PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Trabajo Matemático de estudiantes de cuarto año de secundaria en tareas sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Miguel Angel Urquiza Ruiz

Asesora:

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Jesus Victoria Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis: “Trabajo Matemático de estudiantes de cuarto año de secundaria en tareas sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital” del autor Miguel Ángel Urquiza Ruiz, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 8%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 27/06/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 03 de julio del 2025

Apellidos y nombres de la asesora: Flores Salazar, Jesus Victoria	
DNI: 08342853	Firma:
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X	

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo analizar el trabajo matemático de estudiantes de cuarto año de secundaria de una institución educativa privada de la ciudad de Lima, en el distrito de Carabayllo, cuyas edades oscilan entre los 15 y 16 años, cuando resuelven tareas en una secuencia didáctica sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital, particularmente, GeoGebra, debido a que existen investigaciones que reportan las dificultades por parte de los estudiantes en el aprendizaje de este objeto matemático. La metodología que se utiliza en esta investigación es de tipo cualitativa, adaptando el conjunto de fases propuestas por Hernández et al. (2014), el cual inicia en el planteamiento del problema y culmina con las conclusiones y perspectivas futuras. La secuencia didáctica está constituida por tres tareas, las cuales fueron diseñadas a la luz de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, dado que es una herramienta teórica y metodológica para analizar las acciones de los estudiantes al momento de realizar tareas tomando en cuenta procesos cognitivos y epistemológicos. Los resultados muestran que las génesis que se activan con más frecuencia son las génesis semiótica e instrumental y, por ende, el plano vertical Semiótico-Instrumental. Cabe indicar que también se activa, pero en menor frecuencia, la génesis discursiva y con ello se puede observar las activaciones de los planos Semiótico-Discursivo e Instrumental-Discursivo. Asimismo, se evidencia que los paradigmas en el dominio de la geometría que priorizan los estudiantes es el paradigma de la Geometría natural (GI) y la Geometría axiomática natural (GII). Entre las principales conclusiones se resalta la importancia de la tecnología, como GeoGebra, debido a que con sus herramientas permite a los estudiantes interactuar con las dimensiones y las relaciones de las representaciones de los triángulos, así como también, la importancia de diseñar tareas para la enseñanza de la semejanza de triángulos debido a que implica un análisis del trabajo matemático muy rico y diverso con relación a procesos cognitivos y epistemológicos que pueden desarrollar los estudiantes.

Palabras clave: Semejanza de triángulos, Tarea, Espacio de Trabajo Matemático, GeoGebra, nivel secundaria.

Abstract

This research aims to analyze the mathematical work of fourth-year high school students from a private educational institution in the city of Lima, in the district of Carabayllo, whose ages range between 15 and 16 years, when they solve tasks in a didactic sequence on similarity of triangles with the use of digital technology, particularly GeoGebra, because there are investigations that report the difficulties on the part of students in learning this mathematical object. The methodology used in this research is qualitative, adapting the set of phases proposed by Hernández et al. (2014), which begins with the statement of the problem and ends with the conclusions and future perspectives. The didactic sequence consists of three tasks, which were designed in light of the theory of the Mathematical Workspace, since it is a theoretical and methodological tool to analyze the actions of students when performing tasks taking into account cognitive and epistemological processes. The results show that the most frequently activated genesis are the semiotic and instrumental genesis and, therefore, the vertical Semiotic-Instrumental plane. It should be noted that the discursive genesis is also activated, but less frequently, and with it the activations of the Semiotic-Discursive and Instrumental-Discursive planes can be observed. Likewise, it is evident that the paradigms in the domain of geometry that students prioritize are the paradigm of Natural Geometry (GI) and Natural Axiomatic Geometry (GII). Among the main conclusions, the importance of technology, such as GeoGebra, is highlighted, because with its tools it allows students to interact with the dimensions and relationships of the representations of triangles, as well as the importance of designing tasks for teaching the similarity of triangles because it implies a very rich and diverse analysis of mathematical work in relation to cognitive and epistemological processes that students can develop.

Keywords: Similarity of triangles, Task, Mathematical Workspace, Genesis, Vertical planes.

Dedicado a mis padres, que siempre me brindaron su apoyo, son mi motivación y les estaré siempre agradecido, sin ustedes no hubiera logrado nada

y sé que se sienten felices y orgullosos por este logro, los amo muchísimo. Para mi hermana Tatiana, que la quiero con toda mi alma y siempre le deseo todo lo bonito del mundo y que cumpla todas sus metas. Para Onix, te quiero mucho y te deseo siempre lo mejor. Para Diana, gracias por estar conmigo y aparecer en mi vida, eres mi fuente de felicidad y juntos lograremos muchas metas, te amo.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios, quien me ha dado salud, fuerza y sabiduría para seguir avanzando en este camino de aprendizaje. Sin su guía y bendiciones, este logro no habría sido posible.

Expreso mi más profundo agradecimiento a mi asesora, la Dra. Jesús Flores Salazar, por su paciencia, dedicación y constante apoyo. Sus conocimientos, sus observaciones y cada una de las reuniones que sostuvo conmigo fueron fundamentales para mejorar esta investigación. Su exigencia me impulsó a dar lo mejor de mí, permitiéndome crecer tanto académica como personalmente.

Agradezco a la Dra. Carolina Henríquez y a la Mg. Flor Carrillo por sus valiosas observaciones y recomendaciones, las cuales fueron clave para perfeccionar este trabajo. Su compromiso y disposición para guiarme en este proceso han sido invaluables.

Estoy muy agradecido con la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática -TecVEM de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus aportes en la realización de este trabajo y por darme la oportunidad de participar como expositor del Seminario Internacional avances de investigación organizado por la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Universidad Católica del Maule, Chile.

Agradezco a los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por todos los aprendizajes inculcados durante las sesiones de clases, especialmente a la Dra. Cecilia Gaita por sus excelentes consejos y enseñanzas durante esta etapa de mi formación académica.

También, me gustaría agradecer a mis compañeros de la maestría que se convirtieron en amigos, especialmente a Clever, por todas las experiencias, amanecidas haciendo los trabajos y conocimientos que compartimos en todos los cursos que llevamos.

Mi sincero agradecimiento a la Institución Educativa Cramex, por brindarme todas las facilidades y sus instalaciones para la aplicación de este trabajo de investigación, así como también a mis alumnos de cuarto año de secundaria por su colaboración. También, agradezco a mis colegas y amigos Kevin y Dennis por su apoyo moral constante para cumplir con este objetivo.

Finalmente, agradezco a mis amados padres, Melania Ruiz López y Alejandro Urquiza Avelino, por su amor incondicional y su apoyo constante que me brindaron a lo largo de mi formación académica. Cada logro alcanzado es reflejo de su sacrificio y valores que me han inculcado. Sin ustedes, nada de esto habría sido posible. Esta meta también es suya.

Índice

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

La geometría desempeña un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, ya que les permite visualizar, analizar, interpretar y resolver problemas relacionados con el espacio y las formas geométricas. Particularmente, el tema semejanza de triángulos que según Ferreyra y Silva de Almeida (2020), es fundamental para el desarrollo de la comprensión geométrica, ya que es un tema muy importante para la comprensión de otras disciplinas matemáticas, como las relaciones métricas en triángulos, la trigonometría, la física, entre otros.

Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), este objeto matemático forma parte de la competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", y su enseñanza es clave debido a que promueve el uso de la proporcionalidad, desarrolla habilidades del análisis geométrico, fomenta la exploración y la argumentación y conecta a la geometría con problemas reales, ya que al trabajar con triángulos semejantes los estudiantes pueden resolver problemas que involucran distancias inaccesibles (como calcular la altura de un edificio, distancia entre dos puntos, etc.) o aplicar sus conocimientos en contextos tecnológicos y de diseño.

El primer argumento que generó el interés de esta investigación está relacionado con mi experiencia como docente en el nivel secundario, ya que pude observar que los estudiantes, sobre todo en cuarto año de secundaria, presentan dificultades al momento de trabajar y aplicar el concepto de la semejanza de triángulos, mayormente, los estudiantes confunden una semejanza con una congruencia, tienen dificultad de reconocer los triángulos semejantes o no consideran que los triángulos semejantes tienen dimensiones proporcionales.

También, el interés de esta investigación está orientada a asociar la enseñanza de la semejanza de los triángulos con el uso de softwares (artefactos tecnológicos) para facilitar una forma alternativa de poder aprender estos conceptos y así, los estudiantes vayan interactuando con las figuras logrando deducir progresivamente las propiedades que contienen.

Este trabajo de investigación está constituido por tres capítulos. En el primer capítulo, se hace referencia a la problemática del objeto matemático en estudio a partir de las investigaciones de referencia asociadas al objeto matemático, a la tecnología y la teoría y, en base a ello se justifica su estudio. Esta justificación se basa en las investigaciones de referencia y lo que se quiere investigar, apoyado del documento oficial en el Perú que viene a ser el Currículo Nacional de Educación Básica Regular. Sumado ello se presenta la pregunta, el objetivo general, los objetivos específicos, aspectos metodológicos y aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático.

Con relación al segundo capítulo, se presentan los aspectos epistemológicos y didácticos relacionados al objeto matemático en estudio. Con relación a aspectos epistemológicos, se utiliza en gran parte como referencia a Boyer (1994) y Lemónidis (1990), donde se puede apreciar la parte histórica de la semejanza de triángulos, así como también, su definición, propiedades y características. Con relación a aspectos didácticos, se realiza un análisis en relación con la teoría del Espacio de Trabajo Matemático de dos libros de actividades para estudiantes de cuarto año de educación secundaria correspondientes a los años 2018 y 2019 correspondientes a las editoriales Santillana y Corefo, que trabajan en conjunto con el Ministerio de Educación del Perú.

Para el tercer capítulo, se presentan los sujetos de la investigación, se plantea y se aplica la secuencia didáctica, en la cual se muestran las tareas que la componen, la metodología para analizar la secuencia didáctica, el diseño de la secuencia didáctica en donde se muestra detalladamente cada una de las tareas con sus respectivos objetivos, el trabajo matemático esperado y , el análisis del trabajo matemático de los estudiantes, para el cual se utiliza el método propuesto por Kuzniak y Nechache (2021). Por último, se presentan las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones.

Capítulo I: Problemática de la investigación

En este capítulo se presenta el problema de investigación, para ello se inicia con las investigaciones de referencia que están organizadas en criterios que permitan tener un panorama de la problemática sobre semejanza de triángulos. Además, se presenta la justificación que se basa en las investigaciones de referencia y en el Currículo Nacional de Educación Básica Regular. Sumado ello, se presenta la pregunta, el objetivo general, los objetivos específicos, aspectos metodológicos y aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático.

1.1 Investigaciones de referencia

Las investigaciones de referencia se han organizado teniendo en cuenta tres criterios: semejanza de triángulos, la relación de la semejanza de triángulos con el uso de la tecnología digital y la relación del Espacio de Trabajo Matemático en geometría. La búsqueda de las investigaciones de referencia se realizó en bases de datos como Latindex, Scopus, Springer y Google Scholar, utilizando como descriptores palabras clave que involucran los criterios antes mencionados.

Respecto al criterio relacionado con la semejanza de triángulos, se presentan las investigaciones de Ubah y Bansilal (2019), Lutfi y Jupri (2020), Masgo (2021), Haj-Yahia (2021) y~~,~~ Ramírez y Ruiz (2022).

Ubah y Bansilal (2019), señalan que los resultados en matemáticas, en Sudáfrica, son muy bajos y que ello conlleva a que muchos investigadores interesados expresen su preocupación por el bajo rendimiento en matemática a nivel escolar, especialmente en geometría. Además, se indica que en el 2006 la asignatura de geometría euclidiana fue catalogada como opcional dentro del currículo para los estudiantes que optan por estudiar matemática en la FET band (estudiantes entre los 15 y 18 años), pues una de las razones que influyó a tomar dicha decisión fue que los profesores no conocían suficientemente bien el contenido, lo cual generó que pocos estudiantes optaron por llevar el curso. Para el 2011, la enseñanza de geometría volvió a ser obligatoria y cuando se incorporó al currículo básico de matemáticas, los profesores no se sentían cómodos respecto a enseñar dicha asignatura, pues no se había enseñado por mucho tiempo, debido a ello, el departamento de Educación Matemática de una Universidad de KwaZulu-Natal diseñó una serie de talleres con tres horas de duración, que se llevaron a cabo durante seis semanas en los que uno de los conceptos que se trabajó fue la semejanza de triángulos.

Es así que Ubah y Bansilal (2019), mencionan que para la realización del estudio cuyo propósito fue explorar cómo los estudiantes utilizan las representaciones semióticas en el razonamiento sobre la semejanza de triángulos, participaron 65 estudiantes, de los cuales los autores seleccionaron a tres participantes para realizarles una entrevista, en la que se discuten sus respuestas respecto a las tareas desarrolladas por ellos, que se basan en identificar y nombrar los triángulos semejantes. Los autores señalan que la comprensión de la geometría requiere fluidez, pues es necesario transitar entre varias representaciones semióticas como la representación visual y la simbólica. Por ello, concluyen que como la demanda cognitiva para realizar transformaciones semióticas en geometría es compleja, a los estudiantes les resultó difícil identificar la relación de semejanza de triángulos. Además, en ciertas ocasiones, los estudiantes han efectuado tratamientos basados en deducciones incorrectas, lo que les conduce a resultados erróneos. Por ello, es imprescindible realizar manipulaciones concretas para que los estudiantes desarrollen una comprensión más sólida del concepto. También, se concluye que el estudio realizado aportó nuevos conocimientos en el área en el sentido de entender cómo los conceptos erróneos de los estudiantes podrían convertirse en un recurso para promover su aprendizaje.

Asimismo; Lutfi y Jupri (2020), indican que según el informe de Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias realizado en el 2015, Indonesia se encuentra en el grupo inferior con respecto al área de geometría y que ello debería ser una preocupación para los docentes de matemática pues se considera que la geometría tiene un papel importante en la vida real debido a las conexiones que existen entre ellas, por el cual indican que la habilidad espacial es una de las habilidades importantes que debe tener un alumno cuando estudia geometría, dado que puede ayudar a los estudiantes a comprender los problemas espaciales y a visualizar las formas geométricas; como por ejemplo en el tema de la semejanza de triángulos, ya que dicho objeto matemático exige tener un buen nivel en la habilidad mencionada. Debido a que cada estudiante tiene una habilidad espacial y el nivel de pensamiento geométrico distinto, la investigación que proponen tiene como objetivo identificar la capacidad espacial de los estudiantes de acuerdo con el nivel de pensamiento de Van Hiele, ya que indican que el modelo mencionado es útil para resolver los problemas de los estudiantes en el área de la geometría. Cabe resaltar que, Van Hiele sugiere cinco niveles de pensamiento en el aprendizaje de la geometría, el nivel 0 llamado el nivel de la visualización, el cual consiste en la capacidad de reconocer formas geométricas, el nivel 1, llamado el nivel de análisis en el cual los estudiantes son capaces de reconocer e identificar propiedades, el nivel 2, de la deducción informal donde los estudiantes tienen la capacidad de comprender y relacionar formas, el nivel 3, de la deducción formal donde los estudiantes entienden la necesidad de justificar deductivamente los resultados matemáticos o proposiciones, con base en un sistema axiomático; es decir prueban teoremas y establecen relaciones entre teoremas para lograr demostrar un resultado de distintas formas y por último, el nivel 4, conocido como el nivel de rigor en el cual los estudiantes establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos, analizan o comparan esos sistemas y son capaces de hacer deducciones más abstractas.

La investigación de Lutfi y Jupri (2020), se llevó a cabo con 25 estudiantes de noveno grado de una escuela de secundaria en Bandung (13 a 15 años de edad), el cual consistió en una prueba escrita sobre la semejanza de triángulos basada en los indicadores de la capacidad espacial; cabe resaltar que, para la realización de la prueba mencionada todos los estudiantes participantes ya han aprendido la semejanza de triángulos y que a partir de los puntajes obtenidos se dividieron en dos grupos llamados superior e inferior. Como resultado de la actividad, en cuanto a la percepción espacial, y considerando cada indicador asociado al nivel de pensamiento geométrico de un estudiante por grupo, se obtuvo que el estudiante del grupo de nivel superior logró identificar la ubicación de los ángulos correspondientes en dos triángulos y determinó correctamente el valor del ángulo señalado. En contraste, el estudiante del grupo del nivel inferior sólo logró identificar la ubicación de los ángulos. Con respecto a la visualización, ambos estudiantes alcanzaron el indicador propuesto; sin embargo, se observaron diferencias en sus respuestas. En lo referente a la rotación mental, se evidenció que ninguno de los dos estudiantes logró cumplir con la indicación correspondiente.

En cuanto a la relación espacial, ambos estudiantes cumplieron con la indicación asignada, aunque cometieron ciertos errores en su análisis. Finalmente, con relación a la orientación espacial, se constató que ninguno logró desarrollar satisfactoriamente la tarea propuesta. A partir de estos resultados, los autores concluyen que los estudiantes alcanzaron únicamente el nivel de deducción informal, lo cual pone en evidencia la necesidad de diseñar estrategias didácticas acordes con dicho nivel de pensamiento geométrico.

Con relación a la importancia del objeto matemático semejanza de triángulos y sus aplicaciones en un contexto cotidiano, se presenta la investigación de Masgo (2021), en la que se señala que la semejanza de triángulos constituye uno de los temas más importantes en la geometría dado que es la base para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y por sus diversas aplicaciones en la vida diaria. Además, indica que las dificultades para el aprendizaje del concepto del objeto matemático en mención son causa del poco tiempo que se le asigna a la enseñanza del concepto de dicho objeto, el no uso de la tecnología digital, la resolución de problemas de corte algebraico siguiendo una misma técnica resolutiva y el escaso uso del concepto en situaciones de la vida diaria. Por ello, su investigación tiene como objetivo analizar cómo los estudiantes de cuarto de secundaria movilizan el concepto de semejanza de triángulos por medio de diferentes representaciones semióticas en una secuencia de tres actividades.

Esta investigación, es de tipo cualitativa y para el desarrollo de sus actividades usa el marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica con aspectos de la metodología de la Ingeniería Didáctica, estos aspectos se utilizan como parte del análisis preliminar, a priori, experimentación, y a posteriori y validación. Con respecto a la parte experimental, Masgo (2021) convocó a 30 estudiantes de cuarto de secundaria, de los cuales se seleccionó a seis de ellos, considerando que sus calificaciones eran aprobatorias pero menores o iguales a 15, y las actividades se llevaron a cabo en una universidad privada cercana a la zona del colegio de procedencia de los estudiantes. Además, indica que para realizar las actividades los estudiantes ya habían llevado el tema una semana antes y que de los seis estudiantes seleccionados se dividieron dos grupos de tres, de los cuales sólo se analiza uno de ellos.

En cuanto a las actividades, se diseñaron tres, los cuales contenían cuatro problemas con sus respectivos ítems, en alguno de ellos se proporciona archivos de GeoGebra para un mejor entendimiento por parte de los estudiantes y luego lo puedan resolver a lápiz y papel. Con relación a la primera y segunda actividad, el investigador propone dos problemas con gráficos y un problema sin gráfico respectivamente, en los cuales pretende que los estudiantes usen el criterio Ángulo-Ángulo, usen representaciones semióticas en lengua natural, figural, figural dinámica y algebraica y, que movilicen las aprehensiones secuenciales, perceptivas, discursivas y operatorias; cabe resaltar que para esta actividad se usó el GeoGebra, así como también el lápiz y papel. Para la tercera actividad se presentan problemas con gráficos, uno de ellos en 3D y pretende que los estudiantes usen el criterio Ángulo-Ángulo, usen representaciones semióticas en lengua natural, figural, figural dinámica y algebraica y, que movilicen las aprehensiones secuenciales, perceptivas, discursivas y operatorias; cabe resaltar que para esta actividad sólo se usó lápiz y papel.

En la primera actividad, se presentan dos problemas en un registro figural donde se sugieren un par de triángulos semejantes. Esta actividad se realiza en GeoGebra y a lápiz-papel con una duración de 3 horas de 45 minutos cada una. El primer problema trata acerca de un topógrafo que visualiza una torre de mayor altura desde un teodolito de 1,5 m considerando que una piedra se encuentra detrás del topógrafo y alineado con la torre, así como la visual del teodolito también se encuentre alineado con el punto más alto de la torre y la piedra. En la figura se muestra la información acerca de las distancias entre torre y topógrafo (12 m), y de este último con la piedra (3 m). Se pide resolver cuatro ítems: proponer un dibujo con figuras geométricas que simplifique el problema, calcular la altura de la torre, calcular la distancia que debe moverse el teodolito para mantener la visual entre los tres objetos, si la piedra se mueve, y justificar si se puede encontrar un punto del teodolito respecto de la torre y la piedra luego de realizar más movimientos. En las dos últimas actividades se pide al alumno utilizar un deslizador en el archivo de GeoGebra y modificar las distancias para observar estos cambios. El segundo problema, se plantea la situación de un ingeniero que realiza alineaciones con el teodolito desde una ubicación externa B a un segmento AC marcado en un mapa de curvas de nivel de un cerro. Se pide resolver tres ítems: ubicar tres puntos externos al segmento dado para verificar triángulos semejantes, calcular una longitud, dadas otras tres longitudes con la figura formada anteriormente y modificar el punto exterior B manteniendo medidas dadas en el ítem anterior. Éste último ítem se trabaja también con GeoGebra. La finalidad de resolver estos ítems es realizar conversiones entre registros figural y algebraico, así como articular aprehensiones secuencial y operatoria al modificar el archivo GeoGebra.

En la segunda actividad, se presenta un problema sin gráfico y, de manera similar, se realiza en GeoGebra y a lápiz-papel, con una duración de 2 horas de 45 minutos cada una. En el problema, se describe la situación donde una gaviota va de un árbol pequeño hacia otro más alto, ambos ubicados en dos orillas diferentes de un río, de manera que la gaviota se vea en la necesidad de descender y tocar un punto P del río para luego subir en dirección hacia la copa del otro árbol. Se trabajan tres ítems en GeoGebra con un deslizador: calcular la distancia para ubicar el punto P respecto del árbol más pequeño para que el ángulo de depresión con que va desde el primer árbol sea el mismo que el de elevación hacia el segundo árbol, calcular la menor distancia que recorre la gaviota en este trayecto si toca el punto P, y calcular la distancia para ubicar el punto P para que se forme un ángulo recto cuando la gaviota descienda y ascienda en P. En el archivo GeoGebra se observa un deslizador, el cual deberá ser utilizado para modificar la imagen y comprobar resultados. La finalidad de estos ítems es aplicar la proporción de semejanza y que se desarrollen aprehensiones preceptiva, secuencial, discursiva y operatoria al modificar el archivo en GeoGebra.

En la tercera actividad, se presenta un problema con un par de gráficos donde no se sugieren triángulos semejantes. En esta actividad no se usa GeoGebra, sino únicamente lápiz-papel durante 2 horas de 45 minutos cada una. El problema propuesto trata de una antena de comunicaciones que se sostiene por cuatro cables con la misma inclinación. Tres de estos cables se encuentran amarrados al piso, mientras que el cuarto está sujeto al techo de una caseta. Se pide resolver tres ítems: proponer un dibujo con figuras geométricas que interpreten la situación mostrada, calcular la altura sobre la base de las figuras planteadas y determinar si la altura de la antena cambiaría al cambiarse el valor de otra longitud. La finalidad de esta actividad es que se realicen tratamientos y que se desarrollen aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas. Además, al no contar con un archivo GeoGebra, la identificación de triángulos semejantes no se dará de manera directa.

A partir de las actividades, Masgo (2021) indica que los estudiantes realizaron cambios de registro del lenguaje natural al figural y de éste al algebraico, también observó que realizaron aprehensiones de tipo secuencial, perceptivo, discursivo y operatorio y, que movilizaron el concepto de la semejanza, aunque en algunos casos con errores en su resolución. Como conclusiones, el investigador indica que los estudiantes tienen ciertas dificultades para resolver problemas de contexto real usando la semejanza de triángulos; además, considera que los conceptos en geometría no son independientes, pues, al no conocerlos perjudica el planteamiento de los problemas y en consecuencia dificulta su solución. Sumado a ello, considera que el registro figural dinámico fue importante para la comprensión en varios de los problemas que planteó y espera que su investigación sea un aporte a la enseñanza de la Geometría, específicamente en problemas de contexto usando el objeto matemático semejanza de triángulos. Asimismo, considera que el tiempo para el desarrollo de la secuencia y los libros de texto de consulta sobre la semejanza de triángulos, no promueve el desarrollo de las competencias en los estudiantes; además, sugiere continuar con su investigación planteando situaciones que involucren los criterios LAL (lado-ángulo-lado) y LLL (lado-lado-lado) ya que en su trabajo sólo se empleó el criterio AAA (ángulo-ángulo-ángulo) y recomienda proponer problemas con o sin registro figural para fomentar a los estudiantes el cambio de registro, también sugiere analizar la comprensión de los universitarios en construcciones con regla, compás y la homotecia. Por último, Masgo (2021) menciona que se puede realizar un estudio dirigido a docentes sobre las diferentes metodologías que emplean para la enseñanza de la semejanza y conceptos relacionas a ello e indica que debería realizarse investigaciones que propongan una secuencia de actividades sobre la semejanza de triángulos a través de los problemas resueltos en la antigüedad y así analizar si estos problemas promueven la enseñanza del concepto y, considera que se deben realizar réplicas de su investigación en otros contextos con estudiantes de EBR, pues considera que la aplicación del objeto matemático estudiado en un contexto real, es motivador para los estudiantes.

En cuanto a la forma de comprender la semejanza de los triángulos por parte de estudiantes, Haj-Yahia (2021) muestra que en distintas investigaciones se ha enfatizado el hecho de que las definiciones son esenciales para el conocimiento geométrico y para la estructura deductiva de la geometría; además, afirma que muchos estudios han investigado sobre cómo las personas entienden el proceso de definición de conceptos y la necesidad de los mismos, definiciones de algunas figuras geométricas como triángulos y cuadriláteros; y también que existen estudios cuyo objetivo es investigar sobre las percepciones de los estudiantes con respecto a los triángulos congruentes y semejantes. Sin embargo, indica que no se ha podido encontrar investigaciones cuyo foco principal sea el estudio de las concepciones de los estudiantes con respecto a las definiciones de los triángulos congruentes y semejantes; por tal motivo, la investigación que el autor propone intenta abordar el estudio de estas concepciones y así, poder obtener, a partir de la aceptación o no aceptación por parte de los estudiantes de los teoremas de triángulos congruentes y semejantes, información sobre las características de las definiciones matemáticas tal como la perciben los estudiantes.

Con respecto a las definiciones matemáticas, Haj-Yahia (2021) señala que diversos investigadores han adoptado distintas formas de concebirlas, entre las cuales, podemos destacar la definición descriptiva y constructiva~~,~~ propuestas por De Villiers (citado en Haj-Yahia, 2021). Asimismo, se evidencia que Zaslavsky y Shir (citados en Haj-Yahia, 2021) clasificaron las características de las definiciones matemáticas como imperativas y opcionales. En cuanto a las características imperativas, los autores proponen que las definiciones matemáticas deben estar libres de ambigüedad y ser invariantes cuando el concepto se presenta en distintas representaciones. Respecto a las características opcionales, resalta el requisito de que una definición sea mínima, el cual se considera de esa manera si es económica y que no contenga condiciones innecesarias.

Por otro lado, Haj-Yahia (2021) advierte que muchos estudios han demostrado que los estudiantes pueden tener dificultades para comprender la estructura de las definiciones y sus significados~~,~~ e incluso algunos profesores no eran capaces de establecer definiciones formales de los conceptos matemáticos, aunque sí pueden dar ejemplos de éstos. De igual modo, según Gonzáles y Herbst (citados en Haj-Yahia, 2021) existen cuatro concepciones acerca de la semejanza de triángulos: la concepción perceptual, la de preservación de medida (que conserva los lados correspondientes en la misma proporción), la de correspondencia (los lados correspondientes están siempre en la misma proporción) y la de transformación (los lados correspondientes se pueden transformar, pero siempre tendrán la misma proporción).

Respecto a la investigación, que aborda las siguientes preguntas: ¿Aceptan los estudiantes los teoremas de triángulo semejante y triángulo congruente como definiciones formales de congruencia semejanza? y ¿Cuáles son las razones para su aceptación o no de estos teoremas como definiciones formales?, participaron 120 estudiantes de décimo grado (educación secundaria, alumnos mayores de 15 años) de una escuela regional en el centro de Israel que estudiaron geometría con 4 profesores diferentes en cuatro grupos paralelos en un nivel intermedio (nivel de 4 puntos llamado en Israel); además, con respecto a los profesores, dos eran licenciados en matemática y dos tenían una maestría en educación matemática, cabe resaltar también que los docentes trabajan de forma uniforme, además, con respecto a las tareas, fueron realizadas teniendo en cuenta distintos aspectos como la familiaridad de los estudiantes con el tema y, por consiguiente, se espera que los estudiantes a partir de las tareas mencionadas usen los teoremas en problemas de identificación, construcción y demostración para identificar si éstas actividades afectan las concepciones de los estudiantes respecto a las definiciones de congruencia y semejanza. Con relación al desarrollo de la actividad, se incluyó un cuestionario dividido en dos etapas, en la primera etapa~~,~~ se solicitó a los estudiantes que definieran los conceptos de triángulos semejantes y congruentes. La segunda etapa tuvo como propósito examinar las percepciones de los estudiantes sobre las definiciones matemáticas, triángulos congruentes y semejantes.

Sobre los resultados de la actividad, en la primera etapa el investigador aprecia una clara tendencia por parte de los estudiantes a dar definiciones no mínimas de triángulos congruentes y semejantes. En la segunda etapa, que consistió sobre la definición basada en teoremas de triángulos congruentes y semejantes, el investigador determinó que la gran mayoría aceptó la definición no mínima de triángulos semejantes, esto es: dos triángulos son semejantes si, y sólo si, sus ángulos correspondientes son de la misma medida y las longitudes de sus lados correspondientes son proporcionales. Además, hay una tercera parte del total de estudiantes que afirman que tanto la definición no mínima como la definición mínima son correctas, teniendo en cuenta que la definición mínima indica que dos triángulos son semejantes si, y sólo si, tienes dos ángulos congruentes.

En función de las explicaciones brindadas por los estudiantes, Haj-Yahia (2021) afirma que~~,~~ en relación con el modelo de Van Hiele, los sujetos lograron alcanzar el tercer nivel (deducción informal). Como conclusión de su estudio, el autor indica que las dificultades de los estudiantes para comprender las características y funciones de las definiciones matemáticas de los conceptos geométricos, afectaron su comprensión de las definiciones matemáticas y geométricas. Además, señala que los resultados obtenidos crean la necesidad de no centrarse exclusivamente en definiciones descriptivas ni descuidar las definiciones constructivas. Por otro lado, destaca la importancia de que futuras investigaciones enfocadas en el tema involucren poblaciones de estudio más grandes y diversas, incluyendo a docentes en ejercicio o en formación, con el fin de obtener un mejor panorama y determinar si el factor cultural afecta o no los hallazgos.

Por último, advierte que los resultados del trabajo realizado puede ser de gran ayuda para los investigadores al momento de diseñar estudios educativos cuyo enfoque sea analizar las características particulares de las perspectivas de los estudiantes sobre las definiciones y que a partir de los resultados obtenidos en su investigación, recomienda que los estudiantes deben participar en el proceso de la definición y que los docentes que se encuentran en una etapa de formación se les debe exponer a las dificultades descubiertas en su estudio.

