los planteamientos propuestos con la finalidad de lograr el pensamiento reflexivo y crítico en los estudiantes.

En cuanto a investigaciones sobre la Elipse, que muestran las diferentes representaciones, con el uso de diferentes tecnologías, la investigación de Santa (2011) estudia la forma de determinar la condición geométrica de la cónica como lugar geométrico por medio de la Geometría del doblado del papel.

La investigadora señala la problemática, tanto a nivel secundario como en el ámbito universitario, en la enseñanza de la Geometría con tiza, papel y libro. Es por eso que la autora señala la importancia de representar y construir el objeto matemático de una manera agradable al usar diferentes tecnologías; como por ejemplo, una herramienta informática como el Cabri Géomètre que permita crear un entorno dinámico para manejar los conceptos geométricos y sus representaciones algebraicas.

La autora afirma que una buena estrategia para representar la cónica es a través del doblado de papel y se consolida como una opción para mejorar el razonamiento en la Geometría, debido especialmente a su carácter visual y experimental que le permite al estudiante manipular material concreto para comprender el concepto geométrico, en vista que esta técnica permite hacer construcciones tan precisas como las realizadas con regla y compás.

En su investigación, Santa (2011) señala que usa la Entrevista Socrática con cinco estudiantes de 15 a 16 años del grado décimo de una institución educativa pública en Medellín, Colombia, en el ambiente del modelo cognitivo de Van Hiele para ver el nivel de razonamiento geométrico que alcanza los estudiantes con el concepto de Elipse.

Por otro lado, la investigación de Fernández (2011) señala que los estudios acerca de las cónicas, en especial de la Elipse en los primeros ciclos de estudios universitarios en Colombia, muestran que los estudiantes de 18 años favorecieron el proceso algebraico y apartaron el proceso como lugar geométrico.

Ante esto, el autor investiga, con base en una intervención didáctica, en el aula que se puede caracterizar geométricamente cada una de las cónicas, ya que los estudiantes pueden realizar construcciones punto por punto de cada una de las curvas y luego hacer las construcciones geométricas donde se utiliza la figura completa. Es decir que, a partir de ella, se puede obtener su representación algebraica.

En este sentido, el investigador, bajo el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, utiliza la mediación de una herramienta tecnológica de ambiente de Geometría Dinámica, el Cabri Géomètre II Plus, en el que se plantea una secuencia de varias situaciones didácticas, con el fin de proporcionar y disponer una relación entre lo puntual y global, con respecto al estudio del lugar geométrico de las cónicas.

La investigación de Bonilla y Parraguez (2013) reporta un estudio acerca de la comprensión del concepto de Elipse en estudiantes de edades entre 16 y 18 años de una institución educativa de enseñanza media en la comuna de Ovalle, Chile, por medio de la teoría cognitiva de los modos de pensamiento de Sierpinska y la metodología cualitativa del estudio de casos.

Los autores señalan que la problemática de no lograr una comprensión profunda del concepto de Elipse en los estudiantes se debe fundamentalmente al uso de las ecuaciones cartesianas para definir la Elipse. En efecto, proponen diferentes actividades con la finalidad de indagar los modos de pensamiento que privilegian los estudiantes y analizar las articulaciones entre los tres modos de pensamiento de Sierpinska, el pensamiento práctico denominado sintético-geométrico y los otros dos pensamientos teóricos como lo son el analítico-aritmético y el analítico-estructural.

En la misma línea, la investigación de Salazar y León (2016) señala que investigaciones de referencia en la enseñanza de la Elipse se favorece su tratamiento algebraico y se omite su tratamiento como lugar geométrico.

Por eso, los investigadores privilegian la representación figural y gráfica al describir los procesos de instrumentalización de la condición geométrica de la Elipse, mediado por el Geogebra, cuando realizan el trabajo con seis estudiantes de Arquitectura, con edades entre 16 y 18 años, del curso de Matemática I en una Universidad particular limeña, que aprenden del concepto de Elipse al reconocer que la cónica es el lugar geométrico, cuya suma de sus distancias desde un punto de la Elipse a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual a la longitud del eje mayor.

En ese sentido, los autores en base al marco teórico del Enfoque Instrumental, usan el concepto de la Elipse como esquema en uso para comprender otras propiedades de este objeto matemático y concluyen que los estudiantes reconocieron la mediatriz de un segmento y la circunferencia como lugares geométricos, conceptos que utilizan .para lograr el surgimiento de la condición geométrica de la Elipse y mencionan que el Geogebra sirve como herramienta tecnológica en la enseñanza y aprendizaje de la Elipse, ya que facilitan las construcciones geométricas.

En la misma línea, la investigación de Fahlgren y Brunström (2014) señala la importancia del uso de un ambiente de representaciones dinámicas, en especial el GeoGebra, en estudiantes de 17 años del último año de estudios secundarios de Suecia para actividades matemáticas, en particular el concepto de lugar geométrico de la Elipse para lograr el razonamiento y comprensión del objeto en estudio a través de la exploración, conjetura, verificación, explicación y generalización.

En este trabajo, los investigadores presentan un modelo para abordar problemas sobre lugar geométrico y realizan el diseño de tareas que promueven este tipo de actividad matemática mediada con el uso de software de geometrías dinámica, especialmente las tareas que fomentan a los estudiantes a hacer generalizaciones.

La investigación de Abboud (2015) analiza tres definiciones alternas de la Elipse diferentes a la definición geométrica de la cónica como lugar geométrico de los puntos P del plano, tal que la suma de las distancias desde cualquier punto P en la Elipse a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Abboud (2015) evalúa las tres formas diferentes de algoritmos que surgen de estas definiciones alternas de la Elipse, con la finalidad de dibujar la curva al usar una herramienta tecnológica como un ambiente de geometría dinámica, GeoGebra.

El investigador indica que el primer algoritmo se basa en la definición alterna de las cónicas que establece que la razón del conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo dado, denominado foco, es a la distancia a una línea perpendicular al eje focal, llamada directriz. En consecuencia, esta razón se conoce como excentricidad y, según su valor, determina el tipo de cónica, en el caso de la Elipse, es menor que 1.

El autor señala que, en el segundo algoritmo, el objetivo es encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano que cumple con la condición que cada uno de ellos divide, en la misma razón, al segmento perpendicular trazado desde un punto E de una circunferencia dada, a una cuerda fija de la circunferencia, a medida que el punto E se mueve a lo largo de la circunferencia.

Por último, el investigador muestra que el tercer algoritmo se relaciona con una nueva definición de la Elipse que el autor reporta y que establece que la Elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya suma de los cuadrados de las distancias de tales puntos a los lados de un triángulo dado, es una constante.

De hecho, el investigador describe y enfatiza cómo dibujar Elipses usando herramientas tecnológicas en vista que los reportes, en la comunidad científica matemática, sustenta la importancia de las construcciones en el aprendizaje de la Geometría. Además, hay una relación entre el objeto de estudio y la herramienta tecnológica, GeoGebra, en cuanto a la comprensión de la Elipse como lugar geométrico, su representación geométrica y representación algebraica.

En las conclusiones, el autor reporta, sobre la exposición de estos algoritmos, que ayudan a los estudiantes a escribir procesos similares por sí mismos y da la oportunidad de buscar nuevos algoritmos para investigar las relaciones que hay entre el Álgebra y la Geometría.

Siguiendo con la importancia de representar geométricamente la Elipse, la investigación de Cortés y Soto (2012) da a conocer el resultado del estudio sobre el uso de aparatos concretos, tales como los Elipsógrafos, para el aprendizaje de las Matemáticas que se lleva a cabo con ocho estudiantes de 19 años del bachillerato del cuarto semestre de la especialidad de Administración en Morelia Michoacán, México.

Esta investigación consta de dos actividades de aprendizaje de Geometría Analítica, en especial sobre el tema de la Elipse, en las que se utilizan dos aparatos concretos diferentes llamados

Elipsógrafos, denominados así porque dibujan una Elipse al momento de manipularlos. El primero es el Elipsógrafo de Palancas y Colisa de Inwards y el segundo es el Elipsógrafo Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.

Cortés y Soto (2012) sustentan el trabajo en propuestas de investigadores que argumentan a favor de realizar experiencias científicas de utilizar modelos articulados de máquinas para dibujar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas, en especial con aquellas que tienen que ver con la práctica de la Geometría. En ese sentido, por medio de la manipulación guiada de los aparatos concretos, se espera que el estudiante descubriera el modelo matemático involucrado en el mecanismo y sustentara los conocimientos adquiridos a través de la concepción constructivista del aprendizaje.

La investigación de León (2014) resalta la importancia de usar ambientes de representaciones dinámicas en la enseñanza de las Matemáticas, porque provee una herramienta a los estudiantes para comprender conceptos abstractos, hacer las representaciones de los objetos matemáticos y realizar las construcciones geométricas de los mismos, que en el aula son impartidos de forma tradicional y estática. Es decir, conceptos ya logrados, mientras que los elementos tecnológicos generan una interacción con el objeto matemático y se van descubriendo los conceptos, donde la principal característica es el dinamismo y abre en el área de las Matemáticas nuevas posibilidades para la enseñanza y aprendizaje.

El autor señala que, para alcanzar la instrumentalización de la Elipse, el análisis de las actividades que realizan los estudiantes se hizo en el marco teórico del Enfoque Instrumental de Rabardel y, en cuanto a los procedimientos metodológicos, se sigue los aspectos más relevantes de la Ingeniería Didáctica.

En consecuencia, el investigador señala que el aprendizaje de la Elipse, por parte de los estudiantes, primero, en su condición geométrica, es decir, el conjunto de puntos del plano cuya suma a dos puntos fijos es una constante y luego la construcción gráfica de la curva y, a partir de ella, obtener la representación algebraica de la Elipse, donde se consiguen diferentes representaciones de la cónica que se logran a través de la mediación de una herramienta tecnológica, como el ambiente de representación dinámica, GeoGebra.

Finalmente, Silva (2013) señala en su investigación que los estudiantes de 17 años, que terminan la enseñanza media en Macapá, capital de Amapá, Brasil, no reconocen las cónicas en sus diferentes representaciones. Es decir, no reconocen ni identifican las representaciones geométricas de las cónicas, así como las ecuaciones algebraicas que las describen, según la definición de lugar geométrico.

Para ello, Silva (2013) desarrolla una secuencia de actividades dirigidas a estudiantes del tercer año de enseñanza media de una institución educativa en Macapá, en el marco de la teoría de registros de representaciones semióticas con mediación de un ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, para construir la Elipse, la Hipérbola y la Parábola usando el concepto de lugar geométrico, con la finalidad de comprender que las figuras construidas tienen propiedades específicas que permitan deducir las respectivas definiciones de las cónicas y llegar a la ecuación general de segundo grado como a la forma canónica de ellas.

El análisis de las investigaciones sobre la condición geométrica de la Elipse, el dibujo de la cónica con aparatos concretos, la representación gráfica y algebraica de la curva al usar un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, permiten a los investigadores entender el contexto en que viven, ya que por medio de ella pueden describir e interactuar, con el objeto matemático, lo que convierte a la Matemática en una disciplina intuitiva, concreta y ligada a la realidad del hombre.

A continuación, presentamos la justificación para nuestra investigación.

1.2 Justificación

La investigaciones de referencia de Almouloud, Koné y Sangaré (2014), Ljajko y Ibro (2013), Bonilla y Parraguez (2013) y Santa y Jaramillo (2014) señalan que los estudiantes de los últimos años de educación secundaria y los primeros ciclos de estudios universitarios y de bachillerato, de diferentes países del mundo, presentan problemas en el aprendizaje de la Elipse mediante las diferentes representaciones que se pueden realizar con la cónica, donde la causa principal es el uso excesivo de ecuaciones que describen la Elipse, sin antes comprender la condición geométrica de la curva.

La investigación de Fahlgren y Brunström (2014) señala la importancia sobre el uso de un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, en estudiantes del último año de formación secundaria de Suecia, para comprender el concepto de la condición geométrica de la Elipse, en vista que este Software permite la interacción, por parte de los escolares, con el objeto matemático.

Por su parte, la investigación de Santa (2011) presenta la idea de implementar el estudio de la Elipse en el aula, en la que observa que su aprendizaje permitió resolver problemas geométricos que posibilite la comprensión de hechos importantes en la naturaleza, como la primera ley de Kepler que describe las orbitas de los planetas; de aplicaciones para la vida cotidiana, como los espejos refractantes que usan los dentistas y que utiliza la propiedad reflexiva de la Elipse; y a través de la comprensión del concepto de lugar geométrico de la Elipse se pueden comprender las propiedades geométricas de otros objetos matemáticos ligados con la cónica, como por ejemplo, la mediatriz de un segmento y la circunferencia.

El Ministerio de Educación (MINEDU, 2017), por medio del Currículo Nacional De Educación Básica (CNEB, 2017), expresa que el aprendizaje de la Matemática, en particular de la Geometría, donde se encuentra nuestro objeto de estudio, apoya a formar ciudadanos que estructuren y examinen información para comprender su entorno y resuelvan problemas en diferentes circunstancias, tal como lo señala, a través del documento curricular, en la competencia **resuelve problemas de forma, movimiento y localización** la que relaciona los conocimientos de la Geometría y afirma que:

> Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico (Perú, Ministerio de Educación, 2017, p. 154).

Asimismo, el objeto de estudio, como lo es la Elipse, es un contenido inmerso en la Geometría Analítica que contribuye a la concreción de la competencia **resuelve problemas de forma, movimiento y localización** por medio del estándar de aprendizaje en el nivel avanzado, tal como lo señala el MINEDU, a través del CNEB, y se describe como:

> Resuelve problemas en los que modela las características y localización de objetos con propiedades de formas geométricas, así como su localización y desplazamiento usando coordenadas cartesianas, la ecuación de la elipse y la circunferencia, o una composición de transformaciones de formas bidimensionales. Expresa su comprensión de las relaciones métricas entre los elementos de la circunferencia y elementos de los polígonos inscritos; así como la trayectoria de objetos usando la ecuación de la elipse, usando diversas representaciones. Clasifica formas geométricas compuestas, basados en criterios propios y propiedades geométricas. Combina e integra estrategias o procedimientos para determinar las ecuaciones de la recta, parábola y elipse, así como instrumentos y recursos para construir formas geométricas. Plantea afirmaciones sobre relaciones entre conceptos geométricos, deduce propiedades y las sustenta con argumentos que evidencian su solvencia conceptual (Perú, Ministerio de Educación, 2017, p 157).

Igualmente, la *National Council of Teachers Of Mathematics* (NCTM, 2000) señala la importancia de apreciar la resolución de problemas en el ámbito de las matemáticas escolares. Por lo tanto, la exploración de relaciones y justificación de los procedimientos en la solución de un problema, está inmersa en los estándares para los estudiantes de Estados Unidos de los grados 9 al 12 para **analizar características y propiedades de formas geométricas bidimensionales y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas,** donde se encuentra nuestro objeto bidimensional, como lo es la Elipse, en la siguiente declaración:

> Analizar propiedades y determinar atributos de objetos bidimensionales y tridimensionales; Explorar relaciones (Incluyendo congruencia y similitud) entre clases de objetos geométricos de dos y tres dimensiones, hacer y probar conjeturas sobre ellos, y resolver problemas que los involucren; Establecer la validez de conjeturas geométricas usando deducción, probar teoremas y criticar argumentos hechos por otros; Utilizar relaciones trigonométricas para determinar medidas de longitudes y ángulos (NCTM, 2000, p.) (Traducción del autor).

La *National Council of Teachers Of Mathematics* (NCTM, 2000) señala también la importancia de las representaciones de los objetos geométricos en la resolución de problemas y propone los estándares, para los estudiantes de Estados Unidos de los grados 9 a 12, para **utilizar la visualización, el razonamiento espacial y la modelación geométrica,** donde se encuentran las diferentes representaciones en las que puede ser expresada la Elipse, en la siguiente declaración:

> Dibujar y construir representaciones de objetos geométricos bidimensionales y tridimensionales usando una variedad de herramientas; Visualizar objetos tridimensionales y espacios desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales; Utilizar gráficos de vértice para modelar y resolver problemas; Utilizar modelos geométricos para conocer y responder a preguntas en otras áreas de la matemática; Utilizar ideas geométricas para resolver problemas y obtener información sobre otras disciplinas y otras áreas de interés como el arte y la arquitectura (NCTM, 2000, p.) (Traducción del autor).

En ese sentido, estos estándares de aprendizaje nacionales y extranjeros ratifican coincidencias en el aprendizaje de la Matemática, en especial de la Geometría, que involucra diferentes estrategias de resolución de problemas que básicamente apuntamos para nuestro estudio, como lo es la exploración de relaciones matemáticas y empleo de diferentes representaciones aplicadas al objeto matemático, la Elipse. Por lo tanto, abordar las diferentes representaciones de la Elipse, en estudiantes de quinto de secundaria, permite que ellos construyan el conocimiento geométrico al estar en contacto con estas distintas representaciones que pueden obtener con diferentes tecnologías les ayude a dar respuestas a interrogantes que surgen en la resolución de problemas y puedan, con sus argumentos, comprender mejor la realidad en la que se desenvuelven.

León (2014) señala la importancia de usar un ambiente de representaciones dinámicas, especialmente el GeoGebra, en la obtención de las representaciones de la Elipse, ya que permite a los estudiantes interactuar dinámicamente con el objeto de estudio y tener una mejor comprensión matemática.

En vista de haber encontrado muy pocas investigaciones en Educación Matemática en nuestro país, a nivel secundario, acerca de las diferentes representaciones de la Elipse y por los distintos trabajos llevados a cabo en Mali y Serbia en el nivel secundario que muestran la importancia de priorizar los aspectos geométricos sobre los analíticos en el aprendizaje y enseñanza de la Elipse, para una mejor comprensión del objeto matemático y señalar la necesidad de usar un ambiente de representaciones dinámica, como el GeoGebra, herramienta tecnológica que permite a los estudiantes en el último grado escolar de Suecia interactuar con la Elipse y por ende comprender mejor el concepto de lugar geométrico de la cónica, pensamos que realizar una investigación que aborde la noción de Elipse, por medio de sus diferentes representaciones, mediada con la tecnología, contribuirá a la comprensión de la cónica.

Además, el concepto de Elipse es utilizado, en los primeros ciclos de estudios universitarios en países como Colombia y México, donde se considera importante comprender la condición geométrica de la curva, así como la representación gráfica antes que la algebraica y, en nuestro país, por un lado, las investigaciones de Salazar y León (2016), en los primeros ciclos de universidad, reitera la importancia que los estudiantes comprendan el concepto de Elipse con la mediación de un ambiente de representaciones dinámicas y, por otro lado, León (2014) enfatiza el uso del Software dinámico para que los estudiantes universitarios de los primeros ciclos realicen la representación gráfica y la representación algebraica de la Elipse.

Por todo lo expuesto, se considera pertinente la presente investigación que permita, a nivel secundario, comprender la noción de Elipse y de una manera natural conseguir las diferentes representaciones de la cónica, con la mediación del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, donde se resalta la importancia de la representación de la curva en diferentes registros que ayude a mejorar la comprensión de los conceptos de la Geometría Analítica, herramienta fundamental de las Matemáticas.

A continuación presentamos el marco teórico que sustenta nuestra investigación.

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Nuestra investigación se sustenta en algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Según Duval (2004) el aprender matemáticas conlleva una serie de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de contenidos. En consecuencia, el autor señala que estas actividades cognitivas requieren aparte de un leguaje natural o de símbolos, el uso de diferentes registros de representación semiótica. Por lo tanto, Duval (1999) define un registro de representación como un sistema semiótico que tiene funciones cognitivas fundamentales para un funcionamiento cognitivo consiente. Además, el autor enfatiza que las representaciones son semióticas, es decir, las representaciones mentales realizadas y expresadas por el individuo a través del empleo de signos, no son más que una forma de exteriorizar en forma visible las producciones mentales del sujeto. También, Duval (2004) señala que la aprehensión o la producción de una representación semiótica de un objeto matemático se denomina semiosis y las acciones cognitivas del sujeto que derivan en la aprehensión conceptual de un objeto se denomina noesis. Asimismo, el investigador señala que no hay noesis sin semiosis, es decir, ambas están ligadas porque la noesis es la representación mental del objeto matemático expresada a través de símbolos por la semiósis.

Para Duval (2004) todo registro de representación semiótica debe cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica: producir la representación de alguna cosa y permitir la transformación de esa representación en otra por medio de una conversión y tratamiento. De esta manera, el sistema semiótico que permite estas actividades sea llamado registro de representación semiótica, por ejemplo, las figuras geométricas.

Los registros de representación semiótica pueden sufrir transformaciones de dos tipos: los tratamientos y conversiones. Un tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en un mismo registro donde se formó, por lo tanto, es una transformación interna del registro mientras que la conversión es la transformación de representación que consiste en cambiar de un registro a otro. De acuerdo con la teoría de los registros de representación semiótica, una de las condiciones de acceso a la comprensión en matemática es la articulación entre los registros, en esta etapa se hará una articulación entre dos tipos de registros diferentes llamada conversión.

Por ejemplo, un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, en el caso de nuestro objeto matemático, la Elipse, se puede hacer un tratamiento en el mismo registro algebraico tal como se muestra en la figura 1.

Tratamiento
$4x^2+9y^2=36$ $\frac{4x^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=\frac{36}{36}$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Figura 1. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico

Mientras que la conversión se da, por ejemplo, cuando representamos la Elipse en el registro gráfico en un sistema de coordenadas bidimensional haciendo coincidir el eje mayor o eje focal de la Elipse con el eje *x*, y usando el gráfico se obtiene elementos de la Elipse, como las coordenadas de los focos y vértices para utilizar la noción geométrica de Elipse y al final de una serie de operaciones algebraicas (tratamientos) obtener la ecuación algebraica ordinaria de la cónica, es decir, la representación de la Elipse en el registro algebraico.

En efecto, al usar la definición de la Elipse como lugar geométrico, es decir, el conjunto de los puntos representado por *P(x, y)* del plano que cumplen que la suma de las distancias desde cualquier punto representado por P en la Elipse, a dos puntos fijos representados por F_1 y F_2, llamados focos, es constante e igual a la distancia entre los vértices de la Elipse representados por V_1 y V_2, expresado en forma simbólica como $d(P,F_1)+d(P,F_2)=d(V_1,V_2)$ y, mediante la representación gráfica para los puntos con coordenadas *P (x, y),* $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $V_1(-5, 0)$ y $V_2(5, 0)$ se cambia del registro gráfico al algebraico y, luego de una serie de tratamientos en el registro algebraico se obtiene la representación algebraica de la Elipse mediante la ecuación ordinaria, tal como se muestra en la figura 2.

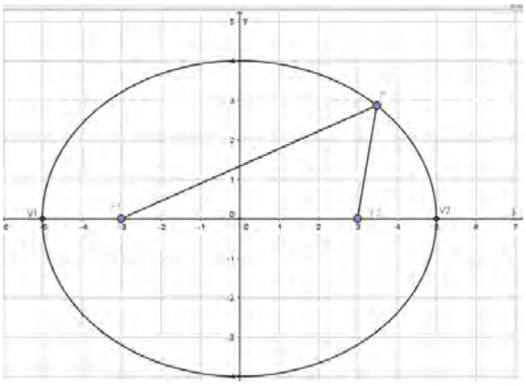
Representación gráfica	Representación algebraica
	$d(P,F_1)+d(P,F_2)=d(V_1,V_2)$ $\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(5+5)^2} \leftrightarrow$ $\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x-3)^2+y^2} \leftrightarrow$ $(x+3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)^2+y^2 \leftrightarrow$ $20\sqrt{(x-3)^2+y^2}=100-12x \leftrightarrow 256x^2+400y^2=6400 \leftrightarrow$ $\frac{256x^2}{6400}+\frac{400y^2}{6400}=6400 \to \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Figura 2. Conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico y tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico.

Duval (2004) distingue cuatro tipos de registros de representación semiótica: *lenguaje natural, figural, gráfico y algebraico,* tal como se muestra para la Elipse en la figura 3.

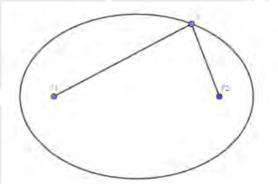
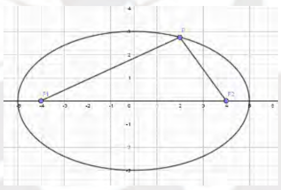
Registro de lenguaje natural	Registro figural	Registro gráfico	Registro algebraico
La Elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados **focos**, es una constante.			$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Figura 3. Registros de representación semiótica de la Elipse.

En vista que la investigación requiere el uso de coordenadas cartesianas bidimensionales para el aprendizaje de la Elipse por medio de la coordinación de los registros de representación, se presenta los registros figural, gráfico y algebraico, y no se menciona el registro de lenguaje natural debido que está inmerso en toda la investigación.

Duval (2006) señala con respecto a la actividad matemática:

> La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), solo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación

> entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto.(p.145)

Es decir en el sentido de Duval (2006), los sistemas de representación semiótica son importantes no solo con fines de comunicación sino para el desarrollo de la actividad matemática donde está involucrado el objeto, por lo tanto, el tratamiento de los objetos matemáticos depende propiamente del sistema de representación semiótico utilizado. Además, en palabras del autor, la actividad matemática se realiza en un contexto de representación semiótica cuya propiedad es la transformación y, los individuos, que trabajan una actividad matemática, empleen la necesaria para alcanzar el propósito de la actividad. Por consiguiente en nuestra investigación se requiere de una secuencia de actividades que muestre los diferentes registros de representación del objeto matemático de estudio, la Elipse. Es decir, se requiere de una coordinación interna que ha de construirse de los diferentes registros de representación semiótica que pueden ser escogidos y usados por los sujetos para comprender el objeto matemático.

Duval (1999), afirma que para la comprensión conceptual de un objeto matemático es fundamental la coordinación de varios registros de representación semiótica y además, es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones. En consecuencia, en el sentido del autor, sin no hay coordinación entre dos representaciones semióticas diferentes esto significa que hay dos objetos diferentes.

A continuación nuestra pregunta y objetivos de la investigación.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

En vista de las investigaciones de referencia y la justificación, se presenta la pregunta de investigación:

¿Qué registros de representación semiótica coordinan estudiantes de quinto de secundaria en una secuencia de actividades sobre la Elipse mediada por el GeoGebra?

Y al responder la pregunta de investigación nos conlleva al siguiente objetivo general:

Analizar la coordinación entre registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria en una secuencia de actividades sobre la Elipse mediada por el GeoGebra.

Y para alcanzar el objetivo general proponemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los diferentes registros de representación semiótica de la Elipse que movilizan estudiantes de quinto de secundaria.
- Identificar la coordinación entre los registros figural, gráfico y algebraico que realizan estudiantes de quinto de secundaria.

1.5 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Nuestra investigación es cualitativa porque según Borba y Araujo (2004), una investigación cualitativa en Educación Matemática está centrada en analizar y explicar procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con la matemática en la que la fuente de datos se da en el contexto real y el investigador es el actor principal. Además, los autores, señalan que el interés del investigador no se centra en los resultados, sino en todo el proceso seguido para la recolección y análisis de los datos, que se realiza de lo particular a lo general estableciendo significados a todo lo obtenido. Por lo tanto, la investigación cualitativa donde se establecen las relaciones entre los sujetos y el investigador al realizar un trabajo experimental, se acomoda la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) que señala que:

> La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. (p.37).

En ese sentido, tomaremos para nuestro trabajo aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), en vista que, estamos interesados en analizar los procesos que realizan los estudiantes de quinto de secundaria cuando aprenden el concepto de Elipse por medio de la coordinación de Registros de Representación Semiótica en una secuencia de actividades mediada con el GeoGebra y, por tal motivo, haremos un trabajo experimental en el aula, siendo el método cualitativo pertinente el de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que permite analizar situaciones de enseñanza y aprendizaje en clase y validar internamente el proceso.

La autora distingue cuatro fases: los Análisis Preliminares, la Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas, la Experimentación, el Análisis a posteriori y Validación.

Fase 1: Análisis preliminares.

Artigue (1995) considera los análisis preliminares fundamentales por la concepción de la realización didáctica como en el análisis a posteriori, que permite fundamentar los razonamientos que se establecen a partir de las observaciones registradas, pues según la autora, las dimensiones de los análisis preliminares son:

> La dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego. La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza. (Artigue, 1995, p.40).

Asimismo, en nuestra investigación en lo referente a la dimensión epistemológica se analiza la evolución histórica de la Elipse para analizar las diferentes concepciones que se le ha asignado a través de la historia. En cuanto a la dimensión cognitiva, en nuestro trabajo se presentan investigaciones de referencia que analizan las concepciones, las dificultades y problemas de los estudiantes en determinar las diferentes representaciones de la Elipse. Y referente a la dimensión didáctica, se analizan los textos de quinto de secundaria que utilizan los estudiantes de 15 y 16 años de edad en clase, donde se muestran los aspectos más relevantes de la Elipse.

Fase 2: Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas.

Artigue (1995) señala que en esta fase hay que tomar en cuenta cuatro aspectos fundamentales. En primer lugar, se identifican las variables macrodidácticas (concernientes a la organización global de la ingeniería) y microdidácticas (concernientes a la organización local de la ingeniería), luego hay que seleccionar los contenidos que forman parte de la secuencia didáctica, después se realiza la secuencia y, finalmente, se describe la forma en que se espera el estudiante conteste la secuencia didáctica. El producto de esta fase genera un conjunto de respuestas cuya validación se pondrá en juego mediante la confrontación que se realiza entre el análisis a priori y el a posteriori.

En nuestra investigación en esta fase consideramos para el diseño de instrumentos de la secuencia didáctica, que llamaremos secuencia de actividades, variables microdidácticas, que permiten controlar los objetivos específicos de la investigación. Además, la secuencia de actividades presentada a los estudiantes consta de dos actividades para desarrollar en el aula y en nuestro trabajo en esta etapa es importante el recojo de información de la secuencia de actividades preparada. También, en esta fase el investigador menciona lo que se espera de los estudiantes cuando realicen la secuencia de actividades, es decir, en nuestro trabajo en el análisis a priori planteamos las posibles acciones esperadas en los estudiantes así como las estrategias que puedan emplear para solucionar los problemas y las dificultades que podrían enfrentar durante el proceso de la secuencia de actividades.

Fase 3: Experimentación

En esta fase según Artigue (1995), el investigador se pone en contacto con el grupo de estudiantes participantes de la investigación en el ambiente donde se llevara a cabo la experimentación y, aplica la secuencia de actividades elaborada para registrar de manera permanente los sucesos ocurridos durante la experiencia.

En nuestra investigación, los estudiantes de quinto de secundaria en una clase determinada, conducidos por el investigador y acompañados por los observadores, realizan de manera individual la secuencia de actividades, que consta de dos actividades para ser trabajadas en dos sesiones de clases con la asistencia del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, con la finalidad de realizar el proceso de aprendizaje de la Elipse. Además, el investigador recoge los datos de las fichas de las actividades realizadas por los estudiantes, los archivos y captura de pantalla de las actividades y las notas de las guías de observación del equipo de apoyo sobre las intervenciones del docente y los estudiantes durante el proceso.

Fase 4: Análisis a posteriori y Validación.

En esta última fase según Artigue (1995), se basa en el conjunto de datos reunidos en la experimentación así como las observaciones realizadas al igual que los trabajos de los estudiantes en clase o fuera de ella.

En nuestra investigación, en base a algunos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica analizamos las acciones de los estudiantes de quinto de secundaria al desarrollar la secuencia de actividades mediada con el GeoGebra porque estamos interesados en la coordinación de los registros de representación semiótica que realizan los escolares cuando aprenden el concepto de Elipse. También, en esta fase se contrasta los supuestos esperados de los sujetos de investigación del análisis a priori, con los resultados que realmente obtienen los estudiantes al realizar las actividades diseñadas en la experimentación, es decir una contrastación entre el análisis a priori con el análisis a posteriori, validando de esta manera el método.

En el siguiente capítulo mostraremos algunos aspectos teóricos y matemáticos del objeto matemático Elipse así como el contenido de la cónica presentado en el texto de matemáticas que utilizan los estudiantes.

CAPITULO II: LA ELIPSE

En este capítulo presentamos aspectos históricos del objeto matemático y de las propiedades de algunos de sus elementos, tomando como referencia el texto de Boyer (1987) y, aspectos matemáticos tomando como referencia los textos de Stewart, Rendli y Watson (2012) y Lehmann (2003), textos que analizan la noción de lugar geométrico de las cónicas, en especial la Elipse y, porque son los textos más usados en los programas de estudios de los cursos de matemáticas en bachillerato como los primeros ciclos de estudios universitarios. Además, se presenta el desarrollo del contenido del objeto matemático en el texto de matemáticas que utilizan los estudiantes.

2.1 Aspectos históricos y matemáticos

Aspectos históricos

La historia de la matemática es presentada en el texto de Boyer (1987) desde los orígenes primitivos del hombre hasta indiscutibles hechos importantes del siglo veinte. Para nuestro estudio se toma cuenta a partir de la época heroica de los griegos, siglo de Pericles, aproximadamente en el siglo Va.C, época en la que el hombre se ha enfrentado con problemas matemáticos de gran importancia con tan pocas herramientas como es la regla sin marcas y el compás. En ese sentido, los griegos se plantean tres problemas clásicos de construcción geométrica como la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo, problemas que no tienen solución exacta con el uso de estos instrumentos pero que tienen solución usando otros métodos, como resultado de los intentos por resolver estos problemas, como por ejemplo, el uso de algunos lugares geométricos de las cónicas. En efecto, se considera a Menecmo (350 a.C.) como el primero en dar origen a las secciones cónicas al realizar cortes a un cono, como consecuencia en la búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema de la duplicación del cubo.

Efectivamente, Menecmo descubrió que al cortar un cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices tal como se muestra en la figura 4, se obtiene una cónica, la curva EDG, denominada parábola.

