

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL DE ESTUDIANTES DE CUARTO DE SECUNDARIA EN TAREAS DE INTERÉS COMPUESTO

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las
Matemáticas que presenta:

Pedro Huerto Huanca

Asesora:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar


Lima, 2024

Informe de Similitud

Yo, Jesus Victoria Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis/el trabajo de investigación titulada “Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto de secundaria en tareas de interés compuesto” del autor Pedro Huerto Huanca, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud del 14%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 11/07/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: San Miguel, 17 de julio del 2024

Apellidos y nombres de la asesora: Flores Salazar, Jesus Victoria	
DNI: 08342853	Firma: 
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X	



Dedicatoria

A mis padres Timoteo, Lorenza y mi familia por ser mi ejemplo de guía y superación para lograr mis metas. A mi esposa Carmen por su comprensión y confiar en mí, por el apoyo incondicional en mi formación académica, y a mis hijas Sofía y María de los Ángeles, quienes son mi fortaleza y mi motivación para ser mejor cada día.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios por darme la salud, perseverancia y valentía en la culminación de la presente investigación.

A mi asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por todo su tiempo, sus aportes y sus sugerencias siempre acertadas para enriquecer mi investigación. Por sus críticas constructivas que ayudaron a seguir adelante cuando la inspiración ya no daba más.

A los investigadores miembros del jurado, Dra. Nancy Saravia y Dra. Verónica Neira, por sus valiosos aportes para la redacción de la versión final de la presente investigación.

Al Mg. Jorge Vivas Pachas por su apoyo desinteresado, por su tiempo para las reuniones virtuales y sus aportes para la elaboración de la secuencia de tareas.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, sus conocimientos de alto nivel académico me ayudaron a aclarar interrogantes y me motivaron para realizar la presente investigación.

A todos los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas que tuve la oportunidad de conocer y gracias a sus conocimientos fortalecieron mi formación profesional.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (Tec-VEM) de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado para desarrollar la presente investigación, en la cual se inscribe la presente investigación.

A la Institución Educativa Emblemática San Juan por darme la oportunidad de realizar la presente investigación. A la profesora Karina Gonzales por su apoyo desinteresado, quien desde el inicio no dudó en brindarme sus horas de clase para realizar las sesiones. A los seis estudiantes quienes amablemente se comprometieron en realizaron las tareas, lo cual es parte de la presente investigación.

A todos mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas que tuve la oportunidad de conocer al inicio solo de forma virtual y luego en algunas clases presenciales, haber compartir experiencias académicas que enriquecieron mi vocación. En especial a Jony y Aarón con quienes formamos grupos de trabajo.

Resumen

El interés compuesto es un concepto de la matemática financiera que se aplica en los créditos del sistema bancario, en el cual el capital inicial varía al final de cada periodo comercial, debido a que los intereses se agregan al capital para formar un nuevo capital llamado monto. En consecuencia, la diferencia entre el monto y el capital inicial se le denomina interés compuesto. Bajo esta premisa, los currículos oficiales de Brasil, Chile, Perú y las evaluaciones PISA de competencia financiera han propuesto abordar el tema de interés compuesto en la educación básica. En ese sentido, la presente investigación tiene por objetivo analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto grado de secundaria (15 – 17 años) cuando resuelven tareas de interés compuesto en una institución educativa pública con formación técnica en la ciudad de Lima, Perú. Para cumplir tal objetivo nos apoyamos como marco teórico en aspectos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak (2011); y como método de análisis los aportes de Kuzniak y Nechache (2019). Por otro lado, el enfoque de nuestra investigación es cualitativo, cuyas fases se han adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2014). A partir de los resultados de las dos tareas propuestos, uno a lápiz y papel y otro con el apoyo del programa Excel, se constata la activación de las diferentes génesis del ETM y los planos verticales relacionados a ellas, así como la caracterización de los paradigmas que emergen. Se concluye que las acciones y producciones matemáticas de los estudiantes privilegian la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y con ello los planos verticales [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis], y con mayor frecuencia la génesis instrumental y el plano [Sem-Ins]; así como el paradigma del análisis Aritmético – Geométrico (AG).

Palabras clave: Interés compuesto; Trabajo Matemático Personal; Génesis; Planos verticales; Paradigma; Excel.

Abstract

Compound interest is a concept of financial mathematics applied in banking system credits, in which the initial capital fluctuates at the end of each commercial period, because interest is added to the capital to form a new capital called the amount. Consequently, the difference between the amount and the initial capital is denominated compound interest. Under the assumption, the official curricula of Brazil, Chile, Peru and the PISA financial literacy assessments have proposed to address the topic of compound interest in basic education. In this sense, the present research aims to analyze the personal Mathematical Workspace of fourth grade secondary school students (15 - 17 years old) when they solve compound interest tasks in a public educational institution with technical training in the city of Lima, Peru. To fulfill this objective, we rely as a theoretical framework on aspects of the theory of the Mathematical Workspace (MWS) proposed by Kuzniak (2011); and as a method of analysis the contributions of Kuzniak and Nechache (2019). Conversely, the approach of our research is qualitative, whose phases have been adapted from Hernández, Fernández and Baptista (2014). From the results of the two proposed tasks, one with pencil and paper and the other with the support of the Excel program, the activation of the different genesis of the ETM and the vertical planes related to them, as well as the characterisation of the paradigms that emerge, are ascertained. It is concluded that the mathematical actions and productions of the students privilege the activation of the semiotic, instrumental and discursive genesis and with it the vertical planes [Sem-Ins], [Ins-Dis] and [Sem-Dis], and more frequently the instrumental genesis and the [Sem-Ins] plane; as well as the paradigm of Arithmetic-Geometric analysis (AG).

Keywords: Compound Interest; Personal Mathematical Work; Genesis; Vertical Planes; Paradigm; Excel.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	12
CAPITULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN.....	14
1.1 Investigaciones de referencia	14
1.2 Justificación.....	26
1.3 Espacio de Trabajo Matemático: Aspectos teóricos.....	32
1.4 Pregunta y Objetivos de investigación	39
1.5 Metodología y procedimientos metodológicos	40
CAPITULO II: ASPECTOS HISTÓRICOS, MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS.....	45
2.1 Aspectos históricos	45
2.2 Aspectos didácticos	49
CAPITULO III: PARTE EXPERIMENTAL.....	58
3.1 Escenario y sujetos de investigación	58
3.2 Descripción de la tarea.....	61
3.3 Tarea 1:	62
3.3.1 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático esperado de tarea 1	63
3.4 Tarea 2:	72
3.4.1 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático esperado de tarea 2	73
3.5 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático personal en la tarea 1.....	82
3.6 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático personal en la tarea 2.....	94
3.7 Resultados de la fase experimental	107
CONCLUSIONES	110
REFERENCIAS	115
ANEXOS.....	119

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Descripción de las etapas adentro y afuera del análisis basada en el ETM	44
Tabla 2. Dimensiones del Modelo de Servicio Educativo de Secundaria con formación técnica	58
Tabla 3. Características del grupo de estudiantes de cuarto de secundaria del estudio	60
Tabla 4. Descripción de las especificaciones de las sesiones para resolver las tareas	61
Tabla 5. Criterios para el análisis de la tarea 1	64
Tabla 6. Evolución del préstamo de la familia Mendoza	66
Tabla 7. Tasa de interés esperado	67
Tabla 8. Descripción global del ETM previsto según los episodios de tarea 1, Ítem 1- 5	69
Tabla 9. Síntesis del análisis de la tarea 1 desde el ETM	71
Tabla 10. Protocolo para el análisis del ETM de la tarea 2	73
Tabla 11. Descripción global del ETM previsto según los episodios de tarea 2, Ítem 1- 4	79
Tabla 12. Síntesis del análisis de la tarea 2 desde el ETM	81
Tabla 13. Descripción etapa afuera de la Dupla 1-Tarea 1	86
Tabla 14. Descripción etapa afuera de la Dupla 2-Tarea 1	92
Tabla 15. Descripción etapa afuera de la Dupla 1- Tarea 2	99
Tabla 16. Descripción etapa afuera de la Dupla 2 – Tarea 2	106
Tabla 17. Síntesis del análisis de tarea 1 y 2 basado en el ETM	108

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Desempeños Esperados de Cuarto de Secundaria	29
Figura 2. Resultado Comparativo de Competencia Financiera del 2015 y 2018	31
Figura 3. Competencia Financiera 2018: Resultados por Niveles de Desempeño	31
Figura 4. Planos Epistemológicos y Cognitivos del ETM	36
Figura 5. Planos Verticales del ETM	38
Figura 6. Proceso de investigación cualitativo	41
Figura 7. Fases de la presente investigación	41
Figura 8. Cantidad de inversión durante 5 años	46
Figura 9. Primera tabla de interés compuesto de Pegolotti	46
Figura 10. Tabla de la edición de Trenchard (1558)	47
Figura 11. Tabla de interés al 14% anual (1558)	48
Figura 12. Notación moderna del valor actual de una anualidad	49
Figura 13. Solución del problema de interés compuesto	50
Figura 14. Tareas propuesto de interés compuesto	52
Figura 15. Tareas propuesto de interés compuesto	53
Figura 16. Concepto de interés compuesto	54
Figura 17. Ejemplo de interés compuesto	54
Figura 18. Problemas propuestos de interés compuesto	55
Figura 19. Concepto de interés compuesto	56
Figura 20. Procedimiento para calcular la inversión la inversión de Pedro por tres meses	57
Figura 21. Distribución de horas pedagógicas semanales de las Instituciones Educativas con formación técnica	59
Figura 22. Capitalización del préstamo de la familia Mendoza	62
Figura 23. Identificación del capital inicial	65
Figura 24. Cálculo del interés esperado en el primero, segundo y tercer año	66
Figura 25. Monto e interés esperado luego de 11 años de haber obtenido el préstamo	67

Figura 26. Plantilla de archivo de Excel de la tarea 2	74
Figura 27. Archivo de Excel de la tarea 2 completo	75
Figura 28. Ejemplo de archivo de Excel de la tarea 2 completo	75
Figura 29. Obtención del monto al término del primer año por factorización	76
Figura 30. Obtención del monto al término del segundo año por factorización	76
Figura 31. Obtención de la fórmula del monto del tercer año por factorización	77
Figura 32. Calculo del monto y el interés esperado luego de 10 años	78
Figura 33. Identificación del capital inicial	82
Figura 34. Evolución del préstamo de la familia Mendoza	83
Figura 35. Interés calculado en el primero, segundo y tercer año	83
Figura 36. Tasa de interés calculado por Dupla 1	84
Figura 37. Monto e interés producido luego de 11 años de haber obtenido el préstamo	84
Figura 38. Identificación del capital inicial	88
Figura 39. Evolución del préstamo de la familia Mendoza	89
Figura 40. Interés calculado en el primero, segundo y tercer año	89
Figura 41. Tasa de interés calculado por Dupla 2	90
Figura 42. Monto e interés producido luego de 11 años de haber obtenido el préstamo	90
Figura 43. Resultados del Episodio 1 de la dupla 1.	95
Figura 44. Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 1	95
Figura 45. Evolución del préstamo de la familia Mendoza	96
Figura 46. Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 2	96
Figura 47. Fórmula general del monto y del interés obtenido por la Dupla 1 en tarea 2 y E3	96
Figura 48. Calculo del monto y el interés de tarea 2, episodio 4	98
Figura 49. Resultados del Episodio 1 de la dupla 2	101
Figura 50. Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 1	102
Figura 51. Evolución del préstamo de la familia Mendoza	102

Figura 52. Respuestas de las interrogantes de la Dupla 2 en tarea 2, Episodio 2	103
Figura 53. Fórmula general del monto y del interés obtenido por la Dupla 1 en tarea 2 y E3	104
Figura 54. Calculo del monto y el interés de tarea 2, episodio 4	104



INTRODUCCIÓN

Nuestra motivación por abordar el tema de interés compuesto nace debido a la creciente necesidad de una sociedad globalizada en tomar decisiones financieras informadas con respecto al ahorro, las inversiones y los préstamos. En este sentido, el Currículo Nacional para la Educación Básica del Perú incluye desempeños referidos a conceptos financieros como interés compuesto dentro de la competencia resuelve problemas de cantidad. Sin embargo, durante mi experiencia docente he podido evidenciar en las sesiones de clase de Matemática y textos escolares abordar la resolución de problemas de interés compuesto privilegiando el uso de la fórmula y algoritmos para el cálculo.

Por otro lado, somos conocedores que la tecnología de la información y comunicación (TICs) han abarcado los diferentes ámbitos de la sociedad y la educación no fue la excepción; por ello, muchas investigaciones han mostrado sus beneficios y cómo esta nueva herramienta de alcance dinámico organiza el trabajo matemático de los estudiantes.

Por ello, luego del análisis de las investigaciones de referencia, nuestra investigación tiene como objetivo general analizar los saberes previos, conocimientos y procesos cognitivos de los estudiantes de cuarto grado de secundaria (15-17 años) cuando resuelven tareas de interés compuesto. Para alcanzar el objetivo propuesto consideramos conveniente tomar como base teórico de esta investigación aspectos del marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), donde la resolución de problemas matemáticos ocupa un lugar esencial. Además, la metodología de nuestra investigación es cualitativa debido a que nos interesa analizar los procedimientos de los estudiantes al resolver tareas de interés compuesto más que los resultados.

La presente investigación se ha organizado en tres capítulos. En el primer capítulo, abordamos investigaciones de referencia clasificadas bajo dos criterios temáticos, investigaciones relacionadas a interés compuesto y relacionadas al uso de la tecnología. En base a ello y en base a los planes curriculares para la enseñanza media de Brasil, en las bases curriculares de segundo medio de Chile, en base al Currículo Nacional de la Educación Básica del Perú y en los resultados de las evaluaciones internacionales PISA bosquejamos la justificación de nuestra investigación. Asimismo, son presentados la pregunta, el objetivo general y objetivos específicos que orientarán nuestra investigación; adicionalmente explicamos los aspectos teóricos, la metodología y los procedimientos metodológicos seguidos en la investigación.

En el segundo capítulo, se desarrollan aspectos históricos y didácticos del interés compuesto; el aspecto histórico ha sido extraídos de numerosas referencias históricas abordado

por Lewin (2019). El aspecto didáctico ha sido analizado del cuaderno de trabajo de Matemática 4 distribuido por el Ministerio de Educación a los estudiantes de cuarto de secundaria de colegios públicos del Perú y del libro Construye para cuarto de secundaria de la editorial Norma.

El tercer capítulo, trata sobre la parte experimental; es decir, el escenario y los sujetos de investigación, presentación de las dos tareas; el primero para resolver una tarea sobre interés compuesto utilizando lápiz y papel y el segundo para resolver la segunda tarea con el apoyo del programa Excel. Además, en este capítulo se aborda el análisis previo a la luz del marco teórico Espacio de Trabajo Matemático; es decir, el análisis de las dos tareas antes de haber aplicado a los estudiantes, y el análisis del trabajo matemático personal de las acciones matemáticas de los estudiantes luego de resolver las dos tareas sobre interés compuesto. Finalmente, se presenta un extracto de los resultados de la investigación, así como, las conclusiones finales y las perspectivas para futuras investigaciones.



CAPITULO I: PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo, presentamos investigaciones de referencia que aportan de cómo el concepto de interés compuesto ha sido abordado en diferentes contextos, luego presentaremos la justificación del problema de investigación; en seguida el marco teórico, la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos. Finalmente, presentaremos la metodología a utilizarse durante el desarrollo del presente trabajo de investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Debido a que estamos interesados en analizar el trabajo matemático de los estudiantes de cuarto de secundaria cuando resuelven tareas sobre interés compuesto, hemos considerado necesario organizar y clasificar las investigaciones de referencia bajo dos criterios temáticos: investigaciones relacionadas a interés compuesto e investigaciones relacionadas al uso de la tecnología para abordar el tema.

Investigaciones relacionadas con el objeto de estudio interés compuesto

Las investigaciones relacionadas a Interés Compuesto son las de Secco, Cabral, Chaquiam, Díaz, Pamplona, Reis, Costa y Pinto (2020), Bezerra, Alves y Bosh (2019), Klapper y Luzardi (2020) y Chuquisana (2015).

El primer trabajo revisado es de Secco, Cabral, Chaquiam, Díaz, Pamplona, Reis, Costa y Pinto (2020), que presentan y ejecutan una secuencia de actividades sobre la enseñanza de interés compuesto utilizando como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica y para el análisis minucioso de la secuencia de actividades el Análisis Microgenético. Cabral (2004, como se citó en Secco, et al., 2020) sostiene que el Análisis Microgenético se basa en la presentación de narraciones y explicaciones de los procesos cognitivos de los estudiantes.

El objetivo general propuesto por los investigadores es presentar las etapas de producción y aplicación de una secuencia didáctica capaz de proporcionar conocimientos básicos sobre interés compuesto en un grupo de estudiantes de segundo y tercero de la enseñanza media (16 y 17 años) de una escuela pública de la ciudad de Belém, Pará en Brasil.

Para conceptualizar el interés, Fisher (1990, como se citó en Secco, et al., 2020) define como el pago del préstamo de un capital, durante un tiempo determinado, a una tasa acordada. En cuanto al interés compuesto, se añade al capital; luego de definir el tiempo, lo cual produce un nuevo capital que empieza a producir nuevos intereses. En ese mismo sentido, Lima (2006, como se citó en Secco, et al., 2020) enuncia el siguiente teorema: "En el caso de interés

compuesto de tasa i , un capital C_0 se convierte, al cabo de n periodos de tiempo, en un monto $C_n = C_0(1 + i)^n$.

En este contexto, Secco et al. (2020) para abordar el interés compuesto proponen la secuencia de actividades basada en Unidades Articuladas de Reconstrucción Conceptual (UARC), lo cual según Cabral (2020) las UARC son un conjunto de argumentos empíricos intuitivos construidos a través de categorías estructurantes con el objetivo de estimular la reconstrucción de un concepto matemático. Para ello, los autores presentaron problemas sobre interés compuesto relacionadas al entorno de los estudiantes, los cuales ayudaron a orientar y estimular el pensamiento y propiciar debates sobre las soluciones presentadas.

La aplicación de la secuencia didáctica se realizó durante tres días en un salón de 10 estudiantes divididos en 5 grupos de 2 integrantes. El primer día se aplicó la UARC 1, donde a los estudiantes se les presenta una tabla que representa dos inversiones financieras y el docente les pregunta: ¿Saben que es una inversión financiera? ¿Para qué sirven los bancos?, etc. Los estudiantes en diálogo con el docente comprenden que el banco presta dinero y perciben que, para calcular intereses deben hacer cálculos matemáticos y describir un patrón que afecta a la cantidad de un periodo con el capital del periodo siguiente; de esta forma el estudiante se inicia en la elaboración del concepto de interés compuesto.

La UARC 2 se aplicó el segundo día y el objetivo fue obtener la expresión matemática para el cálculo de interés, al finalizar esta actividad los estudiantes descubrieron el elemento matemático $(1 + i)$ y el cálculo del importe en el periodo utilizando el capital y el factor $(1 + i)$. En la UARC 3, presentado el tercer día los investigadores orientaron a los estudiantes a observar la regularidad en el cálculo del monto, en los diálogos del docente con el grupo 2 descritos por los autores puede verificar ello:

Docente: ¿Cuál es la expresión en este segundo período?, estudiante B: $M = C \times (1 + i) \times (1 + i)$ es igual a $M = C \times (1 + i)^2$. Docente: ¿Para el tercer período?, estudiante A: Solo el capital del tercero es el monto del segundo, luego lo multiplicamos por el factor de capitalización. Docente: Entonces, ¿cómo es la expresión de la cantidad en el tercer período?, estudiante B: $M = C \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$ es igual a $M = C \times (1 + i)^3$. Docente: Entonces, ¿para el cuarto periodo tendremos una cantidad $M = C \times (1 + i)^4$?, estudiante B: si es verdad, genial (Secco, et al., 2020, p.18).

Luego de analizar parte del diálogo del docente con el grupo 2, Secco et al. (2020) afirman que el docente ha logrado que los estudiantes construyan la expresión $M = C \times (1 + i)^t$ de

manera natural y comprensiva. Finalmente, Secco et al. (2020) sostienen que el uso de la secuencia fue favorable ya que permitió a los alumnos percibir las regularidades que culminaron con la construcción del concepto de monto a interés compuesto.

El segundo trabajo de investigación revisado fue de Bezerra, Alves y Bosh (2019), quienes realizan un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) con el objetivo de analizar las relaciones personales de los estudiantes en una clase de Gestión Comercial de una universidad privada de Sao Paulo, en relación a las nociones de interés simple y compuesto. Para lograr el objetivo planteado, los investigadores tomaron como marco teórico elementos de la Teoría Antropológica de lo didáctico, en particular las nociones de relaciones personales (individuo con el objeto matemático), praxiología (Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría) y dialéctica (medio-medio, pregunta-respuesta e individuo-colectivo).

La investigación fue de naturaleza cualitativa y la metodología que utilizaron los investigadores para el desarrollo del estudio fueron aspectos de la Ingeniería Didáctica del tipo REI. El experimento fue aplicada a noventa estudiantes durante quince sesiones, pero las intervenciones se realizaron durante ocho sesiones en el turno nocturno y cuya pregunta inicial (Q0) fue: ¿Cómo decidir el tipo de préstamo para una empresa? Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron las filmaciones, grabaciones en audio y materiales desarrollados por los alumnos dentro de las sesiones y fuera de ellas.

Los autores afirman que en la primera sesión se les presentó la pregunta inicial que guio la investigación y se les pidió a los participantes que presentaran sus respuestas en una hoja de papel, luego se les pidió a los estudiantes que en forma individual expusieran sus respuestas para que el docente anotara en la pizarra. Los autores sostienen que la lista de respuestas fueron diversas y no se limitaron a lo que solamente encontraron en libros didácticos como tasa de interés, monto, periodo de capitalización, capital y tipos de capitalización; es decir, los datos de la investigación indican el carácter generador de la pregunta inicial (Q0), pero, no justificaron sus respuestas. En la segunda sesión, ya en grupos de trabajo los estudiantes continuaron discutiendo sus respuestas y algunos grupos continuaron enumerando la lista de respuestas sin justificar y cuando trataban de justificar, los autores afirman que solo presentaban ejemplos de sus experiencias sin consultar libros, sitios web, enciclopedias en línea y otros. Al finalizar la tercera sesión los estudiantes recién estaban tratando de entender las variables intra y extra matemáticos. En la cuarta sesión, afirman los autores; el grupo 10 expuso sus respuestas, quienes a la percepción de los investigadores fueron los que más se involucraron en la actividad debido a que está asociado a la realidad de unos de los integrantes del grupo. En la presentación

del grupo 10 se explicó el escenario de estudio e investigación, donde uno de los integrantes afirma: Saqué un préstamo del BNDES (Banco Nacional de Desarrollo) cuya tasa rondaba el 3% mensual para pagar en 24 cuotas un préstamo de 20 000 reales. Pero también, los integrantes del grupo afirman que visitaron otros bancos como HSBC que ofrecía una tasa de 2,2%, el Banco Santander con una tasa de 2,56%, Caixa Económica Federal 2,81% e Itaú al 3,05%.

Bezerra, Alves y Bosh (2019) propusieron nuevas preguntas, entre ellas sobre el importe de la cuota del préstamo; sin embargo, el grupo no tenía esta información y el docente indicó que los datos con los que contaba permitirían calcular el valor de la cuota. La quinta sesión se resumió en un estudio de dudas, lo que imposibilitó avanzar en la búsqueda de respuestas, debido a que los estudiantes no lograban comprender por qué el interés que producía al multiplicar el monto de la cuota no era igual al que producía al aplicar la fórmula del monto del interés compuesto. Esta duda se les presentó a varios grupos que intentaron simular el cálculo de la cuota en una institución bancaria, notando que los estudiantes no habían entendido la dinámica de calcular el monto del interés compuesto. Con el objetivo de ayudar a la comprensión del cálculo de la cuota, los investigadores programaron la sexta y séptima sesión, verificando que los integrantes del grupo 10 asumieran la responsabilidad del estudio e investigación, quienes formularon nuevas preguntas basadas en sus dudas y siempre estaban buscando nueva información para enriquecer sus respuestas.

Los autores afirman que en la octava sesión se dedicó a la evaluación por parte de los estudiantes de lo que habían experimentado en la aplicación del Recorrido del Estudio e Investigación y lo más destacado que encontraron fue el cambio de responsabilidad en el proceso y el significado que la actividad brindó al estudiar nociones asociadas al dominio de Matemática Financiera. Por otro lado, los autores sostienen que la forma en que han sido enfocadas las actividades de estudio e investigación le dieron sentido al curso a comparación de actividades propuestas en las instituciones educativas asociado a la visita de obras.

El tercer trabajo revisado fue de Klapper y Luzardi (2020), quienes realizaron una investigación sobre la educación financiera en un grupo de personas que viven en países con economías avanzadas (Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y Estados Unidos) y países con economías emergentes (Brasil, China, India, Federación Rusa y Sudáfrica). Para medir la educación financiera de las personas, los autores realizaron una encuesta a más de 150 000 adultos mayores de 15 años seleccionados a cuatro conceptos fundamentales: diversificación de riesgo, inflación, aritmética básica y capitalización de intereses;

los cuales están distribuidos en 5 preguntas de opción múltiple. La pregunta cuatro está relacionada con el interés compuesto.

Suponga que deposita dinero en el banco durante 2 años y el banco accede a agregar un 15% anual a su cuenta. ¿El banco agregará más dinero a su cuenta el segundo año que el primer año, o agregará la misma cantidad de dinero ambos años? (Klapper y Lusardi, 2020, p. 591).

Además, la quinta pregunta hace referencia al cálculo del monto luego de cinco años de tener ahorrado en una cuenta la cantidad de 100 dólares si durante ese periodo no retira ningún dinero.

Los resultados de la investigación muestran que los porcentajes de educación financiera difieren enormemente entre los principales países con economías avanzadas (55% de los encuestados tienen educación financiera) y los países con economías emergentes (28% de los encuestados tienen conocimientos financieros). Por otro lado, si comparamos los resultados sobre preguntas de interés compuesto, el 54% de los encuestados en países con economías avanzadas respondieron correctamente a comparación de los países con economías emergentes solo 44%, haciendo una diferencia de 10 puntos porcentuales. Además, los autores han encontrado que los encuestados de 15 a 35 años en los países con economías emergentes tienen mayores conocimientos financieros a comparación de los encuestados en países con economías avanzadas (G7), los que tienen mayores conocimientos financieros son los encuestados cuyas edades están entre 36 a 50 años.

Finalmente, es importante resaltar los aportes de Klapper y Lusardi (2020) cuando sostienen que el concepto de interés compuesto es universal y aplicable en todos los países, por ello en el mundo uno de cada tres adultos muestra una comprensión de los conceptos financieros básicos, como el interés compuesto. Además, los autores recomiendan promover la enseñanza de conceptos financieros básicos, como el interés compuesto en la escuela debido a que en la actualidad las personas están expuestas a préstamos a altas tasas de intereses debido a la proliferación de productos financieros digitales.

El cuarto trabajo revisado es de Chuquisana (2015). Esta investigación es importante para nuestro estudio debido a que aborda la enseñanza y aprendizaje del interés compuesto en un grupo de 16 profesores de matemática de educación secundaria que laboran en diferentes zonas del país (14 diferentes provincias); evidenciando las deficiencias en su formación inicial y cómo ello influye en su práctica pedagógica. Por otro lado, el autor realiza un análisis didáctico

del interés simple e interés compuesto en textos escolares del nivel secundaria y superior, además implementa un programa de formación sobre temas de interés simple y compuesto. Por los argumentos expuestos, esta investigación ha sido incluida como una investigación relevante para nuestro estudio a pesar de su antigüedad.

Es importante resaltar que uno de los marcos teórico y metodológico utilizado por Chuquisana (2015) fue aspectos del Enfoque OntoSemiótico (EOS), donde hace especial énfasis en tres de los cinco niveles para el análisis didáctico. El primero es el análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, este nivel asume una concepción pragmatista – antropológico de las matemáticas. El segundo nivel es la elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; es decir, los diversos medios de expresión como los lenguajes desempeñan un doble papel, de instrumento del trabajo matemático y de representación de los objetos matemáticos. Finalmente, el tercer nivel es el criterio de idoneidad didáctica; es decir, concebido como criterio de adecuación de las acciones realizadas por los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático.

Para cumplir el objetivo de desarrollar una propuesta de contenidos correspondiente al significado institucional pretendido para el tema de interés compuesto, el autor organizó el significado institucional de referencia de los temas interés compuesto a partir de la elaboración de configuraciones epistémicas de cada una de las tareas contenidas en el libro de “La matemática para la enseñanza media” (Lages, Pinto, Wagner, y Morgado, 2004), que tienen según el investigador buena formalidad y rigor matemático orientado a la formación de profesores; el libro de “Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales” (Hoffmann y Bradley, 1995), el cual se usa en el nivel universitario y finalmente el libro “Matemática Financiera” (Castagna, 1998), el cual se usa como libro de texto en cursos de matemática financiera a nivel universitario. En consecuencia, el autor presenta la síntesis de los tipos de problemas encontrados.

Inicialmente se pide hallar el monto, en varios de los casos se presentan ejercicios para introducir el tema. Luego se presentan ejercicios para encontrar el interés. Varios de los ejercicios están propuestos de tal manera que se necesita simplemente el reemplazo en la fórmula previamente definida. También se encontró un tipo de problema donde se pide el tiempo o número de periodos y para hallarlo es necesario la solución de una ecuación exponencial haciendo uso de logaritmos. Además, se encontró un problema que pedía la

demostración de la principal fórmula de interés compuesto, haciendo uso de inducción matemática. (Chuquisana, 2015, p. 62).

Por otro lado, Chuquisana (2015) sostiene que el significado institucional pretendido está conformado por el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio del tema de interés compuesto. Para este caso el autor realizó el análisis de dos libros, el libro Matemática 4 (Mejía, 2002), el cual es entregado gratuitamente por el Ministerio de Educación a los escolares de cuarto año de secundaria en las escuelas públicas del Perú y libro “Matemática para no Matemáticos” (Gaita et al, 2009), el cual está dirigido a estudiantes del curso Matemática Básica en la facultad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú. En el texto de Matemática 4, el autor afirma que ha encontrado tres diferentes tipos de ejercicios, se pide calcular el monto conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo; calcular el monto para periodos de capitalización no anual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo, y calcular el interés para periodos de capitalización no anual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo. En el texto de “Matemática para no Matemáticos” sobre los tipos de problemas el autor afirma que pide hallar el monto y cuota mensual conociendo el capital, la tasa de interés y el tiempo.

Luego de presentar el significado institucional de referencia y el sistema de prácticas del tema de interés compuesto, el autor presenta los resultados, análisis y valoración didáctica de las 3 sesiones implementadas para desarrollar temas de interés simple y compuesto. De los siete indicadores del criterio de idoneidad didáctica descritos por el autor resaltaremos dos de ellos; en primer lugar, en los indicadores de idoneidad cognitiva el autor afirma que los estudiantes recibieron los conocimientos previos necesario para el tema de estudio; es decir, en la primera sesión se enseñó el tema de progresiones aritméticas y geométricas, en consecuencia, afirmar el autor que existe una conexión entre progresiones geométricas y el interés compuesto. En segundo lugar, en los indicadores de la idoneidad mediacional el autor afirma que se promovió el uso de la calculadora para realizar cálculos más que todo en el interés compuesto.