Por otro lado, en la investigación de Ramírez y Ruiz (2022) han advertido que los estudiantes no sienten la necesidad de pruebas o que no son capaces de distinguir la verificación de la explicación o la prueba y que la geometría es un área clave para la investigación de la prueba y la argumentación; por tal motivo, indican que es importante el nivel de razonamiento geométrico que deben poseer los estudiantes ya que el razonamiento mencionado se caracteriza por la interacción entre lo visual y lo conceptual. Además, los autores indican que el uso de representaciones dinámicas mediante softwares favorece el desarrollo del razonamiento deductivo, pero aún no se ha establecido de una manera firme su utilidad para la enseñanza de las matemáticas y que a partir del hecho de que no todos los casos pueden ser verificados con esta herramienta, motiva a los estudiantes a abordar los problemas de forma más deductiva, empleando expresiones algebraicas con representaciones gráficas para favorecer la formulación de una demostración más completa. Agregando a lo anterior, Ramírez y Ruiz (2022) afirman que la argumentación en geometría debe analizarse a partir del estilo de razonamiento de los estudiantes, las representaciones en las justificaciones y el nivel de generalidad; por tal motivo el objetivo de su investigación consiste en identificar si ciertos estilos de razonamiento (analítico, visual y armónico) y representaciones favorecen las justificaciones generalizadas; siguiendo en la búsqueda del objetivo planteado.

Los autores trabajaron en problemas de demostración geométrica e introdujeron una nueva forma de caracterizar a los triángulos semejantes. Respecto a la investigación, seleccionaron de forma intencional a un grupo de estudiantes de diferentes escuelas del sureste de España, teniendo en cuenta su alto rendimiento, disposición y aptitud demostrada para realizar tareas matemáticas no rutinarias; además, indican que a la lección asistieron 34 estudiantes de 14 a 16 años cuya actividad asignada para el estudio fue tomada de forma virtual por el contexto de COVID-19 y, que sólo 21 estudiantes enviaron voluntariamente sus respuestas en un formulario de Google.

Con respecto a la actividad, plantearon 5 problemas, de los cuales el problema 1 fue planteado mediante representación pictórica y algebraica, el problema 2 fue planteado de forma verbal, los problemas 3 y 4 fueron planteados con propiedades desconocidas como la de bisectriz perpendicular, circuncentro y fracciones equivalentes; es decir, un problema de prueba más exigente que se complementa con herramientas manipulativas de GeoGebra y el problema 5, que también es un problema de prueba en el cual se utilizó GeoGebra para representar la clase de equivalencia de triángulos, en la que todos los triángulos semejantes estaban representados por un sólo miembro de la clase. Con relación al análisis de los cuestionarios, para categorizar los estilos de razonamiento, los autores mencionan que en el sentido de Krusteskii (citado en Ramírez y Ruiz, 2022), las categorías son geométrica (visual), analítica (lógico verbal) y armónica, siendo ésta última el equilibrio entre las componentes pictórico-visual y lógico-verbal; por otro lado, para caracterizar el nivel de argumentación consideran tres etapas: particular, conjunto (de casos), y generalización.

Sobre los resultados de la actividad, los autores lograron observar que los estudiantes desplegaron reiteradamente el razonamiento visual y que su nivel de argumentación difiere y está subordinado al problema involucrado; por otro lado, los alumnos que desplegaron el razonamiento armónico denotan su disposición a utilizar distintas estrategias según los requerimientos del problema abordado. Como conclusión de su investigación, los autores señalan que el estilo de razonamiento no se determina por sí solo el nivel de generalidad y que recomiendan fomentar la transición del razonamiento visual al armónico. Además, no encontraron evidencia que determine que un tipo de representación condicione el nivel de generalidad, aunque afirman que las representaciones algebraicas favorecen a la formulación de justificaciones más generales; asimismo, indican que el uso de sistemas de representación basados en ítems representativos de conjuntos enteros puede favorecer la transición de lo perceptivo a lo general. Por último, marcan que su estudio puede estar limitado por el tamaño de la muestra y eso impide poder extraer conclusiones más generales y que, con el fin de reforzar los resultados obtenidos, planifican nuevas implementaciones en diferentes contextos y con diferentes perfiles de estudiantes.

Con relación al criterio relacionado en el uso de tecnología digital, se presentan las investigaciones de Ferreyra y Silva de Almeida (2020), Cribillero (2021), Reichert y Horbach (2021), Brito y Bairral (2023) y Kim y Shin (2023).

La investigación de Ferreyra y Silva de Almeida (2020), realizada en Brasil con estudiantes del 9° grado (14 -15 años) de una escuela pública, tiene como objetivo investigar si las actividades enfocadas en representaciones dinámicas pueden contribuir al desarrollo del conocimiento de la semejanza de triángulos, considerando como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como metodología la investigación de tipo cualitativo. Teniendo en cuenta lo mencionado, los autores señalan que es necesario considerar distintas estrategias didácticas que no sólo se basen en fórmulas y algoritmos para los estudiantes, sino, considerar el avance del desarrollo de softwares educativos orientados a la enseñanza de la geometría y así poder realizar la construcción del conocimiento desde un enfoque formativo, creativo e innovador dado que consideran que en la actualidad las escuelas no deben permanecer neutrales frente a esta revolución tecnológica.

En ese sentido, los autores organizaron una serie de 7 actividades asociadas a desarrollar el concepto y propiedades de la semejanza de triángulos en el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra, presentando los resultados de una de ellas. Dichas actividades se llevaron a cabo tanto en el laboratorio de informática como en el aula de clase de la escuela. Así se realizaron 10 sesiones de 1h 30min cada una durante los meses de mayo y junio del 2019. Los estudiantes que participaron en esta investigación se dividieron en cuatro pares debido a la cantidad limitada de computadoras, incluso los autores señalan que, en algunas de estas actividades, los estudiantes usaron GeoGebra en sus smartphones debido a la no disponibilidad del laboratorio.

Las investigadoras indican que los estudiantes ya estaban familiarizados con GeoGebra y que en la actividad que se presenta en el artículo, se hace el uso del GeoGebra en versión smartphone. Esta tiene como objetivo que los estudiantes construyan triángulos homotéticamente ampliados, que hallen el cociente de proporcionalidad, que identifiquen los lados homólogos de los triángulos agrandados y que observen qué elementos de los triángulos se alteran y cuales no se alteran; los autores comentan que no esperan que ésta actividad asignada establezca en su plenitud la noción de semejanza de triángulos, sino que los estudiantes comprendan y consoliden la idea de que los triángulos con medidas de sus lados diferentes pueden tener ángulos congruentes.

Como resultado, Ferreyra y Silva de Almeida (2020) señalan que los estudiantes fueron capaces de identificar que los triángulos ampliados o reducidos permanecían en ángulos congruentes entre sí, también que la longitud de los lados de los triángulos se modificaban cuando arrastraban sus vértices y, que comprendieron la función de la herramienta “círculo definido por dos puntos” para la construcción de los triángulos ampliados y reducidos, dado que en el desarrollo de la actividad presentaron dificultades con respecto a esta herramienta, pues no comprenden la relevancia del radio para la construcción de dichos triángulos. Por último, las autoras explican que el uso de tecnología digital permite explorar y formalizar diferentes conceptos geométricos, y que el éxito del uso de esta tecnología depende en gran medida del profesor y de la forma en que se utilice dicha tecnología.

Por otro lado, Reichert y Horbach (2021) investigan la posibilidad de introducir el pensamiento computacional en la educación básica a través de lenguajes de programación como el Scratch, pues indican que la introducción de recursos computacionales puede ser importante para el aprendizaje de conceptos geométricos. Además, señalan que Scratch es un recurso computacional que permite trabajar con una metodología construccionista. El trabajo realizado por los autores tiene como finalidad, analizar las posibles contribuciones del uso del Scratch en el aprendizaje de la semejanza de triángulos.

La investigación se llevó a cabo con 28 estudiantes de 9° grado (edades que oscilaban entre los 14 y 15 años) de una escuela municipal en Brasil, dividida en 10 sesiones en las cuales se impartieron dos clases de 45 minutos, realizadas en el laboratorio de informática de la escuela. En las actividades, se aplicó un cuestionario inicial con el propósito de conocer la realidad de los estudiantes, esto les permitió notar que los estudiantes tenían un concepto erróneo sobre semejanza pues entendían figuras semejantes como figuras “iguales”. A partir de ello, desarrollaron y aplicaron una secuencia didáctica con el uso de Scratch. En el desarrollo de las actividades de la secuencia, enseñaron a los estudiantes el interfaz del Scratch, el uso de algunas de sus herramientas como las nociones de movimiento, entre otras. Esto permitió introducir el concepto de semejanza de figuras de manera gradual hasta llegar a la semejanza de triángulos y sus casos de semejanza.

Una vez trabajados los conceptos mencionados, en la antepenúltima y penúltima actividad, propusieron a los estudiantes la construcción de un objeto de aprendizaje utilizando los conceptos estudiados y las herramientas disponibles en Scratch. Estas actividades tenían como finalidad verificar si hubo un aprendizaje significativo del concepto de la semejanza de triángulos; mientras que en la última actividad los investigadores aplicaron un cuestionario final, del cual concluyeron que la mayoría de los estudiantes lograron comprender el concepto de semejanza de triángulos, así como también los comandos básicos de Scratch, ya que fueron capaces de construir los triángulos sin mucha dificultad. Por ello, una de las principales conclusiones de los autores indica que fue posible valorar positivamente las contribuciones del uso del software Scratch en la enseñanza y en el aprendizaje de semejanza de triángulos. Asimismo, el uso de este software permitió que los alumnos trabajaran la creatividad por medio de comandos de programación.

Asimismo; Cribillero (2022), en su investigación manifiesta que en su experiencia docente observó dificultades en algunos estudiantes en el proceso de aprendizaje de la semejanza de triángulos tales como establecer proporciones correctas de los lados correspondientes y la confusión de la noción de semejanza con la noción de congruencia de triángulos. Por ello, su trabajo tiene por objetivo analizar cómo los estudiantes de cuarto año de secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas mediado en un ambiente de representaciones dinámicas en GeoGebra.

Su investigación es de tipo cualitativa descriptiva y usa el marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, para el desarrollo de sus actividades se revisaron mapas de progreso del aprendizaje y CNE, y libros didácticos referentes al tema. Con respecto a la parte experimental, se seleccionó a cuatro estudiantes de cuarto año de secundaria (15 y 16 años), las actividades se desarrollaron en las casas de los estudiantes por el contexto de pandemia. Además, menciona que los sujetos de la investigación abordaron el tema el año anterior y que tienen conocimiento de las herramientas básicas en GeoGebra; se trabaja en duplas por la plataforma Zoom. El autor diseñó tres actividades en

GeoGebra y una ficha Word, con la finalidad de identificar las transformaciones que realizan los estudiantes, toda esta sesión se realizó en una hora.

En la primera actividad, consta de 3 bloques, donde los estudiantes movilizan conceptos previos para reconocer criterios de semejanza y hacen transformaciones entre registros, el objetivo de esta actividad es reconocer la semejanza mediante criterios. En el primer bloque, que está conformado por 4 ítems, se da la representación de un triángulo y un punto sobre un lado de éste, de tal manera que se representa una circunferencia que contiene a dicho punto y además a dos de los vértices del triángulo mencionado. Con respecto al segundo bloque, cuya finalidad es que los estudiantes realicen tratamientos en el registro figural con el objetivo de reconocer el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza y verificar la constante de proporcionalidad, consta de 3 ítems y se da la representación de dos triángulos equiláteros con sus correspondientes centros. Para el tercer bloque, se muestra dos triángulos y un deslizador k, que representa la constante de proporcionalidad entre los lados correspondientes, está conformada por tres ítems y tiene por finalidad que los estudiantes reconozcan el criterio lado-lado-lado de la semejanza y que verifiquen la congruencia de los ángulos opuestos a los lados correspondientes y, así Cribillero (2021) identifica los tratamientos en el Registro Figural Dinámico, mediante el deslizador y también identificar las conversiones entre los registros figural dinámico y lengua natural.

La segunda actividad, que consta de 3 ítems, proporciona a los estudiantes la representación de un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa y las circunferencias inscritas en los dos triángulos rectángulos generados. La actividad mencionada tiene por objetivo que los estudiantes reconozcan la semejanza de triángulos y que comprueben que los inradios de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados homólogos, así como también permitirá al investigador identificar las conversiones que los estudiantes realizan.

Con respecto a la tercera actividad, se muestra al estudiante la representación de un triángulo, se elige a un lado como diámetro de una circunferencia que intercepta a los otros dos lados en dos puntos determinados con el objetivo que los estudiantes comprueben que las área de las regiones triangulares de dos triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados homólogos; también, que reconozcan el criterio ángulo-ángulo de la semejanza y realicen tratamientos en el registro figural dinámico, la actividad mencionada consta de 3 ítems.

Como conclusiones, el autor señala que la secuencia planteada permitió a los estudiantes utilizar los registros algebraico figural dinámico y lengua natural, movilizando su conocimiento de la semejanza de triángulos; también, indica que a partir de los resultados de la actividad 1 bloque II los estudiantes tuvieron dificultades al reconocer el criterio lado-ángulo-lado y cree que la dificultad mencionada es producto de las escasas tareas relacionadas el criterio; asimismo, menciona que el uso del deslizador permitió a los estudiantes que identifiquen la semejanza de triángulos. Sumado a ello, señala que los estudiantes presentan las medidas angulares sin las unidades y que se sigue presentando la confusión de congruencia como igualdad al identificar la igual medida de los ángulos de los triángulos semejantes, lo que conlleva al investigador a afirmar que los estudiantes no tienen claro la noción de congruencia de ángulos.

Por último, Cribillero (2021) recomienda diseñar actividades que permitan la aplicación del criterio lado-ángulo-lado de tal manera que la constante de la proporcionalidad sea un número entero para que los estudiantes logren identificar dicha proporción entre los lados que determinan ángulos congruentes y diseñar actividades que involucren otros tratamientos en el registro figural dinámico y, extender la propuesta planteada a tres dimensiones.

En cuanto al uso de la tecnología, también Brito y Bairral (2023) en su investigación mencionan que a partir de la pandemia del COVID-19, las formas de comunicarse, aprender y enseñar se modificaron debido al distanciamiento físico, por ello la investigación estuvo motivada por encontrar nuevos rumbos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, teniendo como objeto de estudio a la semejanza de triángulos que buscan identificar los aportes e interacciones sincrónicas en el entorno de los equipos virtuales de Matemática (VMT) que se pueden observar tanto en los docentes como en los futuros docentes, además señalan que VMT permite crear espacios de trabajo utilizando Desmos o GeoGebra, el cual este último se denomina Virtual Math Teams with GeoGebra (VMTcG). Los autores indican que en el sentido de Bussi y Mariotti, las tareas en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) permiten la producción de significados personales o matemáticos, pero que esta producción no se da de forma automática, es por ello que los autores consideran necesario contar con un proyecto didáctico para apoyar a los estudiantes y así comprender el papel de la cuadrícula, el guion de tareas y el chat en una tarea geométrica en la modalidad virtual y sincrónica. Señalan también que, en este artículo se discute aspectos experimentales de la tesis de maestría del primer autor, y que tiene como objetivo analizar las interacciones de los docentes y futuros docentes en tareas en línea sobre la semejanza de triángulos y establecer el papel de la cuadrícula y el control deslizante para la configuración del pensamiento geométrico.

Teniendo en cuenta investigaciones previas sobre cómo se comprende, se aplica y se enseña la semejanza de triángulos; los autores consideran que es importante establecer un nuevo enfoque sobre este objeto de estudio a partir del uso de AGD teniendo como sujetos a los docentes y futuros docentes; además, señalan que en un AGD se destacan la posibilidad de arrastrar puntos libres y la de transformar figuras independientemente de que se mantengan o no las propiedades euclidianas y con ello fomentar en el individuo, la producción de conjeturas mediante la observación y la exploración de las figuras. La investigación tuvo como sujetos de estudio a estudiantes de licenciatura en matemática y de maestría. Además, indican que las tareas planteadas debieron ser adaptadas para su implementación en línea y sincrónica, ya que originalmente fueron diseñadas para ser desarrolladas en contextos presenciales con el uso de GeoGebra en smartphones. Para ello, se crearon salas virtuales organizadas por cursos, en las cuales se trabajó en un periodo de dos horas con la participación de tres a cuatro estudiantes por salas.

Respecto a las tres tareas planteadas por Brito y Bairral (2023), la primera tenía como objetivo investigar el concepto de la congruencia de triángulos mediante la superposición de figuras, con respecto a la segunda tarea era distinguir los factores de variación y covariación de dos triángulos semejantes comparando las razones de sus lados correspondientes y por último, la tarea tres buscaba verificar las condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean semejantes, partiendo del caso Ángulo-Ángulo (AA). Cabe resaltar que, de las tres tareas propuestas los investigadores se centraron en las dos primeras pues involucran el uso de la cuadrícula y el control deslizante por parte de los profesores que realizaron dichas actividades. Como resultado de éstas tareas, los autores concluyen que para la primera tarea los participantes enfatizaron la funcionalidad básica de un AGD que es el movimiento para construir o no triángulos congruentes, teniendo como apoyo las cuadrículas; por otro lado con respecto a la segunda tarea observaron que los participantes utilizaron el control deslizador para explorar la relación de semejanza entre dos triángulos, dado que el objetivo era construir un triángulo de algún tipo y otro triángulo a partir del primero por la función “homotecia” en GeoGebra; es decir, el objetivo de ésta tarea según los autores era comprender el papel del deslizador en el proceso de mediación semiótica. Los autores concluyen que las bases teóricas abordadas en su investigación pueden ser útiles para los docentes y futuros docentes en la creación de estrategias discursivas para promover la continuidad de la interacción de una tarea y así monitorear la resolución de éstas y los procesos cognitivos de sus estudiantes.

Por otro lado, la investigación de Kim y Shin (2023) pretende analizar y mejorar el método enseñanza-aprendizaje de los estudiantes sobre la semejanza de figuras mediante el diseño e implementación de actividades en la que los estudiantes exploran directamente la semejanza utilizando el software Algeomath en Corea, software con una interfaz muy interactiva que permite dibujar, calcular, graficar, entre otras actividades similares al GeoGebra; partiendo del hecho, que la semejanza es una de las nociones centrales de la geometría euclidiana, además, indican que la semejanza de figuras está vinculada con el teorema de Pitágoras y las proporciones trigonométricas en el tercer año de secundaria en el país mencionado; sin embargo, indica que la mayoría de problemas orientados al objeto matemático en cuestión, hace que los estudiantes tiendan a ser memorísticos siguiendo algoritmos o fórmulas haciendo que se deje de lado la comprensión en sí del concepto y que existe la problemática de los estudiantes en cuanto al reconocimiento y diferenciación de la semejanza y la congruencia de triángulos, pues la gran mayoría lo usa indistintamente.

A su vez, señalan la necesidad de utilizar softwares en geometría como un medio de indagación y así~~,~~ poder mejorar el problema que existe en la enseñanza-aprendizaje del área por la falta de actividades en la escuela secundaria. Con respecto a Algeomath, indican que es un software exploratorio desarrollado y distribuido gratuitamente por la Fundación Coreana para la Ciencia y Creatividad en apoyo con el Ministerio de Educación de Corea y que, éste ente ha recomendado a la población dedicada a la educación en el uso de ésta herramienta para la enseñanza-aprendizaje y la evaluación de las matemáticas ya que puede cubrir los principales contenidos de las matemáticas escolares; además, se indica que uno de los autores de esta investigación, desarrolló en el 2021 un recurso de enseñanza-aprendizaje que utiliza Algeomath en la formación de la unidad Semejanza de Figuras para enseñar a los estudiantes el objeto matemático mencionado; sin embargo, su propuesta tenía ciertas limitaciones, por tal razón, los estudios realizados en ésta investigación parten de los datos desarrolladas por Kim en el 2021 que busca modificar y complementar dichos datos para que las actividades de reconocimiento centradas en el estudiante sobre la semejanza de figuras puedan presentarse de una forma más activa.

Con respecto a la investigación, participaron 27 estudiantes de una clase de segundo de secundaria en una ciudad de Corea, divididos en 7 grupos de 3 a 4 alumnos con el fin de facilitar la fluidez en la conversación de los estudiantes, además, cada estudiante usó una tableta; en relación con la actividad, se llevó 5 clases, una por semana, sobre la semejanza de figuras como actividad exploratoria usando Algeomath en el cual en la primera y segunda sesión trabajaron en el uso de la funciones básicas del software, dado que ninguno de los estudiantes estaba familiarizado con la herramienta tecnológica, en las últimas tres sesiones ya los alumnos exploraron directamente la semejanza de figuras en el entorno Algeomath. Como conclusión, los autores indican que cuando los estudiantes encuentran que la relación de aumento se superpone a uno de dos triángulos que se parecen entre sí, primero prestan atención a la proporción de la anchura en lugar de la proporción de los lados correspondientes de los dos triángulos; por ello, señalan que la enseñanza de conceptos matemáticos correctos no garantizan la superación de la limitaciones intuitivas de los estudiantes y que estos errores pueden tener un impacto perdurable en el aprendizaje posterior de las matemáticas.

Por otro lado, Kim y Shin (2023) indican que al explorar la semejanza de triángulos usando Algeomath, los estudiantes notaron la necesidad de hacer una revisión a su pensamiento confirmando visualmente la deficiencia de su intuición al relacionar la anchura de dos figuras similares como la relación de la ampliación o contracción de la figura, también, aseguran que el papel del profesor en la mediación y coordinación de las actividades de exploración de los estudiantes, así como el uso de Algeomath son muy importantes para subsanar conceptos erróneos relacionados a las condiciones de semejanza de triángulos. Por último, indican que la actividad propuesta y el uso del software Algeomath hizo que la comunicación de los estudiantes sea más matemática y contribuyó considerablemente al desarrollo del nivel del pensamiento matemático, pues al momento de explorar la semejanza de triángulos, los estudiantes lograron entender y diferenciar de forma correcta de los conceptos de congruencia y semejanza, del cual determinan que existe un cambio significativo en la comprensión de la semejanza y la superación del concepto erróneo lo que implica la importancia del uso y la instrucción de Algeomath en el campo escolar.

Con relación al Espacio de Trabajo Matemático y la geometría, presentamos las investigaciones de Prior y Torregrosa (2020), Henríquez y Kuzniak (2021) y Henríquez et al. (2021).

Se presenta la investigación de Prior y Torregrosa (2020), en el cual señalan que existen diversas investigaciones referentes al razonamiento (demostración) en un contexto geométrico, y que todas ellas evidencian lo complejo que es para el estudiante realizar la transición de la justificación de propiedades geométricas desde sus primeras aproximaciones, como la intuición, hacia la demostración en un contexto de la geometría formal (deducción formal). Los investigadores indican que el razonamiento configural permite explicar la coordinación de los procesos de visualización, entre la aprehensión operatoria y discursiva; y que dichas coordinaciones dentro de la resolución de problemas sobre prueba en el ámbito geométrico pueden llevar a distintos desenlaces como la solución (truncamiento o conjetura sin demostración) o la no solución al problema. Además, afirman que la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, en su investigación trabajan con el espacio de trabajo geométrico (ETG), que permite entender el ambiente institucional en el que se desarrollan las actividades geométricas, es por ello que su investigación tiene por objetivo analizar el razonamiento configural de estudiantes de 3° y 4° se secundaria (15 y 16 años) para describir los espacios de trabajo geométrico personal de los mismos al realizar tareas sobre demostraciones de propiedades geométricas. Sumado a ello, se indica que en el ámbito escolar se centra en dos tipos de geometría o paradigmas que son la Geometría Natural (Geometría I) y la Geometría Axiomática Natural (Geometría II), así como el estudio de las transiciones entre estas dos geometrías.

Respecto al desarrollo de su investigación, participaron 38 estudiantes de 3° y 4° de secundaria (15 y 16 años). Proporcionaron a los estudiantes un cuestionario que contenía 4 preguntas sobre demostraciones de propiedades geométricas, además, se indica que los estudiantes no recibieron ninguna instrucción directa sobre la demostración, ni sobre la resolución de los problemas de probar. Respecto al cuestionario, los cuatro problemas planteados contenían figuras y para analizar los resultados lo realizaron en 4 fases, de los cuales la primera consistió en la transcripción y segmentación de las respuestas escritas por los estudiantes, la segunda consistió en una entrevista a cada uno de los estudiantes para establecer el procedimiento de validación que ha utilizado cada uno de ellos, luego como tercera fase el análisis de sus aprehensiones y por último, el análisis de la organización discursiva de las respuestas de los estudiantes. Como resultado, los investigadores indican que un tipo de razonamiento configural determina un tipo de discurso específico y que el tipo de respuesta que exige la tarea (depende del ETG en el que es planteado) determina el tipo de razonamiento configural. Sumado a ello, encontraron dos obstáculos epistemológicos que dificultan la transición de la Geometría Natural, propia de las etapas elementales, a la Geometría Axiomática Natural, que debe desarrollarse al final de la etapa secundaria. Dichas dificultades son: la distinción entre dibujo (representación particular de una figura) y figura (objeto geométrico abstracto caracterizado por las propiedades geométricas que los definen), y la comprensión de lo que una prueba matemática produce.

Además, Henríquez y Kuzniak (2021) en su investigación tienen como objetivo analizar el trabajo geométrico de los profesores en formación inicial, al resolver tareas en un ambiente tecnológico digital, así como también con lápiz y papel. Para la realización de dicha investigación usan el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual permite describir y analizar la articulación entre dos procesos, cognitivos y epistemológicos con el fin de analizar la actividad matemática del individuo cuando resuelve problemas. Su investigación analiza el ETM personal de futuros profesores al momento de resolver ciertas tareas dadas. Respecto a la metodología de su investigación, es de tipo cualitativa y utilizan el estudio de caso como estrategia de diseño de investigación, considerando como unidad de análisis el trabajo geométrico realizado por los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía en Matemática de una Universidad Pública Chilena. Con relación a la parte experimental para la primera tarea participaron dieciocho futuros profesores, mientras que para la segunda tarea participaron trece, indicando que se realizaron en distintos momentos de un curso y que los estudiantes lo hicieron de forma voluntaria, y también que las respuestas de los mismos se organizan según tres tipos: Caso aislado, caso estándar y caso bloqueo. Además, para el análisis del ETM personal sólo seleccionaron a 3 estudiantes.

Con respecto a las tareas, los investigadores diseñaron como una primera tarea geométrica a lápiz y papel, el cual favorece la visualización y la coordinación de razonamientos discursivos para la justificación de sus procesos; por otro lado, también diseñaron otra tarea en un ambiente digital , siendo adaptada de la primera tarea, la cual favorece el proceso de visualización dinámica al momento de usar el arrastre, sumado a ello, favorece la exploración y la validación de propiedades geométricas mediadas por el uso de la tecnología digital. Referente a los resultados, los investigadores mostraron el contraste entre el ETM previsto y el ETM personal de los estudiantes y la descripción global de su trabajo matemático. Por último, los investigadores concluyen que a partir de los resultados de su investigación consideran que el uso del marco del ETM, como herramienta teórica y metodológica puede ayudar a detectar dificultades y a abordar la investigación a partir del diseño, y la resolución de tareas específicas e intencionadas que se propone a los estudiantes.

Asimismo, Henríquez et al. (2021) en su investigación caracterizan el trabajo matemático que propone un profesor a través de tareas y ejemplos que considera para la enseñanza del Teorema de Tales. Los investigadores señalan que el tipo de investigación que proponen está tomando mucha relevancia en los últimos años, en ese sentido afirman que Badillo, Figueras, Font y Martínez (2013) se destaca la necesidad de tener una agenda de investigación que relacione el estudio de la práctica en aula con marcos o modelos teóricos. Además, indican que se reconoce la diferencia entre el trabajo matemático previsto y el implementado con relación al diseño de tareas (Watson y Thompson 2015, como se citó en Henríquez et al. 2021); es por ello que los investigadores apoyan la idea que el estudio del trabajo matemático beneficia y clarifica las posibilidades de su uso por parte de los profesores en el aula. También aclaran que no existe consenso sobre la definición de tarea pues distintos investigadores tienen conceptos distintos sobre ello; por otro lado, afirman que los ejemplos desempeñan un rol fundamental tanto en la matemática, como en su aprendizaje y enseñanza.

Teniendo en cuenta todos estos factores, los autores consideran que la perspectiva del Espacio de Trabajo Matemático propuesto por Kuzniak (2011) permite discutir sobre los aportes al estudio del trabajo matemático del profesor en el aula, centrado en el uso de tareas y ejemplos asociados a un determinado contenido, que en esta investigación es el Teorema de Tales. Los autores describen que en el ETM se diferencian dos tipos de elementos, el primero representado por el plano epistemológico cuyos componentes son: representamen, artefactos y referencial; y el segundo representado por el plano cognitivo que está constituido por los siguientes componentes: visualización, construcción y prueba. Además de ello la articulación entre los dos planos se realizan mediante la génesis semiótica, instrumental y discursiva. Dentro de la génesis semiótica, los autores consideran que existen dos niveles de visualización que son la icónica y la no icónica, también destacan que dentro de la génesis discursiva para su trabajo de investigación consideran la prueba en el sentido de Balacheff (citado en Kuzniak, 2011) que propone dos tipos: pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales. También resaltan que al hablar de *“ejemplo”*, usan los *“ejemplos instructivos”* que según los autores está propuesto por Zaslavsky (como se citó en Kuzniak, 2011).

Con respecto a la metodología de la investigación, es un estudio de caso basado en un diseño único en el cual el equipo de investigadores está conformado por cuatro didactas y un matemático que han diseñado un taller formativo dirigido a trece profesores de matemática de un liceo público, con la finalidad de que los participantes planteen mejoras en torno a tareas y ejemplos para el aula, con relación a un contenido matemático, señalan también que la participación fue voluntaria. El taller propuesto contempla tres momentos sesiones en la universidad, en el liceo y el trabajo en el aula de los docentes; un primer momento en el cual los voluntarios presentan a los investigadores sus tareas y ejemplos que pretenden impartir en clase, un segundo momento en el cual las tareas y ejemplos propuestos son adaptados considerando elementos del ETM por parte de los investigadores y un tercer momento en el cual lo profesores del taller seleccionaron a un representante para aplicar las tareas y ejemplos adaptados. Para la selección del caso, los investigadores seleccionaron a un profesor, llamado P1, de un grupo que seleccionó como tema el teorema de Tales, debido a su buena predisposición durante el taller, pues se indica que estaba dispuesto a colaborar, manifestar opiniones y escuchar a otros. También, indican que el grupo de P1, decide incorporar para el momento 3 el uso de GeoGebra.

Respecto a los resultados de la actividad, se reconocen las génesis activadas, los planos verticales originados, ciertos errores y dificultades por parte del profesor seleccionado, pues se observa, por ejemplo, que tuvo errores en demostrar el Teorema de Tales y dificultades al momento de utilizar el GeoGebra para conjeturar ciertos resultados. Como conclusiones de la investigación propuesta; los autores afirman que las limitaciones en su estudio se relacionan con la recolección de datos, pues sólo se realizó el mismo a profesores de un único liceo y afirman que en futuras investigaciones se puede explorar con profesores que pertenecen a otro contexto. Asimismo, consideran necesario generar tareas o actividades focalizadas en el uso de herramientas tecnológicas que faciliten la gestión para la enseñanza y el aprendizaje. Por otro lado, resaltan que su investigación puede contribuir al desarrollo de actividades de formación del profesorado que propicien la reflexión y mejoras en su desempeño. Por último, consideran que el ETM permite poner el foco en el tipo de trabajo matemático que se plantea en el sentido de dotar de significado a los objetos matemáticos, la construcción basada en el uso de artefactos y los razonamientos discursivos.