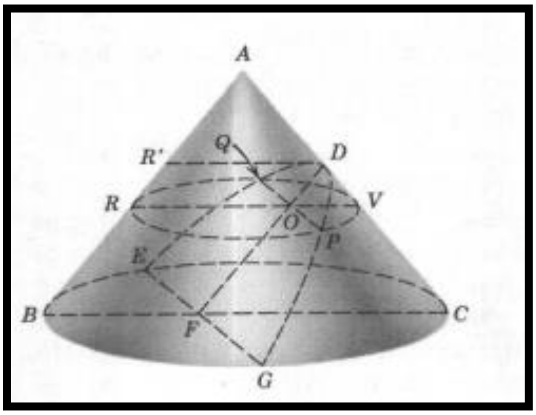


Figura 4. Sección cónica obtenida al cortar un cono con un plano perpendicular.
Fuente: Boyer (1987, p. 133)

Además, Boyer (1987) indica que Hipócrates de Chios (430 a.C) reduce el problema a la interpolación de dos medias geométricas entre la magnitud que representa la arista de un cubo y la que corresponde al doble de la misma, por lo que se puede considerar a x e y como las dos medias proporcionales buscadas entre dos segmentos de línea recta a y b, tal que se cumple que:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

En efecto, al efectuar operaciones en la expresión anterior se obtiene la primera media proporcional $x^2=ay$ y la segunda media proporcional $y^2=bx$. Además, considerando $b=2a$ y reemplazando en la segunda igualdad se obtiene la expresión $y^2=2ax$ que finalmente al reemplazar en la expresión resultante de elevar al cuadrado la primera igualdad nos conduce a la expresión $x^3=2a^3$, que permite encontrar el valor **x**, lado del cubo de volumen doble al de lado **a**, como $x=\sqrt[3]{2}a$ y así poder determinar el valor de **y**, como $y=a.\sqrt[3]{4}$.

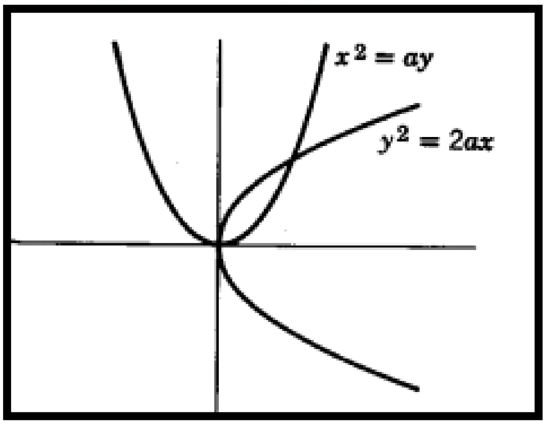


Figura 5. Intersección de dos parábolas para dar solución a la duplicación del cubo.
Fuente: Boyer (1987, p. 134)

La solución actual con notación de la geometría analítica sería construir dos parábolas con vértices en el origen de coordenadas tal como se muestra en la figura 5.

Ciertamente, el autor destaca el logro de Menecmo por el descubrimiento de las curvas al seccionar un cono recto con un plano perpendicular a sus generatrices cuyos puntos verifican las propiedades anteriores, consiguiendo la parábola. Igual manera realizó con conos según sus vértices fuesen agudos u obtusos, obteniendo así a la Elipse y la hipérbola.

Según Boyer (1987), la Elipse se descubrió de casualidad al buscar curvas que cumplan con las expresiones anteriores. El autor señala que Apolonio de Perga (262 - 190 a.C.), famoso geómetra griego que escribió su obra *Secciones cónicas* que consta ocho libros que acopia todo los conocimientos de la Antigüedad sobre estas curvas, consolida los resultados sobre las cónicas y es el primero en demostrar que con un cono circular recto se pueden obtener los tres tipos de secciones cónicas (Elipse, parábola e hipérbola) haciendo variar únicamente la inclinación del plano que corta al cono. Si el plano se inclina ligeramente, se obtiene una Elipse, tal como se muestra en la figura 6, en un cono con una rama.

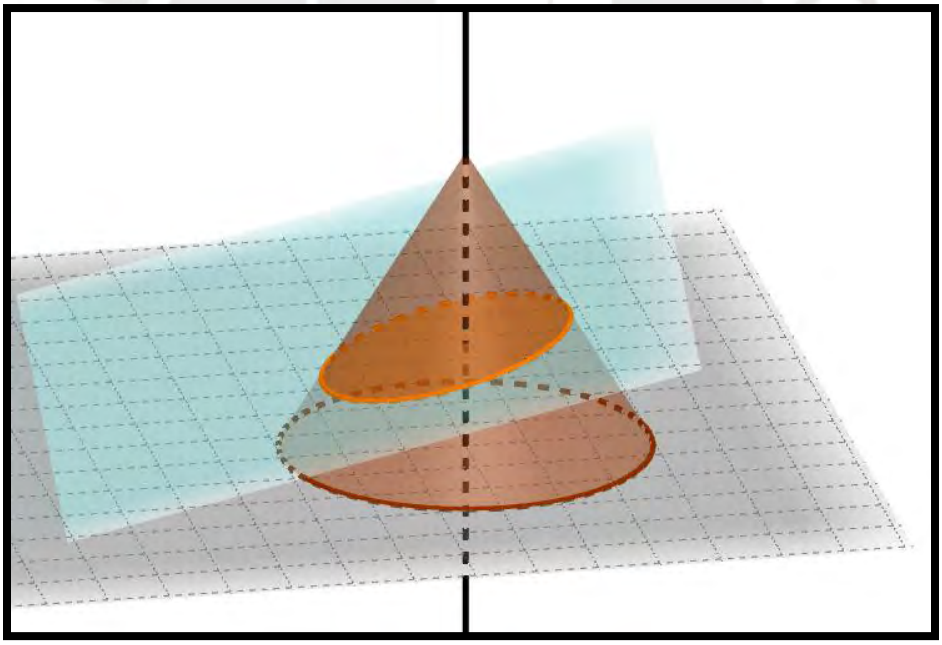


Figura 6. Sección cónica: La Elipse.

El autor señala que los geómetras griegos clasificaban a las cónicas como “lugares sólidos” por que no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una determinada condición tal como lo conocemos hoy, sino que describían de una manera estereométrica como secciones de un figura tridimensional por un plano . El autor menciona que Apolonio de Perga logró prescindir del cono al deducir una propiedad plana fundamental para que un punto pertenezca a la curva tal como se muestra en la figura 7, para el caso de la

Elipse y, que toma del libro I de su obra *Secciones cónicas*, la proposición 13, tal como se describe a continuación:

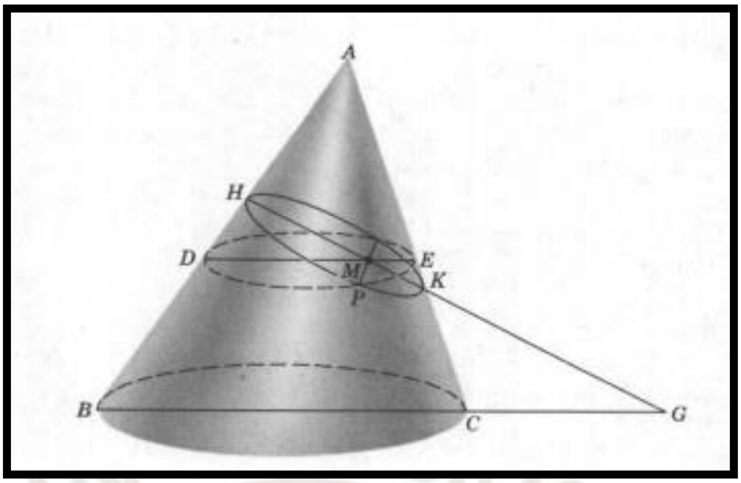


Figura 7. La propiedad fundamental de la Elipse de Apolonio.
Fuente: Boyer (1987, p. 198)

Si ABC es una sección triangular de un cono circular oblicuo tal como se muestra en la figura 7 y P un punto cualquiera de la sección plana HPK que corta a todas las generatrices del cono, entonces prolonguemos HK hasta que corte a la recta BC en el punto G, y tracemos por P un plano paralelo a la base, que intersecta al cono en la circunferencia DPE y al plano HPK según la recta PM. Si los puntos colineales D, M y E forman el diámetro de esta circunferencia perpendicular a PM, entonces por semejanza de los triángulos HDM y HBG:

$$\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$$

Y por semejanza de los triángulos MEK y KCG:

$$\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$$

Por otra parte por la propiedad de la circunferencia, se tiene:

$$PM^2 = DM.ME$$

Por tanto, despejando DM, de la primera relación y, ME de la segunda relación y, reemplazando en la tercera relación se obtiene la siguiente expresión:

$$PM^2 = \frac{HM.BG}{HG}.\frac{MK.CG}{KG}$$

Si llamamos $PM = y, HM = x \ y \ HK = 2a$, la propiedad que expresa la igualdad anterior viene a traducirse en la ecuación

$$y^2 = kx(2a - x)$$

Que podemos reconocer como la ecuación de una Elipse referida al vértice H y a su eje mayor como HK. Es importante notar que Boyer (1987) señala que Apolonio de Perga se adelantó a la geometría analítica de Descartes porque el método usado es semejante al planteamiento analítico moderno por lo que considera que por el estudio realizado por Apolonio de Perga sobre las secciones cónicas le mereció ser llamado "el gran geómetra".

Además, el autor señala el significado de Elipse, que proviene de la palabra *Ellipsis,* que significa una deficiencia y, menciona que los trabajos realizados por Apolonio de Perga permanecieron sin mayores cambios hasta que Pierre de Fermat (1601 – 1669) y René Descartes (1596-1650), en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron los problemas (La cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo) para darle un enfoque más analítico.

En ese sentido, el autor menciona que en la época del Renacimiento, después de muchos siglos, las cónicas fueron tomadas en cuenta por los científicos tales como Galileo (1564 – 1642) para detallar la trayectoria de un proyectil, Kepler (1571 – 1630) y Newton (1643 – 1727) para expresar que las órbitas de los planetas eran elípticas y que el sol era uno de sus focos. Como ya se mencionó, el autor resalta la importancia del trabajo de Descartes (1596 – 1650) en esta época porque le da el tratamiento moderno a las cónicas, es decir, hay un cambio sobre las concepciones de la matemática con el principio de la duda y la demostración. Descartes, es el precursor de una nueva geometría llamada geometría analítica, en el que combina la geometría con lo analítico. En su obra, *La géométrie*, muestra que su trabajo tomo fuerza, por la forma de interpretar un problema netamente geométrico y llevarlo a una ecuación algebraica, y luego de simplificarla y resolverla desde un punto de vista geométrico. En efecto, Descartes utiliza las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos, el álgebra en la geometría, es decir, usa procedimientos algebraicos en vez de diagramas, dándole significado a los algoritmos algebraicos mediante la interpretación geométrica, desplazando así las representaciones que primaban hasta ese momento como la gráfica o el lenguaje natural. Además, Dijksterhuis (2011) señala que en el octavo discurso de *La Dioptrique (*1637*),* obra de Descartes sobre las propiedades de la luz, describe la forma ideal de un lente para traer los rayos de luz a un punto del foco. Esta forma puede ser elíptica e hiperbólica. Asimismo, el autor señala que Descartes describe una forma fácil de dibujar la Elipse, denominado el método del jardinero, con dos clavijas clavadas en el suelo y un cable que pasa a través de ellos. Este método sencillo fue considerando un icono del siglo XVII, tal como se muestra en la figura 8.

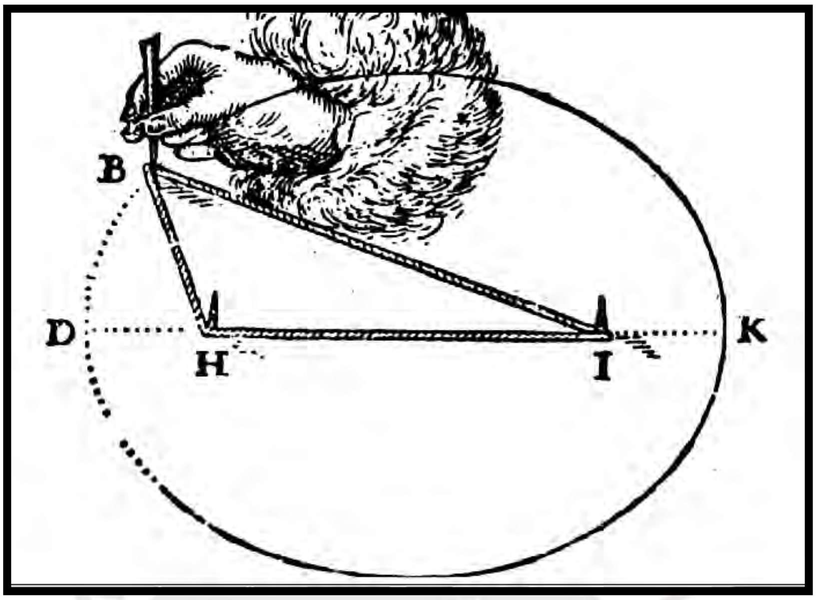


Figura 8. El *método* del jardinero en la obra La Dioptrique de Descartes.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.91).

Dijksterhuis (2011) menciona que Descartes ofrece una representación plana de la Elipse, diferente a la concebida en la obra de las *Cónicas* de Apolonio de Perga, que define la Elipse como una representación compleja en un sólido geométrico, una sección cónica, curva que resulta de la intersección de un plano el cono, tal como se muestra en la figura 9.

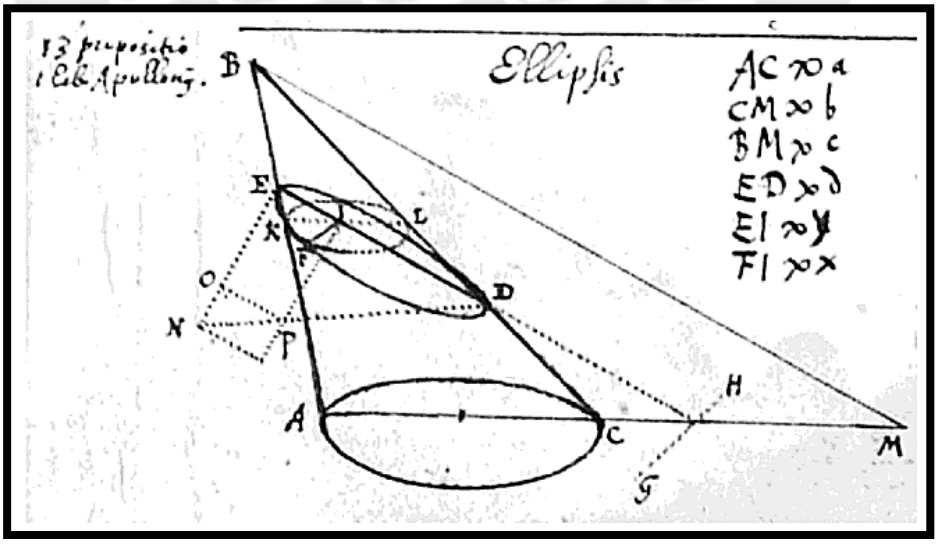


Figura 9. Elipse como sección cónica dibujo de Van Schooten.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.91).

Dijksterhuis (2011) señala que la difusión de los trabajos de Descartes fue realizado por Frans Van Schooten Jr. (1615 – 1660), quien contribuyó con estudios sobre las cónicas. Además, el autor menciona que el método del jardinero para dibujar Elipses se convirtió en un trabajo recurrente en la obra de Van Schooten, tal como se muestra en la figura 10.

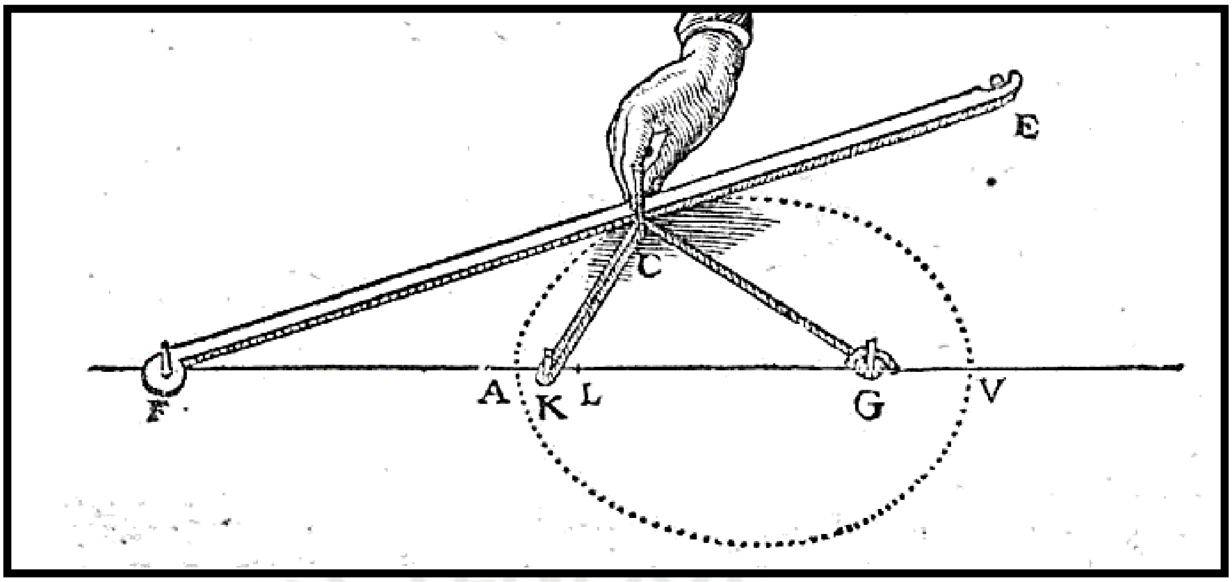


Figura 10. El método del jardinero según Van Schooten descrito en el libro Organica.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.92).

El autor muestra que Van Schooten plasmó en su libro, *Organica,* la descripción de una colección de instrumentos para dibujar Elipses, hipérbolas y parábolas. En realidad Van Schooten presenta seis mecanismos articulados para dibujar cónicas, llamados *conicógrafos*, mecanismos con unos ajustes apropiados capaces de trazar secciones cónicas. El primer mecanismo creado por Van Schooten es un Elipsógrafo. Este instrumento estaba formado por dos barras de la misma longitud AB y BD, articuladas en B y sujetas por A a una barra fija por la que se desliza D, cualquier punto E de la barra BD, diferente de sus extremos, describe una Elipse, tal como se observa en la figura 11.

El aporte importante de Van Schooten en cuanto a los instrumentos de dibujo de las cónicas es porque logra establecer la comprensión material de estos objetos matemáticos a través del trazado de las curvas. Van Schooten ve la geometría de estos mecanismos donde incluye la prueba de que las curvas generadas son Elipses y provee con sus instrumentos una ayuda en el dibujo de estas curvas mediante un movimiento continuo, con la certeza geométrica de que la curva descrita era precisa.

Está visión del significado de la Elipse como cónica desde la descripción sintética de Apolonio de Perga en su obra *Secciones Cónicas* en el siglo III a.C. hasta el siglo XVII donde Descartes describe la representación gráfica de la Elipse a través del uso de ecuaciones algebraicas de dos variables.

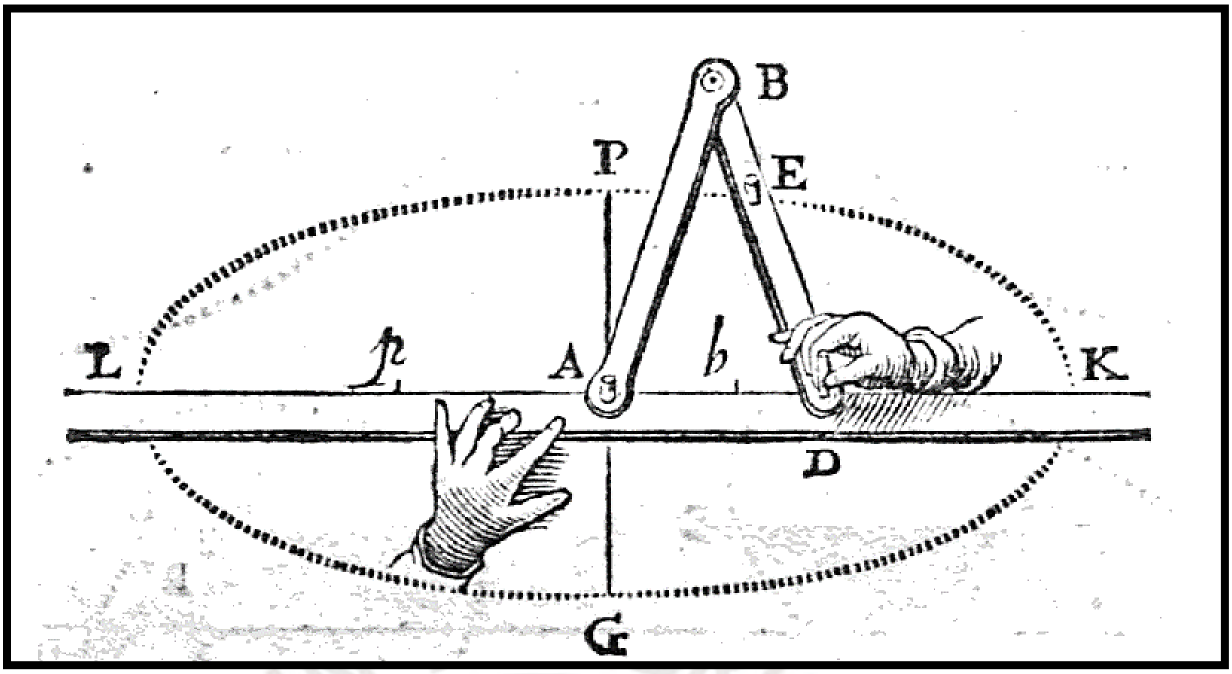


Figura 11. Elipsógrafo de Van Schooten.
Fuente: Dijksterhuis (2011, p.117).

Todo este panorama nos sirve para ampliar la visión sobre las diversas concepciones atribuidas en su desarrollo histórico, no siempre hablar de cónicas significó hallar ecuaciones algebraicas vinculadas a representaciones gráficas en un sistema de ejes coordenados. Actualmente, la Elipse se define en la geometría analítica con base en sus propiedades geométricas y algebraicas sobre el plano cartesiano y, tradicionalmente se parte de definir la Elipse como el concepto de lugar geométrico como el conjunto de puntos del plano cartesiano que cumplen que la distancia a dos puntos fijos del plano, denominados focos, es constante. Nuestro trabajo de investigación promueve las construcciones geométricas, las propiedades sintéticas que posteriormente traducimos a un lenguaje analítico traducido en ecuaciones algebraicas.

Aspectos matemáticos

La definición del objeto matemático está basada en Stewart, Redlin y Watson (2012). Y como complemento se basa también en Lehmann (2003).

Según Stewart, Rendli y Watson (2012), definen una Elipse como lugar geométrico, es decir, "el conjunto de los puntos en el plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. Estos dos puntos fijos son los focos de la Elipse" (p.732), tal como se muestra en la figura 12.

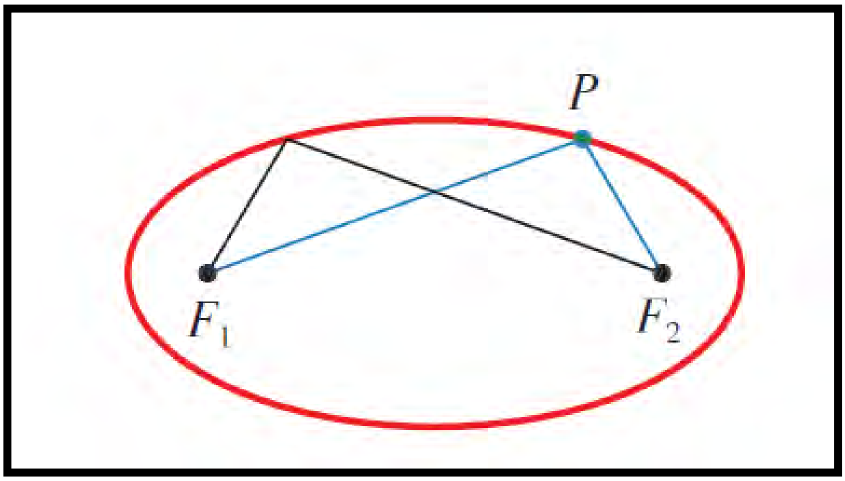


Figura 12. Definición geométrica de la Elipse.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.732)

Stewart, Rendli y Watson (2012), señalan que la definición geométrica propone un método sencillo para trazar la figura de una Elipse, que consiste en colocar una hoja de papel en un tablero de dibujo y clavar tachuelas en los dos puntos fijos, que han de ser los focos de la Elipse. Luego, sujetar los extremos de la cuerda a las tachuelas, como se muestra en la figura 13 y, con la punta de un lápiz, mantener templada la cuerda y finalmente mover el lápiz alrededor de los focos, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. De esta forma se obtiene la figura del conjunto de puntos que cumple con la definición geométrica de la Elipse.

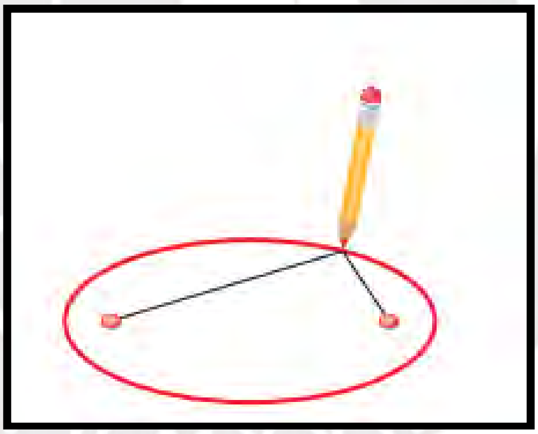


Figura 13. Representación de la Elipse en el registro figural.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p.733)

Los autores señalan que para determinar la representación algebraica expresada por la ecuación algebraica más sencilla de la Elipse, la denominada Elipse horizontal, se coloca los focos en los puntos representados por F_1 (-c, 0) y F_2(c, 0) de la cónica sobre el eje x, con el vlor de la constante $c > 0$, de modo que el origen de coordenadas se encuentre en el punto medio del segmento F_1F_2, tal como se muestra en la figura 14.

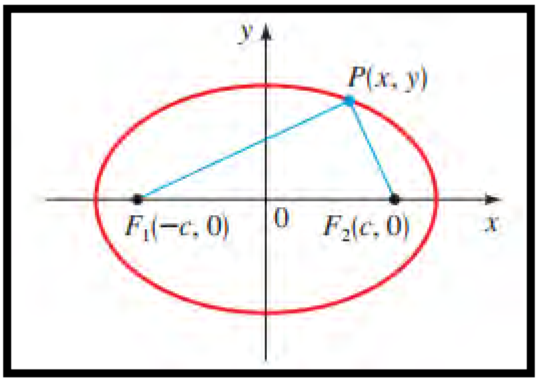


Figura 14. Representación de la Elipse horizontal en el registro gráfico.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 733)

Además, se asigna a la suma de las distancias de un punto cualquiera P(x, y) de la curva a los focos con 2a. En consecuencia, se obtiene

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

A partir de esta expresión se realizan una serie de tratamientos algebraicos que se van explicitando hasta obtener la ecuación ordinaria de la Elipse horizontal. Entonces aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado cada miembro y expandiendo se obtiene

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

Dividiendo la igualdad por 4 y elevando al cuadrado otra vez, resulta

$$a\left[(x+c)^2+y^2\right]=(a^2+cx)^2 \leftrightarrow$$
$$a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \leftrightarrow$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Como la suma de las distancias de P a los focos debe ser mayor que la distancia entre los focos, tenemos que $2a>2c \rightarrow a>c$. Por lo tanto, $(a^2-c^2)>0$ y podemos realizar más tratamientos, al dividir cada lado de la ecuación precedente entre $a^2(a^2-c^2)$ para obtener la expresión algebraica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$$

Para facilitar cálculos, se considera $b^2=(a^2-c^2)$ con $b>0$, entonces se deduce la relación pitagórica: $a^2=b^2+c^2$ con $b^2<a^2$ y $b<a$ y, la ecuación anterior se transforma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta representación algebraica se denomina la ecuación ordinaria, canónica o reducida de la Elipse horizontal, es decir, aquella Elipse que tiene sus focos en el eje x y, la recta que los une, coincide con el eje x. Para obtener la representación gráfica de la Elipse horizontal se necesita saber los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados. En efecto, si hacemos $y=0$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2}=1\rightarrow x^2=a^2\rightarrow x=a\vee x=-a$$

En consecuencia, la Elipse corta el eje x en $(a,0)$ y $(-a,0)$, como se muestra en la figura 15.

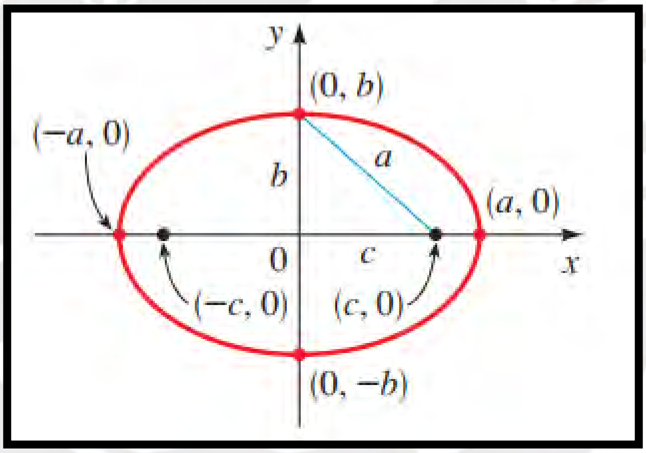


Figura 15. Vértices de la Elipse y la relación pitagórica entre las constantes a, b y c.
Fuente: Stewart, Rendli y Watson (2012, p. 734)

Estos puntos se llaman vértices de la Elipse horizontal, y el segmento que los une se denomina eje mayor, cuya longitud es 2a.

Similarmente, haciendo $x=0$, obtenemos

$$\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow y^2=b^2\rightarrow y=b\vee y=-b$$

En consecuencia, la Elipse horizontal corta el eje y en $(0,b)$ y $(0,-b)$. Estos puntos también son vértices secundarios de la Elipse horizontal y el segmento que une estos puntos recibe el nombre de eje menor cuya longitud es 2b. Asimismo, como se observa en la figura 16, que el eje mayor es más largo que el eje menor, en vista que 2a > 2b. Además, el origen es el centro de la Elipse horizontal. Análogamente, realizando tratamientos algebraicos con la ecuación algebraica obtenida de la definición de Elipse como lugar geométrico se obtiene la ecuación ordinaria de la Elipse vertical, es decir, los focos de la curva se colocan sobre el eje y, en lugar del eje x, en F_1 (0, -c) y F_2 (0, c), de modo que el origen de coordenadas se encuentre en el punto medio del segmento F_1F_2, tal como se muestra en la figura 16.

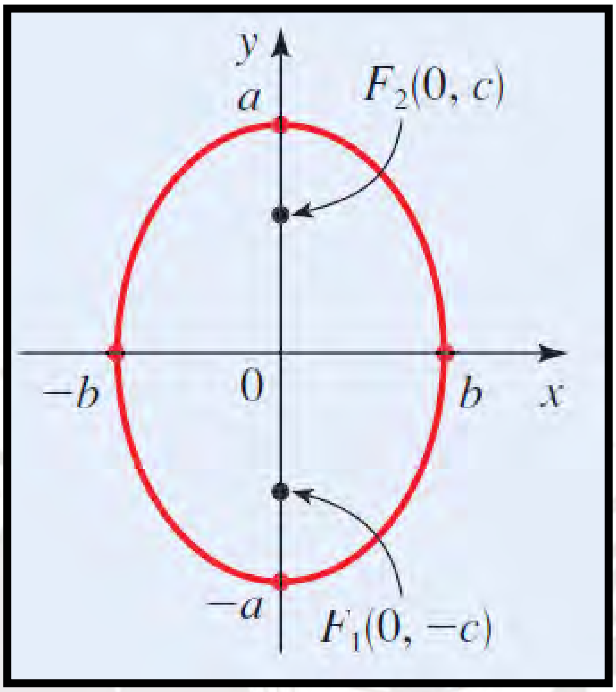


Figura 16. Representación gráfica de la Elipse vertical centrada en el origen.
Fuente: Fuente: Stewart, Rendli y Watson (2012, p. 734)

En consecuencia, es de esperar que los lugares de x y de y se invierten en la ecuación hallada anteriormente y obtengamos la ecuación ordinaria, canónica o reducida de la Elipse vertical cuya expresión algebraica es

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Además, para obtener la representación gráfica, tal como se observa en la figura 16, se determinan los interceptos de la curva con los ejes coordenados tal como se mostro con la Elipse horizontal.

En efecto, si hacemos $y=0$, obtenemos

$$\frac{x^2}{b^2}=1 \rightarrow x^2=b^2 \rightarrow x=b \vee x=-b$$

Similarmente, haciendo $x=0$, obtenemos

$$\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow y^2=a^2 \rightarrow y=a \vee y=-a$$

En consecuencia, la Elipse vertical corta el eje y en $(0,a)\ y\ (0,-a)$ y al eje x en $(-b,0)\ y\ (b,0)$.

El cuadro 1 resume lo que se acaba de demostrar acerca de la ecuación ordinaria y características de una Elipse con centro en el origen.

