

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



Superficies mínimas de traslación en el grupo de Heisenberg

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en
Matemáticas que presenta:

José Carlos Manuel Sotomayor Ponte

Asesor:

Christiam Bernardo Figueroa Serrudo

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Christiam Figueroa Serrudo, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado:

Superficies mínimas de traslación en el grupo de Heisenberg ,
del autor:


José Carlos Sotomayor,

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 18/08/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 20 de agosto de 2025

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Figueroa Serrudo Christiam Bernardo Paterno Materno, Nombre1 Nombre 2	
DNI:06443602	Firma 
ORCID: 0000-0003-3587-9273	

Resumen

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable que también tiene cualidad de grupo, y su operación producto y el tomar inversa respetan la estructura diferenciable. El prototipo más simple de variedad es el espacio euclidiano, y por tanto es más que conocido; sin embargo, si cambiamos la operación rutinaria, la estructura geométrica que le otorga a la variedad es diferente a la ya conocida. Este nuevo espacio en el que trabajaremos es conocido como el Grupo de Heisenberg. En esta variedad, estudiaremos una clase particular de superficies mínimas.

Dividiremos nuestro estudio en tres partes. En la primera parte construiremos el ya conocido Grupo de Heisenberg a partir de la motivación de generalizar el espacio euclidiano. Además, trabajaremos la geometría heredada por los campos invariantes izquierda que definiremos. En la segunda parte estudiaremos las superficies en el grupo de Heisenberg, lo que involucra definir y ejemplificar algunas nociones básicas. Además, se darán los primeros ejemplos de superficies mínimas en este espacio. En la tercera parte abordaremos las llamadas superficies mínimas de traslación. Esta clase de superficies nacen de la motivación por replicar el estudio realizado por Scherk en el espacio euclidiano.

Índice general

Introducción	1
1. El grupo de Heisenberg H_3	2
1.1. Un poco de álgebras y grupos de Lie	2
1.2. H_3 como grupo de Lie	6
1.3. La geometría de H_3	7
1.4. El grupo de isometrías de H_3	11
1.5. Las geodésicas de H_3	15
2. Superficies en H_3	18
2.1. Geometría de las superficies	18
2.2. Superficies umbólicas en H_3	23
2.3. Superficies mínimas en H_3	28
2.3.1. Gráficos mínimos	28
2.3.2. Superficies regladas mínimas	29
3. Superficies mínimas de traslación en H_3	35
3.1. Superficies mínimas de traslación en \mathbb{R}^3	35
3.2. Superficies mínimas de traslación en el grupo de Heisenberg	37
3.2.1. Superficies de tipo 1	38
3.2.2. Superficies de tipo 2	41
3.2.3. Superficies de tipo 3	44
3.2.4. Superficies de tipo 4	45
3.2.5. Superficies de tipo 5	46
3.2.6. Superficies de tipo 6	49
3.2.7. Casos especiales	51
3.3. Superficies mínimas de traslación en otras geometrías de Thurston	56
3.3.1. En $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	57
3.3.2. En Sol_3	58
3.3.3. En \mathbb{H}^3	60
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de geodésicas en H_3 17



Introducción

Aventurarnos en la geometría de las superficies mínimas es trabajar sobre superficies que localmente minimizan el área. Ello involucra, en general, resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Cuando trabajamos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , los ejemplos inmediatos de superficies mínimas están dados por los planos. Posteriormente, gracias a la fórmula de representación de Weirstrass, podemos describir muchas de sus superficies mínimas. Como resultado tenemos una extensa compilación de ejemplos y propiedades en este caso euclídeo.

Con el propósito de encontrar más ejemplos de superficies mínimas, se impusieron ciertas condiciones adicionales y nos topamos con las superficies mínimas de traslación. Gracias a Scherk, tenemos incluso una caracterización de estas superficies mínimas en el caso euclidiano. Puesto que \mathbb{R}^3 tiene también estructura de grupo de Lie, es natural definir y estudiar este tipo de superficies sobre otros grupos de Lie.

La finalidad del presente trabajo es clasificar las superficies mínimas de traslación en un grupo de Lie específico, que en los últimos años ha ganado popularidad: el grupo de Heisenberg, una de las ocho geometrías descritas por Thurston para modelar las variedades de dimensión 3.

Capítulo 1

El grupo de Heisenberg H_3

El grupo de Heisenberg es un grupo de Lie de dimensión 3; es decir, tiene tanto estructura de variedad diferenciable (de dimensión 3) como una estructura de grupo, cuya operación y el tomar inversa tienen buen comportamiento con la estructura diferenciable designada.

En este capítulo estudiaremos la geometría del grupo de Heisenberg. La referencia principal para las secciones 2 y 3 es [3], y para las últimas secciones es [4].

1.1. Un poco de álgebras y grupos de Lie

Para entender mejor la construcción del grupo de Heisenberg, primero veamos un poco de la teoría de álgebras de Lie sobre \mathbb{R} .

Llamamos **álgebra de Lie** a un espacio vectorial (real) V , junto con una operación binaria $[\ , \]$ bilineal y antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0, \quad \forall u, v, w \in V.$$

Llamamos **corchete de Lie** a dicha operación.

El siguiente ejemplo muestra que siempre podemos dar estructura de álgebra de Lie a cualquier espacio vectorial.

Ejemplo 1.1. Sea V un espacio vectorial. Definimos la operación

$$\begin{aligned} [\ , \] : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Se comprueba inmediatamente que $(V, [\ , \])$ es un álgebra de Lie.

También podemos dar una estructura de álgebra de Lie al espacio de matrices gracias al conmutador del producto de matrices, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea \mathcal{M}_n el espacio vectorial de las matrices de orden n . Definimos la operación conmutador:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n &\longrightarrow \mathcal{M}_n \\ (A, B) &\longmapsto AB - BA. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $[\cdot, \cdot]$ es bilineal y antisimétrica. Además, con un cálculo largo pero directo se comprueba que se cumple la identidad de Jacobi. De esta forma, $(\mathcal{M}_n, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie.

Diremos que un álgebra de Lie es **k -nilpotente** o **nilpotente de índice k** , con $k \geq 1$, cuando

$$[[\cdots [[v_0, v_1], \cdots], v_{k-1}], v_k] = 0, \quad \forall v_0, v_1, \dots, v_k \in V,$$

y k es la mínima cantidad de composiciones requeridas para que se cumpla la propiedad de arriba.

Tenemos, entonces, que nuestro primer ejemplo trata de un álgebra de Lie nilpotente de índice 1, llamado también trivial o conmutativo. De hecho, es claro que es la única estructura 1-nilpotente para cualquier espacio vectorial V . En particular, tenemos un álgebra de Lie trivial de dimensión 3 para $V = \mathbb{R}^3$.

El siguiente paso lógico sería determinar las álgebras de Lie nilpotentes de índice 2 en dimensión 3. El siguiente lema será crucial para nuestro objetivo de caracterizar tales álgebras.

Lema 1.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión 3. Si $(V, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie 2-nilpotente entonces existe una base $\{u, v, w\}$ de V tal que*

$$[u, v] = w, \quad [u, w] = 0, \quad [v, w] = 0.$$

Demostración. Por la condición de nilpotencia, existe $v \in V$ no nulo tal que el operador

$$\begin{aligned} T_v : V &\longrightarrow V \\ v' &\longmapsto [v', v] \end{aligned}$$

es nilpotente de índice 2. Luego, existe $u \in V$ tal que $T_v(u)$ es no nulo. Llamemos $w = T_v(u)$ y tomemos la combinación lineal nula

$$au + bv + cw = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Aplicamos el operador T_v a la expresión y obtenemos $aw = 0$, lo que implica que $a = 0$. Luego, reducimos la expresión a

$$bv + cw = 0.$$

Multiplicamos con el corchete de Lie por u a la izquierda, con lo que obtenemos

$$b[u, v] + c[u, [u, v]] = 0.$$

Así, $bw = b[u, v] = 0$, lo que implica que $b = 0$, por lo que también $c = 0$. Por lo tanto, $\{u, v, w\}$ es una base de V que cumple lo solicitado. \square

Decimos que un isomorfismo lineal $T: (V, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (V', [\cdot, \cdot]')$ es un **isomorfismo de álgebras de Lie** si respeta la operación del corchete de lie; es decir,

$$T([u, v]) = [Tu, Tv]', \quad \forall u, v \in V.$$

Por otro lado, decimos que un subespacio $(U, [\cdot, \cdot])$ de un espacio vectorial $(V, [\cdot, \cdot])$ es un **subálgebra de Lie** si es cerrado por la operación $[\cdot, \cdot]$; es decir, $[u, v] \in U$ para todo $u, v \in U$.

Consideremos el subespacio

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

del espacio vectorial \mathcal{M}_3 . Es claro que \mathfrak{h}_3 es un subálgebra de Lie del espacio de matrices con la operación conmutador del ejemplo 1.2. En particular, si definimos las matrices en \mathfrak{h}_3

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = 0, \quad [E_2, E_3] = 0.$$

De esta forma, tenemos la siguiente caracterización para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 3.

Proposición 1.4. *Toda álgebra de Lie 2-nilpotente es isomorfa a $(\mathfrak{h}_3, [\cdot, \cdot])$, donde el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador del producto de matrices.*

Demostración. Sea $(V, [\cdot, \cdot]_V)$ un álgebra de Lie 2-nilpotente y $\{u, v, w\}$ una base como en el lema anterior. Llamamos $T: \mathfrak{h}_3 \rightarrow V$ al isomorfismo lineal que actúa sobre la base canónica como

$$\begin{cases} E_1 \mapsto u, \\ E_2 \mapsto v, \\ E_3 \mapsto w. \end{cases}$$

Para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tenemos que $T([E_i, E_j]) = [T(E_i), T(E_j)]_V$. Claramente esta propiedad se extiende a todo \mathfrak{h}_3 , y hace que T sea un isomorfismo de álgebras de Lie. \square

En general, por el teorema de representación de Ado (ver [1], y [10] para una prueba en español), podemos expresar cualquier álgebra de Lie de dimensión n como un álgebra de Lie en el espacio de matrices cuadradas \mathcal{M}_n con el conmutador de matrices como corchete de Lie.

El vínculo que nos dirige de un álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathcal{M}_n$ a su grupo de Lie G (con el producto de matrices como operación de grupo) es la aplicación exponencial,

$$\begin{aligned} \exp: \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ A &\longmapsto e^A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \end{aligned}$$

que se vuelve un difeomorfismo global cuando tratamos álgebras de Lie nilpotentes (ver [6]). En nuestro caso, como trabajamos con un álgebra de Lie 2-nilpotente, la aplicación exponencial $exp: \mathfrak{h}_3 \rightarrow H_3$, que relaciona \mathfrak{h}_3 con su grupo de Lie H_3 , solo tiene 3 sumandos: $A \mapsto e^A = I + A + \frac{A^2}{2}$, donde I es la matriz identidad. Por lo tanto, tenemos que exp queda expresada como

$$\begin{aligned} exp: \mathfrak{h}_3 &\longrightarrow H_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilicemos este hecho para identificar H_3 con \mathbb{R}^3 de tal forma que se conserve la estructura diferenciable y de grupo. Para ello, debemos definir una operación de grupos adecuada en \mathbb{R}^3 . Consideremos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow H_3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inducimos en \mathbb{R}^3 una operación $*$ tal que φ sea también un homomorfismo de grupos; es decir,

$$\varphi((x, y, z) * (x', y', z')) = \varphi(x, y, z)\varphi(x', y', z').$$

Como

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z)\varphi(x', y', z') &= \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' & z' + \frac{x'y'}{2} \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x+x' & z+z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (x, y, z) * (x', y', z') &= \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x+x' & z+z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \\ 0 & 1 & y+y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(x+x', y+y', z+z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right). \end{aligned}$$

Con ello, hemos justificado la operación de grupo en \mathbb{R}^3 , asociado a un álgebra de Lie 2 nilpotente (único salvo isomorfismo), que utilizaremos en las siguientes secciones.

1.2. H_3 como grupo de Lie

Definimos el **grupo de Heisenberg** H_3 (sobre \mathbb{R}) como la variedad diferenciable \mathbb{R}^3 con la operación de grupo

$$\begin{aligned} * : H_3 \times H_3 &\longrightarrow H_3 \\ ((x, y, z), (x', y', z')) &\longmapsto \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right). \end{aligned}$$

Podemos verificar inmediatamente que en efecto $(H_3, *)$ cumple la propiedad asociativa. Además se cumple que

- su elemento identidad es $0_{H_3} = (0, 0, 0)$,
- dado $(x, y, z) \in H_3$, su elemento inverso es $(x, y, z)^{-1} = (-x, -y, -z)$.

Observamos también que la aplicación

$$\begin{aligned} H_3 \times H_3 &\longrightarrow H_3 \\ (p, q) &\longmapsto p * q^{-1} \end{aligned}$$

es C^∞ . Esto muestra que tanto la operación producto y el tomar inversa son diferenciables, por lo tanto el grupo de Heisenberg es un grupo de Lie.

Topológicamente, nuestro grupo es la variedad euclidiana \mathbb{R}^3 , por lo que H_3 es simplemente conexo.

Debido a la estructura de grupo de Lie, podemos definir la siguiente aplicación diferenciable, que además nos ayudará a construir una estructura riemanniana para H_3 . Fijemos $p \in H_3$. La aplicación

$$\begin{aligned} L_p : H_3 &\longrightarrow H_3 \\ q &\longmapsto p * q \end{aligned}$$

es claramente diferenciable y, por construcción, también lo es su aplicación inversa $L_{p^{-1}}$. Por lo tanto es un difeomorfismo, y si damos coordenadas $p = (x, y, z)$, entonces para todo $q \in H_3$ se tiene

$$\begin{aligned} d(L_p)_q : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La aplicación L_p es llamada **traslación por izquierda**. Podemos definir de forma análoga las traslaciones por derecha

$$\begin{aligned} R_p : H_3 &\longrightarrow H_3 \\ q &\longmapsto q * p, \end{aligned}$$

las cuales también son difeomorfismos. Cabe recalcar que H_3 no es abeliano, por lo que en general no tenemos la igualdad $L_p = R_p$.

A partir de las traslaciones por izquierda definiremos una métrica riemanniana en H_3 .

1.3. La geometría de H_3

Para todo grupo de Lie G : si ya tenemos un producto interno en $T_e G$, donde e es la identidad de G , podemos inducir una métrica riemanniana en todo el grupo mediante las traslaciones por izquierda. Procederemos en el caso particular que nos interesa: el grupo de Heisenberg.

Sea $p \in H_3$. Definimos naturalmente en $T_p H_3$ el producto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p H_3 \times T_p H_3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \left\langle (dL_{p^{-1}})_p(u), (dL_{p^{-1}})_p(v) \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^3 \simeq T_0 \mathbb{R}^3$; es decir, $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como las traslaciones por izquierda existen para todo $p \in H_3$, entonces esta construcción dota a H_3 de una métrica riemanniana. Además, por la definición de esta métrica, las traslaciones por izquierda son isometrías.

Si $p = (x, y, z) \in H_3$, en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3 \simeq T_0 H_3$, también representada como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ tiene la siguiente representación matricial:

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

y como tensor queda descrito como

$$g(x, y, z) = \sum_{i,j \in \{1,2,3\}} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

donde g_{ij} son las entradas de la matriz g ; es decir,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= \left(1 + \frac{y^2}{4}\right) dx \otimes dx - \frac{xy}{4} dx \otimes dy + \frac{y}{2} dx \otimes dz \\ &\quad - \frac{xy}{4} dy \otimes dx + \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dy \otimes dy - \frac{x}{2} dy \otimes dz \\ &\quad + \frac{y}{2} dz \otimes dx - \frac{x}{2} dz \otimes dy + dz \otimes dz. \end{aligned}$$

Además, nuestra métrica recién definida es por construcción una métrica invariante izquierda; es decir,

$$\langle u, v \rangle_q = \langle d(L_p)_q(u), d(L_p)_q(v) \rangle_{L_p(q)}, \quad \forall p, q \in H_3, \quad \forall u, v \in T_q H_3.$$

Para simplificar la expresión tensorial de la métrica, usaremos la notación simétrica para el producto tensorial:

$$f_1 f_2 = \frac{f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1}{2},$$

donde f_1 y f_2 son formas lineales cualesquiera. Esta notación tiene la bondad de ser, valga la redundancia, simétrica: $f_1 f_2 = f_2 f_1$. De esta forma, podemos expresar g de forma más compacta.

Nuestro análisis de esta métrica queda resumido en la siguiente proposición.

Proposición 1.5 (Métrica en H_3). *El grupo de Heisenberg tiene la métrica riemanniana*

$$g(x, y, z) = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{1}{2}(ydx - xdy) \right)^2,$$

la cual es invariante por izquierda.