Finalmente, el investigador concluye que ha logrado cumplir uno de los objetivos trazados en su investigación, desarrollar una propuesta de contenidos correspondiente al significado institucional pretendido para los temas de interés simple y compuesto dirigido a profesores de matemática de educación secundaria. Luego del análisis de los temas de interés simple y compuesto el investigador ha observado dos formas distintas de cómo emerger los temas interés simple y compuesto: uno es relacionándolos con las progresiones aritmética y geométrica, respectivamente; y otra es relacionándolos con la función lineal afín y la función exponencial. Por

otro lado, el investigador encontró algunos errores al representar las tasas de interés, la forma “ $i\%$ ”, mientras que otros lo representaban como “ i ”.

En seguida, presentamos referencias relacionadas al uso de la tecnología en la enseñanza del interés compuesto, tales como las funciones financieras de Excel, creación de Apleets del software GeoGebra, uso del Meet, Kahoot y videos de Youtube para clases virtuales. Estas herramientas tecnológicas nos ayudan a presentar las tareas a los estudiantes de manera dinámica y aprovechar sus potencialidades que favorece en reducir el tiempo, cálculos engorrosos y privilegiar la interpretación, visualización y la obtención de conclusiones.

Investigaciones relacionadas al uso de la tecnología

Las investigaciones que se presentan a continuación están relacionadas al uso de un medio tecnológico para abordar el interés compuesto, estas son las de Meza (2019), Jiménez (2022), Reis, Ferreira, Santos, Willian y Margarida (2021) y Ustate (2019).

Meza (2019) realizó una investigación cuantitativa de corte cuasi experimental que tiene por objetivo mostrar que el uso del Microsoft Excel para el aprendizaje del interés simple y del interés compuesto en los estudiantes de cuarto de secundaria (15 y 16 años) pueden alcanzar mejores niveles de aprendizaje en el desarrollo de competencias tecnológicas y matemáticas. Los estudiantes que formaron parte de la investigación estuvieron constituidos por 29 estudiantes del cuarto grado “B” para el grupo experimental y 29 estudiantes del cuarto grado “C” para el grupo de control pertenecientes a un colegio particular de Arequipa, Perú.

El investigador propone una metodología basada en la resolución de problemas de interés simple y compuesto usando el programa Microsoft Excel como recurso tecnológico para determinar conceptos como tasas, interés, período y valor final. Para validar la afirmación de la hipótesis: “La aplicación del Microsoft Excel eleva el nivel de aprendizaje de interés simple e interés compuesto en estudiantes del VII ciclo (4to de secundaria) pertenecientes a un colegio particular de Arequipa” (Meza, 2019, p. 68).

En la secuencia de clase, el investigador propuso el uso de las fórmulas o funciones financieras de Excel como la función tasa (TASA), función valor final (VF), función valor actual (VA) y el número de pagos periódicos (NPER), las cuales ahorran tiempo y trabajo al momento de realizar cálculos financieros, dejando de lado las fórmulas matemáticas, que en ocasiones suelen ser extensas. La función VF se usa para calcular el valor final correspondientes a pagos futuros, periódicos y constantes a un tipo de interés fijo; la sintaxis de la función VF en Excel es: VF (*tasa*, *nper*, *pago*, *va*, *tipo*) donde: *tasa* es el tipo de interés correspondiente al periodo de

pago, $nper$ es el número total de periodos de abono, $pago$ es el importe correspondiente al abono que se realiza en cada periodo; va es el valor actual o capital inicial en caso exista y $tipo$ es la modalidad de pago. El autor propone el siguiente problema: “¿Cuál es el valor final de un ahorro de 1000 soles realizados al inicio de cada año, durante 5 años, a una cuenta bancaria retribuida al 4% anual?” (p. 57).

Para el problema presentado en la investigación, la fórmula en Microsoft Excel quedaría con la siguiente sintaxis: = VF (4%,5,-1000,0.1), lo cual resulta 5632.98 soles, que sería el valor final de un ahorro de 1000 soles durante 5 años al 4% anual.

Los instrumentos utilizados por el investigador para evaluar los aprendizajes fueron un cuestionario de opción múltiple y, una ficha de metacognición para recoger información sobre la valoración de la metodología y el programa Microsoft Excel utilizado.

Los resultados obtenidos por el investigador muestran que el uso Microsoft Excel para la enseñanza del interés simple y del interés compuesto logra mejores niveles de aprendizaje en los estudiantes de 15 y 16 años. Ello, basado en las comparaciones de las medias de las calificaciones del grupo experimental y grupo de control. Además, la evaluación, el cuestionario y observaciones de aula constatan que la realización de la sesión con ayuda Microsoft Excel estimula y potencia el aprendizaje de los estudiantes habiéndose alcanzado mejores resultados en su rendimiento y el desarrollo de competencias matemáticas y tecnológicas.

En seguida, revisamos el trabajo de Jiménez (2022), que propone utilizar Applets del software GeoGebra en temas del curso de matemática financiera en dos grupos de estudiantes (28 y 32 en cada grupo) de la Universidad Católica Luis Amigo de Medellín, Colombia. El autor afirma que la investigación es de tipo experimental y utiliza el método constructivista de enseñanza, que se desarrolla en cuatro pasos: En el primer paso, el diagnóstico, para valorar la comprensión básica del tema anualidades, el docente plantea la solución de un ejercicio sobre un préstamo de 1 000 000 pesos a una tasa del 36% nominal anual, la cual debe ser cancelada en 12 cuotas mensuales iguales. Para calcular el valor de cada cuota el estudiante debe aplicar la fórmula de la anualidad vencida ($Pago = Capital \times \frac{(1+Tasa)^{Periodo}}{(1+Tasa)^{Periodo}}$).

En el segundo paso, construcciones de Applet en el aula, solicita a los estudiantes descargar el programa GeoGebra y construir el Applet con los datos del ejercicio resuelto en el primer paso. Jiménez (2022) describe cuatro etapas: En la etapa 1 los estudiantes procedieron a abrir el programa GeoGebra y seleccionar la vista algebraica, vista gráfica, la hoja del cálculo y la barra de entrada. En la etapa 2, se procedió a seleccionar la hoja de cálculo, en dicha ventana

se ingresan los datos del ejercicio: tasa, número de periodos, capital y aplicando la fórmula mediante el comando =Pago (<Tasa>, <Número de períodos>, <Valor actual>, <Valor futuro (opcional)>, <Tipo (opcional)>) y reemplazando el texto correspondiente de acuerdo a los valores que contienen la celda permite determinar el valor de la anualidad vencida, el resultado en este caso es igual a 100,46 pesos mensuales.

En la etapa 3 de acuerdo a los datos ya calculados, se procedió a construir la tabla de amortizaciones del crédito en la hoja de cálculo, que permite observar la evolución de un préstamo a medida que avanza los periodos; es decir, como los intereses van disminuyendo a medida que avanzan los pagos, por ejemplo para el mes 1 son 30 pesos y para el mes 12 los intereses cancelados son de 2,93 pesos, la amortización del capital al contrario va aumentando a medida que avanzan los pagos, inicia el mes 1 con 70,46 soles y va aumentando hasta el mes 12 en 97,53, pero para cada periodo tanto interés como capital suman siempre el valor de la cuota 100,46 pesos. Finalmente, el autor afirma que en la etapa 4, los estudiantes construyen gráfico de puntos en el plano cartesiano (vista gráfica) cuyo eje X representa los periodos y el eje Y los valores correspondientes ya sea al pago de intereses, a la amortización del capital, la cuota, o saldo de cada periodo; ello para visualizar e interpretar los resultados.

En el tercer paso: el autor implementó la secuencia didáctica, una vez creada la página HTML el Applet se podrá alojar en un sitio web y se puede operar desde cualquier navegador. Finalmente, en el cuarto paso, el autor evalúa el trabajo realizado mediante un cuestionario, cuyas respuestas resultaron muy positivas, donde el 100% de estudiantes afirman que la utilización del GeoGebra facilitó la interacción en el aula, ayudó a comprender del tema de anualidades y afirmaron que les gustaría seguir trabajando con GeoGebra.

Finalmente, Jiménez (2022) afirma que ha cumplido los objetivos propuestos al lograr construir los aplicativos con facilidad, se observó que los estudiantes tienen habilidades innatas para el uso de los equipos tecnológicos, ello facilitó la comprensión de los pasos para crear un Applet sobre temas de matemática financiera, como interés compuesto y visualizar los resultados por medio de una gráfica.

Por su parte, Reis, Ferreira, Santos, Willian y Margarida (2021) realizan una investigación que tiene por finalidad elaborar una secuencia didáctica con recursos tecnológicos para la enseñanza del interés simple y del interés compuesto. Cabe resaltar que esta secuencia es 100% online; pues se desarrolló en periodo de pandemia en la que las clases escolares eran virtuales, lo que implica el despliegue de varios artefactos digitales. Los autores utilizan aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica y proponen actividades con el software GeoGebra

Online en un grupo de estudiantes del tercer año de media (15 años) en Brasil. Las actividades propuestas en la secuencia didáctica están relacionadas a diferenciar el interés compuesto del interés simple; para ello, proponen identificar el capital, tasa de interés y tiempo; resolver problemas de interés compuesto y reflexionar críticamente sobre solicitudes y préstamos; situaciones reales que requieran conocimientos sobre interés compuesto.

Reis et al. (2021) para la secuencia de actividades utilizaron varias herramientas tecnológicas como Google Meet, Kahoot, GeoGebra Online y videos de YouTube. De estas herramientas, los autores resaltan el uso del software GeoGebra debido a que permitió elaborar y proponer la secuencia didáctica con el objetivo de diferenciar el interés compuesto del interés simple. Además, los autores afirman que GeoGebra Online facilitó los cambios en forma simultánea de las características y valores tanto del interés simple e interés compuesto; dichos cambios se pueden visualizar en la ventana algebraica y la ventana gráfica del programa.

Los autores concluyen que es posible construir satisfactoriamente una secuencia didáctica utilizando GeoGebra Online. Para cumplir con los objetivos planteados en la investigación es fundamental, además del GeoGebra online, el uso de equipos como celulares, tabletas o computadoras que cuenten con acceso a internet.

Finalmente, Ustate (2019) presentó una investigación sobre el aprendizaje basado en problemas (ABP) para resolver ejercicios de interés simple y compuesto con el objetivo de implementar la metodología ABP para el mejoramiento de competencias en la resolución de ejercicios de interés simple y compuesto en la asignatura de Matemática Financiera en la universidad de La Guajila, Colombia.

El proyecto fue aplicado en un grupo de estudiantes que presentaban bajos niveles de competencias en pensamiento matemático y comprensión lectora, ello según la investigadora porque seguían un modelo tradicional de enseñanza. Por ello, la investigadora diseñó la metodología del Aprendizaje basado en Problemas en la cual es el estudiante quien se apropiará del problema a través de un proceso de aprendizaje por descubrimiento y construcción en la cual buscará información, la seleccionará, organizará e intentará resolver. Por lo tanto, el docente será un orientador, expositor de problemas o situaciones problemáticas, sugerirá fuentes de información y estará presto a colaborarle a las necesidades de sus estudiantes.

Los temas abordados sobre el interés compuesto son: Capital, valor inicial o valor presente (P), Valor final o valor futuro (F), interés (I), tasa de interés compuesto (i) y plazos o tiempo (n). Dichos temas son abordados por la investigadora bajo siete pasos: 1) Aclarar

conceptos y términos; es decir, se trata de aclarar posibles términos del texto del problema que resulten difíciles o vagos, 2) Definir el problema: es un primer intento de identificar el problema que el texto plantea, 3) Analizar el problema, los estudiantes aportan todos los conocimientos que posee el problema, 4) Realizar un resumen sistemático con varias explicaciones al análisis del paso anterior, 5) Formular objetivos de aprendizaje, los estudiantes deciden qué aspectos del problema requieren ser indagados y comprendidos mejor, 6) buscar información adicional fuera del grupo o estudio individual y 7) Síntesis de la información recogida y elaboración del informe sobre los conocimientos adquiridos. Es importante resaltar, la investigadora afirma que los pasos 1 al 5 deben trabajarse con guía del docente, luego en el paso 6 los estudiantes deben realizar una búsqueda individual, para que en el siguiente paso expongan sus resultados y hallazgos.

Ustate (2019) creó una página web en la plataforma edmodo.com de Google que contiene seis pestañas: Inicio, por entregar, progreso, biblioteca, mensajes y notificaciones. La pestaña biblioteca contiene tres ventanas: ejercicios en clase, material de consulta y mis pruebas, en la cual los estudiantes podían ingresar y descargar los respectivos documentos o realizar en línea las evaluaciones o pruebas. En la pestaña mis pruebas la investigadora insertó tres pruebas de saberes previos y uno de ellos se refiere a interés compuesto, dicha prueba tenía cinco preguntas, el primero buscaba averiguar qué entienden los estudiantes por interés compuesto; cuya respuesta del 53% de estudiantes fue que el interés compuesto es el pago del uso de un dinero que es ajeno, donde los intereses ganados se van capitalizando, es decir genera interés sobre interés.

El segundo momento de la secuencia metodológica propuesto por la investigadora es una serie de tareas sobre interés simple e interés compuesto, que resolvieron primero manualmente con la ayuda de una calculadora científica y luego con la hoja de cálculo de Excel, quien ayudó a mayor rapidez de resolución, menor posibilidad de cometer errores y mejor presentación. El tercer y último momento, la docente investigadora les propuso un trabajo final que combina tanto el interés simple y compuesto, lo cual se realizaron forma grupal, divididos en cuatro grupos. El enunciado de la tarea se descarga de la web edmodo.com y los estudiantes resolvieron utilizando Excel para finalmente socializar en el aula.

La investigadora concluye que, en cuanto al interés compuesto, los estudiantes identificaron y manejaron de manera conceptual y práctica el interés compuesto, diferenciándolo del interés simple, también escudriñaron y comprendieron las fórmulas de interés compuesto. Por otro lado, evidenció los avances significativos en la apropiación de la temática por parte de los estudiantes y en el método de enseñanza por parte de la docente, cada sesión se fortaleció

en lo aprendido y enseñado en la sesión anterior. De este modo, en la parte de la resolución de problemas, los estudiantes reconocieron y resolvieron aplicaciones de interés simple e interés compuesto en la cotidianidad utilizando conceptos básicos de aritmética, lo hicieron de manera manual y utilizando recursos tecnológicos e informáticos para resolver, interpretar y presentar problemas de matemáticas financieras, como la hoja de cálculo de Excel; también utilizaron recursos mediáticos y de consulta para indagar y aprender más sobre interés simple e interés compuesto, como fue la página de edmodo.com. En esta parte desarrolló unas guías para la solución de problemas, siguiendo la metodología ABP, que permitía vislumbrar diferentes formas de resolver los problemas acertadamente, que los estudiantes podían optar por la más conveniente para ellos.

Como se puede evidenciar en las investigaciones de referencia, la enseñanza y el aprendizaje del concepto del interés compuesto en diferentes niveles educativos ha sido relevante y las dificultades que se presentaron para comprender el cálculo del interés compuesto ha permitido proponer a los investigadores diferentes secuencias de actividades utilizando diversos procedimientos metodológicos. Por ello, en la justificación resaltaremos de qué manera las investigaciones de referencia han implementado tareas para comprender el cálculo del interés compuesto. Además, es necesario destacar cómo se introdujeron herramientas tecnológicas que facilitaron la comprensión de dicho concepto. Por otro lado, se ha revisado documentos oficiales, a nivel internacional; como la Base Común Curricular Nacional (BNCC, 2018) para la enseñanza media de Brasil y las Bases Curriculares del Ministerio de Educación de Chile (2015). En el contexto nacional se ha analizado el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB, 2016), el cuaderno de trabajo Resolvemos Problemas 4 que distribuye el Ministerio de Educación para estudiantes de cuarto de secundaria y los resultados de las pruebas PISA tomados el año 2015 y 2018 a estudiantes peruanos de 15 años.

1.2 Justificación

Las investigaciones de referencia permiten identificar los aportes de diferentes estudios sobre la enseñanza y aprendizaje del interés compuesto en estudiantes de educación básica y superior. Los aportes de Secco et al. (2020), Bezerra, Alves y Bosh (2019) y Chuquisana (2015) muestran las deficiencias en la comprensión de la fórmula del monto, la tasa de interés y en consecuencia del cálculo del interés compuesto. Secco et al. (2020) nos muestra la falta de propuestas prácticas de aplicaciones del interés compuesto a partir de la vida cotidiana y ello trae como consecuencia el poco conocimiento de la actividad financiera. Por ello, los autores proponen una secuencia didáctica llamadas Unidades Didácticas Articuladas de Reconstrucción

Conceptual para construir de manera natural el concepto y propiedades de interés compuesto a partir de situaciones cotidianas planteadas por el docente. Los aportes de Bezerra, Alves y Bosh (2019) dan cuenta que los planteamientos de los libros de texto de Matemática Financiera no se correspondían con la realidad del campo de trabajo de estudiantes que llevaban el curso de Gestión y Empresa; por el contrario, estaban centrados a la aplicación de la fórmula y algoritmos de interés compuesto. Por ello, los autores propusieron un Recorrido de Estudio e Investigación permitiendo darle la responsabilidad al estudiante para buscar información relacionado a nociones de interés compuesto a partir de una pregunta inicial con el poder de generar nuevas preguntas para crear un ambiente de estudio e investigación.

Además, los aportes de Chuquisana (2015) evidencian que los textos de secundaria que sí contienen temas de matemática financiera, desarrollan los temas de interés simple y compuesto de manera tradicional: parten de la fórmula, que luego sirve para su aplicación directa en ejercicios rutinarios y no contextualizados. Por ello, el autor desarrolla una propuesta que presentaba una secuencia inductiva sin el uso de fórmulas y relacionado a dos conceptos matemáticos, progresiones geométricas y función exponencial.

Por otro lado, las investigaciones de Meza (2019), Jiménez (2022) y Reis, Ferreira, Santos, Willian y Margarida (2021) proponen una secuencia de actividades en la que evidencian el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del interés compuesto, que es objeto de nuestro interés de estudio. Los aportes de Meza (2019) evidencian que hay docentes que todavía desconocen las ventajas y beneficios del uso de herramientas tecnológicas, desarrollando clases netamente expositivas. Por ello, el autor propone una metodología basada en la resolución de problemas de interés simple y compuesto usando las funciones financieras de Microsoft Excel, las cuales ahorran tiempo y trabajo al momento de realizar cálculos financieros, dejando de lado las fórmulas matemáticas. Los aportes de Jiménez (2022) evidencian la búsqueda de alternativas más dinámicas para la enseñanza del curso de matemática financiera, específicamente en el tema de interés compuesto, para ello el autor propuso el uso del GeoGebra, quien facilitó la construcción de Applet que posteriormente se anexa a una página web. Finalmente, es necesario resaltar los aportes de Reis, Ferreira, Santos, Willian y Margarida (2021), quienes proponen una secuencia de actividades donde utilizaron varias herramientas tecnológicas, entre ellos resalta al software GeoGebra por su facilidad para visualizar los cambios tanto en la ventana gráfica como algebraica.

Las investigaciones de referencia muestran la importancia de abordar el interés compuesto en diferentes países, contextos socioculturales y niveles educativos. Por ello, nuestro

interés es analizar el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes de cuarto de secundaria cuando resuelven tareas sobre interés compuesto.

En el contexto internacional, el tema de interés compuesto se evidencia al analizar la Base Común Curricular Nacional (BNCC, 2018) para la enseñanza media (estudiantes de 15 a 17 años) de Brasil, donde propone cinco competencias específicas para el área de Matemática. En una de las habilidades de la competencia específica 2 afirma: “Aplicar conceptos matemáticos en la planificación, ejecución y análisis de acciones que impliquen el uso de aplicaciones y la creación de hojas de cálculo (para el control de presupuesto familiar, simuladores de cálculo de interés simple y compuesto, entre otros), para tomar decisiones” (p.534).

Entonces, el BNCC vigente del sistema educativo brasileño para la enseñanza media, evidencia la inclusión de temas de interés compuesto dentro de las habilidades y competencias que un estudiante de 15 a 17 años debe conocer en su formación básica en el contexto de la Matemática Financiera. Es decir, en la educación brasileña la Educación Financiera está considerada en la Base Nacional Curricular como una serie de aprendizajes considerados esenciales para la educación. Por ello, incluyen el estudio de conceptos básicos de economía y finanzas, así como asuntos como tasas de interés, inflación, aplicaciones financieras e impuestos.

En este mismo contexto internacional, las Bases Curriculares del Ministerio de Educación de Chile (2015) del segundo medio (estudiantes de 15 años) para la asignatura de Matemática proponen abordar el tema de interés compuesto dentro del eje temático de Álgebra y funciones. En este eje, se espera que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse matemáticamente las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se pretende que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones (MINEDUC, 2015, p. 99). Por lo tanto, los estudiantes deben desarrollar las cuatro habilidades (resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar) que se interrelacionan al abordar situaciones problemáticas como interés compuesto.

En el contexto nacional es necesario identificar el tema de interés compuesto en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) implementado por el Ministerio de Educación del Perú en el 2016, donde establece los aprendizajes que se espera logren los estudiantes como resultado de su formación básica. Por ello, en la competencia resuelve problemas de cantidad (relacionado a los tópicos de aritmética) al finalizar el ciclo VII (estudiantes de 15 a 17 años) menciona:

Resuelve problemas referidos a las relaciones entre cantidades muy grandes o muy pequeñas, magnitudes o intercambios financieros, traducéndose a expresiones numéricas y operativas con números irracionales o racionales, notación científica, intervalos, y tasas de interés simple e interés compuesto (MINEDU, 2016, p.133).

Adicionalmente, se ha revisado los desempeños que propone el Currículo Nacional de la educación básica del Perú de la competencia resuelve problemas de cantidad para el cuarto de secundaria que se presenta en la figura 1.

Figura 1

Desempeños Esperados de Cuarto de Secundaria

Resuelve problemas de cantidad
<ul style="list-style-type: none">❖ Establece relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades o trabajar con tasas de interés simples e interés compuesto.❖ Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión sobre el interés compuesto y sobre términos financieros (impuesto a la renta, tasa de interés simple e interés compuesto, y capitalización)❖ Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos, y procedimientos diversos para realizar operaciones con tasas de interés compuesto.

Nota: MINEDU (2016, pp. 244 – 249)

Como se puede ver en la figura 1, en el cuarto grado de educación secundaria se aborda temas de interés compuesto dentro de la competencia resuelve problemas de cantidad.

Por otro lado, el Ministerio de Educación del Perú (2017) ha publicado una serie de cuadernos de trabajo para estudiantes de educación secundaria donde se aborda el interés compuesto. En el cuaderno de trabajo “Resolvemos Problemas 4” para el cuarto grado de Educación Secundaria en la página 150, proponen la solución de un problema de interés compuesto aplicando una fórmula: $C_f = C(1 + i)^n$, donde C_f es el capital final o monto, C es el capital inicial, y i la tasa de interés y n es el tiempo transcurrido. Como se puede evidenciar, las actividades relacionadas al interés compuesto para estudiantes de cuarto de secundaria están presentes como aplicación de fórmulas para los cuales los estudiantes deben recordar.

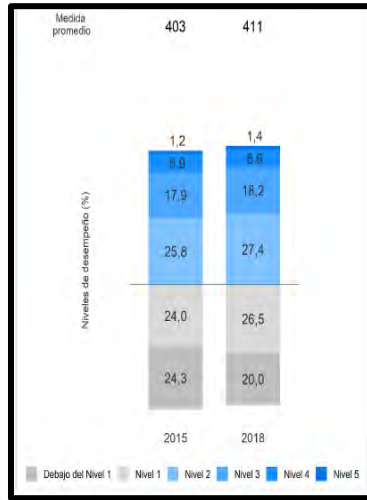
Adicionalmente, es importante agregar los resultados de las pruebas PISA (Programme for International Student Assessment) de una muestra de estudiantes peruanos tomados en los años 2015 y 2018 sobre competencia financiera. La OCDE (Organisation for Economic Cooperation and Development) define a la competencia financiera, como el proceso mediante el cual los consumidores o inversores mejoran su comprensión de los productos, conceptos y riesgos financieros y, a través de la información, instrucción y/o asesoramiento objetivo, desarrollar las habilidades y la confianza para ser más consciente de los riesgos financieros y oportunidades y tomar decisiones informadas. Para evaluar esta competencia, PISA ha dividido la evaluación en cinco niveles de orden creciente; en el nivel 1 los estudiantes pueden identificar productos y términos financieros comunes e interpretar información relacionado a conceptos financieros básicos. En el nivel 2 los estudiantes comienzan a aplicar sus conocimientos sobre productos financieros comunes, así como de términos y conceptos financieros comúnmente utilizados. En el nivel 3, los estudiantes pueden aplicar su conocimiento y comprensión de conceptos, términos y productos financieros comunes a situaciones que sean relevantes para ellos.

En el nivel 4, los estudiantes pueden aplicar su conocimiento, comprensión de conceptos y términos financieros menos comunes a contextos que serán relevantes para ellos, tales como la administración de cuentas bancarias y el interés compuesto en productos de ahorro. En el nivel 5, los estudiantes pueden aplicar su conocimiento y comprensión de una amplia variedad de términos y conceptos financieros a contextos que podrían ser relevantes para ellos a largo plazo.

Bajo estas consideraciones en el año 2015, se tomó una prueba a una muestra de 1804 estudiantes de 281 instituciones educativas públicas y privadas del Perú, y el 2018 una muestra de 4734 estudiantes de 339 instituciones educativas a nivel nacional fue evaluado en base a estos 5 niveles de competencia financiera. En la figura 2 se puede observar el desempeño comparativo a nivel nacional de la medida promedio de la prueba de competencia financiera de los años 2015 y 2018.

Figura 2

Resultado Comparativo de Competencia Financiera del 2015 y 2018



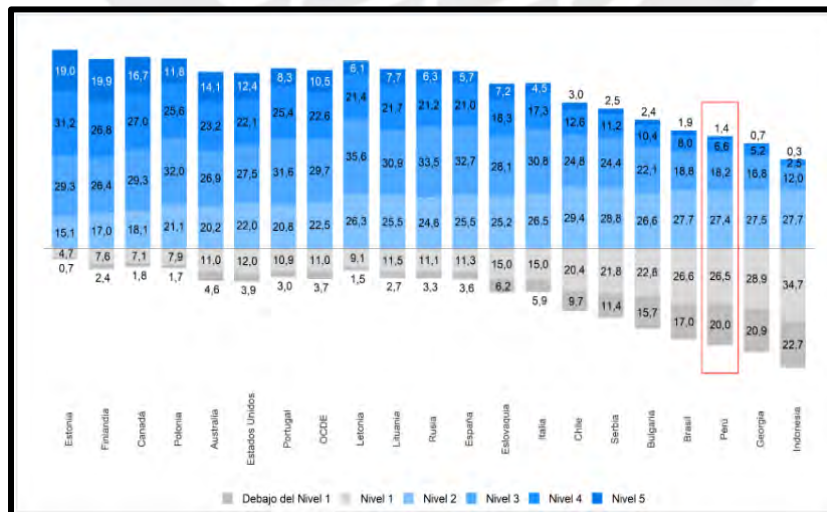
Nota: MINEDU (2020, p.14)

En la figura 1 se observa una diferencia de 8 puntos porcentuales en la medida promedio del desempeño de los estudiantes peruanos de 15 años en la evaluación de Educación Financiera entre los años 2015 y 2018.

Además, el Ministerio de Educación del Perú ha presentado los resultados del desempeño de los estudiantes peruanos de 15 años comparado con los desempeños de otros países y el promedio de los países que forman parte de la OCDE y se muestran en la figura 3.

Figura 3

Competencia Financiera 2018: Resultados por Niveles de Desempeño



Nota: MINEDU (2020, p. 13)

En la figura 3 se observa en la evaluación financiera del 2018 aproximadamente el 46,5% de 4734 estudiantes peruanos de la sub muestra evaluados en competencia financiera se ubican debajo del nivel 1 y nivel 1. Esto significa que este porcentaje de estudiantes peruanos de 15 años evaluados, solo pueden identificar productos y términos financieros comunes e interpretar información relacionada a conceptos básicos, además pueden reconocer la diferencia entre necesidades y deseos, y tomar decisiones simples sobre el gasto diario. Por ello, nuestro interés en investigar es cómo resuelven los estudiantes de cuarto de secundaria con sus propias concepciones y conocimientos, tareas sobre interés compuesto, el cual es un concepto de la competencia financiera evaluada por PISA en el nivel 4.

Por lo presentado tanto en las investigaciones de referencia, en La Base Común Curricular Nacional de Brasil para la enseñanza media, en las Bases Curriculares del Ministerio de Educación de Chile para el segundo medio, el currículo Nacional de la Educación Básica de la Educación Peruana, el cuaderno de trabajo entregado a los estudiantes de la educación básica por el Ministerio de Educación del Perú, y en la evaluación internacional sobre competencia financiera de PISA, consideramos que realizar la presente investigación respecto a la resolución de tareas de interés compuesto utilizando tecnología digital en estudiantes de cuarto grado de secundaria es pertinente y relevante.

Por lo expuesto, creemos que el marco teórico pertinente para recopilar información y analizar los aspectos cognitivos y epistemológicos cuando los estudiantes ponen en práctica sus recursos al resolver tareas de interés compuesto es el Espacio de Trabajo Matemática (ETM). Bajo este marco teórico, el ETM personal del estudiante es fundamental para identificar obstáculos, malentendidos, conceptos erróneos, etc.; e identificar las génesis que se ponen en juego y los planos verticales que se activan.

A continuación, expondremos los aspectos teóricos de la presente investigación.

1.3 Espacio de Trabajo Matemático: Aspectos teóricos

En esta sección, presentaremos algunos aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) desarrollado por Kuzniak (2011), que utilizaremos como fundamento teórico del presente estudio y nos ayudará a dar respuesta a la pregunta de investigación.

La pertinencia de este marco teórico se resalta como una estructura organizada que permite observar y detallar las actividades de los individuos cuando se enfrentan a problemas matemáticos. En términos de Kuzniak et al. (2022), "El trabajo matemático debe entenderse como un trabajo intelectual de producción, cuyo desarrollo y finalidad son definidos y apoyados

por los matemáticos y las matemáticas se transforman por el hecho mismo de ser consideradas como un trabajo humano específico” (p. 6).

Por lo tanto, este marco permite hacer un análisis de las tareas realizadas por los estudiantes que no necesariamente están destinados a convertirse en matemáticos, por lo general aspiran a convertirse en usuarios conocedores de las matemáticas. Como afirma Kuzniak et al. (2022):

Afortunadamente su camino (de los estudiantes) está doblemente definido; por un lado, por el trabajo previo por todos los matemáticos que han conseguido hacer practicable y comprensible, y por otro por el esfuerzo de los profesores, que han dispuesto el acceso a este trabajo para ayudar a los estudiantes a emprender su propio trabajo matemático (p. 7).

En seguida presentaremos las nociones fundamentales del ETM.