Cuadro 1. *Ecuaciones ordinarias y elementos de la Elipse con centro en el origen*

Ecuaciones y elementos de la Elipse centrada en el origen.		
Ecuación	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $a>b$
Vértices	$(-a,0)\ y\ (a,0)$	$(0,-a)\ y\ (0,a)$
Eje mayor	Horizontal , longitud $=2a$	Vertical, longitud $=2a$
Eje menor	Vertical, longitud $2b$	Vertical, longitud = $2b$
Focos	$(-c,0)\ y\ (c,0)$	$(0,-c)\ y\ (0,c)$
Relación pitagórica	$(b^2=a^2-c^2)$	$(b^2=a^2-c^2)$

Por otro lado, en Lehmann (2003), se define como la primera ecuación ordinaria de la Elipse a la ecuación centrada en el origen cuyos focos se encuentran en el eje x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Asimismo, Lehmann (2003) muestra que es posible hallar la ecuación de la Elipse cuando su centro está fuera del origen y ejes mayor y menor paralelos a los ejes coordenados. En efecto, en el texto del autor, se realiza un tratamiento algebraico con la ecuación anterior, es decir, se hace una transformación de coordenadas sustituyendo x' por $x-h$ e y' por $y-k$, donde el punto (h,k) es el nuevo origen de coordenadas en la trasformación de coordenadas, por lo que dicho punto representa el centro de la Elipse, entonces la ecuación se transforma

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

El autor señala que a está ecuación de la Elipse se le conoce como la segunda forma ordinaria cuando el eje mayor es paralelo al eje x, tal como se muestra en la figura 17.

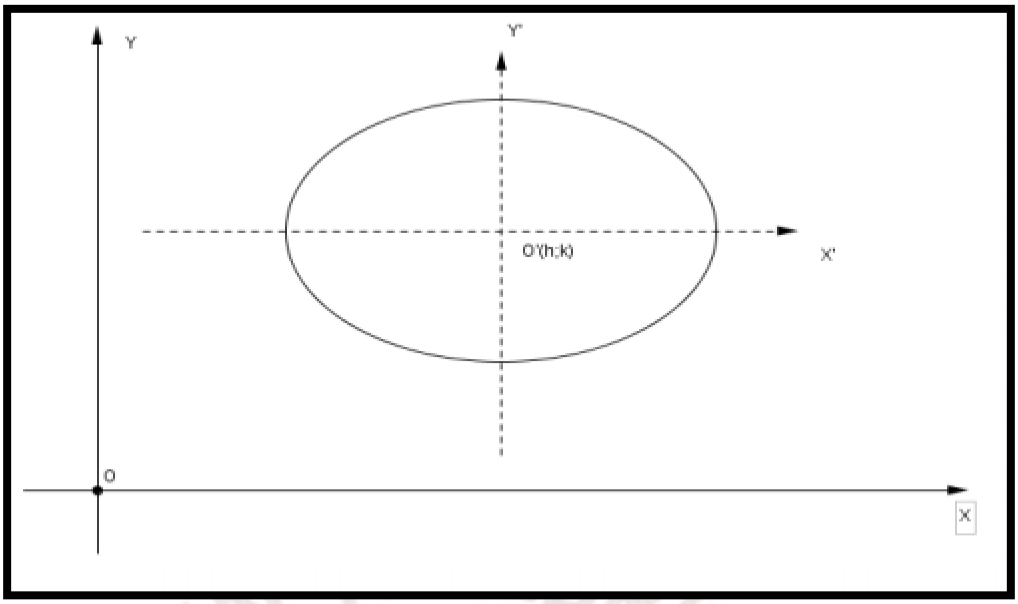


Figura 17. Representación de la Elipse horizontal con centro en (h, k*)* en el registro gráfico.
Fuente: Lehmann (2003, p. 180)

En la misma forma se puede obtener la ecuación de la Elipse con centro en (h,k) con el eje mayor paralelo a los eje y, realizando los mismos tratamientos algebraicos, es decir, la misma transformación en las coordenadas. En efecto, se sustituye x' por $x-h$ e y' por $y-k$ y se obtiene

$$\frac{y'^2}{a^2}+\frac{x'^2}{b^2}=1 \rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Además, Lehmann (2003) señala que si se realizan tratamientos algebraicos en ambas ecuaciones denominadas de segunda forma ordinarias se puede obtener una expresión algebraica cuadrática que se conoce con el nombre de ecuación general de la Elipse. En efecto, si se realizan estos tratamientos algebraicos en la ecuación ordinaria cuyo eje mayor es paralelo al eje x representada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

al efectuar las operaciones indicadas, es decir, se quitan denominadores, se desarrollan los binomios al cuadrado, se trasponen y ordenan términos, se obtiene una expresión algebraica cuadrática de la forma

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

La cual se puede escribir de la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

que representa la ecuación general de la Elipse, en donde

$A=b^2, C=a^2, D=-2b^2h, E=-2a^2k, F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

con A y C del mismo signo. Además, el autor señala que se puede hacer tratamientos algebraicos con la ecuación general de la Elipse y obtener la ecuación ordinaria de la curva mediante el método de completar cuadrados tal como se muestra en la siguiente secuencia

$$x^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \to$$

$$Ax^2+Dx+Cy^2+Ey+F=0 \to$$

$$\frac{Ax^2+Dx+Cy^2+Ey+F}{AC}=0 \to$$

$$\frac{(x^2+\frac{D}{A}x+(\frac{D}{2A})^2-(\frac{D}{2A})^2)}{C}+\frac{(y^2+\frac{E}{C}y+(\frac{E}{2C})^2-(\frac{E}{2C})^2)}{A}+\frac{F}{AC}=0 \to$$

$$\frac{(x+\frac{D}{2A}x)^2}{C}+\frac{(y+\frac{E}{2C}y)^2}{A}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2} \to$$

$$\frac{(x+\frac{D}{2A}x)^2}{MC}+\frac{(y+\frac{E}{2C}y)^2}{MA}=1$$

que representa la ecuación ordinaria de la Elipse donde $M \neq 0$ y

$$M=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

Por consiguiente, del análisis matemático de los textos revisados se observa de acuerdo con la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que hay tratamientos y conversiones, es decir, los tratamientos encontrados son transformaciones de representaciones en el registro algebraico mientras que las conversiones encontradas son transformaciones de representaciones que cambian del registro algebraico al gráfico conservando los mismos objetos denotados. En consecuencia, se observa que los textos analizados muestran una coordinación de registros entre el registro algebraico y gráfico. Además, ambos textos no utilizan software dinámico en el análisis de las ecuaciones ordinarias de la Elipse.

A continuación, se presenta el contenido para la enseñanza de la Elipse en el texto de quinto de secundaria que utilizan los estudiantes.

2.2 La Elipse en el texto de quinto de secundaria

Se ha seleccionado el libro “Matemática 5” de la serie Hipervínculos para el quinto de secundaria de la editorial Santillana, edición 2013, que utilizan los estudiantes del Colegio particular de Surco, participantes de la investigación, tal como se resume en el Cuadro 2.

Cuadro 2. *Documento de consulta.*

Autor	Unidad	Páginas	Título
Santillana	Unidad 11 Geometría Analítica	368-369 y 372 - 373	Matemática 5

A continuación, presentamos el libro de Santillana (2013) con respecto al concepto y al tratamiento que se da a la Elipse como lugar geométrico, según el Cuadro 3.

Cuadro 3. *Temas de la Elipse en el Texto de Santillana (2013).*

Matemática 5		
Unidad	Sección	Temas
Unidad 7 : Geometría Analítica Páginas 368 – 369 Páginas 372 - 373	5. La Elipse. Ecuaciones	• Definición • Elementos de la Elipse • Ecuación con centro en el origen • Ecuación con centro en el punto C(h, k) • Ecuación general de la Elipse • Ejemplos • Ejercicios propuestos

En el texto, se define la noción de Elipse como "El lugar geométrico de los puntos P del plano cuya suma a dos puntos fijos, F_1 y F_2, llamados focos, es constante. Es decir, la expresión en forma simbólica (P, F_1) + d (P, F_2) = 2a." (p. 368). Además, se describen los siguientes elementos de la Elipse mediante el uso de lenguaje natural: Los *focos* de la Elipse (Dos puntos fijos F_1 *y* F_2); el *eje focal* (La recta *l* que pasa por los focos); los *vértices* de la Elipse (V_1 *y* V_2,puntos de intersección del eje focal *l* con la curva); el *eje mayor* (Segmento V_1V_2 cuya longitud es igual a *2a)* y el *centro O* de la Elipse (Punto medio del segmento F_1F_2 o del eje focal).

También se describen otros elementos usando los registros de lengua natural, como el *eje normal* (La recta que pasa por el punto representado por O y es perpendicular al eje focal); los *vértices representados por* B_1 *y* B_2 (Los puntos que resultan de intersectar la Elipse con la recta normal); el *eje menor* de la Elipse (Segmento B_1B_2 de longitud *2b)* y los *radios vectores de P* (segmentos PF_1 y PF_2).

En la figura 18, se muestra la representación gráfica de la Elipse con sus elementos, cuyo centro es el origen con el eje mayor que coincide con el eje *x*.

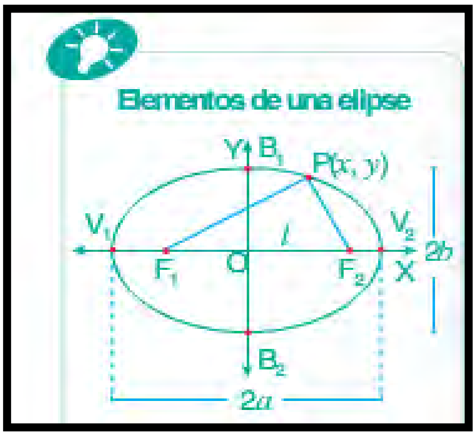


Figura 18. La representación gráfica de la Elipse y sus elementos.
Fuente: Santillana (2013, p.368)

En el texto de Santillana (2013), se muestra la representación gráfica de la Elipse centrada en el origen de coordenadas y cuyo eje mayor coincide con el eje *x*. Por lo tanto, los focos tienen como coordenada $F_1(c, 0)$ y F_2 (-c, 0), tal como se observa en la figura 19.

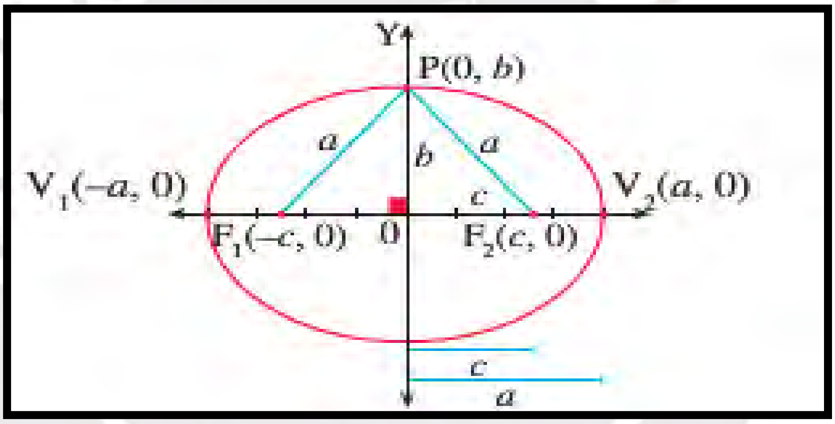


Figura 19. Relación pitagórica entre las constantes a, b y c en una Elipse.
Fuente: Santillana (2013, p.368)

En la figura 19, se analiza la relación que existe entre las constantes *a, b* y *c*, definiendo c como la distancia del centro O de la Elipse a uno de los focos. En dicha figura, se muestra P que representa a un punto ubicado en la coordenada (0, b), que forma con el origen de coordenadas O y uno de los focos de la Elipse, F_1, el triángulo rectángulo F_1OP y, en dicho triángulo, se cumple que la representación

$$d\left(P, F_1\right) = d\left(P, F_2\right) = a$$

donde se observa que $a > c$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

En el libro, se muestra los dos casos como se presenta la Elipse y sus elementos, mediante registros algebraicos y gráficos de la cónica. En el primer caso, es cuando los focos de la Elipse están en el eje x, mientras que el segundo caso es cuando los focos están en el eje y, tal como se observa en la figura 20.

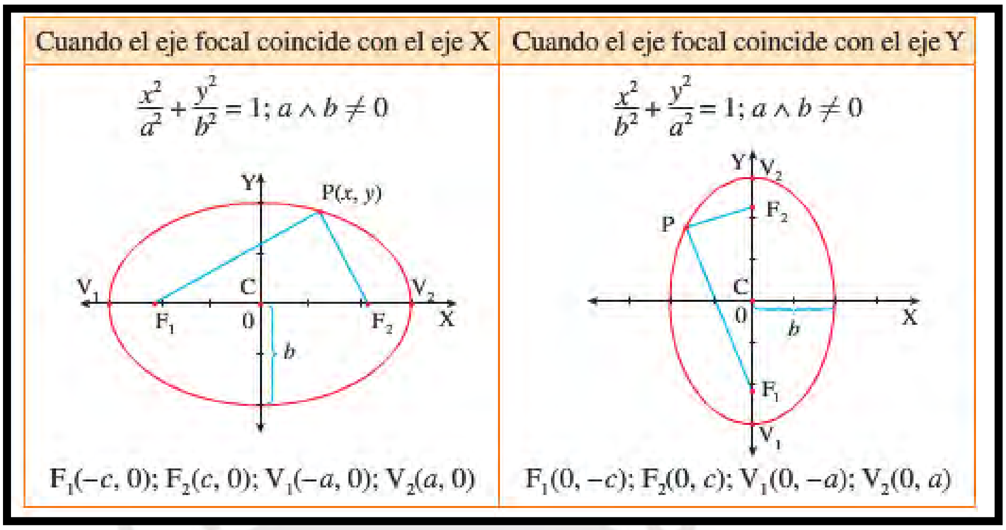
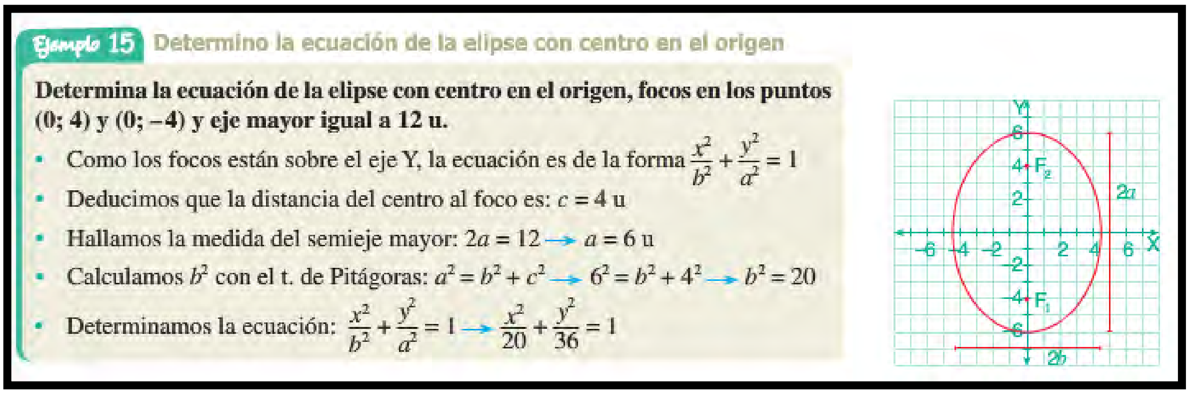


Figura 20. La representación de la Elipse de centrada en el origen en los registros algebraicos y gráficos.
Fuente: Santillana (2013, p.368)

En Santillana (2013), se señala, mediante las ecuaciones ordinarias de la Elipse, registros algebraicos dados por las expresiones algebraicas cuadráticas que describen la condición geométrica de la curva, según sea el eje focal (Recta que pasa por los focos) el eje x o eje y, y sus respectivos registros gráficos, tal como se observan en la figura 20.

En dicha figura, en el lado izquierdo, se muestra la representación de la Elipse centrada en el origen, si el eje focal coincide con el eje x en los registros algebraico y gráfico, mientras que en lado derecho de la misma figura, se muestra la representación de la Elipse centrada en el origen, si el focal coincide con el eje y en los registros algebraico y gráfico, por lo que se muestra una coordinación entre los registros algebraico y gráfico de la representación de la Elipse.

En el texto se muestra un ejemplo denominado de aplicación, para determinar la representación algebraica de la Elipse por medio de una ecuación algebraica que se obtiene después de realizar dos conversiones, tales como la transformación de una expresión lingüística o discurso al registro gráfico y la segunda transformación del registro gráfico al registro algebraico, como se muestra en la figura 21.


Ejemplo 15 Determino la ecuación de la elipse con centro en el origen

Determina la ecuación de la elipse con centro en el origen, focos en los puntos (0; 4) y (0; –4) y eje mayor igual a 12 u.

- Como los focos están sobre el eje Y, la ecuación es de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
- Deducimos que la distancia del centro al foco es: $c = 4$ u
- Hallamos la medida del semieje mayor: $2a = 12 \rightarrow a = 6$ u
- Calculamos b^2 con el t. de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 6^2 = b^2 + 4^2 \rightarrow b^2 = 20$
- Determinamos la ecuación: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$

Figura 21. Ejemplo de coordinación de registros de representación semiótica de la Elipse.
Fuente: Santillana (2013, p.369)

En efecto, primero se realiza una conversión de la representación de la Elipse del registro de lengua natural al gráfico, pero el tratamiento de la expresión lingüística permite, en primer lugar, hallar el valor del semieje mayor, ***a***, y con este valor, por medio de tratamientos en el registro de lengua natural, se obtiene el valor del semieje menor, ***b***, cuyos valores permiten representar la Elipse en el registro gráfico. Luego se realiza la segunda conversión, del registro gráfico al algebraico, ya que con los valores de ***a*** y ***b*** se reemplaza en la representación algebraica, es decir, en la ecuación ordinaria de la Elipse cuyo eje focal coincide con el eje *y*, para finalmente realizar tratamientos en el registro algebraico y determinar la ecuación ordinaria de la Elipse vertical.

En Santillana (2013), se muestra al estudiante que primero hay que reconocer la ubicación de los focos de la curva, para poder determinar los elementos de la Elipse. Este paso significa que hay una conversión de la representación de la Elipse del registro de lengua natural al gráfico, ya que se determina el eje focal por medio de la gráfica de los puntos dados y luego se realiza una segunda conversión de la representación de la Elipse, del registro gráfico al algebraico, para obtener representación algebraica. Es decir, la ecuación algebraica de la cónica con la que se desea trabajar.

En ese sentido, en el texto se muestra las conversiones de registros de representación de la Elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal que coincide con el eje *y*. Concluimos que esta conversión de registros de representación semiótica provoca un aprendizaje de la Elipse, en vista que el texto promueve que el estudiante coordine dos registros de representación diferentes.

El siguiente punto de análisis del texto de Santillana (2013) es el referente a la representación de la Elipse en el registro algebraico, mediante las ecuaciones ordinarias de la cónica con centro en un punto que no es el origen. Por ejemplo, el punto representado por C (h, k).

En el libro se expresan las representaciones algebraicas de la Elipse, en el primer caso, la representación de la Elipse en el registro algebraico cuando el eje focal es paralelo al eje *x* y, en el segundo caso, cuando el eje focal es paralelo al eje *y*, tal como se muestra en la figura 22.

Cuando el eje focal es paralelo al eje X	Cuando el eje focal es paralelo al eje Y
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1;\ a^2>b^2$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1;\ a^2>b^2$
C(h, k); F(h ± c, k); V(h ± a, k)	C(h, k); F(h, k ± c); V(h, k ± a)

Figura 22. Representaciones algebraicas de la Elipse con centro en C (h, k).
Fuente: Santillana (2013, p.369)

También mostramos un segundo ejemplo de aplicación, donde se presenta una nueva transformación.

Se trata de un tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico, cuando se trabaja con una de las representaciones algebraicas dadas por las ecuaciones ordinarias de la Elipse, cuyo centro es el punto representado por C (h, k). En este caso en particular, en el libro se revisa este ejercicio para realizar el tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico, cuando el eje focal es paralelo al eje *y*, por lo que se necesita la representación algebraica dada por la ecuación ordinaria correspondiente para obtener los elementos de la Elipse, tal como se muestra en la figura 23.

Ejemplo 16 Determino las coordenadas del centro y de los focos de una elipse

Obtén el centro y los focos de la elipse de ecuación $\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$

- Como el denominador de la expresión que contiene a *y* es mayor, el eje focal es paralelo al eje Y.
- Hallamos las coordenadas del centro: C(h, k) = C(6; −4)
- Determinamos c siendo $a^2=25$ y $b^2=16$: $c^2=a^2-b^2 \rightarrow c=\sqrt{25-16}=3$
- Determinamos los focos: $F_1(h, k-c)=F_1(6;-7)$ y $F_2(h, k+c)=F_2(6;-1)$

Figura 23. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico.
Fuente: Santillana (2013, p.369)

Al mismo tiempo, en el texto se muestra una nueva transformación; es decir, la conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al gráfico. En efecto, en el libro se muestra el paso de la representación algebraica expresada por la ecuación algebraica de la cónica a la representación gráfica, en vista que al tener los elementos de la Elipse, con estos valores, se puede graficar la Elipse.

Podemos concluir que el texto de Santillana (2013) promueve que el estudiante coordine los registros de la representación de la Elipse, por lo que provoca en el estudiante el aprendizaje de este objeto matemático, cuya representación gráfica se muestra en la figura 24.

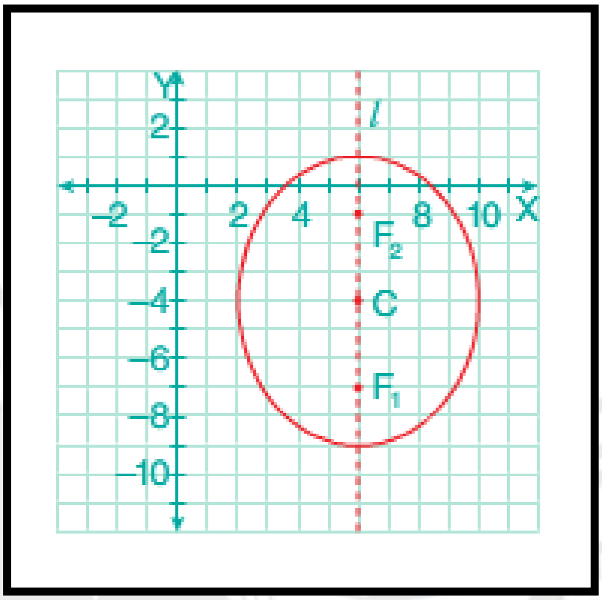


Figura 24. Representación de la Elipse con eje focal paralelo al eje y en el registro gráfico. Fuente: Santillana (2013, p.369)

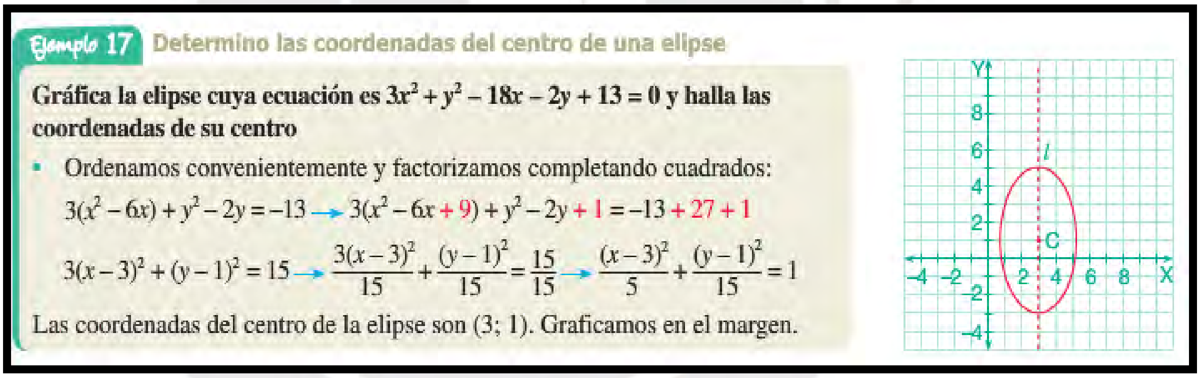
Es decir que, en esta figura, se muestra la representación gráfica de la Elipse obtenida del ejemplo anterior que tiene como punto de partida la ecuación algebraica de la Elipse.

A continuación, en el texto de, se presenta otra representación de la Elipse al reflejarla en el registro algebraico mediante una ecuación algebraica que se denomina la ecuación general de la Elipse.

En el libro se muestra que esta representación algebraica se obtiene a partir de las ecuaciones descritas anteriormente y, mediante tratamientos de las representaciones de la Elipse realizados en el registro algebraico (Desarrollar y efectuar las operaciones indicadas en las expresiones algebraicas),es decir, en dichas representaciones de la cónica en el registro algebraico, estas se convierten en la representación algebraica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con la condición que los coeficientes A y B tengan el mismo signo.

En el material estudiado de Santillana (2013), se muestra un ejemplo de aplicación sobre la ecuación general de la Elipse, al realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al registro gráfico.

En primer lugar, se transforma la representación algebraica de la Elipse expresada por la ecuación general de la cónica a la representación algebraica dada por la ecuación ordinaria por medio de tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico. Estos tratamientos de la representación de la cónica son los pasos que se siguen cuando se completa cuadrados al transformar la representación algebraica expresada por la ecuación general de la Elipse en representación algebraica dada por la ecuación ordinaria, cuya expresión algebraica permite determinar los elementos de la cónica (Centro, eje focal y las constantes ***a*, *b*** y ***c***), para luego realizar una conversión de la representación de la cónica del registro algebraico al gráfico; es decir, ubicar los elementos de la Elipse, como el centro y los valores ***a*** y ***b***, necesarios para realizar la gráfica de la cónica en un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se muestra en la figura 25.


Ejemplo 17 Determino las coordenadas del centro de una elipse

Gráfica la elipse cuya ecuación es $3x^2 + y^2 - 18x - 2y + 13 = 0$ y halla las coordenadas de su centro

- Ordenamos convenientemente y factorizamos completando cuadrados:

$3(x^2 - 6x) + y^2 - 2y = -13 \rightarrow 3(x^2 - 6x + 9) + y^2 - 2y + 1 = -13 + 27 + 1$

$3(x-3)^2 + (y-1)^2 = 15 \rightarrow \frac{3(x-3)^2}{15} + \frac{(y-1)^2}{15} = \frac{15}{15} \rightarrow \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{15} = 1$

Las coordenadas del centro de la elipse son (3; 1). Graficamos en el margen.

Figura 25. Conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al gráfico.
Fuente: Santillana (2013, p.369)

El texto propone una serie de ejercicios para que el estudiante aprenda el concepto de Elipse al coordinar los registros de representación semiótica; es decir, representar la Elipse con dos registros de representación semiótica diferentes. Por ejemplo, en el primer ejercicio propuesto, se presenta tres representaciones de la Elipse en el registro gráfico, con el fin de obtener sus representaciones en el registro algebraico; es decir, las representaciones algebraicas expresadas por las ecuaciones ordinarias de las diferentes Elipses, tal como se muestra en la figura 26.

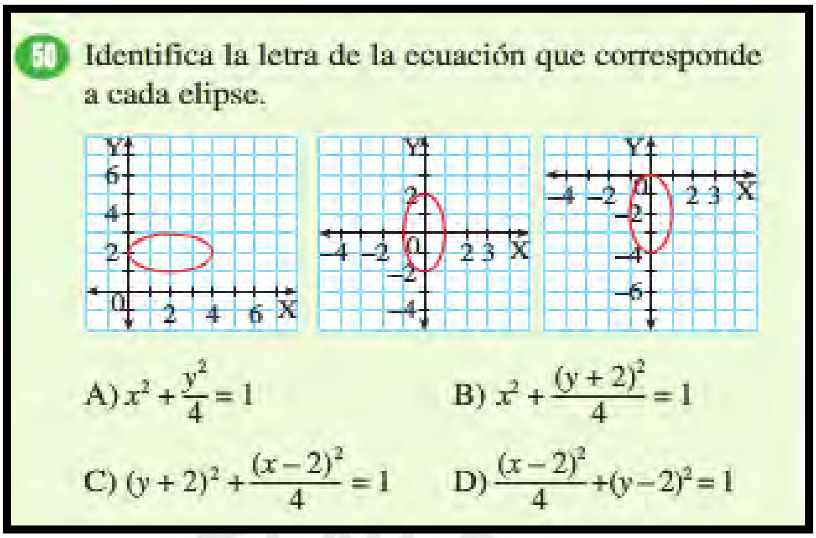


Figura 26. Conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico.
Fuente: Santillana (2013, p.372)

En ese sentido, se debe realizar la conversión de la representación de la Elipse al pasar del registro gráfico al algebraico. Según la propuesta del libro de Santillana (2013), se usa la representación de la Elipse en el registro gráfico para identificar el centro de la cónica y se analiza la representación de la curva en el registro gráfico, para encontrar que el eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados y con estos elementos se deduce la representación de la Elipse en el registro algebraico; es decir, la ecuación ordinaria correspondiente.

En el ejercicio número 50, se pide trabajar con la representación de la Elipse en el registro gráfico para realizar la conversión de la representación de la cónica del registro gráfico al registro algebraico.

El primer gráfico se relaciona con la ecuación de la alternativa D, en vista que la información que se obtiene de dicho gráfico sirve para identificar el centro de la Elipse con el punto representado por C (2, 2) y el eje focal como un eje paralelo al eje x. Además, en el texto, se usa la representación de la Elipse en el registro el gráfico para reconocer que la longitud del eje focal es 4, por lo que se concluye que $a = 2$ y, se observa que $b = 1$, valores que permiten obtener la representación de la Elipse en el registro algebraico.

En caso del segundo gráfico, se relaciona con la ecuación de la alternativa A, ya que se realiza una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, porque se deduce del gráfico que el centro de la Elipse está en el origen y el eje focal es paralelo al eje y. Por ello, se reconoce que la longitud del eje focal es 4, por lo que se concluye que $a = 2$ y de la representación de la Elipse en el registro gráfico se obtiene el valor $b = 1$.

Por último, en el tercer gráfico, se relaciona la gráfica con la ecuación de la alternativa B al realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, por lo que se deduce que el centro de la Elipse está representado por C (0, -2) y el eje focal paralelo al eje *y*, lo que es igual que $a = 2$ y $b = 1$.

En la segunda actividad propuesta en el libro de Santillana (2013), el ejercicio 51, se pide realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro de lengua natural al algebraico y luego se realiza tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico para determinar la ecuación general de la Elipse, tal como se muestra en la figura 27.

51 Determina la ecuación general de la elipse si C(2; 3), eje mayor = 8 u, eje menor = 4 u y su eje focal es paralelo al eje Y.

Figura 27.Conversión de la representación de la Elipse del registro de lengua natural al registro algebraico. Fuente: Santillana (2013, p.372)

En el texto, se realiza la conversión de la representación de la Elipse del registro de lenguaje natural al algebraico para encontrar la ecuación ordinaria de la cónica, en vista que se cuenta con los datos de los elementos de la Elipse y luego se realiza tratamientos de la representación de la cónica en el registro algebraico al desarrollar las operaciones indicadas en la ecuación ordinaria para determinar la ecuación general.

La tercera actividad propuesta en el libro, como se señala en la figura 28, se pide realizar tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico; es decir, transformar la representación algebraica dada por la ecuación general, por medio del método de completar cuadrados, a la representación algebraica expresada por la ecuación ordinaria de la Elipse.

El tratamiento de la representación de la Elipse, en el registro algebraico, es recurrente en el texto, en vista que en este tipo de ejercicio tiene como finalidad aprender la aplicación del método de completar cuadrados y, una vez alcanzada representación algebraica dada por la ecuación ordinaria, se debe realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al gráfico, para así poder graficar la Elipse.

52 Obtén la longitud del eje mayor y menor, las coordenadas de los focos y de los vértices de la elipse $4x^2 + y^2 + 8x - 2y - 1 = 0$ y grafica la curva.

Figura 28. Tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico. Fuente: Santillana (2013, p.372)

En el texto de Santillana (2013) se analiza el ejercicio 56, que trata de una conversión de la representación de un elemento la Elipse del registro gráfico al de lengua natural, tal como se muestra en la figura 29.

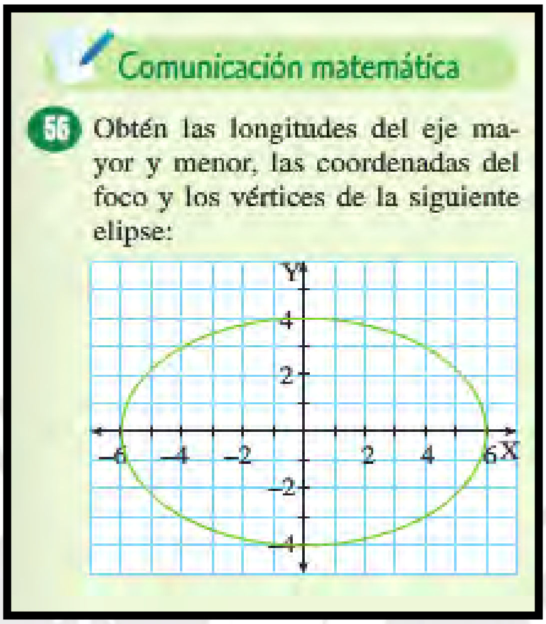


Figura 29. Conversión de la representación del elemento de la Elipse del registro gráfico a lengua natural. Fuente: Santillana (2013, p.373)

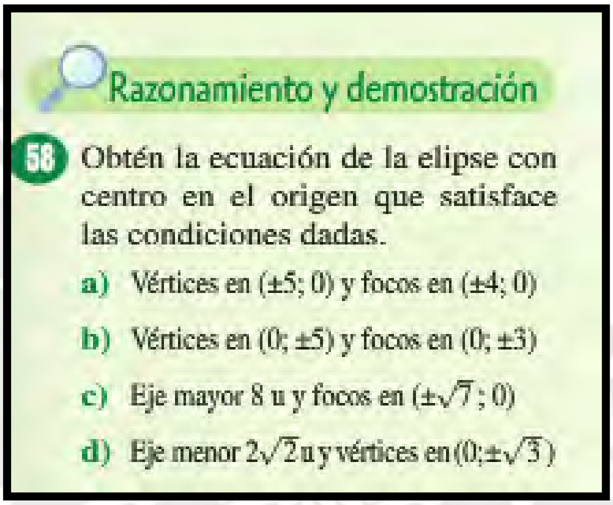
En el libro, se utiliza la representación de la Elipse en el registro gráfico para encontrar los elementos de la cónica, como el centro de la Elipse y la longitud del eje mayor y menor. También se espera, por medio de la representación de la cónica en el registro gráfico, representar el centro, el eje mayor y menor de la Elipse en el registro de lengua natural.