Demostración. La forma de g solo es una reorganización de lo expresado líneas arriba, utilizando la notación simétrica. \square

El siguiente paso natural para asentar las bases de la geometría riemanniana en H_3 es equiparla con la conexión riemanniana; es decir, una conexión afín, simétrica y compatible con la métrica. Para ello construiremos un **referencial** en H_3 ; es decir, un sistema de campos locales que forman una base de cada espacio tangente $T_p H_3$.

Sea $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \Big|_0 \equiv \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $T_0 H_3 \simeq \mathbb{R}^3$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ definimos el campo $E^i \in \chi(M)$ tal que

$$E_p^i = d(L_p)_0(e_i), \quad \forall p \in H_3.$$

Luego, para cada $p = (x, y, z)$ evaluamos en la base canónica el operador de (1.1) con $q = 0$, y obtenemos que los campos E_1, E_2 y E_3 se presentan en todo \mathbb{R}^3 como

$$\begin{aligned} E_p^1 &= \left(1, 0, -\frac{y}{2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_p, \\ E_p^2 &= \left(0, 1, \frac{x}{2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_p, \\ E_p^3 &= (0, 0, 1) = \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por construcción, esta base es invariante por izquierda; es decir,

$$d(L_p)_q(E_q^i) = E_{p*q}^i,$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Además, es inmediato verificar que es ortonormal.

Antes de continuar, daremos una pequeña definición. Sean M y N dos variedades y sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que los campos $X \in \mathcal{X}(M)$ y $Y \in \mathcal{X}(N)$ están **φ -relacionados** si para todo $p \in M$ tenemos que $d\varphi_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}$; es decir,

$$X(f \circ \varphi) = Y(f) \circ \varphi$$

para toda función $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

Recordemos que el corchete de Lie de dos campos $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ en una variedad M es el campo $[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$. El siguiente lema nos dice que el corchete de Lie preserva la φ -relación.

Lema 1.6. Sean M y N variedades diferenciables. Sean los campos $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ y $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$. Si las parejas de campos X_1, Y_1 y X_2, Y_2 están φ relacionadas, entonces $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ están φ relacionados. En particular, si φ es un difeomorfismo entonces

$$d\varphi_p[X_p, Y_p] = [d\varphi_p X_p, d\varphi_p Y_p]_{\varphi(p)}.$$

Demostración. Sea $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable fija pero arbitraria. Trabajemos con $i, j \in \{1, 2\}$. Por hipótesis tenemos que $X_j(f \circ \varphi) = Y_j(f) \circ \varphi$ y $X_i(Y_j(f) \circ \varphi) = Y_i(Y_j(f)) \circ \varphi$. Luego,

$$X_i(X_j(f \circ \varphi)) = X_i(Y_j(f) \circ \varphi) = Y_i(Y_j(f)) \circ \varphi.$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} X_1(X_2(f \circ \varphi)) &= Y_1(Y_2(f)) \circ \varphi, \\ X_2(X_1(f \circ \varphi)) &= Y_2(Y_1(f)) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Restamos estos dos resultados:

$$[X_1, X_2](f \circ \varphi) = [Y_1, Y_2](f) \circ \varphi,$$

que es el resultado buscado. \square

En la siguiente proposición establecemos cómo se comporta el corchete de Lie en nuestro referencial.

Proposición 1.7. Sea $\{E^i\}_{i=1,2,3}$ la base local definida anteriormente. Se tiene

$$[E^1, E^2] = E^3, \quad [E^2, E^3] = 0, \quad [E^3, E^1] = 0.$$

Demostración. El cálculo por definición es directo. Otra forma es usar el lema 1.6: basta recordar que todo campo invariante a izquierda está L_p relacionado a sí mismo; en particular, si $X, Y \in \mathcal{X}(H_3)$ son campos invariante izquierda, entonces se cumple la siguiente propiedad:

$$dL_p([X, Y]) = [X, Y].$$

Por lo tanto, el corchete de Lie actúa sobre la nueva base tal como actúa en la base canónica. \square

Ahora ya estamos listos para definir nuestra conexión riemanniana. Sea la conexión afín $\nabla: \mathcal{X}(H_3) \times \mathcal{X}(H_3) \rightarrow \mathcal{X}(H_3)$ que cumpla con las siguientes condiciones:

- ∇ es simétrica:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(H_3),$$

- ∇ es compatible con la métrica:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(H_3).$$

El teorema de Levi-Civita nos dice que tal ∇ existe y es única (ver el segundo capítulo de [3]). Además, por la fórmula de Koszul, ∇ se caracteriza por la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle_p &= \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle_p + Y \langle Z, X \rangle_p - Z \langle X, Y \rangle_p \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \langle [X, Z], Y \rangle_p + \langle [Y, Z], X \rangle_p + \langle [X, Y], Z \rangle_p \right\}, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(H_3)$.

Recordemos que debido a las propiedades de una conexión, nos basta conocer cómo se comporta ∇ en un referencial; en particular, analizaremos ∇ en nuestro referencial $\{E^1, E^2, E^3\}$.

Sabemos que el producto interno evaluado en nuestros campos básicos es constante, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$\langle E^k, \nabla_{E^j} E^i \rangle_p = -\frac{1}{2} \left\{ \langle [E^i, E^k], E^j \rangle_p + \langle [E^j, E^k], E^i \rangle_p + \langle [E^i, E^j], E^k \rangle_p \right\},$$

para todo $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Con ayuda de esta expresión y por las propiedades de la conexión, podemos calcular ∇ evaluada en nuestro referencial, lo cual queda resumido en el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *La conexión riemanniana ∇ sobre H_3 se caracteriza por*

$$\begin{aligned} \nabla_{E^1} E^1 &= 0, & \nabla_{E^2} E^1 &= -\frac{1}{2} E^3, & \nabla_{E^3} E^1 &= -\frac{1}{2} E^2, \\ \nabla_{E^1} E^2 &= \frac{1}{2} E^3, & \nabla_{E^2} E^2 &= 0, & \nabla_{E^3} E^2 &= \frac{1}{2} E^1, \\ \nabla_{E^1} E^3 &= -\frac{1}{2} E^2, & \nabla_{E^2} E^3 &= \frac{1}{2} E^1, & \nabla_{E^3} E^3 &= 0. \end{aligned}$$

Como consecuencia directa de este resultado, tenemos ya identificados los símbolos de Christoffel.

Proposición 1.9. *Los símbolos de Christoffel de H_3 en la base $\{E^1, E^2, E^3\}$ son*

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}, \quad \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = -\frac{1}{2},$$

y $\Gamma_{ij}^k = 0$ para cualquier otra combinación de los $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Ya que tenemos totalmente identificada nuestra conexión, debemos hacer lo propio con la curvatura del grupo de Heisenberg. Tenemos que la curvatura R en H_3 es el tensor

$$\begin{aligned} R: \mathcal{X}(H_3) \times \mathcal{X}(H_3) \times \mathcal{X}(H_3) &\longrightarrow \mathcal{X}(H_3) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y)Z, \end{aligned}$$

donde

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X, Y]}Z.$$

Gracias al carácter tensorial de R , podemos simplificar nuestro trabajo y solo analizar cómo se comporta en nuestra base $\{E^1, E^2, E^3\}$. Basta entonces realizar los cálculos en la siguiente expresión:

$$R(E^i, E^j)E^k = \nabla_{E^j}(\nabla_{E^i}E^k) - \nabla_{E^i}(\nabla_{E^j}E^k) + \nabla_{[E^i, E^j]}(E^k),$$

para todo $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Resumimos todo en la siguiente proposición.

Teorema 1.10. *La curvatura R en H_3 se caracteriza por*

$$\begin{aligned} R(E^1, E^1)E^1 &= 0, & R(E^1, E^1)E^2 &= 0, & R(E^1, E^1)E^3 &= 0, \\ R(E^1, E^2)E^1 &= -\frac{3}{4}E^2, & R(E^1, E^2)E^2 &= \frac{3}{4}E^1, & R(E^1, E^2)E^3 &= 0, \\ R(E^1, E^3)E^1 &= \frac{1}{4}E^3, & R(E^1, E^3)E^2 &= 0, & R(E^1, E^3)E^3 &= -\frac{1}{4}E^1, \\ R(E^2, E^1)E^1 &= \frac{3}{4}E^2, & R(E^2, E^1)E^2 &= -\frac{3}{4}E^1, & R(E^2, E^1)E^3 &= 0, \\ R(E^2, E^2)E^1 &= 0, & R(E^2, E^2)E^2 &= 0, & R(E^2, E^2)E^3 &= 0, \\ R(E^2, E^3)E^1 &= 0, & R(E^2, E^3)E^2 &= \frac{1}{4}E^3, & R(E^2, E^3)E^3 &= -\frac{1}{4}E^2, \\ R(E^3, E^1)E^1 &= -\frac{1}{4}E^3, & R(E^3, E^1)E^2 &= 0, & R(E^3, E^1)E^3 &= \frac{1}{4}E^1, \\ R(E^3, E^2)E^1 &= 0, & R(E^3, E^2)E^2 &= -\frac{1}{4}E^3, & R(E^3, E^2)E^3 &= \frac{1}{4}E^2, \\ R(E^3, E^3)E^1 &= 0, & R(E^3, E^3)E^2 &= 0, & R(E^3, E^3)E^3 &= 0. \end{aligned}$$

Por último, recordemos que si una variedad riemanniana tiene curvatura seccional constante K_0 entonces $R_{ijij} = \langle R(E^i, E^j)E^i, E^j \rangle = K_0$, para todo $i \neq j$; sin embargo, es directo observar que

$$R_{1212} = -\frac{3}{4} \neq \frac{1}{4} = R_{1313}.$$

Concluimos que H_3 es una variedad riemanniana homogénea (las isometrías que unen dos puntos arbitrarios de H_3 son las traslaciones por izquierda) que no posee curvatura seccional constante.

1.4. El grupo de isometrías de H_3

Recordemos que $f: M \rightarrow N$ es una isometría entre variedades riemannianas si es un difeomorfismo cuyo diferencial en cada punto $p \in M$, $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, es una isometría. Por otro lado, decimos que f es una isometría local si para todo $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f|_U: U \rightarrow f(U)$ es una isometría. En la presente sección hallaremos el grupo de isometrías de H_3 ; es decir,

$$\text{Iso}(H_3) = \{f \in \text{Diff}(H_3) : \langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall p \in H_3, \forall u, v \in T_pH_3\},$$

donde $\text{Diff}(H_3)$ es el grupo de difeomorfismos de H_3 . Además, concluiremos que, como espacio topológico, $\text{Iso}(H_3)$ tiene dos componentes conexas.

Primero veamos un lema sobre una variedad riemanniana conexa arbitraria, y la prueba es una adaptación de [3]. Para ello, recordemos que una vecindad normal U de un punto p de una variedad, es una vecindad con la bondad de que cada punto de U puede unirse a p a través de una única geodésica.

Lema 1.11. *Sea M una variedad riemanniana conexa y $\varphi: M \rightarrow M$ una isometría local. Si existe $p \in M$ tal que $\varphi(p) = p$ y $d\varphi_p = Id_{T_p M}$, entonces $\varphi = id_M$.*

Demostración. Sea $U \subset M$ una vecindad normal de p tal que $d\varphi|_U$ es un difeomorfismo. Luego, para todo $q \in U$, existe una única geodésica $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$ con $\gamma'(0) = v$. Consideremos la geodésica $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$. Notemos que

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = \varphi(\gamma(0)) = \varphi(p) = p, \\ \tilde{\gamma}'(0) = d\varphi_p \gamma'(0) = v. \end{cases}$$

Luego, por el teorema de existencia y unicidad de geodésicas, tenemos que $\gamma = \tilde{\gamma}$; en particular, $\varphi(q) = \varphi(\gamma(1)) = \gamma(1) = q$; es decir, $\varphi = id$ en U .

Sea $p' \in M$ arbitrario. Como M es conexa, existe un camino $\alpha \in C^\infty([0, 1])$ en M tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = p'$. Definimos

$$A = \{t \in [0, 1] : \varphi(\alpha(t)) = \alpha(t), d\varphi_{\alpha(t)} = Id_{T_{\alpha(t)} M}\}.$$

Observamos que A es no vacío, pues $0 \in A$. Además, A es abierto en $[0, 1]$, pues en cada punto de la imagen de α podemos aplicar lo anterior para obtener una vecindad en la que se cumpla lo solicitado. De hecho, por el mismo argumento tenemos que $\sup(A) \neq 0$.

Denotamos $T = \sup(A)$. Por construcción, tenemos que $[0, T[\subset A$. Sea (t_n) una sucesión en A tal que $t_n \rightarrow T$. Como $\varphi(\alpha(t_n)) = \alpha(t_n)$ y $d\varphi_{\alpha(t_n)} = Id_{T_{\alpha(t_n)} M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por continuidad de $\varphi: M \rightarrow M$ y $d\varphi: TM \rightarrow TM$ tenemos $\varphi(\alpha(T)) = \alpha(T)$ y $d\varphi_{\alpha(T)} = Id_{T_p M}$; es decir, $T \in A$. Así, A es también cerrado en $[0, 1]$. Por lo tanto, $A = [0, 1]$ y vale que

$$\varphi(p') = \varphi(\alpha(1)) = \alpha(1) = p';$$

es decir, $\varphi = id_M$. □

Como consecuencia directa, si $f, g: H_3 \rightarrow H_3$ son dos isometrías tales que $f(p) = g(p)$ y $df_p = dg_p$ para algún $p \in M$, entonces $f = g$. En efecto, basta aplicar el lema para $\varphi = f^{-1} \circ g$.

Ahora que ya tenemos las herramientas suficientes, procedemos a probar el siguiente resultado.

Proposición 1.12. *Sea $\varphi: H_3 \rightarrow H_3$ una isometría tal que $\varphi(0) = 0$. Entonces existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que*

$$\varphi(x, y, z) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta, z), \quad \forall (x, y, z) \in H_3,$$

o

$$\varphi(x, y, z) = (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta, -z), \quad \forall (x, y, z) \in H_3.$$

Demostración. Recordemos que $T_0H_3 = \mathfrak{h}_3$, el álgebra de Lie 2-nilpotente que definimos en la primera sección. Representamos $d\varphi_0: \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathfrak{h}_3$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Como φ es por definición un difeomorfismo, entonces para todo $X \in \mathcal{X}(H_3)$ tenemos que $d\varphi(X)$ está φ -relacionado con X . Luego, $d\varphi_0$ es un automorfismo de álgebras de lie (por el lema 1.6). En particular,

$$d\varphi_0(e_3) = [d\varphi_0(e_1), d\varphi_0(e_2)].$$

Como $d\varphi_0(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$ y

$$\begin{aligned} [d\varphi_0(e_1), d\varphi_0(e_2)] &= [a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3] \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3, \end{aligned}$$

entonces $a_{13} = a_{23} = 0$ y

$$a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Además, como $d\varphi_0$ es una isometría lineal, tenemos que A es ortogonal; es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos las relaciones

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, & (1.4a) \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, & (1.4b) \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, & (1.4c) \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, & (1.4d) \\ a_{11}a_{31} = -a_{12}a_{32}, & (1.4e) \\ a_{21}a_{31} = -a_{22}a_{32}. & (1.4f) \end{cases}$$

Multiplicamos las ecuaciones 1.4e y 1.4f del sistema y obtenemos $a_{11}a_{21}a_{31}^2 = a_{12}a_{22}a_{32}^2$, y por la ecuación 1.4c esto es equivalente a

$$a_{11}a_{21}(a_{31}^2 + a_{32}^2) = 0.$$

Entonces $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$ o $a_{31}^2 + a_{32}^2 = 0$. Tenemos que:

- Si $a_{11} = 0$ entonces de 1.4a obtenemos $|a_{12}| = 1$. Luego, de 1.4c tenemos $a_{22} = 0$, y de 1.4b tenemos $|a_{21}| = 1$. Todo esto implica, por 1.4e y 1.4f, que $a_{31} = a_{32} = 0$.

- Si $a_{21} = 0$ entonces de 1.4b obtenemos $|a_{22}| = 1$. Luego, de 1.4c tenemos $a_{12} = 0$, y de 1.4a tenemos $|a_{11}| = 1$. Todo esto implica, por 1.4e y 1.4f, que $a_{31} = a_{32} = 0$.
- Si $a_{31}^2 + a_{32}^2 = 0$ entonces tenemos directamente que $a_{31} = a_{32} = 0$.