Dado que nuestra investigación aborda el entender cómo los estudiantes aprenden la semejanza de triángulos, se considera importante el aporte de las investigaciones mencionadas; además, se destaca la importancia de la tecnología en el desarrollo del aprendizaje del objeto matemático mencionado y el Espacio de Trabajo Matemático como herramienta teórica y metodológica para analizar las acciones de los estudiantes al momento de realizar tareas. Teniendo como base las investigaciones de referencia, enseguida se presenta la justificación de la pertinencia de la tesis.

1.2 Justificación

Para presentar la justificación de la investigación nos basamos en las investigaciones de referencia y los documentos oficiales del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).

En el ámbito internacional, Ubah y Bansilal (2019), Lufti y Jupri (2020) y Haj-Yahia (2021), muestran las dificultades que tienen los estudiantes del nivel secundario en el aprendizaje de la semejanza de triángulos, especialmente con la identificación de triángulos semejantes, el nivel de razonamiento geométrico, la capacidad espacial de los estudiantes y la forma en cómo conciben la definición del objeto matemático. También, Ramírez y Ruiz (2022) manifiestan que los estudiantes no sienten la necesidad de prueba y que la geometría es un área clave para la investigación tanto de la prueba, como la argumentación y señalan la importancia del nivel de razonamiento geométrico que deben poseer los estudiantes para poder interactuar entre lo visual y conceptual, aspectos importantes en el aprendizaje de la semejanza de triángulos. Además, Ferreyra y Silva de Almeida (2020) y Kim y Shin (2023) afirman que los estudiantes confunden triángulos semejantes y congruentes, pues la mayoría toma los conceptos mencionados como si fueran lo mismo.

Por otro lado, considerando la importancia de la tecnología digital en el aprendizaje y la enseñanza de la semejanza de triángulos, investigaciones como las de Ferreyra y Silva de Almeida (2020), Henríquez et al. (2021), Reichert y Horbach (2021), Brito y Bairral (2023) y Kim y Shin (2023) muestran que el uso de la tecnología digital permite que los estudiantes mejoren la comprensión del concepto de la semejanza de triángulos y, en ciertos casos, la congruencia. Además, estas investigaciones indican que GeoGebra, Scratch o Algeomath permiten que los estudiantes exploren, las representaciones de triángulos y establezcan conjeturas sobre semejanza de éstos. También que estas tecnologías fomentan la creatividad y favorecen el desarrollo de otras habilidades, como las espaciales y lógico-matemáticas. También como menciona Ferreyra y Silva de Almeida (2020), las instituciones no deben mostrarse neutrales frente a esta revolución tecnológica, sino favorecer y proveer el uso de tecnología digital.

Asimismo, en Perú, Masgo (2021) y Cribillero (2022) señalan que los estudiantes de educación secundaria, estudiantes entre los 14 y 15 años de edad, presentan dificultades en el aprendizaje de la semejanza de triángulos, por un lado Masgo (2021) reconoce a la semejanza de triángulos como uno de los temas más importantes de la geometría por sus diversas aplicaciones en la vida diaria y que las dificultades que se presentan en el aprendizaje del concepto es debido al poco tiempo que se dedica a la enseñanza del objeto matemático en mención, al no uso de la tecnología y al plantear tareas de tipo memorístico, este último factor también es mencionado por Kim y Shin (2023). Sumado a ello, Cribillero (2022) también señala la tendencia de los estudiantes al confundir los conceptos de semejanza y congruencia. Además, afirma que una propuesta didáctica en la que se utilice la tecnología digital como GeoGebra (exploración en el registro figural dinámico el uso de herramientas como el arrastre y el deslizador), también señalado por Brito y Bairral (2023), permitirá una mejor comprensión de la semejanza de triángulos y sus propiedades, así como también facilitará la interiorización y la aplicación de este concepto en un contexto real.

Por otro lado, el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) establece los aprendizajes que se espera que los estudiantes logren como resultado de su formación básica, en concordancia con los fines y principios de la educación peruana, el Proyecto Educativo Nacional y los objetivos de la Educación Básica. El currículo está estructurado en base a cuatro definiciones importantes que son: competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeño. En el área de matemática, se tiene cuatro competencias: resuelve problemas de cantidad, resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, resuelve problemas de forma, movimiento y localización, y resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. Según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016), la educación secundaria abarca los ciclos VI (primero y segundo de secundaria) y VII (tercero, cuarto y quinto de secundaria). Asimismo, el concepto semejanza de triángulos, se encuentra dentro de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”, la cual exige el desarrollo de ciertas capacidades como “modelar objetos con formas geométricas y sus transformaciones, comunicar la comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, usar estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio y argumentar afirmaciones sobre relaciones geométricas”, además, corresponde al nivel 6 de desarrollo de la competencia mencionada. Por último, en el documento oficial se indica que el concepto de la semejanza se estudia en todos los grados del nivel secundario, ya sea por conceptos como proporcionalidad directa, regla de tres, proporciones, ampliación y reducción de figuras geométricas.

Por las investigaciones mencionadas, se identifica una dificultad recurrente en la comprensión de la semejanza de triángulos en estudiantes de secundaria, ya sean por factores como la visualización, el nivel de razonamiento geométrico, capacidad espacial, la forma en cómo se plantean tareas con un enfoque memorístico y la forma en cómo conciben el concepto, en el sentido del mal manejo al momento de diferenciar la semejanza de la congruencia. También, se resalta la importancia del uso de tecnología digital en el desarrollo del aprendizaje de la semejanza de triángulos y sus propiedades, haciendo que el estudiante analice y que en el contexto actual las instituciones no deben permanecer al margen del uso de estas herramientas tecnológicas.

Además, investigaciones como la de Prior y Torregrosa (2020) y Henríquez y Kuzniak (2021), Henríquez et al. (2021) señalan al Espacio de Trabajo Matemático, como herramienta teórica y metodológica para analizar las acciones de los estudiantes al momento de realizar tareas como, por ejemplo, tareas de prueba de propiedades geométricas. Sumado a ello, ampliando las investigaciones de Masgo (2021) y Cribillero (2022) realizadas en el Perú respecto al objeto matemático semejanza de triángulos, se pretende plantear en esta investigación una secuencia didáctica compuesta por tres tareas, que nos permite analizar además de las representaciones y las aprehensiones de las figuras, qué artefactos (digitales o no) utilizan los estudiantes para hacer dichas representaciones, qué conocimientos previos movilizan y qué justificaciones proporcionan cuando resuelven las tareas de la secuencia didáctica. Por todo lo mencionado, en la presente investigación se fundamenta en el Espacio de Trabajo Matemático como herramienta teórica y metodológica para analizar las acciones de los estudiantes de cuarto de secundaria cuando resuelven tareas sobre semejanza de triángulos. De lo anterior, presentamos la pregunta y objetivos de la investigación.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En esta investigación nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el trabajo matemático de estudiantes de cuarto año de secundaria, al resolver una secuencia didáctica sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital?

Con el propósito de responder la pregunta planteada, presentamos el objetivo general y los objetivos específicos de nuestra investigación.

Objetivo General

Analizar el trabajo matemático de estudiantes de cuarto año de educación secundaria al resolver una secuencia didáctica sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital.

Objetivos específicos

- Identificar las génesis semiótica, instrumental y discursiva que activan los estudiantes al resolver tareas sobre semejanza de triángulos.
- Identificar los planos verticales que se activan cuando los estudiantes resuelven tareas sobre semejanza de triángulos.

- Caracterizar los paradigmas de la geometría que los estudiantes privilegian al resolver tareas sobre semejanza de triángulos.

A continuación, se presentan los aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático.

1.4 Aspectos teóricos del Espacio de Trabajo Matemático

A continuación, se detallan aspectos sobre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) cuya noción de acuerdo con Kuzniak y Richard (2014) amplía la noción de espacio de trabajo para la geometría, introducida por Kuzniak y Houdement (citados en Kuzniak y Richard, 2014) y que esta noción tiene por objetivo una mejor comprensión del trabajo matemático en un marco escolar desde un punto de vista didáctico.

Los investigadores explican que el ETM es "un espacio concebido que designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos". (p.6), estos individuos según Kuzniak et al. (2016) pueden ser un experto (matemático profesional), un profesor o un estudiante, pero que en el ámbito escolar los individuos por lo general no serán expertos, sino estudiantes. También, explican que el trabajo matemático es una actividad racional orientada hacia un objetivo particular que puede ser apoyado o no en el uso de instrumentos y artefactos específicos. Además, los objetos y resultados producidos por el trabajo matemático se distribuyen en dominios que permiten la estructuración de la investigación en matemáticas y permiten apreciar la diversidad de la actividad matemática.

Estos dominios matemáticos están determinados según la naturaleza de los objetos estudiados (Montoya y Vivier, 2014 como se citó en Kuzniak et. al, 2016), por ello, para poder diferenciarlos es fundamental conocer los principios epistemológicos de estas diferencias. Entre los dominios más trabajados están la geometría, aritmética, álgebra, análisis, probabilidad y estadística. Sumado a ello, un dominio matemático "va a ser objeto de diferentes interpretaciones cuando sea objeto de una transposición didáctica para ser enseñado, y estas interpretaciones, dependerán también de las instituciones escolares" (Kuzniak et. al, 2016, p.238) ", estos distintos puntos de vista serán tomados en cuenta en un enfoque a través de paradigmas, como un conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico, que para nuestro caso en el dominio de la geometría según Houdement y Kuzniak (citados en Kuzniak y Nechache, 2021) son tres paradigmas distintos que van a permitir clarificar y organizar los distintos puntos de vista que predomina en la geometría.

Con respecto a los problemas matemáticos, Kuzniak et al. (2016) indica que, si bien no son parte del ETM, estos son su razón de ser, pues el ETM debe ser un medio para resolver problemas y ello permite su estructuración tanto institucional como personal. Con respecto a las tareas, de acuerdo con Sierpinska (citado en Kuzniak et al., 2016) se refiere a cualquier tipo de problema matemático con suposiciones y preguntas claramente formuladas, pueden ser resueltos por los estudiantes en un tiempo predecible.

El ETM articula dos planos según Kuzniak (citado en Kuzniak y Richard, 2014), uno de naturaleza epistemológica, relacionada a los contenidos matemáticos. Este plano, está constituido por tres componentes, propias de la actividad matemática, los cuales son: el representamen, definido como un conjunto de representaciones semióticas, que puede estar relacionado con el objeto bajo formas de naturaleza abstracta: íconos, indicios y símbolos; los artefactos que es el conjunto de herramientas o software y el referencial que está constituido por las definiciones y propiedades. Además, según Kuzniak et al. (2016):

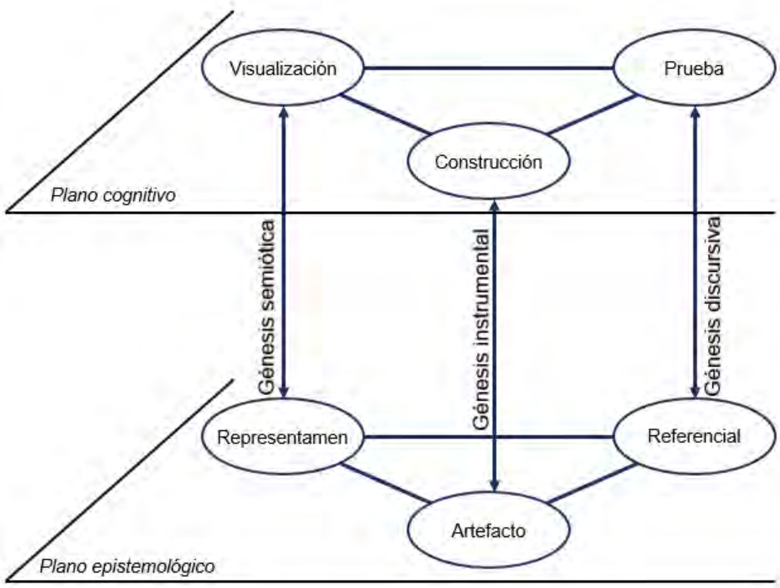
> El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM dándole sentido que, en el caso de la geometría, los paradigmas geométricos ayudan a definir. (p. 247)

El otro plano, de naturaleza cognitiva, relacionado al pensamiento del individuo al momento de resolver tareas matemáticas. Este plano, consta de tres componentes que son: la visualización, asociada a esquemas y operaciones de uso sobre los signos; la construcción que está determinada por los instrumentos utilizados, y la prueba~~,~~ que se transmite a través de la validación de procesos a partir de un referencial teórico.

Sumado a ello, los autores señalan que la forma de que estos dos planos se articulan con el fin de realizar el trabajo matemático esperado, se da mediante tres génesis fundamentales: Una génesis instrumental, que permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo, una génesis semiótica, basada en los registros de representación semiótica, el cual asegura a los objetos del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios, y una génesis discursiva, asociada a la prueba que dará un sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Figura 1

Planos del Espacio de Trabajo Matemático



Nota: Adaptado de Kuzniak y Nechache (2021, p. 274)

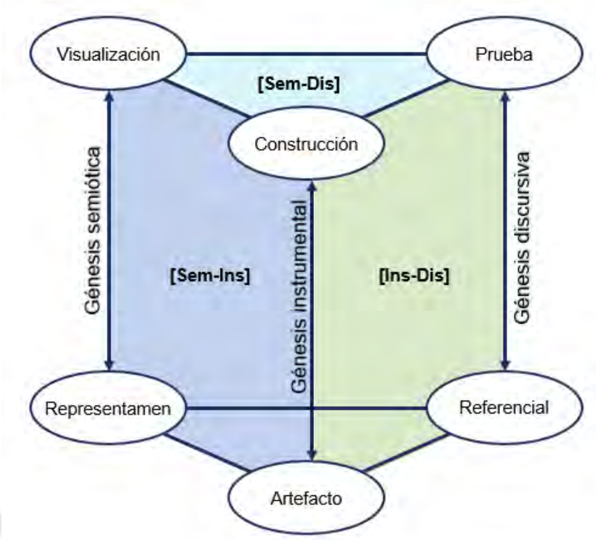
Planos verticales

Para analizar y comprender de forma precisa el trabajo matemático, se consideran tres planos verticales: el plano semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis] y semiótico-discursivo [Sem-Dis], que de acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), estos planos se conectan con las fases del trabajo matemático al momento que los individuos realizan la tarea y, que la ejecución efectiva de éstas fases define ciertas competencias matemáticas fundamentadas sobre la coordinación de las génesis y sus relaciones con el plano epistemológico. Por ello, el primer plano [Sem-Ins] está respaldado por la génesis semiótica e instrumental, el segundo plano [Ins-Dis] se apoya en las génesis instrumental y discursiva y, el tercer plano [Sem-Dis] está respaldado bajo las génesis semiótica y discursiva.

Por último, los autores señalan que la precisión de las definiciones de estos planos y la descripción de sus interrelaciones dependen del ámbito matemático en el que se estudia.

Figura 2

Planos verticales del ETM



Nota: Adaptado de Kuzniak y Nechache (2021, p. 274)

A continuación, se presenta los tipos de ETM.

TIPOS DE ETM

Montoya-Delgadillo y Reyes (2022) indican que el estudio didáctico del trabajo matemático es complejo debido a que intervienen muchas variables. Los autores indican que para la ejecución lógica y consistente del trabajo matemático depende tanto del conocimiento que las instituciones quieren enseñar a sus estudiantes, como de las organizaciones educativas con profesores que desempeñan un rol fundamental en la supervisión diaria del proceso de enseñanza, y estudiantes con el propósito de adquirir y desarrollar sus conocimientos. En ese sentido, con el propósito de abarcar los diversos tipos de trabajo matemático que pueden surgir en el entorno educativo, se definen los tres tipos de ETM, de los cuales se pone énfasis para esta investigación en el ETM personal:

- ETM de Referencia: Es un espacio definido por la comunidad científica, en el sentido de que los individuos de esta comunidad acuerdan formular problemas, organizan las soluciones, privilegiando ciertas formas de pensamiento.
- ETM idóneo: Es un espacio en el cual según Kuzniak y Richard (2014) el profesor elige y gestiona las tareas propuestas a los alumnos ofreciéndoles la posibilidad de resolver de una forma adecuada conforme a las expectativas institucionales descritas en el ETM de referencia. Además, los autores indican que este ETM no es fijo y se debe ir modificando de acuerdo con la realidad

de los alumnos. Sumado a ello, para Kuzniak y Richard (2014, p.9) “en una institución escolar dada, En una institución escolar dada, la resolución de un problema supone que un ETM idóneo se puede organizar para permitir a un alumno comprometerse en la resolución del problema”.

- ETM personal del estudiante: Según Kuzniak y Richard (2014), si un problema es propuesto a un estudiante, entonces el tratamiento matemático que éste dará al problema se realizará dentro de lo que ellos han denominado un ETM personal del estudiante. Por ello, un estudiante activa su ETM personal cuando aplica sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas en la resolución de una tarea dada. Además, los autores indican que este ETM está relacionado con el ETM idóneo, dado que éste permite al estudiante su compromiso en la resolución del problema. Por otro lado, Menares Espinoza y Vivier (2022) indican que los ETM personales no necesariamente tienen coherencia epistemológica o cognitiva, ya que pueden existir situaciones (en el caso de nuestra investigación) como no saber la definición de la semejanza de los triángulos, no identificar los triángulos semejantes, la confusión ente la semejanza y congruencia de triángulos, no poder operar de forma correcta la medida de los ángulos y/o lados de los triángulos, entro otros; es por ello que los autores consideran que es muy importante identificar los ETM personales ya que estos permiten reconocer obstáculos y errores de tal forma que se pueda comprender las dificultades por parte de los estudiantes y adaptar los ETM idóneos para desarrollar un ETM personal coherente, consistente y conforme.

Reyes Avendaño (citado en Montoya-Delgadillo y Reyes Avendaño, 2022) indica que, en la teoría de Espacio de Trabajo Matemático, los paradigmas han sido propuestos según un estudio histórico-epistemológico y didáctico del dominio que se trabaja como la geometría, análisis, probabilidad, entro otros teniendo como objetivo agrupar conocimientos y procesos cognitivos en cada paradigma. Sumado a ello, afirma que los paradigmas en el Espacio de Trabajo Matemático tienen como propósito definir caracterizaciones más claras del trabajo matemático que surge en un ambiente educativo. Para nuestra investigación, consideramos los paradigmas en el dominio de la geometría.

PARADIGMAS EN EL DOMINIO DE LA GEOMETRÍA

Según Kuzniak (2018), en la enseñanza de la geometría, los paradigmas geométricos han sido introducidos por Houdement y Kuzniak (citados en Kuzniak, 2018) que son: Geometría-I, Geometría-II y Geometría-III. Además, según el autor estos paradigmas no están organizados en una jerarquía ya que sus ámbitos de trabajo son distintos y la elección de la forma de resolver un problema depende del propósito del problema y del individuo que lo resuelve.

A continuación, se presentan los tres paradigmas de la geometría:

El paradigma Geometría-I, también llamada Geometría natural, de carácter tecnológico. Está relacionada con la realidad, por ello los objetos están definidos por el modelo geométrico en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo. Además, para validar una afirmación se realizan argumentos basados en la percepción, el experimento y la deducción; los medios de prueba son de tipo material; es decir, se utilizan objetos concretos o artefactos para la representación del objeto y aparecen con una concepción de las matemáticas como un conjunto de herramientas para fomentar actividades empresariales y económicas en las que la geometría proporciona para resolver problemas de la vida diaria.

El paradigma Geometría-II, llamada Geometría axiomática natural, cuyas bases están en la geometría euclidiana, la cual se construye sobre un modelo que se acerca a la realidad sin llegar a ser completamente parte de ella. El sistema axiomático puede ser incompleto y las demostraciones deben ser desarrolladas dentro de este sistema axiomático establecido. Kuzniak (2018) indica que tanto la Geometría I y II están muy vinculados con la realidad, aunque de distintas formas.

El paradigma Geometría-III, llamada Geometría axiomática formal, que según el autor no suele estar presente en la etapa escolar obligatoria, pero sí lo está en una etapa de formación de profesores en matemáticas avanzadas. Además, el sistema axiomático es completo y no tiene como prioridad las aplicaciones a un contexto real, es una geometría más rigurosa y formal que trabaja con problemas lógicos.

A continuación, se presenta la metodología que se seguirá en esta investigación.

1.5 Metodología de la investigación

La presente investigación es de tipo cualitativa, en el sentido de Hernández et al. (2014) dado que esta metodología permite comprender los fenómenos explorándolos a través de interpretaciones y significados de los individuos en su ambiente natural y en relación con el contexto. Para esta investigación se opta por este tipo de metodología, ya que se busca explorar de una manera más profunda cómo los estudiantes aprenden, aplican e interpretan la semejanza de triángulos a través de las experiencias y las percepciones de éstos, partiendo del trabajo matemático que realizan cuando resuelven las tareas de la secuencia didáctica.

Los autores presentan nueve fases metodológicas: la idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en el campo, concepción del diseño de estudio, definición de la muestra inicial y acceso a ésta, recolección de datos, análisis de datos, interpretación de resultados y elaboración del reporte de resultados. Sumado a ello, los autores consideran que, si bien hay una revisión inicial de la literatura, ésta se puede complementar en cualquier etapa del estudio y que en ciertas ocasiones es necesario regresar a etapas previas.

Para esta investigación, se realiza una adaptación a 4 fases que están compuestas por: el planteamiento del problema, el estudio de la semejanza de triángulos, experimento y análisis, y conclusiones y perspectivas futuras.

A continuación, se presentan las cuatro fases que corresponden a los procedimientos metodológicos de la tesis.

Figura 3

Fases de la investigación

Nota. Adaptado de Hernández et al. (2014)

A continuación, se presenta detalladamente el contenido de cada una de las fases:

Fase 1: Planteamiento del problema: En esta primera fase se presentan las investigaciones de referencia; la justificación de la investigación, aspectos teóricos y metodológicos como la teoría Espacio de Trabajo Matemático, la pregunta de investigación y los objetivos, general y específicos.

Fase 2: Estudio de la semejanza de triángulos: Esta fase está conformada por los aspectos históricos y didácticos del objeto semejanza de triángulos, esto último será analizado desde la teoría Espacio de Trabajo Matemático.

Fase 3: Experimento y análisis: En esta fase se presenta el ambiente en el cual se realiza la investigación, en nuestro caso una institución educativa particular; los sujetos de investigación son tres estudiantes de cuarto año de secundaria. Además, en base a las fases 1 y 2, se presenta la secuencia didáctica elaborada sobre la semejanza de triángulos, la cual está compuesta por tres tareas en el cual antes de iniciar con éstas, se desarrolla una actividad inicial que consiste en una introducción para los estudiantes con el objetivo que se familiaricen con las herramientas de GeoGebra. Sumado a ello, se proponen tres tareas donde la primera tarea está relacionada con el criterio Lado-Lado-Lado, la segunda, relacionada con el criterio Ángulo-ángulo y la tercera tarea de índole extra matemática.

Para la aplicación de la secuencia se realizará un taller, uno de forma virtual (la actividad inicial) y 2 sesiones presenciales, donde se realizan las tres tareas, que tendrá una duración de 90 minutos aproximadamente por sesión. El taller será programado fuera del horario de clases, en el cual se realiza una sesión virtual síncrona donde el investigador explica el uso de las herramientas de GeoGebra con el fin que los estudiantes puedan manipular y construir figuras, además se subirá a la plataforma Google Classroom un video donde el investigador se graba explicando sobre el uso del GeoGebra, con el fin de que el estudiante tenga un recurso adicional para la elaboración de la construcción de la figura de la primera tarea; cabe resaltar que ésta construcción el estudiante lo realizará acompañado del investigador.

Por otro lado, con respecto a la última parte de la primera tarea y las dos tareas siguientes se realiza de forma presencial en la sala de cómputo de la institución educativa, que tiene computadoras para el trabajo individual de los estudiantes dado que se utilizará GeoGebra en línea, así como también el Google Classroom para que los estudiantes puedan subir y grabar sus archivos. Además, el profesor a cargo de las sesiones es el investigador (profesor-investigador) que asume un rol participante, acompañando a los estudiantes en el desarrollo de la tarea para asegurar el cumplimiento de las indicaciones. Además, realiza entrevistas posteriores con el fin de que los estudiantes validen y reflexiones sobre sus propias respuestas.

Además, los instrumentos que se utilizaron en las sesiones y que permitieron recolectar datos son fichas de trabajo, archivos de GeoGebra y grabación en video y audio. Las fichas de trabajo permitieron obtener la evidencia física del desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes, registrando sus procedimientos, razonamientos y respuestas. Los archivos generados en GeoGebra, por su parte, almacenan las construcciones dinámicas realizadas por los estudiantes, lo cual facilitó al investigador obtener una información detallada de las acciones y decisiones de los estudiantes al interactuar con esta herramienta tecnológica. Respecto a las grabaciones de video y audio, éstas permitieron obtener el registro de las interacciones y los procedimientos de los estudiantes, lo que facilitó al investigador describir y analizar en detalle las acciones llevadas a cabo durante el desarrollo de las tareas.

Para el análisis de los datos recolectados, se seleccionó a tres estudiantes que cumplieron con los criterios de selección que fueron establecidos previamente por el investigador. Dichos criterios incluyeron: la participación en las dos sesiones del taller, el cumplimiento de las indicaciones en las tareas asignadas, la entrega de las tareas en el tiempo indicado, así como la riqueza y profundidad del trabajo matemático desarrollado. Esta elección de los tres estudiantes se fundamentó en que sus producciones ofrecían elementos suficientes para un análisis detallado y representativo para el estudio en esta investigación. En cuanto a los demás estudiantes, no fueron considerados para el análisis debido a diversas razones: algunos no completaron las tareas asignadas, otros presentaron muchas dificultades en el manejo de las herramientas de GeoGebra, algunos no asistieron a una de las sesiones, y en ciertos casos, otros estudiantes se retiraron antes de terminar la sesión presencial por motivos personales o técnicos.

Respecto a los aspectos éticos en la colecta de datos, a los padres o apoderados de los estudiantes participantes en esta investigación se les informó previamente sobre los objetivos, procedimientos y alcances del estudio mediante una **carta de consentimiento libre e informado** (ver Anexos). En dicho documento se especificaron los fines académicos y educativos de la investigación, así como la solicitud de autorización para el uso de imágenes (fotografías, audio y video), producción escrita y testimonios de sus hijos(as) exclusivamente para propósitos de análisis y difusión académica (como en artículos, tesis, presentaciones, etc.).

Asimismo, se comunicó que la participación era voluntaria y que la identidad de los estudiantes sería resguardada mediante el uso de seudónimos, garantizando así el anonimato y la confidencialidad de la información recogida, en concordancia con la normativa ética vigente de la Pontificia Universidad Católica del Perú y la legislación nacional relacionada con la protección de menores (Ley N.º 27337, Código del Niño y del Adolescente).

Por otro lado, el análisis de la producción matemática de los tres estudiantes se realizará en base al método para analizar el trabajo matemático personal del ETM (**top-down - bottom-up**) de Kuzniak y Nechache (2021), también se presentarán los criterios del análisis del trabajo matemático de Henríquez et al. (2021). Para el análisis de la circulación del ETM de la etapa arriba-abajo (top-down) se utiliza un protocolo con descriptores relacionados con criterios referidos a las génesis y sus respectivas componentes, esta información permitirá reconocer los planos verticales que activan los estudiantes cuando realizan las tareas propuestas.

En la Tabla 1, se presenta el protocolo para el análisis de la circulación del ETM en la etapa arriba-abajo (top-down).

Tabla 1

Protocolo para el análisis de la circulación

Criterio	Componentes	Descriptor
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
		El proceso de visualización considera dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no-icónica).
Génesis instrumental	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual).

Nota. Tomado de Henríquez et al., 2021, p.129

Este análisis se enfoca en examinar de qué forma se articulan los procesos que generan el trabajo matemático y determinar si éstos se alinean de manera total o parcialmente a unos de los tres paradigmas en el dominio de la geometría.

Fase 4: Conclusiones y perspectivas futuras: En esta fase se presentan las conclusiones relacionadas a los objetivos de la investigación y el marco teórico. También, se presenta una descripción general del análisis de las acciones de los estudiantes al desarrollar las tareas, la importancia de la tecnología en su trabajo matemático y cómo influye en el estudiante en el desarrollo de éstas. Sumado a ello, se presentan las dificultades que presentaron los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica.

También, se presentan perspectivas futuras para nuevas investigaciones que tengan a la presente investigación como base, ya sea utilizando otras tecnologías digitales o adaptando la presente investigación a otro nivel académico o a la formación continua de profesores con base en el ETM u otras teorías de la didáctica de la matemática.

Capítulo II: Semejanza de triángulos

En este capítulo se presentan los aspectos históricos y didácticos de la semejanza de triángulos en los cuales se presenta la evolución del concepto de la semejanza de triángulos, así como también se presenta y se analiza materiales de estudio para estudiantes de cuarto año de secundaria de las editoriales Santillana y Corefo del año 2028, todo bajo los aspectos relacionados a la teoría del Espacio de Trabajo Matemático.

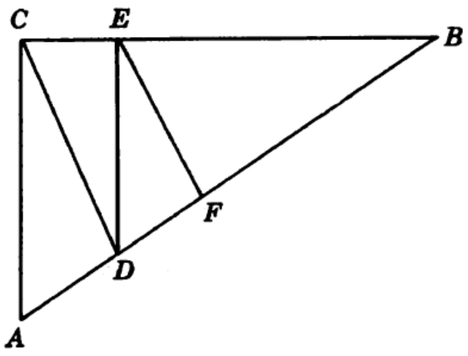
2.1 Aspectos históricos

Boyer (1994), indica que toda afirmación que se haga respecto al origen de la matemática es arriesgada y conjetural. Además, respecto a la época prehistórica, las afirmaciones hechas dependen de las interpretaciones basadas en los pocos datos que se han conservado, por ello indica que Herodoto tenía la idea que la geometría se había originado en Egipto, ya que creía que había surgido a partir de una necesidad de trazar lindes de las tierras después de que éstas fueran inundadas, mientras que Aristóteles tenía la idea de que la geometría tuvo su origen basado en el ocio y el ritual sacerdotal. También, el autor indica que, en el Papiro de Rhind, específicamente en el problema 56 contiene unas nociones de trigonometría y de teoría de triángulos semejantes ya que para la construcción de las pirámides era importante mantener una misma pendiente en cada cara, lo que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo, pues en Egipto se solía medir la pendiente de una línea recta por medio de la razón entre el “avance” y la “subida” denominada por “seqt”, término que significa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura.