En efecto, se deduce de la representación de la Elipse en el registro gráfico que el centro de la Elipse es el origen, ya que la longitud del eje mayor es 12 y la longitud del eje menor es 8. Además, se reconoce por medio de la representación de la cónica en el registro gráfico que el eje focal es el eje x y por tanto se realiza una conversión de la representación de los elementos de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural, para hallar los valores de las constantes a y b.

También se realiza un tratamiento de la representación de los elementos en el registro algebraico para encontrar y escribir las coordenadas de los focos, cuyos valores están representados por $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, en vista que las constantes son $a = 6$ y $b = 4$ y luego se realiza un tratamiento a la representación de los elementos de la cónica en el registro algebraico al aplicar la relación pitagórica que existe entre las constantes a, b y c, para encontrar el valor de la constante $c = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

En consecuencia, por medio de un tratamiento de la representación de los elementos de la Elipse en el registro algebraico, se determinan los focos y los vértices de la Elipse y se escribe en el registro de lengua natural que los focos están representados por los puntos de coordenadas F_1 $(2\sqrt{5}, 0)$ y F_2 $(-2\sqrt{5}, 0)$, mientras que los vértices están representados por los puntos de coordenadas V_1 (6, 0), V_2 (-6, 0), B_1 (4, 0) y B_2 (-4, 0).

Otro tipo de ejercicio propuesto en el texto de Santillana (2013) es el ejercicio 58, cuyo producto final de dicha actividad es la obtención de representación de la Elipse en el registro algebraico, por medio de la ecuación de la cónica, tal como se muestra en la figura 30.


Razonamiento y demostración

58 Obtén la ecuación de la elipse con centro en el origen que satisface las condiciones dadas.

a) Vértices en $(\pm 5; 0)$ y focos en $(\pm 4; 0)$

b) Vértices en $(0; \pm 5)$ y focos en $(0; \pm 3)$

c) Eje mayor 8 u y focos en $(\pm\sqrt{7}; 0)$

d) Eje menor $2\sqrt{2}$ u y vértices en $(0; \pm\sqrt{3})$

Figura 30. Conversiones de la representación de la Elipse en diferentes registros.
Fuente: Santillana (2013, p.373)

En el libro, se realiza una conversión de la representación de la Elipse del registro de lenguaje natural al registro gráfico y luego una conversión de la representación de la cónica del registro gráfico al algebraico. Se analiza el ejercicio propuesto, donde se pide trabajar con las representaciones de la Elipse en el registro gráfico al tener como datos los elementos de la cónica.

En efecto, se debe hacer conversiones de la representación de la Elipse, primero del registro de lengua natural al gráfico y luego del registro gráfico al algebraico. Por ejemplo, en el ejercicio inciso a), se utiliza los datos de los vértices y focos para hacer la representación de la Elipse en el registro gráfico; es decir, hay una conversión de la representación de la cónica del registro del lenguaje natural al registro gráfico, que permite encontrar el eje x como eje focal. Además, en el texto se deduce, por medio de la representación de la Elipse en el registro gráfico, que los valores de las constantes son $a = 5$ y $c = 4$ y mediante una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico se determina la ecuación ordinaria de la Elipse.

Asimismo, en el libro de Santillana (2013) se debe realizar un tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico cuando se utiliza la relación pitagórica para encontrar que la constante $b = 3$ en vista que se conoce los valores de a y c. Finalmente, se realiza otro tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico, para obtener la ecuación ordinaria de la Elipse está representada por $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Con los siguientes ejercicios propuestos en el texto de estudio de los estudiantes, se espera realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al de lengua natural para encontrar los elementos de la cónica a partir de las representaciones algebraicas dadas por las ecuaciones de la Elipse.

Así, en el primer ejercicio propuesto, por medio de la representación de la Elipse en el registro algebraico, se obtiene de la representación algebraica de la curva expresada por la ecuación ordinaria de la cónica el centro representado por el origen y; en el segundo ejercicio, se usa la representación de la Elipse en el registro algebraico para obtener de la representación algebraica de la cónica dada por la ecuación ordinaria el centro representado por (h, k).

En el análisis del ejercicio 59 inciso a), en el texto se realiza la conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al de lengua natural, al utilizar la representación algebraica expresada por ecuación ordinaria de la Elipse para encontrar que el centro es el punto que representa el origen de coordenadas y el eje mayor coincide con el eje y. Además, se obtienen los valores de las constantes, que están representados por $a = 4$ y $b = 2$ y, con estos valores, se espera realizar tratamientos de la representación del valor de la constante c en el registro algebraico para encontrar que el valor de la constante es $c = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y, se reconoce los demás elementos de la Elipse como los focos, representados por los puntos de coordenadas $F_1(0, 2\sqrt{3})$ y $F_2(0, -2\sqrt{3})$ y los vértices por puntos, representados por las coordenadas $V_1(0, 4)$, $V_2(0, -4)$, $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$, tal como se muestra en la figura 31.

59 Obtén la longitud del eje mayor y menor, y las coordenadas de los focos y de los vértices de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $20x^2+25y^2=400$

c) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{12}=1$

d) $2y^2+5x^2=10$

60 Determina las coordenadas del centro y del foco de las siguientes elipses:

a) $\frac{(x+6)^2}{2}+\frac{(y+5)^2}{4}=1$

b) $\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$

Figura 31. Conversión de la representación de la Elipse del registro grafico al registro de lengua natural.
Fuente: Santillana (2013, p.373)

En el texto de Santillana (2013), también se propone un ejercicio en el que se piensa realizar tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico. En el procedimiento, se pasa de la ecuación general a la ecuación ordinaria de la Elipse y, con esta representación de la Elipse, en el registro algebraico, se encuentran los principales elementos de la cónica. Luego, se debe realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al gráfico para poder representar la Elipse.

Otra vez se utiliza el método de completar cuadrados para poder transformar una ecuación algebraica en otra. En la figura 32, se muestra el ejercicio descrito.

61 Analicen las siguientes elipses y tracen sus gráficas.

a) $9x^2+25y^2+18x-50y-191=0$

b) $4x^2+8y^2+24x-16y+12=0$

c) $9x^2+4y^2+90x-8y+193=0$

Figura 32. Tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraicos.
Fuente: Santillana (2013, p.373)

Finalmente, en el ejercicio 61 inciso a), se realiza tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico, al utilizar el método de completar cuadrados para transformar la ecuación general de la Elipse en la ecuación ordinaria de la cónica, tal como se muestra en la figura 33, donde se observa la serie de tratamientos esperados de la representación de la Elipse en el registro algebraico.

$$
\begin{aligned}
&9x^2+25y^2+18x-50y-191=0 \leftrightarrow \\
&9(\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}-1)+25(\underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2}-1)-191=0 \leftrightarrow \\
&9(x+1)^2+25(y-1)^2=225 \leftrightarrow \\
&\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1
\end{aligned}
$$

Figura. 33. Tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico.

En el análisis del texto de Santillana (2013), se puede afirmar que los ejercicios están presentados en los tres registros como lo son el de lengua natural, algebraica y gráfico y no hay indicios de uso del registro figural de la Elipse en los ejercicios resueltos como en los propuestos.

En el material de estudio, se realizan tratamientos de la representación de la Elipse en el mismo registro, así como conversiones de la representación de la Elipse de un registro a otro registro diferente, como por ejemplo, del registro algebraico al gráfico y viceversa, así como las conversiones de la representación de la Elipse del registro de lengua natural al algebraico y viceversa, que le permita al estudiante, en el sentido de Duval, aprender el concepto matemático, en nuestro caso, la condición geométrica de Elipse.

En el lenguaje de Duval, la conversión de representación de un objeto matemático es el primer indicio de la comprensión en el aprendizaje de las Matemáticas. Además, en los ejercicios analizados, en el libro se muestra que hay coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, tales como del registro algebraico y gráfico, registro de lengua natural y algebraica y registro de lengua natural al gráfico.

También se observa que en el texto hay una cierta preferencia por el tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico, en vista que hay ejercicios resueltos y propuestos repetitivos para consolidar un determinado método, por lo que el texto refuerza la línea del trabajo analítico y se comprueba porque la mayoría de los tratamientos encontrados de la representación de la Elipse se realizan en el registro algebraico.

Se refleja además que hay ejercicios en los que la representación de la Elipse en el registro gráfico solo se presenta para obtener los elementos de la Elipse; es decir, una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural.

Finalmente, el análisis del texto de Santillana (2013) no muestra evidencias de uso de Software dinámico para representar la Elipse.

A continuación, se presenta el capítulo III del experimento.

CAPITULO III: PARTE EXPERIMENTAL Y ANÁLISIS

En este capítulo, se presenta a los sujetos de investigación, la secuencia de actividades, las variables didácticas con sus respectivos valores, el análisis a priori y a posteriori.

3.1 Descripción de los sujetos de la investigación

En la investigación participaron, de manera voluntaria, seis estudiantes del quinto año de secundaria de una Institución Educativa Privada del distrito de Santiago de Surco, cuyas edades van de los 16 a 17 años.

Los estudiantes, que tuvieron un buen desempeño en la primera mitad del semestre en el curso de Matemáticas, fueron invitados a participar en un taller extra clases sobre la investigación y de los 20 convocados asistieron seis.

Los sujetos de investigación traen conocimientos de Geometría Analítica en temas como distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y circunferencia, que son los temas previos al tema de la Elipse, pero que no ha sido estudiado por ellos aún.

Cabe recalcar que, para preservar la identidad de los estudiantes por ser menores de edad, se establecieron tres duplas de trabajo etiquetadas como Dupla A, Dupla B y Dupla C, ya que se consideró conveniente la formación de duplas de trabajo para que los estudiantes pudieran interactuar e hicieran las conjeturas sobre el tema que aún no ha sido revisado en clase.

Para la investigación, se consideraron los resultados de los trabajos realizados por dos duplas, en vista que los estudiantes de las duplas seleccionadas mostraron una mejor disposición en el trabajo, así como terminaron por completo las fichas de la secuencia de actividades.

El trabajo fue de corte cualitativo ya que, según Borba y Araujo (2004), el interés de la investigación consiste en comprender el fenómeno estudiado, por lo que no fue necesario contar con una muestra muy grande.

Hay que hacer notar que la experimentación contó con la participación del profesor del curso de Matemática del grado, quien cumplió el rol de profesor-investigador.

Asimismo, se contó con un ayudante de Informática y un profesor del área de Ciencias que hizo el papel de profesor-observador.

A continuación se presenta la descripción de la secuencia de actividades.

3.2 Descripción de la secuencia de actividades

La secuencia de actividades estuvo organizada en dos actividades, cuya duración, para la primera actividad, fue de 60 minutos y, la segunda, de 80 minutos de duración. Esta secuencia estuvo organizada por ítems que promovieron que los estudiantes coordinaran los registros figural y lengua natural y los registros algebraico y gráfico.

En el Cuadro 4, mostramos la organización de la secuencia de actividades:

Cuadro 4. *Descripción de la secuencia de actividades*

Encuentro Duración	Actividad	Descripción
1 60 minutos	Actividad 1: La condición geométrica de la Elipse	En la primera actividad, los estudiantes deben movilizar los conocimientos previos para construir la Elipse, por medio de construcciones geométricas fundamentales usando el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra para hacer conjeturas acerca de la condición geométrica de la Elipse.
2 80 minutos	Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse	En la segunda actividad, los estudiantes deben movilizar los elementos de la Elipse y representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas con la ayuda del GeoGebra para realizar tratamientos en la representación gráfica. Además, los estudiantes deben realizar conversiones entre el registro gráfico y algebraico para obtener las ecuaciones algebraicas de segundo grado en la forma general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y, mediante un tratamiento, obtener la ecuación en la forma ordinaria $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$.

Además, para llevar un registro del trabajo de los estudiantes, se utilizaron guías de trabajo para cada actividad, los registros de las construcciones realizados en GeoGebra y las fichas de observación para cada actividad para los profesores observadores. (Ver anexos)

La secuencia de actividades diseñada se adaptó de las actividades de la investigación de Lara (2016), acoplándolas para el caso de la Elipse. Esta secuencia de actividades constó de dos actividades y cada una tiene cuatro partes.

La investigación se llevó a cabo en el laboratorio de Ciencias equipado con Laptops, una para cada estudiante participante, que contaron con el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, versión 5, tal como se muestra en la figura 34.

Figura 34. Ambiente de trabajo y las duplas durante la secuencia de actividades.

A continuación, se presenta el análisis de la secuencia de actividades.

3.3 Análisis de la secuencia de actividades

En este apartado, se presenta el análisis a priori y a posteriori de la secuencia de actividades.

La secuencia de actividades fue planificada con la finalidad de permitir a los estudiantes la coordinación de los registros figural y de lengua natural y la coordinación de los registros algebraico y gráfico, para aprender el concepto de la Elipse como lugar geométrico.

En ese sentido, presentaremos el análisis de dos duplas de estudiantes a los que llamaremos Dupla A y Dupla B.

Actividad 1: Elipse como lugar geométrico

La finalidad de esta actividad fue que las duplas de estudiantes lograran representar, en el registro figural, la condición geométrica de la Elipse a partir de sus conocimientos previos de la circunferencia, definida como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo denominado centro; la mediatriz de un segmento, definida como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, congruencia de triángulos y distancia entre dos puntos. Una vez que representaran la condición geométrica de la Elipse, en el registro figural, se les pidió que expresaran dicha condición en el registro de lengua natural.

En esta actividad, las variables didácticas involucradas con sus respectivos valores se muestran en el Cuadro 5:

Cuadro 5. *Variables didácticas y valores de la actividad 1.*

Variables	Valores
Radio de la circunferencia	De 0,1 a 6 cm.
Posición del punto interior	Dentro del círculo.

En la figura 35 se muestra la actividad 1:

Actividad 1: Elipse como lugar geométrico

1. Abra el archivo ACT1.ggb y explore la construcción.
   Sugerencia: arrastre el punto interior C dentro del círculo; el centro de la circunferencia con la condición que el punto C este dentro del círculo y; arrastre el punto B. Anote cada una de sus observaciones:
   En base a lo observado en la exploración, responda las siguientes preguntas y justifique matemáticamente sus respuestas según sea el caso:
   a) ¿Qué relación tienen los segmentos CD y BD?
   b) ¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia?
2. Arrastre el punto interior C a otra posición interior en el círculo, active el rastro del punto D, luego arrastre el punto B. Repita varias veces esta exploración. (sugerencia: desactive el rastro cuando desea cambiar la posición del punto C, luego actívelo como en la exploración anterior).
   En base a lo observado *¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover el punto interior C? Explique.*
3. Abra el archivo ACT1_preg_3.ggb y explore la construcción.
   Cambie el valor del radio con la condición que el punto C sea interior al círculo, y arrastre el punto B y vuelva explorar la construcción realizada varias veces. En base a lo observado *¿Qué puedes concluir acerca de la suma de los segmentos AD y DC al variar el radio de la circunferencia?* Justifique su respuesta.
4. Utilice la herramienta del Geogebra y construya la Elipse por los puntos A, C y D y determine la longitud del segmento EF que resulta de intersectar la recta que pasa por A y C con la Elipse. En base a ello, *¿Qué relación se puede establecer con la suma de los segmentos AD y DC y la longitud del segmento EF al mover el punto C, luego el punto A? y si varía el radio?*
   Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT1.

Figura 35. Actividad 1.

Análisis a priori:

Se espera, a priori, que las duplas de estudiantes sigan las indicaciones de los ítems 1 al 4 de la actividad 1 para construir la representación de la Elipse en el registro figural. Asimismo, se desea que las duplas de estudiantes utilicen el Software dinámico ya que un dibujo construido utilizando un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, al aplicarle el desplazamiento o “arrastre” conservará sus propiedades, lo que permitirá caracterizar al objeto geométrico y a la vez favorecerá el uso de conocimientos geométricos.

Se espera que las duplas, durante el trabajo de la actividad 1, realizaran tratamientos de las representaciones de las posiciones que toma un punto interior en el registro figural, para obtener diferentes curvas al seguir las indicaciones de cada ítem propuesto que guarda relación con las variables didácticas. Además, se deseaba que las duplas realizaran conversiones de las representaciones de las construcciones geométricas logradas al seguir de las indicaciones del registro figural al de lengua natural

En ese sentido, se piensa que las duplas van a explorar la construcción geométrica presentada en el archivo ACT1.ggb, tal como se muestra en la figura 36, para el ítem 1, al usar la herramienta de arrastre; primero, en el punto interior representado por C (variable didáctica) y encuentren que el punto representado por D se mueve a lo largo del segmento AB formándose el segmento AD, cuyo valor máximo será la medida de la longitud del segmento AB que es igual al radio de la circunferencia, en vista que el segmento AD será igual al segmento AB y esto ocurre cuando la variable didáctica, el punto interior representado por C, está diametralmente opuesto al punto representado por B.

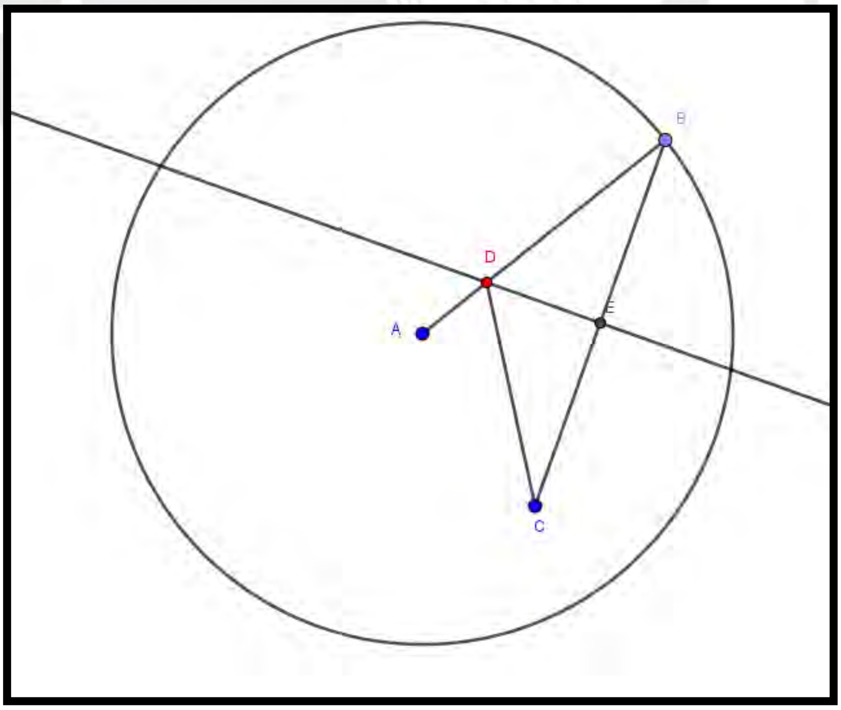


Figura 36. Construcción geométrica de la actividad 1.

La siguiente exploración que se espera es que las duplas realicen la construcción que resulta de arrastrar el centro de la circunferencia, el punto representado por A (Variable didáctica), a una nueva posición y encuentren que el punto representado por D se mueve sin registrar una curva con un patrón conocido, siempre y cuando el punto representado por C esté al interior del círculo.

Se piensa que las duplas, al realizar la última exploración de la indicación 1 de la actividad, al arrastrar el punto B en la circunferencia, muestren el rastro del punto representado por D, que resulta la formación de una curva cerrada, la cual queremos estudiar.

Cabe señalar que se espera que las duplas no siguieran el movimiento del punto representado por D y exploraran la congruencia de segmentos, que es lo más visible, pero en ambos casos realizaran una conversión de la representación de la curva del registro figural al de lengua natural o una conversión de la representación de segmentos del registro figural al de lengua natural.

Se espera que las duplas respondan la pregunta del ítem 1a) diciendo que los segmentos CD y BD tienen la misma medida y la explicación que pueden dar es usando propiedades geométricas, porque el punto representado por D pertenece a la recta representada por h, que es la mediatriz del segmento BC, y equidista de los extremos del segmento BC o pueden justificar su respuesta por congruencia de triángulos CED y BED al comprobar la congruencia con el postulado LAL (Lado ángulo lado); por lo tanto, los elementos correspondientes CD y BD, tienen la misma medida.

Se confía que las duplas realicen la conversión de la representación de los segmentos en el registro figural al de lengua natural.

En cuanto al ítem 1b), se espera que las duplas obtengan, por suma de los segmentos AD y DC, el valor del radio de la circunferencia al usar el resultado anterior; es decir, la medida del segmento DC es igual a la medida del segmento BD, por lo que la suma de los segmentos AD y DC se transforma en AD + BD, que es igual al segmento AB, cuya medida es el valor del radio de la circunferencia.

Similar al ítem anterior, se espera que las duplas realicen la conversión de la representación de los segmentos en el registro figural al de lengua natural.

En el ítem 2, se piensa que las duplas, al realizar un arrastre del punto interior representado por C a otra posición interior del círculo (variable didáctica), logren obtener una nueva representación de la Elipse en el registro figural.

En cuanto a la pregunta, se espera que las duplas puedan conjeturar que la representación de la Elipse en el registro figural se deba a la propiedad geométrica de la congruencia de segmentos comprobada anteriormente, por lo que se piensa que pueden dar como respuesta que la suma de las medidas de los segmentos AD y CD es constante e igual al valor del radio.

Para el ítem 3, se abre el archivo ACT1_preg_3.ggb que les permite a las duplas realizar exploraciones con la variable didáctica, radio de la circunferencia, al trabajar con diferentes radios de la circunferencia. Al modificar el valor del radio, se espera de las duplas logren obtener nuevas representaciones de la Elipse en el registro figural, lo que significa realizar tratamientos de la representación de la Elipse en el registro figural y, al responder la pregunta, se desea que reconozcan que la suma de las medidas de los segmentos AD y DC es igual al valor del radio de la circunferencia, en vista que se cumple la propiedad ya demostrada anteriormente, que la longitud de los segmentos DC y BD son iguales, tal como se muestra en la figura 37.

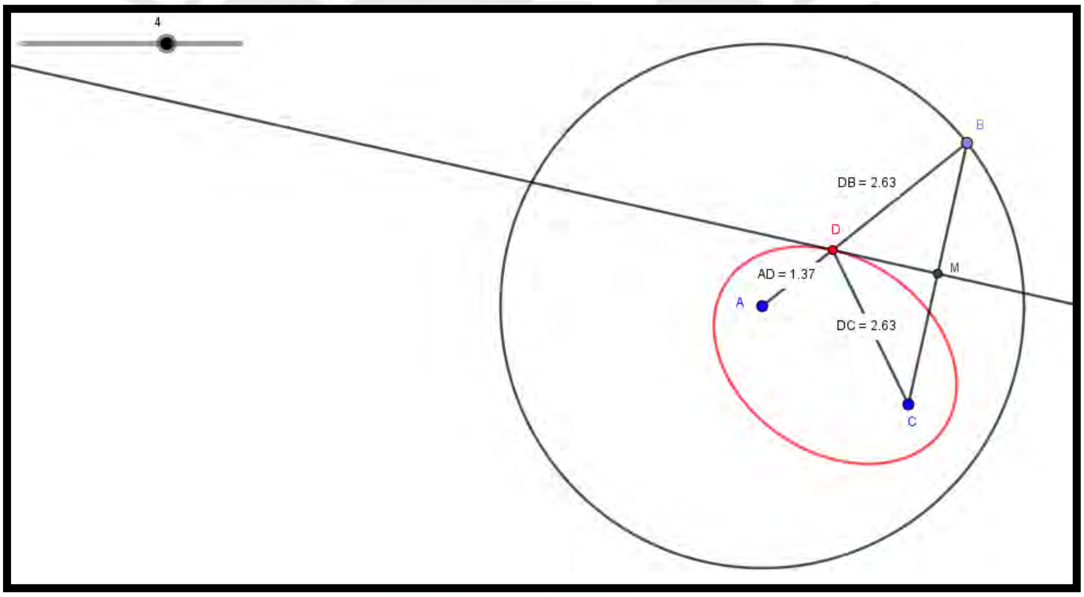


Figura 37. Representación de la Elipse en el registro figural– Actividad 1.

En la indicación 4, se espera que las duplas tracen la Elipse al usar la herramienta del GeoGebra con tres puntos, los dos focos representados por A y C y el punto representado por D, para poder definir la condición geométrica de la misma. Además, se piensa que las duplas determinen la longitud del segmento EF, que resulta de intersectar la recta que pasa por los puntos representados por A y C con la Elipse y respondan la pregunta que, a pesar de modificar las variables didácticas, tales como, el punto interior representado por C, el radio de la circunferencia y el punto interior representado por A, la suma de los segmentos AD y DC sigue siendo igual al valor del radio de la circunferencia.

Se desea que las duplas obtengan diferentes representaciones de la Elipse en el registro figural; es decir, realicen tratamientos de las representaciones de la Elipse en el registro figural.

Asimismo, se espera que las duplas encuentren la suma de los segmentos AD y DC igual a la longitud del segmento EF e igual al radio de la circunferencia al utilizar la herramienta distancia o longitud y conjeturen que esta es una propiedad geométrica que permite definir la Elipse, en vista que dicha suma se mantiene constante, a pesar de la modificación de las variables didácticas, tal como se ve en la figura 38.

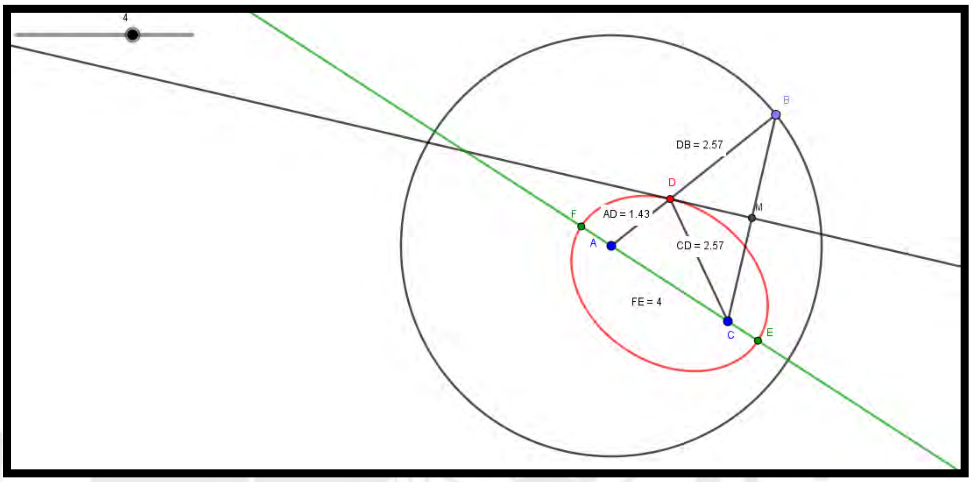


Figura 38. Respuesta esperada de la Actividad 1en el ítem 4.

Finalmente, se espera que las duplas, al término de la actividad 1, reconozcan la condición geométrica de la Elipse; es decir, la suma de las distancia de un punto de la Elipse a dos puntos fijos del plano denominados focos, es una constante e igual al radio de la circunferencia. Por lo tanto, en el sentido de Duval, los diferentes tratamientos de las representaciones de la Elipse en el registro figural permiten comprobar que los estudiantes comprenden el concepto de Elipse al plasmar la representación de la curva en el registro figural.

La representación de la Elipse, en el registro figural, es la construcción que se espera que las duplas realicen utilizando las herramientas del GeoGebra, como muestra la figura 38, ya que se presume que han seguido la secuencia de pasos que se plantea en la guía de trabajo.

En ese sentido, a priori, se desea que las duplas realicen la construcción de la representación de la Elipse en el registro figural. Además, se piensa que las duplas expresen en lenguaje natural la condición geométrica de la Elipse, por lo que se comprueba una coordinación entre el registro figural y de lengua natural.

Al finalizar la actividad 1, el profesor – investigador interviene para formalizar la condición geométrica de la Elipse, al definirla como el lugar geométrico de los puntos de la Elipse cuya suma de sus distancias a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, llamados focos, es una constante e igual a la longitud del segmento, que une los vértices de la Elipse (Puntos de intersección de la curva con la recta que pasa por los focos), denominado eje mayor o focal de la cónica.

Asimismo, el profesor – investigador se apoyó en la formalización del concepto de Elipse con la ayuda del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, y la herramienta *Elipse* para mostrar la representación de la curva en el registro figural y mostrar los elementos de la Elipse como los focos, el eje mayor así como la condición geométrica de la Elipse.

Análisis a posteriori

Análisis de la Dupla A

Con respecto al **ítem 1**, la respuesta de la Dupla A, en la primera exploración, al usar la herramienta de arrastre al punto representado por C llevándolo a nuevas posiciones interiores en el círculo, no correspondió a la esperada por el análisis a priori. De la misma manera, en la segunda exploración, el arrastre del punto representado por A, centro de la circunferencia, a nuevas posiciones interiores tampoco correspondió al análisis a priori.

En ambas exploraciones, la Dupla A se dedicó especialmente a ver qué sucede con las medidas de los segmentos AD, DB y DC, al mover las variables didácticas, los puntos representados por C y A y no indagaron en qué sucede con el punto representado por D, marcado de color rojo, tal como se esperaba del análisis a priori la congruencia de segmentos es más visible que el movimiento del punto representado por D.

En consecuencia, la Dupla A señaló, en la primera exploración, que se forma un triángulo isósceles cuando el punto representado por D coincide con el centro de la circunferencia como se muestra en la figura 39.

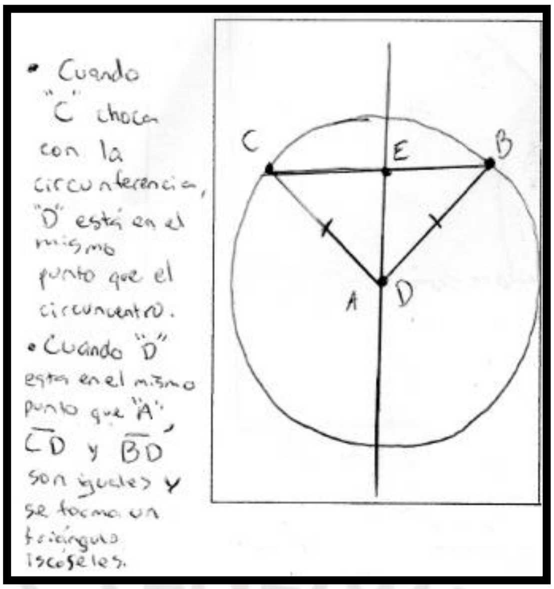


Figura 39. Exploración del punto C de la Dupla A en el ítem 1.

En la figura 39, se observa que la Dupla A realizó una conversión de la representación del triángulo del registro figural al de lengua natural, por lo que hay la evidencia que la Dupla A coordinó registros, al representar su respuesta con una figura y un escrito; es decir, la Dupla A utilizó para una misma representación dos registros, el figural y lengua natural.

En cuanto a la segunda exploración, la Dupla A señaló que el punto representado por D es el punto medio del segmento AB, cuyo valor es igual al radio de la circunferencia. Al igual que el análisis anterior, la Dupla A realizó una conversión de la representación de los segmentos AD y DB del registro figural al de lengua natural, por lo que evidenció una coordinación entre los registros figural y de lengua natural, tal como se muestra en la figura 40.

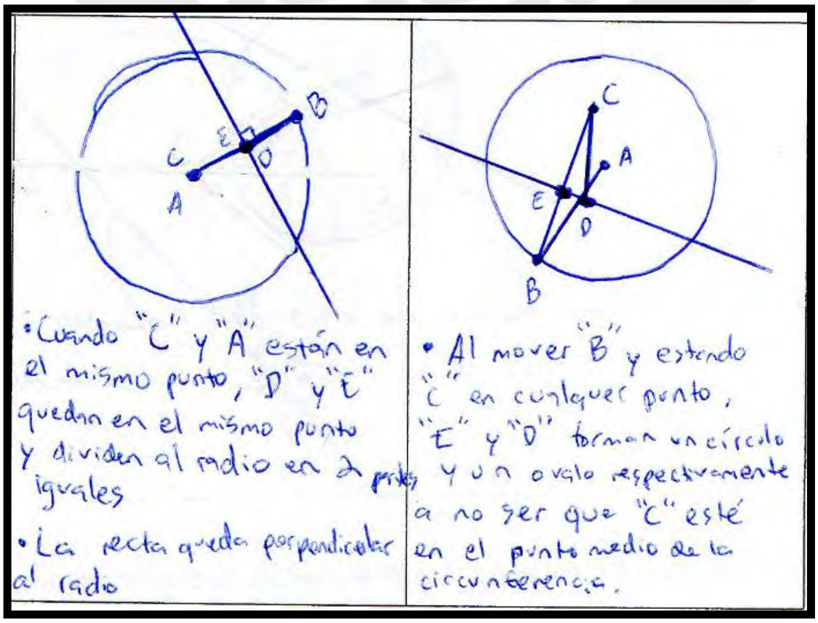


Figura 40. Respuesta de la Dupla A del ítem 1 en la actividad 1.

Además, en la figura 40, se evidencia que la Dupla A realizó tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural, para luego expresar en el registro de lengua natural, lo que evidencia una coordinación entre los registros figural y de lengua natural.

Asimismo, en la tercera exploración, la Dupla A mencionó que el movimiento del punto representado por D genera un "*ovalo"* al arrastrar el punto representado por B a lo largo de la circunferencia, respuesta que corresponde con lo que se esperaba en el análisis a priori, obtención de una curva, tal como lo muestra la Dupla A en la figura 40.

Además, el *ovalo* es la representación de la Elipse en el registro figural, por lo que la Dupla A evidenció la formación de la cónica al arrastrar el punto representado por B a lo largo de la circunferencia

Igualmente, la Dupla A hizo tratamientos de la representación de la curva generado por el movimiento del punto representado por D en el registro figural.