Por lo tanto siempre tenemos que $a_{31} = a_{32} = 0$, y de esta forma podemos simplificar el sistema 1.4:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \\ |a_{33}| = 1. \end{cases}$$

Tenemos los siguientes casos, correspondientes a los posibles valores de a_{33} :

- Si $a_{33} = 1$, de la ecuación 1.3 tenemos que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$. Luego, como $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal con determinante 1, por la caracterización de las matrices ortogonales tenemos que existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, consideremos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi: H_3 &\longrightarrow H_3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z). \end{aligned}$$

Como $d\psi_p = A$ para todo $p \in H_3$ entonces ψ es una isometría. Además, ya que $\psi(0) = 0$ y $d\psi_0 = A$, entonces por el lema anterior tenemos que $\psi = \varphi$ es la única isometría con dichas propiedades.

- Si $a_{33} = -1$, tenemos que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$. Luego, como $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal con determinante -1 , por la caracterización de las matrices ortogonales tenemos que existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta vez consideremos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \xi: H_3 &\longrightarrow H_3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -z). \end{aligned}$$

Como $d\xi_p = A$ para todo $p \in H_3$ entonces ξ es una isometría. Además, ya que $\xi(0) = 0$ y $d\xi_0 = A$, entonces por el lema anterior tenemos que $\xi = \varphi$ es la única isometría con dichas propiedades. \square

De esta forma, tenemos que las isometrías que fijan el origen son rotaciones en el eje z (si $\det(d\varphi_0) = 1$) o reflexiones sobre el plano $z = 0$ (si $\det(d\varphi_0) = -1$). Además, cada una de las formas posibles de la proposición 1.12 corresponde a una componente conexa del grupo ortogonal $O(2)$; en particular, la componente que contiene a la identidad es isomorfa al grupo especial ortogonal $SO(2)$.

Por último, si tenemos una isometría $\varphi: H_3 \rightarrow H_3$ tal que $\varphi(0) = p \neq 0$, basta observar que $\varphi_0 = L_{-p} \circ \varphi$ es una isometría que fija el origen. Por lo tanto, toda isometría de H_3 es la composición de una traslación y una isometría que fija el origen, caracterizadas en la proposición 1.12.

Podemos identificar al grupo de traslaciones como el propio H_3 . Así, la componente conexa de $\text{Iso}(H_3)$ que contiene a la identidad es isomorfo a $H_3 \times SO(2)$. Es directo observar que el grupo de isometrías de H_3 es de dimensión 4.

1.5. Las geodésicas de H_3

En esta sección caracterizaremos las geodésicas en el grupo de Heisenberg. Para ello, consideremos una geodésica

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow H_3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

tal que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma'(0) = (a, b, c)$. Utilizamos la expresión (1.2) de nuestro referencial para describir γ' :

$$\gamma' = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} = x'E^1 + y'E^2 + \left(\frac{1}{2}(x'y - xy') + z' \right) E^3.$$

Por definición, toda geodésica debe cumplir que $\frac{D}{dt}(\gamma') = 0$ a lo largo de γ ; es decir, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Utilizamos las propiedades de la conexión y recordamos que al aplicar el campo γ' a una aplicación diferenciable $f: H_3 \rightarrow \mathbb{R}$ obtenemos $\gamma'(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$. Así, mediante un cálculo largo pero directo, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\gamma' &= \gamma'(x')E^1 + x'\nabla_{\gamma'}E^1 + \gamma'(y')E^2 + y'\nabla_{\gamma'}E^2 \\ &\quad + \gamma' \left(\frac{1}{2}(x'y - xy') + z' \right) E^3 + \left(\frac{1}{2}(x'y - xy') + z' \right) \nabla_{\gamma'}E^3 \\ &= \left(x'' + y' \left(\frac{1}{2}(x'y - xy') + z' \right) \right) E^1 + \left(y'' - x' \left(\frac{1}{2}(x'y - xy') + z' \right) \right) E^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(x''y - xy'') + z'' \right) E^3. \end{aligned}$$

Igualemos a 0 y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'' + y'(z' + \frac{1}{2}(x'y - xy')) = 0, \\ y'' - x'(z' + \frac{1}{2}(x'y - xy')) = 0, \\ z'' + \frac{1}{2}(x''y - xy'') = 0. \end{cases}$$

De la última ecuación del sistema y de las condiciones iniciales tenemos

$$z' + \frac{1}{2}(x'y - xy') = c.$$

Reemplazamos esta información en las primeras dos ecuaciones y tenemos

$$\begin{cases} x'' + cy' = 0, \\ y'' - cx' = 0. \end{cases}$$

Resolvemos este sistema y obtenemos las siguientes soluciones:

- Si $c = 0$, entonces la imagen de γ está contenida en una recta en el plano $z = 0$:

$$\gamma(t) = (at, bt, 0), \quad t \in I.$$

- Si $c \neq 0$, entonces γ tiene la siguiente forma:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(b(\cos(ct) - 1) + a \operatorname{sen}(ct)), \\ a(1 - \cos(ct)) + b \operatorname{sen}(ct), \\ (c^2 + w)t - w \operatorname{sen}(ct) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

donde $w = \frac{a^2 + b^2}{2}$. Observamos que si $w = 0$ entonces $a = b = 0$ y tenemos que la geodésica está contenida en el eje z . Para $w \neq 0$ tenemos que la geodésica tiene un comportamiento de espiral.

De esta forma hemos determinado las geodésicas que pasan por el origen.

Por otro lado, recordemos que las isometrías preservan geodésicas. Así, si tenemos una geodésica $\gamma: I \rightarrow H_3$ tal que $\gamma(0) = p \neq 0$, entonces $\gamma_0 = L_{-p} \circ \gamma$ es una geodésica que pasa por el origen. Por lo tanto, las geodésicas en H_3 son composiciones de una traslación y una geodésica que fija el origen, que hemos caracterizado en nuestro análisis anterior.

Trabajaremos este proceso en el siguiente ejemplo: identificaremos las rectas que son geodésicas en H_3 .

Ejemplo 1.13. Sea la recta \mathcal{L} en H_3 que pasa por (x_0, y_0, z_0) con vector dirección (a_0, b_0, c_0) ; es decir, parametrizada por

$$\mathcal{L} : r(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_0, b_0, c_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la geodésica $\gamma = L_{-(x_0, y_0, z_0)} \circ r$. Observamos que

$$\gamma(t) = \left(a_0 t, b_0 t, c_0 t - \frac{t}{2}(x_0 b_0 - y_0 a_0) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego, $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma'(0) = (a_0, b_0, c_0 - \frac{1}{2}(x_0 b_0 - y_0 a_0))$. Así, del análisis anterior tenemos dos casos de rectas que pasan por el origen:

- Si $c_0 - \frac{1}{2}(x_0 b_0 - y_0 a_0) = 0$ tenemos que

$$r(t) = \left(x_0 + a_0 t, y_0 + b_0 t, z_0 + \frac{1}{2}(x_0 b_0 - y_0 a_0 t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Si $c_0 - \frac{1}{2}(x_0 b_0 - y_0 a_0) \neq 0$, sabemos que es necesario que $w = \frac{a_0^2 + b_0^2}{2} = 0$; es decir, $a_0 = b_0 = 0$. Así, tenemos que

$$r(t) = (x_0, y_0, z_0 + c_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finalizamos la sección con algunos ejemplos gráficos. En la siguiente figura presentamos las gráficas de algunas geodésicas $\gamma : I \rightarrow H_3$ tal que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma'(0) = (a, b, c)$, para ciertos valores de a, b y c :

- La curva roja corresponde a $a = 1, b = 0$ y $c = 1$.
- La curva azul corresponde a $a = 0, b = 1$ y $c = 1$.
- La curva verde corresponde a $a = b = c = 1$.
- La curva ploma corresponde a $a = b = 0$ y $c = 1$.
- La curva negra corresponde a $a = b = 1$ y $c = 0$.
- La curva amarilla corresponde a $a = -1, b = 1$ y $c = 0$.

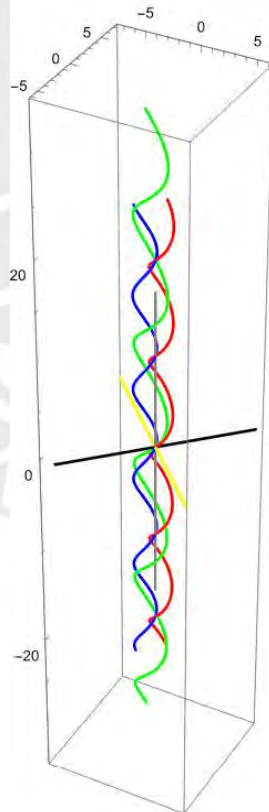


Figura 1.1: Ejemplos de geodésicas en H_3

Capítulo 2

Superficies en H_3

En este capítulo estudiaremos la geometría de las superficies en el grupo de Heisenberg para luego analizar, si existen, algunas familias de ellas: totalmente geodésicas, umbílicas y mínimas. Ello servirá como motivación para, en el siguiente capítulo, entrar de lleno a las superficies que deseamos estudiar.

La referencia principal para la primera sección es [3], para la segunda usamos [5], y para la tercera parcialmente usamos [2].

2.1. Geometría de las superficies

Podemos identificar a una superficie M en H_3 con una inmersión isométrica $i: M \rightarrow H_3$ en la que M tiene dimensión 2; es decir, M hereda la métrica del grupo de Heisenberg: para todo $p \in M$ tenemos

$$\langle u, v \rangle_p = \langle di_p u, di_p v \rangle_{i(p)}, \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Recordemos que una superficie M de H_3 es un subconjunto $M \subset H_3$ que es localmente difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $r: U \rightarrow M$ una parametrización de M en un punto $p \in M$. Definimos la primera forma fundamental de M en p como

$$\begin{aligned} I_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle_p, \end{aligned}$$

que es bilineal, simétrica y definida positiva. Fijemos también $\{r_u, r_v\}$, un referencial local (para TU). Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental se calculan como sigue:

$$E(p) = \langle r_u, r_u \rangle_p, \quad F(p) = \langle r_v, r_u \rangle_p, \quad G(p) = \langle r_v, r_v \rangle_p.$$

Para comentar sobre la segunda forma fundamental, necesitamos una noción de ortogonalidad. Recordemos que localmente siempre hay orientabilidad, por lo que podemos asumir que la superficie es orientable. Sea $\wedge: T_p H_3 \times T_p H_3 \rightarrow T_p H_3$, y denotamos $u \wedge v = \wedge(u, v)$, la única aplicación bilineal antisimétrica tal que

$$E^1 \wedge E^2 = E^3, \quad E^2 \wedge E^3 = E^1, \quad E^3 \wedge E^1 = E^2,$$

donde $\{E^1, E^2, E^3\}$ es nuestro referencial ortonormal constituida por campos invariantes a izquierda definidas en el capítulo anterior. Observamos que la operación \wedge está bien definida y que simula el comportamiento del producto cruz en la base canónica de \mathbb{R}^3 . Tenemos, entonces, que $u \wedge v$ es ortogonal (según $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$) a u y v . De esta forma, definimos el vector normal unitario a cada $q \in r(U)$ como

$$\eta_q = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}(q),$$

donde la norma es $|r_u \wedge r_v| = \sqrt{\langle r_u \wedge r_v, r_u \wedge r_v \rangle_p}$. Así tenemos el campo normal unitario de M :

$$\begin{aligned} \eta: M &\longrightarrow TM^\perp \\ p &\longmapsto (p, \eta_p). \end{aligned}$$

Sean $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Como $\langle Y, \eta \rangle = 0$ y la conexión es compatible con la métrica, tenemos que $\langle \nabla_X Y, \eta \rangle + \langle Y, \nabla_X \eta \rangle = 0$, donde ∇ es la conexión Levi Civita de H_3 ; es decir,

$$\langle \nabla_X Y, \eta \rangle = -\langle \nabla_X \eta, Y \rangle.$$

Análogamente, de $\langle X, \eta \rangle = 0$ tenemos que

$$\langle \nabla_Y X, \eta \rangle = -\langle \nabla_Y \eta, X \rangle.$$

De esta forma, tenemos la siguiente propiedad:

$$-\langle \nabla_X \eta, Y \rangle = \langle \nabla_X Y, \eta \rangle = \langle [X, Y] + \nabla_Y X, \eta \rangle = \langle \nabla_Y X, \eta \rangle = -\langle \nabla_Y \eta, X \rangle.$$

Definimos la segunda forma fundamental como la forma bilineal

$$\begin{aligned} \text{II}_p: T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longmapsto -\langle \nabla_X \eta, Y \rangle_p, \end{aligned}$$

que resulta ser simétrica por la propiedad anterior. De hecho, por dicha propiedad, tenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental en el referencial local $\{r_u, r_v\}$:

$$\mathbf{e}(p) = \langle \eta, \nabla_{r_u} r_u \rangle_p, \quad \mathbf{f}(p) = \langle \eta, \nabla_{r_u} r_v \rangle_p, \quad \mathbf{g}(p) = \langle \eta, \nabla_{r_v} r_v \rangle_p.$$

Además, como II_p es simétrica, entonces existe un único operador lineal autoadjunto $A: T_p M \rightarrow T_p M$, llamado operador de Weingarten, tal que

$$\langle Au, v \rangle_p = \text{II}_p(u, v) = -\langle \nabla_X \eta, Y \rangle_p,$$

para todo $u, v \in T_p M$, donde asumimos que $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ son tales que $u = X_p$ y $v = Y_p$.

Por otro lado, como $\langle \eta, \eta \rangle_p = 1$, entonces $X \langle \eta, \eta \rangle_p = 0$; es decir, $\langle \nabla_X \eta, \eta \rangle = 0$ y así tenemos que $\nabla_X \eta \in \mathcal{X}(M)$. Entonces, se cumple la conocida fórmula de Weingarten:

$$\nabla_X \eta = -AX.$$

Finalmente, se define la curvatura media como $H = \frac{1}{2}tr(A)$. Sean P y Q las matrices que representan la primera y segunda forma fundamental en el referencial dado, respectivamente, y por abuso de notación llamemos A a la representación matricial del operador de Wingarten en dicho referencial. Por la definición de A tenemos que

$$u^T Q v = (Au)^T P v = u^T A^T P v,$$

para todo $u, v \in T_p M$. Luego, como P y Q son simétricas, entonces $A = P^{-1}Q$; es decir,

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Así, obtenemos una expresión local para la curvatura media en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}. \quad (2.2)$$

Antes de pasar a la siguiente sección, realizaremos algunos cálculos de lo analizado anteriormente en situaciones específicas a modo de ejemplos. Para ello, recordamos que al aplicar el campo r_u a una aplicación diferenciable $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ obtenemos $r_u(f) = \frac{\partial}{\partial u} f$. Análogamente, $r_v(f) = \frac{\partial}{\partial v} f$.

Ejemplo 2.1 (Gráfica de una función). Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la superficie S que es la gráfica de f ; es decir,

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in U\}.$$

Tenemos la parametrización de S

$$\begin{aligned} r: U &\longrightarrow H_3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

Para cada $p = (x, y, z) \in S$ tenemos una base del espacio tangente $T_p S$, y la expresaremos en nuestra base hallada en el primer capítulo. Por simplicidad, omitiremos el punto donde se evalúan las derivadas de f . Usamos la expresión (1.2) de nuestro referencial ortonormal en H_3 y obtenemos

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^3, \\ r_y &= \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} = E^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Luego tenemos el campo normal unitario dado por $\eta = \frac{N}{\|N\|}$, donde

$$N = r_x \wedge r_y = -\left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^2 + E^3, \quad (2.4)$$

y también los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_x, r_x \rangle = 1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2, \\ F &= \langle r_x, r_y \rangle = \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right), \\ G &= \langle r_y, r_y \rangle = 1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Además, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{r_x} r_x &= \nabla_{r_x} E^1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^3 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \nabla_{r_x} E^3 \\ &= -\left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^2 + f_{xx} E^3, \\ \nabla_{r_x} r_y &= \nabla_{r_x} E^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^3 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) \nabla_{r_x} E^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^1 - \frac{1}{2} \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^2 + f_{xy} E^3, \\ \nabla_{r_y} r_y &= \nabla_{r_y} E^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^3 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) \nabla_{r_y} E^3 \\ &= \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^1 + f_{yy} E^3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \langle \eta, \nabla_{r_x} r_x \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_x} r_x \rangle = \frac{f_{xx} + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right)}{\|N\|}, \\ \mathbf{f} &= \langle \eta, \nabla_{r_x} r_y \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_x} r_y \rangle = \frac{f_{xy} - \frac{1}{2} \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2}{\|N\|}, \\ \mathbf{g} &= \langle \eta, \nabla_{r_y} r_y \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_y} r_y \rangle = \frac{f_{yy} - \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right)}{\|N\|}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $\|N\| = \sqrt{\left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 + 1}$.