Respecto a los babilonios, el autor indica que hay una división de opiniones con relación a si ellos estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque afirma que es muy probable que si lo estaban. Sumado a ello, la semejanza de circunferencias se daba por hecho en Mesopotamia y los diversos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes, hacen pensar una cierta noción respecto al concepto de semejanza. También, indica que se conserva una tablilla en el museo de Bagdad en la que se representa un triángulo rectángulo ABC de lados a=60, b=45 y c=75, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, de áreas 8,6, 5,11;2,24,3,19;3,56,9,36 y 5,53;53,39,50,24 tal y como se muestra en la figura 4

Figura 4

Triángulo rectángulo subdivido en cuatro triángulos rectángulos menores



Nota: Tomado de Boyer (1994, p.64)

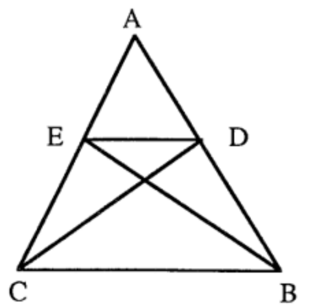
A partir de los valores mencionados, Boyer (1994) indica que el escriba calcula la longitud de AD como 27, utilizando de forma aparente un cierto tipo de “fórmula de semejanza” que es equivalente al teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes. También se calculan las longitudes de los lados CD y BD, iguales respectivamente a 36 y 48, y aplicando la misma “fórmula” a los triángulos BCD y DCE se obtiene la longitud de CE, igual a 21;36. Por último, el autor menciona que el texto se interrumpe de forma brusca a mitad del cálculo del lado DE.

Por otro lado, Lemónidis (1990) indica que, la propiedad de la conservación de la relación bajo la condición de paralelismo fue descubierta por Tales (639-548 a.C.), considerado como el primero de los sietes sabios de Grecia, y esta propiedad sirve como base para diversas construcciones matemáticas, además señala que la propiedad mencionada era usada con relación al cálculo de la altura de las pirámides de Egipto. Sumado a ello, respecto a cómo Tales calculaba las alturas de las pirámides, Boyer (1994) indica que existen fuentes que cuentan que Tales realizaba estas medidas observando las longitudes de las sombras de las pirámides en el momento en que la sombra que proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura, lo que evidencia su aproximación a las ideas de semejanza de triángulos. Sumado a ello, Nolasco y Velázquez (2013) consideran a Tales como el inventor del método deductivo que hace de la geometría una ciencia racional que se adapta a la realidad de una manera perfecta, estableciendo así el inicio del razonamiento geométrico, además al introducir el concepto de semejanza en el razonamiento proporcional, se precisan los conceptos de razón y proporción.

Por otro lado, el autor señala que Euclides en su libro VI de los Elementos trata figuras semejantes utilizando la teoría de proporciones del libro V, en el cual se encuentra cómo Euclides identifica intuitivamente las características de semejanza (congruencia de ángulos, conservación de proporciones) y define sus propiedades (casos de semejanza). Además, se menciona la proposición 2 de Tales y su inversa la cual establece que: “Si trazamos una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, ésta recta interceptará proporcionalmente a los lados de este triángulo; y si los lados de un triángulo se cortan proporcionalmente, la línea que une las secciones será paralela al lado restante del triángulo”, para la demostración de esta proposición, Euclides usa la proposición 1 que establece que la razón de las áreas de dos triángulos de la misma altura es la razón de las dos bases.

Figura 5

Gráfica para la demostración de la proposición 2 de Tales, en el cual se traza el segmento ED paralelo al segmento CB



Nota: Tomado de Lemónidis (1990, p.14)

Sumado ello, Lemónidis (1990) indica que, entre las 33 proposiciones contenidas en el libro mencionado hay algunas que se refieren a triángulos y polígonos semejantes de las cuales se mencionan las siguientes:

- Proposición 4 (Primer caso de semejanza): En los triángulos equiángulos, los lados que forman ángulos iguales son proporcionales; y los lados que subtienden los ángulos iguales, son homólogos.
- Proposición 5 (Tercer caso de semejanza): Si dos triángulos tienen lados proporcionales, serán equiángulos y tendrán los ángulos subtendidos por los lados correspondientes.
- Proposición 6 (Segundo caso de semejanza): Si dos triángulos tienen un ángulo igual a un ángulo, y si los lados alrededor de los ángulos iguales son proporcionales, estos dos triángulos serán equiángulos y los ángulos subtendidos por lados homólogos serán iguales.
- Proposición 19: Los triángulos semejantes tienen una proporción doble de lados homólogos entre sí. (es decir, la razón de las áreas de dos triángulos similares es igual al cuadrado de la razón de semejanza)

- Proposición 20: Los polígonos semejantes se pueden dividir en triángulos semejantes, iguales en número, y contrapartes de polígonos; y el polígono tiene con el otro polígono una razón doble de la que tiene un lado homólogo tiene con un lado homólogo.

Boyer (1994) señala que, se le atribuye a Pitágoras la construcción de los poliedros regulares y la teoría de las proporciones, además los orígenes de esta teoría se pueden remontar en los babilonios debido a que, Pitágoras aprendió en Mesopotamia las medias aritméticas, geométrico y armónica; así como también la proporción áurea. Por otro lado, Nolasco y Velázquez (2013) afirma que la escuela Pitagórica se basaba en la idea de que “todo es número” y eso por ello que para los pitagóricos un número podía relacionarse con cualquier magnitud lo que conlleva al intento de relacionar los números y las magnitudes por medio de las proporciones, lo que permitía resolver problemas geométricos de forma algebraica.

Además, Lemónidis (1990) señala que, luego de esta época griega, existen dos periodos más respecto a la evolución histórica de la semejanza. El periodo del siglo XVI al XVII en el cual se desarrolló de manera paulatina la noción de transformación sin llegar a conceptualizarla, dado que aparece la aplicación de las transformaciones a todo el espacio. También, el autor señala que este periodo está marcado por el desarrollo de la geometría analítica y que “la semejanza y la homotecia se expresan de manera funcional, como la proyección de una figura a otro desde un centro de semejanza” (Lemónidis 1990, p. 23).

Por otro lado, en los siglos XIX y XX, el autor lo considera un periodo de estructuración y algebrización de la geometría en el cual la noción de transformación con su actual significado, es la base de la nueva geometría. También, la homotecia y la semejanza son considerados como objetos matemáticos en el siglo XIX, y que durante la segunda mitad de este siglo apareció de forma dinámica (como transformación), dado que antes de este tiempo la homoteticidad sólo aparecía de forma estática a través de figuras similares fijas. En ese sentido, Nolasco y Velázquez (2013) indican que el concepto de la semejanza se concibe como una transformación caracterizada pues se busca una transformación resultante de dos o más transformaciones a través de un tratamiento.

2.2 Aspectos didácticos de la semejanza de triángulos

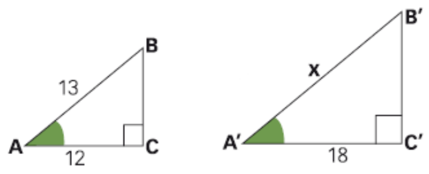
En esta parte se analizó el libro en versión digital de la editorial Santillana de actividad para el año 2018 orientado para estudiantes del cuarto año de secundaria, en el que presenta los aspectos didácticos relacionados al objeto de estudio semejanza de triángulos, analizados a la luz de las herramientas de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático.

Tarea 1: Esta tarea (ver Figura 6) consiste en determinar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo A’B’C’, teniendo como referencia a un triángulo ABC semejante a éste. Además, para poder llegar a la solución de la tarea se puede observar la representación figural de los triángulos y los ángulos correspondientes.

Figura 6

Aplicación directa de la semejanza de triángulos

Obtener la medida x, si $\mathbf{ABC}$ y $\mathbf{A'B'C'}$ son triángulos semejantes



Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Sustituyendo los valores en la proporción

$$\frac{18}{12} = \frac{x}{13}$$

Entonces

$$x = \frac{13(18)}{12} = 19.5$$

Nota. *Guía de recursos didácticos Matemática 4*, (p. 58), Santillana, 2018

Con esta tarea se moviliza la noción de semejanza de triángulos y la proporción de los lados homólogos de los triángulos. Sumado a ello, se propicia la activación del componente representamen del plano epistemológico cuando se presenta la representación figural del triángulo y de un ángulo pintado de color verde, el cual indica la representación de ángulos correspondientes, el cual conduce al proceso de visualización al reconocer e interpretar los triángulos semejantes, todo ello origina la activación de la génesis semiótica. Además, para determinar la medida de la hipotenusa del triángulo A’B’C’, es necesario conocer la propiedad de la relación de lados homólogos entre dos triángulos semejantes, tomando esta propiedad como el referencial se justifica la igualdad de dos razones mediante un proceso de prueba, activando la génesis discursiva y luego mediante un proceso de construcción, tomando como artefacto simbólico a la operación de la división que se determina el valor de la medida de la hipotenusa solicitada, activando la génesis instrumental. La activación de éstas tres génesis da origen a la activación de los tres planos verticales Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

Tarea 2: La siguiente tarea (ver Figura 7) exige que se trabaje de manera grupal, no especifica la cantidad de estudiantes, donde se muestra una imagen de los triángulos que se tienen que construir con sus respectivas medidas. Además, se solicita que se calcule el valor de la hipotenusa de uno de los triángulos construidos.

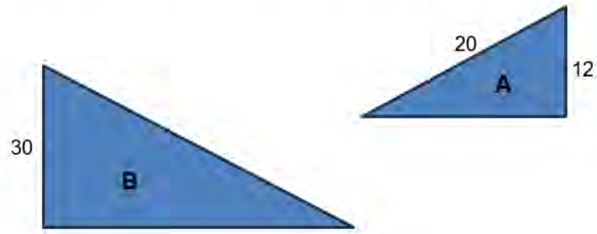
Figura 7

Construcción de triángulos semejantes con lápiz y regla

Actividad grupal

Forme varias agrupaciones de estudiantes con su regla a la mano y, luego pídales que construyan en hojas blancas triángulos semejantes similares a estos, con las medidas indicadas, a fin de que obtengan la longitud de uno de sus lados.

Pídales, por ejemplo, que calculen el valor de la hipotenusa del triángulo **B**



Luego

$$\frac{30}{12} = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{(30)(20)}{12}$$

$$x = 50$$

Nota. *Guía de recursos didácticos Matemática 4*, (p. 59), Santillana, 2018.

En esta tarea se moviliza la noción de semejanza de triángulos y la proporcionalidad de los lados homólogos de los mismos. Además, se propicia la activación de la componente representamen del plano epistemológico al presentarse la representación figural de los triángulos rectángulos semejantes, el cual conduce al proceso de visualización del plano cognitivo al reconocer e interpretar los triángulos semejantes; por tanto, se origina la activación de la génesis semiótica.

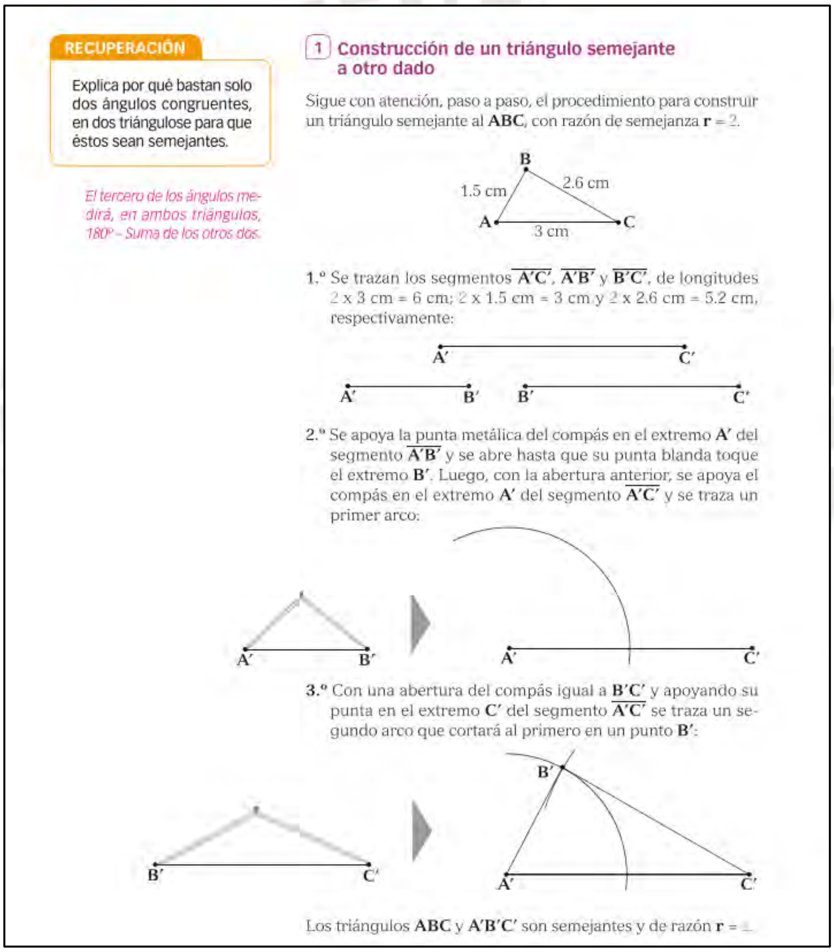
Sumado a ello, para la construcción de los triángulos rectángulos semejantes se solicita el uso de la regla, impulsando la activación del artefacto del plano epistemológico, en consecuencia, se emplea el proceso de construcción del plano cognitivo dado que permite interpretar las marcas de la regla de tal forma que se pueda medir de una manera exacta los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos presentados en la figura, todo ello origina la activación de la génesis instrumental.

Para determinar la longitud de la hipotenusa del triángulo B, es necesario reconocer el criterio de semejanza y la propiedad de la proporción de los lados; es decir, el componente referencial del plano epistemológico y mediante un proceso de prueba se justifica la igualdad de las razones de los lados homólogos, dando origen a la génesis discursiva. Luego, tomando como artefactos simbólicos a las operaciones de división y multiplicación, se determina el valor de la medida de la hipotenusa solicitada mediante un proceso de construcción, lo que origina nuevamente la activación de la génesis instrumental.

Tarea 3: Esta tarea (ver Figura 8) exige la construcción de un triángulo semejante partiendo de un triángulo inicial. Además, para llegar a la solución de la tarea se proporcionan pasos para la construcción con apoyo de una representación gráfica.

Figura 8

Construcción de un triángulo semejante a partir de otro usando regla y compás



RECUPERACIÓN

Explica por qué bastan solo dos ángulos congruentes, en dos triángulose para que éstos sean semejantes.

El tercero de los ángulos medirá, en ambos triángulos, 180º – Suma de los otros dos.

1 Construcción de un triángulo semejante a otro dado

Sigue con atención, paso a paso, el procedimiento para construir un triángulo semejante al **ABC**, con razón de semejanza **r** = 2.

1.º Se trazan los segmentos $\overline{A'C'}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$, de longitudes 2 x 3 cm = 6 cm; 2 x 1.5 cm = 3 cm y 2 x 2.6 cm = 5.2 cm, respectivamente:

2.º Se apoya la punta metálica del compás en el extremo **A′** del segmento $\overline{A'B'}$ y se abre hasta que su punta blanda toque el extremo **B′**. Luego, con la abertura anterior, se apoya el compás en el extremo **A′** del segmento $\overline{A'C'}$ y se traza un primer arco:

3.º Con una abertura del compás igual a **B′C′** y apoyando su punta en el extremo **C′** del segmento $\overline{A'C'}$ se traza un segundo arco que cortará al primero en un punto **B′**:

Los triángulos **ABC** y **A′B′C′** son semejantes y de razón **r** = 2.

Nota. Tomado de *Guía de recursos didácticos Matemática 4*, (p. 60), Santillana, 2018

Esta tarea moviliza la noción de semejanza de triángulos y proporción de sus tres lados. Además, se presenta la representación figural de los triángulos semejantes y del proceso de construcción, para después activar la componente representamen del plano epistemológico, el cual lleva al proceso de visualización del plano cognitivo al reconocer los triángulos semejantes; por tanto, se activa la génesis semiótica. Además, para la construcción del triángulo semejante se pide el uso de la regla y el compás, aunque no se especifica si el tipo de herramienta puede ser digital o no, esta construcción también se puede hacer en un software como GeoGebra. Todo lo mencionado anteriormente, impulsa el uso de artefactos digitales, en efecto, se emplea el proceso de construcción del plano ya que las herramientas mencionadas permiten interpretar de manera exacta las medidas solicitadas de los lados del triángulo, así como también las medidas de los radios de las circunferencias previas que se dibujan para la construcción del triángulo semejante, todo lo mencionado origina la activación de la génesis instrumental.

Por último, para determinar la razón de proporcionalidad, es necesario reconocer el criterio de semejanza (lado-lado-lado) que se toma como referencial teórico y se justifica la proporción de los lados homólogos mediante un proceso de prueba, lo que origina que se active la génesis discursiva. Por consiguiente, para determinar la razón de proporcionalidad de la operación de la división (artefacto simbólico) y mediante un proceso de construcción al dividir las medidas de los lados homólogos se logra determinar la razón pedida, y con ello se activa la génesis instrumental.

Finalmente, se puede apreciar que esta tarea exige la activación de las tres génesis, en consecuencia, la activación de los tres planos verticales, el plano Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

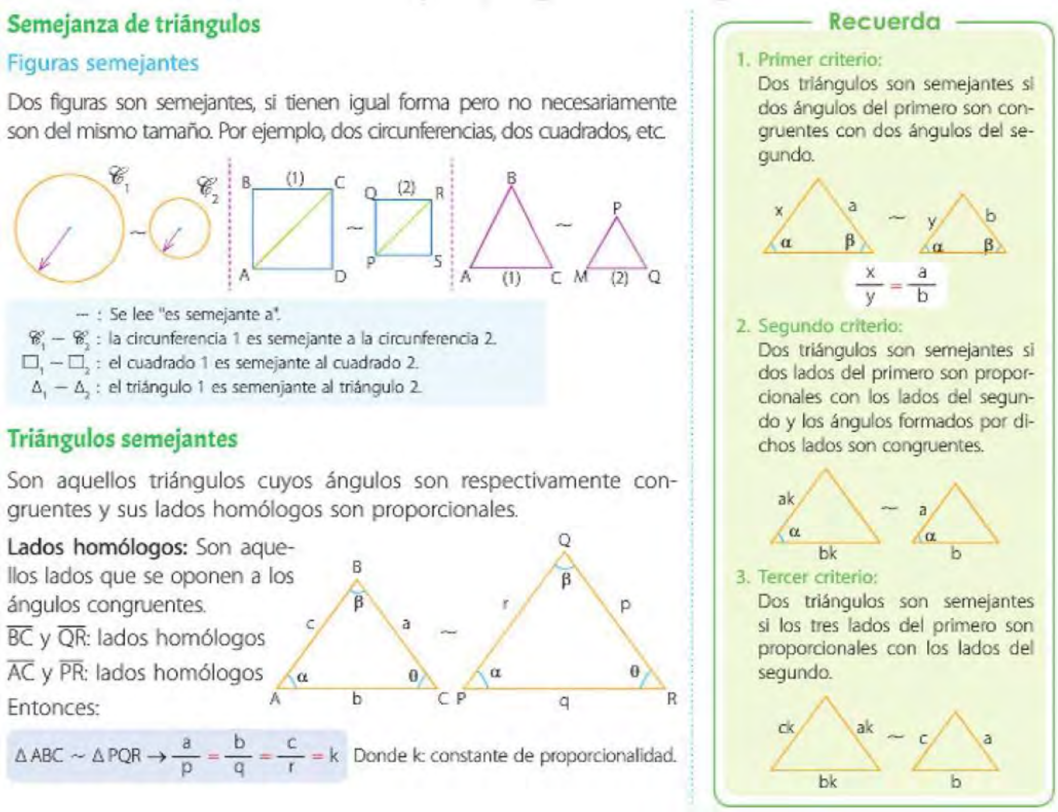
Por otro lado, también se analizó el libro Matemática IV de la editorial Corefo del año 2018 orientado para estudiantes del cuarto año de secundaria.

El estudio de la semejanza de triángulos está presente en este libro dentro su sección correspondiente a la competencia *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*. Además, el libro aborda la introducción al estudio del objeto mencionado definiendo lo que significa figuras semejantes. Por ello, se presenta la definición de triángulos semejantes, con sus tres criterios para determinar condiciones suficientes para que los triángulos cumplan esta relación.

En la figura 9, se muestra cómo este libro introduce la noción de figuras semejantes y la definición de la semejanza de triángulos.

Figura 9

Introducción a la semejanza de figuras y definición de la semejanza de triángulos



Semejanza de triángulos

Figuras semejantes

Dos figuras son semejantes, si tienen igual forma pero no necesariamente son del mismo tamaño. Por ejemplo, dos circunferencias, dos cuadrados, etc.

$\sim$: Se lee "es semejante a".

$\mathscr{C}_1 \sim \mathscr{C}_2$: la circunferencia 1 es semejante a la circunferencia 2.

$\square_1 \sim \square_2$: el cuadrado 1 es semejante al cuadrado 2.

$\Delta_1 \sim \Delta_2$: el triángulo 1 es semenjante al triángulo 2.

Triángulos semejantes

Son aquellos triángulos cuyos ángulos son respectivamente congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

Lados homólogos: Son aquellos lados que se oponen a los ángulos congruentes.

$\overline{BC}$ y $\overline{QR}$: lados homólogos

$\overline{AC}$ y $\overline{PR}$: lados homólogos

Entonces:

$\Delta ABC \sim \Delta PQR \rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ Donde k: constante de proporcionalidad.

Recuerda

1. Primer criterio:
Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del primero son congruentes con dos ángulos del segundo.
$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

2. Segundo criterio:
Dos triángulos son semejantes si dos lados del primero son proporcionales con los lados del segundo y los ángulos formados por dichos lados son congruentes.

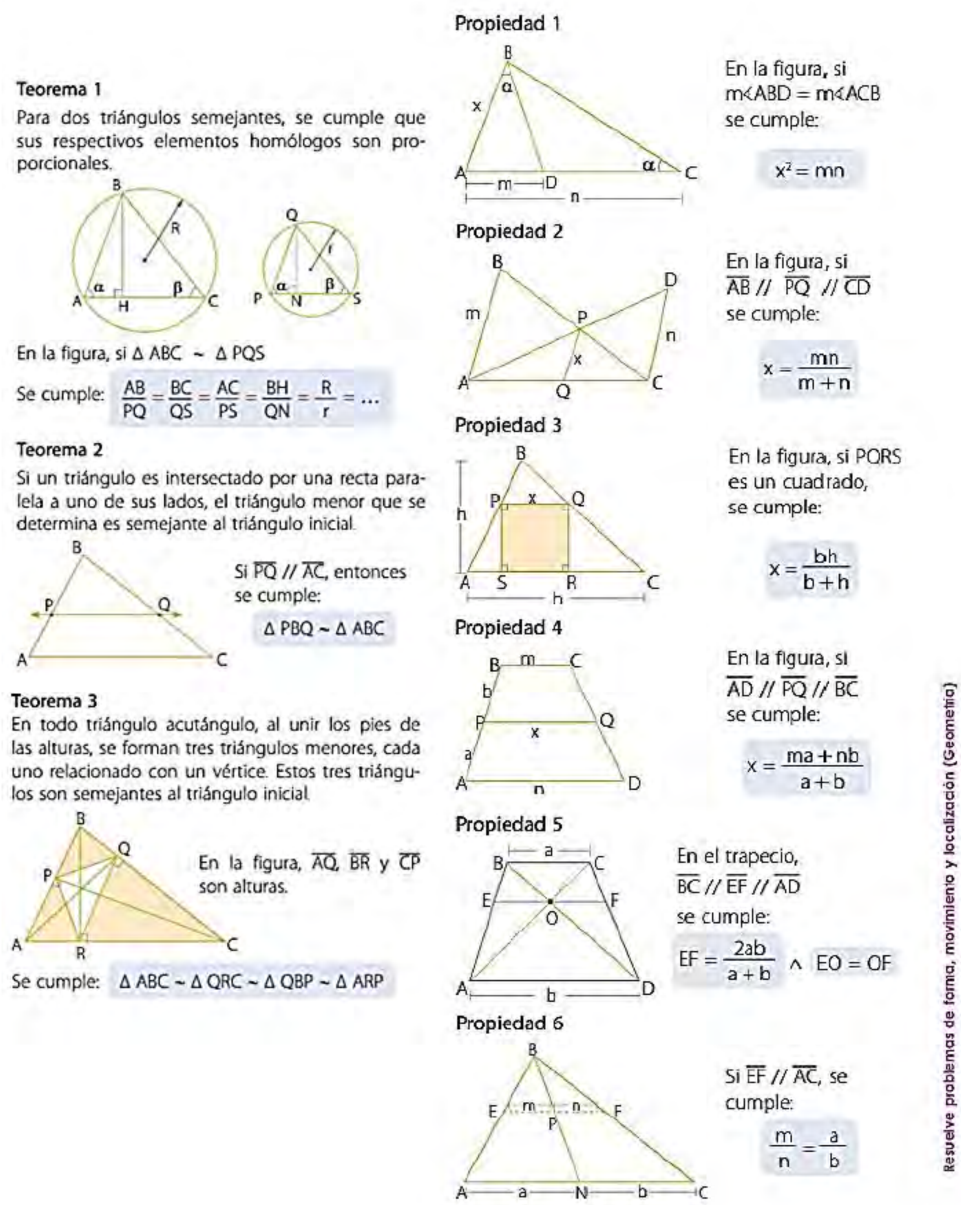
3. Tercer criterio:
Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primero son proporcionales con los lados del segundo.

Nota. Tomado de *Matemática IV*, (p. 120), Corefo, 2018

Además, presenta diversos teoremas y propiedades (ver figura 10) cuyos resultados son consecuencias de la definición y criterios de la semejanza de triángulos, que en términos del ETM serán tomados como referencial del plano epistemológico, para que mediante un proceso de prueba se validen afirmaciones o resultados que conlleven a la resolución de las diversas tareas que se puedan proponer.

Figura 10

Teoremas y propiedades asociados a la semejanza de triángulos



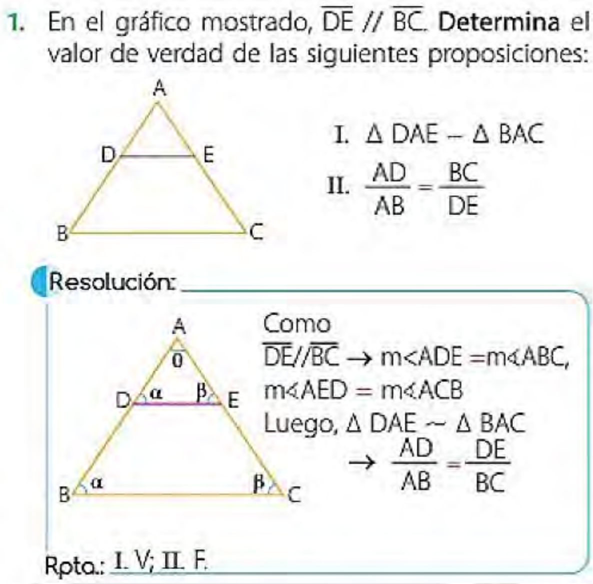
Nota. Tomado de *Matemática IV*, (p. 121), Corefo, 2018

Además, se presenta una serie de tareas propuestas en este libro que se presentan a continuación:

Tarea 1: En esta tarea (ver Figura 11), se propone que los estudiantes determinen si las afirmaciones dadas son verdaderas o falsas, a partir de la representación figural de un triángulo con ciertas condiciones.

Figura 11

Tarea relacionada al valor de verdad de afirmaciones sobre la semejanza de dos triángulos



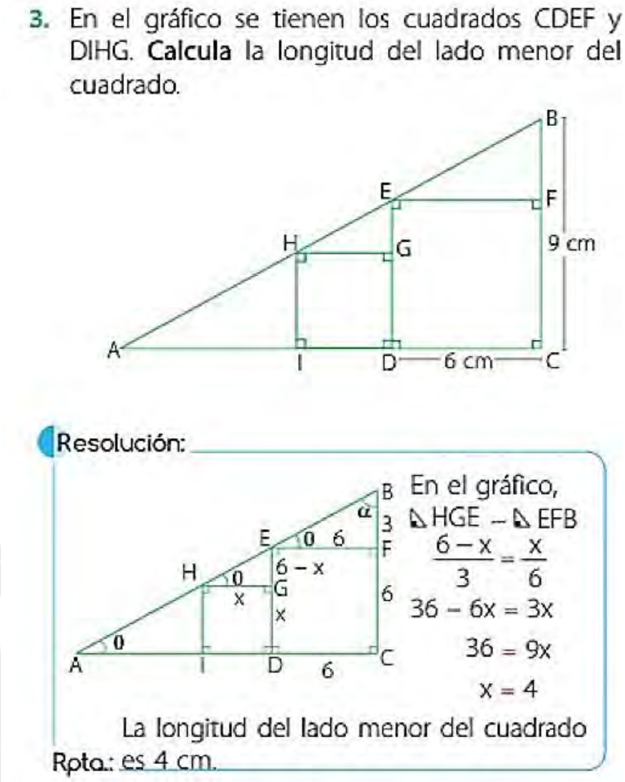
Nota. Tomado de *Matemática IV*, (p. 122), Corefo, 2018

Esta tarea moviliza la noción de semejanza de triángulos y ángulos entre rectas paralelas. Además, se presenta la representación figural de los triángulos ABC, ADE y la representación del paralelismo entre los segmentos DE y BC, estas representaciones se toman como representamen. Por ello, mediante un proceso de prueba se justifica la congruencia entre los ángulos ADE, ABC y AED, ACB tomando como referencial teórico a la definición de los ángulos alternos internos entre dos rectas paralelas dando origen a la génesis discursiva. Además, se hace uso de artefactos simbólicos como son las variables que representan los ángulos, para que luego partiendo de las representaciones figurales de los triángulos BAC y DAE mediante un proceso de visualización, se reconozca la congruencia entre los ángulos interiores de ambos triángulos, dando origen a la génesis semiótica y luego para justificar la verdad de la primera afirmación, toma como referencial teórico a un criterio de la semejanza que conlleva mediante un proceso de prueba la existencia de la semejanza entre los triángulos BAC y DAE, dando origen a la génesis discursiva, y esto último da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo. Por último, para determinar la falsedad del segundo ítem de la tarea se toma como referencial teórico a la definición de la semejanza de los triángulos, por el cual mediante un proceso de prueba se determina la relación correcta de proporción entre los lados homólogos de los triángulos semejantes.

Tarea 2: En esta tarea (ver figura 12) se propone que los estudiantes determinen el valor de la medida del lado del cuadrado más pequeño a partir de las medidas de un cateto, de un lado de un triángulo rectángulo mayor y del cuadrado mayor respectivamente.

Figura 12

Tarea relacionada al cálculo de la medida de un segmento usando la regla de proporción de la semejanza de triángulos



Nota. Tomado de *Matemática IV*, (p. 122), Corefo, 2018

Esta tarea moviliza la noción de semejanza de triángulos, así como también propiedades de los lados de un cuadrado y diferencia de segmentos. A partir de la representación figural de los triángulos y de los cuadrados, tomados como representamen, se identifica mediante un proceso de visualización la medida de un cateto del triángulo rectángulo ABC y de un lado del cuadrado EFCD. Además, tomando como referencial teórico a la definición de un cuadrado, mediante un proceso de prueba se logra determinar las medidas de los segmentos FC y BF, dando origen a la activación de la génesis discursiva. Asimismo, al asignar al lado GD con un variable “x”, tomado como artefacto se justifica la igualdad de los segmentos HG y GD mediante un proceso de prueba tomando como referencial teórico a la definición del cuadrado, dando origen a la génesis discursiva; por ello, mediante un proceso de construcción se determina el valor del segmento EG en términos de dicha variable, esto da origen a la génesis instrumental.