- **Trabajo Matemático:** Implica la consideración de tres aspectos relacionados con su ejecución y desarrollo. *Los objetivos del trabajo*, este atributo nos ayuda a distinguir el trabajo de una simple actividad; *los procesos de trabajo*, están relacionados con los procedimientos y las limitaciones que conlleva la ejecución de determinadas tareas, y *los resultados del trabajo*, los cuales deben ser válidos y correctos dentro del ámbito matemático en cuestión.
- **Paradigma:** Representa una combinación de creencias, convicciones, métodos, técnicas y valores compartidos por una comunidad. Para Kuhn (1966, como se citó en Kuzniak et al., 2022) los paradigmas no pueden cohabitar y sus relaciones son inevitablemente conflictivas; pero, en el contexto de las matemáticas hay una visión menos conflictiva, los paradigmas pueden coexistir y apoyar diferentes enfoques para resolver problemas; por lo tanto, enriquecen la comprensión de ciertos conceptos matemáticos.
- **Tarea:** Según Sierpinska (2004, como se citó en Kuzniak et al., 2022) se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formuladas, que puede ser resuelto de manera oportuna por los estudiantes.
- **Dominio matemático:** Estos son determinados de acuerdo a la naturaleza de los objetos estudiados y de los paradigmas que lo caracterizan. Según Kuzniak (2011, p. 12), además de la Geometría, aparece un cierto número de dominios como la Aritmética, Álgebra, Análisis, Probabilidades y Estadísticas.

Para nuestra investigación nos situaremos en el dominio del análisis; por ello, en el trabajo de Montoya-Delgadillo y Vivier (2016) se describe el trabajo matemático en el dominio del Análisis a través de tres paradigmas que describimos a continuación:

- **El análisis geométrico/aritmético (AG):** Aquí se permite las interpretaciones y suposiciones implícitas originados sobre la base de la geometría, de cálculos aritméticos o del mundo real.
- **El análisis del Cálculo (AC):** En este paradigma las reglas del cálculo, como las existentes en el cálculo diferencial o integral que se definen son algo explícitas, y se aplican sin la necesidad de reflexionar sobre la existencia y la naturaleza de los objetos introducidos.
- **El análisis real (AR):** El cual involucra trabajos que implican la aproximación y vecindad e incluso topológico.

Plano epistemológico y plano cognitivo

Kuzniak et al. (2022) declara que, un individuo adquiere la comprensión de un saber cuándo transita por dos planos, uno de naturaleza epistemológica y otro de naturaleza cognitiva, el primero estrechamente relacionado con los contenidos matemáticos del objeto de estudio y el segundo relacionado con los procesos mentales que realiza el sujeto cuando resuelve problemas matemáticos.

- **El plano epistemológico:** Permite estructurar la organización matemática del ETM al situar los objetos y/o herramientas que posibilita desenvolver el trabajo matemático y está formado por tres componentes:
 - **Signo o representamen:** Relacionado con los signos y representaciones semióticas. Por tanto, un signo puede ser un dibujo geométrico, símbolos, expresiones algebraicas, gráficas, entre otras. Además, desde una concepción de las matemáticas basada en representaciones semióticas, estos elementos pueden estar organizados en registros de representación semiótica de Duval (como se citó en Kuzniak et al., 2016).
 - **Los artefactos:** Conjunto de objetos materiales o sistemas simbólicos que se transformarán por intervención humana. Respecto a los objetos materiales, estos pueden ser instrumentos de dibujo o tecnología digital.

- **Referencial:** Conjunto de propiedades, teoremas, definiciones y axiomas sobre algún objeto matemático, los cuales permiten interpretar los contenidos de las demás componentes durante el trabajo matemático.
- **El plano cognitivo:** Como la matemática es una actividad humana, es importante entender cómo los estudiantes hacen uso, interactúan y se apropian de esos conocimientos matemáticos. Por ello, Kuzniak (2022) consideran a un segundo plano y en la articulación cognitiva de las componentes del ETM.
 - **La visualización:** Relacionada con la interpretación de signos y la construcción de representaciones de objetos y sus relaciones. Es decir, consiste en la representación semiótica de un objeto matemático, la exteriorización de dichos objetos que posibilita una mirada por medio de la percepción de estímulos.
 - **La construcción:** Se asocia a acciones desencadenadas por el uso de artefactos (software), acciones que conducen a resultados tangibles como figuras, gráficos o los resultados de cálculos asociados a algoritmos.
 - **El proceso de prueba:** Deben producir argumentaciones y justificaciones mediante herramientas teóricas, que según Kuzniak et al. (2022) basados en un discurso deductivo y lógico, deben basarse en afirmaciones con un claro estatus teórico. Por lo tanto, los argumentos organizados deductivamente pueden ser definiciones, hipótesis, conjeturas o contraejemplos.

Las Génesis del Espacio de Trabajo Matemático

El desarrollo por parte de un individuo de un trabajo matemático adecuado es un proceso de puente entre el plano epistemológico y el plano cognitivo. El plano epistemológico posibilita la constitución de la organización matemática del ETM por medio de los paradigmas que caracterizan al dominio matemático que se está estudiando; por su parte, el plano cognitivo se encarga de estructurar el ETM al momento que tiene que ser empleado por el estudiante. Las génesis que articulan los dos planos son:

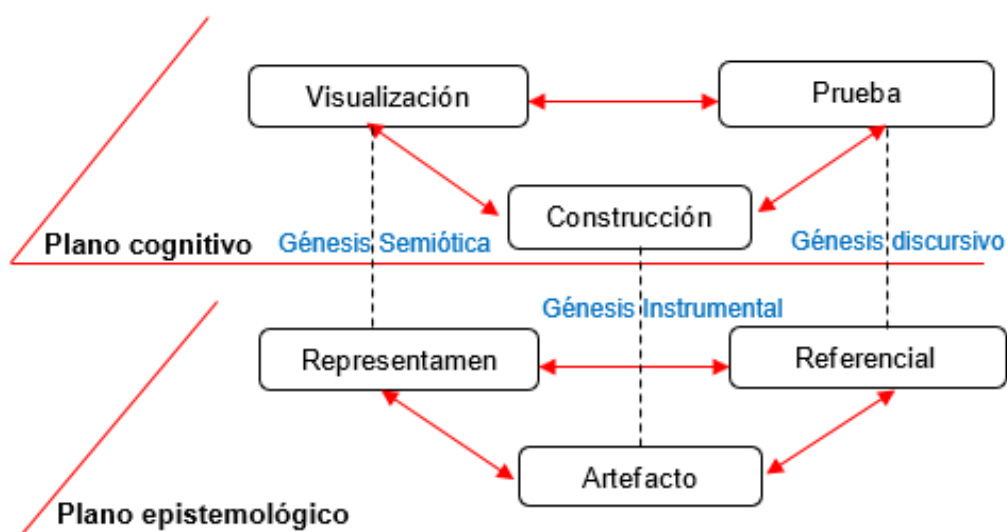
- **Génesis Semiótica:** Asocia los signos y el representamen con la visualización. Explica la relación dialéctica entre las perspectivas sintácticas y semánticas de los objetos matemáticos, representados y organizados por sistemas semióticos. Kuzniak et al. (2016) consideran un proceso circular de ida y vuelta, entre el *Representamen* y el proceso de *visualización*; por ello, en un primer sentido, es un proceso de decodificación o interpretación; mientras que, en sentido inverso, un proceso de codificación o instanciación.

- **Génesis Instrumental:** Establece los vínculos entre los artefactos y los procesos de construcción que contribuyen a la realización del trabajo matemático. La perspectiva ascendente (instrumentación) describe las acciones mediante las cuales el usuario se apropia de las distintas técnicas asociadas al artefacto. La perspectiva descendente (instrumentalización) se refiere a la elección adecuada del artefacto necesario para realizar las acciones previstas.
- **Génesis Discursiva:** Es el proceso por el cual las propiedades y los resultados organizados en el referencial son asociados para estar disponibles para el razonamiento matemático y las validaciones discursivas. Con ello, nos referimos a validaciones que van más allá de la verificación gráfica, empírica o instrumental. La génesis ascendente (deducción) está relacionada con un discurso deductivo de prueba apoyado en el referencial. Por el contrario, la perspectiva descendente (inductiva) identifica propiedades que deben incluirse en el referencial, posiblemente insinuado por tratamientos instrumentales, computacionales o visuales.

En la figura 4 se presenta un esquema que facilita la comprensión sobre la articulación entre las componentes del plano epistemológico y cognitivo; además, el vínculo que surge entre las componentes de los dos planos, generando la génesis semiótica, instrumental y discursiva.

Figura 4

Planos Epistemológicos y Cognitivos del ETM



Nota: Kuzniak, Montoya-Delgado y Vivier (2016, p.246)

Los planos verticales y las circulaciones en el ETM

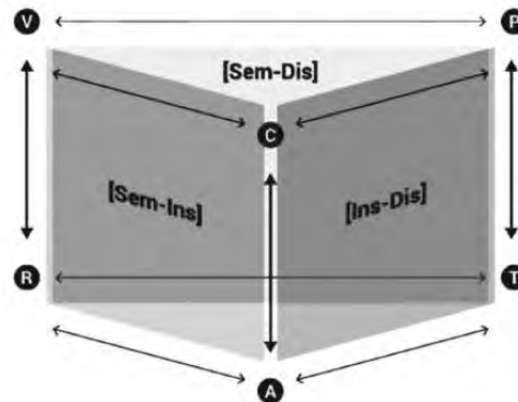
La comprensión de las diferentes génesis y de los tres planos de interacción entre estas génesis (Semiótico - Instrumental, Instrumental – Discursivo y Semiótico – Discursivo) están relacionadas a cuestiones metodológicas y estudios más específicos y detallados del trabajo matemático; estos estudios pretenden dar cuenta del progreso del aprendizaje de los alumnos y de la enseñanza de los profesores. Diferentes autores (Kuzniak et al., 2016, Gómez-Chacón et al., 2016 y Kuzniak, 2022) describen los tres planos verticales:

- **Plano semiótico-instrumental** ([Sem-Ins]): Asocia la génesis semiótica e instrumental, privilegiando la identificación y exploración de los objetos, desarrollando una competencia ligada al descubrimiento. En este plano, observamos dos formas de trabajar, la que está más orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) que cumplen algunas condiciones y otra hacia la interpretación de los datos aportados por los artefactos.
- **Plano Instrumental-Discursivo** ([Ins - Dis]): La conexión entre la génesis instrumental y discursiva se da cuando la construcción de una figura o gráfico se basa en una técnica rutinaria (posiblemente implementado en un software) y en un algoritmo de construcción asociado a esta técnica. Por ejemplo, si se sacan conclusiones a partir de datos dados por instrumentos, vamos a hablar de una prueba experimental. De otra forma, si la prueba o demostración se basará en un referencial teórico, los instrumentos se utilizan para ilustrar o para la construcción de configuraciones geométricas.
- **Plano Semiótico – Discursivo** ([Sem-Dis]): Las pruebas más comunes en las matemáticas escolares se basan en una estrecha conexión entre las génesis semióticas y discursivas. En este plano, son posibles dos tipos de enfoques: 1) Cuando la atención se centra en el lado semiótico, las transformaciones visuales estructuran la descripción de los signos y organizan un razonamiento perceptivo; y 2) si la atención se centra en una prueba o demostración, el razonamiento hipotético y deductivo se basa en propiedades, signos y la visualización desempeña un papel heurístico.

En la figura 5 se presenta un diagrama para visualizar los planos Semiótico – Instrumental, Instrumental – Discursivo y Semiótico – Discursivo como medios para la interacción entre las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

Figura 5

Planos Verticales del ETM



Nota: Kuzniak, Nechache, Philippe y Richard (2022, p. 11)

Tipos de Espacio de Trabajo Matemático

Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Philippe (2022) afirman que el trabajo matemático dependerá de sus usuarios y de su posición en la institución escolar y en particular, de su papel en la prescripción del plan de estudios, en su aplicación y realización. Por ello, se distingue tres tipos de trabajo matemático: ETM de referencia, ETM idóneo y ETM personal.

- **ETM de referencia.** Es definido normalmente por personas u organizaciones responsables de la institución escolar; además, se define con respecto al conocimiento, idealmente según criterios matemáticos. Es decir, es el espacio paradigmático definido por la comunidad, donde un grupo de individuos acuerdan abordar cierto tipo de problemas, con determinadas soluciones, con ciertas herramientas y con determinada forma de pensamiento.
- **El ETM personal.** Se refiere al trabajo realizado por los individuos que se apropian y manejan la resolución de problemas en relación con su Espacio de Trabajo Matemático personal. Es necesario distinguir entre el ETM personal del estudiante y el ETM del profesor.
 - *ETM personal del estudiante:* Es cuando el estudiante se enfrenta a una tarea proporcionada por el profesor con sus propios conocimientos matemáticos y procesos cognitivos, que están moldeados por su ETM personal. En el mismo sentido Menares y Vivier (2022) afirman que el trabajo personal del estudiante puede estar o no en línea con el ETM idóneo, definido por las organizaciones educativas; por ello el objetivo del ETM adecuado es alinear más estrechamente el ETM personal del estudiante con las expectativas de las organizaciones educativas (ETM de

referencia). Además, Menares y Vivier (2022) sostienen que es importante identificar el ETM personal ya que es crucial para identificar obstáculos, malentendidos, conceptos erróneos, teoremas, etc.; y poder comprender las dificultades de los estudiantes y adaptar los ETM idóneas para desarrollar un ETM personal coherente, consistente y conforme.

- *ETM personal del profesor*: Los contenidos son procesados y adaptados por los profesores para ser enseñados, pero su experiencia matemática y su formación condicionan su ETM personal.
- **El ETM Idóneo**. Se refieren a este estado intermedio de transmisión y mediación del conocimiento en el que existe una tensión entre las expectativas del profesor, la redefinición de las tareas y del problema para que el trabajo personal de los alumnos progrese. Por tanto, Henríquez – Rivas, Kuzniak y Masselin (2022) afirman que el propósito de los estudios sobre ETM idóneos es precisamente investigar la forma en que el trabajo matemático se diseña, ajusta y desarrolla en un contexto escolar e institución determinada. Estos estudios se basan en análisis de cómo se organizan los componentes y procesos cognitivos del Espacio de Trabajo Matemático según los diferentes contenidos y dominios matemáticos enseñados.

Por lo expuesto, en nuestra investigación nos proponemos enfocarnos en el Espacio de Trabajo personal de estudiantes de cuarto de secundaria cuando resuelven tareas sobre interés compuesto. A continuación, presentamos el objetivo general del presente estudio.

1.4 Pregunta y Objetivos de investigación

En esta parte, planteamos la siguiente pregunta de investigación.

¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto grado de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto?

Objetivo general

Analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto grado de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto.

Objetivos específicos

1. Identificar la génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto con lápiz y papel, y con tecnología digital.

2. Identificar los planos verticales del Espacio de Trabajo Matemático, que activan los estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto con lápiz y papel, y con tecnología digital.
3. Caracterizar el paradigma que emerge cuando los estudiantes de cuarto año de secundaria resuelven tareas de interés compuesto.

En la siguiente sección presentamos el método y los procedimientos metodológicos que nos permitirán alcanzar los objetivos de la presente investigación.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

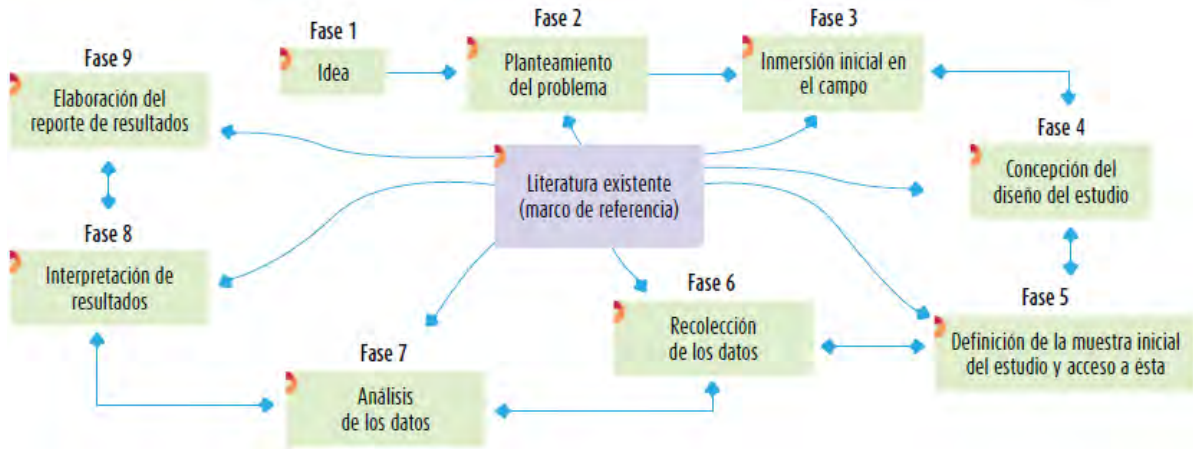
Consideramos que la investigación cualitativa es la adecuada para la presente investigación, debido a que en este tipo de investigación siguen un diseño flexible (Taylor y Bogdan, 1987); es decir, en lugar de que las preguntas e hipótesis de investigación preceda a la recolección y el análisis de los datos, los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Por otro lado, Borba (2004) afirma que una investigación cualitativa prioriza los procedimientos descriptivos en la medida en que su visión del conocimiento admite explícitamente la interferencia subjetiva, el conocimiento como comprensión siempre contingente, negociada y no una verdad rígida, sin ignorar cualquier dato de tipo cuantitativo. Además, el autor menciona que una investigación cualitativa es una manera de conocer el mundo que se materializa a través de procedimientos cualitativos y que dicho conocimiento no está exento de valores, intenciones e historia de vida del investigador y mucho menos de las condiciones sociopolíticas del momento.

Para determinar el procedimiento metodológico que guiará nuestra investigación, tomaremos como base a la propuesta de Hernández, Fernández y Baptista (2014), quienes proponen nueve fases del proceso de investigación cualitativa (ver figura 6)

Figura 6:

Proceso de investigación cualitativo

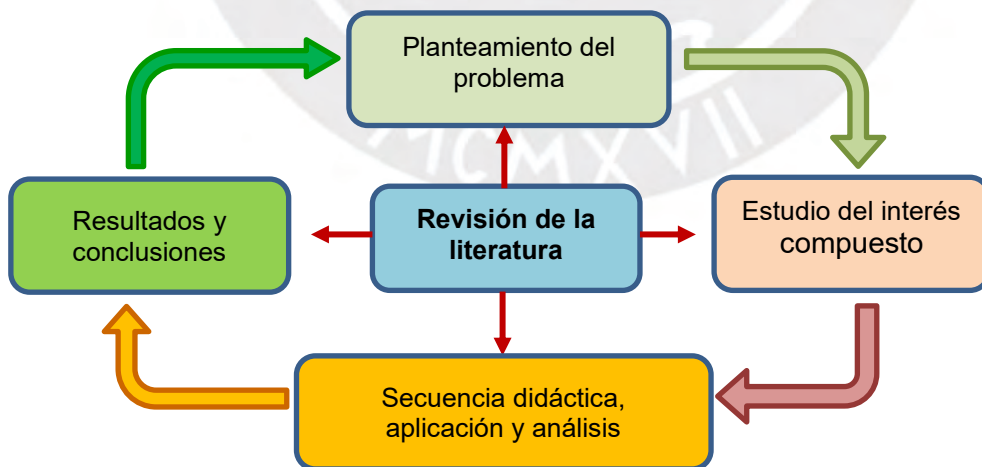


Nota: Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 7)

Hernández et al. (2014) presentan el esquema de las nueve fases en la figura 6, las cuales son: idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en el campo, concepción del diseño del estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de datos, análisis de los datos, interpretación de los resultados y elaboración del reporte de resultados. En el esquema se puede identificar las flechas de las fases en dos sentidos, esto indica según los autores que en la investigación cualitativa a veces es necesario regresar a etapas previas. A continuación, presentaremos las fases que seguiremos en nuestra investigación (Ver figura 7).

Figura 7.

Fases de la presente investigación



Nota: Adaptado de Hernández, Fernández y Baptista (2014)

A continuación, detallamos cada uno de ellos.

Fase 1: Planteamiento del problema

Esta fase abarca el primer capítulo de nuestra investigación, da inicio al proceso y contiene la revisión de las investigaciones de referencia que son relevantes y necesarias que dan sustento al desarrollo de nuestra tesis; la justificación que permite delimitar la pertinencia de nuestro trabajo; los aspectos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), nuestro marco teórico que nos brindará herramientas analíticas y prácticas para cumplir los objetivos propuestos; la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos; además de los aspectos metodológicos y procedimientos expuestos en esta parte.

Es importante resaltar lo que afirma Hernández, Fernández y Baptista (2014) al sostener que un buen marco teórico no es aquel que contiene muchas páginas, sino que trata con profundidad únicamente los aspectos relacionados con el problema, y que vincula de manera lógica y coherente los conceptos y las proposiciones existentes en estudios anteriores. Por la afirmación anterior, en nuestras referencias revisadas, no hemos hallado investigaciones con el mismo marco teórico que proponemos; sin embargo, están asociados al concepto de interés compuesto que abordamos aquí.

Fase 2: Estudio del interés compuesto

Esta fase está relacionado al capítulo II de la presente investigación y comprende los aspectos históricos, matemáticos y didácticos del interés compuesto. Para ello, revisaremos el cuaderno de trabajo Matemática 4 utilizado por los estudiantes de cuarto de secundaria donde se presentan actividades relacionadas a interés compuesto que distribuye el Ministerio de Educación y libro Construye para cuarto grado de secundaria de la Editorial Norma (2020), que utilizan los estudiantes de las instituciones educativas privadas. Dichas revisiones mediante los aportes de las herramientas del Espacio de trabajo Matemático (ETM).

Fase 3: Elaboración de la secuencia didáctica, aplicación y análisis de los resultados

En esta fase está relacionado al capítulo III de la presente investigación y comprende el escenario, los sujetos de investigación, la elaboración de la secuencia didáctica, su aplicación y su análisis. La elaboración de la secuencia didáctica se realizará a la luz de las herramientas que propone el ETM, de las investigaciones de referencia, del registro de documentos oficiales tanto a nivel nacional e internacional, del estudio histórico, matemático y didáctico del interés compuesto.

El análisis de la tarea prevista y la tarea producida por los estudiantes en la parte experimental, se realizarán en dos etapas de acuerdo a los aportes de Kuzniak y Nechache

(2019), 1) **Adentro**, a fin de identificar los principales episodios del trabajo del estudiante que resuelve la tarea; además, describe el trabajo de cada episodio a través de una sucesión de acciones e interpreta en términos del ETM; y, 2) **Afuera**, a fin de describir de manera sintética la progresión de la circulación del trabajo matemático realizado.

Fase 4: Conclusiones y perspectivas futuras.

En esta fase final del proceso se presentan las conclusiones y perspectivas futuras. Las conclusiones son los hallazgos más relevantes a partir del análisis de las actividades resueltas por los estudiantes en base a nuestro marco teórico, ETM. Además, están organizadas de tal manera que permitan dar respuesta a la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos. Por otro lado, creemos que la presente investigación sirva como punto de partida de nuevas investigaciones relacionados a conceptos de Matemática Financiera utilizando como marco teórico el Espacio de Trabajo Matemático.

3.3 Estrategia para el análisis de las acciones matemáticas de los estudiantes

Para el análisis del ETM previsto; es decir, lo que se espera que los estudiantes logren producir y ETM personal, los resultados producidos por los estudiantes, según Henríquez y Kuzniak (2021) citan a Kuzniak y Nechache (2019) contemplan dos etapas para el análisis de tareas basadas en el ETM: etapa adentro y afuera.

- **Adentro**, se describen las principales acciones matemáticas en la realización de las tareas.
- **Afuera**, donde se describe de forma global, con base al esquema del ETM, el Espacio de Trabajo Matemático esperado del estudiante de acuerdo con los posibles episodios identificados en la etapa adentro.

Además, resaltar que cada tarea a analizarse lo dividiremos en episodios, este concepto según Kuzniak y Nechache (2021) hace referencia a una subtarea que incluyen la secuencia de acciones matemáticas utilizadas por los estudiantes para resolver la tarea.

En la tabla 1 se describen las etapas del análisis del ETM previsto que se podría generar al resolver las tareas sobre interés compuesto.

Tabla 1:

Descripción de las etapas adentro y afuera del análisis basada en el ETM

Etapas del análisis	Criterios de Análisis
Adentro	<ul style="list-style-type: none">• Identificación de los episodios de trabajo: Se identifican los principales episodios de trabajo del estudiante que resuelve la tarea.• Descripción del trabajo: Se describe el trabajo de cada episodio a través de una sucesión de acciones realizadas por quien resuelve.• Análisis de la circulación: Con base en la descripción del trabajo, se analiza e interpretan en términos de la circulación del ETM.
Afuera	<ul style="list-style-type: none">• Descripción global del trabajo usando diagrama del ETM. Se presenta de manera sintética, la progresión de la circulación del trabajo matemático realizado, mediante el uso de secuencias con diagramas del ETM y componentes activadas.

Nota: Henríquez y Kuzniak (2021, p. 1557,1558)

En la presente investigación, el análisis de la tarea sobre interés compuesto, busca identificar las acciones matemáticas que realiza los estudiantes en cada episodio, luego interpretarlos en términos del ETM esperado y personal. Además, evaluarlo si se circunscribe a una génesis, a un plano y un paradigma.

En el siguiente capítulo, presentamos el análisis de los aspectos históricos, matemáticos y didácticos en libros de Matemática Financiera, libros dirigidos a formación de profesores y libros que utilizan los estudiantes de cuarto de secundaria en la educación pública y privada sobre el interés compuesto en base a las herramientas que nos brinda el ETM.

CAPITULO II: ASPECTOS HISTÓRICOS, MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS

A continuación, presentaremos la revisión de su evolución histórica y su aplicación en el intercambio comercial del concepto de interés compuesto. Además, presentaremos el análisis didáctico de textos escolares a nivel de secundaria donde proponen el estudio del interés compuesto.

2.1 Aspectos históricos

Los aspectos históricos del concepto de interés compuesto han sido producto del trabajo descriptivo, documental y de numerosas referencias históricas abordado por Lewin (2019).

El autor inicia su investigación indicando que hay numerosas referencias históricas al cobro de interés sobre los préstamos, pero muy pocas menciones específicas sobre capitalización de intereses antes del siglo XVI. Uno de ellos es una tablilla de arcilla procedente de Babilonia que data alrededor de 2000 – 1700 a. C., cuya interpretación queda como: ¿Cuánto tiempo tardará un préstamo en duplicar su valor a interés compuesto? No se indica la tasa de interés, pero la solución a esta pregunta aparece en la tablilla (3 años y 283 días), esto indica que es 20% anual. Esta solución difiere ligeramente del valor real de 3 años 288 días (basado en el año babilónico de 360 días). Otra referencia histórica que cita el autor es de la antigua Roma, en el año 50 a. C. Cicerón escribe a un amigo: “He conseguido que paguen con intereses durante seis años al 12%, y añadidos anualmente al capital” (p. 2).

Según el investigador uno de las primeras y más importantes fuentes para el estudio del interés compuesto es el manuscrito escrito en 1202 por Leonardo Fibonacci de Pisa. Un ejemplo es calcular a cuánto asciende 100 libras esterlinas si se invierte durante 18 años a un interés compuesto del 25% anual, tomando la fracción $\frac{5}{4}$ y multiplicar por sí mismo repetidamente. Otro problema que plantea Fibonacci es cuando se conoce el dividendo y el periodo, y se requiere encontrar la suma que debe invertirse; por ejemplo, para una anualidad de 30 libras esterlinas al año durante 5 años, con una tasa de interés del 20% anual. Para obtener el primer plazo de la anualidad dentro de 1 año, la suma necesaria ahora es $\frac{5}{6}$ de 30 libras, para el segundo año es $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ de 30. Por lo tanto, para una anualidad de 5 años, el precio total de compra es como se muestra en la figura 8.

Figura 8:

Cantidad de inversión durante 5 años

$$[5/6 + (5/6)^2 + (5/6)^3 + (5/6)^4 + (5/6)^5].$$

For ease of calculation, he works out the equivalent expression:

$$(6^4x5 + 6^3x5^2 + 6^2x5^3 + 6x5^4 + 5^5)/6^5.$$

Nota: Lewin (2019, p. 6)

Por otro lado, Lewin (2019) cita a Pegolotti, quien fue el autor de un extenso y completo manuscrito sobre interés compuesto escrita en 1472 que se conserva en la Biblioteca Riccardiana de Florencia. La versión impresa contiene un amplio conjunto de tablas de interés compuesto que muestran la acumulación de 100 liras cada año durante 20 años al 1%, 1 ½ % hasta el 8%. Muchas de las cifras difieren ligeramente en uno o dos céntimos de la cifra correcta. En la figura 9 se presenta la primera tabla de interés compuesto conocido como tabla de interés de Pegolotti para el 1%, el 1½% y el 2% que se encuentra en la biblioteca Riccardiana.

Figura 9:

Primera tabla de interés compuesto de Pegolotti

The image shows a handwritten table of compound interest. At the top, there is a Latin inscription: "Fardello daonia p dirupj doriaz in p ruotolo d'ajj appoiono ualere il ruotolo p'lo d'uno d'uale il ruotolo della buona p'eta gattua". Below this, another inscription reads: "Quello che uengono guidavonate la p' e in j anno opiu a d'el p'aga l'affare h'apo danno appima ho mineremo a j p' l'anno e d'ira g'ofia". The table itself is organized into three columns, each with a header: "La p' e a j p' l'ano d'uno anj", "La p' e a j p' l'ano", and "La p' e a j p' l'ano". Each column contains 20 rows of data, representing the accumulation of interest over 20 years. The numbers are written in a cursive script, with some numbers having small letters above them to indicate fractions or specific units.

Nota: Tabla de interés compuesto tomado de Lewin (2019, p.9)

En el siglo XVI tras la invención de la imprenta fue posible difundir más ampliamente el aprendizaje matemático, específicamente el interés compuesto en los primeros libros impresos de aritmética. Según el autor el primero de estos libros fue escrito por Johannes Widmann y publicado en Leipzig (Alemania) en 1489. Hay 14 problemas de interés simple y compuesto; el problema 200 se pregunta qué tipo de interés se obtiene cuando se prestan 20 florines (moneda medieval) y se devuelven 30 florines al cabo de dos años, en el problema 204 se pregunta a cuánto ascendería 100 florines al cabo de 3 años a un interés compuesto del 20% anual.

Lewin cita a Trenchant (1558) ya que fue el autor que por primera vez publicó un libro donde se imprimen tablas de interés, ello ayudaba simplificar el pesado trabajo del cálculo, sobre todo cuando los plazos son más largos. En la figura 10 se muestra la acumulación al 4% anual de una serie de pagos de 1 libra al año.

Figura 10:

Tabla de la edición de Trenchand (1558)

D'ARITHMETIQUE. 249		
La susdite table.		
100000	2002353	5296615
204000	2182447	5608480
312160	2369745	5932819
424646	2564535	6270132
541641	2767116	6620937
663296	2977800	6985175
789327	3196912	7365206
919420	3424788	7759814
1053276	3661779	8170207
1190607	3908250	8597015
1331863	4164580	9040896
1477576	4431163	9502532
1627279	4708409	9982634
1781586	4996745	

Nota: Lewin (2019, p.14)

Por otro lado, el autor resalta al libro de Stevin (1582) de 90 páginas dedicado completamente al interés simple y compuesto. En el caso de interés compuesto para tipos de interés, desde el 1% hasta el 16% anual correspondiente a los 15 a 22 años, el libro mostraba los valores actuales de los importes en los años futuros y no las acumulaciones de dichos importes. En la figura 11, se muestra parte de la tabla de valores actuales de Stevin al 14% anual, la columna del medio es para un solo pago y la tercera columna por una anualidad, este método

era poco conocido por las personas, probablemente obedecían no solo a razones religiosas sino mantener una supuesta ventaja comercial.