Finalmente, de la ecuación (2.1), obtenemos las entradas de la representación

matricial del operador de Weingarten A en el referencial $\{r_x, r_y\}$:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{8f_{xx}(4 + (-2f_y + x)^2) + (2f_y - x)(2f_x + y)(8 - 8f_{xy} + (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)}{4(4 + (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)^{3/2}}, \\
A_{12} &= \frac{2(2f_y - x)(2f_x + y)(-4f_{yy} + (2f_y - x)(2f_x + y)) + (4 + (-2f_y + x)^2)(8f_{xy} + (-2f_y + x)^2 - (2f_x + y)^2)}{4(4 + (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)^{3/2}}, \\
A_{21} &= \frac{-8((f_y - x/2)(f_{xx} + (f_y - x/2)(f_x + y/2))(f_x + y/2)) + 8(1 + (f_x + y/2)^2)(f_{xy} + \frac{1}{8}(-2f_y + x)^2 - \frac{1}{8}(2f_x + y)^2)}{(4 + (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)^{3/2}}, \\
A_{22} &= \frac{8(1 + (f_x + y/2)^2)(f_{yy} - \frac{1}{4}(2f_y - x)(2f_x + y)) + \frac{1}{4}(2f_y - x)(2f_x + y)(-8f_{xy} - (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)}{(4 + (-2f_y + x)^2 + (2f_x + y)^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.2 (Cilindro generalizado). Sea $u:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la superficie S parametrizada por

$$\begin{aligned}
r: \mathbb{R} \times]0, 1[&\longrightarrow H_3 \\
(s, t) &\longmapsto (t, u(t), s).
\end{aligned}$$

Análogo al proceso anterior, para cada $p = (x, y, z) \in S$ tomamos la base del espacio tangente $T_p S$ dada por las direcciones principales y la expresaremos en nuestra base $\{E^1, E^2, E^3\}$ gracias a la expresión 1.2. Tenemos así el referencial local:

$$\begin{aligned}
r_s &= \frac{\partial}{\partial z} = E^3, \\
r_t &= \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial y} = E^1 + u' E^2 + \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) E^3.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

También obtenemos el campo normal unitario dado por $\eta = \frac{N}{\|N\|}$, donde

$$N = r_s \wedge r_t = -u' E^1 + E^2, \tag{2.9}$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned}
E &= \langle r_s, r_s \rangle = 1, \\
F &= \langle r_s, r_t \rangle = \frac{u}{2} - u' \frac{t}{2}, \\
G &= \langle r_t, r_t \rangle = 1 + (u')^2 + \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned}
\nabla_{r_s} r_s &= \nabla_{E^3} E^3 \\
&= 0, \\
\nabla_{r_s} r_t &= \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s} (u') E^2 + u' \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) E^3 + \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) \nabla_{r_s} E^3 \\
&= \frac{1}{2} u' E^1 - \frac{1}{2} E^2, \\
\nabla_{r_t} r_t &= \nabla_{r_t} E^1 + \frac{\partial}{\partial t} (u') E^2 + u' \nabla_{r_t} E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) E^3 + \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) \nabla_{r_t} E^3 \\
&= u' \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) E^1 + \left(u'' - \frac{u}{2} + u' \frac{t}{2} \right) E^2 - u'' \frac{t}{2} E^3.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
e &= \langle \eta, \nabla_{r_s} r_s \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle = 0, \\
f &= \langle \eta, \nabla_{r_s} r_t \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle = -\frac{\frac{1}{2} ((u')^2 + 1)}{\|N\|}, \\
g &= \langle \eta, \nabla_{r_t} r_t \rangle = \frac{1}{\|N\|} \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle = \frac{-((u')^2 + 1) \left(\frac{u}{2} - u' \frac{t}{2} \right) + u''}{\|N\|},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $\|N\| = \sqrt{(u')^2 + 1}$.

Finalmente, tenemos las entradas de la representación matricial de la matriz de Weingarten A en el referencial $\{r_s, r_t\}$:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{u - tu'}{4(1 + (u')^2)^{1/2}}, \\
A_{12} &= -\frac{(1 + (u')^2)(4 - u^2 + (4 + t^2 + 2tu)(u')^2 - 2t^2(u')^3) + 4(u - tu')u''}{8(1 + (u')^2)^{3/2}}, \\
A_{21} &= -\frac{1}{2(1 + (u')^2)^{1/2}}, \\
A_{22} &= \frac{-(u + t(1 - 2u')u')(1 + (u')^2) + 4u''}{4(1 + (u')^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2. Superficies umbílicas en H_3

En esta sección, analizaremos las superficies totalmente geodésicas y umbílicas en nuestro grupo de Heisenberg.

Las superficies más básicas de estudiar son las superficies totalmente geodésicas: aquellas donde la segunda forma fundamental de la superficie es nula. Un caso

más general de este tipo de superficies son las umbílicas. Decimos que una superficie S es umbílica si en cada punto p de la superficie, la segunda forma fundamental es un múltiplo de la primera forma fundamental de la inmersión; es decir, existe $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Pi_p = \lambda(p)I_p$$

para todo $p \in S$, donde I_p y Π_p son la primera y segunda forma fundamental de la inmersión, respectivamente. Observamos que si A es el operador de Weingarten asociado, entonces

$$\langle Au, v \rangle = \Pi_p(u, v) = \lambda(p) \langle u, v \rangle = \langle \lambda(p)u, v \rangle,$$

para todo $u, v \in T_pS$; es decir, $A = \lambda Id$.

El resultado principal de esta sección es mostrar que no existen superficies umbílicas en H_3 . Para ello, primero analicemos algunas definiciones y resultados de forma abstracta.

Sea G un grupo de Lie de dimensión $n + 1$, con $n \geq 2$, y \mathfrak{g} su álgebra de Lie asociado. Consideremos la esfera unitaria en $T_0G = \mathfrak{g}$:

$$S^{n-1} = \{v \in \mathfrak{g} : |v| = 1\}.$$

Fijemos una hipersuperficie (de dimensión n) orientada $S \subset G$. Definimos la **aplicación de Gauss** de S como

$$\begin{aligned} \gamma: S &\longrightarrow S^{n-1} \\ p &\longmapsto d(L_p^{-1})_p(\eta(p)), \end{aligned}$$

donde η es el campo normal unitario de S .

Tenemos el siguiente resultado, que relaciona la aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental. Su demostración se encuentra en [11].

Teorema 2.3. *Sea S una hipersuperficie orientada de G . Para todo $v \in T_pS$ se cumple*

$$d(L_p)_0 \circ d\gamma_p(v) = -(A(v) + \alpha_{\bar{\eta}}(v)),$$

donde A es el operador de Weingarten, $\alpha_{\bar{\eta}}(v) = \nabla_v \bar{\eta}$ y $\bar{\eta}$ es el campo invariante izquierda en G tal que $\eta(p) = \bar{\eta}(p)$.

Notemos que si S es una superficie en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , para todo $v \in T_pS$ tenemos que $\nabla_v \bar{\eta} = 0$, pues el campo invariante η es constante. Además, como la métrica no se ve afectada por las traslaciones, la aplicación de Gauss se reduce a $\gamma(p) = N(p)$, donde N es el vector normal a la superficie. Entonces tenemos el resultado conocido de la geometría euclidiana: $A(v) = -dN_p(v)$ para todo $v \in T_pS$, donde A es el operador de Weingarten de S .

En [5] se muestra que si S es una superficie en H_3 que es gráfica de una función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $d(L_p)_0 \circ d\gamma_p(v)$ es un operador en T_pS que tiene

la siguiente representación matricial en la base dada por $\{r_x, r_y\}$ de (2.3):

$$[d(L_p)_0 \circ d\gamma_p(v)] = - \begin{pmatrix} \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{\|N\|} \right)_x & \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{\|N\|} \right)_x \\ \left(\frac{f_x + \frac{y}{2}}{\|N\|} \right)_y & \left(\frac{f_y - \frac{x}{2}}{\|N\|} \right)_y \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde N está expresado en (2.4). Luego, por el teorema anterior y por las expresiones (2.7) y (2.13), tenemos que la aplicación $\alpha_{\bar{\eta}}$ tiene la siguiente representación matricial en la base escogida:

$$[\alpha_{\bar{\eta}}] = \frac{1}{2|N|} \begin{pmatrix} -\left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) & 1 - \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2 \\ \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2 - 1 & \left(f_x + \frac{y}{2}\right)\left(f_y - \frac{x}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Antes de abordar el teorema principal de la sección, presentaremos el siguiente lema, en el cual usaremos una de las ecuaciones clásicas de la geometría riemanniana: la ecuación de Codazzi.

Lema 2.4. *Sea S una superficie umbílica de H_3 y sea $\{X, Y\}$ una base local de la superficie. Sea $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Pi_p = \lambda(p)I_p$ para todo p , donde I_p y Π_p son la primera y segunda forma fundamental de la inmersión, respectivamente. Entonces se cumple*

$$\bar{R}(X, Y)\eta = Y(\lambda)X - X(\lambda)Y, \quad (2.15)$$

donde \bar{R} es la curvatura del espacio ambiente.

Demostración. En esta prueba consideraremos $\bar{\nabla}$ como la conexión del espacio ambiente, mientras que ∇ y ∇^\perp representan su parte tangente y normal a S , respectivamente; en particular, $\bar{\nabla} = \nabla + \nabla^\perp$.

Podemos identificar la segunda forma fundamental como el tensor

$$B: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathbb{R} \\ B(X, Y, \eta) \longmapsto \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y, \eta \rangle.$$

Con esta terminología, recordemos la ecuación de Codazzi:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\nabla_Y B)(X, Z, \eta) - (\nabla_X B)(Y, Z, \eta).$$

Tomamos Z como un campo arbitrario en $\mathcal{X}(S)$. Tenemos, por definición de la derivada de un tensor,

$$(\nabla_Y B)(X, Z, \eta) = Y(B(X, Z, \eta)) - B(\nabla_Y X, Z, \eta) - B(X, \nabla_Y Z, \eta) \\ - B(X, Z, \nabla_Y^\perp \eta).$$

Recordemos que $\nabla_Y \eta \in \mathcal{X}(M)$; es decir, $\bar{\nabla}_Y \eta = \nabla_Y \eta$ y $\nabla_Y^\perp \eta = 0$. Entonces, $B(X, Z, \nabla_Y^\perp \eta) = 0$. Además, por la condición de ser umbílica, tenemos que

$$B(X, Y, \eta) = \text{II}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle.$$

De esta forma, obtenemos

$$(\nabla_Y B)(X, Z, \eta) = Y(\lambda \langle X, Z \rangle) - \lambda \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \lambda \langle X, \nabla_Y Z \rangle.$$

Por último, por la compatibilidad de la métrica, tenemos que

$$Y(\lambda \langle X, Z \rangle) = Y(\lambda) \langle X, Z \rangle + \lambda (\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle),$$

con lo que obtenemos:

$$(\nabla_Y B)(X, Z, \eta) = Y(\lambda) \langle X, Z \rangle.$$

Con un procedimiento análogo, obtenemos también que

$$(\nabla_X B)(Y, Z, \eta) = X(\lambda) \langle Y, Z \rangle.$$

Por lo tanto, la ecuación de Codazzi se reduce a

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = Y(\lambda) \langle X, Z \rangle - X(\lambda) \langle Y, Z \rangle.$$

Como Z fue tomada de forma arbitraria, entonces tenemos el resultado buscado. \square

Finalmente, presentamos el resultado principal de la sección.

Teorema 2.5. *No existen superficies umbílicas en el grupo de Heisenberg H_3 .*

Demostración. Supongamos que existe una superficie umbílica S en H_3 ; es decir, existe $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Pi_p = \lambda(p)I_p$ para todo $p \in S$, o equivalentemente $A = \lambda Id$, donde A es el operador de Weingarten de S . Separemos en dos casos.

En el primer caso digamos que S es, localmente, la gráfica de una función sobre el plano XY ; es decir, tiene una parametrización de la forma

$$S : r(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Tenemos expresado, en (2.3) y (2.4), el referencial local $\{r_x, r_y\}$ y el campo normal N . Por la bilinealidad y antisimetría en las primeras dos componentes de la curvatura, tenemos que

$$R(r_x, r_y)N = R(E^1, E^2)N + \left(f_y - \frac{x}{2}\right) R(E^1, E^3)N + \left(f_x + \frac{y}{2}\right) R(E^3, E^2)N.$$

Además, por la linealidad en la tercera componente de la curvatura y por el teorema 1.10, obtenemos

$$\begin{aligned} R(E^1, E^2)N &= -\frac{3}{4} \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^1 + \frac{3}{4} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^2, \\ R(E^1, E^3)N &= -\frac{1}{4} E^1 - \frac{1}{4} \left(f_x + \frac{y}{2}\right) E^3, \\ R(E^3, E^2)N &= \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} \left(f_y - \frac{x}{2}\right) E^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R(r_x, r_y)\eta = \frac{1}{|N|}R(r_x, r_y)N = \frac{1}{|N|} \left(- \left(f_y - \frac{x}{2} \right) E^1 + \left(f_x + \frac{y}{2} \right) E^2 \right).$$

Por otro lado, por hipótesis se debe cumplir que $A(r_x) = \lambda r_x$ y $A(r_y) = \lambda r_y$. Sabemos que $r_x(\lambda) = \lambda_x$ y $r_y(\lambda) = \lambda_y$. Reemplazamos esta información en la ecuación (2.15) del lema anterior y usamos la expresión de nuestro referencial local $\{r_x, r_y\}$ para obtener

$$\overline{R}(r_x, r_y)\eta = \lambda_y r_x - \lambda_x r_y = \lambda_y E^1 - \lambda_x E^2 + \left(\lambda_y \left(f_x + \frac{y}{2} \right) - \lambda_x \left(f_y - \frac{x}{2} \right) \right) E^3.$$

Comparamos esta expresión con la anterior y tenemos:

$$\begin{cases} -\|N\|\lambda_x &= f_x + \frac{y}{2}, \\ -\|N\|\lambda_y &= f_y - \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Como $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, entonces la representación matricial de $dL_p \circ d\gamma_p$ en la base escogida, expresada en (2.13), es simétrica. Además, como también $A = \lambda I$ es simétrica, tenemos que $\alpha_{\bar{\eta}}$ tiene representación matricial en la base asignada una matriz simétrica. Luego, por (2.14), tenemos que $\left(f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + \left(f_x + \frac{y}{2} \right)^2 = 2$, y por ende

$$\|N\| = \sqrt{\left(f_x + \frac{y}{2} \right)^2 + \left(f_y - \frac{x}{2} \right)^2 + 1} = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto, como $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, del sistema de ecuaciones de arriba tenemos que

$$\left(f_x + \frac{y}{2} \right)_y = \left(f_y - \frac{x}{2} \right)_x,$$

lo cual es imposible.

En el otro caso, si S no puede representarse localmente como la gráfica de una función, entonces es un cilindro generalizado; es decir, podemos considerar S como una superficie reglada con directriz en el plano $z = 0$ y reglado por rectas verticales. De esta forma, S tiene una parametrización de la forma

$$S : r(t, s) = (t, u(t), s), \quad (s, t) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Como S es umbílica, tenemos en particular que la representación matricial del operador de Weingarten A en la base escogida, expresada por (2.12), es diagonal. En particular, tenemos que

$$-\frac{1}{2(1 + (u')^2)^{1/2}} = 0,$$

lo cual es imposible.

Por lo tanto, no existen superficies umbílicas en H_3 . □

Finalmente, concluimos la sección concluyendo que tampoco existen superficies totalmente geodésicas en el grupo de Heisenberg. En efecto, toda superficie totalmente geodésica es, en particular, umbílica.

2.3. Superficies mínimas en H_3

Nos compete ahora analizar las superficies mínimas; es decir, aquellas donde la curvatura media se anula. Así, al igualar a 0 la expresión (2.2), se cumple que para todo $p \in S$ tenemos

$$G \langle N, \nabla_{r_u} r_u \rangle - 2F \langle N, \nabla_{r_u} r_v \rangle + E \langle N, \nabla_{r_v} r_v \rangle = 0, \quad (2.16)$$

donde $\{r_u, r_v\}$ es un referencial local de $T(r(U))$, N es un vector normal al referencial, y E , F y G son las entradas de la primera forma fundamental de S . Observamos que, por la bilinealidad de la métrica, no es necesario utilizar el vector unitario η .

A continuación, presentaremos las superficies mínimas más reconocidas en el grupo de Heisenberg: los gráficos mínimos y las superficies regladas mínimas.

2.3.1. Gráficos mínimos

Caracterizaremos las funciones que tienen por gráfica una superficie mínima. Dicha superficie recibe el nombre de **gráfico mínimo**.

Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la superficie S que es la gráfica de f ; es decir,

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in U\}.$$

Tenemos la parametrización de S

$$\begin{aligned} r: U &\longrightarrow H_3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

Utilicemos los cálculos realizados en el Ejemplo 2.1 para obtener la relación que deben cumplir las primeras y segundas derivadas de f para que S sea mínima. En particular, podemos hallar la traza del operador de Weingarten expresado en (2.7) e igualar a 0, o reemplazamos la información de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, de (2.5) y (2.6) respectivamente, en la ecuación (2.16). Así, obtenemos la llamada **ecuación de gráficos mínimos** en H_3 :

$$\left(1 + \left(f_y - \frac{x}{2}\right)^2\right) f_{xx} - 2 \left(f_x + \frac{y}{2}\right) \left(f_y - \frac{x}{2}\right) f_{xy} + \left(1 + \left(f_x + \frac{y}{2}\right)^2\right) f_{yy} = 0. \quad (2.17)$$

A continuación presentamos un par de ejemplos a modo de aplicación directa de la ecuación de gráficos mínimos.

Ejemplo 2.6. Todos los planos no verticales son gráficos mínimos. En efecto, un plano no vertical se puede expresar como $z = f(x, y)$, donde f es una función lineal afín. Así, tenemos que $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$, por lo que se satisface trivialmente la ecuación de gráficos mínimos (2.17).

Ejemplo 2.7. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

Es directo comprobar que f satisface la ecuación (2.17). Así, tenemos una gráfica de una función definida en todo \mathbb{R}^2 que es mínima; es decir, en H_3 no se cumple el teorema de Bernstein: todo gráfico mínimo en el espacio euclidiano definido en todo \mathbb{R}^2 es un plano.

2.3.2. Superficies regladas mínimas

El siguiente caso a estudiar es el cilindro recto; es decir, aquella superficie con directriz una curva en el plano $z = 0$ y que tiene por generatriz rectas con vector dirección $(0, 0, 1)$.

Ejemplo 2.8. Sea $u:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos la superficie S parametrizada por

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R} \times]0, 1[&\longrightarrow H_3 \\ (s, t) &\longmapsto (t, u(t), s). \end{aligned}$$

Utilizamos también cálculos realizados anteriormente, esta vez del Ejemplo 2.2. Podemos hallar la traza del operador de Weingarten expresado en (2.12) e igualar a 0, o reemplazamos la información de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, de (2.10) y (2.11) respectivamente, en la ecuación (2.16). Simplificamos y obtenemos

$$u'' = 0;$$

es decir, $u(t) = at + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Siguiendo un proceso totalmente análogo, llegamos a la misma conclusión en el caso de una superficie S' parametrizada por $r(s, t) = (v(t), t, s)$, $s, t \in \mathbb{R} \times]0, 1[$, donde $v:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable; es decir, si S' es mínima, entonces v es lineal afín. Por lo tanto, los únicos cilindros rectos mínimos son los planos verticales.

Un resultado importante que se desprende del análisis realizado hasta ahora en esta sección es el siguiente.

Proposición 2.9. *Todos los planos en el grupo de Heisenberg H_3 son superficies mínimas.*

Demostración. Por el ejemplo 2.6 sabemos que todos los planos no verticales son superficies mínimas. Por otro lado, si el plano es vertical tenemos el resultado directamente del ejemplo 2.8. \square

Procedemos a generalizar las superficies caracterizadas en el ejemplo 2.8. Sean $\alpha:]0, 1[\rightarrow H_3$ una curva arbitraria, que llamaremos directriz, y $\beta:]0, 1[\rightarrow H_3$

una curva que no se anula, que llamaremos generatriz. Consideremos la superficie S parametrizada por

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R} \times]0, 1[&\longrightarrow H_3 \\ (s, t) &\longmapsto \alpha(t) + s\beta(t). \end{aligned}$$

La superficie S es llamada **superficie reglada**.

Nos interesa estudiar estas superficies con la condición adicional de ser mínimas. Recordemos que las isometrías del espacio ambiente preservan la primera y segunda forma fundamental de una superficie, por lo que también respetan la propiedad de las superficies de ser mínimas. Entonces utilizaremos principalmente las traslaciones por izquierda y rotaciones en el eje z para simplificar nuestro análisis.

Sea S una superficie reglada tal que la traza Γ con algún plano vertical, digamos $ax + by = c$, sea la gráfica de una función. Si p es un punto de la traza, tenemos que $L_{-p}(\Gamma)$ se encuentra en el plano $ax + by = 0$. Luego, mediante una rotación en el eje z podemos llevar dicha traza al plano $y = 0$. Además, como es localmente gráfica de una función, debemos considerar que la generatriz (tratada como campo de una curva en $y = 0$) tiene segunda coordenada no nula. Con ello, tenemos la parametrización dada por:

$$\alpha(t) = (t, 0, f(t)) \quad \text{y} \quad \beta(t) = (u(t), 1, v(t)).$$

El caso restante es cuando las trazas generadas por la intersección con planos verticales no son localmente gráfica de una función. En tal sentido, podemos suponer que se tratan de rectas verticales. Con ello, es suficiente considerar como directriz una curva plana en $z = 0$, que mediante rotaciones en el eje z se puede ver como gráfica de función, y como generatriz rectas verticales; es decir,

$$\alpha(t) = (t, a(t), 0) \quad \text{y} \quad \beta(t) = (0, 0, 1).$$

Este segundo caso ya lo hemos caracterizado.

Trabajemos el primer caso bajo la premisa de que S está reglada por rectas que son geodésicas; es decir, para cada $t \in]0, 1[$, la recta $\gamma_t(s) = \alpha(t) + s\beta(t)$ es una geodésica de H_3 . Recordemos, del Ejemplo 1.13, que tenemos dos casos de rectas $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ que son geodésicas: $x'(0) = y'(0) = 0$ o

$$z'(0) - \frac{1}{2}(x(0)y'(0) - y(0)x'(0)) = 0.$$

En nuestro caso, debido a que $\gamma'_t(0) = (u(t), 1, v(t))$, tenemos que la primera condición no puede cumplirse, por lo que se debe cumplir la segunda. Además, como también $\gamma_t(0) = (t, 0, f(t))$, entonces dicha condición se reduce a

$$v(t) = \frac{t}{2}.$$

Por lo tanto, la parametrización se caracteriza como

$$r(s, t) = (t, 0, f(t)) + s \left(u(t), 1, \frac{t}{2} \right).$$

En el artículo de Bekkar (ver [2]) se prueba el siguiente resultado, aunque se aborda de otro punto de vista.

Teorema 2.10. *Las únicas superficies regladas mínimas de H_3 regladas por rectas geodésicas son, salvo isometría, las porciones de planos, porciones de helicoides y porciones de paraboloides hiperbólicos.*

Demostración. De los casos analizados anteriormente, ya sabemos que el segundo siempre nos dará porciones de planos verticales. Falta caracterizar el otro caso; es decir, cuando tenemos la parametrización

$$S : r(s, t) = \left(t + su(t), s, f(t) + \frac{st}{2} \right).$$

Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial z} = uE^1 + E^2, \\ r_t &= (1 + su') \frac{\partial}{\partial x} + \left(f' + \frac{s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} = (1 + su')E^1 + \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^1 - u \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^2 - (1 + su') E^3,$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_s, r_s \rangle = u^2 + 1, \\ F &= \langle r_s, r_t \rangle = u(1 + su'), \\ G &= \langle r_t, r_t \rangle = (1 + su')^2 + \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \frac{\partial}{\partial s} u E^1 + u \nabla_{r_s} E^1 + \nabla_{r_s} E^2 \\ &= 0, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{\partial}{\partial s} (1 + su') E^1 + (1 + su') \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s} \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^3 \\ &\quad + \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) \nabla_{r_s} E^3 \\ &= \left(u' + \frac{s}{2} + \frac{f'}{2} + \frac{s^2 u'}{4} \right) E^1 - \frac{u}{2} \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^2 + \frac{1 + su'}{2} E^3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{\partial}{\partial t} (1 + su') E^1 + (1 + su') \nabla_{r_t} E^1 + \frac{\partial}{\partial t} \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^3 \\ &\quad + \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) \nabla_{r_t} E^3 \\ &= (su'') E^1 - (1 + su') \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) E^2 + \left(f'' + \frac{s^2 u''}{2} \right) E^3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) \left(u' + \frac{s}{2} + \frac{f'}{2} + \frac{s^2 u'}{4} \right) + \frac{u^2}{2} \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{(1 + su')^2}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right) (su'') + u \left(s + f' + \frac{s^2 u'}{2} \right)^2 (1 + su') \\ &\quad - (1 + su') \left(f'' + \frac{s^2 u''}{2} \right).\end{aligned}$$

Reemplazamos los datos en la ecuación (2.16). En aras de resolver la ecuación diferencial resultante, acomodamos los términos como un polinomio en s :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} ((u^2 + 1)u'')s^2 \\ &+ (-u'((u^2 + 1)f'' + 2uu'f' - u) + u''(u^2 + 1)f')s \\ &+ (-(u^2 + 1)f'' - 2uu'f' + u) = 0.\end{aligned}$$

Por identidad, tenemos que los coeficientes de este polinomio en s deben ser nulos. Así, tenemos que $(u^2 + 1)u'' = -(u^2 + 1)f'' - 2uu'f' + u = 0$; es decir,

$$\begin{cases} u'' = 0, \\ (u^2 + 1)f'' + 2uu'f' - u = 0. \end{cases}$$

De esta forma, u es una función lineal afín, digamos $u(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, y $\frac{d}{dt}((u^2 + 1)f') = u$; es decir,

$$(1 + (at + b)^2)f' = \frac{1}{2}at^2 + bt + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Observamos que la parametrización de S se reduce a:

$$S : \begin{cases} x(s, t) = (as + 1)t + bs, \\ y(s, t) = s, \\ z(s, t) = f(t) + \frac{st}{2}. \end{cases}$$

Despejamos s y t de las primeras ecuaciones y las reemplazamos en la última. Así, S puede describirse, localmente, como la gráfica de la función

$$h(x, y) = f\left(\frac{x - by}{ay + 1}\right) + \frac{(x - by)y}{2(ay + 1)}.$$

Integramos f' de la expresión anterior. Tenemos dos casos:

- Si $a \neq 0$, tenemos que

$$f(t) = \frac{t}{2a} + d \arctan(at + b) + e,$$

con $d, e \in \mathbb{R}$. Luego, S es la gráfica de la función

$$h(x, y) = \frac{x - by}{2a} + d \arctan\left(\frac{ax + b}{ay + 1}\right) + e.$$

Aplicamos la traslación por izquierda $L_{(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}, -e)}$, con lo que tenemos que S es isométrica a

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) : z = d \arctan\left(\frac{x}{y}\right), (x, y) \in U \right\},$$

que se encuentra en un plano si $d = 0$, y en un helicoides si $d \neq 0$.

- Si $a = 0$, tenemos que

$$f(t) = \frac{b}{2(1 + b^2)}t^2 + dt + e,$$

con $d, e \in \mathbb{R}$. Luego, S es la gráfica de la función

$$h(x, y) = \frac{(x - by)(bx + y)}{2(1 + b^2)} + d(x - by) + e.$$

Rotamos en el eje z un ángulo de $\arctan(b)$ y aplicamos la traslación por izquierda $L_{(0, d\sqrt{1+b^2}, -e)}$, con lo que tenemos que S es isométrica a la superficie

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) : z = \frac{xy}{2}, (x, y) \in U \right\},$$

que se encuentra en un paraboloides hiperbólico.

□

De hecho, en el mismo artículo, Bekkar analiza el caso más general: las rectas generadoras son arbitrarias. Con ello, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Toda superficie reglada mínima de H_3 es isométrica a una de estas superficies:*

- *Porción de plano,*
- *Porción del paraboloides hiperbólico $z = \frac{xy}{2}$.*
- *Porción del helicoides parametrizado por*

$$r(t, s) = (s \sin(t), s \cos(t), ct),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es no nulo.

- *Porción de superficie de ecuación*

$$z = \frac{\lambda}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})] - \frac{xy}{2},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es no nulo.

- *Porción de superficie que es localmente gráfica de*

$$z = \frac{1}{2}y(r(x) + x),$$

donde r cumple la ecuación

$$r''(4+r^2) - 2r(r'+1)(r'+2) = 0.$$

- *Porción de superficie parametrizada localmente por*

$$r(t, s) = (t + su(t), s, f(t) - \frac{ts}{2}),$$

donde u y f son soluciones del sistema:

$$\begin{cases} (1+u^2+t^2)u'' - (1+2u'f')tu' = 0 \\ (1+u^2+t^2)f'' - (1+2u'f')(tf' - u) = 0. \end{cases}$$

La prueba de este teorema también se encuentra en [2].

Capítulo 3

Superficies mínimas de traslación en H_3

Recordemos que las superficies mínimas son aquellas que tienen curvatura media nula. Es común otorgar propiedades adicionales a dichas superficies para obtener ejemplos y caracterizar sus propiedades. Una propiedad particular es trabajada por Scherk en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 : las llamadas superficies mínimas de traslación.

En este capítulo estudiaremos aquellas superficies mínimas en el grupo de Heisenberg que similan a las superficies mínimas tipo Scherk. La referencia principal para este capítulo es [7].

3.1. Superficies mínimas de traslación en \mathbb{R}^3

En el espacio euclidiano se definen las superficies mínimas de traslación como aquellos gráficos de funciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} r: I_1 \times I_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, f(x) + g(y)), \end{aligned}$$

donde I_1 e I_2 son intervalos abiertos de \mathbb{R} , y $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Scherk estudió este tipo de superficies y los caracterizó tal como reza el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Las superficies mínimas de traslación en \mathbb{R}^3 son porciones de planos o de superficies parametrizadas por*

$$\begin{aligned} r: I_1 \times I_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y, \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\cos(ax + c)}{\cos(ay + d)} \right| + b \right), \end{aligned}$$

donde I_1 e I_2 son intervalos abiertos de \mathbb{R} y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son constantes, con a no nulo.

Demostración. Utilizamos un proceso similar al trabajado en Heisenberg, pero esta vez el referencial que usaremos es el euclidiano canónico $\{e_1, e_2, e_3\}$. Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} = e_1 + f_x e_3, \\ r_y &= \frac{\partial}{\partial y} + g_y \frac{\partial}{\partial z} = e_2 + g_y e_3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -f_x e_1 - g_y e_2 + e_3$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_x, r_x \rangle = 1 + f_x^2, \\ F &= \langle r_x, r_y \rangle = f_x g_y, \\ G &= \langle r_y, r_y \rangle = 1 + g_y^2. \end{aligned}$$

Solo en esta prueba, y para no cargar la notación, usaremos ∇ para referirnos a la conexión Levi-Civita del espacio euclidiano. En \mathbb{R}^3 , dados dos campos $X, Y \in \mathcal{X}(S)$, donde $Y = Y_1 e_1 + Y_2 e_2 + Y_3 e_3$, se cumple que $\nabla_X Y = X(Y_1) e_1 + X(Y_2) e_2 + X(Y_3) e_3$. De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{r_x} r_x &= \frac{\partial}{\partial x} (1) e_1 + \frac{\partial}{\partial x} (f_x) e_3 = f_{xx} e_3, \\ \nabla_{r_x} r_y &= \frac{\partial}{\partial x} (1) e_2 + \frac{\partial}{\partial x} (g_y) e_3 = 0, \\ \nabla_{r_y} r_y &= \frac{\partial}{\partial y} (1) e_2 + \frac{\partial}{\partial y} (g_y) e_3 = g_{yy} e_3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_x} r_x \rangle &= f_{xx}, \\ \langle N, \nabla_{r_x} r_y \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_y} r_y \rangle &= g_{yy}. \end{aligned}$$

Estrictamente, solo hemos trabajado la curvatura media para superficies en H_3 . El resultado en el espacio euclidiano es totalmente análogo; es decir, en \mathbb{R}^3 la condición de minimalidad se reduce a su similar ecuación (2.16) con nuestra terminología:

$$G \langle N, \nabla_{r_x} r_x \rangle - 2F \langle N, \nabla_{r_x} r_y \rangle + E \langle N, \nabla_{r_y} r_y \rangle = 0.$$

Reemplazamos los datos en esta expresión y obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + g_y^2) f_{xx} + (1 + f_x^2) g_{yy} = 0. \quad (3.1)$$

Como $1 + f_x^2 \neq 0$, podemos reescribir esta expresión como

$$(1 + g_y^2) \frac{f_{xx}}{1 + f_x^2} + g_{yy} = 0.$$

Derivamos la expresión respecto de x y obtenemos

$$(1 + g_y^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{f_{xx}}{1 + f_x^2} \right) = 0.$$

Como $1 + g_y^2 \neq 0$, tenemos que $\frac{f_{xx}}{1 + f_x^2}$ es constante, digamos $a \in \mathbb{R}$. Así, tenemos

$$\frac{d}{dx} (\arctan(f_x)) = a;$$

es decir, $f_x = \tan(ax + c)$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Por otro lado, reemplazamos $f_{xx} = a(1 + f_x^2)$ en (3.1) y simplificamos el factor común no nulo, con lo que obtenemos

$$\frac{d}{dy} (\arctan(g_y)) = -a;$$

es decir, $g_y = \tan(-ax + d)$ para algún $d \in \mathbb{R}$.