A diferencia de los análisis anteriores, aquí no hay muestra del registro figural del *ovalo* en la guía de trabajo, pero al trabajar con el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, permite hacer la conjetura, en vista que la Dupla A lo observó en la pantalla de la lap top de trabajo, tal como lo expresaron en el registro de lengua natural, por lo que evidencia una coordinación de registros figural y de lengua natural.

En cuanto al **ítem 1a)**, la Dupla A respondió que la medida de los segmentos CD y BD son iguales y concluyó que estos segmentos forman un triángulo isósceles, aunque no lo justifican como lo esperamos en el análisis a priori, pero evidencia tratamientos de la representación de segmentos en el registro figural, tal como se muestra en la figura 41.

Son iguales, osea de igual medida, siempre. Cuando se mueven los puntos "A", "B" y "C" se puede inferir que siempre serán de igual medida. Por consecuente, el triangulo formado por estos dos lados siempre será isoceles y en algunos casos equilatero.

Figura 41. Respuesta de la Dupla A del ítem 1a) en la actividad 1.

Podemos afirmar que la Dupla A coordinó registros en vista que, para representar en lenguaje natural la respuesta, ha realizado primero una serie de tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural, al trabajar las variables didácticas (Los puntos interiores representados por C y A y, el radio de la circunferencia) en el GeoGebra, el movimiento del punto representado por D ha generado diferentes situaciones con las medidas de los segmentos CD y BD, como se muestra en las figuras 40 y 41, y le ha permitido a la Dupla A conjeturar que las medidas de los segmentos CD y BD son iguales.

En cuanto al **ítem 1b)**, la Dupla A respondió de acuerdo a lo esperado en el análisis a priori; es decir, que la suma de las medidas de los segmentos AD y DC es igual al valor del radio de la circunferencia.

El grupo utilizó el resultado anterior; es decir, la representación simbólica CD = BD, y reemplazó en la expresión cuya representación simbólica AB = AD + BD = radio de la circunferencia, entonces la igualdad quedó de la siguiente manera cuya representación simbólica AB = AD + CD = radio de la circunferencia.

Por lo tanto, la Dupla A evidenció tratamientos de la representación de segmentos en el registro de lengua natural. Además, hay que resaltar la conjetura adicional que hicieron al mencionar que si las medidas de los segmentos AD y DC tienen determinadas valores y al sumar dichos medidas de las longitudes de los segmentos se puede inferir el valor del radio de la circunferencia; es decir, tratamientos de la representación de segmentos, tanto en el registro figural como en lengua natural, tal como se muestra en la figura 42.

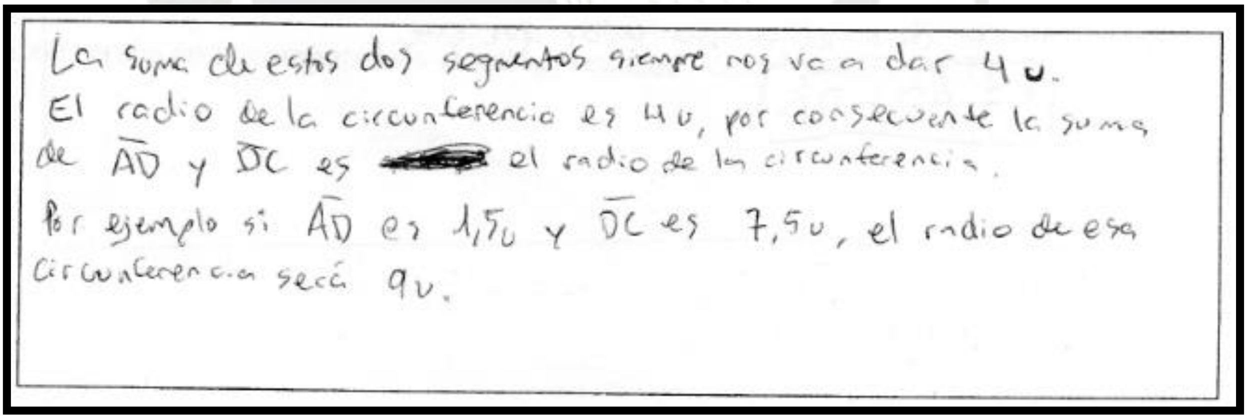

La suma de estos dos segmentos siempre nos va a dar 4u.
El radio de la circunferencia es 4u, por consecuente la suma de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ es el radio de la circunferencia.
Por ejemplo si $\overline{AD}$ es 1,5u y $\overline{DC}$ es 7,5u, el radio de esa circunferencia será 9u.

Figura 42. Respuesta de la Dupla A del ítem 1b) en la actividad 1.

En cuanto al **ítem 2**, la Dupla A obtuvo lo esperado en el análisis a priori, porque muestra los tratamientos de la representación de la Elipse en el registro figural al obtener diferentes figuras para la curva al marcar el rastro del punto representado por D y mover la variable didáctica, el punto representado por C, a diferentes posiciones, tal como se muestra en la figura 43.

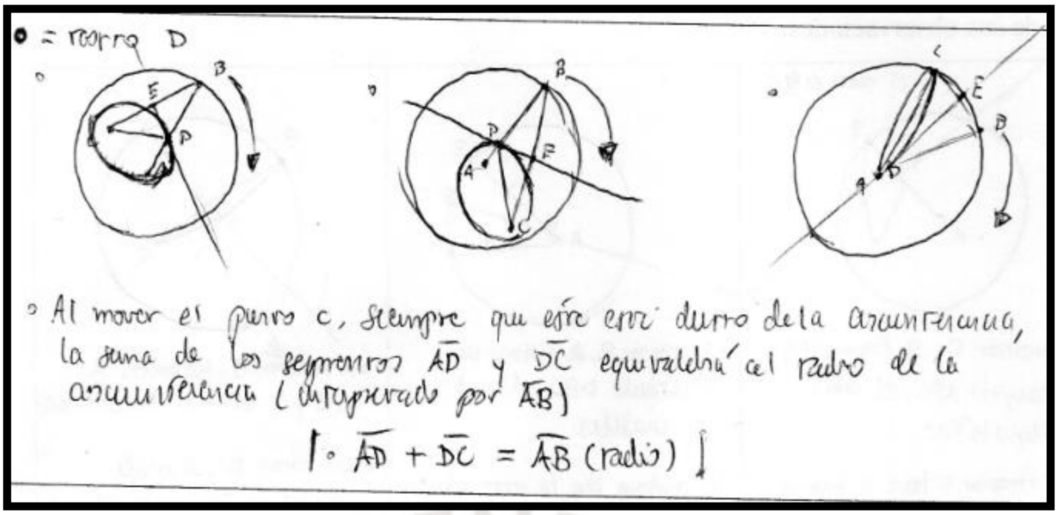


Figura 43. Respuesta de la Dupla A del ítem 2 en la actividad 1. Guía de trabajo.

La Dupla A señaló que la relación existente entre la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover el punto interior representado por C es igual al radio de la circunferencia, tal como se señala en el análisis a priori.

Asimismo, en el sentido de Duval, los estudiantes coordinaron registros, primero al dibujar las diferentes curvas que deja el punto representado por D al maniobrar la variable didáctica (Punto interior representado por C) y luego expresar el resultado como una propiedad geométrica que se cumple en cualquiera de las diferentes figuras obtenidas para poder expresarlo en lengua natural; es decir, la Dupla A evidenció la conversión de la representación de la Elipse del registro figural al de lengua natural, tal como se observa en la figura 43.

En la figura 44 se muestra la respuesta de la Dupla A de la representación de la Elipse en el registro figural con el archivo del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra.

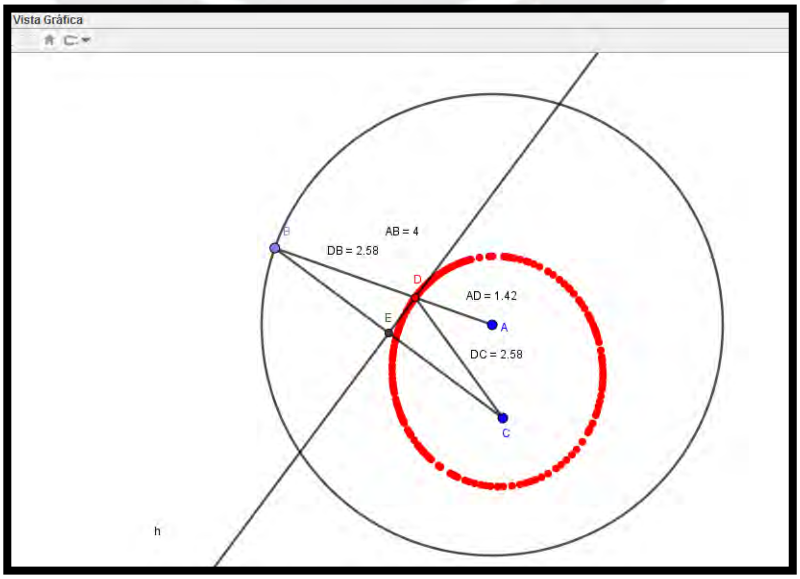


Figura 44. Respuesta de la Dupla A del ítem 2 en la actividad 1. Archivo en GeoGebra.

En efecto, en la respuesta de la Dupla A evidenció, primero que utilizó la herramienta *distancia o longitud* del GeoGebra para medir las longitudes de los segmentos CD y DB e indicó que estas longitudes de los segmentos son iguales y segundo mostró la representación de la Elipse en el registro figural al arrastrar el punto representado por B.

En cuanto al **ítem 3**, la Dupla A respondió según lo esperado en el análisis a priori; es decir, sin importar el valor del radio, la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC siempre tendrá el valor del radio de la circunferencia. Los estudiantes evidenciaron tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural y luego conversión de la representación de los segmentos del registro figural al de lengua natural, lo que implica que hay una coordinación de los registros figural y de lengua natural, tal como se muestra en la figura 45.

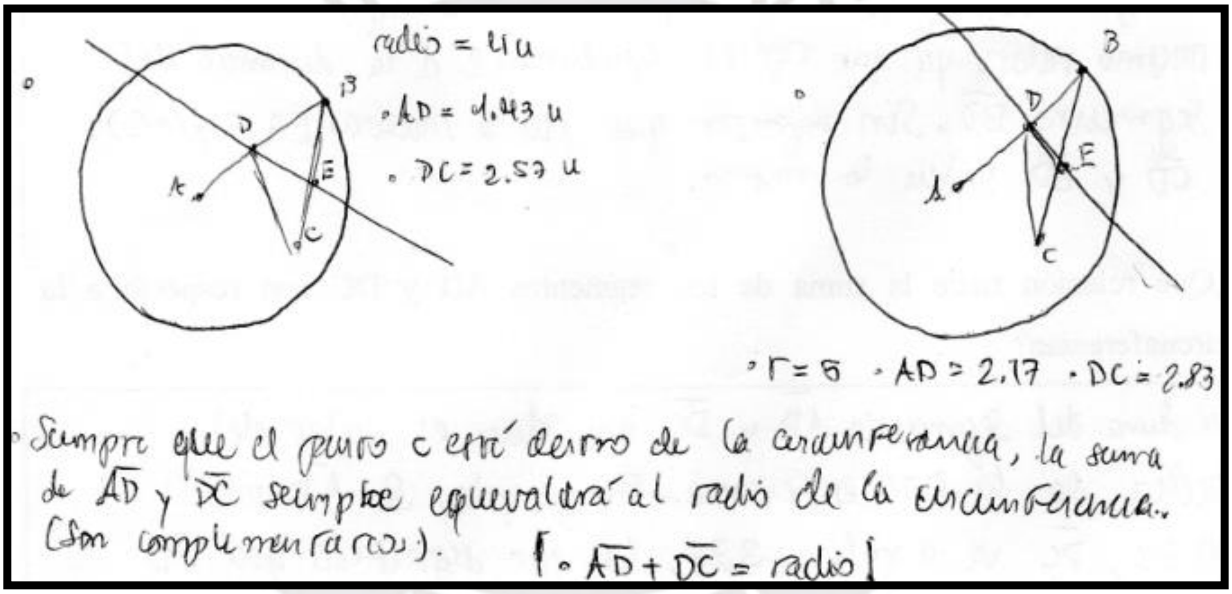


Figura 45. Respuesta de la Dupla A del ítem 3 en la actividad 1.

Hay que resaltar que la Dupla A no mencionó que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es una constante, hecho que se esperaba del análisis a priori. Además, mostraron un tratamiento de la representación de los segmentos en el registro figural, realizado con lápiz y papel, al mostrar en sus respuestas dos figuras que representan que la suma de los segmentos AD y DC siempre es igual al radio de la circunferencia. Del mismo modo, evidenciaron una coordinación entre el registro figural y el registro de lenguaje natural al escribir los valores de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC y mostrar que la suma es igual al radio seleccionado, tal como se muestra en la figura 45.

En cuanto al **ítem 4**, la Dupla A respondió lo esperado por el análisis a priori; es decir, que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia, sin importar qué valores tomen las variables didácticas, ya que el punto interior, representado por C, se mueva a otra posición o que el centro de la circunferencia, el punto representado por A, pase a otra posición o que varíe el radio de la circunferencia.

La Dupla A también determinó que la medida de la longitud del segmento EF, resultado de intersectar la recta que pasa por los puntos representados por A y C con la Elipse construida con la herramienta del GeoGebra, corresponde a la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC y, por consiguiente, igual al radio de la circunferencia, respuesta esperada por el análisis a priori.

En consecuencia, una vez más la Dupla A evidenció tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural; la conversión de la representación de los segmentos del registro figural al de lengua materna y, finalmente, se representó la Elipse en el registro figural, tal como se muestra en la figura 46.

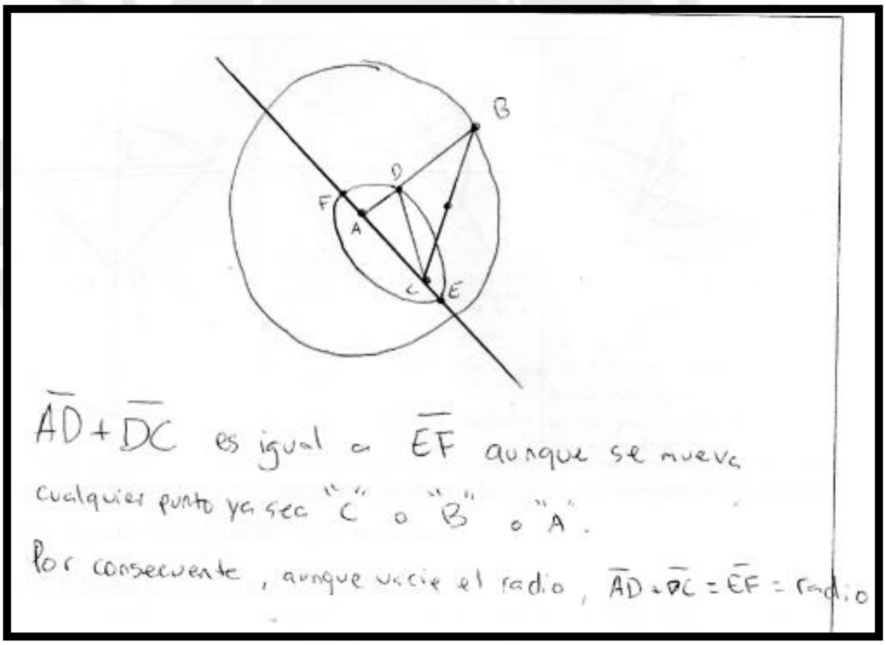


Figura 46. Respuesta de la Dupla A del ítem 4 en la actividad 1. Guía de trabajo.

En la figura 47 se muestra los resultados de la Dupla A en el archivo de Geogebra, donde se evidencia que utilizaron la herramienta *distancia o longitud* para demostrar que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia, tal como la Dupla A señaló en la guía de trabajo.

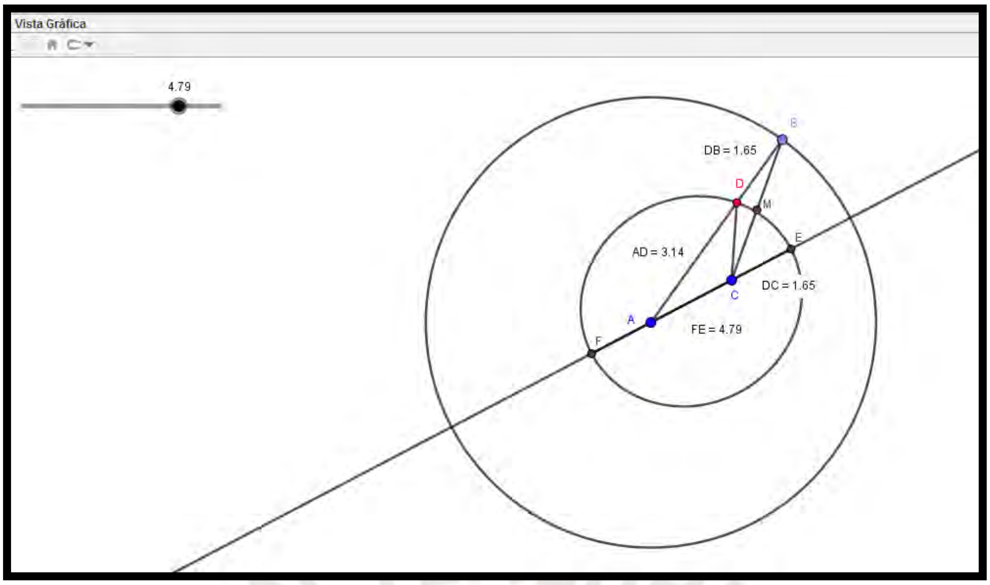


Figura 47. Respuesta de la Dupla A del ítem 4 en la actividad 1. Archivo de GeoGebra.

Análisis de la Dupla B

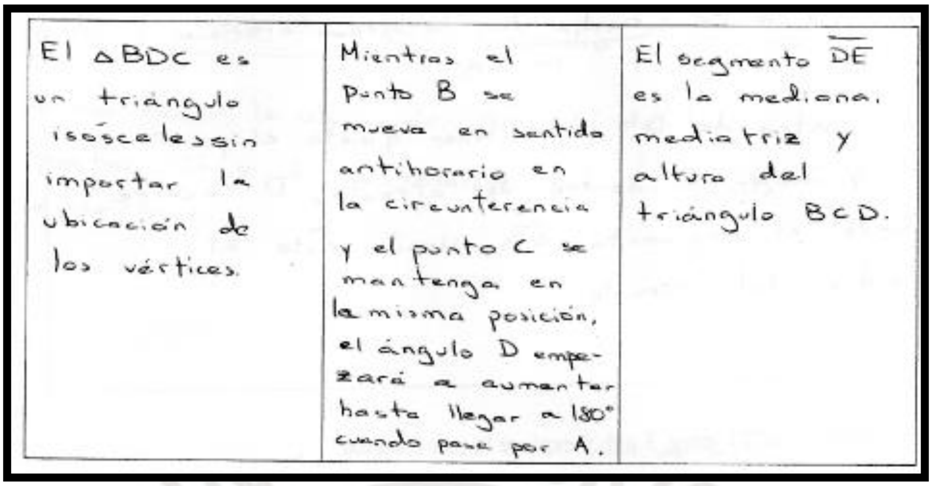
Con respecto al **ítem 1**, la respuesta de la Dupla B, en la primera exploración, no fue la esperada por el análisis a priori , en vista a que se dedicaron, en sus exploraciones, a ver qué sucede con las medidas de los segmentos AD, DB y DC y no indagaron qué sucede con el punto representado por D, marcado con color rojo, a pesar de ser diferente con respecto a los otros puntos, tal como se señaló en el análisis a priori, debido a la congruencia de los segmentos formados.

En cuanto a la segunda exploración, tampoco la respuesta correspondió a lo esperado en el análisis a priori, por el mismo motivo descrito anteriormente y sucede lo mismo en la tercera exploración, ya que la respuesta no es la esperada del análisis a priori.

En consecuencia, la Dupla B señaló, en la primera exploración, que siempre se forma un triángulo isósceles BDC, sin importar la posición de los vértices; es decir, los estudiantes mostraron tratamientos de los segmentos en el registro figural.

En la segunda exploración, señalaron que el ángulo D varía hasta un valor de 180° y eso debido al movimiento del punto representado por B, siempre y cuando el punto representado por C se mantenga en la misma posición, mientras que en la tercera exploración, la Dupla B mencionó que DE es la mediatriz de un lado del triángulo BCD al arrastrar el punto representado por B a lo largo de la circunferencia, por lo tanto la Dupla B evidenció tratamientos de la representación de segmentos en el registro figural .

Asimismo, la Dupla B evidenció la conversión de la representación de segmentos del registro figural al de lengua natural, como se muestra en la figura 48.



El ΔBDC es un triángulo isósceles sin importar la ubicación de los vértices.	Mientras el punto B se mueva en sentido antihorario en la circunterencia y el punto C se mantenga en la misma posición, el ángulo D empezará a aumentar hasta llegar a 180° cuando pase por A.	El segmento $\overline{DE}$ es la mediana, mediatriz y altura del triángulo BCD.

Figura 48. Respuesta de la Dupla B ítem 1 actividad 1.

Cabe resaltar que no hay evidencia escrita en la guía de trabajo de la representación de los segmentos en el registro figural, pero se muestra en la respuesta de la Dupla B la representación de los segmentos en el registro de lengua natural, por lo que se intuye que, al usar el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, observaron en el monitor de la laptop de trabajo la representación de los segmentos en el registro figural y así realizó la conversión de la representación de los segmentos del registro figural al de lengua natural.

Con esta evidencia, se puede afirmar que, en el sentido de Duval, la Dupla B coordinó los registros figural y de lengua natural al escribir la respuesta en la guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 1a),** la Dupla B respondió escuetamente que la medida de los segmentos CD y BD son iguales, resultado esperado por el análisis a priori, pero no dieron la justificación a dicho resultado, debido a que la respuesta de la exploración inicial; sin embargo, se infiere que, al usar el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, aparece en pantalla el resultado del trabajo realizado; es decir, la Dupla B observó la figura y registró con lápiz y papel su conjetura.

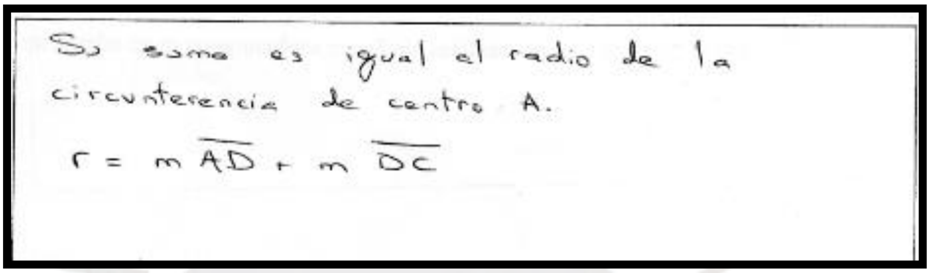
En consecuencia, la Dupla B coordinó los registros figural y de lenguaje natural para responder que los segmentos CD y BD son iguales, tal como se muestra en la guía de trabajo y la figura 49.

$m\overline{CD} = m\overline{BD}$

Figura 49. Respuesta de la Dupla B del ítem 1a) en la actividad 1.

En cuanto al **ítem 1b)**, la Dupla B respondió de acuerdo a lo esperado en el análisis a priori, al indicar que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al valor del radio de la circunferencia, pero no hay una justificación escrita de su conjetura.

A raíz de esto, se piensa que los estudiantes observaron en la pantalla de trabajo la representación de segmentos en el registro figural, que luego escribieron su respuesta donde se evidenció la representación de los segmentos en el registro de lengua natural, tal como se muestra en la figura 50.


Su suma es igual al radio de la circunferencia de centro A.

$r = m\,\overline{AD} + m\,\overline{DC}$

Figura 50. Respuesta de la Dupla B del ítem 1b) en la actividad 1.

En cuanto al **ítem 2**, la Dupla B encontró que la relación existente entre la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover la variable didáctica, el punto interior representado por C, es igual al radio de la circunferencia, tal como lo señala el análisis a priori. Además, la Dupla B, en la guía de trabajo, no muestra los tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural al marcar el rastro del punto representado por D, pero se intuye que al usar el GeoGebra, el equipo realizó las transformaciones (Las diferentes exploraciones con las variables didácticas) y la conversión de la representación de los segmentos del registro figural al de lengua natural, tal como se muestra la respuesta en la guía de trabajo en la figura 51.

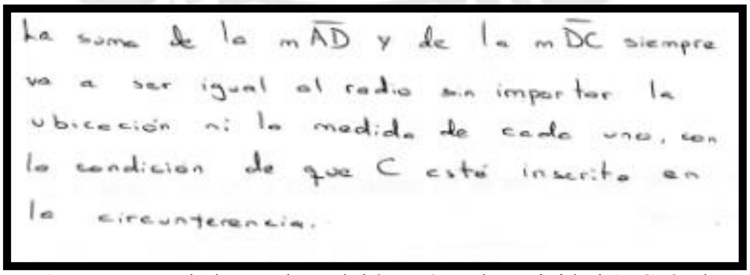

La suma de la m $\overline{AD}$ y de la m $\overline{DC}$ siempre va a ser igual al radio sin importar la ubicación ni la medida de cada uno, con la condición de que C esté inscrito en la circunferencia.

Figura 51. Respuesta de la Dupla B del ítem 2 en la actividad 1. Guía de trabajo.

La respuesta de la Dupla B, en el archivo de GeoGebra, se muestra en la figura 52. En efecto, el equipo, para una exploración con una variable didáctica que es el punto interior representado por C, evidenció el uso de la herramienta *distancia o longitud* para conjeturar que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia y mostró la representación de la Elipse en el registro figural al activar el rastro del punto representado por B.

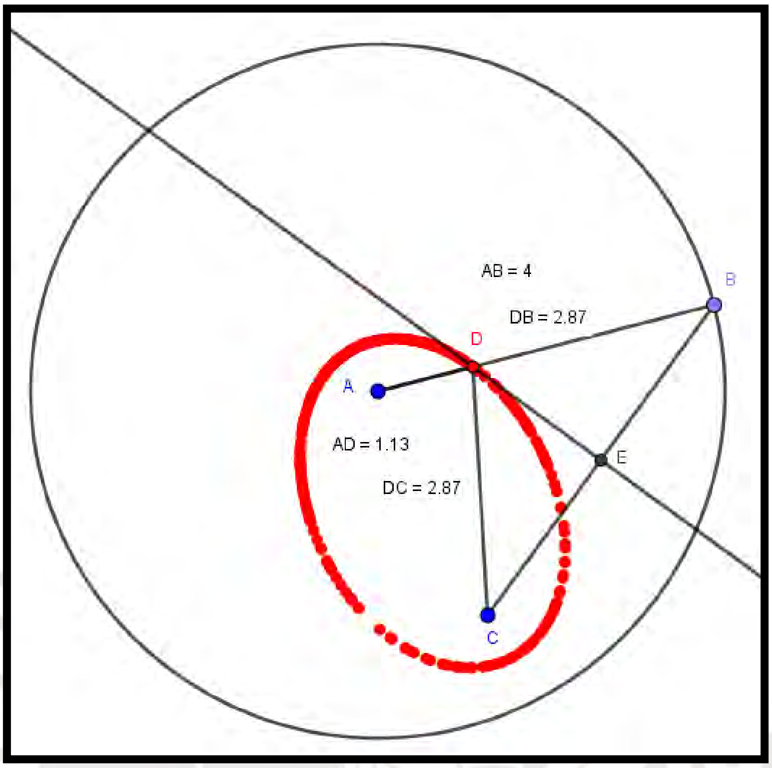
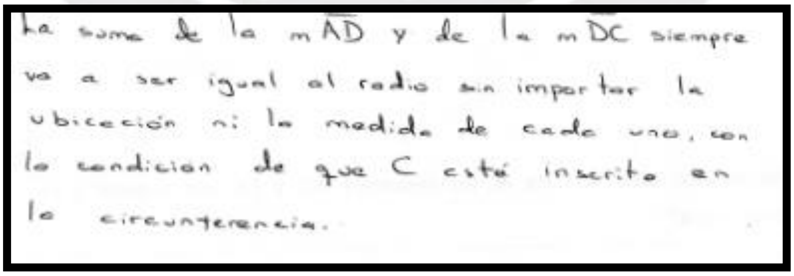


Figura 52. Respuesta de la Dupla B del ítem 2 en la actividad 1. Archivo de GeoGebra.

En cuanto al **ítem 3**, la Dupla B respondió según lo esperado en el análisis a priori; es decir, no importa el valor del radio, ya que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC siempre será igual al valor del radio de la circunferencia, tal como se muestra en la figura 53.



La suma de la m $\overline{AD}$ y de la m DC siempre va a ser igual al radio sin importar la ubicación ni la medida de cada uno, con la condicion de que C esté inscrito en la circunferencia.

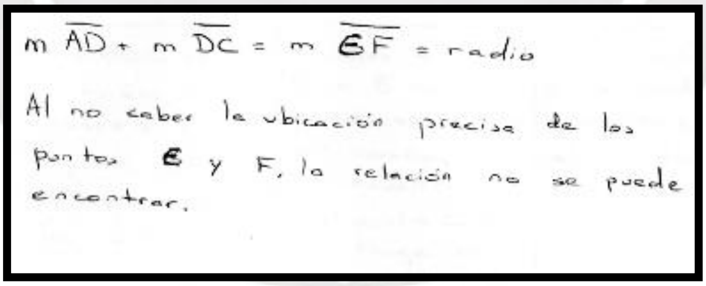
Figura 53. Respuesta de la Dupla B del ítem 3 en la actividad 1.

Hay que resaltar que la Dupla B no mencionó que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es una constante, hecho que se esperaba del análisis a priori y la respuesta estuvo acorde con lo esperado, por lo que se afirma que la dupla hizo tratamientos de la representación de los segmentos en el registro figural (Diferentes exploraciones con valores diferentes para la variable didáctica) para llegar a la respuesta escrita; es decir, hay una conversión de la representación de los segmentos del registro figural al de lengua natural, por lo que la Dupla B evidenció una coordinación de registros figural y lengua natural.

En cuanto al **ítem 4**, la Dupla B respondió lo esperado por el análisis a priori, ya que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia, sin importar que variable didáctica se utilice; es decir, que el punto interior, representado por C, se mueva a otra posición que el centro de la circunferencia; el punto representado por A, pasa a una nueva posición y que el valor del radio de la circunferencia tome otro valor.

Además, la Dupla B determinó la medida de la longitud del segmento EF (Segmento que resulta de intersectar la Elipse con la recta que une los focos), el eje mayor de la Elipse y mencionaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual a la medida de la longitud del segmento EF e igual al radio de la circunferencia, utilizando representación simbólica; es decir, la representación de los segmentos en el registro de lengua natural.

A pesar de esto, se observa una contradicción en el escrito de la respuesta de la Dupla B en la representación de los segmentos en el registro de lengua natural, cuando indican que no se puede determinar la relación entre la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC por no conocer la ubicación precisa de los puntos E y F, pero sí muestra la relación, ya que la escribe tal como se muestra en la figura 54.


$m\,\overline{AD} + m\,\overline{DC} = m\,\overline{EF} = \text{radio}$

Al no caber la ubicación precisa de los puntos E y F, la relación no se puede encontrar.

Figura 54. Respuesta de la Dupla B ítem 4 actividad 1. Guía de trabajo.

Una vez más se puede inferir, del análisis del trabajo realizado por la Dupla B en GeoGebra, que realizaron tratamientos de las representaciones de los segmentos en el registro figural, en vista de las diferentes exploraciones realizadas con las variables didácticas.

En la figura 55 se muestra la representación de los segmentos en el registro figural, uno de los resultados de la Dupla B en archivo de Geogebra, en particular cuando la variable didáctica, radio de la circunferencia, tiene un valor determinado.

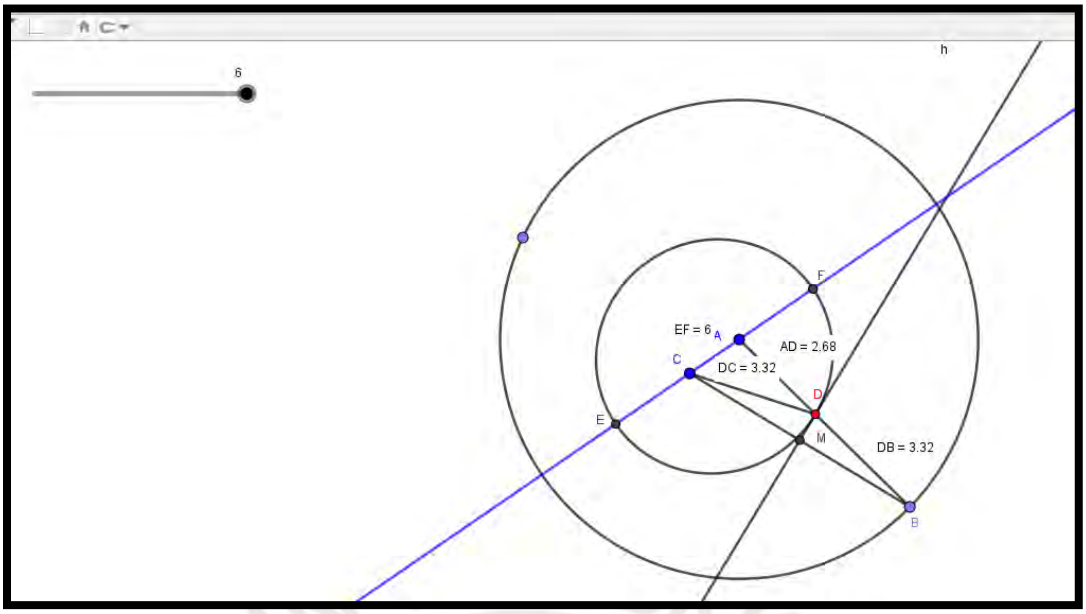


Figura 55. Respuesta de la Dupla B ítem 4 actividad 1. En el archivo de GeoGebra

Reiteramos que la Dupla B mencionó no haber encontrado una relación para la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC y la longitud del segmento EF al variar las variables didácticas, porque no saben la ubicación de los puntos representados por E y F, pero la Dupla B mostró, en su trabajo realizado en GeoGebra, lo que escribió en la guía de trabajo en forma simbólica, donde destacaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es la representación simbólica AD + DC = EF = radio de la circunferencia.