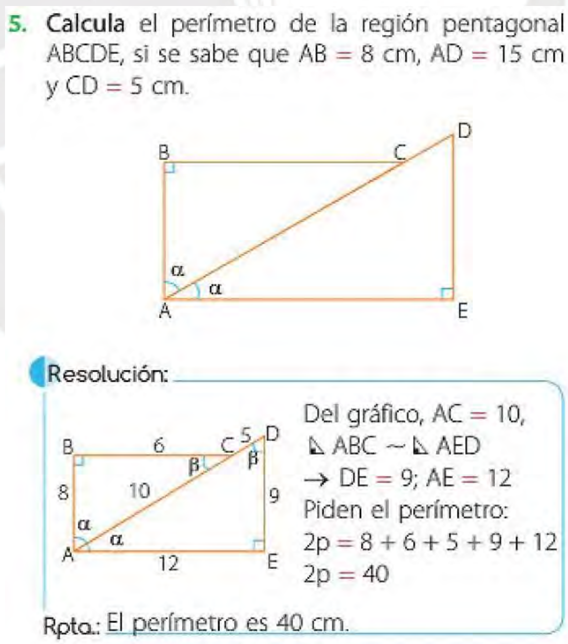
Luego tomando como artefactos a las variables α y θ, y tomando como referencial la suma de ángulos interiores de un triángulo, se justifica mediante un proceso de prueba la congruencia de los ángulos HAI, EHG y FEB, dando origen a la génesis discursiva, también, tomando como representamen las representaciones figurales de los triángulos HGE y EFB se determina mediante un proceso de visualización la congruencia entre un par de ángulos de los dos triángulos, dando origen a la génesis semiótica. Seguido ello, se toma como referencial teórico un criterio de la semejanza que conlleva mediante un proceso de prueba la existencia de la semejanza entre los triángulos HGE y EFB, dando origen a la génesis discursiva.

Por último, se toma como referencial teórico la definición de la semejanza de los triángulos por el cual mediante un proceso de prueba se determina la relación de proporción entre los lados homólogos de los triángulos semejantes, originando nuevamente la activación de la génesis discursiva, luego tomando como artefactos la división, multiplicación, suma y resta de expresiones, se obtiene mediante un proceso de construcción el valor de la variable "x" y por ende el valor del lado del cuadrado menor, activando así la génesis instrumental. Todo lo mencionado anteriormente, da origen a la activación de los tres planos verticales Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

Tarea 3: En esta tarea (ver figura 13), se propone el cálculo del perímetro de un pentágono, empleando previamente la semejanza de triángulos.

Figura 13

Tarea relacionada al cálculo del perímetro haciendo uso de la semejanza



Nota. Tomado de *Matemática IV*, (p. 122), Corefo, 2018

En esta tarea se moviliza la noción de semejanza de triángulos, así como también la noción de perímetro. A partir de la representación figural de los triángulos y los datos del problema, tomados como representamen mediante un proceso de visualización, se reconoce la congruencia de un par de ángulos interiores de los triángulos ABC y AED y las medidas de los segmentos indicados en los enunciados, dando origen a la activación de la génesis semiótica. Además, se justifica la medida del segmento BC mediante un proceso de prueba tomando como referencial teórico el teorema de Pitágoras, activando la génesis discursiva; todo lo mencionado anteriormente, genera la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo.

También, mediante un proceso de prueba tomando como referencial teórico el criterio ángulo-ángulo se justifica la semejanza entre los triángulos ABC y AED, originando nuevamente la activación de la génesis discursiva. Luego, para el cálculo de las medidas de los catetos del triángulo ADE, en el texto se presenta de manera directa la longitud de las medidas de estos catetos, además se toma como artefacto las operaciones de suma para que mediante un proceso de construcción se obtenga el perímetro del polígono pedido, lo que activa la génesis instrumental, esto hace que se origine la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo.

A continuación, en el siguiente capítulo se presentan el experimento y el análisis de esta investigación.

Capítulo III: Experimento y análisis de la investigación

En este capítulo se presentan los sujetos de la investigación, la secuencia didáctica, el trabajo matemático esperado, la técnica que se utiliza para el análisis del diseño de las tareas y el análisis del trabajo matemático personal de los estudiantes.

3.1 Sujetos de la investigación

Los participantes de este estudio son estudiantes del cuarto año del nivel secundaria de una institución educativa privada ubicada en el distrito de Carabayllo, Departamento y Provincia de Lima. Sus edades oscilan entre 15 y 16 años; además cabe resaltar que los estudiantes ya estudiaron el tema de semejanza de triángulos y, también en la institución educativa se programan dos horas pedagógicas semanales al curso de geometría para cuarto año del nivel secundaria. Además, el docente a cargo del grupo de estudiantes es también el investigador (docente-investigador).

El desarrollo de la secuencia se llevó a cabo en dos sesiones, ambas en la misma semana, una sesión virtual en un horario extraescolar que tuvo una duración de 80 minutos, en la cual se realizó una introducción al uso de las herramientas básicas de GeoGebra, necesario para el desarrollo de las tareas de la segunda sesión. Cabe resaltar que para esta primera sesión asistieron de manera voluntaria 30 estudiantes de cuarto año de secundaria, cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años.

La segunda sesión, que tuvo lugar al desarrollo de la secuencia propuesta constituida por tres tareas, se realizó de manera presencial en un horario por la tarde fuera del horario escolar normal con una duración de 110 minutos, en el cual asistieron de manera voluntaria quince estudiantes que trabajaron de forma individual en la sala de cómputo de un colegio particular. Para el desarrollo de las tareas los estudiantes trabajaron con GeoGebra en línea, además en el desarrollo de sus pantallas se grabaron para poder observar su trabajo matemático para su posterior análisis.

Respecto a la primera tarea, de la segunda sesión, cuyo objetivo es comprender la definición de la semejanza de triángulos y el criterio lado-lado-lado, tuvo una duración de 50 minutos en la cual se proporcionó una ficha de manera física a cada uno de los estudiantes cuyo contenido constaba de las instrucciones y las preguntas para que los estudiantes escribieran sus respuestas en el desarrollo de la tarea. Además, en el transcurso de esta tarea el docente-investigador realizó ciertas intervenciones debido a algunas dificultades que presentaron los estudiantes al momento de realizar la construcción, así como también para aclarar ciertas dudas respecto a la tarea y para supervisar el buen uso de las herramientas de GeoGebra. Terminado el tiempo establecido para esta primera tarea, los estudiantes colgaron sus enlaces de GeoGebra en el aula Classroom, luego el docente-investigador cerró esta primera tarea explicando y formalizando la semejanza de triángulos junto con el criterio lado-lado-lado, cumpliendo con el objetivo de esta tarea.

Por consiguiente, para la segunda tarea de la segunda sesión, cuyo objetivo es comprender el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos, tuvo una duración de 25 minutos y, al igual que la primera tarea los estudiantes recibieron una ficha de forma física donde escribieron sus respuestas, en el desarrollo de ésta tarea el docente-investigador realizó dos intervenciones aclarando ciertas dudas respecto a las tareas, cabe resaltar que fue menor la presencia de dificultades con respecto a la primera tarea. Terminado el tiempo establecido, los estudiantes subieron sus enlaces de GeoGebra al Classroom y el docente-investigador cerró esta segunda tarea formalizando el criterio lado-ángulo-lado.

Respecto a la tercera tarea, de índole extra matemática, cuyo objetivo es resolver una situación a partir de la identificación de una semejanza de triángulos usando el criterio lado-ángulo-lado, como la sesión fue presencial, se entregó a los participantes una ficha para que resuelvan esta última tarea, y se solicitó que graben un video con la explicación de su resolución. Este archivo fue enviado al docente-investigador vía Classroom.

Luego de culminar con la entrega de esta tarea, para el análisis del trabajo matemático de los estudiantes, para esta investigación se seleccionó a tres estudiantes tomando en cuenta los siguientes criterios: participación completa en ambas sesiones (virtual y presencial), seguir correctamente las indicaciones de las tareas y responsabilidad en el cumplimiento del tiempo de entrega. También, cabe resaltar que se consideró las distintas formas en cómo los estudiantes realizan las tareas con el fin de tener una información diversa que enriquezca esta investigación.

Respecto a los estudiantes seleccionados, por cuestiones éticas y para fines de la investigación serán llamados por seudónimos como María, Dennis y Kevin para salvaguardar su identidad. Además, cabe resaltar que a los tres estudiantes seleccionados se les realizó una entrevista con el fin de obtener información más detallada del trabajo matemático realizado en el transcurso del desarrollo de las tareas.

3.2 Secuencia didáctica

Para el análisis del trabajo matemático de los estudiantes, se utiliza el análisis basado en el ETM según Kuzniak y Nechache (2021) donde se plantean dos etapas: etapa arriba-abajo y abajo-arriba. La etapa Arriba-abajo **(Top-Down),** consiste en identificar en el trabajo matemático de los estudiantes los distintos episodios. Estos episodios están compuestos por una serie de acciones específicas que los estudiantes realizan al resolver la tarea, estas acciones se analizan detalladamente utilizando los criterios del análisis del trabajo matemático, propuesto por Henríquez et al. (2021) y se describen utilizando los diferentes componentes, procesos cognitivos y epistemológicos de los planos del ETM. Por otro lado, a partir de los resultados obtenidos en la primera etapa; a continuación, se plantea la etapa Abajo-arriba **(Bottom-up)**, que consiste, según los autores, en proporcionar una visión global de los episodios y con ello deducir la organización lógica de las acciones de los estudiantes para poder descubrir su posible recorrido cognitivo. Esto permite obtener una visión más clara de cómo los estudiantes resuelven las tareas.

La propuesta didáctica está formada por una secuencia de tres tareas y un taller inicial (llamada Tarea inicial), estas tareas fueron diseñadas a la luz del ETM y permitirán alcanzar el objetivo general de la investigación.

A continuación, se presenta en la Tabla 2 el diseño de la propuesta didáctica:

Tabla 2

Diseño de la propuesta didáctica

Tareas	Número de ítems	Objetivo de cada tarea
Tarea inicial	No tiene ítems	Familiarizar a los estudiantes con las herramientas de GeoGebra.
Tarea 1	4	Realizar la construcción de un par triángulos con el uso de GeoGebra, interactuar con las herramientas de GeoGebra, comprender la semejanza de triángulos y el criterio lado-lado-lado de la semejanza.
Tarea 2	2	Identificar y comprender la semejanza de dos triángulos haciendo uso del criterio lado-ángulo-lado.
Tarea 3	1	Reconocer y aplicar el uso de los criterios de semejanza de triángulos en un problema de contexto.

En seguida, se presenta la organización de la secuencia didáctica, así como también la estructura de cada tarea y el objetivo por la cual está propuesta cada una de ellas.

Tarea 1: Esta tarea (ver Anexo A) presenta 4 ítems y tiene como objetivo realizar una construcción de triángulos en un ambiente tecnológico como GeoGebra, en el cual se proporcionan pasos para lograr construir lo solicitado, además para la identificación y la comprensión de la semejanza de los triángulos se debe explorar la relación que cumplen los lados de los triángulos para formalizar el criterio **lado-lado-lado** y propiedades relacionadas al objeto matemático en mención.

En el **ítem a** se propone una exploración respecto a la forma que tienen los triángulos construidos en las indicaciones de la tarea. Por otro lado, en el **ítem b** se solicita la identificación y justificación de lados paralelos usando las herramientas de GeoGebra, mientras que en el **ítem c** se formula una pregunta respecto a la relación que cumplen los lados paralelos identificados, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra, así como también se propone una interacción con los dos triángulos en el sentido de modificar las medidas de sus lados y arrastrar sus vértices para determinar qué relación cumplen estos lados.

Por último, en el **ítem d** se formula una tarea en la cual se pide describir la relación que existe entre los ángulos opuestos a los lados paralelos y una conclusión global del comportamiento de estos dos triángulos generados.

A continuación, se muestran los ítems de esta tarea 1.

Tabla 3

Ítems de la Tarea 1

Ítems	Enunciados
a	Explore los triángulos ABC y PQR y explique la relación que observa entre ellos.
b	Observe los triángulos ABC y PQR e identifique los pares de lados paralelos. Explique su procedimiento de cómo llegó a la conclusión de que los lados son paralelos.
c	Use las herramientas de GeoGebra y determine la relación entre los pares de lados paralelos de los triángulos ABC y PQR. ¿Qué puede concluir? Después, Cambie la longitud de los lados y posiciones de los vértices de los triángulos ABC y PQR ¿Qué sucede con la relación entre los lados paralelos?
d	Observe qué relación tienen los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos. Después, explique una conclusión general sobre lo que aprecia de los triángulos ABC y PQR.

Trabajo Matemático esperado - tarea 1

A continuación, se presenta el análisis del trabajo matemático esperado por los estudiantes:

Tarea 1- ítem a

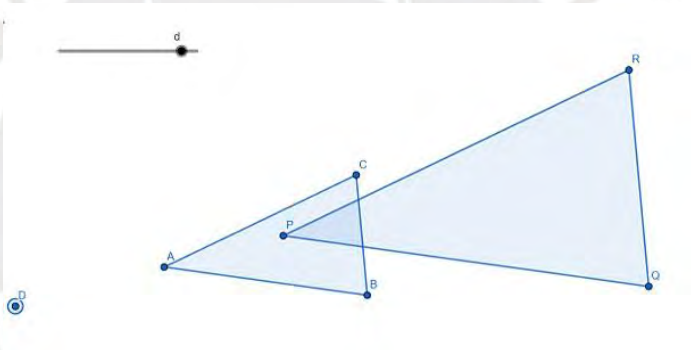
Se espera que los estudiantes distingan que el triángulo PQR se agranda o se reduce respecto al triángulo ABC, y que ambos tienen formas parecidas.

A partir de la representación de los triángulos generados en la construcción con herramientas de GeoGebra, se espera que los estudiantes observen la similitud de las figuras viendo su ampliación y reducción.

En términos del ETM, la representación figural del par de triángulos se consideraría como representamen, el cual lleva al proceso de visualización del plano cognitivo que permitiría deducir que los triángulos se “parecen”; por tanto, se daría la activación de la génesis semiótica. En esa tarea el uso del deslizador y el arrastrar, los vértices del triángulo ABC resulta muy importante para que el estudiante al manipular logre darse cuenta de que siempre las formas de las representaciones son parecidas, algo que a lápiz y papel resulta muy complicado dado que no hay esta interacción con dichas representaciones.

A continuación, se muestra en la Figura 14 la construcción que se espera que realicen los estudiantes para iniciar a desarrollar la Tarea 1.

Figura 14
Construcción esperada de los triángulos solicitados para la Tarea 1



Tarea 1- ítem b

Se espera que los estudiantes indiquen los lados paralelos son los siguientes: $\overline{AC}$ // $\overline{PR}$, $\overline{AB}$ // $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{QR}$ y que, para descubrir los pares de lados paralelos, hagan uso del punto D ya que al mover dicho punto puedan observar por ejemplo que $\overline{PQ}$ se corta con los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, pero nunca se corta con el lado $\overline{AB}$ y así sucesivamente para los otros pares de lados paralelos.

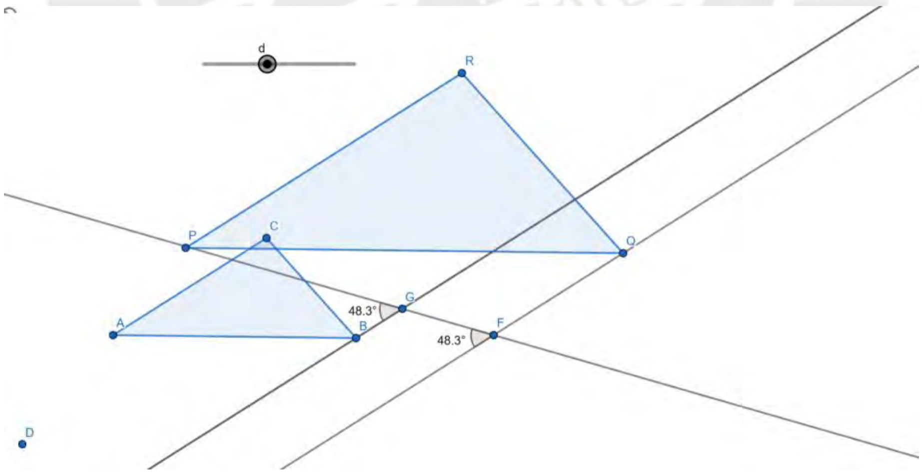
En esta parte de la tarea, para identificar los lados paralelos, se espera que los estudiantes interactúen con las herramientas de GeoGebra, específicamente con las herramientas *Paralela, Recta* y *Medir Ángulo* justificando su respuesta con aspectos teóricos relacionados a la definición de paralelismo y ángulo entre rectas paralelas, se espera que tracen, por ejemplo, una recta paralela al lado AC que pase por el punto B y otra recta paralela al lado PR que pase por Q y por último trazar una recta secante a ambas rectas trazadas con el fin de que al medir los ángulos entre dichas rectas paralelas con la recta secante, estos ángulos obtenidos sean congruentes.

En términos del ETM, se activaría la génesis instrumental al utilizar las herramientas *Paralela, Recta* y *Medir Ángulo,* los cuales se considerarían como artefactos digitales y con ello mediante un proceso de construcción permite obtener rectas paralelas, secantes y medidas de ángulos entre rectas. Además, las representaciones de las rectas trazadas y las medidas de los ángulos obtenidos serían tomados como representamen, el cual llevaría a que se realice un proceso de visualización que permite la identificación de la congruencia de los ángulos entre las rectas, lo que origina la activación de la génesis semiótica. Por último, se espera la activación de la génesis discursiva al justificar el paralelismo entre los lados de ambos triángulos mediante un proceso de prueba, dado que se estaría tomando como referencial teórico a la definición de paralelismo entre dos rectas o segmentos al formar el mismo ángulo con una misma recta secante a ambas. La activación de éstas tres génesis daría origen a la activación de los tres planos verticales, el plano Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

En la figura 15 se muestra las acciones que se espera que realicen los estudiantes para la Tarea 1 – ítem b.

Figura 15

Acciones esperadas de la tarea 1 – ítem b



Tarea 1- ítem c

Para este ítem se espera que los estudiantes encuentren una relación numérica entre los pares de lados paralelos como, por ejemplo:

$$\frac{AC}{PR} = 0.56 \qquad \frac{AB}{PQ} = 0.56 \qquad \frac{BC}{QR} = 0.56$$

Y con ello, que determinen que el valor numérico de la división de las medidas de los tres pares de lados paralelos, es la misma.

Luego para la segunda parte de este ítem, al arrastrar, por ejemplo, el vértice A, identifiquen que cambia la medida de los lados $\overline{AC}$,$\overline{AB}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PQ}$ y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{QR}$ se mantienen constantes, pero~~,~~ la relación entre los pares de lados paralelos se mantiene iguales (el estudiante podría escribir sus cálculos obtenidos al interactuar en GeoGebra).

Además, al usar el deslizador observen que cambia la longitud de los lados del triángulo PQR y si bien el valor de la relación cambia, sigue siendo la misma respecto a los pares de lados paralelos (los estudiantes podrían escribir sus cálculos obtenidos al interactuar en GeoGebra).

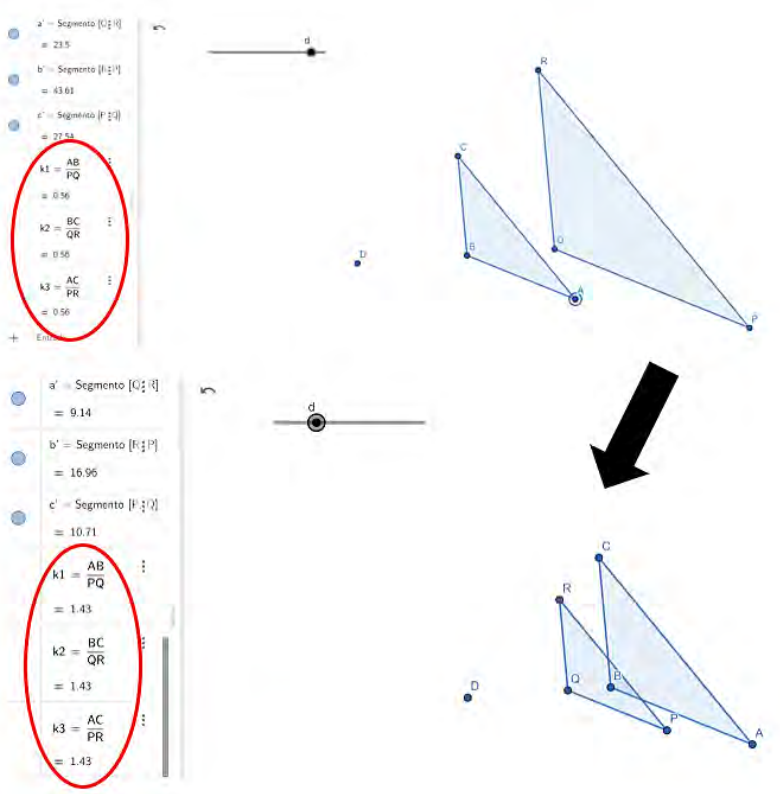
En resumen, independientemente de cómo cambie las dimensiones de los lados de los triángulos, se espera que los estudiantes identifiquen que las relaciones de los tres pares de lados paralelos tienen el mismo valor numérico~~,~~ es decir, que existe una constante de proporcionalidad entre las medidas de los pares de lados paralelos resaltando la importancia de GeoGebra al interactuar mediante el deslizador las representaciones de los triángulos. Posteriormente en la formalización de la definición de la semejanza de los triángulos se les nombrará a estos lados, homólogos o correspondientes.

En esta parte de la tarea, se espera que los estudiantes hagan uso de las herramientas de GeoGebra para determinar la medida de los lados de los triángulos o para determinar las razones de las medidas de dichos lados y con ello identificar una igualdad de razones. También, al arrastrar los vértices o al hacer uso del deslizador para modificar las formas, la medida de los lados o la razón entre los lados paralelos se espera que los estudiantes identifiquen que las razones entre los tres pares de lados paralelos que siguen siendo iguales.

A continuación, en La Figura 16 se muestra las acciones esperadas por parte de los estudiantes en GeoGebra para la Tarea 1 – ítem c.

Figura 16

Acciones esperadas en la tarea 1 – ítem c



Bajo los términos del ETM, se daría la activación de la génesis instrumental al usar la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto y con ello realizar un proceso de construcción que permitiría obtener las razones entre los lados paralelos. Además, al usar el deslizador o al hacer uso de la herramienta arrastre tomados como artefactos digitales que permitirían mediante un proceso de construcción obtener nuevos valores numéricos de las medidas de los lados y nuevos valores de las razones de estos lados, se originaría nuevamente la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización que permitiría la identificación de la igualdad de los valores numéricos de las razones, partiendo de los valores de las razones obtenidas tomadas como representamen, se estaría activando la génesis semiótica. Esto último, originaría la activación del plano vertical Semiótico - Instrumental. Se resalta la importancia de las herramientas de GeoGebra dado que favorece al cálculo de las razones entre la medida de los lados paralelos, incluso los estudiantes pueden apoyarse de una calculadora para poder realizar estos cálculos. El uso de estas herramientas es indispensable dado que, al realizarlo a lápiz y papel sería muy complicado que los estudiantes logren darse cuenta de que independientemente de cómo se modifiquen las representaciones de los triángulos se mantiene una constante de proporcionalidad.

Tarea 1- ítem d

Para este ítem, se espera que los estudiantes determinen que cuando midan los ángulos que se oponen a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{PR}$, puedan observar que los ángulos miden igual, y que de la misma forma ocurre para los ángulos que se oponen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ y para $\overline{BC}$ y $\overline{PR}$.

Luego como conclusión, que logren observar que los triángulos tienen una forma parecida ya que tienen los mismos ángulos y, además:

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

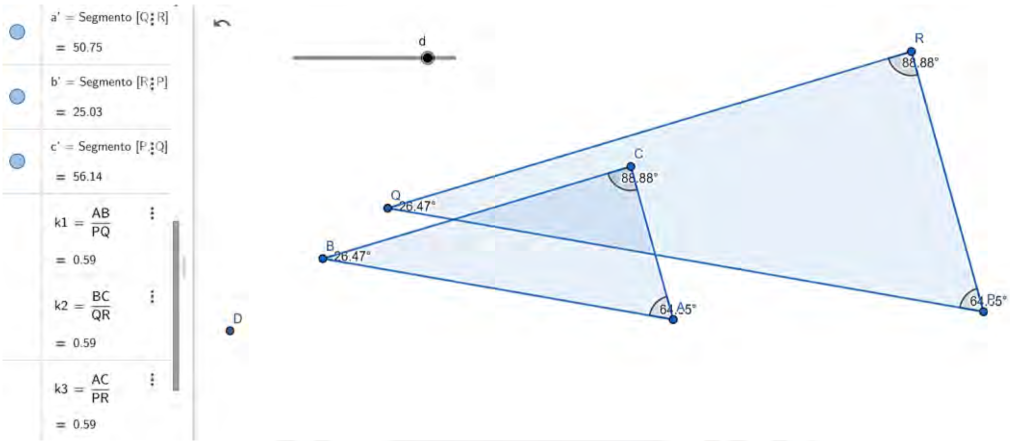
En esta parte de la tarea, se espera que los estudiantes hagan uso de la herramienta *Medir Ángulo* y con ello poder determinar la congruencia entre los ángulos que se oponen a los lados paralelos correspondientes. Además, se espera que interactúen con los triángulos de tal manera que los valores de las medidas de los lados, razones entre paralelas y las medidas de los ángulos determinados varíe y con ello identificar qué relaciones cumplen estos elementos para poder así dar una conclusión en el cual se indique que los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos son congruentes y que las razones de éstos tres pares de lados es la misma, y así poder iniciar el proceso de la formalización del concepto de la semejanza de triángulos y el criterio lado-lado-lado. Resulta indispensable que los estudiantes manipulen las representaciones de los triángulos para que logren visualizar la congruencia entre los ángulos que se oponen a los lados paralelos y así obtengan ciertas conclusiones entre las representaciones de los triángulos.

Desde el punto de vista del ETM, al hacer uso de la herramienta *Medir Ángulo* de GeoGebra, esta sería tomada como artefacto digital para el cual mediante un proceso de construcción se determine el valor de los ángulos entre los lados paralelos, dando origen a la activación de la génesis instrumental. Además, serían tomados como representamen los valores de los ángulos obtenidos, y mediante un proceso de visualización se lograría identificar la congruencia de los ángulos mencionados originando así la activación de la génesis semiótica, con ello se activaría el plano vertical Semiótico-Instrumental. También, al interactuar con las herramientas de GeoGebra como deslizador y arrastre tomados como artefactos digitales que permitiría mediante un proceso de construcción, obtener nuevas medidas de los lados, ángulos y nuevos valores de las razones; de estos lados se originaría nuevamente la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización que permitiría la identificación de la igualdad de las razones y medida de ángulos partiendo de los valores de las razones y ángulos obtenidos tomados como representamen. Esto último, origina nuevamente la activación del plano vertical Semiótico - Instrumental.

A continuación, se muestra en la Figura 17 las acciones que se esperan por parte de los estudiantes en GeoGebra.

Figura 17

Acciones esperadas en la tarea 3 – ítem d



Tarea 2: Esta tarea (ver Anexo 2), presenta 2 ítems y tiene como objetivo identificar y explicar la semejanza de dos triángulos a partir de la medida de dos lados de ambos triángulos y el ángulo formado entre ellos, explorando y formalizando el criterio **lado-ángulo-lado.**

En el ítem 1, se propone al estudiante que describa la relación que existe entre los lados de los triángulos y el ángulo formado entre estas. Por consiguiente, en el ítem 2 se propone al estudiante que determine la relación que guardan los triángulos haciendo el uso de las herramientas de GeoGebra con el fin que se reconozca la semejanza de los triángulos mostrados. A continuación, en la Tabla 4 se presentan los ítems de la tarea 2:

Tabla 4

Ítems de la Tarea 2

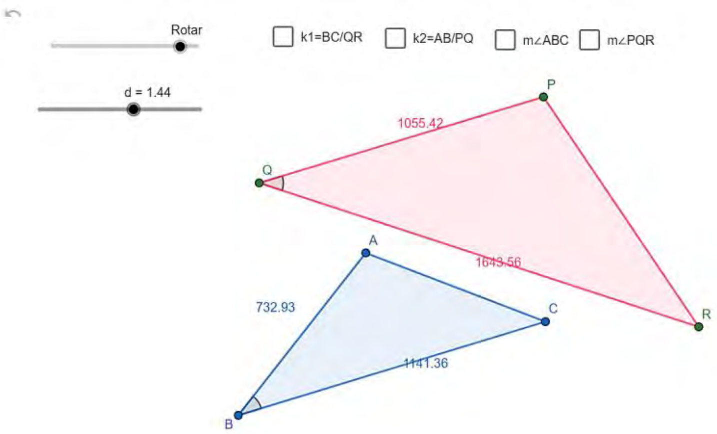
Ítems	Enunciados
a	Indique la relación que observa entre los lados mostrados inicialmente de los triángulos ABC y PQR y el ángulo entre estos lados.
b	Luego, interactuando con las herramientas de GeoGebra para alterar las medidas de los lados, ángulos, orientación, medir más ángulos y lados, etc.… Indique las relaciones que observa y que puede concluir sobre la relación de estos dos triángulos.

Trabajo Matemático esperado - Tarea 2

A continuación, en la Figura 18 se muestra el applet proporcionado para la Tarea 2

Figura 18

Applet proporcionado al ingresar al link de GeoGebra en la Tarea 2



Tarea 2- ítem a

Inicialmente se espera que los estudiantes activen las casillas de control y observen las siguientes igualdades:

$$\mathrm{k1} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{QR}} = 0.69 \qquad \mathrm{k2} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PQ}} = 0.69$$

A partir de ello, que logren indicar que las relaciones entre los lados AB con PQ y BC con QR son las mismas, y entonces decir que estos lados son proporcionales y además que,

$$\mathrm{m}\angle\mathrm{ABC} = \mathrm{m}\angle\mathrm{PQR} = 34.87$$

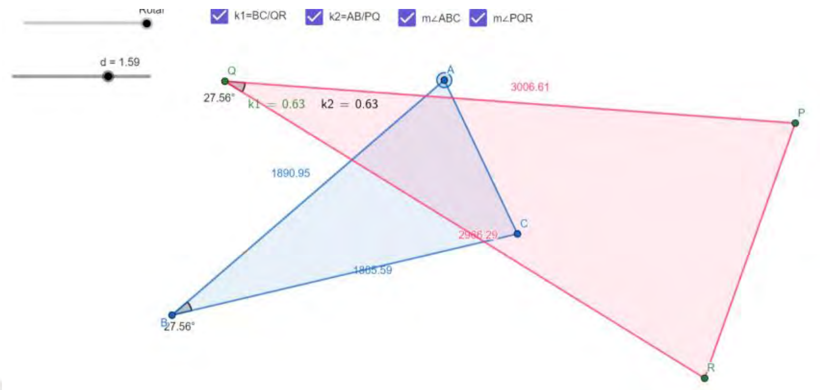
A partir de la representación dada en GeoGebra de los triángulos ABC y PQR, se espera que los estudiantes hagan uso de las casillas de control mostradas en el Applet y con ello reconocer la proporcionalidad de los lados de los triángulos y la congruencia de los ángulos PQR y ABC.