Si $a = 0$, tenemos que f y g son lineales afines, por lo que la superficie sería un plano. Para el caso restante, basta integrar f_x y g_y para obtener el resultado deseado. \square

Es directo observar que estas superficies se pueden describir como

$$r(x, y) = (x, 0, f(x)) + (0, y, g(y)).$$

Aunque esta forma parezca superflua, nos motiva a dar una definición similar en el grupo de Heisenberg.

3.2. Superficies mínimas de traslación en el grupo de Heisenberg

Diremos que una superficie es de traslación cuando se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} r: I_1 \times I_2 &\longrightarrow H_3 \\ (x, y) &\longmapsto \gamma_1(x) * \gamma_2(y), \end{aligned}$$

donde I_1 e I_2 son intervalos abiertos de \mathbb{R} y las curvas γ_1, γ_2 están contenidas en planos coordenados diferentes de \mathbb{R}^3 .

De acuerdo a la definición, podemos establecer seis tipos de superficies: una por cada permutación en los planos coordenados. Asignamos los nombres de la siguiente forma:

- **Superficies de tipo 1:** $Im(\gamma_1) \subset \{y = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{x = 0\}$.

- **Superficies de tipo 2:** $Im(\gamma_1) \subset \{y = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{z = 0\}$.
- **Superficies de tipo 3:** $Im(\gamma_1) \subset \{x = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{z = 0\}$.
- **Superficies de tipo 4:** $Im(\gamma_1) \subset \{x = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{y = 0\}$.
- **Superficies de tipo 5:** $Im(\gamma_1) \subset \{z = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{y = 0\}$.
- **Superficies de tipo 6:** $Im(\gamma_1) \subset \{z = 0\}$ y $Im(\gamma_2) \subset \{x = 0\}$.

Antes de analizar cada tipo de superficie, hacemos un par de observaciones:

- Para las superficies de tipo 1 y 4 usaremos las letras x e y como parámetros pues en sus parametrizaciones resultantes nos quedaba precisamente esas letras como variables, lo que conlleva a ser gráficas de funciones. Esto no siempre ocurre. En los otros tipos de superficie, usaremos s y t para denotar los parámetros para no confundirlos con la terminología usual de posición.
- En los siguientes apartados se trabajarán casi todos los tipos de superficies mínimas de traslación. Para los casos restantes, hacemos esta observación.

Primero, algunas superficies se deducen de las mismas fórmulas a trabajar de forma implícita. Por ejemplo, en las superficies tipo 1, tenemos que $Im(\gamma_1) \subset \{y = 0\}$. Esto se puede expresar como $\gamma_1(x) = (x, 0, u(x))$ o $\gamma_1(z) = (u(z), 0, z)$. Es directo observar que, a partir del primer caso, podemos deducir el segundo caso: basta con realizar un cambio de variable implícitamente. Sin embargo, esto solo se puede hacer cuando las curvas a tratar son rectas no “verticales”. Explicaremos estos casos con más precisión en un apartado final, donde caracterizaremos cada uno de ellos.

Procedemos a analizar cada tipo de superficie en esta sección. El proceso general es como el que trabajamos hasta ahora: escribimos los campos r_u y r_v en la base $\{E^1, E^2, E^3\}$, para luego aplicar propiedades de la conexión, pues conocemos cómo esta actúa sobre la base dada, y obtener los datos a reemplazar en la ecuación de superficies mínimas (2.16).

3.2.1. Superficies de tipo 1

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(x) = (x, 0, u(x)), \quad \gamma_2(y) = (0, y, v(y)).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(x, y) = \left(x, y, u(x) + v(y) + \frac{xy}{2} \right).$$

Observamos que esta superficie es la gráfica de una función, y este tipo de superficies ya las hemos estudiado anteriormente. De esta forma, si tomamos $f(x, y) =$

$u(x) + v(y) + \frac{xy}{2}$, por la ecuación de los gráficos mínimos (2.17) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + v'(y)^2)u''(x) - (u'(x) + y)v'(y) + (1 + (u'(x) + y)^2)v''(y) = 0. \quad (3.2)$$

Para resolver esta ecuación, primero veamos un pequeño lema.

Lema 3.2. *En la ecuación (3.2), si $u''(x) \neq 0$ para todo x en un subintervalo $I \subset I_1$, entonces $v'' = 0$.*

Demostración. Derivamos la ecuación (3.2) respecto de x y obtenemos

$$(1 + v'(y)^2)u'''(x) - u''(x)v'(y) + 2(u'(x) + y)u''(x)v''(y) = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$u'''(x) - \left(\frac{v'(y)}{1 + v'(y)^2} \right) u''(x) + 2 \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) (u'(x) + y) u''(x) = 0.$$

En el resto de esta prueba, consideremos $x \in I$. De esta forma, tenemos que $u''(x) \neq 0$ y podemos reescribir la expresión como

$$\frac{u'''(x)}{u''(x)} - \frac{v'(y)}{1 + v'(y)^2} + 2 \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) (u'(x) + y) = 0.$$

Procedemos a derivar la última expresión respecto de y , con lo que obtenemos:

$$-\frac{d}{dy} \left(\frac{v'(y)}{1 + v'(y)^2} \right) + 2 \frac{d}{dy} \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) (u'(x) + y) + 2 \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) u'(x) = -\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left(\frac{v'(y)}{1 + v'(y)^2} \right) - y \frac{d}{dy} \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right).$$

Debido a que u'' no se anula en ningún punto de I , entonces u' no es constante en I ; es decir, $u'(x)$ varía al hacerlo x . Puesto que todo el lado derecho de la igualdad depende solo de y , entonces $\frac{d}{dy} \left(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} \right) = 0$; es decir, $\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2}$ es constante en I_2 , digamos igual a $C \in \mathbb{R}$. Reemplazamos esta información en la última expresión y obtenemos:

$$0 = -C + \frac{1}{2} \left(C - \frac{2v'(y)^2}{1 + v'(y)^2} C \right);$$

es decir,

$$\left(1 + \frac{2v'(y)^2}{1 + v'(y)^2} \right) C = 0.$$

Así, como $1 + \frac{2v'(y)^2}{1 + v'(y)^2} > 0$, entonces $C = 0$. Por lo tanto, $v''(y) = 0$ para todo $y \in I_2$. \square

Este lema simplifica mucho nuestro trabajo: lo usaremos para probar la siguiente proposición.

Proposición 3.3. *En la ecuación (3.2), se cumple que $u'' = 0$.*

Demostración. Asumamos, por contradicción, que existe un punto en I_1 donde u'' no se anula. Luego, por continuidad, tenemos que $u''(x) \neq 0$ para todo x en un intervalo $I \subset I_1$. Entonces, por el lema anterior, tenemos que $v''(y) = 0$ para todo $y \in I_2$. Así, tenemos que $v'(y)$ es constante en todo el intervalo I_2 , digamos igual a $C \in \mathbb{R}$. Reemplazamos esta información en la ecuación (3.2) y obtenemos

$$u''(x)(1 + C^2) - (u'(x) + y)C = 0,$$

o equivalentemente

$$u''(x)(1 + C^2) - u'(x)C = yC.$$

Puesto que todo el lado izquierdo de la ecuación depende solo de x , entonces $C = 0$. Reemplazamos este dato en la última ecuación y obtenemos $u''(x) = 0$ para todo $x \in I_1$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $u'' = 0$. \square

Con el siguiente teorema, caracterizamos todas las superficies de tipo 1.

Teorema 3.4. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 1 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(x, y) = \left(x, y, u(x) + v(y) + \frac{xy}{2} \right),$$

donde $u(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y v tiene la forma

$$v(y) = c \left((a + y)\sqrt{1 + (a + y)^2} + \ln \left(a + y + \sqrt{1 + (a + y)^2} \right) \right) + d,$$

con $c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por la proposición anterior, concluimos que en todas las superficies de Tipo 1 tenemos que u es una función lineal en todo I_1 , digamos $u(x) = ax + b$, según los valores iniciales. Reemplazamos esta información en la ecuación (3.2) y obtenemos

$$-(a + y)v'(y) + v''(y)(1 + (a + y)^2) = 0.$$

Para resolver esta EDO lineal hacemos el cambio de variable $w(y) = v'(y)$ y despejamos:

$$w'(y) + \frac{-(a + y)}{1 + (a + y)^2}w(y) = 0.$$

Multiplicamos por el factor integrante $(1 + (a + y)^2)^{-\frac{1}{2}}$ y reducimos la expresión:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{w(y)}{\sqrt{1 + (a + y)^2}} \right) = 0.$$

De esta forma, obtenemos que

$$w(y) = K\sqrt{1 + (a + y)^2},$$

donde K es una constante real. Basta integrar esta última expresión y utilizar valores iniciales para hallar v . \square

3.2.2. Superficies de tipo 2

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(s) = (s, 0, u(s)), \quad \gamma_2(t) = (v(t), t, 0).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(s, t) = \left(s + v(t), t, u(s) + \frac{st}{2} \right).$$

Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial x} + \left(u' + \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + (u' + t)E^3, \\ r_t &= v' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial z} = v'E^1 + E^2 + \frac{tv' - v}{2}E^3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -(u' + t)E^1 + \left(u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) E^2 + E^3.$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_s, r_s \rangle = 1 + (u' + t)^2, \\ F &= \langle r_s, r_t \rangle = v' + \frac{1}{2}(u' + t)(tv' - v), \\ G &= \langle r_t, r_t \rangle = (v')^2 + 1 + \frac{1}{4}(tv' - v)^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s}(u' + t)E^3 + (u' + t)\nabla_{r_s} E^3 \\ &= -(u' + t)E^2 + u''E^3, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{\partial}{\partial s}(v')E^1 + v'\nabla_{r_s} E^1 + \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{tv' - v}{2} \right) E^3 + \frac{tv' - v}{2} \nabla_{r_s} E^3 \\ &= \frac{1}{2}(u' + t)E^1 + \frac{1}{4}(v - 2u'v' - 3tv')E^2 + \frac{1}{2}E^3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{\partial}{\partial t}(v')E^1 + v'\nabla_{r_t} E^1 + \nabla_{r_t} E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{tv' - v}{2} \right) E^3 + \frac{tv' - v}{2} \nabla_{r_t} E^3 \\ &= \left(v'' + \frac{tv' - v}{2} \right) E^1 + \frac{1}{2}(vv' - t(v')^2)E^2 + \frac{1}{2}tv''E^3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= -(u' + t) \left(u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) + u'', \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{1}{2}(u' + t)^2 + \frac{1}{4} \left(u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) (v - 2u'v' - 3tv') + \frac{1}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -(u' + t) \left(v'' + \frac{tv' - v}{2} \right) + \frac{1}{4} (2u'v' + tv' + v) (vv' - t(v')^2) + \frac{tv''}{2}. \end{aligned}$$

Procederemos a reemplazar los datos en la ecuación (2.16). Esta vez agruparemos los términos de t como coeficientes de u' y su derivada (y multiplicamos todo por 4 para evitar fracciones) Así, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$T_0(t)u''(s) + T_1(t)u'(s) + T_2(t)(u'(s))^2 + T_3(t)(u'(s))^3 + T_4(t) = 0, \quad (3.3)$$

de acuerdo a la siguiente notación:

$$\begin{cases} T_0(t) = 4 + 4v'(t)^2 + (v(t) - tv'(t))^2, \\ T_1(t) = 2[v(t) - tv'(t) - 2(1 + 2t^2)v''(t)], \\ T_2(t) = -10tv''(t), \\ T_3(t) = -4v''(t), \\ T_4(t) = 2tv(t) - 2(2 + t^2)v'(t) - 2t(1 + t^2)v''(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Observamos que T_0 es estrictamente positivo; en particular, es no nulo. Así, podemos reescribir la ecuación (3.3) como

$$u''(s) + \frac{T_1(t)}{T_0(t)}u'(s) + \frac{T_2(t)}{T_0(t)}(u'(s))^2 + \frac{T_3(t)}{T_0(t)}(u'(s))^3 + \frac{T_4(t)}{T_0(t)} = 0.$$

Observamos que hay un término que depende solo de s y uno que solo depende de t , por lo que derivamos la expresión primero respecto a s , y seguidamente derivamos respecto de t para anularlos:

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{T_1(t)}{T_0(t)} \right) + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{T_2(t)}{T_0(t)} \right) (u'(s)) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{T_3(t)}{T_0(t)} \right) (u'(s))^2 \right) u''(s) = 0.$$

Tenemos un pequeño lema:

Lema 3.5. *En la ecuación (3.3), si $u''(s) \neq 0$ para todo s en un subintervalo $I \subset I_1$, entonces $v'' = 0$.*

Demostración. Para esta prueba, consideremos $s \in I$. Como $u''(s) \neq 0$, tenemos que el polinomio dentro del paréntesis de la última expresión, respecto de $u'(s)$, es nulo. Así, los coeficientes de dicho polinomio se anulan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_1(t)}{T_0(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_2(t)}{T_0(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_3(t)}{T_0(t)} \right) = 0.$$

En particular, T_2 y T_3 son múltiplos escalares de T_0 ; es decir, existen $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} tv''(t) = K_1[4 + 4v'(t)^2 + (v(t) - tv'(t))^2], \\ v''(t) = K_2[4 + 4v'(t)^2 + (v(t) - tv'(t))^2]. \end{cases}$$

Observamos que si $v''(t) \neq 0$ en algún subintervalo de I_2 , dividimos las expresiones y obtenemos que t es constante en dicho subintervalo, lo cual es imposible. Por lo tanto, tenemos que $v''(t) = 0$ para todo $t \in I_2$. \square

Con ayuda de este lema, probaremos el siguiente teorema que caracteriza el tipo de superficies de este apartado.

Teorema 3.6. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 2 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(s, t) = \left(s + v(t), t, u(s) + \frac{st}{2} \right),$$

donde u y v cumplen una de las siguientes opciones:

1. $u(s) = \frac{a}{2(1+a^2)}s^2 + bs + c$, y $v(t) = at + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. $u(s) = as + d$, y

$$v(t) = \frac{b}{2a+t} + \frac{c}{2(2a+t)} [(a+t)\sqrt{1+(a+t)^2} + \ln(a+t + \sqrt{1+(a+t)^2})],$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Cada uno de los casos corresponde a las opciones que nos da el lema anterior.

1. Consideremos que u'' no es idénticamente nulo; es decir, existe un punto donde no se anula. Luego, existe un subintervalo $I \subset I_1$ donde no se anula, y por el lema anterior tenemos que $v''(t) = 0$. Así, según las condiciones iniciales, podemos escribir $v(t) = at + d$. Reemplazamos esta información en las ecuaciones (3.3) y (3.4), con lo cual obtenemos la siguiente identidad:

$$(4 + 4a^2 + d^2)u''(s) + 2du'(s) + 2dt - 4a = 0,$$

que se puede reescribir como

$$d \cdot t = -\frac{1}{2} ((4 + 4a^2 + d^2)u''(s) + 2du'(s) - 4a),$$

Como el lado derecho de la expresión solo depende de s , tenemos que $d = 0$. Luego, reemplazando este último dato en la expresión anterior, tenemos $u''(s) = \frac{a}{1+a^2}$. Integrando dos veces esta expresión, tenemos el resultado buscado.

2. Consideremos $u'' = 0$. Luego, según las condiciones iniciales, podemos escribir $u(s) = as + d$. Reemplazamos esta información en la ecuación (3.3) y obtenemos la siguiente identidad:

$$2v(t)(a+t) - 2v'(t)(at+2+t^2) - 2v''(t)(2a(1+2t^2) + 5a^2t + 2a^3 + t(1+t^2)) = 0.$$

Simplificamos y reordenamos los términos y obtenemos la siguiente EDO:

$$(a+t) \frac{d}{dt} ((2a+t)v(t)) = (1+(a+t)^2) \frac{d^2}{dt^2} ((2a+t)v(t)),$$

la cual mediante un cambio de variable se transforma en una de primer orden. Basta resolverla y obtenemos el resultado buscado.