En este apartado, la Dupla B coordinó los registros figural y de lengua natural al utilizar los registros figural y de lengua natural para la representación de los segmentos.

Al finalizar la actividad 1, el profesor - investigador formalizó la condición geométrica de la Elipse, tema aún no estudiado en clase, al señalar que la distancia de un punto cualquiera representado por P de la Elipse a dos puntos fijos, representados por F_1 y F_2, llamados focos, es igual a una constante e igual a la longitud del eje focal AB, también denominado eje mayor, que resulta de intersectar la curva con la recta que pasa por los focos. Además, el profesor – investigador definió dos elementos más de la Elipse, el centro O de la cónica, definido como el punto medio del segmento F_1F_2 y el eje menor CD, segmento perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro.

El profesor – investigador mencionó la palabra lugar geométrico para describir la propiedad geométrica de los puntos de la Elipse que describen la condición geométrica de la cónica y utilizó el GeoGebra para la formalización del concepto de Elipse, tal como se muestra en la figura 56.

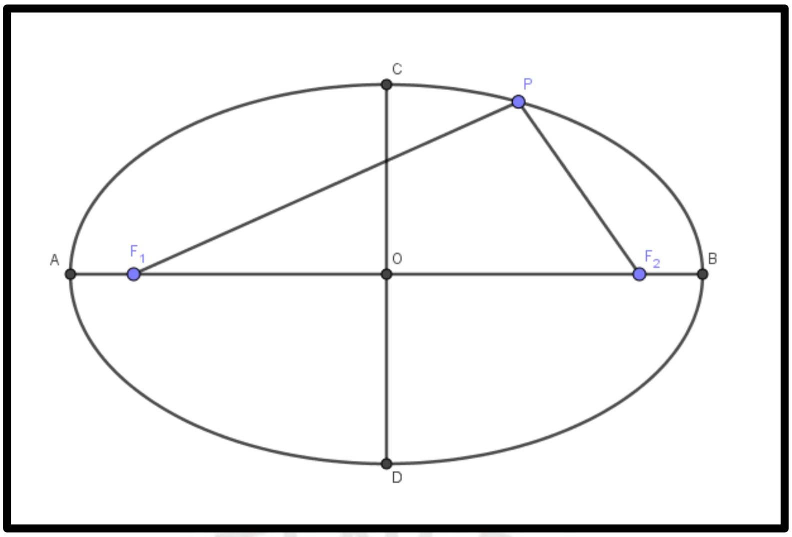


Figura 56. Condición geométrica de la Elipse y los ejes mayor y menor.

Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse

La finalidad de esta actividad fue que los estudiantes de la duplas logren representar la Elipse en los registros gráfico y algebraico a partir de sus conocimientos básicos de Geometría Analítica, como la distancia entre dos puntos y la condición geométrica de la curva; es decir, el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es siempre una constante e igual a la medida de la longitud del eje focal y mayor que la distancia entre los focos. Además, los estudiantes de las duplas reconocen los elementos de la Elipse referidos al sistema de coordenadas cartesianas que les permitirán transitar del registro gráfico al registro algebraico al utilizar la condición geométrica de la Elipse.

En esta actividad, las variables didácticas involucradas con sus respectivos valores se muestran en el Cuadro 6:

Cuadro 6. *Variables didácticas y valores de la actividad*

Variables	Valores
Eje focal	Eje x
Punto C	Se mueve de – 5 a +5. Su función es permitir el movimiento de los focos.
Focos	F_1 (- a, 0) y F_2 (a, 0) con valores para a entre -5 y + 5.

En la figura 57 se muestra la actividad 2.

Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse

Abra el archivo ACT2.ggb realice lo siguiente:

1. Con la herramienta mida los segmentos: EF, AB, AP, BP, AG y LG, luego explore la construcción, para ello arrastre el punto C y observa que sucede con la medida de los segmentos y responda:
   a) ¿Qué segmento permanece constante? Justifique matemáticamente.
   b) ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB? Explique detalladamente.
2. Explore la construcción moviendo el punto A o B. y responda, en cada caso, las explicando sus procedimientos:
   a) ¿Qué segmento mantiene la misma longitud?
   b) ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB?
   c) ¿Encuentra alguna relación en la medida del segmento AL?
3. Arrastre los puntos A y B de tal forma que los ubique en (-4; 0) y (4; 0) respectivamente y, C en (0; 3), luego asuma un punto P genérico (x; y) y utilice la condición geométrica de la Elipse para determinar la ecuación algebraica de la Elipse de la forma cuadrática $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. En seguida responda la siguiente pregunta: *¿Qué valores de los hallados en la indicación corresponden a los coeficientes a y b, determinados en la ecuación cuadrática?*
4. Con la ecuación algebraica obtenida en el paso anterior, exprésala de la forma estándar o canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Responda la siguiente pregunta:
   a) ¿Qué relación tienen las constantes a y b con la medida de alguno de los segmentos hallados en la indicación 1?
   b) Exprese la condición geométrica de la Elipse en términos de una de estas constantes.

Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT2.

Figura 57. Actividad 2.

Análisis a priori

Según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, las condiciones para la comprensión de un concepto matemático se dan en la coordinación que existe entre registros diferentes; es decir, cuando ocurre la conversión de la representación de un objeto matemático, en nuestro caso la Elipse, de un registro en otro.

Con este fin, diseñamos una actividad que lleve a los estudiantes realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para comprobar la comprensión de la condición geométrica de la Elipse o lo que es lo mismo decir, describir mediante ecuaciones algebraicas el lugar geométrico de la Elipse.

En el ejercicio deseamos que las duplas reconozcan la gráfica de la Elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, con centro en el origen, cuando el eje mayor o focal coincide con el eje *x* y pensamos que a partir del gráfico pueden obtener los elementos de la Elipse, que les permitan, por medio de una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, obtener la representación algebraica de la cónica dada por la ecuación algebraica general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y por medio de tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico obtener la representación algebraica de la curva expresada por la ecuación algebraica ordinaria $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de dicha Elipse.

La actividad 2 empieza con la representación gráfica de la Elipse dado en el archivo ACT2.ggb, tal como se muestra en la figura 58.

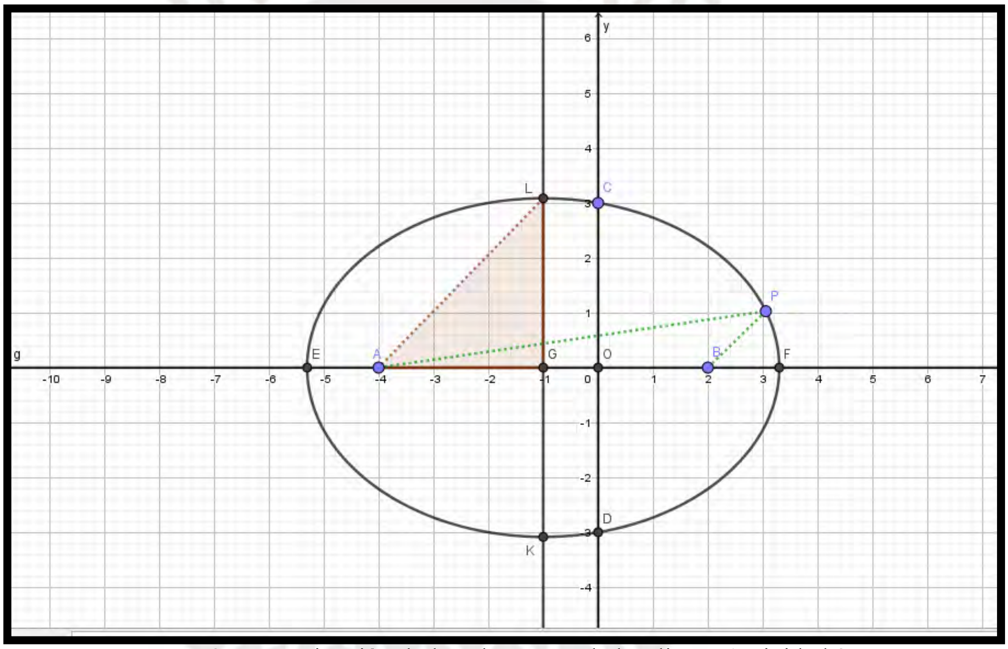


Figura 58. Determinación de los elementos de la Elipse- Actividad 2.

Se espera que, a priori, las duplas, en **la indicación 1**, midan las longitudes de segmentos que están conectados con los elementos de la Elipse, como el eje mayor y menor, cuyos valores les permitan realizar conjeturas que conduzcan a la obtención de la ecuación algebraica de la Elipse.

Asimismo, las duplas al conocer la condición geométrica de la Elipse; es decir, las distancias de cualquier punto de la Elipse a dos puntos fijos del plano (Denominados focos) es igual a la longitud del eje focal, sean capaces de realizar la conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, por medio de los conocimientos básicos de la Geometría Analítica, como distancia entre dos puntos.

En otras palabras, esperamos que las duplas puedan determinar las representaciones algebraicas dadas por las ecuaciones algebraicas cuadráticas que describen el lugar geométrico de la Elipse.

En ese sentido, se espera que las duplas en el ítem 1 realicen la exploración de la construcción dada al arrastrar la variable didáctica, el punto representado por C, a nuevas posiciones; es decir, que las duplas realicen tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico y observen los cambios que sufren los segmentos determinados.

También se desea que las duplas, al responder el **ítem 1a)**, encuentren que el segmento AB y AG se mantienen constante, en vista que los puntos representados por A y B no se mueven así como el punto representado por G, centro de la Elipse, tal como se observa en la figura 59.

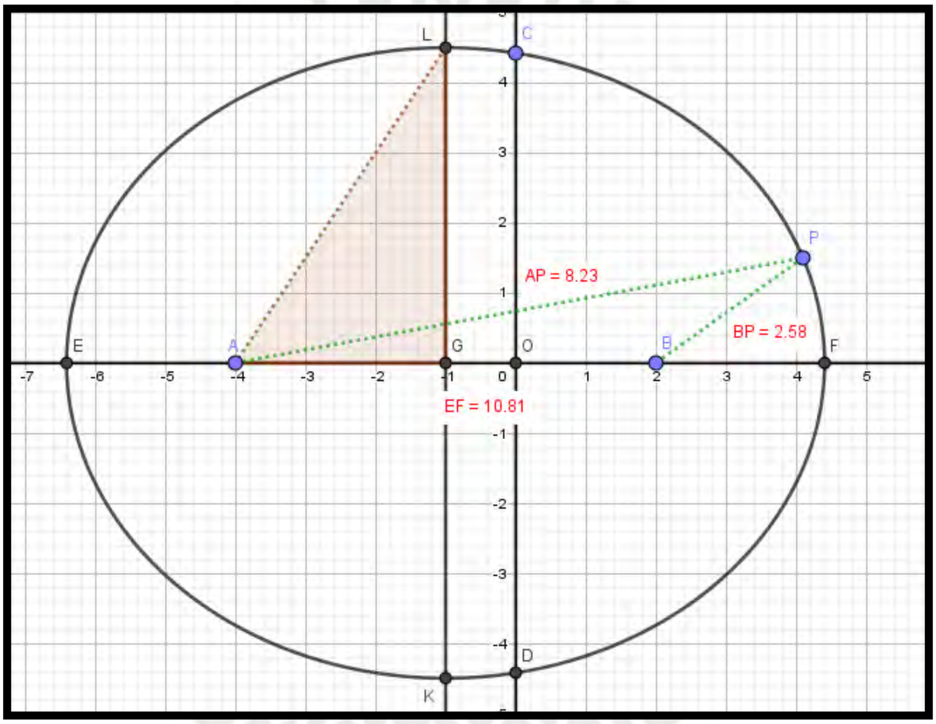


Figura 59. Condición geométrica de la Elipse por medio de su representación gráfica.

Se espera también que las duplas, al arrastrar la variable didáctica que es el punto representado por C a nuevas posiciones, realicen tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al obtener nuevas representaciones gráficas de la Elipse y al utilizar la herramienta distancia o longitud, logren responder el ítem 1b), al encontrar que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y BP es igual a la longitud del eje mayor de la Elipse.

En consecuencia, se espera que las duplas identifiquen que los puntos representados por A y B son los focos de la Elipse, en vista que la distancia del punto representado por P, punto de la Elipse, a los focos, puntos representados por A y B es igual a la longitud del eje mayor.

En cuanto, al **ítem 2**, se espera que las duplas realicen tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al realizar nuevas exploraciones al mover la variable didáctica, cualquiera de los focos y respondan el **ítem 2a)**, que la longitud del segmento CD se mantiene constante, en vista que los puntos representados por C y D no se mueven y pertenecen al eje de ordenadas, el eje *y*, el cual está fijo. Además, se espera que las duplas realicen más tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al modificar la variable didáctica (Arrastre del otro foco); es decir, las duplas obtengan diferentes representaciones gráficas de la Elipse, por lo que al responder el **ítem 2b)**, encuentren que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es siempre igual a la medida de la longitud del eje mayor, el segmento EF, al utilizar la herramienta *distancia o longitud*, tal como se muestra en la figura 60.

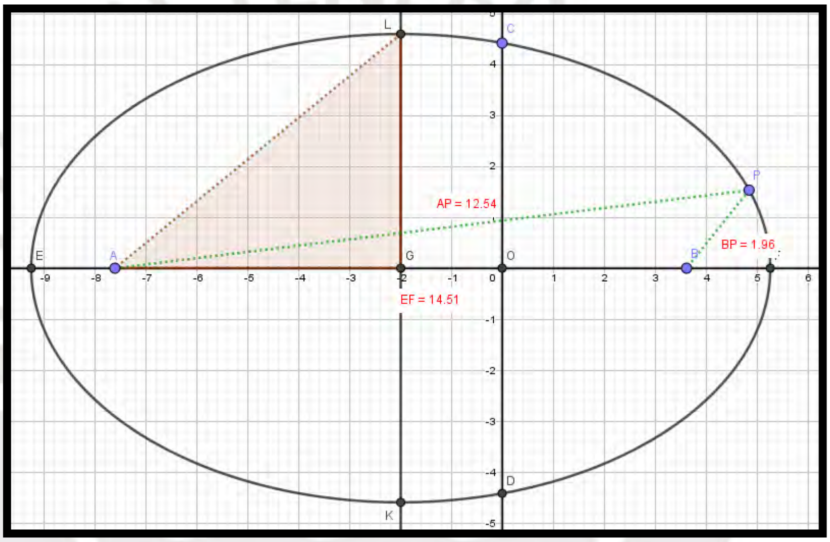


Figura 60. Condición geométrica de la Elipse en un segundo registro gráfico.

En cuanto al **ítem 2c)**, se espera que las duplas encuentren que la medida del segmento AL está relacionado con los lados del triángulo rectángulo AGL, recto en G, que comprueban al utilizar la herramienta *ángulo dada su amplitud.*

Esperamos que las duplas encuentren que la medida del segmento AL, hipotenusa del triángulo rectángulo AGL, cumpla con el teorema de Pitágoras; es decir, encuentren la relación pitagórica con la medidas de las longitudes los segmentos representados por AL, AG y GL, al comprobar que la medida de la longitud del segmento AL, elevado al cuadrado, es igual a la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AG y GL elevados al cuadrado o lo que es lo mismo decir que la representación simbólica $AL^2 = AG^2 + GL^2$, tal como se muestra en la figura 61.

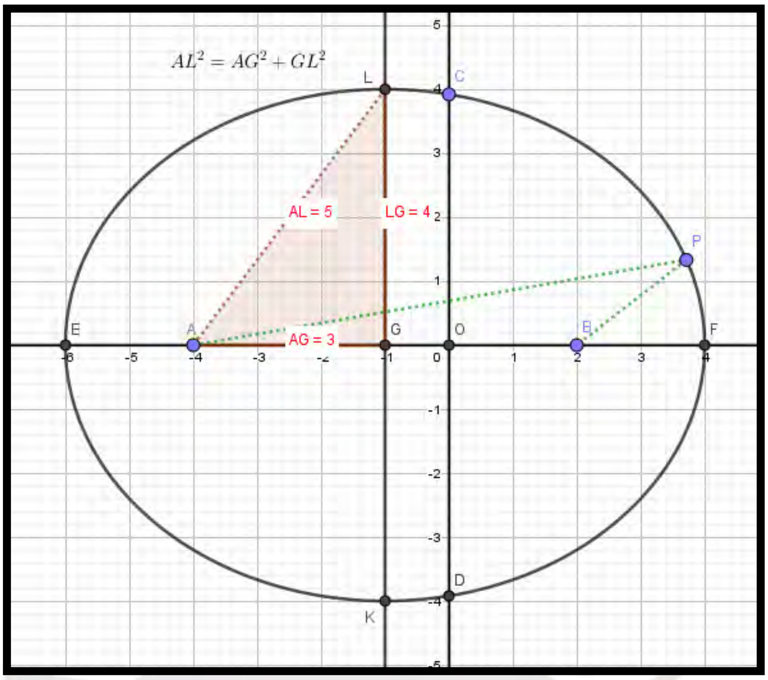


Figura 61. Relación pitagórica entre las longitudes de los segmentos AL, LG y AG.

Las duplas realizan tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al llevar a cabo las exploraciones con la variable didáctica (Focos de la Elipse) para encontrar la relación pitagórica entre las medidas de las longitudes de los segmentos AL, LG y AG.

En la **pregunta 3**, se espera que las duplas, al manipular las variables didácticas focos de la Elipse y el punto representado por C, realicen la conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico.

En efecto, las duplas arrastran primero los focos de puntos representados por A y B a una nueva posición y luego, el punto representado por C, a una situación particular y utilizando la condición geométrica de la Elipse y el conocimiento de Geometría Analítica, distancia entre dos puntos, para obtener la representación algebraica de la Elipse por medio de la ecuación algebraica de la cónica en su forma cuadrática general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Las duplas realizan tratamientos de la representación de la Elipse, en el registro algebraico, para encontrar los valores de las constantes *a* y *b* en la representación algebraica de la Elipse expresada por la ecuación cuadrática general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y comprueban, con el archivo en Geogebra, que dichos valores de las constantes *a* y *b* cumplen la relación pitagórica dada por la relación algebraica $b^2 + c^2 = a^2$ e identifican que el valor de la constante *a* es la mitad de la medida de la longitud del eje mayor y que el valor de la constante *b* es la mitad de la medida de la longitud del eje menor, tal como se muestra en la figura 62.

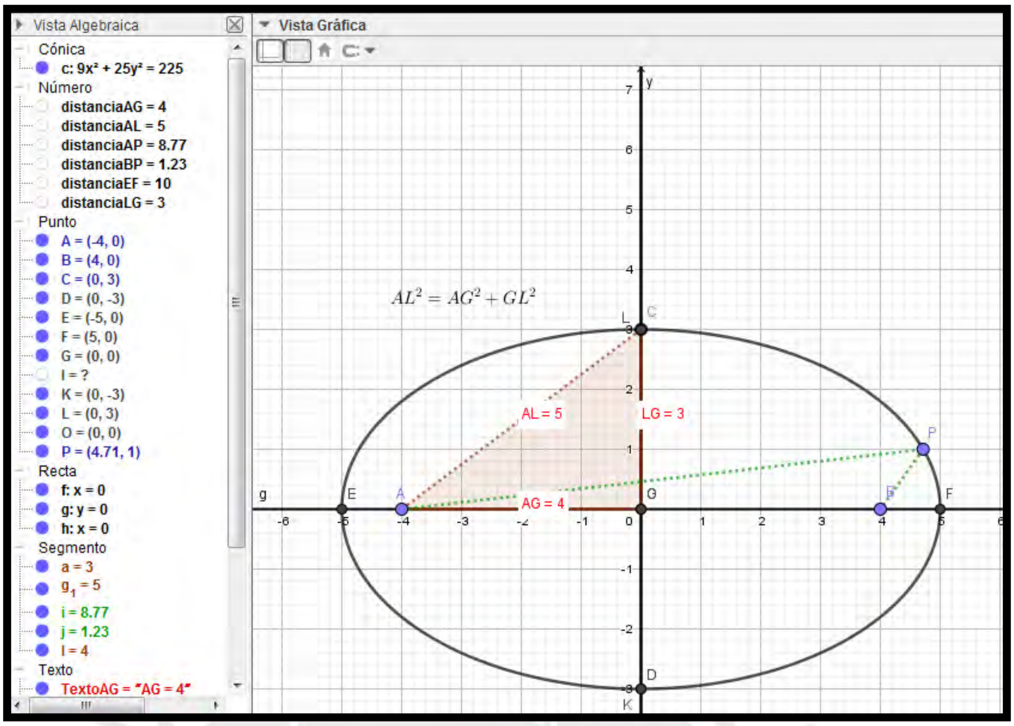


Figura 62. Representación gráfica y algebraica de la Elipse – Actividad 2.

Se espera también que las duplas realicen la conversión de la representación de la distancia entre dos puntos del registro algebraico al de lengua natural al identificar las constantes *a* y *b* halladas corresponden a la medida de la longitud del segmento EG = *a*, la mitad de la medida de la longitud del eje mayor EF y la medida de la longitud del segmento LG = *b*, la mitad de la medida de la longitud del eje menor LK.

En la **indicación 4**, se espera que las duplas realicen tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico, para transformar la representación algebraica de la cónica determinada por la ecuación cuadrática general de la Elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, en la representación algebraica de la curva expresada por la ecuación ordinaria, estándar o canónica de la Elipse de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Al responder el **ítem 4a)**, se espera que las duplas logren realizar una conversión de la representación de la distancia entre dos puntos en el registro algebraico al de lengua natural para encontrar la relación de las constantes *a* y *b* de la ecuación ordinaria de la Elipse con la medida de la longitud de los segmentos hallados en la indicación 1, al reconocer que, el valor de la constante *a,* corresponde a la medida de la longitud del segmento AL, hipotenusa del triángulo rectángulo AGL, y el valor de la constante *b* corresponde a la longitud de la medida del segmento LG, mitad de la medida de la longitud del eje menor, uno de los catetos del triángulo rectángulo.

Finalmente, se espera que las duplas, al responder el **ítem 4b)**, realicen una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para expresar la condición geométrica de la Elipse, en términos de la medida de la longitud del eje mayor; es decir, que establezcan la siguiente relación d (P, A) + d (P, B) = 2*a*, donde 2*a* es la longitud del eje mayor.

La representación de la Elipse en el registro algebraico es la construcción que deseamos que las duplas realicen al término de la actividad 2, como muestra la figura 62, en la vista algebraica del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, ya que se presume que las duplas han seguido la secuencia de pasos que se les ha planteado.

En ese sentido, a priori, se espera que las duplas realicen la coordinación entre los registros gráfico y algebraico, en vista que realizan la construcción de la Elipse en el registro algebraico partiendo de la representación de la cónica en el registro gráfico.

Análisis a posteriori

Análisis de la Dupla A

Con respecto al **ítem 1 a)**, la respuesta de la Dupla A es la esperada por el análisis a priori, luego de realizar tratamientos de la representación de la Elipse, en el registro gráfico, al arrastrar la variable didáctica, el punto representado por C, a nuevas posiciones; es decir, la Dupla A encontró que las medidas de las longitudes de los segmentos AG y AB permanecen constantes y señalan que el segmento AB está en el interior de la Elipse, tal como se muestra en la figura 63.

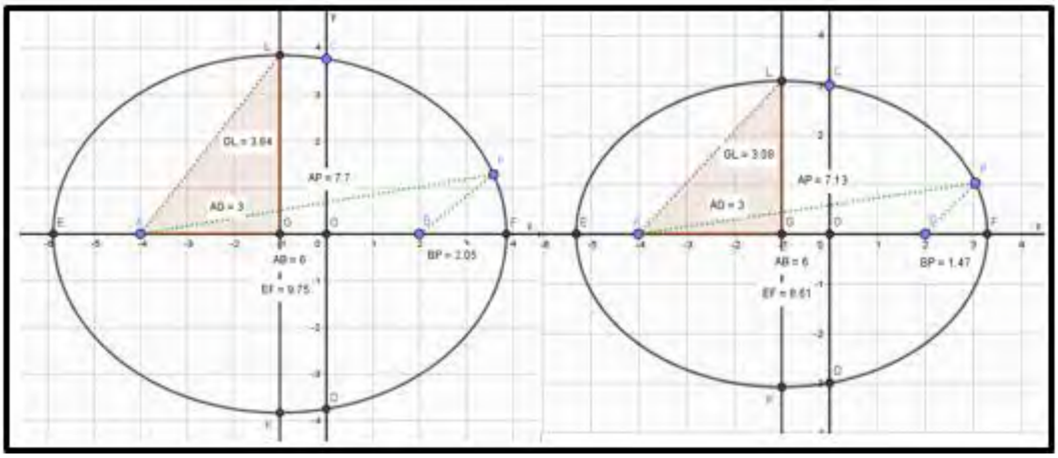


Figura 63. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro gráfico por la Dupla A.

Hay que hacer notar que la Dupla A confundió la Elipse por la de la circunferencia, como se ve en su respuesta escrita en la guía de trabajo, tal como se muestra en la figura 64.

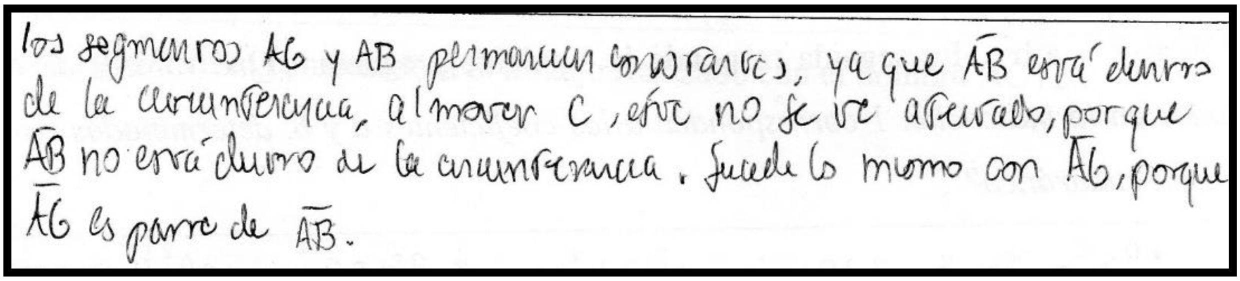
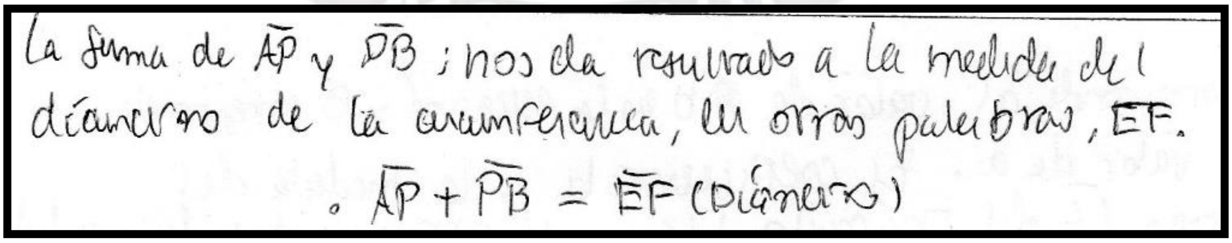

los segmentos $\overline{AG}$ y $\overline{AB}$ permanecen constantes, ya que $\overline{AB}$ está dentro de la circunferencia, al mover C, esto no se ve afectado, porque $\overline{AB}$ no está dentro de la circunferencia. Sucede lo mismo con $\overline{AG}$, porque $\overline{AG}$ es parte de $\overline{AB}$.

Figura 64. Respuesta de la Dupla A en el ítem 1a) de la actividad 2. Guía de trabajo

En efecto, la Dupla A justificó su respuesta porque observaron que el punto representado por C está en la cónica y, al arrastrar dicho punto, se obtiene diferentes representaciones de la Elipse en el registro gráfico; es decir, los estudiantes realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico. Por lo tanto, evidenciaron los tratamientos de la representación de la Elipse, en el registro gráfico, al arrastrar el punto representado por C y obtener diferentes representaciones de la cónica en el registro gráfico.

En cuanto al **ítem 1b)**, la Dupla A encontró que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del eje focal representado por EF, tal como lo señala el análisis a priori. Los estudiantes mostraron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF, tal como se muestra en las figuras 63 y 65.

Se observa que la Dupla A no identificó la curva como Elipse, sino como circunferencia, tal como se observa en la respuesta escrita en la guía de trabajo en la figura 65.


La suma de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$; nos da resultado a la medida del diámetro de la circunferencia, en otras palabras, EF.

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{EF}$ (Diámetro)

Figura 65. Respuesta de la Dupla A al ítem 1b) de la actividad 2. Guía de trabajo.

La Dupla A también evidenció tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al realizar las exploraciones con la variable didáctica y luego una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lenguaje natural, al escribir en la guía de trabajo lo observado en el monitor de la computadora de trabajo.

En cuanto al **ítem 2 a**), la Dupla A realizó nuevos tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al arrastrar uno de los focos, representados por A o B, a nuevas posiciones. Por tal motivo, encontraron nuevas representaciones de la Elipse en el registro gráfico y señalaron que, de acuerdo al análisis a priori, la medida de la longitud del segmento CD permanece constante, debido que dicho segmento se encuentra en el eje de ordenadas y este eje no se mueve, tal como se observa en la figura 66.

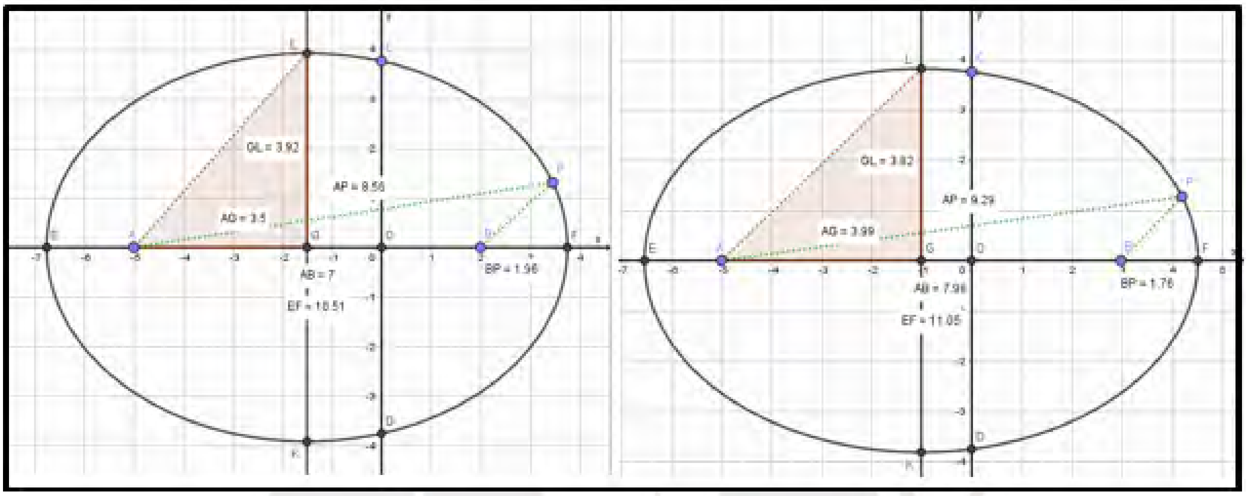


Figura 66. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro gráfico por la Dupla A, ítem 2a).

Además, la Dupla A evidenció una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural al expresar su respuesta en la guía de trabajo, tal como se muestra en la figura 67.

El Segmento $\overline{CD}$ mantiene la misma Longitud, ya que se encuentra Colocado en el eje "y" del plano cartesiano. Se encuentra en el eje coordenado

Figura 67. Respuesta de la Dupla A al ítem 2a) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 2b)**, la Dupla A señaló su conjetura según el análisis a priori; es decir, al usar la herramienta *distancia o longitud* del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, mostraron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF, mediante la representación gráfica de las medidas de las longitudes de segmentos, tal como se observa en el archivo en GeoGebra en la figura 68.

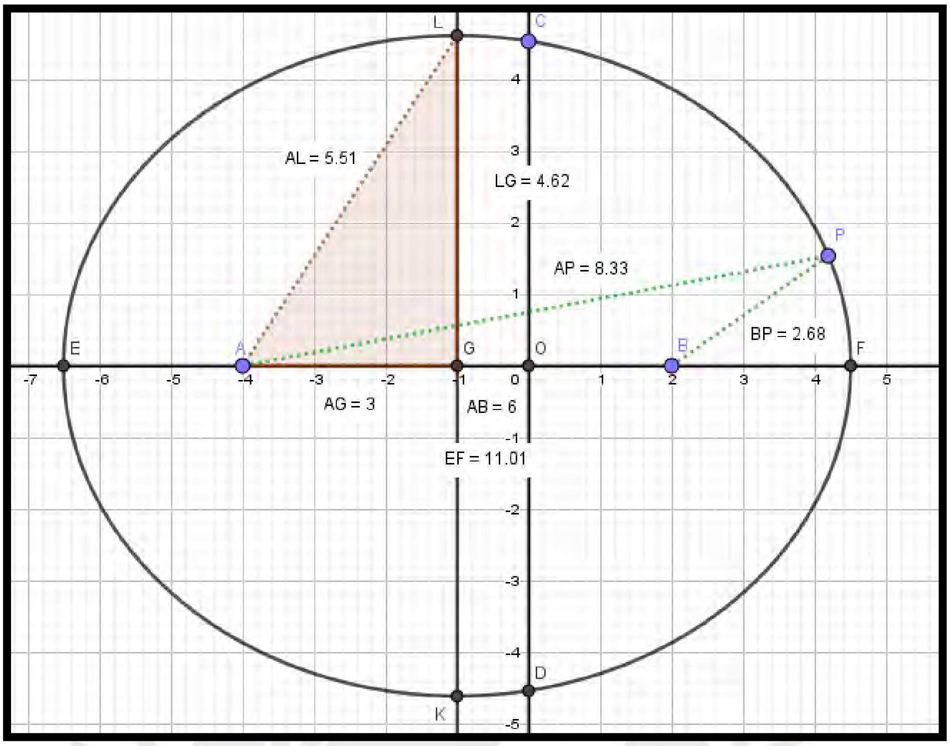


Figura 68. Respuesta de la Dupla A al ítem 2b) de la actividad 2. Archivo de GeoGebra.