Bajo la perspectiva del ETM, al hacer uso de las casillas de control, tomados como artefactos digitales mediante un proceso de construcción, se lograría determinar las razones entre las medidas de los lados de los triángulos y el ángulo determinado por dichos lados activando la génesis instrumental. Además, a partir de la representación de los triángulos, tomados como representamen mediante un proceso de visualización, se afirmaría la igualdad de las razones y la congruencia entre los ángulos, así se activaría la génesis semiótica; con lo mencionado anteriormente, se propiciaría la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Por último, al concluir que los lados son proporcionales dicha afirmación se justificaría mediante un proceso de prueba teniendo como referencial la definición proporcionalidad de lados, originando la activación de la génesis discursiva. Todo lo anterior, daría origen a la activación de los tres planos verticales: Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

En la Figura 19 se muestra las acciones esperadas en GeoGebra para la Tarea 2 – ítem a.

Figura 19

Acciones esperadas de la Tarea 2- ítem a



Tarea 2- ítem b

Para este ítem se espera que los estudiantes al arrastrar los vértices del triángulo ABC y rotar las figuras, observen que la relación entre los lados sigue siendo la misma y el ángulo comprendido entre esos lados cambia de medida, pero sigue siendo el mismo para ambos triángulos.

Además, cuando hace uso del deslizador logren darse cuenta de que el valor de la razón de los lados cambia, pero siguen teniendo la misma relación. Luego cuando miden los otros ángulos se tiene $\mathrm{m}\angle\mathrm{QPR} = \mathrm{m}\angle\mathrm{BAC} = 97.49°$ y $\mathrm{m}\angle\mathrm{ACB} = \mathrm{m}\angle\mathrm{PRQ} = 54.34°$. Además, al medir los lados AC y PR obtengan la siguiente igualdad:

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{QR}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{PR}} = 0.63$$

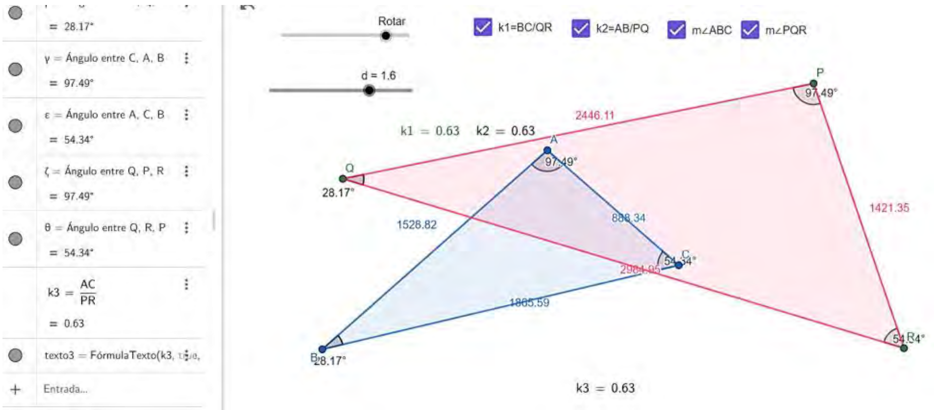
Entonces, con ello concluir que los triángulos ABC y PQR son semejantes ya que tienen lados proporcionales y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

Al partir de la representación de los triángulos ABC y PQR, se espera que los estudiantes hagan uso de las herramientas de GeoGebra para medir los demás ángulos, los lados restantes, encontrar la relaciones entre los otros pares de lados, alterar las medidas de los lados y ángulos interiores de los triángulos, la orientación de los mismos con el fin de determinar la proporcionalidad de los lados y, la congruencia entre los ángulos que se oponen a los lados proporcionales para reconocer la semejanza ya sea por definición o por el criterio lado-lado-lado aprendido en la primera tarea.

A continuación, en la Figura 20 se muestran las acciones esperadas en GeoGebra por parte de los estudiantes para la Tarea 2 – ítem b.

Figura 20

Acciones esperadas en la Tarea 2 - ítem b



Bajo los términos del ETM, al hacer uso de las herramientas de GeoGebra como arrastre y deslizadores, tomados como artefactos digitales, se lograría obtener nuevas medidas de los elementos mostrados en los triángulos mediante un proceso de construcción activando la génesis instrumental. También, mediante un proceso de visualización se determinaría que se sigue manteniendo la igualdad entre las razones, entre las medidas de los lados de los triángulos y la congruencia entre los ángulos determinados por estos lados, originando la génesis instrumental; con lo mencionado se estaría dando origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Luego, al usar las herramientas de GeoGebra como *Medir Lado, Medir Ángulo*, etc. tomados como artefactos digitales, mediante un proceso de construcción se lograría determinar la medida de los otros elementos de los triángulos mostrados originando nuevamente la activación de la génesis instrumental. Asimismo, mediante un proceso de visualización se determinaría la proporcionalidad de los otros lados y la congruencia de los ángulos interiores restantes partiendo de la representación de los dos triángulos, tomados como representamen. Por último, se justificaría la semejanza de los dos triángulos mediante un proceso de prueba teniendo como referencial la definición de semejanza o el criterio lado-lado-lado, propiciando la activación de la génesis discursiva. Todo lo mencionado daría origen a la activación de los tres planos verticales, plano Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo.

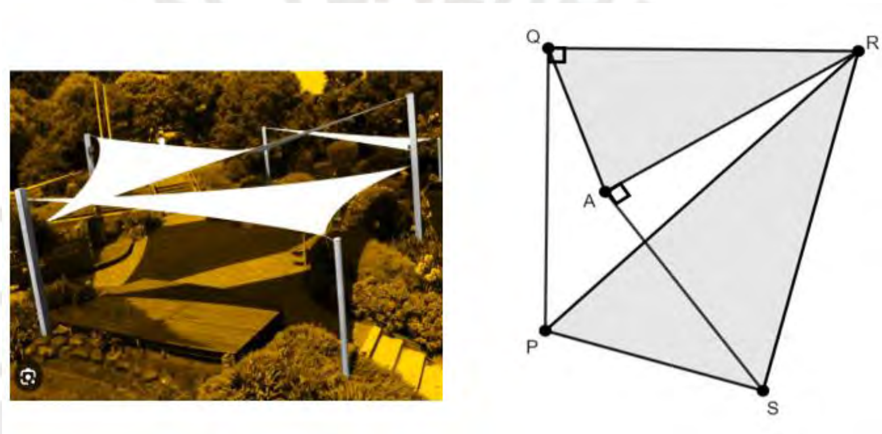
En esta tarea, se destaca la utilidad de GeoGebra como herramienta didáctica, ya que facilita a los estudiantes la identificación de relaciones entre los elementos de los triángulos, tales como la congruencia entre los ángulos correspondientes y la proporcionalidad entre los lados homólogos. Además, mediante la interacción con las representaciones dinámicas, los estudiantes pueden observar de forma más clara que, en el caso de la existencia de triángulos semejantes, sus lados son proporcionales.

Tarea 3: Esta tarea (ver Anexo 3) presenta 1 ítem y tiene como objetivo identificar la semejanza de dos triángulos aplicando el criterio lado-ángulo-lado, debido a la proporcionalidad dos lados de ambos triángulos y los ángulos formados entre los lados mencionados, congruentes para llegar a la solución de una situación planteada en un contexto extra matemático y así verificar si los estudiantes lograron comprender y reconocer la semejanza de triángulos o siguen teniendo dificultades con el objeto matemático en estudio.

En la Figura 21 se muestran las representaciones figurales de la Tarea 3.

Figura 21

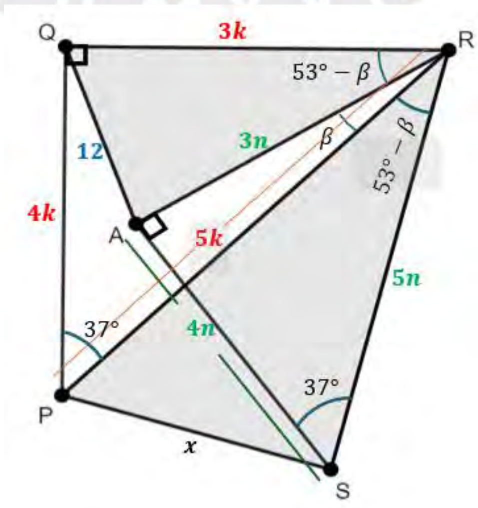
Figuras iniciales de la tarea 3



Se espera que los estudiantes realicen en el gráfico las siguientes acciones mostradas en la figura 22.

Figura 22

Acciones esperadas en la representación figural de la Tarea 3



Además, se presenta las acciones esperadas que conllevan a la solución de la Tarea 3:

$\triangle$ PQR: 37° y 53° , $\triangle$ PQR: 37° y 53°

Hacemos $\beta = m\angle ARP$

Entonces como $m\angle QRP = 53°$ y $m\angle SAR = 53°$, se tiene que $m\angle QRA = 53° - \beta$ y $m\angle PRS = 53° - \beta$

Luego se observa

$$\frac{QR}{AR} = \frac{3k}{3n} = \frac{k}{n}$$

y

$$\frac{PR}{RS} = \frac{5k}{3k} = \frac{k}{n}$$

Entonces $\Delta QRA \sim \Delta PRS$ (lado − ángulo − lado)

$$\frac{3k}{12} = \frac{5k}{x}$$

Luego $3x = 60$

Entonces $x = 20$

Por lo tanto, para que la empresa proceda con la instalación del toldo deben tener como dato que el cable PS debe medir 20 metros.

Partiendo de la representación de los toldos en formas triangulares, se espera que los estudiantes representen de forma correcta de los ángulos mencionados y las medidas proporcionadas en el problema. Luego, se espera que los estudiantes reconozcan la presencia de triángulos rectángulos de 37° y 53° y con ello determinar relación de los lados PQ, QR, PR y RA, AS, RS, también, se completan con variables los ángulos interiores de los triángulos sombreados con el fin de reconocer una semejanza entre estos dos triángulos bajo el criterio lado-ángulo-lado y aplicando la regla de proporciones se llega al resultado solicitado.

Desde el punto de vista del ETM, partiendo de la representación figural de la situación, tomada como representamen, se completaría los datos según las condiciones de la tarea identificando las condiciones y datos que hay que tener en cuenta en el dibujo para poder realizar el proceso de visualización, lo que conlleva a la activación de la génesis semiótica. Además, mediante un proceso de visualización se lograría identificar la presencia de triángulos aproximados conocidos partiendo de la representación figural de la situación, tomada como representamen dando origen nuevamente a la activación de la génesis semiótica. Por consiguiente, se estaría tomando como referencial teórico a las propiedades de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo de 37° y 53°, mediante un proceso de prueba se justificaría las proporciones de los lados PQ, QR, PR y RA, AS, RS dando origen a la activación de la génesis discursiva, y esto conllevaría a la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo. Además, se estaría tomando como artefactos simbólicos a una variable asignada como representación de la medida de un ángulo y tomando como representamen la representación de los ángulos QRP y ARS usando nuevamente el artefacto simbólico representado por un variable, mediante un proceso de construcción se estaría logrando determinar la medida de los ángulos QRA y PRS, activando la génesis instrumental.

Por otro lado, se espera mediante un proceso de visualización tomando como representamen las representaciones figurales de los triángulos, se logre determinar la congruencia de los ángulos QRA y PRS, propiciando la activación de la génesis semiótica. Además, al usar como artefacto a la división entre medidas de los lados QR, AR y PR, RS se lograría determinar mediante un proceso de construcción la igualdad de las razones de los pares de lados mencionados, originando la génesis instrumental. Luego, se justificaría la semejanza de los triángulos QRA y PRS mediante un proceso de prueba, tomando como referencial teórico al criterio lado-ángulo-lado de la semejanza, activando la génesis discursiva; todo lo mencionado estaría dando origen a la activación de los tres planos verticales: Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo. Finalmente, se estaría tomando como artefacto a la división entre los lados correspondientes de los triángulos semejantes para que mediante un proceso de construcción se determine el valor de la medida del segmento solicitado, dando origen a la activación de la génesis semiótica.

3.4 Trabajo Matemático (TM)

A continuación, se analiza el Trabajo Matemático de tres estudiantes de cuarto año de secundaria identificados con los seudónimos como María, Dennis y Kevin, para resguardar su identidad, que fueron seleccionados de acuerdo con criterios como la participación completa de las sesiones tanto virtual como presencial, además de seguir correctamente las indicaciones de las tareas y la entrega en el tiempo indicado de las mismas.

En este análisis, primero se presenta la explicación y descripción de las acciones que los estudiantes realizaron en cada uno de los ítems de cada una de las tareas, luego se identifican y se describen los episodios para su posterior descripción del análisis en términos del ETM.

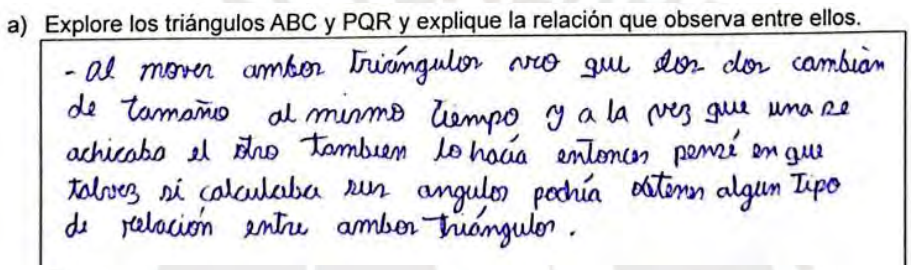
Tarea 1 - etapa arriba-abajo - María

Respecto a la tarea 1, se observa que para el **ítem a,** la estudiante María, luego de construir los triángulos solicitados, explora los mismos haciendo uso del deslizador afirmando que cuando manipula esta herramienta, las dimensiones de ambos triángulos se modifican y con ello aprecia que si uno se reduce el otro también lo hace, además que puede obtener algún tipo de relación entre los triángulos calculando sus ángulos interiores, por ello usó la herramienta *Ángulo*.

A continuación, se muestra, en la figura 23 la repuesta de María para el ítem a de la Tarea 1

Figura 23

Respuesta de María para la Tarea 1-ítem a

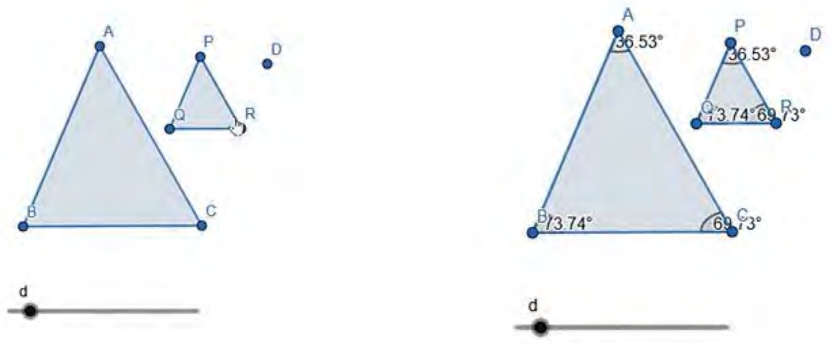

a) Explore los triángulos ABC y PQR y explique la relación que observa entre ellos.

- al mover ambos triángulos veo que los dos cambian de tamaño al mismo tiempo y a la vez que uno se achicaba el otro tambien lo hacía entonces pensé en que talvez si calculaba sus angulos podría obtener algun Tipo de relación entre ambos triángulos.

Asimismo, en la Figura 24 se muestra las acciones de María en GeoGebra en el desarrollo de la Tarea 1 – ítem a

Figura 24

Acciones de María para la Tarea 1- ítem a

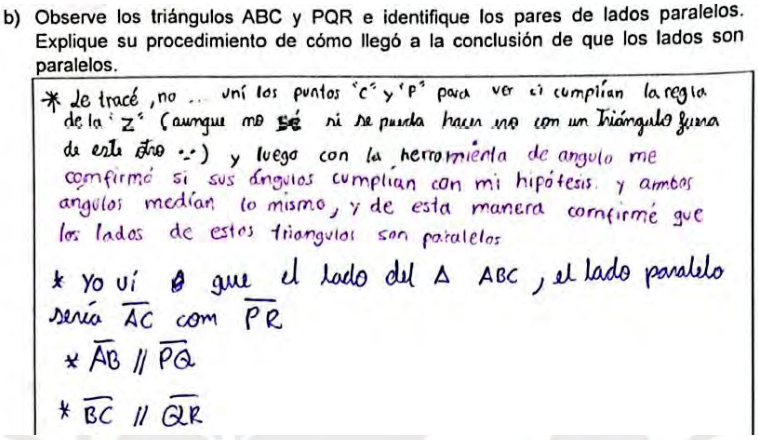


Seguido ello, para el **ítem b**, María une los puntos C y P de ambos triángulos haciendo uso de la herramienta *Segmento,* luego mide los ángulos ACP y CPR haciendo uso de la herramienta *Ángulo*, y observa que la medida de dichos ángulos es la misma y con ello confirma que los lados AC y PR son paralelos, dado que cumplen el teorema de ángulos alternos internos que la estudiante llamó “la regla de la Z”. A partir de esa justificación, indica que, aunque no realizó el proceso anterior para los otros lados, deduce que los otros pares de lados paralelos son AB con PQ y BC con QR.

En la siguiente figura 25 se muestra la respuesta de María para el ítem b de la Tarea 2.

Figura 25

Respuesta de María para la Tarea 1- ítem b



b) Observe los triángulos ABC y PQR e identifique los pares de lados paralelos. Explique su procedimiento de cómo llegó a la conclusión de que los lados son paralelos.

* Le tracé, no... uní los puntos "C" y "P" para ver si cumplían la regla de la "Z" (aunque no sé ni se pueda hacer eso con un triángulo fuera de este otro ·.·) y luego con la herramienta de angulo me confirmó si sus ángulos cumplían con mi hipótesis. y ambos angulos medían lo mismo, y de esta manera confirmé que los lados de estos triangulos son paralelos

* Yo ví que el lado del Δ ABC, el lado paralelo sería $\overline{AC}$ con $\overline{PR}$

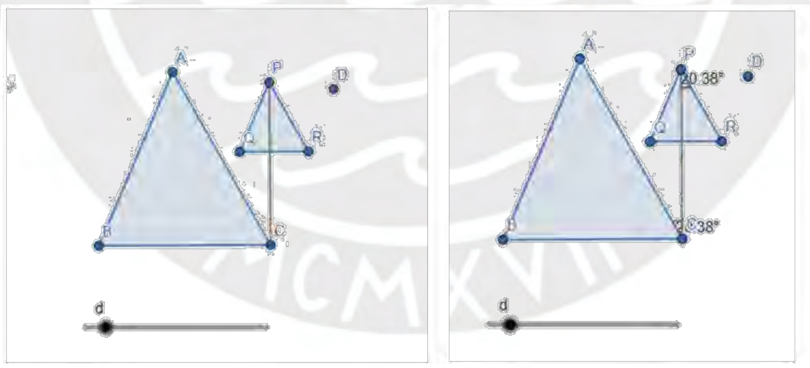
* $\overline{AB} // \overline{PQ}$

* $\overline{BC} // \overline{QR}$

Además, se muestra en la Figura 26 las acciones de María en el desarrollo del ítem b de la Tarea 2 en GeoGebra.

Figura 26

Acciones de María para la Tarea 1 - ítem b

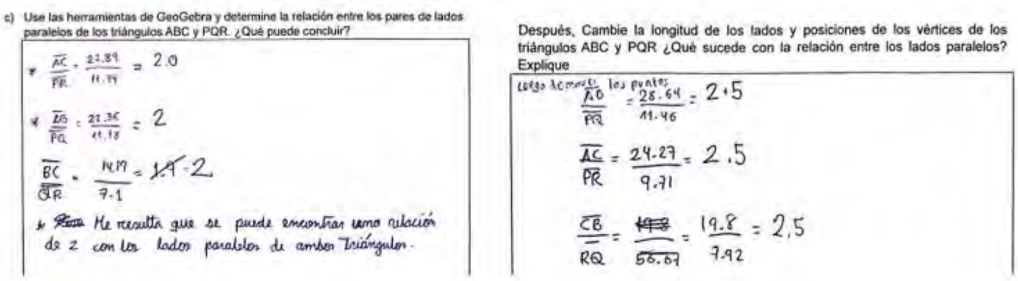


Respecto al **ítem c**, María usa la herramienta *Ángulo*, para medir nuevamente los ángulos interiores de ambos triángulos, luego hace uso del deslizador para agrandar las dimensiones de los triángulos, además con la herramienta *Distancia o Longitud* mide los lados de ambos triángulos y traza el segmento BP y realizando el mismo proceso que el ítem anterior, verifica que los lados AB y PQ son paralelos. Luego, a partir de los valores de las medidas de los lados de ambos triángulos y de los pares de lados paralelos identificados, la estudiante divide las medidas de los tres pares de lados paralelos haciendo uso de la calculadora, de donde obtiene que los resultados de cada una de esas divisiones es la misma e igual a 2.

A continuación, en la figura 27 se muestra la respuesta de María en el ítem c de la Tarea 1.

Figura 27

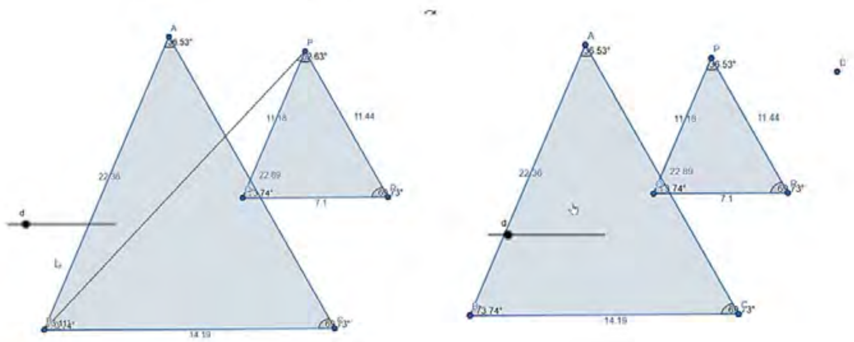
Respuesta de María para la Tarea 1 - ítem c



Así pues, se muestra en la figura 28 las acciones de María para el desarrollo de la Tarea 1- ítem c para su posterior análisis en la perspectiva de la teoría del ETM.

Figura 28

Acciones de María en la Tarea 1- ítem c



Luego, María manipula las representaciones de los triángulos moviéndolos de posición, arrastrando los vértices A, B y C indicando lo siguiente: *"Como yo moví cada punto era para ver si cambiaba en algo en sus medidas, entonces vi que cada lado cambiaba su medida a medida, que yo iba moviendo cada punto. Entonces, quise probar si esas medidas cambiaban también en su relación. Es por eso que decidimos poner los lados paralelos sobre el otro lado paralelo de otro triángulo para ver si cumplían la misma relación que antes me había resultado."* A partir de la manipulación de las representaciones de los triángulos, María observa, describe y divide nuevamente los valores numéricos de las medidas de los pares de lados paralelos, obteniendo que cada división le da como resultado 2,5 indicando que la relación cambió, pero que entre ellas mismas se mantiene igual dado que antes tenían una relación de 2 y ahora de 2,5 tal y como se muestra en esta transcripción de un fragmento de la entrevista:

María: Aparte de sus medidas, bueno, yo veo que también la relación cambió.

Investigador: ¿La relación cambió?

María: Sí.

Investigador: ¿Y se mantienen distintas, iguales?

María: Ha cambiado, ha cambiado.

Investigador: ¿Cambia?

María: Sí. O sea, las relaciones no son iguales. No, ya no son iguales.

Investigador: ¿Pero entre ellas mismas?, porque acá ellos se ven que son iguales, ¿no?

María: Sí, entre ellas mismas, sí, tienen una misma relación de 2.5, y acá, bueno, me salió que todos tenían una relación de 2. Pero nada más esto.

Por último, en el **ítem d**, luego de estar manipulando la representación de los triángulos ABC y PQR, María indica que ambos triángulos tienen los mismos ángulos y a pesar de que las medidas de los lados paralelos van cambiando, estos lados siguen manteniendo una relación, y con lo mencionado justifica que los triángulos son semejantes. Se muestra la transcripción de un fragmento de la entrevista:

María: Mi conclusión general es que veo que ambos triángulos, como tienen sus ángulos iguales, pero con la medida de sus ángulos paralelos distintas, yo digo que estos triángulos son semejantes.

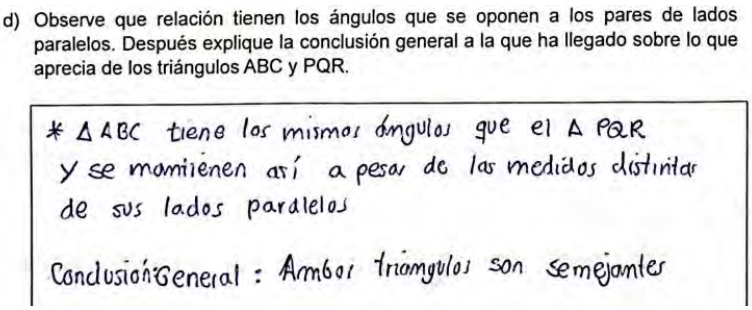
Investigador: ¿Y por qué dices que son semejantes?

María: Bueno, anteriormente por la razón y ahora que veo, también por los ángulos que son iguales.

A continuación, en la figura 29 se muestra la respuesta de María para el ítem d de la Tarea 1 indicando su conclusión general, luego de interactuar con las representaciones de los triángulos en GeoGebra.

Figura 29

Respuesta de María para la Tarea 1-ítem d



d) Observe que relación tienen los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos. Después explique la conclusión general a la que ha llegado sobre lo que aprecia de los triángulos ABC y PQR.

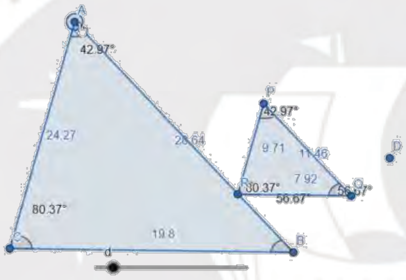
* ∆ ABC tiene los mismos ángulos que el ∆ PQR y se mantienen así a pesar de las medidas distintas de sus lados paralelos

Conclusión General : Ambos triángulos son semejantes

Asimismo, se muestra la figura 30 se muestran las acciones realizadas por María para la Tarea 1 – ítem d en GeoGebra.

Figura 30

Acciones de María para la Tarea 1-ítem d



A partir de las acciones realizadas por María, se identifica los siguientes **episodios para la Tarea 1** mostrados en la Tabla 5.

Tabla 5

Episodios identificados para María en la Tarea 1

Ítem	Episodios	Acciones
a	E1: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra.	Uso del deslizador. Medida de los ángulos interiores de ambos triángulos.
b	E2: Identificación de rectas paralelas.	Unión de los puntos C y P. Medida de los ángulos ACP y CPR. Uso del teorema de ángulos alternos-internos.

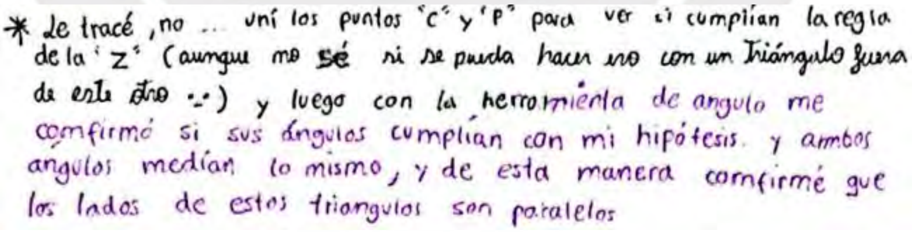
c	E3: Cálculo de las razones entre lados paralelos.	Medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Uso del deslizador. Medida de los lados de los triángulos ABC y PQR. Trazo del segmento BP. División de las medidas de los pares de lados paralelos.
	E4: Conclusión sobre el comportamiento de las relaciones entre los pares de lados paralelos	Arrastre de los vértices del triángulo ABC. División de los pares de lados paralelos. Comparación de las dos razones obtenidas de los pares de lados paralelos.
d	E5: Conclusión y justificación sobre las formas de los triángulos ABC y PQR	Arrastre de los vértices del triángulo ABC. Uso de la noción de semejanza de triángulos.

Con relación al **análisis de la circulación del TM de María en E1**, partiendo de la representación de los triángulos ABC y PQR que María toma como representamen, hace uso de la herramienta *Deslizador*, que lo toma como artefacto digital y mediante un proceso de construcción al interactuar con dicha herramienta, obtiene nuevas dimensiones de los lados de este par de triángulos, dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego a partir de éstas representaciones que los toma como representamen y mediante un proceso de visualización, describe que los triángulos cambian de dimensiones y que la reducción de las dimensiones de uno de ellos influye en la reducción de las dimensiones del otro, originando la activación de la génesis semiótica, con lo mencionado se origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, parte de ese argumento para buscar obtener algún tipo de relación entre los triángulos; María activa su referencial que la lleva a obtener la medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR mediante un proceso de construcción tomando como artefacto digital a la herramienta *Ángulo* de GeoGebra, originando nuevamente la activación de la génesis instrumental. La interacción con las representaciones de los triángulos mediante los artefactos digitales, como el deslizador y la herramienta *Ángulo* resulta importante para que María empiece a determinar ciertas relaciones entre estas representaciones.

En **E2,** María parte de la representación de los triángulos ABC y PQR, tomados como representamen e identifica los vértices C y P mediante un proceso de visualización, luego toma como referencial teórico el teorema de los ángulos alternos-internos y esto genera que María mediante un proceso de construcción obtenga el segmento CP, al tomar como artefacto digital a la herramienta *Segmento*, lo que conlleva a la activación de la génesis instrumental. Luego, al usar la herramienta *Ángulo*, como artefacto digital, obtiene mediante un proceso de construcción las medidas de los ángulos ACP y CPR, lo que origina nuevamente la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización a partir de los valores de las medidas de los ángulos mencionados tomados como representamen, determina que los ángulos tienen la misma medida, activando la génesis semiótica, esto activa el plano vertical Semiótico-Instrumental y a partir de ello, tomando como referencial teórico el teorema de los ángulos alternos internos, justifica mediante un proceso de prueba que los lados AC y PR son paralelos, dando origen a la activación de la génesis discursiva, por lo cual en esta parte del trabajo matemático de María se está activando el plano vertical Instrumental-Discursivo, pues el software permitió mediante una construcción de segmentos y ángulos, una nueva representación de la figura apoyando el proceso de prueba. Además, se observa la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo dado que se valida la prueba del paralelismo entre los lados AC y PR, usando la representación de las figuras (las medidas de los ACP y CPR) y el teorema de los ángulos alternos-internos, evidenciado en su respuesta escrita en la ficha como se muestra en la Figura 31.

Figura 31

Justificación de María para el paralelismo entre los lados AC y PR en la Tarea 1


* Le tracé, no ... uní los puntos "C" y "P" para ver si cumplían la regla de la "Z" (aunque no sé si se pueda hacer eso con un Triángulo fuera de este otro ·.·) y luego con la herramienta de angulo me comfirmó si sus ángulos cumplian con mi hipótesis. y ambos angulos medían lo mismo, y de esta manera comfirmé que los lados de estos triangulos son paralelos

En este episodio fue importante para María el uso de artefactos digitales como las herramientas *Segmento* y *Ángulo,* dado que fueron necesarias para ella al querer determinar el paralelismo entre los lados de los triángulos apoyado de un conocimiento matemático como el teorema de los ángulos alternos internos.