□

3.2.3. Superficies de tipo 3

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(s) = (0, s, u(s)), \quad \gamma_2(t) = (t, v(t), 0).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(s, t) = \left(t, s + v(t), u(s) - \frac{st}{2} \right).$$

Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial y} + \left(u' - \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} = E^2 + (u' - t)E^3, \\ r_t &= \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} - \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + v'E^2 + \frac{v - tv'}{2} E^3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = \left(-u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) E^1 + (u' - t)E^2 - E^3.$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_s, r_s \rangle = 1 + (u' - t)^2, \\ F &= \langle r_s, r_t \rangle = v' + \frac{1}{2}(u' - t)(v - tv'), \\ G &= \langle r_t, r_t \rangle = 1 + (v')^2 + \frac{1}{4}(v - tv')^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s} (u' - t) E^3 + (u' - t) \nabla_{r_s} E^3 \\ &= (u' - t) E^1 + u'' E^3, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s} (v') E^2 + v' \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v - tv'}{2} \right) E^3 + \frac{v - tv'}{2} \nabla_{r_s} E^3 \\ &= \frac{1}{4}(v + 2u'v' - 3tv') E^1 - \frac{1}{2}(u' - t) E^2 - \frac{1}{2} E^3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \nabla_{r_t} E^1 + \frac{\partial}{\partial t} (v') E^2 + v' \nabla_{r_t} E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v - tv'}{2} \right) E^3 + \frac{v - tv'}{2} \nabla_{r_t} E^3 \\ &= \frac{1}{2}(vv' - t(v')^2) E^1 + \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} \right) E^2 - \frac{1}{2} tv'' E^3. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= (u' - t) \left(-u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) - u'', \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= \frac{1}{4} \left(-u'v' + \frac{tv' + v}{2} \right) (v + 2u'v' - 3tv') - \frac{1}{2}(u' - t)^2 + \frac{1}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= \frac{1}{4} (-2u'v' + tv' + v) (vv' - t(v')^2) + (u' - t) \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} \right) + \frac{tv''}{2}. \end{aligned}$$

Procederemos a reemplazar los datos en la ecuación (2.16). Utilizamos la notación de (3.4) y esta vez multiplicamos toda la expresión por -4 para obtener la siguiente ecuación diferencial:

$$T_0(t)u''(s) + T_1(t)u'(s) - T_2(t)(u'(s))^2 + T_3(t)(u'(s))^3 - T_4(t) = 0. \quad (3.5)$$

Para resolver esta ecuación utilizaremos el resultado obtenido de las superficies de tipo 2. Resumimos el resultado en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 3 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(s, t) = \left(t, s + v(t), u(s) - \frac{st}{2} \right),$$

donde u y v cumplen una de las siguientes opciones:

1. $u(s) = \frac{a}{2(1+a^2)}s^2 + bs + c$, $y v(t) = -at + d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. $u(s) = as + d$, y

$$v(t) = \frac{b}{2a-t} + \frac{c}{2(2a-t)} \left[(a-t)\sqrt{1+(a-t)^2} + \ln(a-t + \sqrt{1+(a-t)^2}) \right],$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Observemos que podemos pasar de la ecuación (3.5) a la ecuación (3.3). Basta cambiar el nombre de una de las funciones: u por $-u$. Luego, utilizamos el teorema 3.6 para hallar el resultado, y consideramos coeficientes adecuados para u y v de acuerdo a las condiciones iniciales. \square

3.2.4. Superficies de tipo 4

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(y) = (0, y, v(y)), \quad \gamma_2(x) = (x, 0, u(x)).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(x, y) = \left(x, y, u(x) + v(y) - \frac{xy}{2} \right).$$

Nuevamente, esta superficie es la gráfica de una función, por lo que procedemos como en las superficies de tipo 1. De esta forma, si tomamos $f(x, y) = u(x) + v(y) - \frac{xy}{2}$, por la ecuación de los gráficos mínimos (2.17) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + (v'(y) - x)^2)u''(x) + (v'(y) - x)u'(x) + (1 + u'(x)^2)v''(y) = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación es muy parecida a la ecuación (3.2). Utilizaremos el resultado principal de las superficies de tipo 1 para probar directamente el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 4 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(x, y) = \left(x, y, u(x) + v(y) - \frac{xy}{2} \right),$$

donde $v(y) = ay + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y u tiene la forma

$$u(x) = c \left((a+x) \sqrt{1+(a+x)^2} + \ln \left(a+x + \sqrt{1+(a+x)^2} \right) \right) + d,$$

con $c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Observemos que podemos pasar de la ecuación (3.2) a la ecuación (3.6). Basta intercambiar las variables x e y , y cambiar el nombre de las funciones: u por $-v$ y v por u . Luego, utilizamos el teorema 3.4 para hallar el resultado, y consideramos coeficientes adecuados para u y v de acuerdo a las condiciones iniciales. \square

3.2.5. Superficies de tipo 5

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(t) = (v(t), t, 0), \quad \gamma_2(s) = (s, 0, u(s)).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(s, t) = \left(s + v(t), t, u(s) - \frac{st}{2} \right).$$

Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial x} + \left(u' - \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + u' E^3, \\ r_t &= v' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial z} = v' E^1 + E^2 + \left(\frac{tv' - v}{2} - s \right) E^3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -u' E^1 + \left(s - \frac{tv' - v}{2} + u' v' \right) E^2 + E^3.$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_s, r_s \rangle = 1 + (u')^2, \\ F &= \langle r_s, r_t \rangle = v' + \left(\frac{tv' - v}{2} - s \right) u', \\ G &= \langle r_t, r_t \rangle = (v')^2 + 1 + \frac{1}{4}(tv' - v - 2s)^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned}
\nabla_{r_s} r_s &= \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s}(u')E^3 + u'\nabla_{r_s} E^3 \\
&= -u'E^2 + u''E^3, \\
\nabla_{r_s} r_t &= \frac{\partial}{\partial s}(v')E^1 + v'\nabla_{r_s} E^1 + \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)E^3 \\
&\quad + \left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)\nabla_{r_s} E^3 \\
&= \frac{u'}{2}E^1 - \frac{1}{2}\left(u'v' + \frac{tv' - v}{2} - s\right)E^2 - \frac{1}{2}E^3, \\
\nabla_{r_t} r_t &= \frac{\partial}{\partial t}(v')E^1 + v'\nabla_{r_t} E^1 + \nabla_{r_t} E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)E^3 \\
&\quad + \left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)\nabla_{r_t} E^3 \\
&= \left(v'' + \frac{tv' - v}{2} - s\right)E^1 - \left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)v'E^2 + \frac{1}{2}tv''E^3.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= -\left(s - \frac{tv' - v}{2} + u'v'\right)u' + u'', \\
\langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{2}\left(u'v' + \frac{tv' - v}{2} - s\right)\left(s - \frac{tv' - v}{2} + u'v'\right) - \frac{1}{2}, \\
\langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -\left(\frac{tv' - v}{2} - s\right)\left(s - \frac{tv' - v}{2} + u'v'\right)v' \\
&\quad + \left(s - v'' - \frac{tv' - v}{2}\right)u' + \frac{tv''}{2}.
\end{aligned}$$

Procederemos a reemplazar los datos en la ecuación 2.16. Similar a como realizamos el análisis en las superficies de tipo 2 y 3, agruparemos los términos de t como coeficientes de u' y su derivada (y multiplicamos todo por 4 para evitar fracciones); sin embargo, dos de dichos coeficientes también dependerán de s , con lo que la resolución de la ecuación diferencial será diferente. Utilizamos la siguiente notación:

$$\begin{cases}
S_0(s, t) = 4 + (2s + v(t) - tv'(t))^2 + (2v'(t))^2, \\
S_1(s, t) = -2(2s + v(t) - tv'(t) + 2v''(t)), \\
S_2(t) = 2tv''(t), \\
S_3(t) = -4v''(t), \\
S_4(t) = 4v'(t) + 2tv''(t).
\end{cases} \quad (3.7)$$

Así, obtenemos la siguiente ecuación diferencial que caracteriza a este tipo de superficies:

$$S_0(s, t)u''(s) + S_1(s, t)u'(s) + S_2(t)(u'(s))^2 + S_3(t)(u'(s))^3 + S_4(t) = 0. \quad (3.8)$$

El siguiente lema reduce los casos que se deben estudiar. La prueba consiste en realizar los mismos artificios de derivaciones consecutivas que se usaron en las resoluciones de las ecuaciones diferenciales de los otros tipos de superficies. Los detalles se encuentran en [7].

Lema 3.9. *En la ecuación (3.8), si $u''(s) \neq 0$ para todo s en un subintervalo $I \subset I_1$, entonces $v'' = 0$.*

Con ayuda de este lema, podemos probar directamente el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 5 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(s, t) = \left(s + v(t), t, u(s) - \frac{st}{2} \right),$$

donde u y v cumplen una de las siguientes opciones:

1. $u(s) = c$ y $v(t) = a\frac{1}{t} + b$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. $v(t) = at + b$ y

$$u(s) = -\frac{as^2 + abs + c}{2(1 + a^2)} + d \left(\frac{s}{2} + \frac{b}{4} \right) \sqrt{4(1 + a^2) + (2s + b)^2} \\ + d(1 + a^2) \ln \left(2s + b + \sqrt{4(1 + a^2) + (2s + b)^2} \right),$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero analicemos el caso $u'' = 0$. Derivamos respecto a s ambos lados de la ecuación (3.8) y obtenemos

$$S_0(s, t)u'''(s) + (4s + 2v(t) - 2tv'(t) + 2v''(t) (-2 + 2tu'(s) - 6(u'(s))^2)) u''(s) \\ - 4u'(s) = 0.$$

Usamos que u'' y u''' se anulan, y de esta última expresión obtenemos $u'(s) = 0$; es decir, u es constante. Ahora reemplazamos este dato en la ecuación (3.8) y nos queda $S_4(t) = 0$; es decir,

$$tv''(t) + 2v'(t) = 0.$$

Así, tenemos que $tv'(t) + v(t)$ es constante, digamos igual a $b \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $\frac{d}{dt}(tv) = b$, obtenemos que $tv - tb$ es constante, digamos igual a $a \in \mathbb{R}$. Con eso observamos que $u(s)$ y $v(t)$ son de la forma enunciada en 1.

Ahora analicemos el caso restante: $u'' \neq 0$. Por el lema anterior tenemos que $v'' = 0$; es decir, v es lineal afín, digamos $v(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Reemplazamos este dato en la ecuación (3.8) y obtenemos la siguiente EDO:

$$(4 + (2s + b)^2 + 4a^2)u''(s) - 2(2s + b)u'(s) + 4a = 0.$$

Hacemos el cambio de variable $y(s) = u'(s)$ y multiplicamos por el factor integrante $(4 + 4a^2 + (2s + b)^2)^{-\frac{1}{2}}$, con lo que obtenemos

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{y(s)}{\sqrt{4 + 4a^2 + (2s + b)^2}} \right) = -\frac{4a}{\sqrt{(4 + 4a^2 + (2s + b)^2)^3}}$$

Integramos la expresión y despejamos y :

$$-\frac{a(2x + b)}{2(a^2 + 1)} + C\sqrt{4(1 + a^2) + (2x + b)^2}.$$

Basta integrar nuevamente la expresión y acomodar las constantes de integración para llegar al resultado buscado de la forma 2. \square

3.2.6. Superficies de tipo 6

Localmente, tenemos las parametrizaciones:

$$\gamma_1(t) = (t, v(t), 0), \quad \gamma_2(s) = (0, s, u(s)).$$

De esta forma, obtenemos la superficie

$$r(s, t) = \left(t, s + v(t), u(s) + \frac{st}{2} \right).$$

Para cada $p \in S$ tomamos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial y} + \left(u' + \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} = E^2 + u'E^3, \\ r_t &= \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + \frac{s}{2} \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + v'E^2 + \left(\frac{v - tv'}{2} + s \right) E^3. \end{aligned}$$

También hallamos un vector normal a $T_p S$:

$$N = \left(s + \frac{v - tv'}{2} - u'v' \right) E^1 + u'E^2 - E^3.$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle r_s, r_s \rangle = 1 + (u')^2, \\ F &= \langle r_s, r_t \rangle = v' - \left(\frac{tv' - v}{2} - s \right) u', \\ G &= \langle r_t, r_t \rangle = (v')^2 + 1 + \frac{1}{4}(tv' - v - 2s)^2. \end{aligned}$$

Luego, aplicamos las propiedades de la conexión para obtener

$$\begin{aligned}
\nabla_{r_s} r_s &= \nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s}(u')E^3 + u'\nabla_{r_s} E^3 \\
&= u'E^1 + u''E^3, \\
\nabla_{r_s} r_t &= \nabla_{r_s} E^1 + \frac{\partial}{\partial s}(v')E^2 + v'\nabla_{r_s} E^2 + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)E^3 \\
&\quad + \left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)\nabla_{r_s} E^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(u'v' + \frac{v-tv'}{2} + s\right)E^1 - \frac{u'}{2}E^2 + \frac{1}{2}E^3, \\
\nabla_{r_t} r_t &= \nabla_{r_t} E^1 + \frac{\partial}{\partial t}(v')E^2 + v'\nabla_{r_t} E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)E^3 \\
&\quad + \left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)\nabla_{r_t} E^3 \\
&= \left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)v'E^1 + \left(v'' - \frac{v-tv'}{2} - s\right)E^2 - \frac{1}{2}tv''E^3.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= \left(s + \frac{v-tv'}{2} - u'v'\right)u' - u'', \\
\langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}\left(u'v' + \frac{v-tv'}{2} + s\right)\left(s + \frac{v-tv'}{2} - u'v'\right) - \frac{1}{2}, \\
\langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= \left(\frac{v-tv'}{2} + s\right)\left(s + \frac{v-tv'}{2} - u'v'\right)v' \\
&\quad + \left(v'' - \frac{v-tv'}{2} - s\right)u' + \frac{tv''}{2}.
\end{aligned}$$

Reemplazamos los datos en la ecuación 2.16. Para ordenar, volvemos a utilizar la misma notación de (3.7) y esta vez multiplicamos todo por -4 para evitar fracciones. Así, obtenemos la siguiente ecuación diferencial que caracteriza a este tipo de superficies:

$$S_0(s, t)u''(s) + S_1(s, t)u'(s) - S_2(t)(u'(s))^2 + S_3(t)(u'(s))^3 - S_4(t) = 0. \quad (3.9)$$

Teorema 3.11. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 6 en el grupo de Heisenberg están parametrizadas por*

$$r(s, t) = \left(t, s + v(t), u(s) - \frac{st}{2}\right),$$

donde u y v cumplen una de las siguientes opciones:

1. $u(s) = c$ y $v(t) = a\frac{1}{t} + b$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$2. v(t) = at + b \text{ y}$$

$$u(s) = \frac{as^2 + abs + c}{2(1 + a^2)} + d \left(\frac{s}{2} + \frac{b}{4} \right) \sqrt{4(1 + a^2) + (2s + b)^2} \\ + d(1 + a^2) \ln \left(2s + b + \sqrt{4(1 + a^2) + (2s + b)^2} \right),$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demostración. Observemos que podemos pasar de la ecuación (3.9) a la ecuación (3.8). Basta cambiar el nombre de una de las funciones: u por $-u$. Luego, utilizamos el teorema 3.10 para hallar el resultado, y consideramos coeficientes adecuados para u y v de acuerdo a las condiciones iniciales. \square

3.2.7. Casos especiales

Como se mencionó en una observación anterior, faltan caracterizar las superficies mínimas de traslación que son generadas por alguna recta “vertical”: que solo aparezca el parámetro una vez. Estos casos restantes los analizamos brevemente en las siguientes líneas:

1. De tipo 1:

- Consideremos $\gamma_1(s) = (c, 0, s)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(t) = (0, t, v(t))$. No se impone ninguna condición a v , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(c, t, s + v(t) + \frac{ct}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

- Consideremos $\gamma_1(s) = (s, 0, u(s))$ y $\gamma_2(t) = (0, c, t)$, con $c \in \mathbb{R}$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(s, c, u(s) + t + \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

2. De tipo 2:

- Consideremos $\gamma_1(s) = (c, 0, s)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(t) = (v(t), t, 0)$. Tenemos la superficie resultante:

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(c + v(t), t, s + \frac{ct}{2} \right).$$

Procedemos con el mismo tratamiento. Para cada $p \in S$, por 1.2 tenemos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial z} = E^3, \\ r_t &= v' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} = v' E^1 + E^2 + \frac{tv' - v}{2} E^3. \end{aligned}$$

Tenemos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -E^1 + v' E^2.$$

Tenemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{tv' - v}{2}, \\ G &= (v')^2 + 1 + \left(\frac{tv' - v}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes conexiones:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= 0, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{1}{2} E^1 - \frac{v'}{2} E^2, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \left(v'' + \frac{tv' - v}{2} \right) E^1 + \frac{1}{2} (vv' - t(v')^2) E^2 + \frac{1}{2} tv'' E^3. \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{1}{2} - \frac{(v')^2}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -\left(v'' + \frac{tv' - v}{2} \right) - \left(\frac{tv' - v}{2} \right) (v')^2. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos los datos en la ecuación (2.16) y obtenemos

$$-v'' = 0;$$

es decir, v debe ser lineal afín. Observamos que en este caso la superficie también se encuentra dentro de un plano.