Asimismo, la Dupla A evidenció tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al obtener diferentes representaciones de la cónica en el registro gráfico, tal como se observa en los archivos en GeoGebra en la figura 69.

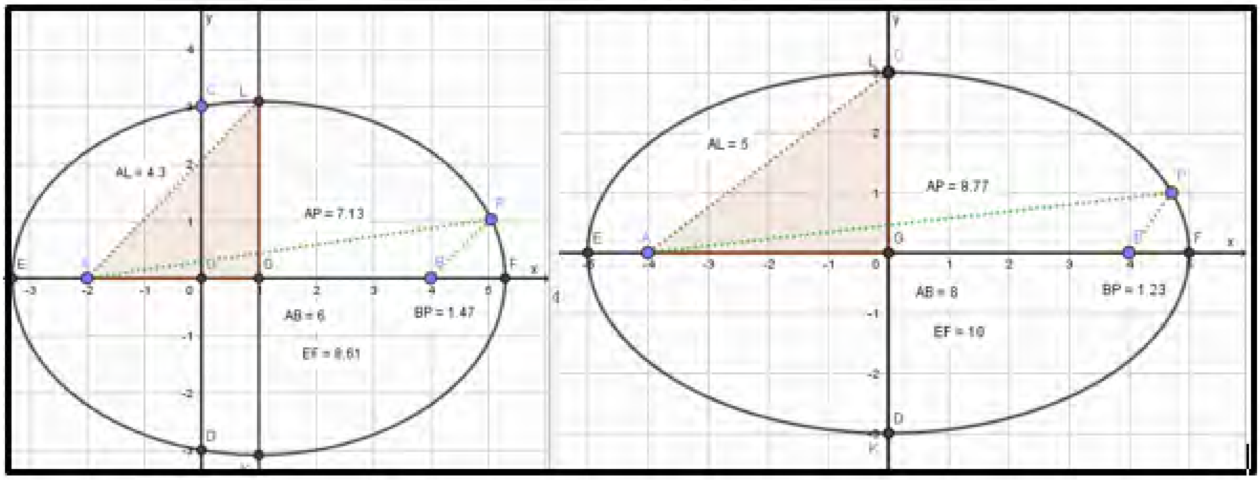


Figura 69. Tratamientos de la representación de la Elipse realizados por la Dupla A, ítem 2b).

Después, la Dupla A realizó una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural, al escribir en la guía de trabajo su conjetura; es decir, por medio de la herramienta del GeoGebra *distancia o longitud*, en la representación gráfica de la Elipse conjeturan que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF, tal como se muestra en la figura 70.

Al mover A y/o B, la suma de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ sigue dando la misma medida que el segmento $\overline{EF}$.

• $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{EF}$

Figura 70. Respuesta de la Dupla A al ítem 2b) de la actividad 2. Guía de trabajo

En cuanto al **ítem 2c)**, la Dupla A encontró que la medida de la longitud del segmento AL es la hipotenusa del triángulo rectángulo ALG, tal como se esperaba del análisis a priori, y demostraron que la medida de la longitud de dicho segmento cumple la relación pitagórica al relacionarlo con las medidas de las longitudes de los segmentos LG y AG, tal como la Dupla A lo mostró en la guía de trabajo, se muestra en la figura 71.

• Al formula siendo la hipotenusa del triángulo que se forma con los segmentos $\overline{AG}$, $\overline{AL}$ y $\overline{LG}$ (triángulo ALG).

• $(\overline{AG})^2 + (LG)^2 = (\overline{LA})^2$

Figura 71. Respuesta de la Dupla A al ítem 2c) de la actividad 2. Guía de trabajo.

Además, la Dupla A evidenció una vez más la conversión de registros, del gráfico al de lengua natural, en vista que la representación del triángulo rectángulo AGL en el registro gráfico, donde se observa las medidas de las longitudes de los segmentos AG, GL y AL, cumplen la relación pitagórica con el triángulo rectángulo de valores 3,4 y 5, tal como se muestra en la figura 72

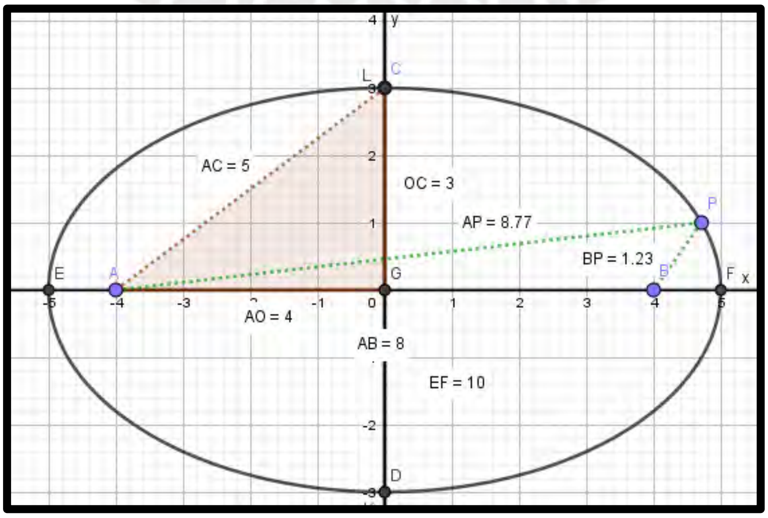


Figura 72. Representación gráfica del triángulo pitagórico determinado por la Dupla A, ítem 2c).Actividad 2

En cuanto al **ítem 3**, la Dupla A mostró en la guía de trabajo los procedimientos seguidos al usar la condición geométrica de la Elipse y el conocimiento de distancia entre dos puntos para obtener la representación algebraica de la Elipse, a partir de las coordenadas particulares de los focos y del punto representado por C, tal como lo señala el análisis a priori y que se muestra en la figura 73.

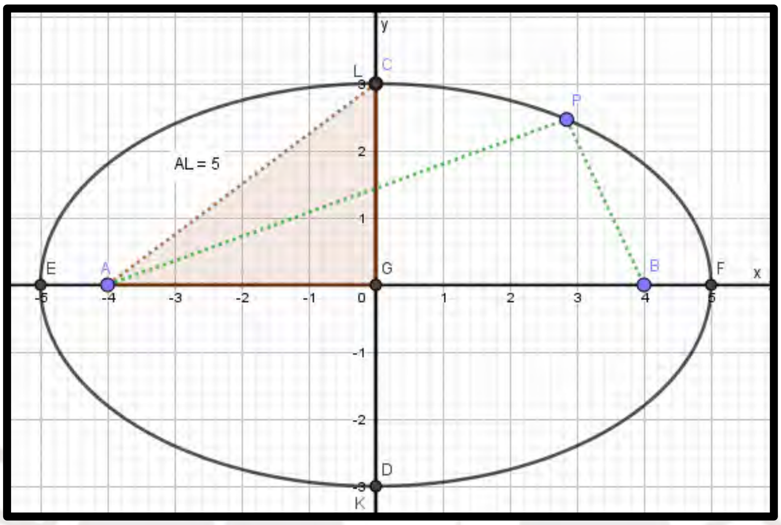


Figura 73. Condiciones de trabajo ítem 3, actividad 2.

En consecuencia, la Dupla A realizó una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, al seguir las indicaciones de la guía de trabajo en el ítem 3, para obtener las coordenadas de los focos representados por (-4,0) y (4,0) del archivo de GeoGebra y luego, con dichos puntos, aplicaron la condición geométrica de la Elipse y distancia entre dos puntos para encontrar la representación algebraica de la Elipse, por medio de tratamientos de la representación de la cónica en el registro gráfico, tal como se muestra en la figura 74.

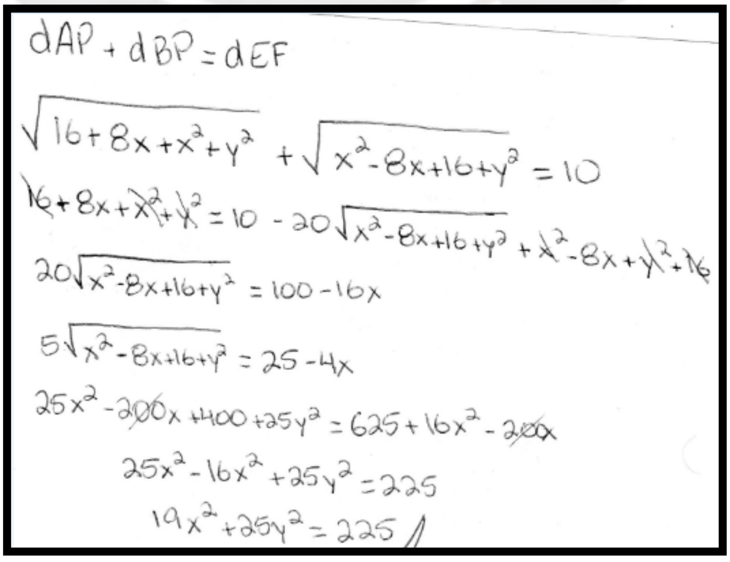
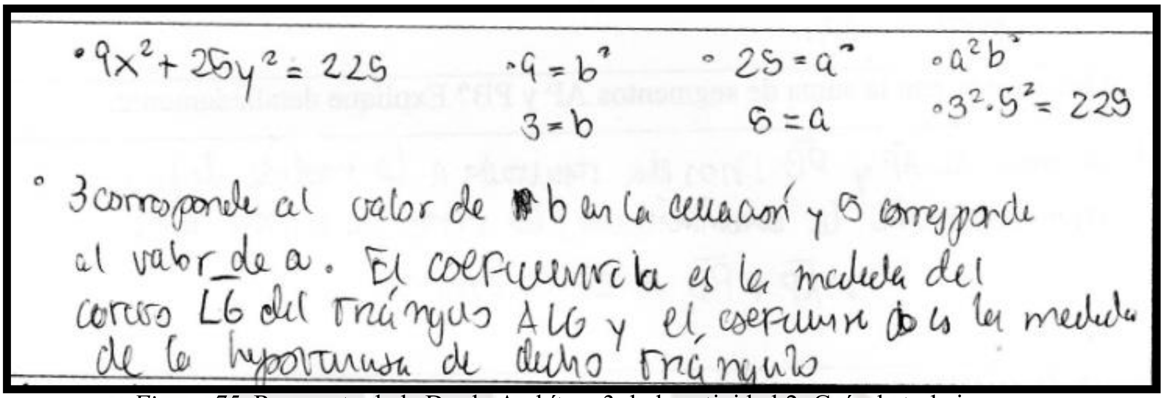


Figura 74. Tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico realizados por la Dupla A.

La Dupla A evidenció una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para llegar a la representación algebraica de la Elipse, dada por la ecuación algebraica general de segundo grado de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Por consiguiente, los estudiantes identificaron los valores de las constantes *a* y *b* con las medidas de las longitudes de los segmentos determinados en la indicación 1.

Así, la Dupla A señaló que el valor de la constante *a* es la hipotenusa del triángulo AGL, por lo tanto, igual a la medida de la longitud del segmento AL, mientras que el valor de la constante *b* es igual al cateto de medida de la longitud del segmento LG, tal como se ve en la figura 75.


• $9x^2 + 25y^2 = 225$ • $9 = b^2$, $3 = b$ • $25 = a^2$, $5 = a$ • a^2b^2 • $3^2 \cdot 5^2 = 225$

• 3 corresponde al valor de b en la ecuación y 5 corresponde al valor de a. El coeficiente la es la medida del cateto LG del triángulo ALG y el coeficiente de a la es la medida de la hipotenusa de dicho triángulo

Figura 75. Respuesta de la Dupla A al ítem 3 de la actividad 2. Guía de trabajo.

Además, la Dupla A evidenció la conversión de la representación de la Elipse del registro algebraico al de lengua natural al expresar el resultado en la guía de trabajo.

En el sentido de Duval, la Dupla A coordinó los registros gráfico y algebraico para comprender la condición geométrica de la Elipse. Además, realizaron, en el registro algebraico, una serie de tratamientos de la representación de la Elipse que le permitió obtener la representación algebraica la Elipse.

En cuanto al **ítem 4 a)**, la Dupla A realizó una transformación con la representación algebraica de la Elipse, por medio de la ecuación general de la curva obtenida en el ítem anterior, para obtener la representación algebraica de la cónica por medio de la ecuación ordinaria de la Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En consecuencia, la Dupla A evidenció tratamientos de la representación de la cónica en el registro algebraico, tal como lo señala el análisis a priori, donde realizaron una serie de trasformaciones con la representación algebraica de la Elipse para identificar los valores de la constantes *a* y *b,* como ya se mencionó, realizaron tratamientos de la representación de la cónica en el registro algebraico, como se muestra en la figura 76.

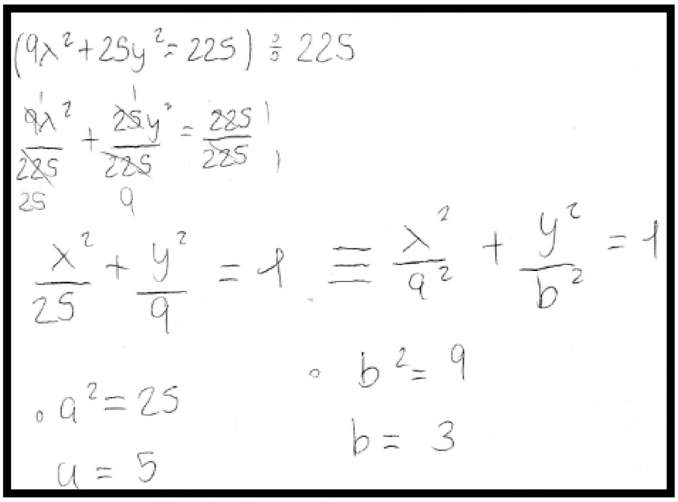


Figura 76. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro algebraico realizado por la Dupla A.

Asimismo, la Dupla A reconoció y relacionó los valores de las constantes *a* y *b* con las medidas de las longitudes de los segmentos hallados en la indicación 1, tal como lo señala el análisis a priori; es decir, identificaron los valores de las constantes al escribir la respuesta en la guía de trabajo, tal como se muestra en la figura 77.

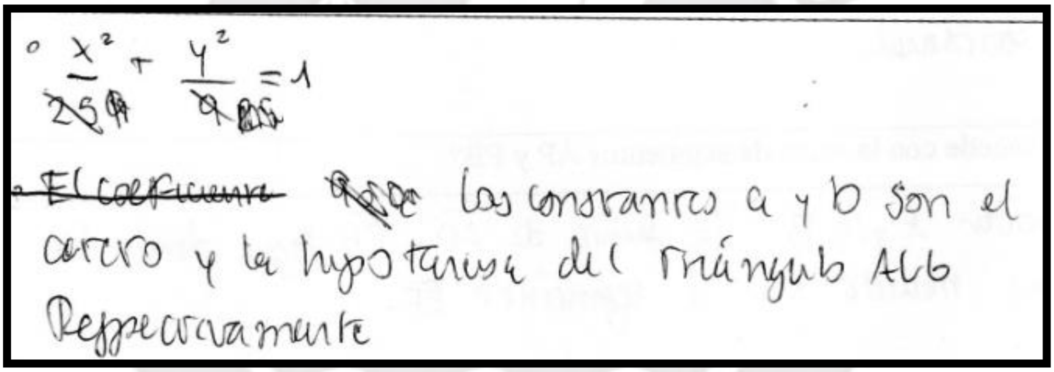


Figura 77. Respuesta de la Dupla A al ítem 4a) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 4 b)**, la Dupla A expresó la condición geométrica de la Elipse, en términos del valor de la constante *a,* al reconocer que es la medida de la longitud del eje mayor o focal de la Elipse, tal como lo señala el análisis a priori y se muestra en la figura 78.

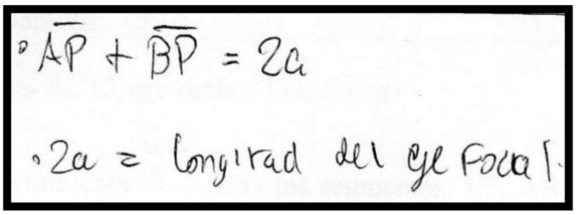


Figura 78. Respuesta de la Dupla A al ítem 4b) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En consecuencia, la Dupla A evidenció la comprensión del concepto de Elipse al coordinar los registros gráfico y algebraico de la representación de la Elipse y luego, para expresar su respuesta, coordinó los registros algebraico y lengua natural de la representación de la cónica, por lo que la Dupla evidenció comprensión de la condición geométrica de la Elipse.

Análisis de la Dupla B

En el **ítem 1 a)**, la respuesta de la Dupla B es la esperada por el análisis a priori; es decir, los estudiantes mostraron que las medidas de las longitudes de los segmentos AG y AB permanecen constantes y la justificación que dio es que el punto representado por G es el centro de la Elipse y los focos representados por A y B se encuentran a la misma distancia del centro y al no moverse el centro estos puntos tampoco se mueven, por lo tanto, no depende del movimiento del punto representado por C.

Se considera que la Dupla B realizó tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al manipular la variable didáctica (El punto representado por C de la Elipse), al arrastrar el punto representado por C a nuevas posiciones, tal como se muestra la figura 79.

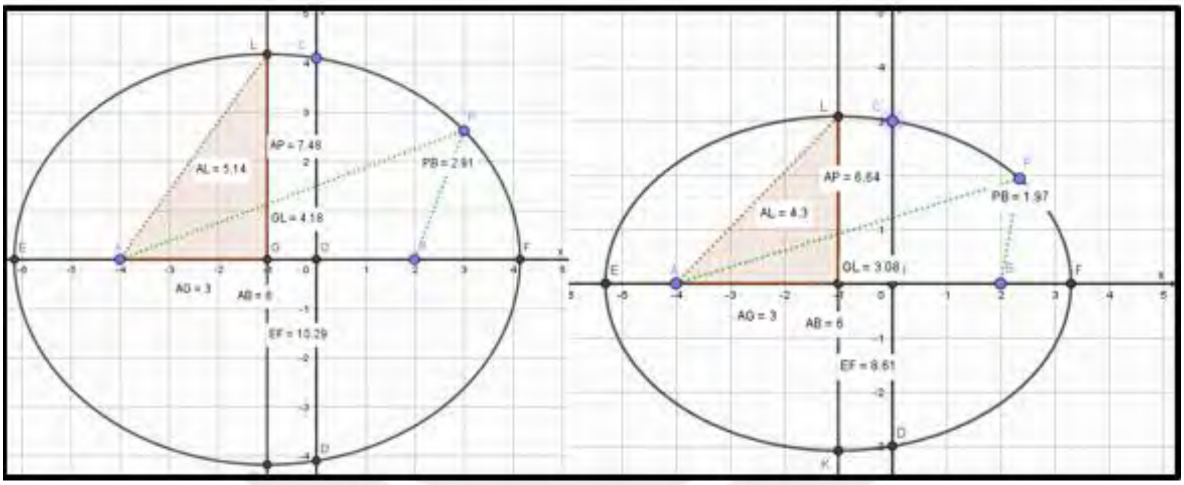


Figura 79. Tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico realizados por la Dupla B, ítem 1a). Actividad 2.

Asimismo, la Dupla B mostró una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al registro de lengua natural al expresar su respuesta en la guía de trabajo, tal como se muestra en la figura 80.

$\overline{AG}$ y $\overline{AB}$ permancen constantantes.
El punto G, al ser el centro de la elipse mantiene
a los focos A y B a la misma distancia
sin importar la variación en ~~la~~ elipse.

Figura 80. Respuesta de la Dupla B al ítem 1a) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 1 b)**, la Dupla B señaló que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del eje focal representado por EF, tal como se espera en el análisis a priori, usando la herramienta *distancia o longitud* del GeoGebra, tal como se muestra en la figura 81.

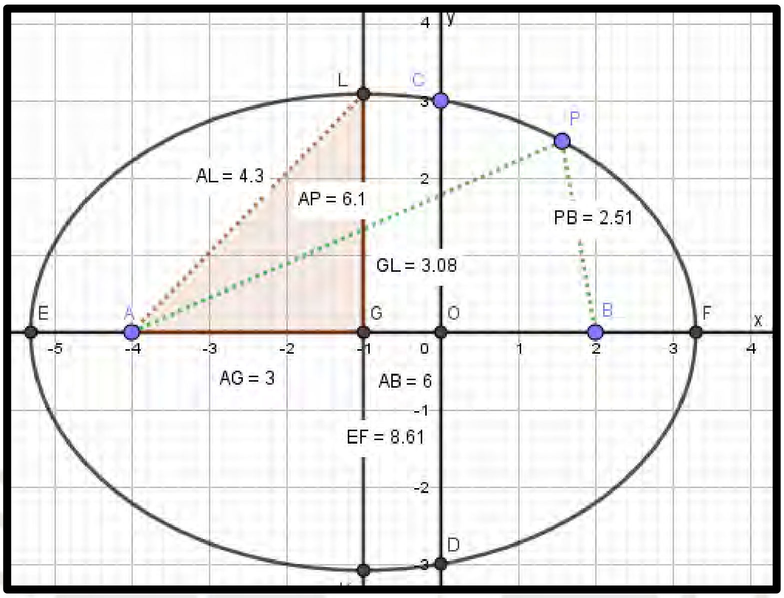


Figura 81. Respuesta de la Dupla B al ítem 1b) de la actividad 2

Esto conlleva a indicar que la Dupla B evidenció tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico (Arrastre del punto representado por C) para obtener nuevas representaciones gráficas de la Elipse, tal como se observa en la figura 82.

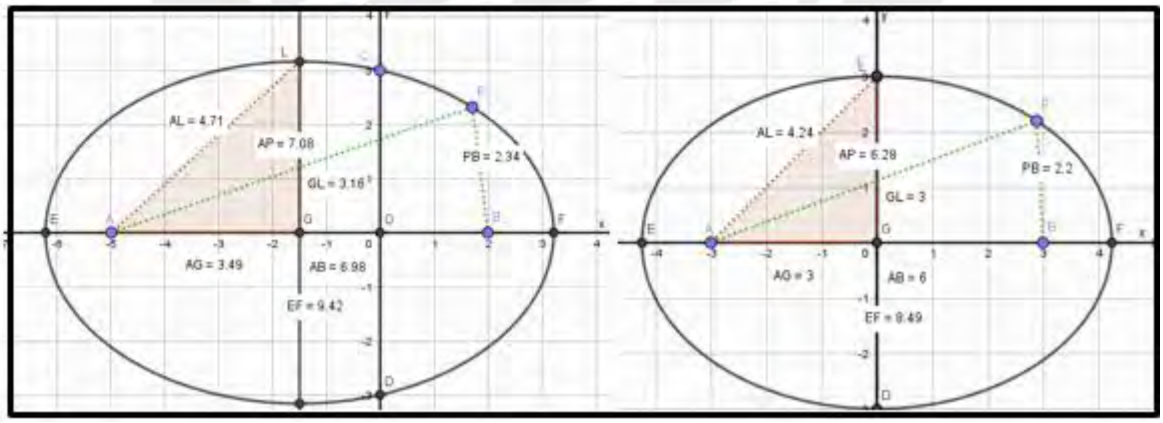


Figura 82. Respuesta de la Dupla B al ítem 1b) de la actividad 2.Guía de trabajo.

También, la Dupla B realizó la conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural, al escribir su respuesta en la guía de trabajo como lo señala el análisis a priori y como se muestra en la figura 83.

$m\overline{AP} + m\overline{BP} = m\overline{EF}$

Siendo EF el eje focal de la elipse, la suma de ambos segmentos, $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, es igual a ésta.

Figura 83. Respuesta de la Dupla B al ítem 2a) de la actividad 2.Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 2 a**), la Dupla B, realizó tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al manipular la variable didáctica (Uno de los focos), al encontrar nuevas representaciones gráficas de la Elipse después de arrastrar uno de los focos, representados por A o B, a nuevas posiciones y la Dupla B señaló, de acuerdo al análisis a priori, que la medida de la longitud del segmento CD permanece constante, aunque los estudiantes no justificaron por qué permanece constante en su respuesta escrita, tal como se observa en la figura 84.

El segmento $\overline{CD}$ mantiene la misma longitud.

Figura 84. Respuesta de la Dupla B al ítem 2a) en la actividad 2.Guía de trabajo

Asimismo, la Dupla B observó que la medida de la longitud del segmento CD no cambia, como se aprecia en su trabajo realizado en el GeoGebra. En efecto, al movilizar la variable didáctica, el punto de la Elipse representado por C, que se encuentra en el eje menor, la Dupla B observó que la medida de la longitud del segmento CD permanece constante, al arrastrar alguno de los focos, tal como se muestra en la figura 85.

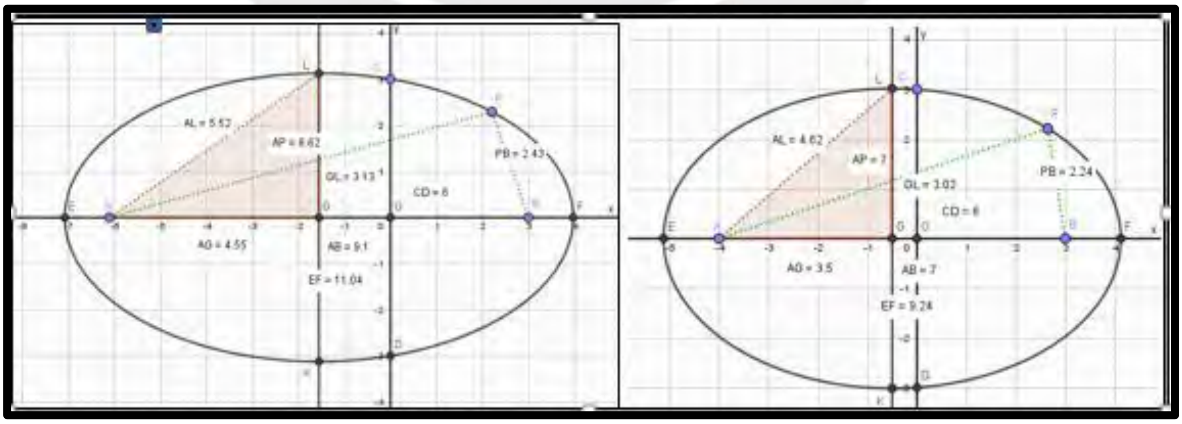


Figura 85. Tratamiento de la representación de la Elipse en el registro gráfico realizado por la Dupla B

Además, en la figura 85, la Dupla B evidenció tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, al obtener varias representaciones gráficas de la cónica.

En cuanto al **ítem 2b)**, la Dupla B realizó tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico (Arrastre de uno de los focos) al obtener diferentes representaciones gráficas de la cónica y los estudiantes señalaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF, de acuerdo al análisis a priori, tal como se muestra en la figura 86 donde se observa que utilizaron la herramienta *distancia o longitud* para realizar su conjetura.

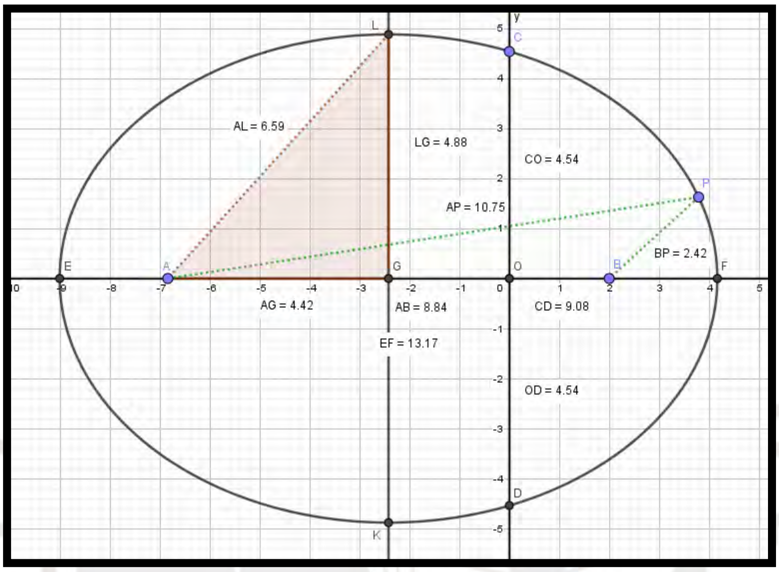


Figura 86. Respuesta Dupla B al ítem 2b) de la actividad 2. Archivo de GeoGebra

Además, la Dupla B evidenció una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al de lengua natural al escribir su respuesta en la guía de trabajo, tal como se muestra en la figura 87.

$m\overline{AP} + m\overline{PB} = m\,EF$

Por más que varíe la longitud del eje focal y de cada uno de los segmentos, la suma mantendrá relación.

Figura 87. Respuesta Dupla B al ítem 2b) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 2c)**, la Dupla B mostró la representación de las medidas de las longitudes de los segmentos AL,AG y GL en el registro gráfico, tal que la medida de la longitud del segmento AL es la hipotenusa del triángulo rectángulo AGL y señaló que la medida de la longitud del segmento AG es la mitad de la medida de la longitud del segmento que une los focos y que la medida de la longitud del segmento GL es la mitad de la medida de longitud del eje menor, resultados obtenidos al usar la herramienta la *distancia o longitud* del GeoGebra tal como se muestra en la figura 88.

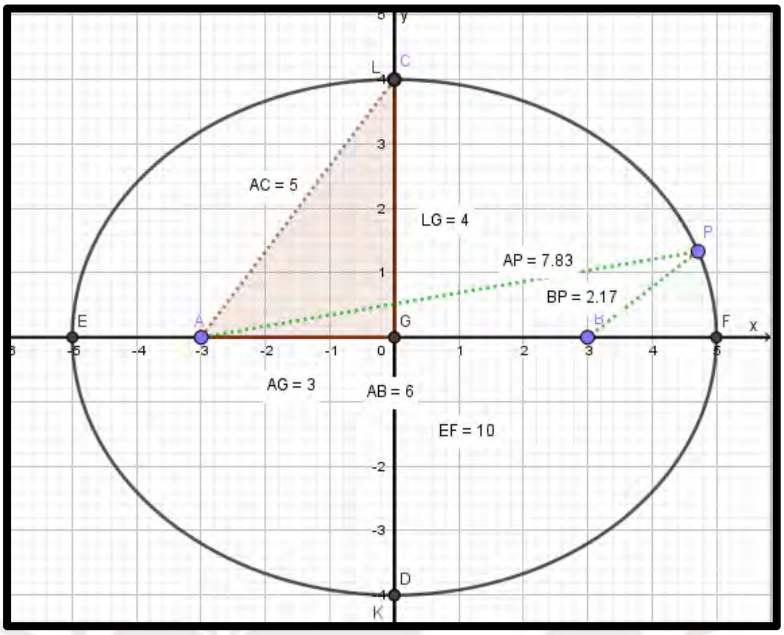


Figura 88. Respuesta de la Dupla B al ítem 2c) de la actividad 2. Archivo de GeoGebra.

En cuanto a la respuesta dada por la Dupla B, se nota un error en la escritura al colocar foco por eje. En consecuencia, se asume que, tal como lo señala el análisis a priori, la Dupla B relacionó la medida de las longitudes de los segmentos LG y AG con la relación pitagórica, tal como se observa en la figura 88. Además, la Dupla B realizó una conversión de la representación simbólica de la relación pitagórica del registro gráfico al de lengua natural, como se ve la respuesta escrita en la guía de trabajo como se refleja en la figura 89.

AL es la hipotenusa del triángulo rectángulo AGL, donde AG es la mitad de las distancias entre los focos y GL es la mitad de la distancia del foco menor

Figura 89. Respuesta de la Dupla B al ítem 2c) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 3**, la Dupla B mostró en la guía de trabajo, a partir de las coordenadas particulares de los focos, los puntos representados por las coordenadas (-4,0) y (4,0) y del punto representado por C de coordenada (0,3), obtenidos de la representación de la Elipse en el registro gráfico, como se observa en la figura 90.

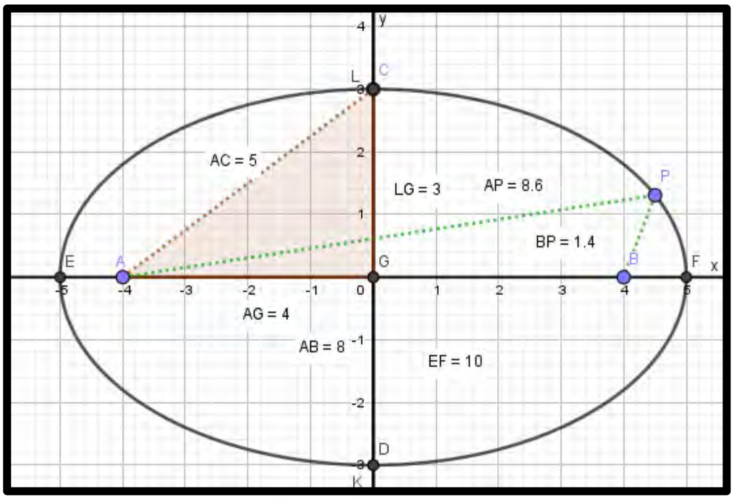


Figura 90. Representación de la Elipse en el registro gráfico por la Dupla B en el ítem 3. Actividad 2.

Luego, la Dupla B realizó las transformaciones con la representación de la cónica al usar el concepto de lugar geométrico de la Elipse y el conocimiento de distancia entre dos puntos para obtener la representación algebraica de la Elipse, tal como lo señala el análisis a priori.