Respecto a **E3**, a partir de la representación de los triángulos ABC y PQR que María toma como representamen, obtiene la medida de los ángulos interiores, nuevas dimensiones de los lados de los triángulos ABC y PQR mediante un proceso de construcción al tomar como artefactos digitales a las herramientas *Ángulo*, *Deslizador* y *Distancia o Longitud* respectivamente, activando la génesis instrumental. Además, María toma como referencial teórico el teorema de los ángulos alternos internos para la verificación del paralelismo entre los lados AB y PQ (dado que en el episodio anterior sólo verificó para un par de lados), hace que María mediante un proceso de construcción obtenga el segmento BP, tomando como artefacto digital la herramienta *Segmento*, lo que conlleva a la activación de la génesis instrumental. Y aunque no lo describe, se infiere que realizó el mismo proceso que en el episodio anterior.

Luego, tomando como representamen las medidas de los pares de lados paralelos, describe las medidas de éstos mediante un proceso de visualización, dando origen a la activación de la génesis semiótica. Sumado a ello, toma como artefacto a la calculadora para que mediante un proceso de construcción obtenga la razón de los tres pares de lados paralelos originando la activación de la génesis instrumental y a partir de los valores obtenidos, que se tomaron como representamen, describe mediante un proceso de visualización que los pares de lados paralelos cumplen con una "relación de 2", activando nuevamente la génesis semiótica, de esta manera se activa el plano vertical Semiótico-Instrumental.

Para el **E4**, a partir de la representación de los triángulos ABC y PQR, que María toma como representamen, toma como artefacto simbólico a los vértices del triángulo ABC para que mediante un proceso de construcción se determine nuevas dimensiones de los lados del par de triángulos al arrastrar dichos vértices, lo que conlleva a la activación de la génesis instrumental y a partir de los valores de los lados, que se toman como representamen describe que al arrastrar cualquiera de los vértices del triángulo ABC las medidas van cambiando, dando origen a la activación de la génesis semiótica, lo mencionado anteriormente da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Posteriormente al querer determinar si la relación se sigue manteniendo igual, toma como artefacto a la calculadora para que mediante un proceso de construcción obtenga el valor de las razones de los tres pares de lados paralelos, activando la génesis instrumental y a partir de los valores de las razones obtenidas, tomadas como representamen se describe mediante un proceso de visualización que la relación cambia de valor respecto a la primera obtenida pero que entre los tres pares de lados paralelos sigue siendo igual, activando la génesis semiótica; con ello se origina nuevamente la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. En este episodio, podemos apreciar que María no usa como artefactos a las herramientas de cálculo en GeoGebra, sino utiliza la calculadora como artefacto para determinar las razones de las medidas entre los lados paralelos.

Respecto al **E5**, María parte de la representación de los triángulos ABC y PQR que los toma como representamen y considera como artefacto simbólico a los vértices del triángulo ABC para que, mediante un proceso de construcción se determine nuevas dimensiones de los lados del par de triángulos al arrastrar dichos vértices, lo que conlleva la activación de la génesis instrumental. Luego, mediante un proceso de visualización al identificar la igualdad de la medida de los ángulos interiores a partir de que toma como representamen las representaciones de los triángulos ABC y PQR, origina la activación de la génesis semiótica. Además, toma como referencial teórico la definición de la semejanza de los triángulos para justificar mediante un proceso de prueba que los triángulos ABC y PQR son semejantes, originando la activación de la génesis discursiva. A partir de ello, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental, dado que se identifica la igualdad de la medida de ángulos con las distintas representaciones de los triángulos que se generan al arrastrar los vértices.

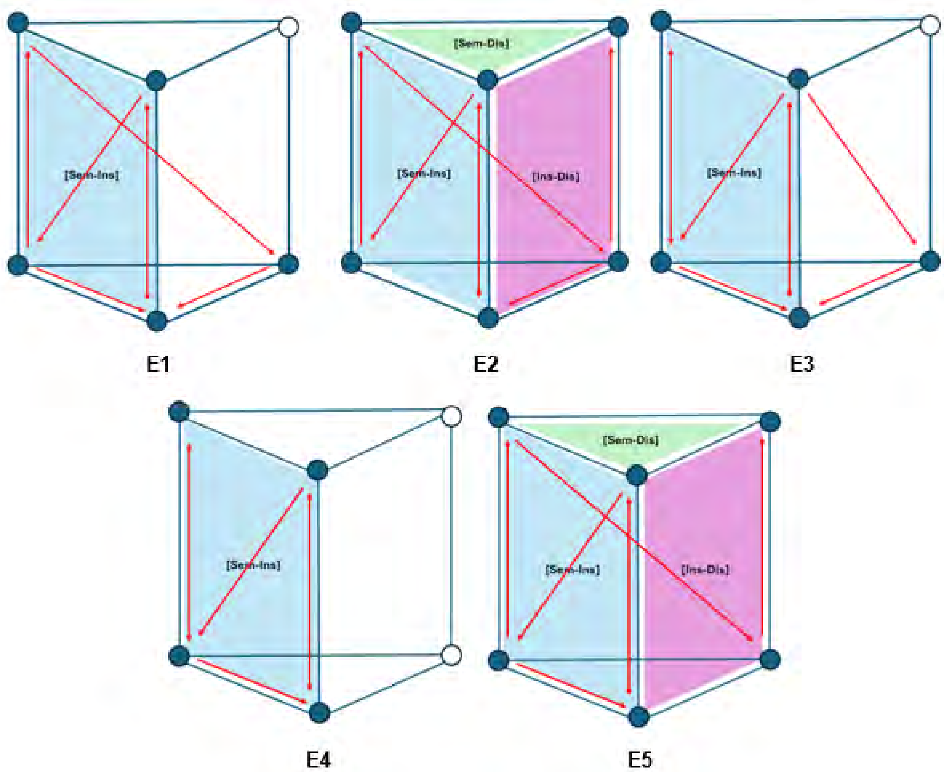
Asimismo, se observa que se valida la semejanza de los triángulos haciendo uso del software al obtener distintas representaciones de los triángulos, cuando se arrastran los vértices lo que apoya al proceso de prueba, de esta manera se activa el plano vertical Instrumental-Discursivo. También, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo dado que se valida la prueba de la semejanza de los triángulos usando la representación de las figuras (las medidas de los ángulos interiores) y los criterios de la semejanza.

Tarea 1 - etapa abajo-arriba - estudiante María

Se presenta en la Figura 32, la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 1, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 32

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 1 para María



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de María para la Tarea 1, se puede observar que se involucra en todo momento a los artefactos digitales como deslizadores, calculadora, herramienta segmento, herramienta ángulo, y simbólicos como los vértices de los triángulos, entre otros que hace favorecer la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental, ya que este plano se activa en los cinco episodios de la Tarea 1, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionando con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen. El plano Instrumental-Discursivo se activa en los episodios **2** y **5**, pues involucran la génesis instrumental y discursiva, dado que se va desarrollando un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, como lo son el teorema de los ángulos alternos-internos y la definición de semejanza, que para llegar a las mencionadas deducciones se va construyendo progresivamente mediante artefactos como las herramientas paralela, ángulo y la calculadora (para determinar las igualdad de la razones entre los lados paralelos). Cabe resaltar también que el plano Semiótico-Discursivo se activa en los episodios **2** y **5**.

En relación con los paradigmas del trabajo matemático de María para esta tarea, se puede observar que para la justificación del paralelismo entre los lados de ambos triángulos y la semejanza entre los triángulos ABC y PQR, hace uso de un sistema de axiomas incompleto, y estas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica por el cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII).** Además, al argumentar ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración, haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

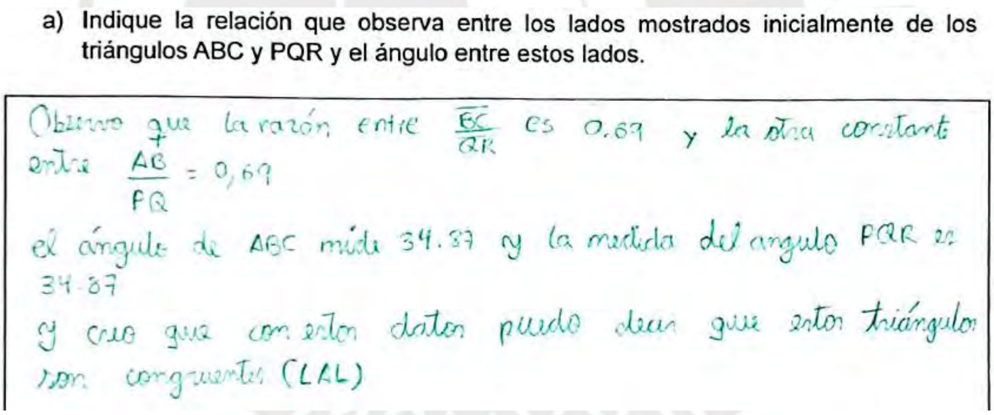
Tarea 2 - etapa arriba-abajo - estudiante María

Con relación a esta tarea, en el **ítem a**, María manipula las casillas de control proporcionadas en el applet de GeoGebra y con ello describe en la ficha el valor de las razones de los lados BC, QR y AB, PQ, también describe el valor de las medidas de los ángulos ABC y PQR. A partir de que notó que las razones obtenidas eran iguales a 0.69 y las medidas de los ángulos mencionados también tenían la misma medida, concluye que los triángulos ABC y PQR son congruentes bajo el criterio lado-ángulo-lado.

En la Figura 33 se muestra la respuesta de María para la Tarea 2 – ítem a.

Figura 33

Respuesta de María en la Tarea 2-ítem a



a) Indique la relación que observa entre los lados mostrados inicialmente de los triángulos ABC y PQR y el ángulo entre estos lados.

Observo que la razón entre $\frac{\overline{BC}}{\overline{QR}}$ es 0.69 y la otra constant entre $\frac{AB}{PQ} = 0,69$

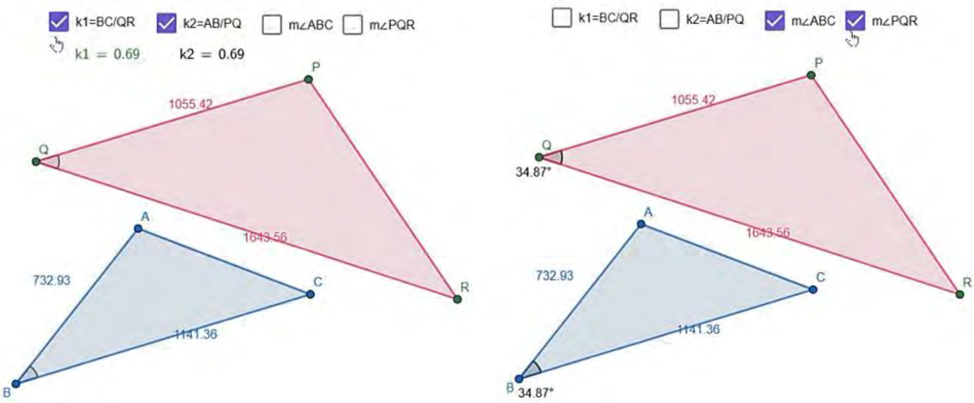
el ángulo de ABC mide 34.87 y la medida del angulo PQR es 34.87

y creo que con estos datos puedo decir que estos triángulos son congruentes (LAL)

Por otro lado, en la Figura 34 se presentan las acciones realizadas por María en GeoGebra para la Tarea 2-ítem a.

Figura 34

Acciones de María para la Tarea 2-ítem a

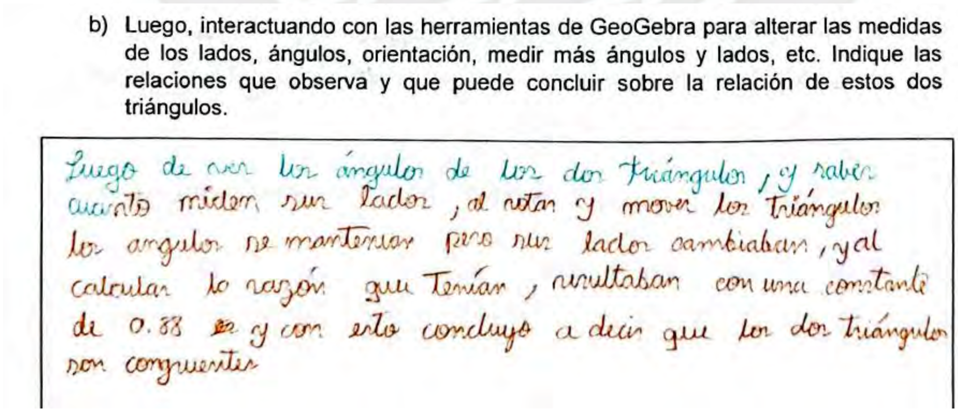


Luego, para el **ítem b**, mide las lados y ángulos restantes, además usa el deslizador y la herramienta *Rotar* para cambiar la orientación y la medida de los lados y ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Luego, hace uso de las herramientas de GeoGebra para determinar la razón entre las medidas de los tres pares de lados AB con QP, AC con PR y BC con QR obteniendo como resultado 0.88 para cada una de las razones, indicando que es una constante a partir de estos valores obtenidos y las medidas de los ángulos interiores de los triángulos, María concluye indicando que los triángulos son congruentes, tal y como lo indicó en el primer ítem de esta tarea.

En la Figura 35 se muestra la respuesta de María para la Tarea 2 – ítem b.

Figura 35

Respuesta de María en la Tarea 2-ítem b



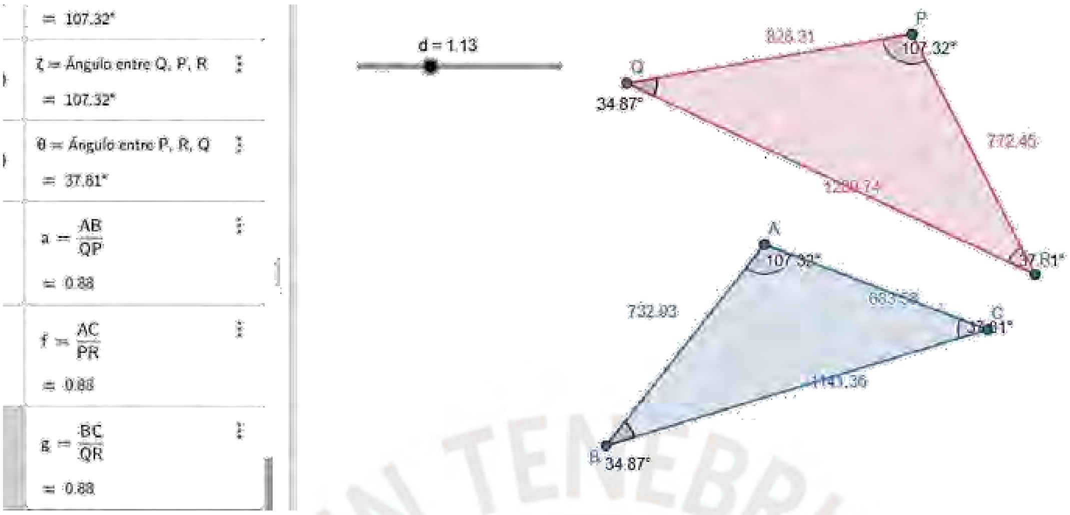
b) Luego, interactuando con las herramientas de GeoGebra para alterar las medidas de los lados, ángulos, orientación, medir más ángulos y lados, etc. Indique las relaciones que observa y que puede concluir sobre la relación de estos dos triángulos.

Luego de ver los ángulos de los dos triángulos, y saber cuanto miden sus lados, al rotar y mover los triángulos los angulos se mantenían pero sus lados cambiaban, y al calcular la razón que Tenían, resultaban con una constante de 0.88 y con esto concluyo a decir que los dos triángulos son congruentes

También, se muestra en la Figura 36 las acciones que realizó María para la Tarea 2-ítem b en GeoGebra.

Figura 36

Acciones de María para la Tarea 2-ítem b



A partir de las acciones realizadas por María, se identifica los siguientes episodios para la Tarea 2 mostrados en la Tabla 6.

Tabla 6

Episodios identificados para María en la Tarea 2

Ítem	Episodios	Acciones
a y b	E1: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra	Uso de las casillas de control. Uso de un criterio de la congruencia de triángulos. Medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Medida de los lados de los triángulos ABC y PQR.
b	E2: Conclusión y justificación sobre las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR	Uso del deslizador. Uso de la herramienta *Rotar*. Cálculo de las razones entre los lados homólogos de los triángulos ABC y PQR. Uso de la noción de la congruencia de triángulos.

Para el **análisis de la circulación del TM de María en E1**, a partir de la representación de los triángulos ABC y PQR, que toma como representamen, hace uso de las casillas de control como artefactos digitales para que mediante un proceso de construcción obtenga los valores tanto de las razones de los lados BC con QR y AB con PQ, así como también el valor de la medida de los ángulos ABC y PQR, dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego toma como representamen el valor de las razones y medidas obtenidas para que posteriormente mediante un proceso de visualización logre reconocer igualdades, originando la activación de la génesis semiótica, esto hace que se origine la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. El uso que da María al artefacto digital como las casillas de control, evidencia la importancia de las herramientas digitales para determinar la relación numérica que existe en los lados de los triángulos ABC y PQR para que la estudiante ya pueda tener un indicio del tipo de triángulos que se le está proponiendo.

Luego, María toma como referencial teórico el criterio lado-ángulo-lado de la congruencia de triángulos, aunque incorrectamente para justificar mediante un proceso de prueba que los triángulos son congruentes dando origen a la génesis discursiva, lo que origina la activación de los planos verticales Semiótico-Discursivo, ya que se valida la prueba de la congruencia de los triángulos (aunque de forma errónea), mediante las representaciones de los triángulos apoyado del criterio lado-ángulo-lado. También se evidencia la activación del plano Instrumental-Discursivo, dado que, al activar las casillas de control, este artefacto permite una construcción en el sentido de que se miden ángulos y se calcula~~n~~ la relación entre lados, que apoya en el proceso de prueba. Además, hace uso de las herramientas *Ángulo* y *Segmento* que los toma como artefactos digitales para que mediante un proceso de construcción obtenga las medidas de los elementos restantes de los triángulos ABC y PQR, originando la activación de la génesis instrumental.

Respecto al **E2** a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, que María toma como representamen, hace uso del deslizador y la herramienta *Rotar*, tomados como artefactos digitales para que mediante un proceso de construcción obtenga nuevas dimensiones de las representaciones de este par de triángulos, dando origen a la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización que parte del representamen tomado de la representación de los triángulos, determine que la medida de los ángulos interiores se mantienen pero la de los lados no, originando así la activación de la génesis semiótica, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Luego, María toma como artefacto a la operación de división que está proporcionada dentro del GeoGebra para que mediante un proceso de construcción, obtenga el valor de las razones entre la medida de los lados AB con PQ, AC con PR y BC con QR dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego mediante un proceso de visualización a partir de los valores obtenidos, que ella tomó como representamen logre describir el valor de las razones obtenidas determinando que existe una igualdad entre ellas, dando origen a la activación de la génesis semiótica y con ello se genera nuevamente la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, toma como referencial teórico la definición de congruencia para justificar que los triángulos ABC y PQR son congruentes mediante un proceso de prueba, dando origen a la activación de la génesis discursiva, cabe resaltar que este referencial lo usa de forma errónea, lo mencionado anteriormente da origen a la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, pues usa la operación de la división dentro de GeoGebra para construir una nueva representación de los triángulos que apoye en el proceso de prueba. Sumado a ello, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, debido a que las representaciones de los triángulos (al observar la medida de los ángulos interiores congruentes y las razones iguales entre la medida de los lados) guían a la estudiante para validar que los triángulos son congruentes.

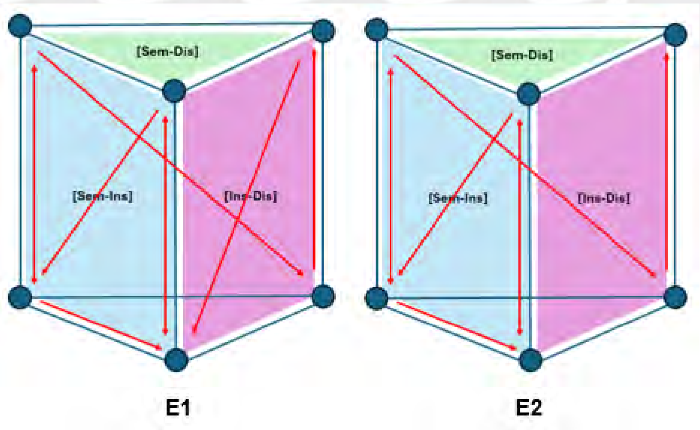
En lo mencionado resalta la importancia del uso de estos artefactos digitales dado que, permitieron a María determinar ciertas características entre los triángulos ABC y PQR tales como la obtención de diferentes medidas de sus lados, así como que logre observar que existe una congruencia entre un par de ángulos de estos triángulos.

Tarea 2 - etapa abajo-arriba - estudiante María

Se presenta en la Figura 37 la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 2, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 37

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 2 para María



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de María en la Tarea 2, se tiene que tanto en el episodio **1** y **2** se activan los tres planos verticales. Además, se puede observar a partir de los diagramas el uso constante del referencial como medio para validar ciertas acciones matemáticas con un sustento teórico, ya sea de la congruencia y semejanza de los triángulos, aunque no del todo correcto. Para esta tarea, se argumenta ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida; es decir, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

Tarea 3 - etapa arriba-abajo - estudiante María

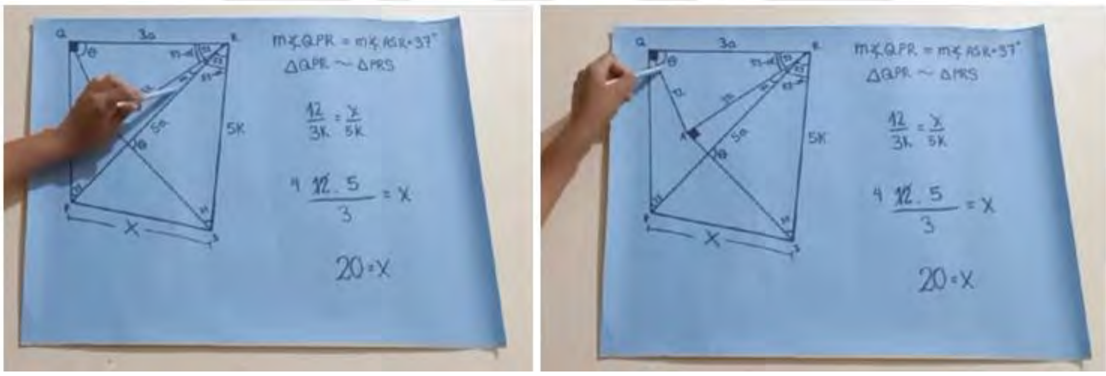
Para la tarea 3, María reconoce los datos del problema y representa el valor numérico de la medida del segmento QA y le asigna una variable "x" a la medida del segmento PS, así como también representa los ángulos QPR y ASR con sus respectivas medidas. Luego, María reconoce la existencia de dos triángulos rectángulos PQR y RAS conocidos de 37° y 53°, y con ello representa las proporciones de los lados de los triángulos mencionados, indicando que tienen las mismas proporciones de 3, 4 y 5 pero le asigna una constante distinta para cada triángulo dado que son dos triángulos distintos, estas constantes son "k" y "a".

Luego, asigna a la medida del ángulo ARP una variable α y con ello indica que las medidas de los ángulos QRA y PRS son las mismas e iguales a 53°- α; por otro lado, asigna a las medidas de dos ángulos con la misma variable θ, afirmando sin ningún sustento del porqué son iguales. En seguida, María indica que hay una semejanza entre los triángulos QPR y PRS, sin indicar el criterio de semejanza. Además, comete un error en la identificación de qué triángulos son semejantes, y a partir de dicho reconocimiento hace uso de la definición de la semejanza para plantear una igualdad de razones en el cual determina el valor de la medida del lado PS.

A continuación, se muestra en la Figura 38 las acciones que realiza María para el desarrollo de la Tarea 3.

Figura 38

Acciones de María para la Tarea 3



A partir de las acciones realizadas por María, en la siguiente tabla, se identifica los siguientes episodios para la Tarea 3.

Tabla 7

Episodios identificados para María en la Tarea 3

Episodios	Acciones
E1: Noción del triángulo rectángulo de 37° y 53°	Identificación de los elementos de la figura. Reconocimiento de los triángulos rectángulos de 37° y 53°. Completitud del ángulo complementario de 37°. Uso de las proporciones del triángulo de 37°y 53°.
E2: Noción de semejanza de triángulos	Asignación con una variable al ángulo ARP. Operaciones entre medidas de los ángulos. Asignación con la variable θ a dos ángulos. Identificación de triángulos semejantes. Cálculo del valor de la medida del lado PS.

Para el **análisis de la circulación del TM de María en E1**, a partir de la representación figural de la tarea 3, que María toma como representamen, completa los datos en la mencionada representación según las condiciones de la tarea, identificando las condiciones y datos y, logra identificar la presencia de triángulos rectángulos aproximados conocidos mediante un proceso de visualización, dando origen a la activación de la génesis semiótica. Seguido de ello, se toma como referencial teórico a las proporciones de un triángulo rectángulo de 37° y 53°, mediante un proceso de prueba se justifica las proporciones de los lados PQ, QR, PR y RA, AS, RS activando la génesis discursiva, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo. Asimismo, toma como artefactos simbólicos a las variables “k” y “a” para que mediante un proceso de construcción represente la medida de los lados de los triángulos PQR y RAS en términos de estas variables, lo que activa la génesis instrumental y con ello se activa el plano vertical Semiótico-Instrumental, pues entra a tallar las representaciones de los triángulos PQR y RAS con el proceso de construcción para representar las medidas de los lados de los mencionados triángulos. Asimismo, se evidencia la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, ya que el uso de las variables “k” y “a” como artefactos simbólicos para representar las medidas de los lados, viene apoyado del sustento teórico respecto a las propiedades de los lados de un triángulo rectángulo de 37° y 53°.

Por último, para el **E2**, a partir de la representación figural del problema, que María toma como representamen, toma como artefacto simbólico a la variable “α” que representa a la medida del ángulo ARP, luego toma como representamen la representación de los ángulos QRP y ARS y, usando nuevamente el artefacto simbólico representado por la variable “α”, mediante un proceso de construcción, logra determinar la medida de los ángulos QRA y PRS al usar la resta de las medidas de los ángulos QRP y ARS con la variable “α” propiciando la activación de la génesis instrumental.

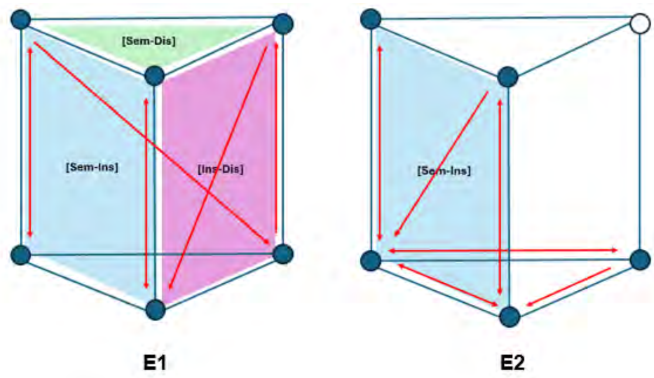
Además, mediante un proceso de visualización en el cual toma como representamen las representaciones figurales de los triángulos QRA y PRS determina la congruencia de los ángulos QRA y PRS, activando la génesis semiótica, esto origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Luego, por un proceso de visualización indica que los triángulos QPR y PRS son semejantes, sin sustentarlo teóricamente y además se observa la existencia de un error en el reconocimiento de la semejanza de los triángulos, desde el punto de vista del investigador, a partir de esto se identifica que María activa un cierto referencial a partir de las representaciones de los triángulos QPR y PRS para poder dar dicha afirmación. Finalmente, identifica los lados correspondientes de los triángulos semejantes identificados partiendo de la representación figural de los triángulos QPR y PRS, que los toma como representamen y considera como referencial a la propiedad de la proporcionalidad de lados en triángulos semejantes; seguido de ello, toma como artefacto a la división entre estos lados correspondientes para que mediante un proceso de construcción se determine el valor de la medida del segmento pedido, dando origen a la activación de la génesis instrumental.

Tarea 3 - etapa abajo-arriba - estudiante María

Se presenta en la Figura 39, la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 3, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 39

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 3 para María



En relación a la descripción global del trabajo matemático de María para la Tarea 3, se observa que en **E1** se activan los tres planos verticales, además en **E1** y **E2** se activa el plano Semiótico-Instrumental, recurriendo constantemente a los representamen y artefactos como las variables, las operaciones entre medidas que hace favorecer para la activación de las génesis semiótica e instrumental, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionando con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen.

Por otro lado, se percibe que activa un cierto referencial dado que se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, como las proporciones de los lados de triángulos rectángulos de 37° y 53°, así como también la definición de semejanza de triángulos, que fue útil para llegar a la determinación de la relación de medidas de ciertos segmentos y aplicar una igualdad de razones para que posteriormente llegue al resultado final, aunque con algunos errores en el manejo del concepto.

En relación con los paradigmas que María prioriza en su trabajo matemático, para la Tarea 3, se puede observar que para la justificación de la relación de la medida de diversos segmentos en la representación figural de la tarea, como lo son las propiedades de los lados de triángulos rectángulos de 37° y 53°(relación de los lados a razón de 3,4 y 5) hace uso de un sistema de axiomas incompletos, y estas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica por el cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII).**

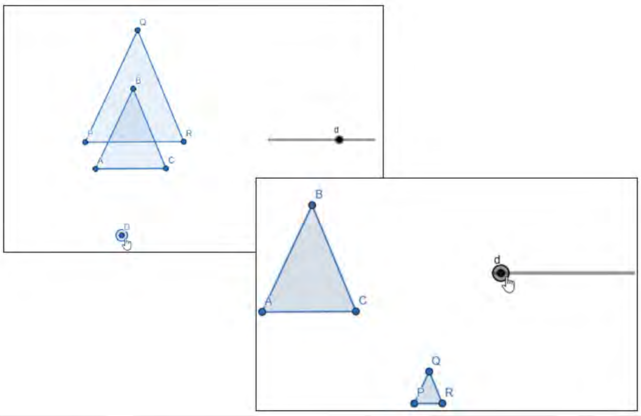
Finalmente, se puede subrayar que justifica ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida, por lo que se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

Tarea 1 - etapa arriba-abajo - Dennis

Respecto a la tarea 1, se observa que para el **ítem a,** el estudiante Dennis luego de haber construido los triángulos solicitados manipula el deslizador, con el cual genera una ampliación o reducción de la representación del triángulo PQR. Además, hace uso del punto exterior D indicando que este punto le ayuda a alejar, juntar o superponer las representaciones de los dos triángulos, tal y como se muestra en la Figura 40:

Figura 40

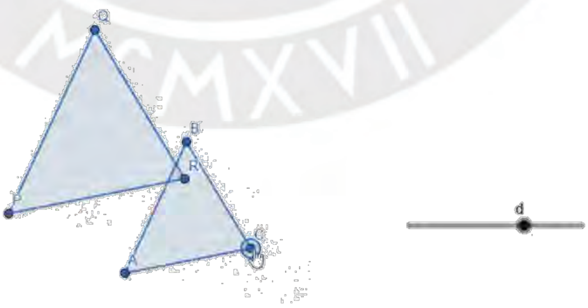
Acciones de Dennis para la Tarea 1-ítem a usando el deslizador y el punto exterior D



De igual forma, manipula el vértice C del triángulo ABC logrando modificar las dimensiones de las representaciones de ambos triángulos indicando que el triángulo ABC puede modificar al triángulo PQR evidenciando dichas acciones realizadas en GeoGebra en la Figura 41.