- Consideremos $\gamma_1(s) = (s, 0, u(s))$ y $\gamma_2(t) = (t, c, 0)$, con $c \in \mathbb{R}$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(s + t, c, u(s) + \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

3. De tipo 3:

- Consideremos $\gamma_1(s) = (0, c, s)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(t) = (t, v(t), 0)$. Tenemos la superficie resultante:

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(t, c + v(t), s - \frac{ct}{2} \right).$$

Procedemos con el mismo tratamiento. Para cada $p \in S$, por 1.2 tenemos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial z} = E^3, \\ r_t &= \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + v' E^2 + \frac{v - tv'}{2} E^3. \end{aligned}$$

Tenemos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -v' E^1 + E^2.$$

Tenemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{v - tv'}{2}, \\ G &= 1 + (v')^2 + \left(\frac{v - tv'}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes conexiones:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= 0, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{v'}{2} E^1 - \frac{1}{2} E^2, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{1}{2} (vv' - t(v')^2) E^1 + \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} \right) E^2 - \frac{1}{2} tv'' E^3. \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{(v')^2}{2} - \frac{1}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -\left(\frac{v - tv'}{2} \right) (v')^2 + \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos los datos en la ecuación (2.16) y obtenemos

$$v'' = 0;$$

es decir, v debe ser lineal afín. Observamos que en este caso la superficie también se encuentra dentro de un plano.

- Consideremos $\gamma_1(s) = (0, s, u(s))$ y $\gamma_2(t) = (c, t, 0)$, con $c \in \mathbb{R}$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(c, s + t, u(s) - \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

4. De tipo 4:

- Consideremos $\gamma_1(t) = (0, t, v(t))$ y $\gamma_2(s) = (c, 0, s)$, con $c \in \mathbb{R}$. No se impone ninguna condición a v , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(c, t, s + v(t) - \frac{ct}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

- Consideremos $\gamma_1(t) = (0, c, t)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(s) = (s, 0, u(s))$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(s, c, u(s) + t - \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

5. De tipo 5:

- Consideremos $\gamma_1(t) = (v(t), t, 0)$ y $\gamma_2(s) = (c, 0, s)$, con $c \in \mathbb{R}$. Tenemos la superficie resultante:

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = r(s, t) = \left(c + v(t), t, s - \frac{ct}{2} \right).$$

Procedemos con el mismo tratamiento. Para cada $p \in S$, por 1.2 tenemos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{\partial}{\partial z} = E^3, \\ r_t &= v' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} = v' E^1 + E^2 + \left(\frac{tv' - v}{2} - c \right) E^3. \end{aligned}$$

Tenemos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -E^1 + v' E^2.$$

Tenemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{tv' - v}{2} - c, \\ G &= (v')^2 + 1 + \left(\frac{tv' - v}{2} - c \right)^2. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes conexiones:

$$\begin{aligned}\nabla_{r_s} r_s &= 0, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{1}{2} E^1 - \frac{v'}{2} E^2, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \left(v'' + \frac{tv' - v}{2} - c \right) E^1 + \frac{tv' - v}{2} E^2 - cv' E^3 + \frac{1}{2} tv'' E^3.\end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned}\langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{1}{2} - \frac{(v')^2}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -\left(v'' + \frac{tv' - v}{2} - c \right) - \left(\frac{tv' - v}{2} - c \right) (v')^2.\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos los datos en la ecuación (2.16) y obtenemos

$$-v'' = 0;$$

es decir, v debe ser lineal afín. Observamos que en este caso la superficie también se encuentra dentro de un plano.

- Consideremos $\gamma_1(t) = (t, c, 0)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(s) = (s, 0, u(s))$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = r(s, t) = \left(s + t, c, u(s) - \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

6. De tipo 6:

- Consideremos $\gamma_1(t) = (t, v(t), 0)$ y $\gamma_2(s) = (0, c, s)$, con $c \in \mathbb{R}$. Tenemos la superficie resultante:

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(t, c + v(t), s + \frac{ct}{2} \right).$$

Procedemos con el mismo tratamiento. Para cada $p \in S$, por 1.2 tenemos la base de $T_p S$:

$$\begin{aligned}r_s &= \frac{\partial}{\partial z} = E^3, \\ r_t &= \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial z} = E^1 + v' E^2 + \left(\frac{v - tv'}{2} + c \right) E^3.\end{aligned}$$

Tenemos un vector normal a $T_p S$:

$$N = -v' E^1 + E^2.$$

Tenemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= \frac{v - tv'}{2} + c, \\ G &= 1 + (v')^2 + \left(\frac{v - tv'}{2} + c \right)^2. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes conexiones:

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= 0, \\ \nabla_{r_s} r_t &= \frac{v'}{2} E^1 - \frac{1}{2} E^2, \\ \nabla_{r_t} r_t &= \left(\frac{v - tv'}{2} + c \right) v' E^1 + \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} - c \right) E^2 - \frac{1}{2} tv'' E^3. \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \langle N, \nabla_{r_s} r_s \rangle &= 0, \\ \langle N, \nabla_{r_s} r_t \rangle &= -\frac{(v')^2}{2} - \frac{1}{2}, \\ \langle N, \nabla_{r_t} r_t \rangle &= -\left(\frac{v - tv'}{2} + c \right) (v')^2 + \left(v'' - \frac{v - tv'}{2} - c \right). \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos los datos en la ecuación (2.16) y obtenemos

$$v'' = 0;$$

es decir, v debe ser lineal afín. Observamos que en este caso la superficie también se encuentra dentro de un plano.

- Consideremos $\gamma_1(t) = (c, t, 0)$, con $c \in \mathbb{R}$, y $\gamma_2(s) = (0, s, u(s))$. No se impone ninguna condición a u , pues es directo observar que la superficie resultante

$$S : r(s, t) = \gamma_1(s) * \gamma_2(t) = \left(c, s + t, u(s) + \frac{cs}{2} \right)$$

se encuentra en un plano, y por lo tanto S es minimal.

Es inmediato observar que si las dos curvas son rectas “verticales”, entonces al operar no genera una superficie.

Con ello, quedan determinadas todas las superficies mínimas de traslación en el grupo de Heisenberg.

3.3. Superficies mínimas de traslación en otras geometrías de Thurston

A continuación, presentamos resultados análogos al de H_3 en algunas otras de las ocho geometrías de Thurston. El análisis sigue la misma secuencia que lo trabajado en las secciones anteriores.

3.3.1. En $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Representamos \mathbb{H}^2 como la mitad superior del plano cartesiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, con la operación de grupo dada por la composición de aplicaciones afines. De esta forma, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es un grupo de Lie con la operación

$$\begin{aligned} * : (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ ((x, y, z), (x', y', z')) &\longmapsto (x + x'y, yy', z + z'). \end{aligned}$$

Tenemos su métrica invariante izquierda dada por

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2.$$

Con ello podemos describir toda la geometría de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, y podemos analizar sus superficies mínimas de traslación. Debido a la restricción de este espacio, no podemos considerar curvas en el plano $y = 0$. De esta forma, solo podemos considerar las curvas en los planos coordenados restantes.

Consideremos las curvas

$$\begin{cases} \alpha(s) = (0, s, f(s)), & s > 0 \\ \beta(t) = (g(t), t, 0), & t > 0. \end{cases}$$

donde f y g son funciones diferenciables. Como la operación del grupo no es conmutativo, podemos definir dos tipos de superficies en este espacio: del tipo 1, dadas por $\alpha(s) * \beta(t)$, y del tipo 2, dadas por $\beta(t) * \alpha(s)$. A continuación, daremos el resultado de la clasificación en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.12. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 1 en el grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ están parametrizadas por*

$$r(s, t) = (sg(t), st, f(s)),$$

donde f y g cumplen una de las siguientes opciones:

1. $f(s) = as + b$, y $g(t) = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. $f(s) = a \ln(s) + b$, y $g(t) = -\sqrt{c - t^2}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. $f(s) = \frac{a}{1 - m} s^{1-m} + b$, y $g(t) = -\sqrt{c - t^2}$, con $a, b, c, m \in \mathbb{R}$.
4. $f(s) = -\frac{1}{a} \sqrt{b - 2a \ln(s)} + c$, y $g(t)$ satisface la ecuación:

$$[(1 + a)t^2 + ag(t)^2]g''(t) = tg'(t)[1 + g'(t)^2],$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$5. f(s) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{1}{s \sqrt{s^{2(m-1)} + \frac{a}{b(m-1)}}} ds \text{ y } g(t) \text{ satisface la ecuación:}$$

$$[(m+a)t^2 + ag(t)^2]g''(t) = mtg'(t)[1 + g'(t)^2],$$

con $a, b, c, m \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.13. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 2 en el grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ están parametrizadas por*

$$r(s, t) = (g(t), st, f(s)),$$

donde f y g cumplen una de las siguientes opciones:

$$1. f(s) = \arcsen\left(\frac{s}{a}\right) + b, \text{ y } g(t) = c \ln(t) + d, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$2. f(s) = \arcsen\left(\frac{s}{a}\right) + b, \text{ y } g(t) = \frac{c}{m+1} t^{m+1} + d, \text{ con } a, b, c, d, m \in \mathbb{R}.$$

$$3. f(s) = \pm \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + as^2}}{s}\right) + b, \text{ y } g(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2m \ln(t) - c}} dt, \\ \text{con } a, b, c, m \in \mathbb{R}.$$

$$4. f(s) = -\frac{a}{2s^2} + b, \text{ y } g(t) = \frac{1}{a} \sqrt{c + mt^2} + d, \text{ con } a, b, c, d, m \in \mathbb{R}.$$

$$5. f(s) = \int \frac{1}{s \sqrt{cs^{2(b+1)} - \frac{b-1}{b+1}}} ds, \text{ y } g(t) = \sqrt{|b|} \int \frac{t^b}{at^{2b} + bd} dt, \\ \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Además, los casos restantes, dados por las rectas $\alpha(s) = (0, c, s), s > 0$ y $\beta(t) = (t, d, 0), t > 0$, con $c, d \in \mathbb{R}$, generan planos, los cuales son mínimos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

La prueba de estos teoremas y su análisis correspondiente se encuentra en [13].

3.3.2. En Sol_3

Podemos representar Sol_3 como \mathbb{R}^3 con la operación de grupo

$$*: Sol_3 \times Sol_3 \longrightarrow Sol_3 \\ ((x, y, z), (x', y', z')) \longmapsto (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z').$$

Tenemos su métrica invariante izquierda dada por

$$g = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2.$$

Con ello podemos describir toda la geometría de Sol_3 , y podemos analizar sus superficies mínimas de traslación.

Al igual que en el grupo de Heisenberg, podemos distinguir seis tipos de superficies. Tomamos α y β dos curvas en planos coordinados diferentes y tenemos:

- **Superficies de tipo 1:** $Im(\alpha) \subset \{z = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{y = 0\}$.
- **Superficies de tipo 2:** $Im(\alpha) \subset \{z = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{x = 0\}$.
- **Superficies de tipo 3:** $Im(\alpha) \subset \{y = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{x = 0\}$.
- **Superficies de tipo 4:** $Im(\alpha) \subset \{y = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{z = 0\}$.
- **Superficies de tipo 5:** $Im(\alpha) \subset \{x = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{z = 0\}$.
- **Superficies de tipo 6:** $Im(\alpha) \subset \{x = 0\}$ y $Im(\beta) \subset \{y = 0\}$.

Enunciamos directamente los resultados para algunas de estas superficies.

Teorema 3.14. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 1 en Sol_3 son los planos $x = x_0$, los planos $y = y_0$, los planos $z = z_0$ y las superficies que están parametrizadas por*

$$r(s, t) = (s, f(s), 0) * (t, 0, g(t)) = (s + t, f(s), g(t)),$$

donde $f(s) = as + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y a no nulo, y g tiene la forma

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m,$$

con $I(t) = \int \sqrt{\cosh(t)} dt$, $c > 0$ y $e^{4m} = a^2$.

Teorema 3.15. *Las superficies mínimas de traslación de tipo 2 en Sol_3 son los planos $x = x_0$, los planos $z = z_0$ y las superficies que están parametrizadas por*

$$r(s, t) = (s, f(s), 0) * (0, t, g(t)) = (s, t + f(s), g(t)),$$

donde f y g cumplen una de las siguientes opciones:

1. $f(s) = a$, y $g(t) = \ln|t + b| + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. $f(s) = as + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y a no nulo, y

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m,$$

con $I(t) = \int \sqrt{\cosh(t)} dt$, $c > 0$ y $e^{4m} = a^2$.

Teorema 3.16. *Algunas superficies mínimas de traslación de tipo 3 en Sol_3 son los planos $x = x_0$, los planos $z = z_0$ y las superficies que están parametrizadas por*

$$r(s, t) = (s, 0, f(s)) * (0, t, g(t)) = (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t)),$$

donde f y g cumplen una de las siguientes opciones:

1. $f(s) = a$, y $g(t) = \ln|t + b| + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. $f(s) = -\ln|s + b| + c$, y $g(t) = a$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. $g(t) = \ln|t| + c$, con $c \in \mathbb{R}$, y f es arbitraria.

El tratamiento y prueba de estos resultados se encuentran en [9].

3.3.3. En \mathbb{H}^3

Por último, tenemos el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 ; es decir, $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ con la métrica

$$g = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

A diferencia de los casos anteriores, \mathbb{H}^3 carece de una operación de grupo intrínseca compatible con su métrica. Así, no podemos darle estructura de grupo de Lie y por lo tanto no podemos utilizar la misma estrategia que seguimos hasta ahora.

Sin embargo, en [8], López emula la definición en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . De esta forma, distinguimos dos tipos de superficies de traslación en \mathbb{H}^3 :

- **Superficies de tipo 1:** parametrizadas por $r(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- **Superficies de tipo 2:** parametrizadas por $r(x, y) = (x, f(x) + g(z), z)$, con $(x, z) \in \mathbb{R}^2$,

donde f y g son funciones suaves en \mathbb{R} .

Tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.17. *No existen superficies mínimas de traslación de tipo 1 en \mathbb{H}^3 .*

Teorema 3.18. *Las únicas superficies mínimas de traslación de tipo 2 en \mathbb{H}^3 son los planos totalmente geodésicos.*

El tratamiento y prueba de estos resultados se encuentra también en [8].

Bibliografía

- [1] ADO, Igor Dmitrievich
1935. “The representation of Lie algebras by matrices”. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskaya*. Moscú, volumen 2, número 3, pp. 159 - 173.
- [2] BEKKAR, Mohamed y SARI, Toufik
1992. “Surfaces minimales réglées dans l’espace de Heisenberg H_3 ”. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università e Politecnico di Torino*. Turín, volumen 50, número 3, pp. 243 - 254.
- [3] CARMO, Manfredo do
1992. *Riemannian geometry*. Segunda edición. Boston: Birkhäuser.
- [4] FIGUEROA, Christiam
1996. *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg*. Tesis para obtener el grado de doctor en Matemáticas. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- [5] FIGUEROA, Christiam
2012. “The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group”. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*. Sofía, volumen 25, pp. 1 - 23.
- [6] HELGASON, Sigurdur
1978. “Symmetric Spaces of the Noncompact Type”. *Riemannian geometry*. California: Academic Press, pp. 264 - 270.
- [7] INOBUCHI, Jun-Ichi, Rafael LÓPEZ y Marian MUNTEANU
2012. “Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3 ”. *Geometriae Dedicata*. Dordrecht, volumen 161, pp. 221 - 231.
- [8] LÓPEZ, Rafael
2011. “Minimal translation surfaces in hiperbolic space”. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*. Berlín, volumen 52, pp. 105 - 112.
- [9] LÓPEZ, Rafael y Marian MUNTEANU
2012. “Minimal translation surfaces in Sol_3 ”. *Journal of the Mathematical Society of Japan*. Tokyo, volumen 64, número 3, pp. 985 - 1003.

- [10] MOENS, Wolfgang
2009. *Faithful representations of minimal degree for Lie algebras with an abelian radical*. Tesis para obtener el grado de doctor en Matemáticas. Viena: Universität Wien. Fakultät für Mathematik.
- [11] RIPOLL, Jaime
1991. "On hypersurfaces of Lie groups". *Illinois Journal of Mathematics*, Illinois, volumen 35, número 1, pp. 47 - 55.
- [12] WOLFRAM RESEARCH, INC
2025. *Wolfram Mathematica* [programa informático]. Versión: 14.2.
- [13] YOON, Dae Won
2013. Minimal translation surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Taiwanese Journal of Mathematics*. Taiwan, volumen 17, número 5, pp. 1545 - 1556.