Efectivamente, la Dupla B evidenció una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para llegar a la representación algebraica de la cónica dada por la ecuación algebraica general de segundo grado de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e identificó los valores de las constantes *a* y *b* con las medidas de las longitudes de los segmentos determinados en la indicación 1, tal como se muestra en la figura 91.

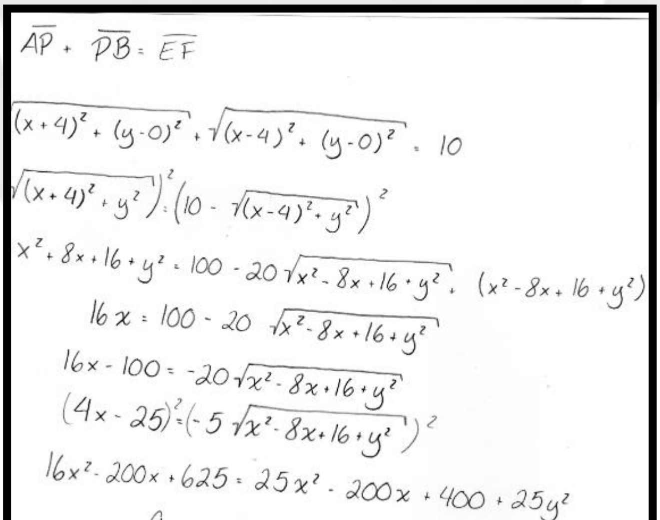


Figura 91. Tratamientos en el registro algebraico realizados por la Dupla B.

En consecuencia, la Dupla B marcó el valor de la constante *a* como el valor de la medida de la longitud de la hipotenusa del triángulo AGL, por lo tanto, es igual a la medida de la longitud del segmento AL, mientras que el valor de la constante *b* es igual a la medida de la longitud del cateto que es igual a la medida de la longitud del segmento LG y se reconoció como la mitad de la medida de la longitud del eje menor, como se muestra en la figura 92

a es la distancia entre un foco y la intersección del eje menor con la elipse.
b es la mitad del eje menor.

Figura 92. Respuesta de la Dupla B al ítem 3, actividad 2 en la guía de trabajo

La Dupla B mostró su respuesta escrita en la guía de trabajo, con lo que queda mostrada la conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, por lo que los estudiantes articularon los registros gráfico y algebraico para comprender la condición geométrica de la Elipse. Igualmente mostraron, en el registro algebraico, una serie de tratamientos de la representación de la Elipse que le permitieron obtener la representación algebraica dada por la ecuación algebraica general de la Elipse.

Asimismo, la Dupla B mostró los tratamientos de la representación de la Elipse realizados en el registro algebraico al manipular la condición geométrica de la cónica, luego de realizar la conversión de la representación de la curva del registro gráfico al algebraico, como se mostró anteriormente. Estos tratamientos de la representación de la Elipse son una serie de transformaciones que le permitió a la Dupla B, por medio de la condición geométrica de la Elipse, cambiar a la representación algebraica dada por la ecuación algebraica cuadrática de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Además, la Dupla B identificó claramente las constantes *a* y *b* de la representación algebraica.

En cuanto al **ítem 4 a)**, la Dupla B realizó tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico, al trasformar la representación algebraica dada por la ecuación general de la Elipse, obtenida en el ítem anterior, en la representación algebraica expresada por la ecuación ordinaria de la Elipse de forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tal como lo señala el análisis a priori y se muestra las transformaciones realizadas en la figura 93.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$b^2 = 9 \qquad a^2 = 25 \qquad 9.25 = 225$$

$$b = 3 \qquad a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Figura 93. Obtención de la representación de la Elipse en el registro algebraico por la Dupla B.

Del mismo modo, la Dupla B reconoció y relacionó el valor de las constantes *a* y *b* con las medidas de las longitudes de los segmentos hallados en la indicación 1, tal como lo señala el análisis a priori y se muestra en la figura 94.

a es la hipotenusa del triangulo rectangulo A⊥G y b es uno de los catetos del mismo.

Figura 94. Respuesta de la Dupla B al ítem 4 a) de la actividad 2. Guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 4 b)**, la Dupla B no enunció la condición geométrica de la Elipse en términos del valor a y dio como respuesta la relación pitagórica, reconociendo que el otro cateto es la mitad de la distancia de los focos, tal como se muestra en la figura 95.

$$b^2 + \left(\text{mitad entre la distancia de los focos}\right)^2 = a^2$$

Figura 95. Respuesta de la Dupla B al ítem 4 b) de la actividad 2. Guía de trabajo.

Se presume que la Dupla B no conjeturó correctamente, según lo que se señala en el análisis a priori, por apresuramiento en dar su respuesta al notar que el tiempo de trabajo se iba terminando.

En consecuencia, la Dupla B evidenció la comprensión del concepto de Elipse al coordinar los registros gráfico y algebraico, como se mostró en primer lugar y luego, para expresar su respuesta, los estudiantes coordinaron los registros algebraicos y lengua natural.

Resultados de la aplicación de la secuencia de actividades

Con respecto a la **actividad 1**, consideramos que las duplas alcanzaron el objetivo de representar en el registro figural, la condición geométrica de la Elipse, cuya definición es*, la suma de cualquier punto de la curva a dos puntos fijos del plano, denominados focos, es una constante e igual a la longitud del eje focal*.

En la actividad 1, las duplas mostraron que la suma de las distancias de un punto P de la Elipse a dos puntos fijos es una constante e igual al radio de la circunferencia, que sirvió para construir el lugar geométrico de la Elipse.

En el **ítem 1**, ambas duplas realizan, en el registro figural, una serie de tratamientos de la representación de la Elipse al manipular las variables didácticas, que consistió en una serie de exploraciones, para representar la Elipse en el registro figural.

Estas exploraciones se realizaron con el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, y fueron una serie de arrastres con las variables didácticas, primero con el punto interior al círculo, representado por C, luego con el centro de la circunferencia representado por A y, finalmente, con un punto de la circunferencia representado por B.

Cabe indicar que en las dos primeras exploraciones, las duplas señalaron que las medidas de las longitudes de los segmentos CD y BD son iguales, pero según el análisis a priori, en las dos primeras exploraciones, se esperaba que observaran el movimiento del punto representado por D, punto diferenciado con otro color.

Se infiere que los resultados hallados diferentes a lo que señala el análisis a priori se pueda explicar porque las duplas no tenían conocimiento sobre lugares geométricos más complejos, como el de las cónicas, aunque ya tenían conocimiento de dos lugares geométricos, como lo son la mediatriz y la circunferencia.

En cambio, en la tercera exploración, el arrastre del punto representado por B en la circunferencia, la Dupla A reconoció la figura de la Elipse al registrar con lápiz y papel que el punto representado por D describe un *ovalo,* mientras que la Dupla B siguió con la congruencia de los segmentos CD y BD.

La Dupla A señaló que el punto representado por D describe un *ovalo.* Se cree que es lo que se esperaba que las duplas lograran alcanzar, según el análisis a priori, y este es una evidencia de la representación de la Elipse en el registro figural; es decir, la Dupla A logró reconocer la figura de la cónica.

En cuanto al **ítem 1a)**, ambas duplas señalaron que las medidas de las longitudes de los segmentos CD, y BD son iguales y solo la Dupla A justifica su respuesta, al indicar que se forma un triángulo isósceles.

Se cree que está afirmación se deba a la propiedad de la mediatriz, en vista que la Dupla A no lo menciona explícitamente, pero lo evidencia al indicar que los lados CD y DB del triángulo CDB son iguales. Además, la Dupla A evidenció su respuesta al usar la herramienta del GeoGebra *distancia o longitud* y, al realizar las medidas de los lados del triángulo CDB, concluyó que la medida de las longitudes de los segmentos CD y DB son iguales y, por lo tanto, relacionó el resultado con la propiedad del triángulo isósceles.

En consecuencia, la Dupla A coordinó los registros figural y de lengua natural que demuestra al escribir su respuesta.

En cuanto al **ítem 1b)**, las duplas determinaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia y ambas duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro figural. En efecto, las duplas usaron el resultado del ítem anterior, que las medidas de las longitudes de los segmentos CD y DB son iguales; es decir, CD = DB, por lo que reemplazaron en la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DB para indicar que es igual a la medida de la longitud del segmento AB e igual al radio de la circunferencia.

Señalamos el aporte a la investigación que realizó la Dupla A en su respuesta del ítem 1b), en vista que conjeturó que si las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC tomaran otros valores, la suma de las medidas de las longitudes de estos segmentos permiten hallar el radio de la circunferencia. Este argumento es la inversa de la condicional inicial, descrita en la pregunta del ítem 1b), por lo que si juntamos los dos resultados, tenemos es una bicondicional.

Este tipo de argumento, no previsto en el análisis a priori, enriquece el trabajo y consideramos un aporte valioso a la investigación, en vista que refuerza la importancia de trabajar con un ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, que les permita a los estudiantes hacer conjeturar, explorar y razonar en torno a un objeto matemático, aún desconocido para ellos.

En cuanto al **ítem 2**, la Dupla A mostró tratamientos de la representación de la Elipse en el registro figural, al manipular la variable didáctica punto interior en el círculo, que le permitió determinar la condición geométrica de la Elipse, mientras que la Dupla B no da cuenta en la guía de trabajo acerca de los tratamientos de la representación de la Elipse realizado en el registro figural, pero creemos que sí lo realiza, en vista que en lenguaje natural mencionó que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia. Por ello, hay evidencia una vez más de una coordinación de registros en ambas duplas, del registro figural al de lengua natural.

En cuanto al **ítem 3**, las Dupla A y B conjeturaron que no importa el valor del radio, variable didáctica, al realizar el arrastre del punto representado por B, en vista que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC sigue siendo igual al radio de la circunferencia, tal como se esperaba en el análisis a priori.

Las duplas no mencionaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es constante, hecho que esperamos encontrar, aunque se piensa que implícitamente lo manifiestan, ya que todos los resultados indicaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia.

En cuanto al **ítem 4**, ambas duplas respondieron según lo esperado por el análisis a priori, al conjeturar que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC es igual al radio de la circunferencia e igual a la medida de la longitud del segmento EF, que resulta de intersectar la Elipse con la recta que pasa por los focos. Además, ambas duplas obtuvieron la representación de la Elipse en el registro figural y coordinaron registros al realizar la conversión de la representación de la Elipse del registro figural al lenguaje natural.

En cuanto al trabajo de las duplas, la Dupla A fue más detallista al registrar con lápiz y papel, escritos y dibujos en la guía de trabajo lo que observaba en la pantalla de la computadora de trabajo, como se pudo apreciar al estudiar los registros de su trabajo con el Camtasia Studio, programa que posibilita grabar las acciones cualquier acontecimiento que suceda alrededor de la pantalla de trabajo, mientras que la Dupla B fue más sucinta con sus observaciones e incluso en su accionar al revisar los registros del Camtasia Studio.

Esto significa que la Dupla A realiza la coordinación de registros con mayor facilidad que la Dupla B, por lo que la comprensión de la condición geométrica de la Elipse será más rápido y mejor en la Dupla A que en la Dupla B, tal como se evidencia en el desarrollo del ítem 4, al señalar la Dupla B que los puntos representados por E y F no se pueden ubicar con precisión en la Elipse, por lo que no se puede encontrar relación entre la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC con la medida de longitud del segmento EF, a pesar de haberlo encontrado.

Con respecto a la **actividad 2**, consideramos que las duplas alcanzaron el objetivo de representar algebraicamente a la Elipse a partir de la representación gráfica de la curva. En ese sentido, creemos que las duplas realizaron una coordinación de registros al lograr la conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para comprender la condición geométrica de la Elipse.

En cuanto al **ítem 1a)**, ambas duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al manipular la variable didáctica, al arrastrar el punto representado por C perteneciente a la Elipse, a nuevas posiciones. Efectivamente, las duplas encontraron que las medidas de las longitudes de los segmentos AG y AB permanecen constantes, resultado esperado según el análisis a priori.

La Dupla A señaló que no varían las medidas de las longitudes de los segmentos AG y AB, porque los puntos representados por A y B no pertenecen a la Elipse, por lo que no mueven, mientras que la Dupla B señaló que el punto representado por G es el centro de la Elipse y los puntos representados por A y B son los focos, por lo que tampoco se mueven, están fijos para cualquier movimiento del punto representado por C, punto de la Elipse.

En cuanto al **ítem 1b)**, las duplas encontraron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del eje focal, tal como se esperaba en el análisis a priori.

Ambas, duplas mostraron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF. Además, las duplas demostraron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico y conversiones de la representación de la cónica del registro gráfico al de lengua natural y mostraron el uso de las herramientas del GeoGebra, *distancia o longitud*, para hacer sus conjeturas.

En cuanto al **ítem 2a)**, las duplas señalaron, de acuerdo con el análisis a priori, que la medida de la longitud del segmento CD no varía cuando se manipula la variable didáctica, al arrastrar uno de los focos.

La Dupla A justificó su conjetura al indicar que la medida de la longitud del segmento CD pertenece al eje y, eje de coordenadas cartesianas, y este no se mueve cuando se arrastra uno de los focos; es decir, las nuevas representaciones gráficas de la Elipse, no altera el sistema de coordenadas cartesianas, mientras que la Dupla B no justificó, en la guía de trabajo, su respuesta, pero se presume que el Software dinámico permitió observar las diferentes representaciones gráficas de la Elipse para así conjeturar que la medida de la longitud del segmento CD no cambia de valor.

Asimismo, se evidencia que ambas duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al obtener las diferentes representaciones gráficas de la cónica. En consecuencia, las duplas coordinaron los registros gráfico y de lengua natural al expresar su respuesta en la guía de trabajo.

En cuanto al **ítem 2b)**, luego de tratamiento de la representación de la Elipse en el registro gráfico, las duplas conjeturaron que la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AP y PB es igual a la medida de la longitud del segmento EF, resultado que comprobaron al usar la herramienta *distancia o longitud* y este resultado está de acuerdo con lo esperado en el análisis a priori. Igualmente, ambas duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro gráfico al obtener diferentes representaciones gráficas de la cónica.

En cuanto al **ítem 2c)**, las duplas al realizar un nuevo tratamiento de la representación de la Elipse en el registro gráfico, señalaron que la medida de la longitud del segmento AL es la hipotenusa del triángulo rectángulo AGL y mostraron que la medida de la longitud del segmento AG es la mitad de la distancia entre los focos y que la medida de la longitud del segmento GL es la mitad del eje menor.

En consecuencia, asumimos, tal como lo señala el análisis a priori, que las duplas relacionaron las medidas de las longitudes de los segmentos representados por LG y AG, con los catetos del triángulo rectángulo AGL, al señalar que cumplen la relación pitagórica expresada por la siguiente relación $LG^2 + AG^2 = AL^2$.

Una vez más, las duplas mostraron coordinación entre el registro gráfico y de lengua natural al expresar, tanto en archivos de GeoGebra como en la guía de trabajo, la relación pitagórica que cumplen las medidas de las longitudes de los segmentos representados por LG, AG y AL.

En cuanto al **ítem 3**, las duplas realizaron en la guía de trabajo, tal como se esperaba en el análisis a priori, las transformaciones de la representación de la Elipse.

A partir de la representación gráfica de la cónica, las coordenadas particulares de los focos y el punto, representado por C, y usando la condición geométrica de la Elipse y el conocimiento de distancia entre dos puntos, obtuvieron la representación algebraica de la Elipse.

En efecto, las duplas realizaron una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para llegar a la representación algebraica dada por la ecuación algebraica general de segundo grado de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e identificaron los valores de las constantes *a* y *b* con las medidas de las longitudes de los segmentos determinados al comienzo de la actividad 2.

Igualmente, ambas duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico para poder llegar a la representación algebraica dada en expresión cuadrática, denominada forma general de la Elipse.

También hay que señalar que las duplas conjeturaron acerca de los valores de las constantes *a* y *b* encontrados de la representación algebraica dada por la ecuación general e identificaron, tal como se esperaba por el análisis a priori, el valor de la constante *a* como la medida de la longitud de la hipotenusa AL del triángulo rectángulo AGL, mientras que el valor de la constante *b* como la medida de la longitud del cateto cuya medida es igual a la medida de la longitud del segmento LG.

A diferencia de resultados anteriores, la Dupla B identificó la medida de la longitud del segmento LG como la mitad de la medida de la longitud del eje menor e igual al valor de la constante *b,* mientras que la Dupla A no mencionó este hecho.

En cuanto al **ítem 4a)**, las duplas realizaron tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico, al transformar la representación algebraica dada por la ecuación general de la Elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, obtenida en el ítem 3, para obtener la representación algebraica dada por la ecuación ordinaria de la Elipse, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tal como se espera en el análisis a priori. Además, ambas duplas reconocieron los valores de las constantes *a* y *b* de la representación algebraica expresada por la ecuación ordinaria de la Elipse, relacionándolos de la siguiente manera: El valor de la constante a = AL, medida de la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo AGL y el valor de la constante b = GL, a la medida de la longitud del cateto del triángulo AGL.

En cuanto al **ítem 4b)**, la Dupla A enunció la condición geométrica de la Elipse en términos del valor de la constante *a* al reconocer que es la medida de la longitud del eje mayor o focal de la

Elipse, tal como lo señala el análisis a priori, mientras que la Dupla B no enunció la condición geométrica de la Elipse en términos del valor a, en vista que se preocupó por la relación pitagórica.

En consecuencia, ambas duplas consiguieron coordinar los registros gráfico y algebraico para comprender la noción de Elipse, en vista que, a partir de la representación gráfica de la cónica y usando la condición geométrica de la Elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, obtuvieron la representación algebraica de la curva.

CONSIDERACIONES FINALES

Según los antecedentes de investigación revisados, con respecto a la problemática de la comprensión del concepto de lugar geométrico de la Elipse, es un hecho que depende de las acciones metodológicas que el profesor utiliza en el aula, ya que pueden facilitar o no el aprendizaje de su condición geométrica por parte de los estudiantes.

Pensamos que, si se presentan actividades bien planificadas y realizadas, estas pueden contribuir para que el estudiante desarrolle capacidades de análisis, visualización e interpretación, las cuales se hacen necesarias para poder comprender la noción de Elipse.

A continuación, presentamos los aspectos que encontramos importantes en la tesis como el marco teórico, la metodología de investigación utilizada, respuesta a la pregunta de investigación, los principales resultados de la parte experimental y nuevos alcances para futuras investigaciones.

Con respecto al marco teórico, consideramos útil e importante utilizar algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en nuestro trabajo para poder comprender el concepto de Elipse. En palabras de Duval, es posible representar un objeto matemático en diversos registros de representación semiótica, porque al poder representarlo se puede desarrollar el pensamiento matemático sobre dicho objeto.

Un objeto matemático es un ente abstracto y la forma de comprenderlo es mediante representaciones semióticas como figuras, gráficos, letras, números, entre otros. Además, en el sentido de Duval, para aprender un concepto matemático se debe coordinar registros de representación semiótica.

En vista de esto, la elaboración de nuestra investigación estuvo centrada en coordinar registros de representación semiótica para la comprensión de la condición geométrica de la Elipse, cuando los estudiantes trabajan una secuencia de actividades mediada por el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra.

También consideramos pertinente realizar nuestra investigación, a nivel secundario, porque en nuestro país hay pocas investigaciones acerca del lugar geométrico de una cónica en ese nivel, que sí las hay de parábola o circunferencia, pero, en cuanto a la Elipse, es casi nula a nivel secundario. Además, el tema se considera importante en la resolución de problemas, en vista que las diferentes representaciones de la Elipse que pueden obtener los estudiantes con diferentes tecnologías permiten construir el conocimiento geométrico.

Con respecto a la metodología de investigación empleada, como lo fue la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), se tomó algunos aspectos y resultó adecuada por su organización para planificar la secuencia de actividades del presente trabajo y fue valiosa para realizar el análisis y contrastar los supuestos esperados con las respuestas de los estudiantes participantes de la investigación.

En nuestro trabajo desarrollamos las cuatro fases que la metodología propone: Análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis posteriori y validación.

Sobre los Análisis preliminares, permitió entender la problemática de los estudiantes de nivel secundario de comprender la noción de Elipse y tener referencias de la importancia de la mediación de un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, que ayudan al estudiante a trabajar en forma dinámica y le permite representar la cónica y encontrar los principales elementos de esta curva.

Se comprobó, en el análisis del libro didáctico que utilizan los estudiantes, que presentan actividades que utilizan tratamientos y conversiones de la representación de la Elipse, aunque se nota una ligera inclinación del texto en poner más énfasis en la parte analítica que la gráfica, la cual puede reflejar el modo en que un profesor conduce sus clases.

La secuencia de actividades planteadas en la experimentación fueron diseñadas para observar y analizar la coordinación entre el registro figural y lengua natural y el registro gráfico y algebraico. Además, los estudiantes realizaron las construcciones geométricas relacionadas con la Elipse, con la mediación del Software de Geometría Dinámica, GeoGebra.

En ese sentido, en la secuencia de actividades se les pidió a los estudiantes que realizaran la representación de la Elipse en el registro figural para comprender la condición geométrica de la cónica. Luego, los estudiantes realizaron una representación verbal de la Elipse (registro lengua natural) y después representaron la cónica en el registro gráfico, en primera instancia, con el fin de conocer sus características y sus elementos para terminar de representarla en el registro algebraico por medio de una ecuación.

Asimismo, la intervención del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, fue importante como herramienta dinámica en la construcción de la condición geométrica de la Elipse, porque los estudiantes pudieron observar, reconocer, movilizar propiedades y elementos geométricos para poder realizar conjeturas que le permitieron construir el objeto matemático en sus diferentes representaciones.

En cuanto a los resultados de la investigación:

Con respecto a la pregunta de investigación: ¿Qué registros de representación semiótica coordinan estudiantes de quinto de secundaria en una secuencia de actividades sobre la Elipse mediada por el GeoGebra?

Logramos responder a la pregunta de investigación, en vista que los estudiantes coordinaron los registros figural y de lengua natural para comprender la condición geométrica de la Elipse, mientras que los estudiantes también coordinaron los registros gráfico y algebraico que le permitieron representar algebraicamente la Elipse por medio de los elementos y características de la cónica obtenidos de la representación gráfica de la curva-

En cuanto al cumplimiento de nuestro objetivo general: Analizar la coordinación entre registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria en una secuencia didáctica sobre la Elipse, mediada por el GeoGebra.

Se logró alcanzar el objetivo general, porque, en el desarrollo de la secuencia de actividades, los estudiantes identificaron los registros de representación semiótica: lengua natural, figural, gráfico y algebraico. Por lo tanto, afirmamos que los estudiantes serán capaces de reconocer la Elipse en sus diferentes representaciones. Es decir, por la definición, por el diseño de su curva, por la forma canónica o por la ecuación general de segundo grado.

También los estudiantes realizaron, en cada registro, tratamientos para luego hacer las conversiones entre los diferentes registros de representación.

Con respecto a los objetivos específicos que permitieron alcanzar el objetivo general:

- Identificar los diferentes registros de representación semiótica de la Elipse que movilizan estudiantes de quinto de secundaria.
- Identificar la coordinación entre los registros figural, gráfico y algebraico que realizan estudiantes de quinto de secundaria.

Los estudiantes realizaron los diferentes registros de representación semiótica de la representación de la Elipse al desarrollar la secuencia de actividades.

En la primera actividad, obtuvieron el registro figural de la cónica que les permitieron comprender la condición geométrica de la curva, mientras que en la segunda actividad, los estudiantes obtuvieron la representación de la Elipse en el registro algebraico por medio de la representación de la cónica en el registro gráfico, por el cual obtuvieron los elementos y características de la Elipse.

Por lo tanto, se identificaron los registros figural, gráfico y algebraico de la representación de la Elipse al desarrollar la secuencia de actividades.

Hemos observado que los estudiantes lograron una mayor comprensión de la condición geométrica de la Elipse cuando coordinan las construcciones por medio del registro de figural al de lengua natural y del registro gráfico al algebraico.
Se ha comprobado también que los estudiantes lograron realizar las conversiones de la representación de la Elipse del registro figural al de lengua natural, mientras que hubo cierta dificultad en la conversión de la representación de la cónica del registro gráfico con el registro algebraico.

Se logró además que nuestros estudiantes representaran la condición geométrica de la Elipse, en diferentes registros de representación semiótica, y hacer que realizaran los tratamientos de la representación de la cónica en el registro algebraico en la segunda actividad y conversiones de la representación de la curva en registros figural y de lengua natural en la primera actividad y en registros gráfico y algebraico en la segunda actividad.

Con respecto a los alcances en investigaciones futuras, nuestras recomendaciones son:

Creemos necesario motivar a los estudiantes de educación secundaria a utilizar el Software de Geometría Dinámica para comprender mejor el concepto de lugar geométrico, en especial de las cónicas. Sugerimos que los profesores de educación secundaria dejen la enseñanza de la clase tradicional, centrada en el profesor, para la construcción del conocimiento matemático y utilicen las tecnologías de la información.

Se propone investigar sobre la noción de Elipse, como lugar geométrico, en problemas contextualizados mediados con un ambiente de representaciones dinámicas, Geogebra, en una formación de profesores de Matemáticas.

Creemos que una secuencia de actividades bien elaborada y planificada, utilizando los recursos del ambiente de representaciones dinámicas, como lo es GeoGebra, facilita el acceso a otros tipos de registros, como el registro figural dinámico, que puede ayudar significativamente a la mejora de la enseñanza de las Matemáticas.

Se sugiere hacer un estudio más detallado sobre las muchas aplicaciones de la Elipse en otras áreas del conocimiento, como el estudio de las órbitas elíptica de los planetas en el sistema solar, por ejemplo, donde se considera al Sol en uno de los focos de la trayectoria elíptica de la tierra. También se puede considerar la importancia de estudiar la propiedad de la reflexión de la Elipse por su importancia en la medicina, como por ejemplo el uso del litotriptor, que es equipo médico que sirve para eliminar los cálculos del organismo y las aplicaciones en el diseño en Arquitectura con las aplicaciones en maquetas, diseños, arcos semielípticos, entre otros.

Finalmente, sugerimos realizar una investigación acerca de los textos escolares o universitarios relacionados con la enseñanza de las cónicas, en particular de la Elipse, para analizar las perspectivas de una acción del docente en cuanto a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que consideramos importante para la comprensión del concepto matemático de Elipse a nivel secundario, por la facilidad de poder tener variar representaciones del objeto matemático.

REFERENCIAS

Abboud, E. (2015). Algorithms for drawing ellipses using GeoGebra. *Math. Comput. Educ*. *49*, (3), 183-193. Recuperado de: https://search-proquest-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/docview/1731202841?accountid=28391

Almouloud, S. A., Koné, C., & Sangaré, M. S. (2014). Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali. International *Journal for Research in Mathematics Education*, °*4*(3), 2-28. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Saddo_Ag_Almouloud/publication/275648839

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de: https://es.slideshare.net/349juan/artigue-douady-1995-ingenieria

Bonilla, D., & Parraguez, M. (2013*). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 617-624). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4094/1/BonillaLaelipseALME2013.pdf

Borba, M. C.; Araújo, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

Cortes, J., & Soto, H. (2012). The Use of Concrete Artifacts in Analytic Geometry: the Ellipse Experience. *Journal of Research in Mathematics Education, 1*(2), 159-193. doi: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.09

Dijksterhuis, F. J. (2011). Moving around the ellipse. Conic sections in Leiden, 1620-1660. In S. Dupré, & C. Lüthy (Eds.), Silent messengers: the circulation of material objects of knowledge in the early modern Low Countries (pp. 89-124). (Low Countries studies on the circulation of natural knowledge; No. vol. 1). Berlin: LIT

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. Basic Issues for Learning. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (Myriam Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.Recuperado de: http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 287-315. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10758-014-9213-9

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Gèometre II Plus*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7363

León., J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5652

Ljajko, E., & Ibro, V. (2013). Development of Ideas in a GeoGebra-Aided Mathematics Instruction. *Online Submission*, *3*(3), 1-7. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544150.pdf

Lehmann, Ch. (2003). *Geometría Analítica*. México D.F: Editorial Limusa.

Mosquera, L. (2013). *Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa orientada a que los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Federico Sierra Arango, del municipio de Bello, aprendan significativamente el concepto de elipse en R^2*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Medellín, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/12629/1/43912065.2014.pdf

National Council of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles and standards for mathematics education* Recuperado de: http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Geometry/

Perú, Ministerio de Educación (2017). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/194/1/JC0701.pdf

Santa, Z., & Jaramillo, C. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *1*(41), 45-60. Recuperado de: http://revistavirtual.unc.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/464/986

Santillana (2013). *Hipervínculos 5 Matemática*. Perú. Editorial Santillana S.A.

Santos, J. (2014). *Um diagnóstico da aprendizagem da cônica elipse no ensino médio*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo. Programa de pós-graduação em Educação Matemática. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/pgsskrotondissertacoes/35e95b2c318608c9a17823019ed690a0.pdf

Salazar, J. V. F., & Ríos, J. C. L. (2016). Génesis instrumental: un estudio de la instrumentalización de la condición geométrica de la elipse. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *10*(2), 23-41. Recuperado de: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/41478

Silva. N. (2013). *Cônicas e suas diferentes representações. (Dissertação em Matematicas)* Recuperado de: http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/conicas-e-suas-diferentes-representa%c3%87%c3%95es.pdf

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012) *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo*. Santa Fe. Colombia. Cengage Learning.

ANEXOS

Actividad 1

Nombres y apellidos: ____

1. Abra el archivo ACT1.ggb y explore la construcción.

Sugerencia: arrastre el punto interior C dentro del círculo; el centro de la circunferencia con la condición que el punto C este dentro del círculo y; arrastre el punto B. Anote cada una de sus observaciones:

En base a lo observado en la exploración, responda las siguientes preguntas y justifique matemáticamente sus respuestas según sea el caso:

a) ¿Qué relación tienen los segmentos CD y BD?

b) ¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia?

2. Arrastre el punto interior C a otra posición interior en el círculo, active el rastro del punto D, luego arrastre el punto B. Repita varias veces esta exploración. (sugerencia: desactive el rastro cuando desea cambiar la posición del punto C, luego actívelo como en la exploración anterior).

En base a lo observado *¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover el punto interior C? Explique.*

3. Abra el archivo ACT1_preg_3.ggb y explore la construcción.

Cambie el valor del radio con la condición que el punto C sea interior al círculo, y arrastre el punto B y vuelva explorar la construcción realizada varias veces. En base a lo observado *¿Qué puedes concluir acerca de la suma de los segmentos AD y DC al variar el radio de la circunferencia?* Justifique su respuesta.

4. Utilice la herramienta  del Geogebra y construya la Elipse por los puntos A, C y D y determine la longitud del segmento EF que resulta de intersectar la recta que pasa por A y C con la Elipse. En base a ello, *¿Qué relación se puede establecer con la suma de los segmentos AD y DC y la longitud del segmento EF al mover el punto C, luego el punto A? y si varía el radio?*

Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT1.

Actividad 2

Nombres y apellidos: ____

Abra el archivo ACT2.ggb realice lo siguiente:

1. Con la herramienta  mida los segmentos: EF, AB, AP, BP, AG y LG, luego explore la construcción, para ello arrastre el punto C y observa que sucede con la medida de los segmentos y responda:
   a) ¿Qué segmento permanece constante? Justifique matemáticamente.
   b) ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB? Explique detalladamente.
2. Explore la construcción moviendo el punto A o B. y responda, en cada caso, las explicando sus procedimientos:
   a) ¿Qué segmento mantiene la misma longitud?
   b) ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB?
   c) ¿Encuentra alguna relación en la medida del segmento AL?
3. Arrastre los puntos A y B de tal forma que los ubique en (-4; 0) y (4; 0) respectivamente y, C en (0; 3), luego asuma un punto P genérico (x; y) y utilice la condición geométrica de la Elipse para determinar la ecuación algebraica de la Elipse de la forma cuadrática $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. En seguida responda la siguiente pregunta: *¿Qué valores de los hallados en la indicación corresponden a los coeficientes a y b, determinados en la ecuación cuadrática?*
4. Con la ecuación algebraica obtenida en el paso anterior, exprésala de la forma estándar o canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Responda la siguiente pregunta:
   a) ¿Qué relación tienen las constantes a y b con la medida de alguno de los segmentos hallados en la indicación 1?

b) Exprese la condición geométrica de la Elipse en términos de una de estas constantes.

Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT2.

Ficha de Observación 1

Fecha:…………….

Nombres y apellidos del observador:…………………………………………………………

Nombre de los estudiantes de la dupla observada:……………………………………………

Tiempo de observación:………………………………………………………………....

1. Describa las acciones que realiza la dupla de manera secuencial durante el desarrollo de la actividad.

2. Centrarse especialmente en las acciones en las que la dupla interviene caracterizando y mencionando los elementos de las representaciones de la trayectoria del punto D.

3. Detenerse especialmente en las en las acciones que sigue la dupla al encontrar la suma de segmentos AD y DC al realizar las representaciones de la trayectoria del punto D.

4. Detallar las dificultades observadas en las acciones de la dupla durante la actividad.

5. Anote los aspectos relevantes de su observación.

Gracias.

Ficha de Observación 2

Fecha:…………….

Nombres y apellidos del observador:………………………………………………………

Nombre de los estudiantes de la dupla observada:…………………………………………

Tiempo de observación:………………………………………………………………....

1. Describa las acciones que realiza la dupla de manera secuencial durante el desarrollo de la actividad.

2. Centrarse especialmente en las acciones en las que la dupla interviene caracterizando y mencionando los elementos de las representaciones de la Elipse.

3. Detenerse especialmente en las en las acciones que sigue la dupla al encontrar la suma de segmentos AP y PB al realizar las representaciones de la Elipse.

4. Detalle las acciones de la dupla para obtener la ecuación general cuadrática de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

5. Detalle las acciones de la dupla para obtener la ecuación cuadrática de la forma ordinaria, canónica o estándar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6. Detallar las dificultades observadas en las acciones de la dupla durante la actividad.

7. Anote los aspectos relevantes de su observación.

Gracias.