Figura 11:

Tabla de interés al 14% anual (1558)

14. ten 100.		
1.	8771930.	8771930.
2.	7694675.	16466605.
3.	6749715.	23216320.
4.	5920803.	29137123.
5.	5193687.	34330810.
6.	4555866.	38886676.
7.	3996374.	42883050.
8.	3505591.	46388641.
9.	3075080.	49463721.
10.	2697439.	52161160.
11.	2366175.	54527335.
12.	2075592.	56602927.
13.	1820695.	58423622.
14.	1597101.	60020723.
15.	1400966.	61421689.
16.	1228918.	62650607.
17.	1077998.	63728605.

Nota: Lewin (2019, p.15)

En 1612 según el autor, apareció un libro de aritmética y contabilidad escrito por William Colson, que contiene las primeras tablas de interés compuesto en inglés. Cuando Richard Witt publicó *Aritmeticall Question* en Londres en 1613, el interés compuesto ya estaba totalmente aceptado. Lo más resaltante del libro de Witt según el autor es que ofrece una gran cantidad de ejemplos prácticos, además demuestra cómo una sola tabla, que muestra las sumas a las que se acumulará una libra esterlina prestada, ahorra durante varios números de años a un interés del 10% anual, puede utilizarse para evaluar el valor actual sin tener que calcular cada cuota año por año. Por ejemplo, toma el número correspondiente de la tabla, le resta 1, le divide el resultado el mismo número tomado y lo multiplica por el recíproco del tipo de interés. En notación moderna a_n será igual como se presenta en la figura 12.

Figura 12:

Notación moderna del valor actual de una anualidad

$$\boxed{[(1 + i)^n - 1]/i(1 + i)^n}$$

Nota: Lewin (2019, p.18)

Según Lewin (2019) las tablas de interés compuesto eran una gran ayuda práctica, pero uno de los problemas de su utilización era que a veces contenía errores. Por ejemplo, Las tablas de William Colson (1612) contenía numerosos errores, en la edición de 1615 de la *Arithmetick* de Robert Record, una tabla de interés compuesto impresa en la página 581 el valor del 10% anual de una renta vitalicia anual durante 8 años está mal impreso. En conclusión, los errores en las tablas de interés compuesto causaron según el autor, que la gente perdiera dinero e incluso podía dar lugar para que los prestamistas cobraran más tipos de interés.

El autor afirma que es probable que las propiedades de las tablas de interés compuesto lo llevaron a Napier a la invención de los logaritmos, al establecer una asociación entre la progresión aritmética y la progresión geométrica, publicados en 1614. Napier y otros sabían que la multiplicación de los términos de una serie geométrica se puede realizar sumando los números índices de dichos términos de la serie correspondiente a la suma. El logro de Napier fue la constatación de que se podía construir una serie geométrica que tuviera muchas más entradas que una tabla de interés compuesto estándar.

Por lo expuesto, a lo largo de quinientos años las técnicas de interés compuesto se han convertido en una de los conceptos fundamentales en la enseñanza de la matemática tanto a nivel secundaria y nivel superior.

A continuación, presentamos el análisis didáctico del contenido interés compuestos de dos textos que utilizan los estudiantes de cuarto de secundaria (*Resolvemos problemas 4*, MINEDU, 2020 y *Construye 4° de secundaria*, NORMA, 2020) y un texto para formación de profesores de matemática (Lima, Pinto, Wagner, y Morgado, 2004).

2.2 Aspectos didácticos

En esta parte, se analizará el cuaderno de trabajo *Matemática 4*, distribuido a todos los Colegios Públicos del Perú y que sirva como ficha de trabajo para los estudiantes de cuarto de secundaria; cuya estructura incluye 16 fichas relacionados a un contenido matemático y cada

ficha está organizada en tres secciones: aplicamos nuestro aprendizaje, comprobamos nuestro aprendizaje y evaluamos nuestro aprendizaje.

Es importante señalar que el cuaderno de trabajo presenta primero el propósito de la ficha y luego una serie de problemas, en algunos casos al inicio están resueltos y otros propuestos con preguntas que ayudarán al estudiante a resolver el problema. Por ello, al revisar la ficha 11 en la sección comprobamos que nuestros aprendizajes tienen como propósito seleccionar y adaptar estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones de tasas de interés simple y compuesto.

Para iniciar el estudio del interés compuesto, primero se propone el cálculo del interés simple que pagará la familia Huamaní Díaz, que una entidad financiera le ofrece prestarle la suma de S/. 150 000 para pagar durante 10 años en cuotas mensuales de S/. 2400. El material analizado calcula el monto multiplicando 10 años \times 12 meses \times 2400 soles = 288 000 soles. Para calcular el interés realiza una resta de $I = 288\ 000 - 150\ 000$, y resultando 138 000 soles. Luego, calcula la tasa de interés, aplicando la fórmula ($I = C \times r \times t$), obteniendo $r = 9,2\%$. La segunda parte de la actividad pide determinar el interés que debe pagar la familia Huamaní Díaz por el préstamo de S/. 150 000 a una tasa de interés compuesto del 8 % anual, para pagarse en 10 años. En la figura 13 presentamos la solución propuesta.

Figura 13:

Solución del problema de interés compuesto

- El interés compuesto se calcula con la siguiente fórmula:
$$C_f = C(1 + i)^n$$

Donde:

- C_f : capital final
- C : capital inicial
- i : tasa de interés compuesto
- n : número de periodos de capitalización

- Se tiene:
 $C = 150\ 000$ soles
 $i = 8\% = \frac{8}{100} = 0,08$
 $n = 10$
 $C_f = 1\ 500\ 000(1 + 0,08)^{10} = 323\ 838,75$ soles
 $I = 323\ 838,75 - 150\ 000 = 273\ 838,75$ soles

Respuesta: Se pagará más interés, que equivale a S/273 838,75.

Nota: Perú, Ministerio de Educación, 2019, p. 149.

Este ejemplo, en términos de ETM es posible que promueve la activación de la génesis instrumental, debido a que toma como artefacto simbólico la fórmula del capital final y los instrumentaliza para obtener el valor del capital final y luego mediante una sustracción el interés compuesto. Por otro lado, la solución propuesta creemos que es posible que promueve la activación de la génesis discursiva que utiliza como referencial la aritmética elemental, que al sustituir en la fórmula del capital final se realiza una prueba de tipo pragmático. En consecuencia, en este ejemplo resuelto creemos que es posible que se active el plano Instrumental Discursivo [Ins-Dis]

Por otro lado, la solución propuesta se enmarca dentro del paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital final y luego el interés compuesto.

Asimismo, de la sección evaluamos nuestro aprendizaje del cuaderno de trabajo, analizaremos tres preguntas propuestas de opción múltiple sobre interés compuesto (ver figura 14) que tienen como propósito en la pregunta 2, buscar el capital inicial a invertir usando la relación $I = C_f - C_o$, reemplazando se tendría $876 = C_o(1 + 0,009)^2 - C_o$, despejando resultando $C_o = 48\,448,65$. La pregunta 3 tiene como propósito buscar la tasa de interés compuesto de tal manera que en un año los dos tipos de acciones sean lo mismo, para ello los estudiantes deben considerar que en un año el interés simple y el interés compuesto son iguales ($I_s = I_c$), al reemplazar se obtiene $C_o \times r \times t = C_o(1 + r)^t - C_o$, luego $C_o \times 0,06 \times 1 = C_o(1 + \frac{r}{4})^4 - C_o$, despejando r tenemos $r = 5,88 \approx 6\%$. Finalmente, la pregunta 4 tiene por objetivo averiguar el tiempo que debe invertirse un capital para generar una determinada utilidad, para ello deben aplicar la fórmula $C_f = C_o(1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t}$ debido a su capitalización trimestral. Reemplazando tenemos $5000 + 1640 = 5000(1 + \frac{0,036}{4})^{4t}$, luego se introduce el concepto de logaritmos para calcular el tiempo al despejar $\frac{\log 1,328}{\log 1,009} = 4t$, obteniendo $t = 7,9 \approx 8$ años.

Figura 14:

Tareas propuesto de interés compuesto

Un inversionista desea comprar acciones de dos tipos. Las de tipo A generan un interés simple a razón de una tasa de 0,5 % mensual; mientras que las de tipo B producen un interés compuesto del 0,3 % mensual capitalizable trimestralmente.

Con la información dada, responde las preguntas 1, 2, 3 y 4.

2. ¿Cuánto se debe invertir en acciones del tipo B para que al cabo de seis meses se obtenga una ganancia de S/876,00?

a) S/3337,40 b) S/12 000,00 c) S/48 448,65 d) S/87 600,00

3. ¿A qué tasa de interés compuesto anual la utilidad en un año es la misma para los dos tipos de acciones? (Utiliza una calculadora u hoja de cálculo).

a) 1,47 % b) 2,95 % c) 3 % d) 6 %

4. ¿En qué tiempo S/5000 generan una utilidad de S/1640 en las acciones del tipo B?

Nota: Perú, Ministerio de Educación, 2019, p. 151-152.

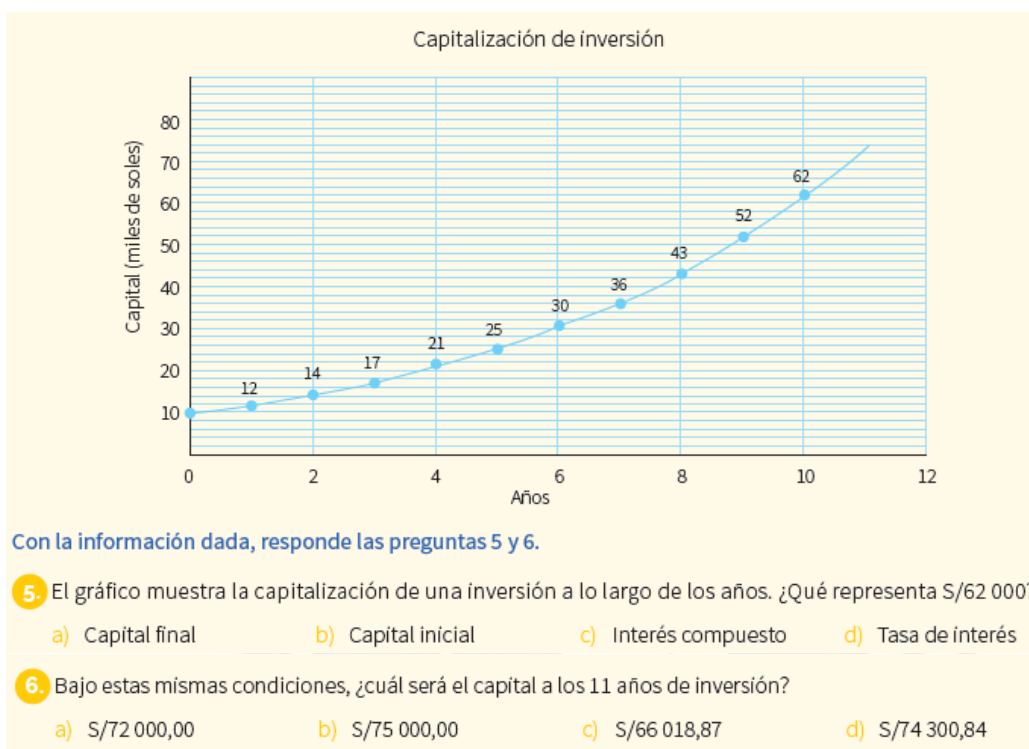
El análisis en términos del ETM en las actividades propuestas (2, 3 y 4) creemos que posiblemente se activan la génesis semiótica, utilizando como representamen el lenguaje aritmético y hay un proceso de visualización al representar el capital inicial (pregunta 2), la tasa de interés (pregunta 3) y el tiempo (pregunta 4) en lenguaje numérico. Además, es posible la activación de la génesis instrumental cuando el artefacto simbólico operaciones aritméticas se instrumentalizan para calcular el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo, estas acciones dan cuenta de la activación del plano [Sem-Ins]. Adicionalmente, se utilizan como referencia la aritmética elemental realizando pruebas de tipo pragmático, activándose el plano [Ins – Dis].

Por otro lado, creemos que las preguntas propuestas se enmarcan dentro del paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

Finalmente, otro aspecto importante para analizar a la luz del ETM es la que se muestra en la figura 15, un gráfico sobre capitalización en años a interés compuesto y tiene por objetivo interpretar lo que representa 62 000 soles (pregunta 5) y calcular el capital final a los 11 años de inversión (pregunta 6). Para dar respuesta a la pregunta 5, los estudiantes visualizan el gráfico y determinan que 62 000 es el capital final luego de 10 años de inversión y en la pregunta 6 los estudiantes deben calcular el capital final a los 11 años de inversión, para lo cual primero es necesario buscar la tasa de interés que no se conoce y luego al final, calcular el capital final solicitado.

Figura 15:

Tareas propuesto de interés compuesto



Nota: Perú, Ministerio de Educación, 2019, p. 153.

De acuerdo a la figura 15, el desarrollo de la posible solución de la tarea 5, creemos que propicia la activación de la génesis semiótica debido a que toma como representamen los valores de los puntos y realiza un proceso de visualización que le permite representarlos como pares ordenados. Además, es posible evidenciar la activación de la génesis discursiva debido a que toma como referencial la regla del capital final ($C_f = C_0(1 + r)^t$) para realizar una prueba de tipo pragmático que consiste en calcular el capital a los 11 años de inversión. En consecuencia, creemos que dan cuenta de la activación del [Sem-Dis].

Asimismo, la actividad propuesta se enmarca en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener pares ordenados a partir de la visualización de algunos puntos de paso del gráfico, obtener valores del tiempo y del capital inicial y final.

En seguida, presentamos el análisis didáctico del libro “Construye” para cuarto grado de secundaria de la Editorial Norma que utilizan los estudiantes de las instituciones educativas privadas. Dicha editorial entrega a cada docente de matemática un paquete de tres libros: la guía docente, que contiene las orientaciones pedagógicas y el libro del estudiante desarrollado, el

libro del estudiante y el libro de actividades, este último contiene actividades propuestas para que el estudiante desarrolle. Tomaremos para su análisis algunas actividades del libro del estudiante y del libro de actividades.

El libro del estudiante está dividido en 8 unidades y cada unidad en una serie de temas. En la unidad 3, que incluye el tema 7 relacionado a interés simple y compuesto; presenta el concepto de interés compuesto, un ejemplo desarrollado y dos situaciones propuestas. En la figura 16 se observa el concepto de interés compuesto propuesto.

Figura 16:

Concepto de interés compuesto

El interés compuesto es aquel generado al final de cada periodo acordado. En este caso, el interés se suma al capital inicial del periodo, **formándose un nuevo capital** sobre el cual se aplicará la tasa de interés.

Nota: Construye, Editorial Norma, 2020, p.70

Esta representación está dada en lenguaje natural y creemos que permite la activación del génesis discursivo en el sentido del ETM, ya que permitirá al estudiante activar dicho concepto cuando lo requiere necesario usar.

Luego, el texto en análisis presenta un ejemplo (ver figura 17) sobre el cálculo del interés compuesto que genera un capital inicial de 1000 soles durante tres años. Para calcular dicho interés se parte calculando el interés en el primer año, luego dicho interés se suma al capital inicial y se calcula el interés para el segundo año y finalmente el interés del segundo año se suma al capital anterior y a dicha suma se calcula el interés para el tercer año. Luego, para calcular los intereses generados en los tres años se suman los intereses generados en cada año.

Figura 17:

Ejemplo de interés compuesto

Ejemplo 20
Calcula el interés compuesto al prestar 1000 soles al 20% durante 3 años.

Solución
Calculamos el interés producido año a año:

En el 1.^{er} año, el interés generado fue de $1000 \times 0,20 = 200$.

En el 2.^o año, el interés generado fue de $(1000 + 200) \times 0,20 = 240$.

En el 3.^{er} año, el interés generado fue de $(1000 + 200 + 240) \times 0,20 = 288$.

El interés compuesto generado será de $200 + 240 + 288 = 728$ soles.

Nota: Construye, libro del estudiante, Editorial Norma, 2020, p.70.

En términos del ETM, creemos que propicia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto la regla del cálculo del porcentaje de una cantidad ($N \times r\%$), realicen un proceso de construcción y obtener los intereses producidos en los tres años sumando el interés producido para el primer año, segundo año y tercer año.

Por otro lado, el libro de actividades para estudiantes de cuarto de secundaria presenta la misma cantidad de unidades del texto escolar analizado anteriormente. En dicho libro presenta una serie de actividades de interés compuesto, de los cuales abordamos dos de ellos (Ver figura 18). El primer problema tiene por objetivo calcular la tasa de interés compuesto utilizando la expresión $C_f = C_0(1 + r)^t$, teniendo como datos el capital final o monto (C_f), el capital inicial (C_0) y el tiempo (t). Como paso previo al cálculo de la tasa de interés en este problema, es necesario el uso de la propiedad de logaritmos para despejar el tiempo (t) que se encuentra en el exponente y finalmente calcular la tasa de interés solicitado. El segundo problema, tiene por objetivo calcular el tiempo que demora en devolver un préstamo de 15 000 soles al 12% anual de interés compuesto, pagando 5000 soles en intereses. Para responder a dicha interrogante los estudiantes deben utilizar la misma expresión anterior, reemplazar los datos y para despejar el tiempo que aparece en el exponente; nos recomienda hacer uso de las propiedades de logaritmos. Para este cálculo se recomienda el uso de una calculadora científica.

Figura 18:

Problemas propuestos de interés compuesto

Juan desea invertir S/ 12 000 dentro de quince meses. Si solo dispone de S/ 9000 de capital, ¿a qué tasa de interés compuesto debe colocar dicho monto para poder obtener el capital correspondiente?

Un comerciante obtuvo un préstamo para mejorar su negocio por un importe de S/ 15 000 al 12% anual de interés compuesto, pagando al final S/ 5000 de interés. ¿Al cabo de qué tiempo devolvió el préstamo con sus intereses?

Nota: Construye, libro de actividades, Editorial Norma, 2020, p.70

El análisis en términos del ETM en las dos actividades propuestas creemos que es posible que se active la génesis semiótica, utilizando como representamen el lenguaje natural; existe un proceso de visualización al representar la tasa de interés y el tiempo en lenguaje numérico. Además, creemos que al resolver los problemas propuestos se activan la génesis instrumental

cuando el artefacto operaciones aritméticas se instrumentaliza para calcular la tasa de interés y el tiempo, estas acciones creemos que dan cuenta de la activación del plano [Sem-Ins]. Adicionalmente, se utilizan como referencial la aritmética elemental realizando pruebas de tipo pragmático, activándose el plano [Ins – Dis].

Por otro lado, las preguntas propuestas se enmarcan dentro del paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permitiría obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener la tasa de interés y el tiempo.

Finalmente, presentamos el análisis didáctico del libro “La Matemática para la Enseñanza Media” volumen 2 (Lima, Pinto, Wagner y Morgado, 2004) y quinta edición para profesores de secundaria publicada por la Sociedad Brasileña de Matemática. Se ha considerado analizar este libro debido a que está escrito para profesores de Matemática y estudiantes que cursan la carrera de docentes de Matemática. Además, los autores evitan el uso excesivo de fórmulas; los cuales son innecesarios y son reemplazados por el uso cociente de definiciones y principios fundamentales. Por ejemplo, los autores aconsejan a los profesores que enseñen a los estudiantes a hacer un uso inteligente del principio de multiplicación.

El tema de interés compuesto es abordado en el capítulo 2, bajo el título Matemática Financiera; donde presentan un ejemplo inicial y un teorema. En el ejemplo se dice que Manuel pidió un préstamo de 100 reales a una tasa de interés del 10% mensual. Luego de un mes la deuda aumentará en $0,10 \times 100$ reales en interés, llegando a 110 reales; pero si Manuel y su acreedor acuerdan posponer la liquidación de la deuda un mes más, manteniendo el mismo tipo de interés, el préstamo se liquidará dos meses después del acuerdo. Por ello, los intereses del segundo mes será $0,10 \times 110$ reales = 11 reales. Los autores sostienen que el interés calculado de esta forma se llama interés compuesto.

Según los autores en el régimen de interés compuesto, el interés de cada periodo se calcula sobre la deuda al inicio de ese periodo; del ejemplo anterior, un interés del 10% mensual da como resultado dos meses de interés del 21%. Luego de la explicación del ejemplo el texto presente el siguiente teorema (figura 19).

Figura 19

Concepto de interés compuesto

Teorema 1. No regime de juros compostos de taxa i , um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1 + i)^n$.

Nota: Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2004, p. 45)

Según la figura 19 los valores del capital crecen a una tasa constante i y por lo tanto forman una progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Finalmente; Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2004) presentan un segundo ejemplo del cálculo del interés compuesto. Pedro invierten 150 reales al 12% de interés mensual, ¿cuánto será el monto de Pedro tres meses después? Los autores proponen aplicar el teorema 1 y el procedimiento se presenta en la figura 20.

Figura 20

Procedimiento para calcular la inversión de Pedro por tres meses

$$\begin{aligned}C_n &= C_0 \times (1 + i)^n \\C_3 &= 150 \times (1 + 0,12)^3 \\C_3 &= 210,74 \text{ reales}\end{aligned}$$

Nota: Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2004, p. 45)

De acuerdo al procedimiento anterior, la cantidad de 150 reales (C_0) se transformará luego de 3 meses en una cantidad igual a 210,74 soles. Es decir, una cantidad, cuyo valor actual es A , será equivalente en el futuro, después de n periodos de tiempo a $C_n = A \times (1 + i)^n$.

En términos del ETM, en el primer ejemplo creemos que propicia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto la regla del cálculo del porcentaje de una cantidad $(0,10 \times 100)$ y obtener los intereses producidos en el primer mes y sumar a la cantidad inicial para obtener el monto luego de un mes de haber obtenido el préstamo, el mismo proceso se realiza para obtener el monto para el segundo mes. En el segundo ejemplo creemos que se activa la génesis semiótica, utilizando como representamen el lenguaje natural; existe un proceso de visualización al representar el monto en lenguaje algebraico y numérico. Además, creemos que al resolver el ejemplo se activa la génesis instrumental cuando el artefacto operaciones aritméticas se instrumentaliza para calcular el monto luego de tres meses de inversión, estas acciones creemos que dan cuenta de la activación del plano [Sem-Ins]. Adicionalmente, se utilizan como referencial la aritmética elemental realizando pruebas de tipo pragmático, activándose el plano [Ins – Dis].

CAPITULO III: PARTE EXPERIMENTAL

En este capítulo se presenta el escenario, los sujetos de investigación, la tarea que consta de dos actividades, las cuales permitirán caracterizar el Espacio de Trabajo Matemático Personal esperado; en otras palabras, creemos que las tareas propuestas favorecen la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, y planos verticales del ETM, además de caracterizar los paradigmas dentro del dominio del análisis geométrico/aritmético.

3.1 Escenario y sujetos de investigación

La realización de la parte experimental de esta investigación es llevada a cabo con estudiantes de cuarto de secundaria de una institución educativa pública con formación técnica del distrito de San Juan de Miraflores, Lima- Perú. La Institución Educativa es una de las 246 instituciones educativas del país con formación técnica que brinda siete especialidades: Administración y Comercio, Computación e Informática, Industria Alimentaria, Confección textil, Electrónica y Electricidad, Mecánica y Metales y Mecánica y Motores.

De acuerdo al Ministerio de Educación la implementación de la propuesta pedagógica de la institución educativa de educación secundaria permite atender las necesidades de aprendizaje de los estudiantes que tienen interés en estudiar una especialidad técnica y que transiten a niveles formativos de los Centros de Educación Técnico – Productiva, Institutos de Educación Superior, Institutos de Educación Superior Tecnológica y Escuelas de Educación Superior Tecnológica, y se inserten al mundo del trabajo.

La propuesta pedagógica emitida por el Ministerio de Educación es que los estudiantes de las instituciones educativas de educación secundaria con formación técnica deben desarrollar todas las áreas curriculares establecida en el Currículo Nacional de Educación Básica Regular teniendo en cuenta tres dimensiones de acuerdo con la tabla 2.

Tabla 2.

Dimensiones del Modelo de Servicio Educativo de Secundaria con formación técnica

Dimensiones de la propuesta pedagógica	Dimensión científica, tecnológica, matemática y artística
	Dimensión de habilidades técnicas, específicas y digitales
	Dimensión de habilidades blandas para la empleabilidad y espíritu emprendedor

Nota: Resolución Ministerial N° 165, MINEDU, 2022, p. 16.

En la figura 21 se presenta la distribución de horas pedagógicas semanales de las instituciones educativas que implementan una formación técnica.

Figura 21

Distribución de horas pedagógicas semanales de las Instituciones Educativas con formación técnica.

Áreas curriculares	Horas semanales por grado				
	1°	2°	3°	4°	5°
Matemática	4	4	4	4	4
Comunicación	4	4	4	4	4
Inglés	2	2	2	2	2
Arte y cultura	2	2	2	2	2
Ciencias sociales	3	3	3	3	3
Desarrollo personal, ciudadanía y cívica.	3	3	3	3	3
Educación Física	2	2	2	2	2
Educación religiosa	2	2	2	2	2
Ciencia y Tecnología	3	3	3	3	3
Educación para el Trabajo	8	8	8	8	8
Tutoría y Orientación Educativa	2	2	2	2	2
Horas libre disponibilidad	0	0	0	0	0
Total de horas	35	35	35	35	35

Nota: Resolución Ministerial N° 165, MINEDU, 2022, p. 22.

De acuerdo con la figura 21, es importante resaltar que los estudiantes de la institución educativa donde se llevó a cabo la investigación cursan la mayor cantidad de horas en Educación para el Trabajo (8 horas pedagógicas de 45 minutos cada hora) a la semana, donde desarrollan proyectos de emprendimiento innovadores relacionados a una especialidad técnica a través de módulos formativos. Por otro lado, matemática 4 horas semanales, donde desarrollan las competencias, capacidades, desempeños y contenidos propuestos en el Currículo Nacional peruano para la Educación Básica; es decir, tanto las Instituciones de Educación Secundaria con formación técnica y las Instituciones de Educación Secundaria que no tienen dicha variante se implementan el mismo programa curricular.

En la tabla 3 se presentan las características de los estudiantes seleccionados para ser investigados; su edad, género, especialidad en el área de Educación para el Trabajo y su nivel de conocimiento del programa Excel.

Tabla 3*Características de la cantidad de estudiantes que participaron en el estudio*

Estudiante	Edad	Género	Especialidad				Conocimientos de Excel	
			1°	2°	3°	4°		
Dupla 1	Estudiante 1	17	Masculino	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Intermedio
	Estudiante 2	16	Masculino	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Básico
Dupla 2	Estudiante 3	15	Masculino	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Básico
	Estudiante 4	16	Femenino	Electrónica y electricidad	Electrónica y electricidad	Confección Textil	Confección Textil	Básico

Nota: Elaboración propia.

En la tabla 3 se evidencia las características de los 4 estudiantes investigados, quienes pertenecen a cuarto de secundaria, con especialidades de electrónica y electricidad (3 estudiantes), y confección textil (1 estudiante) con conocimientos básicos (3 estudiantes) e intermedio (1 estudiante) del programa Excel. La elección de estos estudiantes se justifica por su disponibilidad en participar en la investigación, rendimiento académico aceptable y con conocimientos previos de conceptos como el cálculo del interés simple, cálculo de porcentaje y cálculo de la proporcionalidad.

Para el desarrollo de las tareas se establecieron dos duplas (1 y 2), dicha elección debido a la interacción y colaboración entre los estudiantes, lo cual favoreció al desarrollo de las tareas utilizando por propios conocimientos y procesos cognitivos. A cada dupla se les presentó una copia, las cuales contiene las instrucciones para resolver las dos tareas, primero utilizando lápiz y papel y luego utilizando el programa Excel.

Finalmente, las actividades se llevaron a cabo en tres sesiones de clase, la primera y tercera sesión en aula de clase y la segunda sesión el Aula de Innovación Pedagógica de acuerdo a las especificaciones que se presenta en la tabla 4.

Tabla 4**Descripción de las especificaciones de las sesiones para resolver las tareas**

N° de sesión	Fecha	Tiempo	Tarea	Lugar
1	6 de octubre del 2023	90'	Lápiz y papel: Cálculo del monto del préstamo de la familia Mendoza	Aula de clase de Matemática
2	13 de octubre del 2023	90'	Programa Excel: Los ahorros de los padres de Juan	Aula de Innovación Pedagógica
3	27 de octubre del 2023	45'	Encuesta	Aula de clase de Matemática

Con relación a los sujetos que participan en la investigación, presentamos el rol que desempeñaron cada uno de ellos:

Estudiantes: Están conformados por estudiantes de cuarto de secundaria con edades que oscilan entre 15 y 17 años, quienes para fines de la investigación se les agrupó en duplas al azar.

Formadora. Se refiere a la profesora que tiene a su cargo el área de Matemática. En esta investigación sirve como asistente de la clase.

Investigador: El cual elabora las tareas, las encuestas y brinda las pautas necesarias para que los estudiantes desarrollen la tarea y finalmente analiza las producciones de los estudiantes.

Asistente técnico: Es el docente del aula de Innovación pedagógica, quien apoya a los estudiantes que tienen dificultades para el uso la tecnología y está a cargo del Aula de Innovación Pedagógica de la Institución Educativa.

Es importante resaltar los instrumentos que se han utilizado para la recolección de la información: ficha de la tarea, archivos de Excel, grabación de las sesiones e imágenes fotográficas y resultados de la encuesta.

3.2 Descripción de la secuencia de tareas

La secuencia didáctica consta de dos tareas: la primera tarea propuesta para resolver con uso de lápiz y papel, y la segunda para resolver con el apoyo de tecnología digital.

La primera tarea consta de cinco ítems que será resuelto en la primera sesión de 90 minutos utilizando lápiz y papel. La segunda tarea consta de cuatro ítems que será resuelto en

la segunda sesión de 90 minutos utilizando el programa Excel. Ambas tareas son problemas de contexto extra matemáticos, los cuales nos permitirán analizar el trabajo matemático personal de los estudiantes investigados.

Por lo tanto, considerando que el objetivo de nuestra investigación es analizar el ETM personal de los estudiantes al resolver tareas de interés compuesto, creemos que la secuencia didáctica propuesta facilitaría la articulación entre los planos epistemológico y cognitivo. Por lo tanto, la activación de la génesis semiótica atribuye al representamen su estatus de objetos matemáticos operativos; la génesis instrumental establece un vínculo entre los artefactos y los procesos de construcción del trabajo matemático; por último, la génesis discursiva acciona las propiedades estructuradas en el referencial para disponer en el razonamiento matemático y las validaciones discursivas. Además, creemos que la combinación de las diferentes génesis permitirán la activación de los planos verticales [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

A continuación, presentamos las dos tareas de la secuencia didáctica.

3.3 Tarea 1:

La tarea 1 se propone para resolver con lápiz y papel y es la siguiente.

Cálculo del monto del préstamo de la familia Mendoza

La familia Mendoza desea iniciar un negocio y para ello necesita obtener un préstamo. La figura 22 muestra la capitalización a lo largo de los años del préstamo que una entidad financiera le ofrece.

Figura 22:

Capitalización del préstamo de la familia Mendoza



Nota: Adaptado de Resolvemos problemas 4 (MINEDU, 2019, p. 153)

Además, la entidad financiera le propone prestarle bajo la siguiente condición: La familia Mendoza debe devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados.

Responde las siguientes interrogantes.

1. ¿Cuánto es el capital inicial del préstamo? Justifica tu respuesta.
2. Elabora una tabla que represente la relación entre el tiempo y la evolución del capital durante 6 años.
3. ¿Cuánto es el interés en el primer año, segundo años y tercer año? ¿El interés es el mismo en cada año consecutivo?. Justifica tu respuesta
4. ¿Cuánto es la tasa de interés? ¿la tasa de interés será la misma en cada año consecutivo? Justifica tu respuesta
5. Bajo las mismas condiciones, ¿cuánto debe devolver la familia Mendoza luego de 11 años de haber obtenido el préstamo? ¿Con cuánto de interés? Justifica tu respuesta.

Esta tarea se propone aplicar en dos duplas de estudiantes de cuarto de secundaria durante 90 minutos. Para ello, el investigador facilitará una copia de las preguntas a cada dupla.

A continuación, presentamos el análisis de las posibles producciones de los estudiantes en base al ETM.

3.3.1 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático esperado de tarea 1

Como se ha expuesto en los procedimientos metodológicos de la presente investigación, para caracterizar el ETM de los estudiantes de cuarto de secundaria se ha considerado una distinción entre el ETM esperado; en otras palabras, un análisis previo a la aplicación de la tarea y el ETM personal; es decir, el trabajo que los estudiantes realizan luego de la aplicación de la tarea.

En esta parte es importante resaltar el protocolo para el análisis del ETM esperado de la tarea 1 que presentamos en la tabla 5; donde identificamos los criterios, los componentes y los descriptores.

Tabla 5*Criterios para el análisis de la tarea 1*

Criterios	Componentes	Descriptorios
Génesis Semiótica (GS)	Representamen	Relaciona pares ordenados a partir de la figura 22
	Visualización	Interpreta la conversión de pares ordenados a una representación numérica y tabular a partir de la figura 22.
Génesis Instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefacto de tipo simbólico, operaciones aritméticas
	Construcción	Proceso de construcción de la tabla, proceso de obtención del interés, tasa de interés y el monto.
Génesis Discursiva (GD)	Referencial	Utilizan definiciones y propiedades del concepto de monto, interés y porcentaje
	Prueba	Justificación de tipo pragmático
Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan para la exploración de representaciones semióticas
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar.

Nota: Adaptado de Espinoza-Hernández y Verdugo-Hernández (2022)

Para el análisis a la luz del ETM se considera dos etapas, una etapa adentro, donde se describirá las acciones matemáticas de cada ítem de la tarea y la otra etapa afuera, una descripción global del trabajo usando el diagrama del ETM. Además, es importante resaltar que cada tarea para su análisis está dividida en episodios, y un episodio según Kuzniak y Nechache (2021) son las acciones matemáticas que un estudiante realiza para obtener una solución a la tarea.

3.3.2 Metodología de análisis en base al ETM

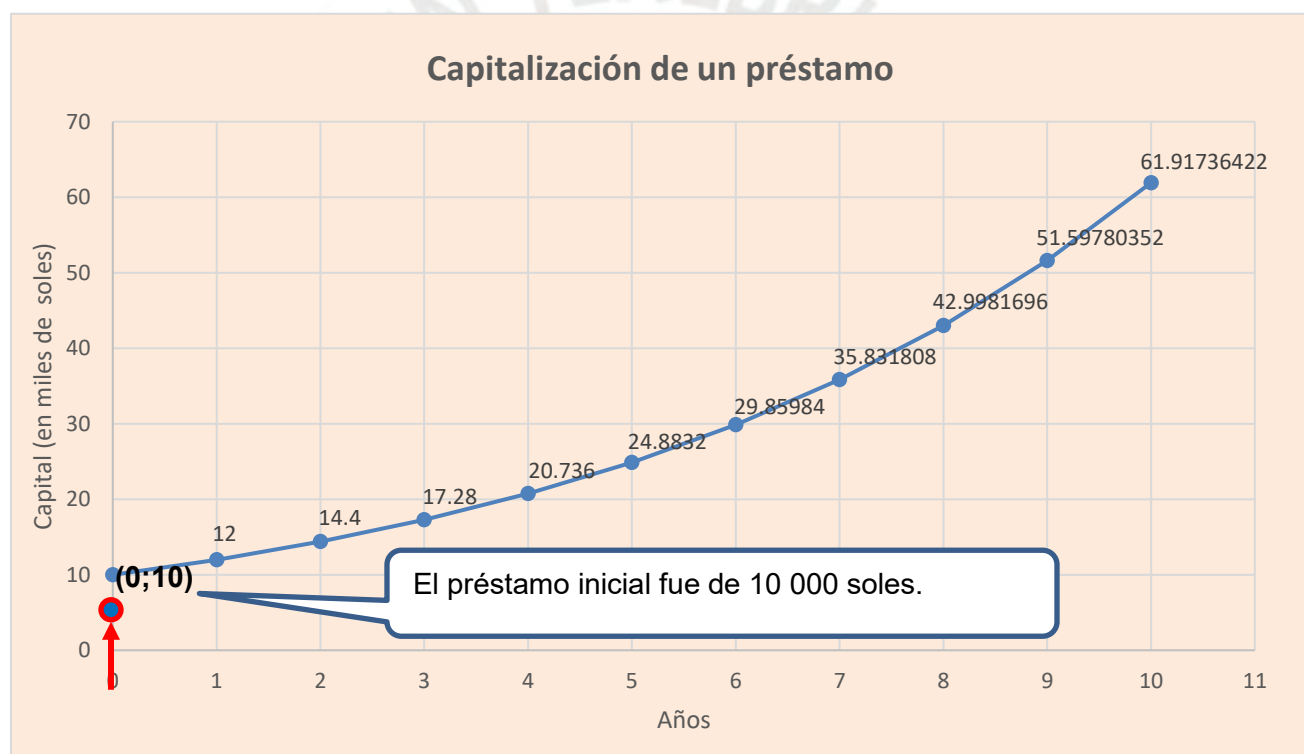
Etapadentro: Se identifican cinco episodios (E) de trabajo. En E1 se espera que los estudiantes identifiquen a partir del gráfico de la figura 17, el capital inicial del préstamo y corresponde a la pregunta 1). En E2 se espera que los estudiantes elaboren una tabla que representa la relación entre el tiempo y la evolución del capital durante 6 años, corresponde a la

pregunta 2). En E3 se espera que los estudiantes calculen el interés en el primero, segundo y tercer años; corresponde a la pregunta 3). En E4 se busca que los estudiantes calculen la tasa de interés producido en el primero, segundo y tercer años (pregunta 4). Finalmente, en E5 se espera que utilicen la expresión general $M = C_0(1 + r)^t$ para calcular el monto y el interés que debe pagar la familia Mendoza luego de 11 años de haber obtenido el préstamo.

Las posibles respuestas que se esperan en E1 es que los estudiantes a partir del gráfico identifiquen el par ordenado (0; 10); es decir, cuanto el tiempo no ha transcurrido (0 años) el préstamo inicial de la familia Mendoza será 10 000 soles. En la figura 23 presentamos la interpretación adecuada que esperamos que los estudiantes logren.

Figura 23:

Identificación del capital inicial



Nota: Solución propuesta por el investigador

En la figura 21 se observa la respuesta adecuada que creemos que los estudiantes puedan lograr interpretar utilizando sus saberes previos, cómo ubicar un par ordenado en el plano cartesiano.

En E2 se espera que los estudiantes construyan una tabla de la evolución del préstamo que le muestra la entidad financiera a lo largo de 6 años. En la tabla 6 se presenta la posible producción que esperamos que logren.

Tabla 6:*Evolución del préstamo de la familia Mendoza*

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6
Capital (soles)	10 000	12 000	14 400	17 280	20 736	24 883,20	29 859,84

Nota: Solución propuesta por el investigador

Como se puede ver en la tabla 6, esperamos que los estudiantes identifiquen adecuadamente los pares ordenados que se forman entre el tiempo (eje X) y el capital en miles de soles (eje Y).

Las posibles respuestas que se espera en E3 es que los estudiantes calculen el interés en el primer año realizando una sustracción del monto obtenido menos el capital inicial del préstamo; el interés del segundo año, el monto obtenido en el segundo año menos el monto del primer año; y el interés del tercer año, el monto obtenido en el tercer año menos el monto del segundo año. Luego se espera que justifiquen afirmando que en cada año consecutivo el interés no es el mismo, va aumentando debido a que el interés se suma al capital generando mayores intereses. En la figura 24 proponemos la solución que creemos que presenten.

Figura 24:

Cálculo del interés esperado en el primero, segundo y tercer año

$I_1 = M_1 - C_0$	$I_2 = M_2 - M_1$	$I_3 = M_3 - M_2$
$I_1 = 12000 - 10000$	$I_2 = 14400 - 12000$	$I_3 = 17280 - 14400$
$I_1 = 2000$	$I_2 = 2400$	$I_3 = 2880$

Nota: Solución propuesta por el investigador

En E4 se espera que los estudiantes obtengan la tasa de interés, para ello se espera que utilicen los resultados anteriores; es decir, el interés en el primer año (S/ 2000), en el segundo año (S/ 2400) y en el tercer año (S/ 2880) para averiguar el porcentaje que representa con respecto al capital inicial (S/ 10 000), al monto del primer año (S/ 12 000) y al monto del segundo año (S/ 14 400) respectivamente. Por otro lado, es posible que los estudiantes recuerden la fórmula general del cálculo del monto $M_t = C_0 \times (1 + i)^t$, lo que se esperaría es que reemplacen los datos del capital inicial (C_0), el monto (M_t) (obtenido en 1 año, 2 años o 3 años) y el tiempo (t). Luego se espera que justifiquen afirmando que la tasa de interés es el mismo en cada año consecutivo. En la Tabla 7 presentamos las producciones esperadas de los estudiantes por regla de tres simple y utilizando la fórmula del monto.

Tabla 7:*Tasa de interés esperado*

Por regla de tres simple	Utilizando la fórmula del monto
$100\% \longrightarrow 10\ 000$ $x \longrightarrow 2\ 000$ $x = \frac{100 \times 2\ 000}{10\ 000}$ $x = 20\%$	$M_t = C_0(1 + i)^t$ $12\ 000 = 10\ 000(1 + r)^1$ $1,2 = (1 + i)$ $1,2 - 1 = i$ $0,2 = i$ $20\% = i$

Nota: Solución propuesta por el investigador

De acuerdo con la tabla 7, en la propuesta de solución por regla de tres simple se ha utilizado el interés obtenido en el primer año (S/ 2000). Por otro lado, en la propuesta de solución utilizando la fórmula del monto se ha utilizado el monto obtenido en el primer año, es decir; $M_1 = 12\ 000$ y $t = 1$.

Finalmente, en E5 se espera que los estudiantes apliquen la fórmula del monto $M_t = C_0 \times (1 + i)^t$, reemplazar los datos y realizando las operaciones con la ayuda de una calculadora para obtener el monto luego de 11 años de haber adquirido el préstamo y el interés en dicho periodo. Por otro lado, al no recordar la fórmula general del monto esperamos que los estudiantes calculen el 20% del monto del décimo año, dicho resultado se suma con el monto del año diez obteniendo el monto luego de 11 años de haber adquirido el préstamo. Para producir el interés esperamos que los estudiantes realicen la sustracción entre el monto obtenido del año 11 menos el capital inicial. En la figura 25 observamos las producciones esperadas por los estudiantes.

Figura 25:*Monto e interés esperado luego de 11 años de haber obtenido el préstamo*

Cálculo del monto	Cálculo del monto	Calculo del interés
$M_t = C_0(1 + i)^t$ $M_{11} = 10\ 000 \times (1 + 0,2)^{11}$ $M_{11} = 10\ 000 \times (1,2)^{11}$ $M_{11} = 10\ 000 \times (7,4300834)$ $M_{11} = S/74\ 300,84$	$I_{11} = 61\ 917,36422 \times 20\%$ $I_{11} = 61\ 917,36422 \times 0,2$ $I_{11} = 12\ 383,47284$ $M_{11} = 61\ 917,36422 + 12\ 383,47284$ $M_{11} = S/74\ 300,84$	$I_t = M_{11} - C_0$ $I_t = 74\ 300,84 - 10\ 000$ $I_t = S/64\ 300,84$

Nota: Solución propuesta por el investigador

En términos de ETM, en E1 esperamos que se active la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica del par ordenado $(0;10)$ y hay un proceso de visualización al interpretar dicho par ordenado como el capital inicial.

En términos de ETM, en E2 esperamos que se active la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica de los puntos que representan el tiempo y el capital a lo largo de seis años; hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados relacionando el tiempo y el capital. Luego, creemos que se activa la génesis instrumental, al tomar como artefacto simbólico el par ordenado $(x; y)$, donde “x” se ubica en el eje de las abscisas y “y” eje de las ordenadas; que las instrumentaliza para construir una tabla de valores. En consecuencia, en esta tarea creemos que se activará el plano vertical de descubrimiento [Sem-Ins].

En términos de ETM, en E3 esperamos que se activan la génesis instrumental, utilizando como artefacto las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego, creemos que se active la génesis discursiva tomando como referencia el concepto de interés, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el interés en el primero, segundo y tercer año. En consecuencia, en esta tarea propiciaría la activación del plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

En términos de ETM, en E4 esperamos que se activa la génesis instrumental utilizando como artefacto, las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener la tasa de interés. Luego, creemos que se active la génesis discursiva tomando como referencial el concepto de porcentaje de una cantidad utilizando la regla de tres o la fórmula del monto, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el porcentaje que representa a la tasa de interés. En consecuencia, en esta tarea propiciaría la activación del plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

En E5, en términos del ETM esperamos que se active la génesis semiótica, tomando como representamen los pares ordenados en la representación gráfica y se visualiza reglas de formación en los montos de cada año. Por otro lado, creemos que se active la génesis instrumental, tomando como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto al término de once años. Además, creemos que se active la génesis discursiva tomando como referencial el concepto de monto, porcentaje e interés, realizando pruebas de tipo pragmático para justificar los valores del monto y del interés. En consecuencia, en E5 se activa el plano de descubrimiento [Sem-Ins], el plano de conocimiento [Sem-Dis] y el plano de razonamiento [Ins-Dis].

Por otro lado, creemos que las preguntas propuestas se enmarcan en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) (Montoya y Vivier, 2016) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener la tasa de interés, el interés y el monto.

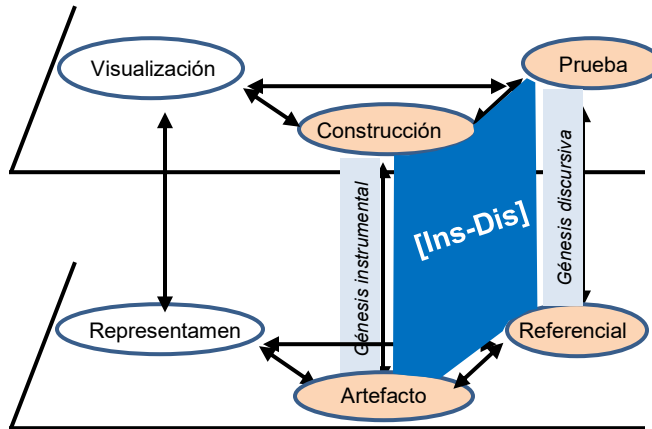
Etapa Afuera: La descripción general del trabajo previsto usando el Espacio de Trabajo Matemático se presenta en la tabla 8.

Tabla 8:

Descripción global del ETM previsto según los episodios de tarea 1, Ítem 1- 5

Episodio	Esquema	Descripción
1		<p>Génesis Semiótico</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica del par ordenado (0;10) y hay un proceso de visualización al interpretar el par ordenado como capital inicial.</p>
2		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica de los puntos que representa el tiempo (eje X) y el capital (eje Y). Hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados. Luego se toma como artefacto simbólico el par ordenado (x; y) que se instrumentaliza para obtener una tabla de valores.</p>

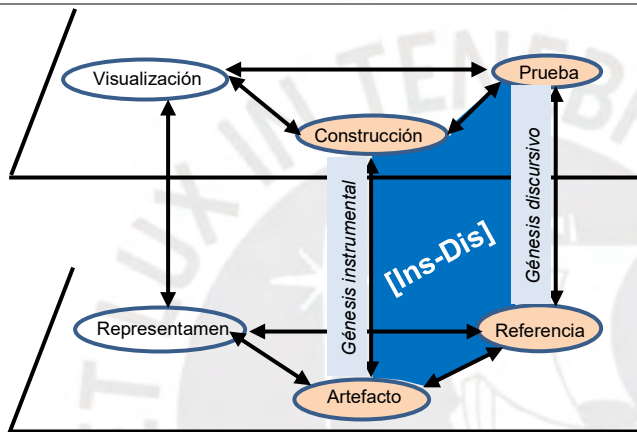
3



[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto**, operaciones aritméticas que las **instrumentaliza** para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego se toma como **referencial** el concepto de interés, realizando **pruebas** de tipo pragmático.

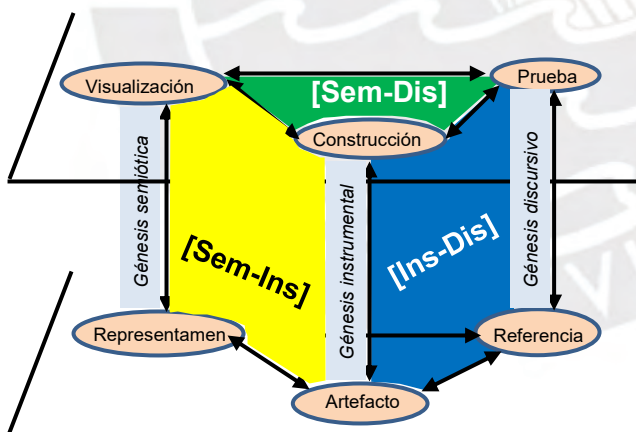
4



[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto** las operaciones aritméticas que se **instrumentaliza** para obtener la tasa de interés. Luego se toma como **referencial** el concepto de porcentaje realizando **pruebas** de tipo pragmático.

5



[Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]

Se toma como **representamen** los pares ordenados en la representación gráfica y se **visualiza** reglas de formación en los montos de cada año. Luego **se toma como artefacto** las operaciones aritméticas y se **instrumentaliza** para obtener el monto. Finalmente, se toma como **referencial** el concepto de monto, porcentaje e interés; realizando **pruebas** de tipo pragmático.

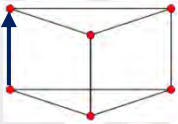
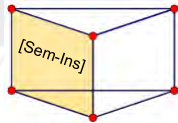
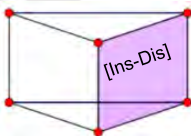
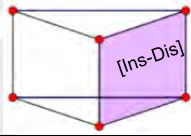
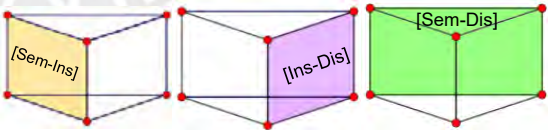
Nota: Elaborado por el investigador

En la tabla 8 se presenta de manera sintética la progresión de la circulación del trabajo matemático esperado mediante el uso secuencial de diagramas del ETM y sus componentes activadas de la tarea 1, ítems del 1 al 5. Además, el uso de las flechas en los diagramas indica la interacción entre las componentes. En el episodio 1 se observa la activación de la génesis semiótica, en episodio 2 se observa la activación del plano vertical semiótico instrumental, en el episodio 3 y 4 se observa la activación del plano vertical instrumental discursivo y en el episodio 5 se observa la activación de los tres planos [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis].

A continuación, en la tabla 9 presentamos un resumen de la tarea 1 en base al ETM, donde se evidencia el paradigma, los ítems, los episodios que involucran cada ítem y una síntesis de los esquemas del análisis global en el ETM.

Tabla 9:

Síntesis del análisis de la tarea 1 desde el ETM

	Paradigma	Ítem	Episodio – E	Síntesis del análisis global del ETM
Tarea 1	Análisis aritmético – Geométrico (AG)	1	E1- Identificación del capital inicial.	
		2	E2- Construcción de una tabla.	
		3	E3- Cálculo del interés.	
		4	E4- Cálculo de la tasa de interés.	
		5	E5- Cálculo del monto e interés luego de 11 años.	

Nota: Adaptado de Henríquez C. y Kuzniak A. (2021, p. 1566)

Como se puede observar en la tabla 7, que es posible identificar el paradigma que se presenta en las tareas propuestas, siendo el paradigma del análisis aritmético geométrico (AG), presente en los cinco ítems propuestas. Por otro lado, se puede identificar los episodios y sobre todo identificar la síntesis del análisis global del ETM, resaltando en el ítem 5, la activación de

las tres génesis; por lo tanto, la activación de los tres planos verticales [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

3.4 Tarea 2:

La tarea 2 se propone para resolver con el programa Excel.

Los ahorros de los padres de Juan

Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 en una entidad financiera que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad financiera le ofrece una tasa de interés compuesto del 10% anual; es decir, cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente.

Ingresa al siguiente enlace de hoja de cálculo:

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1iNmIT3FleVKTWktBv33eg63kYYfsRQa1/edit?gid=1592553404#gid=1592553404> y responda las siguientes preguntas.

1. En la columna tiempo (A4 - A9) introduce 1 a 6 años, en la columna capital inicial (B4 - B9) introduce el capital inicial de S/1000 y los montos generados en el año anterior, y en la columna de la tasa de interés (C4-C9) introduce 10% de tasa de interés. Observa, ¿cuánto es el monto y el interés luego de 6 años? ¿Cómo se calcula? Observa las operaciones para justificar tu respuesta.
2. Proponer un capital inicial que desees ahorrar y escribe en la celda B4, luego elige una tasa de interés, escribe en la celda C4 y luego responde.
 - a. ¿Cuánto es el monto y el interés luego de 6 años? ¿cómo se calcula? Observa las operaciones y justifica tu respuesta.
 - b. Ahora compara con las operaciones realizadas por Excel de los ahorros de padre de Juan y tu propuesta de ahorro, ¿qué cantidades varían? ¿qué cantidades se mantienen constantes?
3. Observa las operaciones que se muestran Excel (columnas F, G y H), ¿cuál es la fórmula del monto que representa al monto y el interés compuesto? Justifica tu respuesta verificando la igualdad de las operaciones de las columnas F, G y H.
4. El banco Nueva Generación ofrece a los padres de Juan que su capital inicial genere un interés al 12% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital. Si deposita un capital inicial de S/2000, ¿cuánto es el monto y el interés luego de 10 años? Utiliza la fórmula del monto obtenido en la pregunta 3 para justificar tu respuesta.

A continuación, presentamos el análisis de las posibles producciones de los estudiantes en base al ETM de la tarea 2.

3.4.1 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático esperado de tarea 2

El protocolo para el análisis del ETM esperado de la tarea 2 presentamos en la tabla 10; donde identificamos los criterios, las componentes y los descriptores.

Tabla 10:

Criterios para el análisis del ETM de la tarea 2

Criterios	Componentes	Descriptores
Génesis Semiótica (GS)	Representamen	Tabla de valores
	Visualización	Interpreta el monto a partir de la tabla excel
Génesis Instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefacto el programa Excel
	Construcción	Proceso de construcción utilizando el programa Excel para obtener la fórmula del monto.
Génesis Discursiva (GD)	Referencial	Utilizan definiciones de porcentaje y propiedades de la aritmética elemental
	Prueba	Justificación de tipo pragmático
Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan para la exploración de representaciones semióticas en tabla dinámica.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto Excel.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar la fórmula del monto.

Nota: Adaptado de Espinoza-Hernandez y Verdugo-Hernandez (2022)

Para el análisis a la luz del ETM se considera dos etapas.

Etapas Adentro: Se identifican cuatro episodios (E) de trabajo. En E1 se completa la tabla en Excel con los datos presentados e identifican el monto y el interés luego de 6 años, corresponde a la pregunta 1). En E2 identifican el nuevo monto y el interés luego que los estudiantes hayan propuesto un capital inicial en un periodo de 6 años, luego se espera que comparen las operaciones de los ahorros de padre de Juan y la nueva propuesta de ahorro, corresponde a la pregunta 2). En E3 se busca verificar la igualdad de las operaciones de las columnas F, G y H, luego generalizar y escribir una fórmula para el monto y otro para el interés, corresponde a la pregunta 3). Finalmente, en E4 se resuelve una nueva tarea, para ello deben utilizar la expresión general $M_t = C_0(1 + r)^t$ y corresponde a la pregunta 4).

Las posibles respuestas que esperamos en E1, es completar el archivo de Excel introduciendo el tiempo ($t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6) en las celdas A4 hasta A9, el capital inicial en las celdas B4 hasta B9 y la tasa de interés ($i = 10\%$) en las celdas C4 hasta C9. Luego observa los cambios que se producen en el interés, el capital final y las operaciones que involucran. En la figura 26 se muestra la imagen del archivo de Excel antes de completar los datos solicitados.

Figura 26:

Plantilla de archivo de Excel de la tarea 2

TAREA 2: Los ahorros de los padres de Juan						
Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente. Completa la tabla y responde las preguntas de la ficha de trabajo.						
Tiempo	Capital inicial (C_0)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES	
Total			0			

Nota: Archivo elaborado por el investigador

Como se puede observar en la figura 26 la plantilla Excel tiene en la fila superior el texto del problema y las columnas tiempo (t), capital inicial (C_0), y la tasa de interés (i), en blanco, pero en las columnas de interés (I), monto (M) y las operaciones combinadas se visualizar algunos símbolos y números predeterminados.

Para calcular el interés y el monto hemos introducido una fórmula de adición y multiplicación que el programa Excel calcula automáticamente, y para las operaciones se ha utilizado la función concatenar, que ayuda a visualizar las operaciones que involucran el cálculo del monto en cada año. Por ello, en la figura 27 presentamos la tabla del archivo de Excel completo como creemos que deben responder los estudiantes en el E1.

Figura 27:

Archivo de Excel de la tarea 2 completo

TAREA 2: Los ahorros de los padres de Juan							
Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente. Completa la tabla y responde las preguntas de la ficha de trabajo.							
Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
1	1000	0.10	100	1100	$1000+0.1 \times 1000$	$1000 \times (1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^1=1100$
2	1100	0.10	110	1210	$1100+0.1 \times 1100$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^2=1210$
3	1210	0.10	121	1331	$1210+0.1 \times 1210$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^3=1331$
4	1331	0.10	133.1	1464.1	$1331+0.1 \times 1331$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^4=1464.1$
5	1464.1	0.10	146.41	1610.51	$1464.1+0.1 \times 1464.1$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^5=1610.51$
6	1610.51	0.10	161.051	1771.561	$1610.51+0.1 \times 1610.51$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^6=1771.561$
Total			771.561				

Nota: Archivo elaborado por el investigador

De acuerdo con la figura 27, esperamos que los estudiantes identifiquen el monto luego de 6 años (S/ 1771,561) en la celda E6 y el interés en ese periodo (S/771,56) en la celda D10. Luego esperamos que justifiquen su respuesta verificando las operaciones de las columnas F, G y H del archivo Excel.

Seguidamente, en E2 esperamos que los estudiantes propongan un capital inicial y tasa de interés, visualicen los cambios que se producen en la tabla; en seguida, se espera que identifiquen el monto y el interés luego de 6 años. En la figura 28 presentamos un ejemplo al cambiar el capital inicial por S/ 5000 y la tasa de interés a 15%.

Figura 28:

Ejemplo de archivo de Excel de la tarea 2 completo

Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
1	5000	0.15	750	5750	$5000+0.15 \times 5000$	$5000 \times (1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^1=5750$
2	5750	0.15	862.5	6612.5	$5750+0.15 \times 5750$	$5000 \times (1+0.15)(1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^2=6612.5$
3	6612.5	0.15	991.875	7604.375	$6612.5+0.15 \times 6612.5$	$5000 \times (1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^3=7604.375$
4	7604.375	0.15	1140.656	8745.03125	$7604.375+0.15 \times 7604.375$	$5000 \times (1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^4=8745.03125$
5	8745.0313	0.15	1311.755	10056.7859	$8745.03125+0.15 \times 8745.03125$	$5000 \times (1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^5=10056.7859375$
6	10056.786	0.15	1508.518	11565.3038	$10056.7859375+0.15 \times 10056.7859375$	$5000 \times (1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)(1+0.15)$	$M=5000 \times (1+0.15)^6=11565.303828125$
Total			6565.304				

Nota: Elaborado por el investigador

De acuerdo con la figura 28, se espera que los estudiantes puedan identificar los cambios en la fórmula del monto al comparar las operaciones realizadas por Excel de los ahorros del padre de Juan y la propuesta de ahorro del estudiante; es decir, identifican elementos constantes (el capital inicial y la unidad) y elementos variables (la tasa de interés y el tiempo).

Luego de visualizar las operaciones que involucran el cálculo del monto en cada año, en E3 se espera que generalicen obteniendo una expresión o fórmula que representa el monto "M" que debe ahorrar los padres de Juan un capital inicial "Co", a una tasa de interés compuesto "i"

después de "t" años. La fórmula que creemos que los estudiantes deben verificar es $M_t = C_o \times (1 + i)^t$ y la fórmula para el interés que creemos que deben verificar es $I = M_t - C_o$.

Además, se espera que los estudiantes justifiquen si las operaciones de las celdas son iguales, explican mediante tratamientos algebraicos de factorización y leyes de la potenciación para logra obtener la formula del monto. En la figura 29, se presenta las posibles producciones de los estudianes al término del primer año.

Figura 29:

Obtención del monto al término del primer año por factorización

$$M_1 = 1000 + 0,1 \times 1000$$

$$M_1 = 1000 \times (1 + 0,1)$$

$$M_1 = 1000 \times (1 + 0,1)^1$$

Nota: Solución propuesta por el autor

Como se muestra en la figura anterior creemos que los estudiantes utilicen el concepto de factorización y obtengan como factor común el capital inicial.

En la figura 30 se presenta las posibles producciones de los estudiantes al término de dos años.

Figura 30:

Obtención del monto al término del segundo año por factorización

$$M_2 = 1100 + 0,1 \times 1100$$

$$M_2 = 1000 \times (1 + 0,1)^1 + 0,1 \times 1000 \times (1 + 0,1)^1$$

$$M_2 = 1000 \times (1 + 0,1)^1 \times (1 + 0,1)$$

$$M_2 = 1000 \times (1 + 0,1)^2$$

Nota: Solución propuesta por el autor.

En la figura 30 se reemplaza el capital inicial para el segundo año por su expresión equivalente que se obtuvo como monto del año anterior; es decir, S/1100 se reemplaza por $1000 \times (1 + 0,1)^1$, luego se espera que utilicen las propiedades de la factorización obteniendo como factor común $1000 \times (1 + 0,1)^1$. Adicionalmente, esperamos que puedan hacer uso una de las propiedades de la potenciación, el producto de bases iguales es igual a la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las bases ($a^m \times a^n = a^{m+n}$).

Finalmente, en la figura 31 observamos la justificación prevista por los estudiantes al término del tercer año, reemplazando el capital inicial para el tercer año por la expresión obtenida para el monto para el segundo año; es decir, S/1210 se reemplaza por la expresión equivalente $1000 \times (1 + 0,1)^2$, luego factorizar los términos comunes en cada sumando, obtener $1000 \times (1 + 0,1)^2(1 + 0,1)$, finalmente aplicar la ley de exponentes y el monto para el tercer año sería: $M_3 = 1000 \times (1 + 0,1)^3$.

Figura 31:

Obtención de la fórmula del monto del tercer año por factorización

$$M_3 = 1210 + 0,1 \times 1210$$

$$M_3 = 1000 \times (1 + 0,1)^2 + 0,1 \times 1000 \times (1 + 0,1)^2$$

$$M_3 = 1000 \times (1 + 0,1)^2(1 + 0,1)$$

$$M_3 = 1000 \times (1 + 0,1)^3$$

Nota: Solución propuesta por el investigador.

Como se muestra en la figura 29, 30 y 31 a partir de las justificaciones y el apoyo de la función concatenar del programa Excel, esperamos que los estudiantes puedan verificar $M_t = C_0(1 + i)^t$, donde M_t es el monto, C_0 el capital inicial, $(1 + i)$ es el factor de incremento que se multiplica a dicho capital inicial tantas veces de acuerdo con t años transcurridos.

En E4 esperamos que, los estudiantes usen la fórmula del monto obtenida en el episodio anterior para resolver una nueva tarea. Para ello, se espera que reemplacen los datos y calculen utilizando una calculadora el monto y el interés luego de 10 años de haber depositado su dinero. En la figura 32 presentamos la producción esperada por los estudiantes.

Figura 32:

Cálculo del monto y el interés esperado luego de 10 años

$$M_{10} = 2000 \times (1 + 0,12)^{10}$$

$$M_{10} = 2000 \times (1,12)^{10}$$

$$M_{10} = 6211,6964$$

$$I = M_{10} - C_o$$

$$I = 6211,6964 - 2000$$

$$I = 4211,6964$$

Nota: Solución propuesta por el investigador.

En términos de ETM, en E1 al completar las celdas como el tiempo, el capital inicial y la tasa de interés, se completa dinámicamente todas las celdas con el uso de las herramientas del programa Excel, lo cual favorece la activación de la génesis semiótica, utilizando como representame la tabla de valores de Excel y hay un proceso de visualización dinámico del capital inicial, el monto, su tasa de interés y las operaciones que involucra. Por otro lado, creemos que se activa la génesis instrumental al tomar como artefacto al programa Excel, que favorece al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener los valores del capital inicial y final de cada año, así como sus operaciones que involucran. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano semiótico Instrumental [Sem-Ins].

En E2, se visualiza dinámicamente los cambios que se producen en algunos elementos de la tabla al modificar el capital inicial y otros se mantienen invariantes, esto favorece la activación del génesis semiótico tomando como representamen los diferentes valores que toman los datos involucrados en la tabla; hay un proceso de visualización al ver los cambios en el interés, el monto y sus operaciones mostrando reglas de formación. Además, favorece la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las herramientas del programa Excel y favorece al proceso de instrumentalización del ambiente virtual. Por lo tanto, en esta tarea se espera que se active el plano vertical [Sem-Ins].

En E3 esperamos que se activa la génesis semiótica al utilizar como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización al ver reglas de formación. Luego, creemos que se activa la génesis instrumental, utilizando como artefacto el programa Excel y que favorece

al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener la fórmula del monto y el interés. Por otro lado, la expresión obtenida promueve la activación de la génesis discursiva debido a que el estudiante utiliza como referencial la aritmética o álgebra elementales y realiza pruebas de tipo pragmático. En consecuencia, en esta tarea al activarse tres génesis, propiciaría la activación de los tres planos [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

Finalmente, en E4 esperamos la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Además, esperamos la activación de la génesis discursiva debido a que el estudiante interpreta como referencial el monto y el interés; realiza pruebas de tipo pragmático. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano vertical [Ins-Dis].

Por eso, creemos que las preguntas propuestas se enmarcan en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

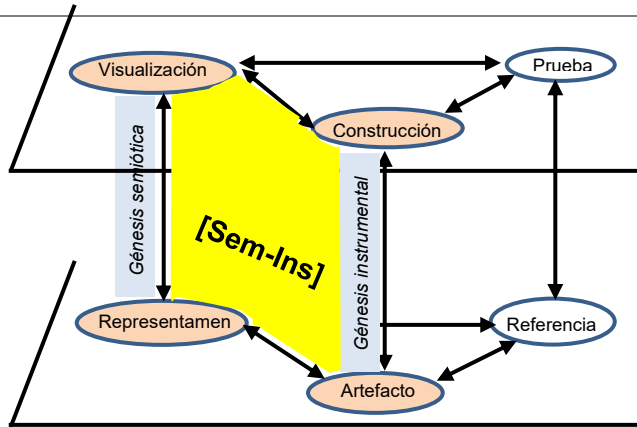
Etapa Afuera: La descripción general del trabajo previsto usando el ETM se presenta en la tabla 11.

Tabla 11:

Descripción global del ETM previsto según los episodios de tarea 2, Ítem 1- 4

Episodio	Esquema	Descripción
<p>1</p>		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Utiliza como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización dinámica del capital inicial, el monto e interés. Se toma como artefacto el programa Excel que favorece al proceso de instrumentalización de un ambiente virtual para obtener los valores del capital inicial, el interés y el monto de cada año.</p>

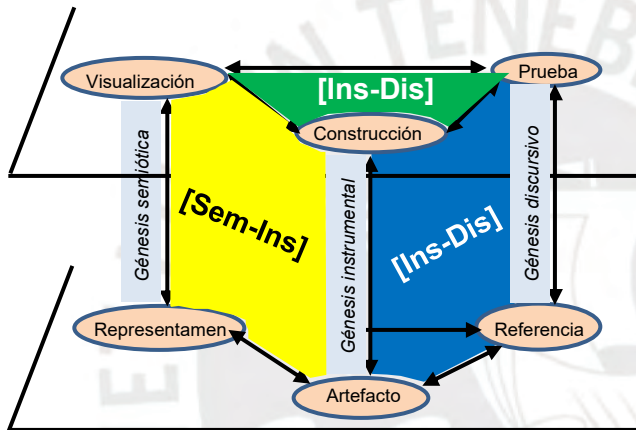
2



[Sem-Ins]

Se toma como **representamen** los valores de la tabla y hay un proceso de **visualización** dinámica al ver los cambios en el interés, monto y sus operaciones. Se toma como **artefacto** el programa Excel que favorece la **instrumentalización** del ambiente virtual.

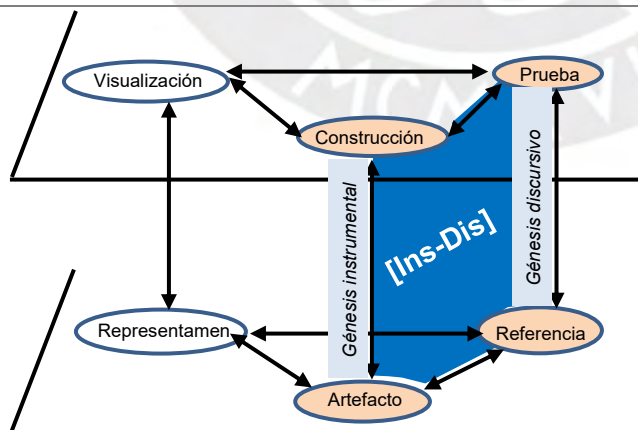
3



[Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]

Se utiliza como **representamen** la tabla de valores y hay un proceso de **visualización** al ver reglas de formación. Se utiliza como **artefacto** el programa Excel y hay un proceso de **instrumentalización** del ambiente virtual para obtener la fórmula general. Luego, se utiliza como **referencial** la aritmética elemental o algebra elemental y realiza **pruebas** de tipo pragmático.

4



[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto** las operaciones aritméticas y se **instrumentalizan** para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Se toma como **referencial** la fórmula del monto y el interés y realizan **pruebas** de tipo pragmático.

Nota: Elaborado por el investigador

En la tabla 8 se presenta de manera sintética la progresión de la circulación del trabajo matemático esperado mediante el uso secuencial de diagramas del ETM y sus componentes activadas de la tarea 2, ítems del 1 al 4. Además, el uso de las flechas en los diagramas indica la interacción entre las componentes. El primer diagrama hace referencia al E1, el segundo diagrama hace referencia al E2, el tercer diagrama al E3 y el cuarto diagrama al E4.

En la tabla 12 presentamos un resumen del análisis de la tarea 2 en base al ETM, donde se evidencia el paradigma, los Ítems, los episodios que involucran cada Ítem y una síntesis del análisis global a la luz del ETM.

Tabla 12:

Síntesis del análisis de la tarea 2 desde el ETM

	Paradigma	Ítem	Episodio - E	Síntesis del análisis global del ETM
Tarea 2	Análisis aritmético – Geométrico (AG)	1	E1- Cálculo del monto y el interés luego de 6 años.	
		2	E2- Calculo del monto e interés de una propuesta de ahorro.	
		3	E3- Determinar la fórmula general del monto e interés.	
		4	E4- Cálculo del monto e interés de una nueva tarea.	

Nota: Adaptado de Henríquez C. y Kuzniak A. (2021, p. 1566).

Como se puede observar en la tabla 12, es posible identificar de forma clara los paradigmas que se presentan en las tareas propuestas, siendo el paradigma del análisis geométrico/aritmético (AG), presente en los cuatro ítems propuestos. Por otro lado, se puede identificar los episodios y sobre todo identificar la síntesis del análisis global del ETM esperado, observando en el ítem 3, episodio 3 se espera la activación de las tres génesis; es decir, la activación de los tres planos verticales [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

A continuación, presentamos los resultados y el análisis de las producciones de los estudiantes Dupla 1 y Dupla 2 en base al ETM.

3.5 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático personal en la tarea 1

A continuación, presentaremos el análisis de las producciones de dos duplas de estudiantes seccionados de la muestra en base al Espacio de Trabajo Matemático.

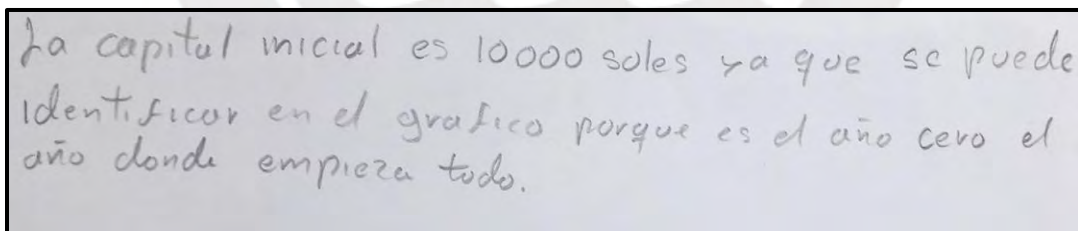
Dupla 1

Etapa adentro. Se identifican cinco episodios (E) de trabajo. En E1 los estudiantes identificaron a partir del gráfico, el capital inicial del préstamo y corresponde a la pregunta 1). En E2 los estudiantes construyeron una tabla que representa la relación del tiempo y la evolución del capital durante 6 años, corresponde a la pregunta 2). En E3 los estudiantes calcularon el interés en el primero, segundo y tercer años; y justificaron si es el mismo en cada año consecutivo, correspondió a la pregunta 3). En E4 los estudiantes calcularon la tasa de interés producido en el primero, segundo y tercer años (pregunta 4). Finalmente, en E5 los estudiantes calcularon el monto y el interés que debe pagar la familia Mendoza luego de 11 años de haber obtenido el préstamo (pregunta 5).

La respuesta en E1 que la Dupla 1 identificó el par ordenado $(0; 10)$; es decir, cuanto el tiempo no ha transcurrido (0 años) el préstamo inicial de la familia Mendoza será 10 000 soles. En la figura 33 presentamos la interpretación adecuada que los estudiantes de la Dupla 1 lograron producir.

Figura 33

Identificación del capital inicial



La capital inicial es 10000 soles ya que se puede identificar en el grafico porque es el año cero el año donde empieza todo.

Nota: Producción de la Dupla 1 en E1

Según la figura 33 la Dupla 1 interpreta adecuadamente el par ordenado $(0;10)$; es decir, 0 corresponde al eje de las abscisas y 10 al eje de las ordenadas. De acuerdo con la figura 31, este episodio está conformado por una acción matemática y esta acción forma un solo episodio.

En E2, la Dupla 1 construyeron una tabla de la evolución del préstamo a lo largo de 6 años. En la figura 34 se presenta la solución.

Figura 34

Evolución del préstamo de la familia Mendoza

tiempo	0	1	2	3	4	5	6
capital en miles de soles	10	12	14.4	17.28	20,736	24,8932	29,8598
	- 10000	12000	14400	17280	207360	2489220	2985984

Nota: Producción de la Dupla 1 en E2

De acuerdo con la figura 34, este episodio está conformado por dos acciones matemáticas: completar la tabla y convertir los números en miles multiplicando por 1000; estas acciones forman un solo episodio.

En E3 la Dupla 1 obtiene el interés en el primer, segundo y tercer año restando el monto del primer año con el capital inicial, el monto del segundo año con el monto del primer año y el monto del tercer año con el monto del segundo año respectivamente. Luego justifican su respuesta afirmando si el capital aumenta, también el interés aumenta. En la figura 33 se presenta el ETM personal de la Dupla 1.

Figura 35

Interés calculado en el primero, segundo y tercer año

1) El interés del primer año es 2000 soles segundo año es 2400 soles, tercer año es 2880 soles $3^{er} \text{ año} =$
 $1^{er} \text{ año} = 12000 - 10000 = 2000$ $2^{er} \text{ año} = 14400 - 12000 = 2400$ $17280 - 14400$
2) NO, aumento ya que si el capital aumenta el interés 2880
también

Nota: Producción de la Dupla 1 en E3

De acuerdo con la figura 35, este episodio está conformado por tres acciones matemáticas: cálculo del interés en el primer año, en el segundo año y tercer año; y estas acciones forman un solo episodio.

Luego, en E4, los estudiantes de la Dupla 1 utilizan la regla de tres simple para obtener la tasa de interés del primer año, para los años siguientes realizan una verificación calculando el

20% del monto del primer año, dicho resultado suma con dicho monto para obtener el monto en el segundo año y así sucesivamente. En la figura 36 se presenta la producción esperada de la Dupla 1.

Figura 36

Tasa de interés calculado por Dupla 1

1) $\frac{1000}{2000} = \frac{100\%}{x}$ $x = 20\%$

2) Si, ya que la tasa de interés no aumenta cada año

$12000 \times 20\% = 2400$

$2400 + 12000 = 14400 \times 20\% = 2880$

$14400 + 2880 = 17280$

Nota: Producción de la Dupla 1 en E4

De acuerdo con la figura 36, este episodio está conformado por cinco acciones matemáticas: cálculo del 20% y estas acciones forman un solo episodio.

Finalmente, en E5 los estudiantes de la Dupla 1 calcularon el 20% del monto del décimo año, dicho resultado sumar con el monto del año diez obteniendo el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo. Luego, dicho monto se restó con el capital inicial para obtener el interés solicitado. En la figura 37 se presenta el ETM personal de la Dupla 1.

Figura 37

Monto e interés producido luego de 11 años de haber obtenido el préstamo.

1) $61,91736422 \times 20\% = 12,383472844$

$61,91736422 + 12,383472844 =$

$74,300837064$

El monto que debe devolver es 74,300837064 Soles

2) $74,300837064 - 10 = 64,30083706$

El interés es igual a 64,30083706 Soles

Nota: Producción de la Dupla 1 en E5

De acuerdo con la figura 37, este episodio está conformado por tres acciones matemáticas y estas acciones forman un solo episodio.

En términos de ETM, en E1 se activa la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica del par ordenado (0;10) y hay un proceso de visualización al interpretar dicho par ordenado como el capital inicial.

En términos de ETM, en E2 se activa la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica de los puntos de paso que representan el tiempo, el capital a lo largo de seis años y hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados relacionando el tiempo y el capital. Luego, se activa la génesis instrumental, al tomar como artefacto simbólico el par ordenado (x; y), donde “x” representa al eje de las abscisas y “y” eje de las ordenadas; que las instrumentaliza para construir una tabla de valores. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano vertical de descubrimiento [Sem-Ins]

En términos de ETM, en E3 se activa la génesis instrumental, utilizando como artefacto las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego, se activan la génesis discursiva tomando como referencia el concepto de interés, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el interés en el primero, segundo y tercer año. En consecuencia, esta tarea propicia la activación del plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

En E4, en términos de ETM se activan la génesis instrumental, utilizando como artefacto las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener la tasa de interés. Luego se activa la génesis discursiva tomando como referencial el concepto de porcentaje de una cantidad utilizando la regla de tres, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el porcentaje que representa la tasa de interés. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

Finalmente, En E5 en términos del ETM se activa la génesis semiótica, tomando como representamen el monto del décimo año (10; 61,91736422), luego al realizar los cálculos aritméticos se visualiza el monto luego de once años de haber obtenido el préstamo. Por otro lado, se active la génesis instrumental, tomando como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto al término de once años. Además, se activa la génesis discursiva tomando como referencial el concepto de monto, porcentaje e interés, realizando pruebas de tipo pragmático para justificar los valores del monto y del interés. En consecuencia, en E5 se activa el plano de descubrimiento [Sem-Ins], el plano de conocimiento [Sem-Dis] y el plano de razonamiento [Ins-Dis].

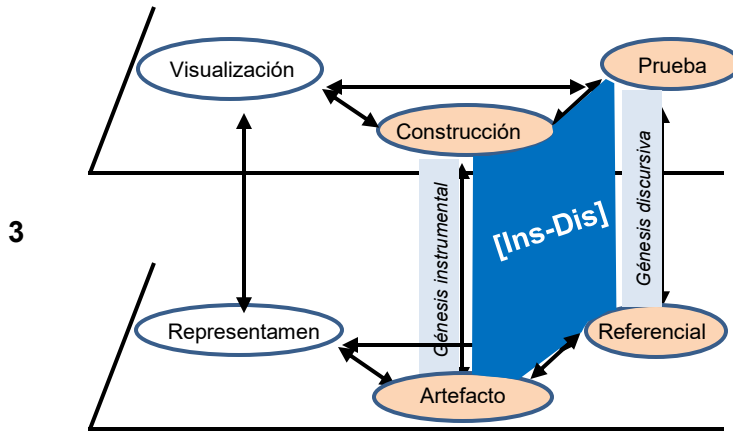
Por otro lado, creemos que las producciones de los estudiantes se enmarcan dentro del paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

Etapa Afuera: La descripción general de la producción de los estudiantes de la Dupla 1 en base al ETM se presenta en la tabla 13.

Tabla 13:

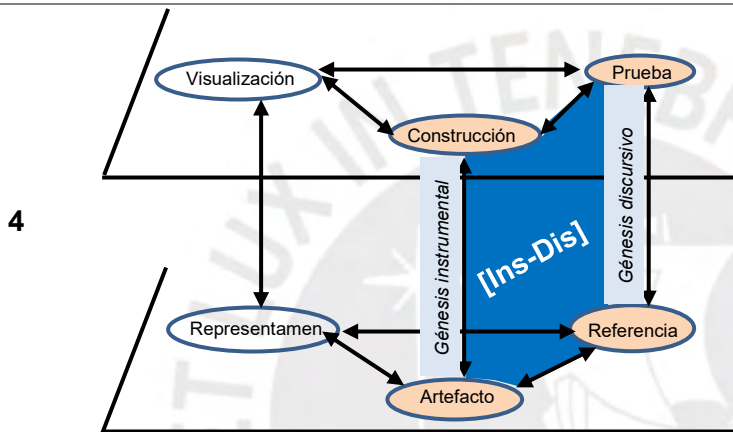
Descripción etapa afuera de la Dupla 1-Tarea 1

Episodio	Esquema	Descripción
1		<p>Génesis Semiótico</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica del par ordenado (0;10) y hay un proceso de visualización al interpretar el par ordenado como capital inicial.</p>
2		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica de los puntos de paso y hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados. Luego se toma como artefacto el par ordenado (x; y) y se instrumentaliza para obtener tabla de valores.</p>



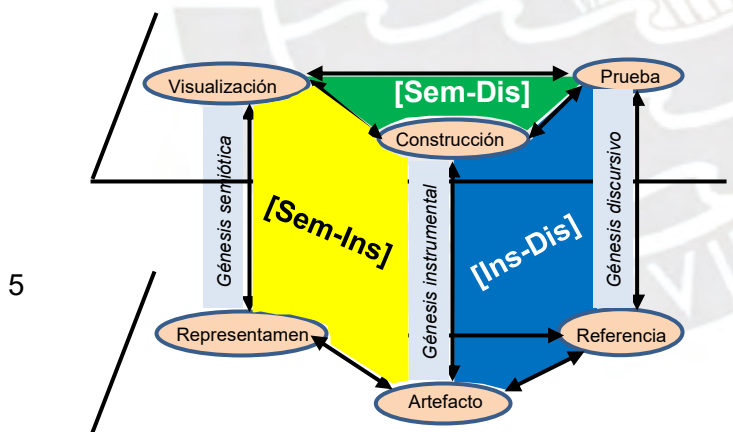
[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto**, operaciones aritméticas y se **instrumentaliza** para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego, se toma como **referencial** concepto de interés y se realiza **prueba** de tipo pragmático.



[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto** las operaciones aritméticas que se **instrumentalizan** para obtener la tasa de interés. Luego se toma como **referencial** el concepto de porcentaje, realizando **pruebas** de tipo pragmático.



[Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]

Se toma como **representamen** el monto del décimo año en la representación gráfica y luego de hacer los cálculos se **visualiza** el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo. Se toma como **artefacto** las operaciones aritméticas y se **instrumentaliza** para obtener el monto. Luego se toma como **referencial** concepto de monto, porcentaje e interés; realizando **pruebas** de tipo pragmático.

Nota: Elaborado por el investigador

La descripción general de la tarea 1, episodios del 1 al 5 se hace referencia en el esquema anterior de la etapa afuera; resaltando que cada esquema representa un episodio. El primer diagrama hace referencia al E1, el segundo diagrama hace referencia al E2, el tercer diagrama al E3, el cuarto diagrama al E4 y el quinto diagrama al E5. Por otro lado, es importante resaltar que en E5 se esperaba que se activen los tres planos verticales, pero las evidencias muestran que solo se pudo activar un solo plano.

Dupla 2

Etapa adentro. Se identifican cinco episodios (E) de trabajo. En E1 los estudiantes identificaron a partir del gráfico el capital inicial del préstamo y corresponde a la pregunta 1). En E2 los estudiantes construyeron una tabla que representa la relación del tiempo y la evolución del capital durante 6 años, corresponde a la pregunta 2). En E3 los estudiantes calcularon el interés en el primero, segundo y tercer años; y justificaron si es el mismo en cada año consecutivo, correspondió a la pregunta 3). En E4 los estudiantes calcularon la tasa de interés producido en el primero, segundo y tercer años (pregunta 4). Finalmente, en E5 los estudiantes calcularon el monto y el interés que debe pagar la familia Mendoza luego de 11 años de haber obtenido el préstamo (pregunta 5).

La respuesta en E1 que la Dupla 2 identificó el par ordenado $(0; 10)$; es decir, en el año 0 el préstamo inicial de la familia Mendoza será 10 000 soles. En la figura 38 presentamos la interpretación adecuada que los estudiantes de la Dupla 2 lograron producir.

Figura 38

Identificación del capital inicial

A rectangular box containing handwritten text in Spanish. The text reads: "La capital inicial es de 10 000 soles, ya que se encuentra en el par ordenado (0;10)". The handwriting is in black ink on a light background.

Nota: Producción de la Dupla 2 en E1

Según la figura 38 la Dupla 2 interpreta adecuadamente el par ordenado $(0;10)$; es decir, 0 corresponde al eje de las abscisas y 10 al eje de las ordenadas. Este episodio está conformado por una acción matemática y esta acción forma un solo episodio.

En E2, la Dupla 2 construyeron una tabla de la evolución del préstamo a lo largo de 6 años. En la figura 39 se presenta el ETM personal de los estudiantes.

Figura 39

Evolución del préstamo de la familia Mendoza

	0	1	2	3	4	5	6
C	10000	12000	14400	17280	20736	24883.2	29859.84

Nota: Producción de la Dupla 2 en E2

De acuerdo con la figura 39, este episodio está conformado por dos acciones matemáticas: completar la tabla y convertir los números en miles multiplicando por 1000; estas acciones forman el episodio 2.

En E3 la Dupla 2 obtiene el interés en el primero, segundo y tercer año restando el monto del primer año con el capital inicial, el monto del segundo año con el monto del primer año y el monto del tercer año con el monto del segundo año respectivamente. Luego justifican su respuesta afirmando que en cada año consecutivo el interés es diferente y aumenta. En la figura 40 se presenta el ETM personal de la Dupla 2.

Figura 40

Interés calculado en el primero, segundo y tercer año

Año 3	Año 2	Año 1	Año 0	
17280	14400	12000	10000	
$\underbrace{\quad}$	$\underbrace{\quad}$	$\underbrace{\quad}$		No, en cada año es diferente y aumenta
2880	2400	2000		

Nota: Producción de la Dupla 2 en E3

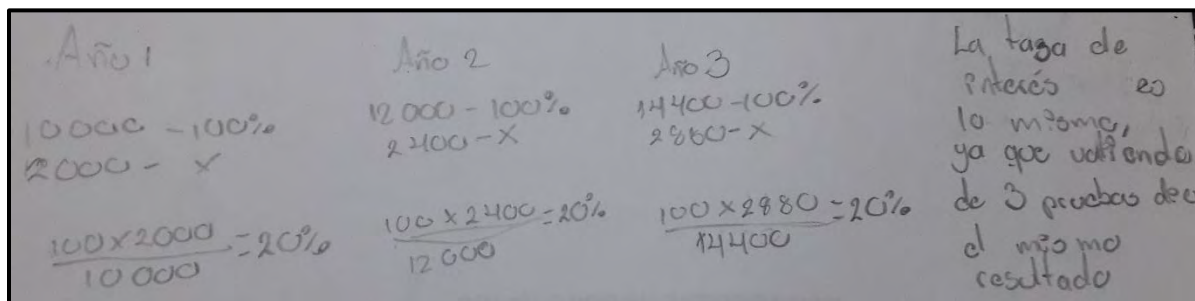
De acuerdo con la figura 40, este episodio está conformado por tres acciones matemáticas: cálculo del interés en el primer año, en el segundo año y tercer año; y estas acciones forman un solo episodio (E3).

Luego, en E4, los estudiantes de la Dupla 2 utilizan la regla de tres simple para obtener la tasa de interés del primer año, en el segundo año y tercer año. Luego justifican sus resultados

afirmando que la tasa de interés es el mismo en los tres años. En la figura 41 se presenta el ETM personal de la Dupla 2.

Figura 41

Tasa de interés calculado por Dupla 2



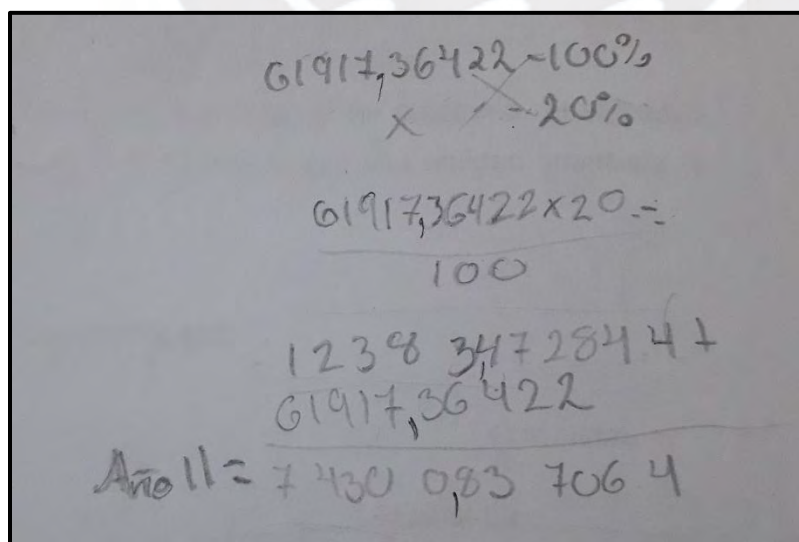
Nota: Producción de la Dupla 2 en E4

De acuerdo con la figura 41, este episodio está conformado por tres acciones matemáticas: cálculo de la tasa de interés en el primer año, en el segundo año y en el tercer año. Estas acciones forman un solo episodio (E4).

Finalmente, en E5 los estudiantes de la Dupla 2 calcularon el 20% del monto del décimo año, dicho resultado se suma con el monto del año diez obteniendo el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo. En la figura 42 se presenta el ETM personal de la Dupla 2.

Figura 42

Monto e interés producido luego de 11 años de haber obtenido el préstamo



Nota: Producción de la Dupla 2 en E5

De acuerdo con la figura 42, este episodio está conformado por dos acciones matemáticas: el cálculo del 20% de monto en el décimo año y el cálculo del monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo sumando el monto en el décimo año con el 20% del monto de ese mismo año. Estas acciones forman un solo episodio (E5).

En términos de ETM, en E1 se activa la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica del par ordenado (0;10) y hay un proceso de visualización al interpretar dicho par ordenado como el capital inicial.

En términos de ETM, en E2 se activa la génesis semiótica, tomando como representamen la representación gráfica de los puntos de paso que representan el tiempo y el capital; hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados relacionando el tiempo y el capital. Luego, se activan la génesis instrumental, al tomar como artefacto simbólico el par ordenado (x; y), donde “x” representa al eje de las abscisas y “y” eje de las ordenadas; que las instrumentaliza para construir una tabla de valores. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano vertical de descubrimiento [Sem-Ins]

En términos de ETM, en E3 se activa la génesis instrumental, utilizando como artefacto las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego, se activan la génesis discursiva tomando como referencia el concepto de interés, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el interés en el primero, segundo y tercer año. En consecuencia, esta tarea propicia la activación del plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

En E4, en términos de ETM se activa la génesis instrumental, utilizando como artefacto las operaciones aritméticas que las instrumentaliza para obtener la tasa de interés. Luego, se activan la génesis discursiva tomando como referencia el concepto de porcentaje de una cantidad utilizando la regla de tres, realizando pruebas de tipo pragmático para calcular el porcentaje que representa la tasa de interés en el primero, segundo y tercer año. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano vertical de razonamiento [Ins-Dis].

Finalmente, En E5 en términos del ETM se active la génesis semiótica, tomando como representamen el monto del décimo año en la representación gráfica, luego al realizar los cálculos aritméticos se visualiza el monto luego de once años de haber obtenido el préstamo. Por otro lado, se activa la génesis instrumental, tomando como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto al término de once años. Además, se activa la génesis discursiva tomando como referencia el concepto de monto, porcentaje e

interés, realizando pruebas de tipo pragmático para justificar los valores del monto. En consecuencia, en E5 se activa el plano de descubrimiento [Sem-Ins], el plano de conocimiento [Sem-Dis] y el plano de razonamiento [Ins-Dis].

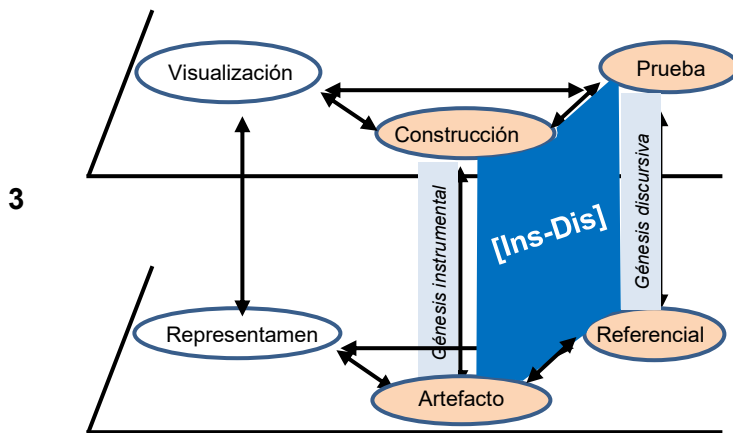
Por otro lado, creemos que las producciones de los estudiantes se enmarcan en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

Etapafuera: La descripción general de la producción de los estudiantes de la Dupla 2 en base al ETM se presenta en la tabla 14.

Tabla 14:

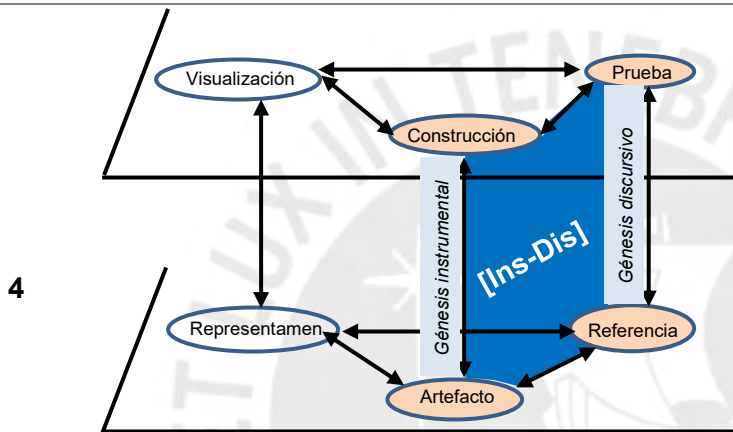
Descripción etapafuera de la Dupla 2-Tarea 1

Episodio	Esquema	Descripción
1		<p>Génesis Semiótico</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica y hay un proceso de visualización al interpretar el par ordenado como capital inicial.</p>
2		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Se toma como representamen la representación gráfica de los puntos de paso y hay un proceso de visualización al obtener datos de pares ordenados. Luego, se toma como artefacto el par ordenado (x; y) que se instrumentaliza para obtener tabla de valores.</p>



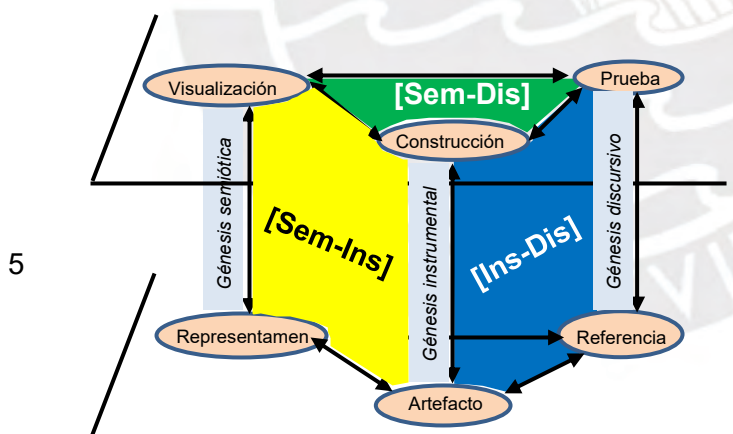
[Ins-Dis]

Se toma como **artefacto** las operaciones aritméticas que las **instrumentaliza** para obtener el interés en el primero, segundo y tercer año. Luego se toma como **referencial** el concepto de interés; realizando **pruebas** de tipo pragmático.



[Ins-Dis]

Como **artefacto** utilizan las operaciones aritméticas que las **instrumentalizan** para obtener la tasa de interés. Utilizan como **referencial** concepto de porcentaje, realizando **pruebas** de tipo pragmático.



[Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]

Utilizan como **representamen** el par ordenado en la representación gráfica y hay un proceso de **visualización** al obtener el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo. Como **artefacto** utilizan las operaciones aritméticas y las **instrumentalizan** para obtener el monto. Por otro lado, utilizan como **referencial** concepto de monto, porcentaje e interés; realizando **pruebas** de tipo pragmático.

Nota: Elaborado por el investigador

La descripción general de la tarea 1, episodios del 1 al 5 se hace referencia en el esquema anterior de la etapa afuera; resaltando que cada esquema representa un episodio. El primer

diagrama hace referencia al E1, el segundo diagrama hace referencia al E2, el tercer diagrama al E3 y el cuarto diagrama al E4. Por otro lado, es importante resaltar que en E3 se esperaba que se activen los tres planos verticales, pero las evidencias muestran que solo se pudo activar solo un plano.

3.6 Análisis del Espacio de Trabajo Matemático personal en la tarea 2

A continuación, presentaremos el análisis de las producciones de la tarea 2 de dos duplas de estudiantes de la muestra en base al Espacio de Trabajo Matemático.

Dupla 1

Etapa adentro. Se identifican cuatro episodios (E) de trabajo. En E1 los estudiantes completaron la tabla en Excel con los datos presentados e identificaron el monto y el interés luego de 6 años, corresponde a la pregunta 1). En E2 identificaron el nuevo monto y el interés luego de 6 años que se genera a partir del capital inicial propuesto, luego compararon las operaciones de los ahorros del padre de Juan y la nueva propuesta de ahorro, corresponde a la pregunta 2). En E3 los estudiantes verificaron la igualdad de las operaciones de las columnas F, G y H, luego generalizaron escribiendo una fórmula para el monto y otro para el interés, corresponde a la pregunta 3). Finalmente, en E4 los estudiantes resolvieron una nueva tarea, para ello utilizaron la expresión general $M_t = C_0(1 + r)^t$ y corresponde a la pregunta 4).

La dupla 1 en E1 lograron completar el archivo de Excel introduciendo el tiempo ($t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6) en las celdas A4 hasta A9, el capital inicial en la celda B4 y la tasa de interés en la celda C4. Para completar el capital inicial en las celdas B5 hasta B9 los estudiantes de la Dupla 1 al inicio escribían en cada celda el monto del primer año como capital inicial para el segundo año, el monto del segundo año como capital inicial del tercer año y así sucesivamente. Pero con las orientaciones del investigador lograron utilizar la fórmula de Excel que consisten en ubicar el cursor en la celda capital inicial del segundo año y escriben el símbolo igual acompañado con el número de celda donde se ubica el monto del primer año ($=E4$). Para completar la tasa de interés lograron realizar el mismo procedimiento; es decir, ubicaron el cursor en la celda tasa de interés del segundo año y escriben el símbolo igual acompañado con el número de celda donde se ubica la tasa de interés del primer año ($=C4$).

En la figura 43 presentamos la imagen del archivo Excel del E1 completado por la Dupla 1, de ello se puede visualizar el interés, el monto y las operaciones que involucran.

Figura 43

Resultados del Episodio 1 de la dupla 1

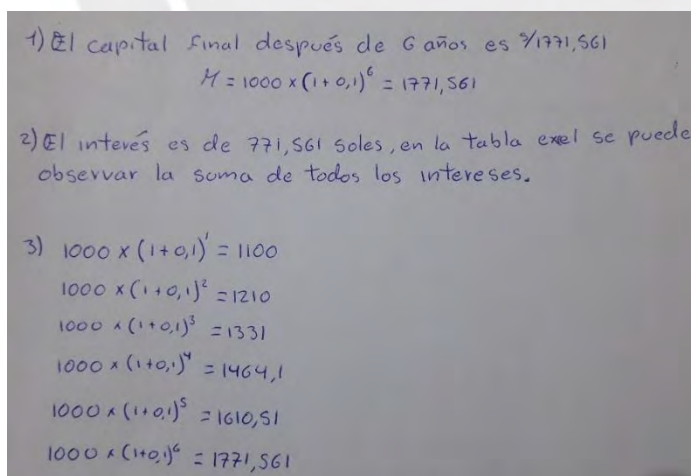
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	TAREA 2: Los ahorros de los padres de Juan							
2	Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente. Completa la tabla y responde las preguntas de la ficha de trabajo.							
3	Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
4	1	1000	0.10	100	1100	$1000+0.1 \times 1000$	$1000 \times (1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^1=1100$
5	2	1100	0.10	110	1210	$1100+0.1 \times 1100$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^2=1210$
6	3	1210	0.10	121	1331	$1210+0.1 \times 1210$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^3=1331$
7	4	1331	0.10	133.1	1464.1	$1331+0.1 \times 1331$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^4=1464.1$
8	5	1464.1	0.10	146.41	1610.51	$1464.1+0.1 \times 1464.1$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^5=1610.51$
9	6	1610.51	0.10	161.051	1771.561	$1610.51+0.1 \times 1610.51$	$1000 \times (1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)(1+0.1)$	$M=1000 \times (1+0.1)^6=1771.561$
10	Total			771.561				

Nota: Producción de la Dupla 1 en E1

Luego los estudiantes de la Dupla 1 identificaron correctamente el monto y el interés que generó el capital inicial de S/ 1000 a una tasa de interés del 10%, que luego de 6 años se convirtió en S/ 1771,561, y obteniendo un interés compuesto de S/ 771,56. Además, con ayuda del archivo Excel identificaron las operaciones que se realizan para calcular el monto en un año: $1000 \times (1 + 0,1)^1 = 1100$; en dos años: $1000 \times (1 + 0,1)^2 = 1210$, en tres años: $1000 \times (1 + 0,1)^3 = 1331$ y así sucesivamente. La figura 44 muestra las justificaciones de la Dupla 1 en E1.

Figura 44

Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 1



Nota: Producción de Dupla 1, tarea 2 y E1

En E2, la Dupla 1 propuso un capital inicial de S/ 500 y una tasa de interés del 20%, hicieron los cambios en el mismo archivo Excel, reemplazando en el capital inicial de S/ 1000 a

S/ 500 y en la tasa de interés de 10% a 20% y automáticamente modificó todas las celdas del archivo. En la figura 45 se presenta la imagen de la producción de los estudiantes.

Figura 45

Evolución del préstamo de la familia Mendoza

Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
1	500	0.20	100	600	$500+0.2 \times 500$	$500 \times (1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^1=600$
2	600	0.20	120	720	$600+0.2 \times 600$	$500 \times (1+0.2)(1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^2=720$
3	720	0.20	144	864	$720+0.2 \times 720$	$500 \times (1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^3=864$
4	864	0.20	172.8	1036.8	$864+0.2 \times 864$	$500 \times (1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^4=1036.8$
5	1036.8	0.20	207.36	1244.16	$1036.8+0.2 \times 1036.8$	$500 \times (1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^5=1244.16$
6	1244.16	0.20	248.832	1492.992	$1244.16+0.2 \times 1244.16$	$500 \times (1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)(1+0.2)$	$M=500 \times (1+0.2)^6=1492.992$
Total			992.992				

Nota: Producción de la Dupla 1, tarea 2 y E2

En seguida, justificaron sus observaciones al identificar correctamente el monto y el interés luego de 6 años; S/ 1492,992 y S/ 992,992 respectivamente. Además, identificaron los elementos que permanecen constantes y variables en las operaciones de las columnas F, G y H. Los estudiantes afirman que en las operaciones de la tabla del archivo Excel varía el monto y tasa de interés, pero el tiempo en el primer año es 1, en el segundo año es 2, en el tercer año es 3 y así sucesivamente. Además, es importante que los estudiantes identificaron que 1 representa al 100% y permanece constante (Figura 46).

Figura 46

Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 2

La capital inicial es de 500 soles y la tasa de interés es del 20%

a) El monto luego de 6 años es 1492,992 soles
 $M = 500 \times (1+0.2)^6 = 1492,992$

El interés es de 992,992 soles en la tabla excel se puede observar la suma de todos los intereses.

b) varía el monto inicial y el interés compuesto, pero el tiempo no cambia ni el 100%. (1)

Nota: Justificación de la Dupla 1, tarea 2 y E2

En E3 la Dupla 1 identificaron e interpretaron la fórmula que representa el monto "M" que debe ahorrar los padres de Juan un capital inicial "CI", a una tasa de interés compuesto "Ti" después de "t" años. La fórmula que lograron deducir los estudiantes de la Dupla 1 es $M = CI \times (1 + Ti)^t$ y la fórmula del interés compuesto es $I = M - CI$. Luego, es importante resaltar la

justificación de los estudiantes al verificar la operación del monto en el primer año $M = 500 + 0,2 \times 500$, comparando con $M = 500(1 + 0,2)$, obteniendo en ambas operaciones la misma respuesta ($M = 600$). En la figura 47 presentamos la justificación de la Dupla 1.

Figura 47

Fórmula del monto y del interés obtenido por la Dupla 1 en tarea 2 y E3

1) $M = CI \cdot (1 + T)^T$

$M =$ Monto
 $CI =$ Capital Inicial
 $1 =$ Es el 100%
 $T_i =$ Tasa de interés
 $T =$ Tiempo

$M_1 = 500 + 0,2 \times 500 = 600$
 $M_2 = 500 \times (1 + 0,2) = 600$

2) $I = M - CI$

$M =$ Monto
 $CI =$ Capital inicial
 $I =$ Interés compuesto

$I_1 = 600 - 500 = 100$

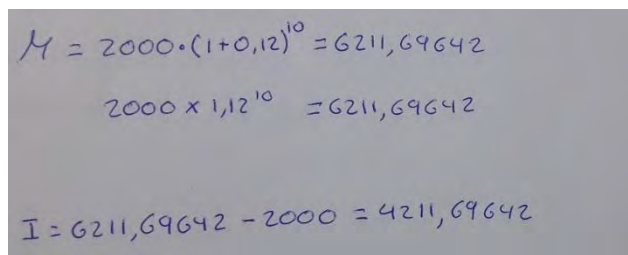
Nota: Producción de la Dupla 1 en E3

En este episodio se esperó que los estudiantes utilicen el concepto de factorización para verificar la igualdad de las operaciones como se afirmó en el análisis previo, pero los estudiantes de la Dupla 1 desconocían dicho concepto. Este episodio está conformado por tres acciones matemáticas: interpretación de la fórmula del monto e interés compuesto, verificación de las operaciones para el cálculo del monto y la verificación del cálculo del interés.

En E4 los estudiantes de la Dupla 1 aplicaron la fórmula del monto y el interés obtenido en el episodio anterior en una nueva tarea. Para ello, reemplazaron los datos y realizaron sus cálculos utilizando una calculadora, En la figura 48 presentamos la producción de los estudiantes de la Dupla 1.

Figura 48

Cálculo del monto y el interés de tarea 2, episodio 4.



Handwritten calculations showing the calculation of the final amount (M) and interest (I) for a principal of 2000 at a 12% interest rate over 10 years.

$$M = 2000 \cdot (1 + 0,12)^{10} = 6211,69642$$
$$2000 \times 1,12^{10} = 6211,69642$$
$$I = 6211,69642 - 2000 = 4211,69642$$

Nota: Producción de la Dupla 1 en E4

En términos de ETM, en E1 se evidencia la activación de la génesis semiótica, utilizando como representame la tabla de valores de Excel y hay un proceso de visualización dinámico del capital inicial, el monto, el interés y las operaciones que involucra. Además, se evidencia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto al programa Excel, que favorece al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener los valores del capital inicial y el monto de cada año y sus operaciones que involucran. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano semiótico Instrumental [Sem-Ins].

En E2, se observó los cambios que se producen en algunos elementos de la tabla al modificar el capital inicial y la tasa de interés, los otros elementos se mantienen invariantes, esto evidenció la activación de la génesis semiótica tomando como representamen los diferentes valores que toman los datos involucrados en la tabla y hay un proceso de visualización al ver los cambios en el interés, el monto y sus operaciones mostrando reglas de formación. Además, se evidenció la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las herramientas del programa Excel y favoreció al proceso de instrumentalización del ambiente virtual. Por lo tanto, en esta tarea se espera que se active el plano vertical [Sem-Ins].

En E3 se evidenció la activación la génesis semiótica al utilizar como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización al ver reglas de formación. Luego, se evidenció la activación de la génesis instrumental, utilizando como artefacto el programa Excel y que favoreció al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener la fórmula del monto y el interés. En consecuencia, en esta tarea se evidencia la activación de un solo plano [Sem-Ins].

Finalmente, en E4 se evidencia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Además, esperamos la activación de la génesis discursiva debido a que

el estudiante interpreta como referencia la fórmula del monto y del interés que realiza pruebas de tipo pragmático. En consecuencia, en esta tarea se evidencia la activación del plano vertical [Ins-Dis].

Por otro lado, creemos que las producciones de los estudiantes se enmarcan en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

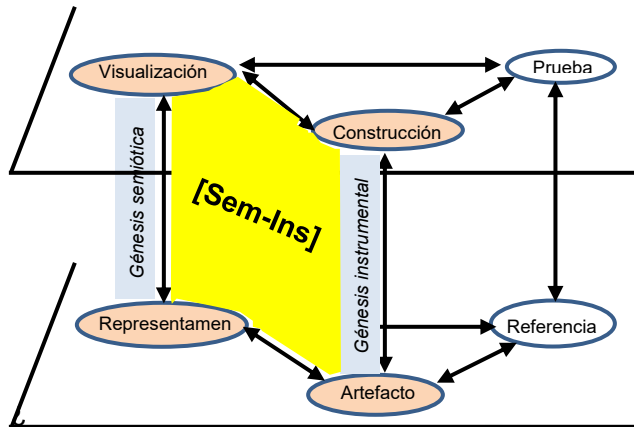
Etapafuera: La descripción general de la producción de los estudiantes de la Dupla 1 en base al ETM se presenta en la tabla 15.

Tabla 15

Descripción etapafuera de la Dupla 1- Tarea 2

Episodio	Esquema	Descripción
1		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Tomaron como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización dinámica del capital inicial, el monto e interés. Se toma como artefacto el programa Excel que se instrumentaliza para obtener los valores del capital inicial, el interés y el monto de cada año.</p>
2		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Tomó como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización dinámica al ver los cambios en el interés, monto y sus operaciones. Como artefacto utilizan el programa Excel que favoreció el proceso de instrumentalización del ambiente virtual.</p>

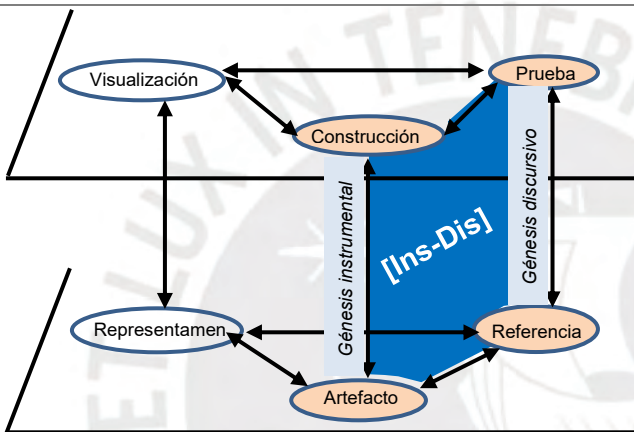
3



[Sem-Ins]

Tomaron como **representamen** la tabla de valores y hay un proceso de **visualización** al ver reglas de formación. Como **artefacto** utilizan el programa Excel que favoreció el proceso de **instrumentalización** del ambiente virtual para obtener la fórmula del monto.

4



[Ins-Dis]

Utilizaron como **artefacto** las operaciones aritméticas que se **instrumentalizan** para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Además, utilizan como **referencial** la fórmula del monto y el interés realizando pruebas de tipo pragmático.

Nota: Elaborado por el investigador

La descripción general de la tarea 2, episodios del 1 al 4 se hace referencia en el esquema anterior de la etapa afuera; resaltando que cada esquema representa un episodio. El primer diagrama hace referencia al E1, el segundo diagrama hace referencia al E2, el tercer diagrama al E3 y el cuarto diagrama al E4. Por otro lado, es importante resaltar que en E3 se esperaba que se activen los tres planos verticales, pero las evidencias muestran que solo se pudo activar solo un plano.

Dupla 2

Etapa adentro. Se identifican cuatro episodios (E) de trabajo. En E1 los estudiantes completaron la tabla en Excel con los datos presentados e identificaron el monto, el interés y los procedimientos cómo el programa Excel hizo los cálculos, corresponde a la pregunta 1). En E2 propusieron un nuevo capital inicial y luego identificaron el monto, el interés y los procedimientos que se generan, luego compararon las operaciones de los ahorros de padre de Juan y la nueva propuesta de ahorro que corresponde a la pregunta 2). En E3 los estudiantes verificaron la

igualdad de las operaciones de las columnas F, G y H, luego generalizaron escribiendo una fórmula para el monto y otro para el interés, corresponde a la pregunta 3). Finalmente, en E4 los estudiantes resolvieron una nueva tarea, para ello utilizaron la expresión general $M_t = C_0(1 + r)^t$ y corresponde a la pregunta 4).

La dupla 1 en E1 lograron completar el archivo de Excel introduciendo el tiempo (t =1, 2, 3, 4, 5 y 6) en las celdas A4 hasta A9, el capital inicial en la celda B4 y la tasa de interés en la celda C4. Para completar el capital inicial en las celdas B5 hasta B9, los estudiantes de la Dupla 2 realizaron un procedimiento similar a la Dupla 1; es decir, al inicio escribían en cada celda el monto del primer año como capital inicial para el segundo año, el monto del segundo año como capital inicial del tercer año y así sucesivamente. Pero con las orientaciones del investigador lograron utilizar la fórmula de Excel, similar a la Dupla 1.

En la figura 49 presentamos la imagen del archivo Excel del E1 completado por la Dupla 2, donde se puede visualizar el interés, el monto y las operaciones que involucran.

Figura 49

Resultados del Episodio 1 de la dupla 2

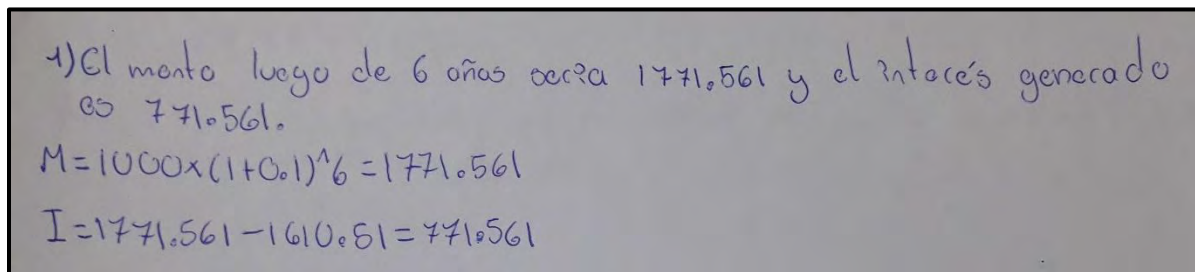
TAREA 2: Los ahorros de los padres de Juan							
Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente. Completa la tabla y responde las preguntas de la ficha de trabajo.							
Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
1	1000	0.10	100	1100	$1000 + 0.1 \times 1000$	$1000 \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^1 = 1100$
2	1100	0.10	110	1210	$1100 + 0.1 \times 1100$	$1000 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^2 = 1210$
3	1210	0.10	121	1331	$1210 + 0.1 \times 1210$	$1000 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^3 = 1331$
4	1331	0.10	133.1	1464.1	$1331 + 0.1 \times 1331$	$1000 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^4 = 1464.1$
5	1464.1	0.10	146.41	1610.51	$1464.1 + 0.1 \times 1464.1$	$1000 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^5 = 1610.51$
6	1610.51	0.10	161.051	1771.561	$1610.51 + 0.1 \times 1610.51$	$1000 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 1000 \times (1 + 0.1)^6 = 1771.561$
Total			771.561				

Nota: Producción de la Dupla 2 en E1

Luego de completar la tabla de Excel los estudiantes de la Dupla 2 identificaron correctamente el monto y el interés que generó el capital inicial de S/ 1000 a una tasa de interés del 10%, que luego de 6 años se convirtió en un monto de S/ 1771,561 y obteniendo un interés compuesto de S/ 771,56. Además, es importante resaltar los procedimientos que involucra el cálculo del monto y el interés identificados por la Dupla 2 que se presenta en la figura 50.

Figura 50

Respuestas de las interrogantes de la Dupla 1 en tarea 2, Episodio 1



Nota: Producción de Dupla 2, tarea 2 y E1

En E2, la Dupla 2 propuso un capital inicial de S/ 600 y la misma tasa de interés del 10%, hicieron los cambios en el mismo archivo Excel, reemplazando en el capital inicial de S/1000 a S/ 600 y automáticamente modificó todas las celdas del archivo. En la figura 51 se presenta la imagen de la producción de los estudiantes.

Figura 51

Evolución del préstamo de la familia Mendoza

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	TAREA 2: Los ahorros de los padres de Juan							
2	Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente. Completa la tabla y responde las preguntas de la ficha de trabajo.							
3	Tiempo	Capital inicial (Co)	Tasa de interés (i)	Interés(I)	Monto (M)	OPERACIONES		
4	1	600	0.10	60	660	$600 + 0.1 \times 600$	$600 \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^1 = 660$
5	2	660	0.10	66	726	$660 + 0.1 \times 660$	$600 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^2 = 726$
6	3	726	0.10	72.6	798.6	$726 + 0.1 \times 726$	$600 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^3 = 798.6$
7	4	798.6	0.10	79.86	878.46	$798.6 + 0.1 \times 798.6$	$600 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^4 = 878.46$
8	5	878.46	0.10	87.846	966.306	$878.46 + 0.1 \times 878.46$	$600 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^5 = 966.306$
9	6	966.306	0.10	96.6306	1062.9366	$966.306 + 0.1 \times 966.306$	$600 \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1) \times (1 + 0.1)$	$M = 600 \times (1 + 0.1)^6 = 1062.9366$
10	Total			462.9366				

Nota: Producción de la Dupla 1, tarea 2 y E2

En seguida, justificaron sus observaciones al identificar correctamente el monto y el interés luego de 6 años; S/ 1062,9366 y S/ 462,9366 respectivamente. Además, al comparar la propuesta de ahorro de los padres de Juan con el capital inicial propuesto por la Dupla 2, identificaron los elementos que permanecen constantes y variables en las operaciones de las columnas F, G y H. Los estudiantes afirman que en las operaciones de la tabla del archivo Excel varía el capital inicial, pero el tiempo en el primer año es 1, en el segundo año es 2, en el tercer

año es 3 y así sucesivamente. Finalmente, los estudiantes de la Dupla 2 identificaron que 1 representa al 100% y permanece constante (Figura 52).

Figura 52

Respuestas de las interrogantes de la Dupla 2 en tarea 2, Episodio 2

La capital inicial propuesta es 600 y luego de 6 años el monto es 1062.9366 y el interés es 462.9366.

$$M = C(1+i)^n$$
$$M = 600 \times (1+0.1)^6 = 1062.9366$$
$$I = M - C_0$$
$$I = 1062.9366 - 966.306$$

b) La cantidad que varía es la capital inicial, las cantidades que no varían son la tasa de interés, los exponentes y el 1 que significa el 100%

Nota: Justificación de la Dupla 2, tarea 2 y E2

En E3, la Dupla 2 identificaron e interpretaron la fórmula que representa el monto " M " que debe ahorrar los padres de Juan, un capital inicial " C ", a una tasa de interés compuesto " i " después de " n " años. La fórmula que lograron deducir los estudiantes de la Dupla 1 es $M = C \times (1 + i)^n$ y la fórmula general para el interés compuesto es $I = M - C$. Luego, es importante resaltar la justificación de los estudiantes al verificar la operación del monto en el primer año $M = 2000 + 0,12 \times 2000$, comparando con $M = 2000(1 + 0,12)$, obteniendo en ambas operaciones la misma respuesta ($M = 2240$). Obteniendo un interés $I = 2240 - 2000$, resultando un $I = 240$. En la figura 53 presentamos la justificación de la Dupla 2.

capital inicial, el monto, su tasa de interés y las operaciones que involucra. Por otro lado, se evidencia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto al programa Excel, que favorece al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener los valores del capital inicial y final de cada año, así como sus operaciones que involucran. En consecuencia, en esta tarea se activa el plano semiótico Instrumental [Sem-Ins].

En E2, se observó los cambios que se producen en algunos elementos de la tabla al modificar el capital inicial, los otros elementos se mantienen invariantes, esto evidenció la activación de la génesis semiótica tomando como representamen los diferentes valores que toman los datos involucrados en la tabla y hay un proceso de visualización al ver los cambios en el interés, el monto y sus operaciones mostrando reglas de formación. Además, se evidenció la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las herramientas del programa Excel y favoreció al proceso de instrumentalización del ambiente virtual. Por lo tanto, en esta tarea se active el plano vertical [Sem-Ins].

En E3, se evidenció la activación de la génesis semiótica al utilizar como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización al ver reglas de formación. Luego, se evidenció la activación de la génesis instrumental, utilizando como artefacto el programa Excel y que favoreció al proceso de instrumentalización del ambiente virtual para verificar las operaciones que se realizan en la fórmula del monto y el interés. En consecuencia, en esta tarea se evidencia la activación de un solo plano [Sem-Ins].

Finalmente, en E4 se evidencia la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto las operaciones aritméticas, lo cual se instrumentaliza para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Además, se activa la génesis discursiva debido a que el estudiante interpreta como referencial la fórmula del monto y del interés, también realiza pruebas de tipo pragmático. En consecuencia, en esta tarea se evidencia la activación del plano vertical [Ins-Dis].

Por otro lado, creemos que las producciones de los estudiantes de la Dupla 2 se enmarcan en el paradigma Análisis aritmético – Geométrico (AG) debido a que permite obtener interpretaciones a partir de los cálculos que se realizan al tratar de obtener el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo.

Etapas Afuera: La descripción general de la producción de los estudiantes de la Dupla 2 en base al ETM se presenta en la tabla 16.

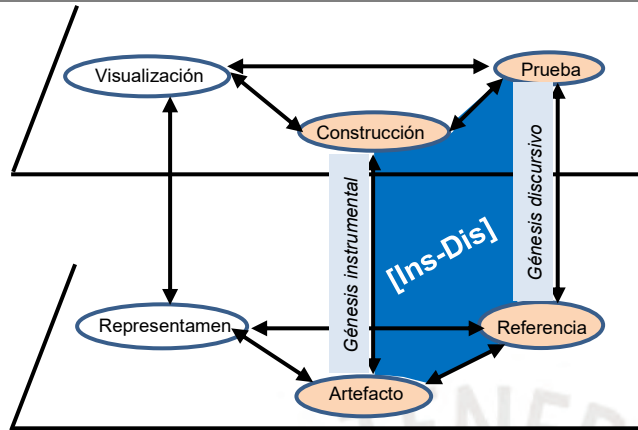
Tabla 16:

Descripción etapa afuera de la Dupla 2 – Tarea 2

Episodio	Esquema	Descripción
1		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Tomaron como representamen la tabla de valores de Excel y hay un proceso de visualización dinámica del capital inicial, del monto e interés. Tomaron como artefacto el programa Excel y hay un proceso de instrumentalización del ambiente virtual para obtener valores del capital inicial, el interés y el monto de cada año.</p>
2		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Tomaron como representamen los valores de la tabla y hay un proceso de visualización dinámica al ver los cambios en el interés, monto y sus operaciones. Además, tomaron como artefacto herramientas del programa Excel y hay un proceso de instrumentalización del ambiente virtual.</p>
3		<p>[Sem-Ins]</p> <p>Tomaron como representamen la tabla de valores y hay un proceso de visualización de reglas de formación. Como artefacto el programa Excel que favoreció el proceso de instrumentalización del</p>

ambiente virtual para obtener la fórmula general.

4



[Ins-Dis]

Tomaron como **artefacto** las operaciones aritméticas que favoreció el proceso de **instrumentalización** para obtener el monto y el interés al término de 10 años. Se tomó como **referencial** la fórmula del monto y el interés realizando **pruebas** de tipo pragmático.

Nota: Elaborado por el investigador

La descripción general de la tarea 2, episodios del 1 al 4 se hace referencia en el esquema anterior de la etapa afuera; resaltando que cada esquema representa un episodio. El primer diagrama hace referencia al E1, el segundo diagrama hace referencia al E2, el tercer diagrama al E3 y el cuarto diagrama al E4. Por otro lado, es importante resaltar que en E3 se esperaba que se activen los tres planos verticales, pero las evidencias muestran que solo se pudo activar un plano.

3.7 Resultados de la fase experimental

Luego de realizar el análisis de los resultados de la producción de un grupo de 4 estudiantes clasificados en duplas, presentamos la síntesis del ETM personal al resolver problemas sobre interés compuesto con lápiz y papel en la tarea 1, también con el uso del programa Excel en la tarea 2, clasificados en 5 y 4 episodios respectivamente. Además, presentamos las génesis y los planos verticales que se activan; es importante resaltar el paradigma en el cual se inscribe el trabajo matemático de los estudiantes participantes en la presente investigación.

En la tabla 17 resume los análisis basados en el ETM de la tarea 1 y 2.

Tabla 17

Síntesis del análisis de tarea 1 y 2 basado en el ETM

Tarea	Episodio	Dupla	Génesis		Planos verticales			Paradigma	
			Sem.	Ins.	Dis.	[Sem-Ins]	[Ins-Dis]		[Sem-Dis]
1	E1	D1	x						
		D2	x						
	E2	D1	x	x		x			
		D2	x	x		x			
	E3	D1		x	x		x	Análisis Geométrico/ Aritmético (AG)	
		D2		x	x		x		
	E4	D1		x	x		x		
		D2		x	x		x		
	E5	D1	x	x	x	x	x	x	
		D2	x	x	x	x	x	x	
	2	E1	D1	x	x		x		
			D2	x	x		x		
		E2	D1	x	x		x		Análisis Geométrico/ Aritmético (AG)
			D2	x	x		x		
		E3	D1	x	x		x		
D2			x	x		x			
E4		D1		x	x		x		
		D2		x	x		x		

Nota: Elaborado por el autor

Como se observa en la tabla 17, el análisis de las acciones matemáticas de los estudiantes de la dupla 1 y 2 en la tarea 1 coinciden con el análisis previsto. Pero es importante resaltar el uso de las acciones matemáticas como referencial, tal como sucede en episodio 4 y 5 de la tarea 1, donde se había previsto dos posibilidades de acción matemática; el uso de la

proporcionalidad mediante la regla de tres simple y por otro lado el uso de la fórmula del monto $M_t = C_o \times (1 + i)^t$ para el cálculo de la tasa de interés, así como el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo. Los estudiantes de ambas duplas utilizaron la proporcionalidad mediante la regla de tres simple para calcular la tasa de interés y el monto luego de 11 años de haber obtenido el préstamo, evidenciando el desconocimiento como referencial discursiva del concepto de interés compuesto, sin embargo, pudieron activar el plano [Ins – Dis] previsto de dicho episodio. Por otro lado, la génesis que más resalta en este análisis es la génesis instrumental ya que permite hacer operatorio los artefactos simbólicos (operaciones aritméticas) para construir la fórmula general del monto a interés compuesto.

En la tarea 2, las acciones matemáticas en cada episodio de la dupla 1 y 2 coinciden con el análisis previsto. Sin embargo, se evidencia limitaciones en el conocimiento de la factorización como referencial teórico tal como se había previsto en el análisis previo del episodio 3. Por otro lado, en esta tarea resaltamos la activación de la génesis instrumental al tomar como artefacto el programa Excel que favoreció desde el episodio 1 a la construcción dinámica de la fórmula del monto. Finalmente, consideramos la relevancia del proceso de visualización de la representación tabular con el uso del programa Excel en términos de ETM, activándose el plano vertical [Sem – Ins].

En general, consideramos que una investigación basada en la metodología de análisis previsto y luego un análisis del trabajo matemático personal de los estudiantes favorece para la detección de dificultades que tienen para abordar una tarea de un tema específico e identificar la diferencia entre lo previsto y efectivamente el trabajo matemático realizado por los estudiantes. Además, es importante resaltar el marco teórico del ETM que contribuye en ese aspecto.

CONCLUSIONES

En esta sección presentamos las conclusiones de la investigación y algunas investigaciones que se pueden realizar a futuro teniendo como marco teórico al Espacio de Trabajo Matemático.

Para el desarrollo de nuestro estudio nos propusimos responder la siguiente interrogante: ¿Cuál es el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto grado de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto?

En miras de responder dicha interrogante, consideramos al interés compuesto de tasa i y un capital C_0 se convierte, al cabo de t periodos de tiempo en un monto M de tal manera que cada periodo los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital. En bases a ello, las investigaciones de referencia presentan evidencias de las dificultades de los estudiantes para comprender este concepto privilegiando la aplicación de la fórmula para calcular el monto y luego presentando ejercicios para reemplazar en la fórmula anteriormente definido (Chuquisana, 2015 y Bezerra, Alves y Bosh 2019). Además, es importante resaltar las conclusiones de Klapper y Luzardi (2020) de la diferencia porcentual que existe sobre la comprensión del interés compuesto en países con economías avanzadas y los países emergentes (10%). Por otro lado, las revisiones de investigaciones relacionadas al uso de la tecnología han concluido que todavía hay profesores que privilegian las clases expositivas a lápiz y papel (Meza, 2019); y subrayan la búsqueda de opciones más dinámicas, introduciendo el uso de GeoGebra Online, Kahoot, Microsoft Excel entre otros para la enseñanza del interés compuesto (Meza, 2019, Jiménez, 2022, Reis, Ferreira, Santos, Willian y Margarida, 2021 y Ustate, 2019)

Al realizar el análisis didáctico del cuaderno de trabajo Matemática 4 entregado a los estudiantes de cuarto de secundaria de colegios públicos, la ficha 11 (páginas 150 – 156) se presentan problemas de contextos extra-matemático, cuya resolución responden a las capacidades y competencias necesarias para el grado. En términos del ETM los problemas presentados privilegian la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, por ende, la activación de los tres planos [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]. Sin embargo, solo privilegia la génesis discursiva ascendente o deductivo apoyado en propiedades y conceptos que el estudiante ya debe conocer como el concepto de logaritmo; además, en la génesis instrumental solo privilegia la perspectiva descendente, es decir, el estudiante debe elegir un artefacto adecuado para resolver los problemas de interés compuesto; dejando de lado la perspectiva ascendente, donde el estudiante debe describir las acciones matemáticas mediante las cuales se apropia de las distintas técnicas asociadas al artefacto.

Seguidamente, se hizo un análisis didáctico a la luz del ETM el libro del estudiante y del libro de actividades del libro Construye para cuarto grado de secundaria de la Editorial Norma (2020) de la unidad 3, el tema 7 relacionado a interés compuesto. En los conceptos y problemas analizados se privilegia la génesis semiótica debido al uso de lenguaje natural para presentar el concepto y los problemas, además, la génesis instrumental ya que propicia la construcción desde la perspectiva ascendente para que el estudiante se apropie de la técnica asociada al cálculo del monto. Sin embargo, los problemas planteados en el libro de actividades propicia la activación de génesis discursiva en su perspectiva ascendente o deductivo apoyado en propiedades y conceptos que el estudiante ya debe conocer como el concepto de logaritmo, y no se observa cómo debe aborda el estudiante.

Por lo tanto, la resolución de problemas sobre interés compuestos, nos ha permitido analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes al resolver dos tareas, el primero con el uso de lápiz y papel, y el segundo con el apoyo de las herramientas del programa Excel lo cual es el objetivo general de nuestra investigación.

Para lograr dicho objetivo es necesario encaminar nuestras conclusiones a los objetivos específicos: “Identificar la génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto con lápiz y papel, y con tecnología digital”.

Creemos que este objetivo específico fue alcanzado, ya que las acciones matemáticas encontradas luego del análisis de la resolución de las dos tareas evidencian la activación de la génesis semiótica, instrumental y discursiva. La tarea 1 distribuido en 5 episodios y resuelto por los estudiantes con lápiz y papel propició con mayor frecuencia la activación de la génesis instrumental ya que el artefacto simbólico operaciones aritméticas ayudaron a instrumentalizar desde la perspectiva ascendente describiendo las acciones matemáticas para apropiarse las técnicas para obtener el interés, la tasa de interés y el monto. Además, esta tarea propició la activación de la génesis discursiva en su perspectiva descendente, debido a que se apoyó en conceptos y propiedades matemáticas como porcentaje, proporcionalidad y concepto de interés, que el estudiante ya tenía en sus saberes previos, y realizando pruebas de tipo pragmático lograron resolver la tarea propuesta. Por otro lado, es importante resaltar el análisis del episodio 5, lo cual ha permitido activar la génesis semiótica, instrumental y discursivo; sin embargo, el análisis previo se presentó dos alternativas para poner a prueba el referencial teórico del estudiante, por un lado la visualización del monto en el año 10 en el gráfico del problema a partir de ello calcular el 20% y sumar a dicho monto para obtener el monto luego de 11 años de haber

obtenido el préstamo, y por otro el uso de la fórmula del monto $M_t = C_0(1 + i)^t$. Luego de aplicar la tarea 1, las producciones de los estudiantes de la Dupla 1 y 2 evidenciaron que se apoyaron en sus saberes previos y aplicaron el 20% de al monto del año 10 presentado en el gráfico y sumar a dicho monto y obtener el monto en el año 11, adicionalmente comprendieron que al hacer una resta del monto en el año 11 y el capital inicial del préstamo de puede obtener el interés compuesto.

En la tarea 2, dividida en 4 episodios se esperó que los estudiantes de la Dupla 1 y 2 evidencien la activación de la génesis semiótico, instrumental y discursivo. Luego del análisis de las producciones de los estudiantes se constató la activación de los tres génesis, sin embargo, las herramientas del programa Excel como artefacto ayudó a privilegiar la génesis instrumental favoreciendo la instrumentalización a partir de la visualización de las operaciones aritméticas presentadas en la tabla dinámica, obteniendo desde el episodio 1 la fórmula para obtener el monto. Por otro lado, es importante resaltar las dificultades que presentaron los estudiantes al momento de usar el referencial previsto (concepto de factorización) para justificar la igualdad de las operaciones de la tabla Excel y afirmar que las columnas F, G y H de la tabla Excel son iguales. Pero, los estudiantes de ambas duplas realizaron su justificación realizando operaciones y obteniendo resultados similares. Finalmente, las dos tareas nos han proporcionado diferentes formas de visualizar, por un lado, con el uso de lápiz y papel y por otro con el uso de las herramientas del programa Excel, lo que implica la articulación de diferentes componentes del ETM.

El segundo objetivo específico: “Identificar los planos verticales, del Espacio de Trabajo Matemático, que activan los estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto con lápiz y papel, y con el uso del programa Excel también fue alcanzada porque en diferentes episodios de las dos tareas propuestos se ha identificado el plano [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sim-Ins]. Sin embargo, el plano vertical que se activó con mayor frecuencia es el [Sem-Ins], con mayor predominio en la tarea 2, ya que la representación dinámica con el uso del programa Excel ayuda calcular el interés y el monto de un capital inicial y favorece para identificar los invariantes de las operaciones que involucran dicho cálculo.

El tercer objetivo específico: Caracterizar el paradigma que emerge cuando los estudiantes de cuarto año de secundaria resuelven tareas de interés compuesto. Dicho objetivo específico se ha alcanzado porque se ha determinado las características del trabajo matemático personal de los estudiantes dentro del dominio del análisis a través del paradigma Aritmético-Geométrico (AG). Es decir, las acciones matemáticas de los estudiantes, analizadas en cada episodio, se sitúan principalmente dentro de este paradigma.

Por todo lo expuesto en las conclusiones, podemos afirmar que se ha logrado el objetivo general de la presente investigación y por lo tanto se ha contestado a la pregunta de investigación inicial.

Por otro lado, creemos que la presente investigación es una contribución al marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático, específicamente la metodología del análisis del ETM previsto y ETM personal mediante dos etapas: Etapa adentro que ayudó a identificar, describir y analizar las acciones matemáticas de los estudiantes al resolver las tareas de interés compuesto en los diferentes episodios, y etapa afuera ayudó a describir de manera global y sintética la sucesión progresiva de la circulación del trabajo matemático personal utilizando diagramas del ETM.

Asimismo, es importante resaltar que esta investigación se realizó con estudiantes de una Institución Educativa pública con formación técnica, cuyo modelo educativo favorece con mayores horas de clase en el área de Educación para el Trabajo (8 horas pedagógicas) y menor cantidad de horas de clase de matemática (4 horas semanales). Bajo este modelo educativo, los tres estudiantes de la muestra cursan la especialidad Electrónica y Electricidad y un estudiante Confección Textil. Por ende, el trabajo matemático previstos y la producción real de los estudiantes en el episodio 4 y 5 de la tarea 1, y el episodio 3 de la tarea 2 creemos que hay un desconocimiento en el referencial teórico, por un lado, no recordaban la fórmula del monto y por otro, desconocían el proceso de factorización para justificar la igualdad de las operaciones aritméticas visualizados en el programa Excel.

Finalmente, relacionado a la conclusión anterior, logramos determinar que la forma de cómo presentamos los temas a los estudiantes influye fundamentalmente en su aprendizaje. Esta afirmación se evidencia al preguntar a los estudiantes: ¿Cómo aprendiste en tus clases de matemática el tema de Interés Compuesto? Tres estudiantes de la muestra respondieron que se inicia presentando el concepto y la fórmula y luego los problemas.

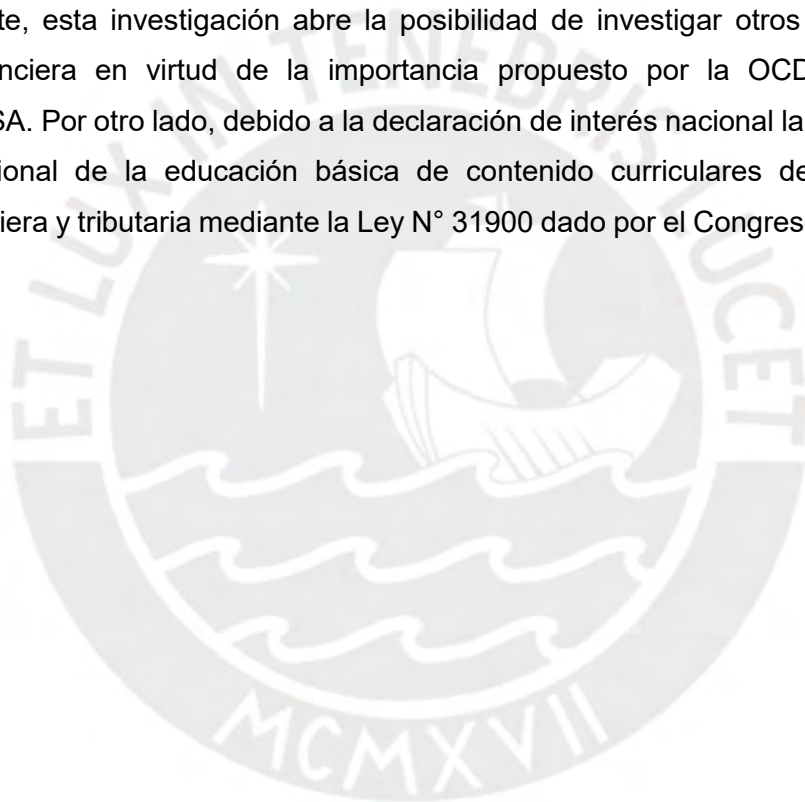
Perspectivas para futuras investigaciones

Para futuras investigaciones, consideramos que este estudio sea el punto de partida para realizar otras investigaciones en Instituciones Educativas con formación técnica, particularmente investigar el ETM personal de estudiantes cuya especialidad es Administración y Comercio, Computación e Informática, Industria Alimentaria, Mecánica y Metales y Mecánica y Motores. Además, consideramos que sería importante analizar ETM referencial; es decir, que es lo que se pretende enseñar sobre interés compuesto; y analizar el ETM idóneo, es decir, lo que propone

el profesor para resolver problemas de interés compuesto con lápiz y papel, y con el uso de tecnología digital.

Creemos importante analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal del estudiante sobre resolución de problemas de interés compuesto vinculado a progresiones geométricas, es decir el crecimiento del capital con una tasa de variación constante, existiendo una relación entre el monto generado y su capital inicial. Además, sostenemos que futuras investigaciones puedan abordar el interés compuesto vinculado al concepto de función exponencial, es decir, a partir de un capital inicial y una tasa de interés en un determinado periodo se produce un crecimiento exponencial.

Finalmente, esta investigación abre la posibilidad de investigar otros conceptos de la matemática financiera en virtud de la importancia propuesto por la OCDE mediante las evaluaciones PISA. Por otro lado, debido a la declaración de interés nacional la incorporación en el currículo nacional de la educación básica de contenido curriculares de estudios sobre educación financiera y tributaria mediante la Ley N° 31900 dado por el Congreso de la República del Perú.



REFERENCIAS

- Borba, M. (2004). *A pesquisa qualitativa em Educacao Matemática*. Programa de Pos-Graduacao em Educacao Matemática. UNESP, Rio Claro-SP.
<http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html>
- Bezerra, V., Alves, M. y Bosh, M. (2019). Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Estudo das Noções de Juros Simples e Compostos. *Bolema, Rio Claro (SP)*. 33(63). 227-347. Obtenido de <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a16>
- Cabral, F. (2020). UARC: Um Organizador de Sequencia Didática na Área de Matemática. *Brazilian Journal of Development*. 6(6). 34191-34208. <https://doi.org/10.34117/bjdv6n6-098>
- Chuquisana, F. (2015). *Matemática financiera en la escuela secundaria para la alfabetización financiera y la formación ciudadana: una propuesta para la formación de profesores en temas de interés simple y compuesto*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/6406>
- Espinoza-Hernández, G. y Verdugo-Hernández, P. (2022). Las representaciones de la función durante la enseñanza. Una mirada desde el conocimiento especializado y el trabajo matemático del profesor. *Revista internacional de humanidades*. pp. 2-18.
<https://journals.eagora.org/revHUMAN/article/view/4082/2462>
- Gaita, C., Advíncula, E., Barrantes, E., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). *Matemáticas para no matemáticos*. Pontificia Universidad Católica del Perú.
<https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/134457/Matem%C3%A1ticas%20para%20no%20matem%C3%A1ticos.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Henríquez, C. y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 35(71), pp. 1550-1572. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Henríquez – Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work. *Mathematical Work in Education Context*. (pp. 121-146). Springer.
- Hernández, R., M., Fernández, C. y Baptista, M. d. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta edición). McGRAW – Hill/Interamericana Editores S.A.
<https://www.esup.edu.pe/wp->

<content/uploads/2020/12/2.%20Hernandez,%20Fernandez%20y%20Baptista- Metodolog%C3%ADa%20Investigacion%20Cientifica%206ta%20ed.pdf>

Jiménez, J. (2022). Applets para la enseñanza de las matemáticas financieras. *Revista Lasallista de investigación de Investigación*, 19 (2), 17-35. <https://doi.org/10.22507/rli.v19n2a2>

Klapper, L. y Luzardi, A. (2020). *Financial literacy and financial resilience: Evidence from around the world*. *Financial Management*. Association International. 49. 589- 614. Obtenido de <https://doi.org/10.1111/fima.12283>

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Space-Theoretical Characteristics. *Mathematical Work in Education Context*. (pp. 2-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses génèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24. https://www.researchgate.net/publication/278622106_L'espace_de_Travail_Mathematique_et_ses_geneses

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Philippe, R. (2022) *Mathematical Work in Education Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. *Mathematics Education in the Digital Era*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). *El espacio de trabajo matemático y sus génesis*. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 237-251. Obtenido de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23942>

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction*. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737. Obtenido de <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>

Kuzniak, A., Tanguay, D., Vivier, L., Mena, J., Mena, A. & Montoya, E. (2016). Conectar los ETM del análisis: El caso de la función exponencial. *Acta Simposio Internacional*, 5, pp. 49-62. Obtenido de: <http://etm5.web.uowm.gr/wpcontent/uploads/2017/11/ETM5Final.pdf>

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2004). *A Matemática do Ensino Médio. Volumen 2*. Quinta edición. Sociedade Brasileira de Matemática. <https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2021/LimaCarvalhoWagnerMorgadoEMvol2.pdf>

Mansilla, L., Muñoz, O., Chávez, J., Támara, H., Baca, C. y Álvarez, J. (2019). Resolvemos problemas 4. Cuaderno de trabajo de Matemática para cuarto de secundaria. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/6866>

- Meza, E. J. (2019). *Laboratorio virtual para el aprendizaje de interés simple y compuesto de estudiantes del VII ciclo (4to de secundaria) pertenecientes al Colegio Particular Mixto Santa Clara de Arequipa*. [Tesis Maestro en Ciencia, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa]. Repositorio institucional. <http://hdl.handle.net/20.500.12773/12628>
- Ministerio de Educación de Brasil (2017). *Base Común Curricular Nacional*. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>
- Ministerio de Educación de Chile (2017). Bases curriculares 7° medio a 2° medio. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf
- Ministerio de Educación del Perú (2016). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (2016). *Programación curricular de Educación Secundaria*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (2019). Cuaderno de trabajo de matemática, Resolvemos problemas 4. <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/6866>
- Ministerio de Educación del Perú (2020). *Resultados de Evaluación Internacional PISA. Educación Financiera*. http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2020/07/PPT-PISA-Financiera-2018_FINAL-13.07.pdf
- Montoya-Delgado, E., y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 739-754. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>
- NORMA (2020). *Construye. Matemática para cuarto de secundaria*. Educ. activa S.A.C.
- Organisation for Economic Cooperation and Development (2020). *PISA 2018 Results (Volumen IV) Are students smart about money?* Paris: PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/48ebd1ba-en>
- Organisation for Economic Cooperation and Development (2017). *PISA 2015 Results (Volumen IV): Students' Financial Literacy*, PISA, OCDE Publishing. <https://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-iv-9789264270282-en.htm>
- Reis, E., Ferreira, A., Santos, G., Willian, G., y Margarida, S. (2021). Secuencia didáctica para la enseñanza de las matemáticas financieras en tiempos de adversidad. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(63), 1-18. Obtenido de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/451>

Resolución Ministerial N° 165 – 2022 MINEDU (2022).

<https://www.gob.pe/institucion/minedu/normas-legales/2907295-165-2022-minedu>

Secco, L., Cabral, N., Chaquiam, M., Díaz, G., Pamplona, V., Reis, C., Costa, E & Pinto, G. (2020) O ensino de juros compostos por meio de seqüências didáticas. *Research, Society and Develoment*, 9(12), 1-21. Obtenido de <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i12.11068>

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós Ibérica S.A. <https://pics.unison.mx/maestria/wp-content/uploads/2020/05/Introduccion-a-Los-Metodos-Cualitativos-de-Investigacion-Taylor-S-J-Bogdan-R.pdf>

Ustate, J. (2019). *Aprendizaje basado en problemas (ABP) para la resolución de ejercicios de interés simple y compuesto en el programa técnica profesional en procesos administrativos públicos del instituto tecnológico de la universidad de la Guajira proyecto de profundización*. [Maestría en pedagogía de las Tecnologías de la Información y la comunicación, Universidad de la Guajira].



ANEXOS

Tarea 1

APELLIDOS Y NOMBRES		GRADO Y SECCIÓN	FECHA

Cálculo del monto del préstamo de la familia Mendoza

La familia Mendoza desea emprender un negocio y para ello necesita obtener un préstamo. El siguiente gráfico muestra la capitalización a lo largo de los años de un capital inicial que una entidad financiera le ofrece.



Además, la entidad financiera le propone prestarle bajo la siguiente condición: “La familia Mendoza debe devolver el préstamo en un solo pago, el cual incluye el capital y los intereses generados”.

Responde las siguientes interrogantes.

1. ¿Cuánto es el capital inicial del préstamo? Justifica tu respuesta.
2. Elabora una tabla que representa la relación entre el tiempo y el capital durante 6 años.

3. Cuánto es el interés en el primer año, segundo año y tercer año?. ¿El interés es el mismo en cada año consecutivo?. Justifica tu respuesta
4. ¿Cuánto es la tasa de interés? ¿la tasa de interés será lo mismo en cada año consecutivo? Justifica tu respuesta.
5. Bajo las mismas condiciones, ¿cuánto es el monto que debe devolver la familia Mendoza luego de 11 años de haber obtenido el préstamo? ¿Con cuánto de interés? Justifica tu respuesta.

TAREA 2

APELLIDOS Y NOMBRES		GRADO Y SECCIÓN	FECHA

Los ahorros de los padres de Juan

Los padres de Juan desean ahorrar un capital inicial de S/1000 que lo destinará para sus estudios superiores. La entidad Financiera Moderna le ofrece generar intereses a una tasa de interés del 10% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital, produciéndose un nuevo capital anualmente.

Ingresa al archivo de Excel del siguiente enlace https://docs.google.com/spreadsheets/d/1tC5aaKw6r2VIUJLKL0D_7a9eB8v9fsKC/edit?usp=sharing&oid=110083658260742959255&rtpof=true&sd=true y responde las siguientes preguntas.

1. En la columna tiempo (A4 - A9) introduce 1 a 6 años, en la columna capital inicial (B4 - B9) introduce el capital inicial de S/1000 y los montos generados en el año anterior, y en la columna de la tasa de interés (C4-C9) introduce 10% de tasa de interés. Observa, ¿cuánto es el monto y el interés luego de 6 años? ¿Cómo se calcula? Observa las operaciones para justificar tu respuesta.
2. Proponer un capital inicial que desees ahorrar y escribe en la celda B4, luego elige una tasa de interés, escribe en la celda C4 y luego responde.
 - a. ¿Cuánto es el monto y el interés luego de 6 años? ¿cómo se calcula? Observa las operaciones y justifica tu respuesta.
 - b. Ahora compara con las operaciones realizadas por Excel de los ahorros de padre de Juan y tu propuesta de ahorro, ¿qué cantidades varían? ¿qué cantidades se mantienen constantes?

3. Observa las operaciones que se muestran Excel (columnas F, G y H), ¿cuál es la fórmula general que representa al monto y del interés compuesto? Justifica tu respuesta verificando la igualdad de las operaciones de las columnas F, G y H.
4. El banco Nueva Generación ofrece a los padres de Juan que su capital inicial genere un interés al 12% anual, de tal manera que cada fin de año los intereses se suman al capital. Si deposita un capital inicial de S/2000, ¿cuánto es el monto y el interés luego de 10 años? Utiliza la fórmula general obtenido en la pregunta 3 para justificar tu respuesta.

ENCUESTA DE SALIDA

APELLIDOS Y NOMBRES		GRADO Y SECCIÓN	
----------------------------	--	------------------------	--

I. DATOS GENERALES

Edad Género: Masculino Femenino

Estudio en la IEE San Juan. Elige marcando con (x)

Primaria: 1° 2° 3° 4° 5° 6° Secundaria: 1° 2° 3° 4°

II. FORMACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

1. ¿Qué especialidad estudiaste en el área de Educación para el Trabajo? Marca con (x)

N°	EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO	GRADOS			
	Especialidad	1°	2°	3°	4°
1	Administración y Comercio				
2	Computación e Informática				
3	Industria alimentaria				
4	Confeción Textil				
5	Electrónica y Electricidad				
6	Mecánica y Metales				
7	Mecánica y Motores				
8	Otro:				

2. ¿Cuántas horas pedagógicas semanales están programados para el área de Educación para el Trabajo?

3. ¿Qué temas relacionados a Matemática has trabajado en el área de Educación para el Trabajo?

4. ¿Crees que el tema de Interés Compuesto se relaciona con algunas de las especialidades área de Educación para el Trabajo? Explique

III. CONOCIMIENTOS DE EXCEL

5. ¿Qué nivel de conocimiento tienes del programa Excel?

- A) Básico
B) Intermedio
C) Avanzado

6. ¿Utilizas programa Excel en tus clases de matemática o en otra área? Marca con (x).
Puedes marcar más de una opción.

A) Si en Matemática

B) Si en otras áreas: _____

C) No, en ningún área.

7. ¿De qué manera te ayudó el programa Excel en la tarea 2: Los ahorros de los padres de Juan?

IV. APRECIACIÓN FINAL

8. ¿Qué dificultades te presentaron durante la realización de las dos tareas, Cálculo del monto del préstamo de la familia Mendoza y Los ahorros de los padres de Juan?
Explique

9. ¿Cómo aprendiste en tus clases de matemática el tema de Interés Compuesto?

A) Se inicia presentando el concepto y la fórmula y luego los problemas.

B) A partir de una situación problemática y se descubrió la fórmula del Interés Compuesto.

C) De otra manera: _____

10. Cuando terminas la secundaria, ¿qué estudios superiores desea seguir?

11. Sugerencias para mejorar las tareas propuestos.



CONSENTIMIENTO LIBRE E INFORMADO DEL ESTUDIANTE

El objetivo de este formulario es explicar aspectos de la investigación que tiene como objetivo desarrollar, aplicar y analizar el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de cuarto grado de secundaria cuando resuelven tareas de interés compuesto con el uso de tecnología digital, bajo la responsabilidad del estudiante de la maestría **Pedro Huerto Huanca**, del Programa de Maestría en la enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, sobre los procedimientos de la investigación, de acuerdo con el reglamento del comité de ética para la investigación con seres humanos y animales de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Los registros de su participación serán confidenciales, y sólo el investigador responsable tendrán acceso a la información. No se revelará la identificación del participante, se utilizará un seudónimo, para preservar el anonimato del individuo.

Además, toda participación es voluntaria y no hay penalizaciones para quienes decidan no participar en este estudio. Nadie será penalizado si decide no participar en el estudio en cualquier momento, y puede retirarse de la investigación sin riesgo y sin sufrir daños personales.

Después de conocer y comprender el objetivo de la investigación, así como estar consciente de la necesidad de utilizar mi testimonio para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias).

Yo _____ acepto participar como sujeto en la investigación, que se realizará en el mes de octubre del 2023, y estoy dispuesto a responder a los cuestionarios relativos a la investigación y algunos datos personales confidenciales.

por este medio **AUTORIZO** al investigador **Pedro Huerto Huanca** a tomar fotografías, grabar audio y video, recopilar producción escrita de las sesiones didácticas y actividades realizadas, que sean necesarias para recoger mi testimonio sin carga económica para ninguna de las partes.

Al mismo tiempo, cedo el uso de imágenes (fotos), audio, vídeo y/o testimonios para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias) a favor del investigador arriba especificados, en cumplimiento de la legislación que protege los derechos de los niños y adolescentes (Nuevo código del Niño y del Adolescente, Ley n° 27337). Soy consciente de que mis padres y/o tutores recibirán una copia de este documento.

Firma del participante

El investigador ha respondido a mis preguntas y han hablado con mis padres y/o tutores. He leído y acepto participar como voluntario en la investigación descrita anteriormente.

Pedro Huerto Huanca
investigador

Contacto con el investigador responsable:

Si necesita más información sobre este estudio, llame al investigador: Teléfono: 954302934