Figura 41

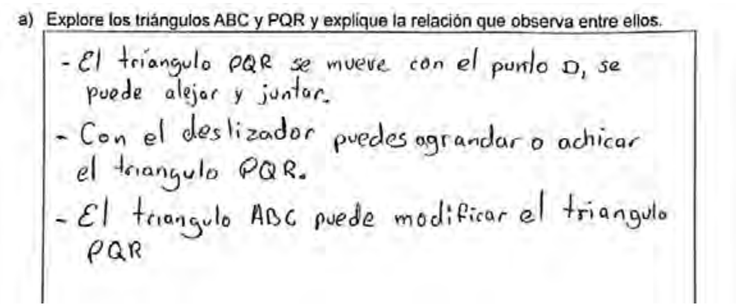
Acciones de Dennis manipulando el vértice C del triángulo ABC logrando modificar la forma de la representación del triágulo PQR



A continuación, en la Figura 42 se muestra la respuesta de Dennis para la Tarea 1-ítem a:

Figura 42

Respuesta de Dennis para la Tarea 1-ítem a

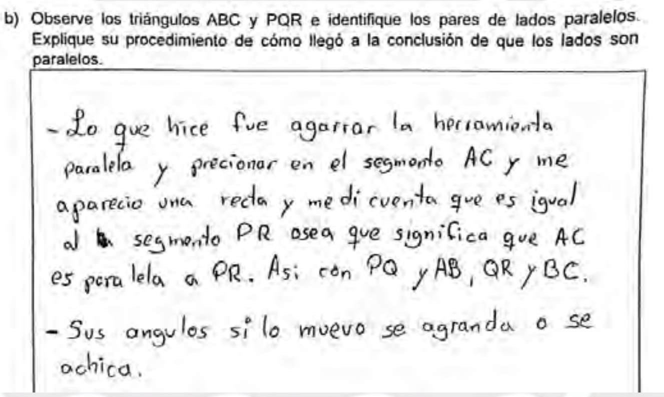

a) Explore los triángulos ABC y PQR y explique la relación que observa entre ellos.

- El triangulo PQR se mueve con el punto D, se puede alejar y juntar.
- Con el deslizador puedes agrandar o achicar el triangulo PQR.
- El triangulo ABC puede modificar el triangulo PQR

Seguido ello, para el **ítem b**, Dennis escribe en la ficha su respuesta como se muestra en la Figura 43:

Figura 43

Respuesta de Dennis para la Tarea 1-ítem b


b) Observe los triángulos ABC y PQR e identifique los pares de lados paralelos. Explique su procedimiento de cómo llegó a la conclusión de que los lados son paralelos.

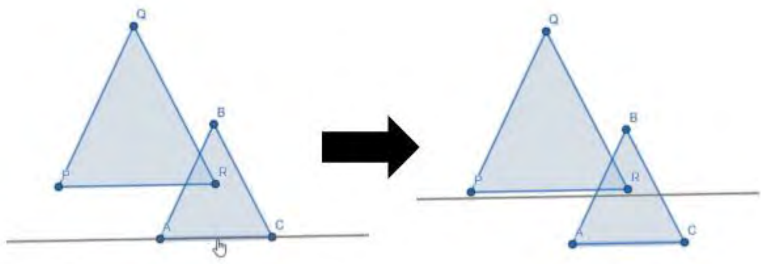
- Lo que hice fue agarrar la herramienta paralela y precionar en el segmento AC y me aparecio una recta y me di cuenta que es igual al segmento PR osea que significa que AC es paralela a PR. Asi con PQ y AB, QR y BC.
- Sus angulos si lo muevo se agranda o se achica.

Para dar la respuesta mostrada en la figura 43, Dennis utiliza la herramienta *Paralela* con el fin de construir una recta paralela al lado AC luego, esta recta la superpone sobre el lado PR e indica que la recta generada es “igual” al lado PR, concluyendo así que el lado AC es paralelo al lado PR. De forma similar, realizó las mismas acciones para justificar el paralelismo entre los lados PQ y AB, QR y BC.

A continuación, en la Figura 44 se muestra las acciones de Dennis en GeoGebra para la Tarea 1-ítem b.

Figura 44

Acciones de Dennis en GeoGebra para la Tarea 1-ítem b



Cabe señalar, que Dennis interpreta el paralelismo entre estas rectas como la igualdad de sus medidas tal y como se muestra en este fragmento de la entrevista:

Dennis: Primero agarré la herramienta de las paralelas, puse en la línea PR y AC, las igualé y me di cuenta de que sí, que serán iguales, ya que los ángulos, los triángulos, las rectas, sí son iguales.

Investigador: Esa interpretación de son iguales, para ti qué significa, ¿qué significa que sean iguales?

Dennis: Que las rectas miden lo mismo, esa es la justificación por la cual se quedan paralelas.

Investigador: Okey

Dennis: Y así fue con los otros también.

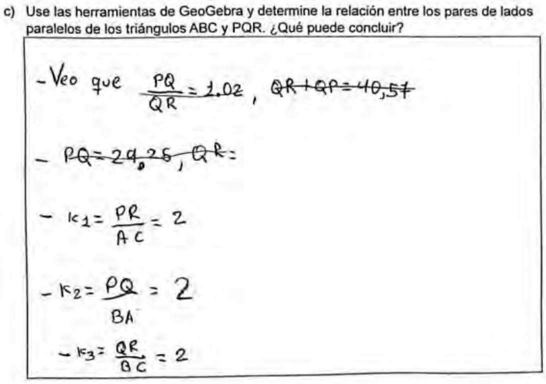
Desde el punto de vista del investigador, a partir de los comentarios de Dennis, se considera que el estudiante confunde el concepto de paralelismo con el de igualdad por diversas posibles razones. Una de ellas podría ser la falta de comprensión conceptual, ya que no logra distinguir claramente que el paralelismo entre rectas o segmentos, implica que estas líneas nunca se interceptan y poseen la misma inclinación, mientras que la igualdad se refiere a una equivalencia entre medidas.

Este error conceptual también podría deberse a que, durante las clases, no han sido distinguidos cuidadosamente ambos términos. Otra posible causa es una transferencia incorrecta de conceptos previos, como haber aprendido anteriormente que dos líneas “iguales” tiene la misma longitud o inclinación, lo cual podría estar influyendo en su noción o idea de paralelismo. Asimismo, podría existir una confusión o mezcla con otros conceptos geométricos; por ejemplo, con las propiedades de los paralelogramos, donde los lados opuestos son paralelos y de igual medida, lo que podría llevar a una generalización incorrecta del concepto de paralelismo.

Por otro lado, se muestra en la Figura 45 la repuesta de Dennis en la ficha para la Tarea 1-ítem c:

Figura 45

Respuesta de Dennis para la Tarea 1-ítem c



c) Use las herramientas de GeoGebra y determine la relación entre los pares de lados paralelos de los triángulos ABC y PQR. ¿Qué puede concluir?

- Veo que $\frac{PQ}{QR} = 1.02$, ~~QR+QP=40,57~~

- ~~PQ=24,25, QR:~~

- $k_1 = \frac{PR}{AC} = 2$

- $k_2 = \frac{PQ}{BA} = 2$

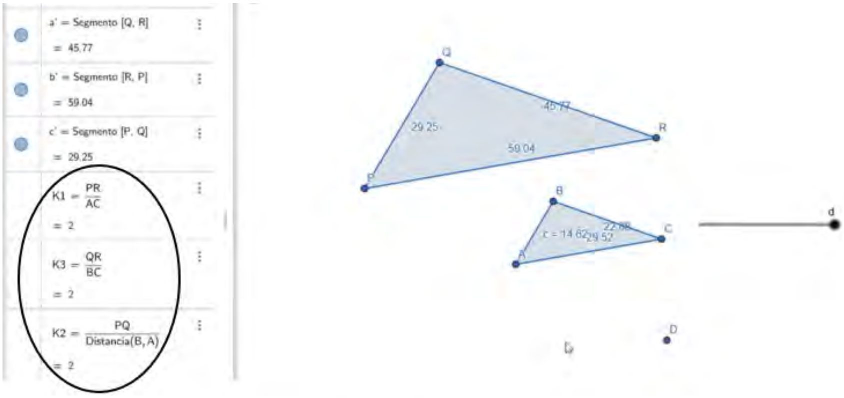
- $k_3 = \frac{QR}{BC} = 2$

Para el **ítem c** el estudiante Dennis mide los lados de los triángulos ABC y PQR usando la herramienta *Distancia o Longitud*, también se observa que hace uso del deslizador y del vértice C para arrastrar dicho vértice alterando las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, posteriormente Dennis calcula las razones entre los pares de lados paralelos usando la división dentro del entorno de GeoGebra obteniendo como resultado 2, por lo que Dennis continúa afirmando que las rectas paralelas son iguales en vez de describir que las divisiones o razones entre estos lados paralelos son iguales; a continuación se muestra un fragmento de la entrevista con relación a la descripción de Dennis respecto a esta parte de la tarea:

> **Investigador:** De esta parte, por ejemplo, cuando tú hiciste las proporciones, calculaste las proporciones de las medidas de los lados paralelos, donde escribiste tus resultados, en esta parte, ahí está, ¿cierto? ¿Qué concluías de esta parte?
>
> **Dennis:** Primero tuve que hallar a las medidas de cada uno y dividirlas, lo dividí y esa fue la medida que me salió. Ahí también me di cuenta de que eran, las paralelas iguales, ya que todos me daban dos.

Figura 46

Acciones de Dennis para el cálculo de las razones entre los lados paralelos



Luego, Dennis hace uso de los vértices del triángulo ABC para cambiar las dimensiones de las representaciones de los triángulos ABC y PQR obteniendo así, nuevas medidas para los lados de los triángulos mencionados, por ello Dennis afirmó que moviendo “C” disminuye-“R”; es decir, observó que cuando arrastra el vértice C, lo que sucede en el otro triángulo es que se jala automáticamente desde el vértice R, logrando así alterar las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR. En seguida, hace uso de la herramienta *Ángulo* para obtener las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y PQR para que luego, nuevamente use los vértices del triángulo ABC tal que al arrastrar dichos vértices se altere las medidas de los ángulos de ambos triángulos pero que siempre van a tener la misma medida comparando cada par de ángulos tomando uno de cada triángulo. Además, Dennis logró apreciar que independientemente de cómo arrastre los vértices para alterar las formas de las representaciones de los triángulos, la división entre los lados paralelos seguirá siendo la misma. Como evidencia se muestra un fragmento de la entrevista:

Investigador: ¿Qué pasa con la relación entre los lados paralelos? Entonces, esto fue lo que tú escribiste; sucede que, si muevo C, se reduce R y así también cuando lo agrando se aumenta. ¿Me puedes explicar un poquito más sobre eso?

Dennis: Bueno, primero agarré uno de los puntos y lo jalé, y me di cuenta de que jalando uno se mueve el otro, y reduciendo uno también se reduce el otro, y a veces se alarga, pues así, así me di cuenta.

Investigador: ¿Y qué pasaba con la relación que tú hallaste? ¿Esta relación que hallaste acá, cambiaba o no cambiaba?

Dennis: Sí, cambiaba, dependiendo de la medida

Investigador: ¿Pero seguían siendo los mismos?

Dennis: Sí, sí.

Investigador: ¿Eso sí te diste cuenta?

Dennis: Sí, yo dependiendo, agarraba un punto, lo agrandaba y lo achicaba, y me di cuenta de que las divisiones eran las mismas de todas las que realicé.

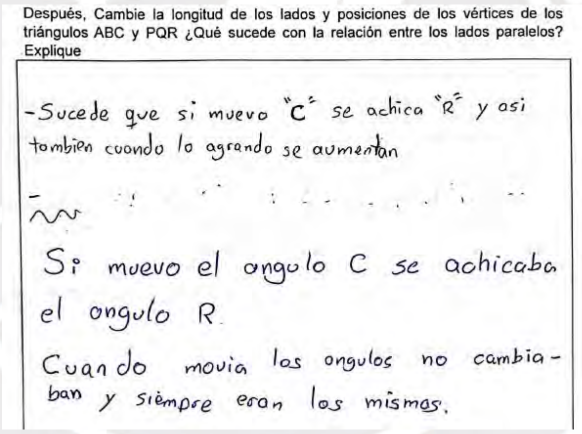
Investigador: Independientemente de cómo tú los modificabas. Correcto. Y la última, bueno, ¿qué relación tiene los ángulos que se oponen a los lados paralelos? Lo que hiciste al final, ¿no? Mediste ángulos por acá.

Dennis: Los ángulos siempre van a ser iguales. Siempre, independientemente de lo que tú hagas. O sea, a esos lados, a estos lados, siempre se oponían los ángulos iguales.

A continuación, se muestra en la Figura 47 la respuesta de Dennis para la Tarea 1 – ítem c.

Figura 47

Respuesta de Dennis luego de interactuar con las herramientas de GeoGebra para la Tarea 1-ítem c


Después, Cambie la longitud de los lados y posiciones de los vértices de los triángulos ABC y PQR ¿Qué sucede con la relación entre los lados paralelos? Explique

-Sucede que si muevo "C" se achica "R" y asi tambien cuando lo agrando se aumentan

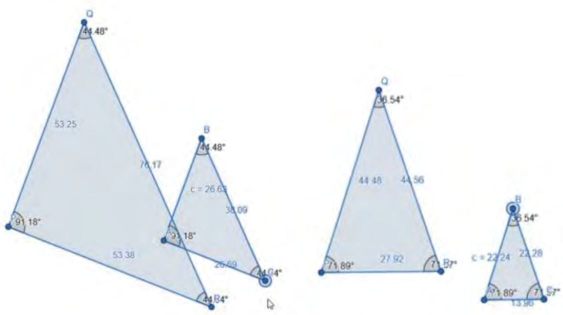
Si muevo el angulo C se achicaba el angulo R.

Cuando movia los angulos no cambiaban y siempre eran los mismos.

Asimismo, en la Figura 48 se muestra las acciones realizadas en GeoGebra por Dennis para esta parte de la Tarea 1-ítem c:

Figura 48

Acciones de Dennis en GeoGebra para la segunda parte de la Tarea 1-ítem c



Por último, para el **ítem d**, Dennis continúa manipulando los vértices del triángulo ABC generando nuevas representaciones de las formas de los triángulos ABC y PQR, concluyendo que al mover o arrastrar cualquier vértice del triángulo ABC hace que las dimensiones del otro triángulo se alteren pero que siempre se mantiene una igualdad en la medida de sus ángulos como, por ejemplo, la medida del ángulo ABC es igual a la medida del ángulo PQR.

En la figura 49, se muestra la respuesta de Dennis para la Tarea 1 – ítem d.

Figura 49

Respuesta de Dennis para la Tarea 1-ítem d

d) Observe que relación tienen los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos. Después explique la conclusión general a la que ha llegado sobre lo que aprecia de los triángulos ABC y PQR.

-Conclui que si mueves el triangulo ABC su angulo puede aumentor o disminuir pero siempre ABC y PQR sus angulos van a ser iguales ∡ABC = PQR∡

También, en la figura 50 se muestra las acciones realizadas por Dennis en GeoGebra para la Tarea 1-ítem d:

Figura 50

Acciones de Dennis en GeoGebra para la Tarea 1-ítem d

A partir de las acciones realizadas por Dennis, se identifica los siguientes episodios para la Tarea 1 (ver Tabla 8).

Tabla 8

Episodios identificados para Dennis en la Tarea 1

Ítem	Episodios	Acciones

a	E1: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra.	Uso del deslizador. Uso del punto exterior D. Uso del vértice C.
b	E2: Identificación y justificación de rectas paralelas.	Trazado de la recta paralela al lado AB. Superposición de la recta paralela trazada sobre el lado PR. Justificación del paralelismo
c	E3: Cálculo de las razones entre lados paralelos.	Medida de los lados de los triángulos ABC y PQR. Uso del deslizador y del vértice C del triángulo ABC. División de las medidas de los pares de lados paralelos.
	E4: Conclusión sobre el comportamiento de las relaciones entre los pares de lados paralelos	Arrastre de los vértices del triángulo ABC. Medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Comparación de las dos razones obtenidas de los pares de lados paralelos.
d	E5: Conclusión y justificación sobre las formas de los triángulos ABC y PQR	Arrastre de los vértices del triángulo ABC. Conclusión de las formas de los triángulos ABC y PQR.

Respecto al **análisis de la circulación del TM de Dennis en E1,** a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que Dennis los toma como representamen, realiza un proceso de construcción al generar nuevas dimensiones de las representaciones de los triángulos ya sean ampliándolos o reduciéndolos, tomando como artefacto al deslizador originando la activación de la génesis instrumental. También, toma como representamen estas nuevas representaciones de los triángulos y mediante un proceso de visualización indica que las dimensiones del triángulo PQR se pueden achicar o agrandar, activando la génesis semiótica, todo lo anterior origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Asimismo, al hacer uso del punto exterior D, que lo toma como artefacto logra posteriormente mediante un proceso de visualización, indica que el triángulo PQR puede alejarse o juntarse con el triángulo PQR a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que Dennis los toma como representamen.

Por último, toma como artefacto al vértice C del triángulo ABC y mediante un proceso de construcción, logra obtener nuevas formas de las representaciones del par de triángulos

ABC Y PQR originando la activación de la génesis instrumental, luego Dennis afirma que el triángulo ABC modifica al triángulo PQR mediante un proceso de visualización a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, que los toma como representamen, esto originó la activación de la génesis semiótica. Por lo mencionado anteriormente, se evidencia que Dennis activó nuevamente el plano vertical Semiótico-Instrumental.

Por otro lado, en **E2** Dennis usa la herramienta *Paralela*, tomándola como artefacto digital y por un proceso de construcción que obtiene una recta paralela al lado AC, activando la génesis instrumental. Luego, a partir de las representaciones de la recta y los triángulos, que lo toman como representamen, hace uso de ésta recta tomándola como artefacto para superponerla sobre el lado PR y con ello, mediante un proceso de visualización indica que la recta trazada es "igual" al lado PR, que podemos tomar como su referencial teórico que se justifica, mediante un proceso de prueba, el paralelismo entre los lados PR y AC, de forma análoga realiza la justificación del paralelismo entre los lados PQ con AB y QR con BC, activando la génesis discursiva, lo que origina que se active el plano vertical Semiótico-Discursivo. También, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental al entrar en juego la verificación, de que una recta se puede superponer a un segmento~~,~~ apoyado en el uso del artefacto digital *Paralela* de GeoGebra. Asimismo, se activa el plano vertical Instrumental-Discursivo debido a la construcción de la recta paralela que brinda una nueva configuración en la representación de los triángulos para el proceso de prueba en la justificación del paralelismo entro los lados mencionados anteriormente. De todo lo mencionado, el uso de la tecnología se resalta en este episodio ya que permitió a Dennis interactuar con las rectas superponiendo una con otra para comprobar que los lados PR y AC son paralelos y así para los otros pares de lados.

En **E3**, para la obtención de medidas de los lados de los triángulos, Dennis usó la herramienta de GeoGebra *Distancia o Longitud,* tomándolos como artefactos digitales y determinó la medida de los lados de los triángulos mostrados mediante un proceso de construcción activando la génesis instrumental. Además, toma como artefactos al deslizador y al vértice C, de tal forma que mediante un proceso de construcción logra obtener nuevas formas del par de triángulos ABC y PQR, originando nuevamente activar la génesis instrumental, y a partir de éste nuevo par de triángulos que son tomados como representamen, hace que Dennis origine la activación de la génesis instrumental pues usó la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto, con ello realizó un proceso de construcción que permite obtener las razones entre los lados paralelos y mediante un proceso de visualización, a partir de los valores de las razones obtenidas tomadas como representamen, permitió que describa dichos valores en la ficha; además de indicar nuevamente de forma errónea, a partir de esos valores que las rectas paralelas son "iguales", propiciando la activación de la génesis semiótica y con ello se logra la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

En **E4**, Dennis toma como artefactos a los vértices del triángulo ABC y mediante un proceso de construcción, logra obtener nuevas dimensiones para los lados de las representaciones del par de triángulos ABC Y PQR, originando la activación de la génesis instrumental; luego al afirmar que cuando arrastra el vértice C lo que sucede en el otro triángulo, es que se jala automáticamente desde el vértice R logrando así alterar las dimensiones de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, lo que conllevó a que se describa que si mueve el vértice “C”, se achica “R”; se evidencia que lo hace mediante un proceso de visualización a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, que los toma como representamen, esto originó la activación de la génesis semiótica y por ende, la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, usa como artefacto digital a la herramienta *Ángulo* y mediante un proceso de construcción se determinó la medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR, originando la génesis instrumental.

Sumado a ello, toma nuevamente como artefacto a los vértices del triángulo ABC de tal manera forma que logra obtener mediante un proceso de construcción nuevas representaciones del par de triángulos al arrastrar los vértices mencionados y luego mediante un proceso de visualización a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, indique que independientemente de cómo se arrastre los vértices o se modifiquen las representaciones de las formas de los triángulos ABC y PQR, la relación entre los lados paralelos sigue siendo la misma y las medidas de los ángulos que se oponen a los lados paralelos también sigue siendo la misma, dando origen a la activación de la génesis semiótica, y así se activa nuevamente el plano vertical Semiótico-Instrumental. A partir de lo mencionado, se determina que el uso de los artefactos digitales hace que Dennis logre descubrir el comportamiento de estos triángulos al interactuar con ellos, lo que origina que se logre comprender más adelante, las propiedades de los triángulos semejantes.

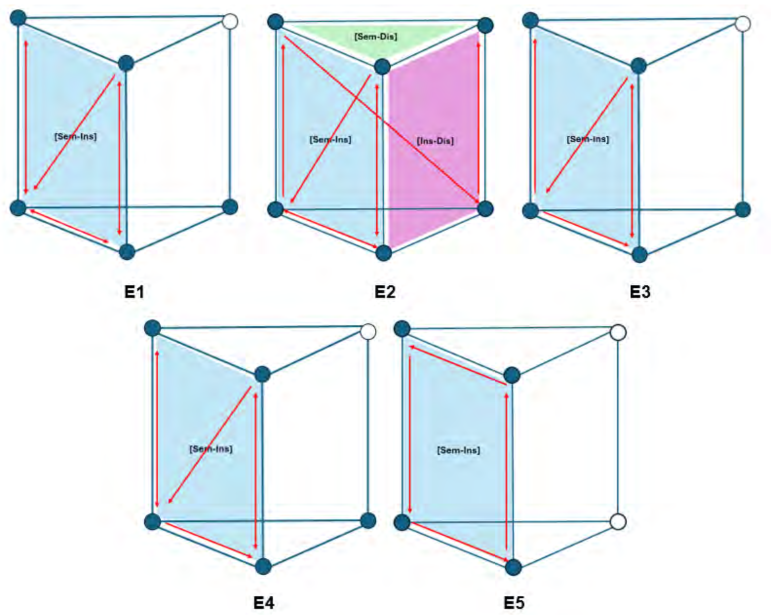
Por último, para **E5** Dennis parte de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que toma como representamen, luego como artefactos a los vértices del triángulo ABC y mediante un proceso de construcción sigue obteniendo nuevas formas de las representaciones del par de triángulos ABC Y PQR, originando la activación de la génesis instrumental para que posteriormente mediante un proceso de visualización, concluya que al alterar la forma de la representación del triángulo ABC hace que las dimensiones del otro triángulo se alteren pero que siempre se mantiene una igualdad con respecto a la medida de sus ángulos interiores, todo ello lo hace partiendo de la representación de los triángulos ABC y PQR, los cuales Dennis los toma como representamen. Lo mencionado anteriormente, evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Tarea 1 - etapa abajo-arriba - estudiante Dennis

Se presenta en la Figura 51 la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 1, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 51

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 1 para Dennis



Con relación a la descripción global del trabajo matemático de Dennis con relación a la Tarea 1, que involucra en todo momento a los artefactos digitales y simbólicos como deslizadores, los vértices de los triángulos, las herramientas *Paralela*, *Medida o Longitud* y *Ángulo*, entre otros que hace favorecer la activación del plano Semiótico-Instrumental, ya que este plano se activa en los cinco episodios de la Tarea 1, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionados con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen. El plano Instrumental-Discursivo se activa en el episodio 2, que involucra la génesis instrumental y discursiva, dado que se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, referente a que las rectas paralelas no se cortan, aunque Dennis interpretó a ésta definición como una igualdad de rectas, esto fue útil para que llegue a la conclusión que los tres pares de lados identificados son paralelos, construyendo progresivamente las rectas paralelas mediante la herramienta *Paralela* y la calculadora del GeoGebra (para determinar las igualdad de la razones entre los lados paralelos). Cabe resaltar, que el plano Semiótico-Discursivo sólo se activa en el episodio 2.

En relación con los paradigmas que prioriza Dennis en su trabajo matemático para esta tarea, se puede observar que, para la justificación del paralelismo entre los lados de ambos triángulos y la relación de las formas de las representaciones de los triángulos, lo hace bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos simbólicos para llegar a una respuesta válida; por ende, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

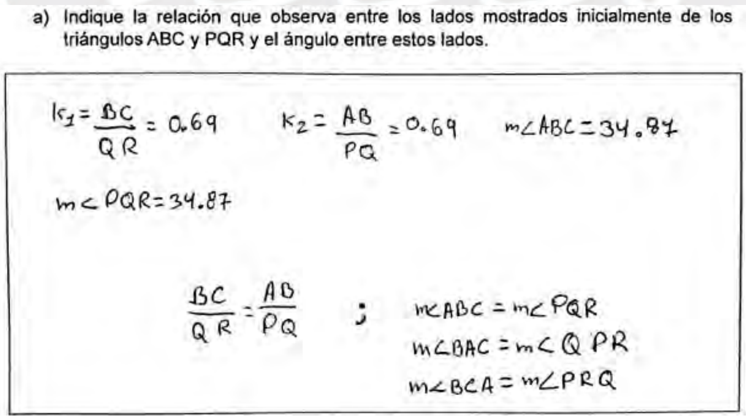
Tarea 2 - etapa arriba-abajo - estudiante Dennis

Respecto a esta tarea, en el **ítem a**, Dennis hace uso de las casillas de control proporcionadas en el applet de GeoGebra y con ello describe en la ficha el valor de las razones de los lados BC con QR y AB con PQ, también describe el valor de las medidas de los ángulos ABC y PQR. A partir de ello, indicó que las divisiones entre determinados lados son iguales y que las medidas de los ángulos ABC y PQR también son las mismas. A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista

> **Investigador:** ¿cómo tú calculaste esto, o qué dedujiste de lo que escribiste del ítem a, tarea 2?
>
> **Dennis:** Primero puse los ángulos y me di cuenta de que la medida del ángulo ABC, es igual a la medida del ángulo PQR. Y así con todos los demás; también, me di cuenta de que dividiendo me daba lo mismo, que dividiendo BC sobre QR me daba lo mismo que dividiendo AB con PR.
>
> A continuación, se muestra en la Figura 52 la respuesta de Dennis para la Tarea 2 – ítem a.

Figura 52

Respuesta de Dennis para la Tarea 2-ítem a



a) Indique la relación que observa entre los lados mostrados inicialmente de los triángulos ABC y PQR y el ángulo entre estos lados.

$k_1 = \frac{BC}{QR} = 0.69$ $k_2 = \frac{AB}{PQ} = 0.69$ $m\angle ABC = 34.87$

$m\angle PQR = 34.87$

$\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$; $m\angle ABC = m\angle PQR$

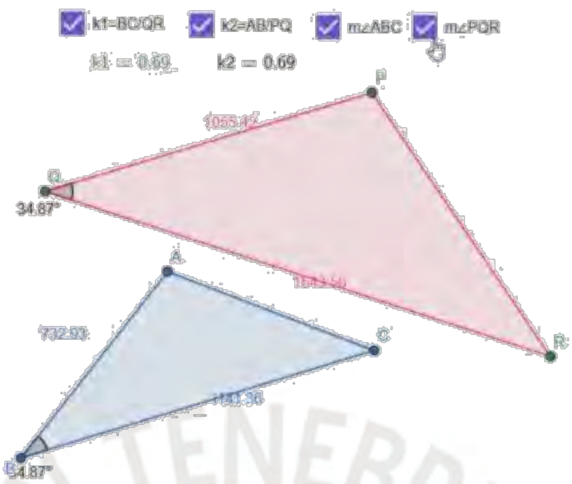
$m\angle BAC = m\angle QPR$

$m\angle BCA = m\angle PRQ$

También, en la Figura 53 presentamos las acciones realizadas por Dennis en GeoGebra para la Tarea 2-ítem a:

Figura 53

Acciones de Dennis en GeoGebra para la Tarea 2-ítem a



Por otro lado, respecto al **ítem b**, Dennis mide los ángulos restantes usando la herramienta *Ángulo* de GeoGebra, además usa el deslizador y la herramienta *Rotar* para cambiar la orientación, la medida de los lados y los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Luego hace uso de los vértices del triángulo ABC, con el fin de seguir interactuando con las representaciones de los triángulos ABC y PQR, con ello indica que independientemente de cómo se muevan o se modifiquen las representaciones de los triángulos ABC y PQR, sus ángulos interiores seguirán siendo iguales y que sus lados nunca serán iguales. Cabe resaltar que Dennis utiliza el término de ángulos iguales en lugar de usar ángulos congruentes. Finalmente, al apreciar que la relación entre los lados AB con PQ y BC con QR siguen siendo iguales, Dennis concluye que los triángulos ABC y PQR son “iguales”, tal y como se muestra en este fragmento de la entrevista:

Investigador: De esa parte, ¿tú qué puedes concluir? Acá escribes, que los triángulos ABC y QPR, sus ángulos siempre son iguales y que no importa si los mueves. Además, indicas que sus lados nunca serán iguales.

Dennis: Dependiendo de si los lados cambian. Los lados nunca son iguales y siempre serán diferentes.

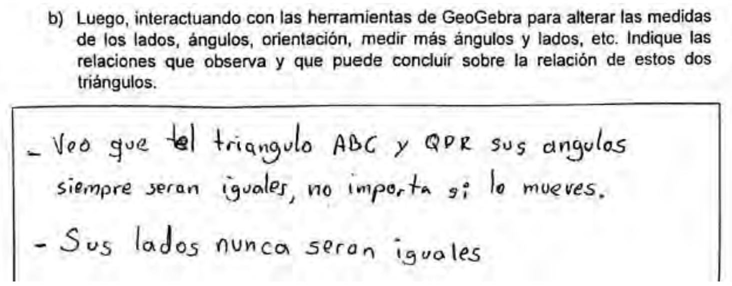
Investigador: ¿Las relaciones entre los lados? ¿Encontraste una relación entre los lados?, ¿encontraste una constante?

Dennis: Las constantes me salían iguales en los dos triángulos. Eso me fijé y hallé que eran iguales. Que los triángulos eran iguales. La conclusión de la última parte era que los triángulos eran iguales.

En la figura 54 se muestra la respuesta de Dennis para la Tarea 2 – ítem b.

Figura 54

Respuesta de Dennis para la Tarea 2-ítem b

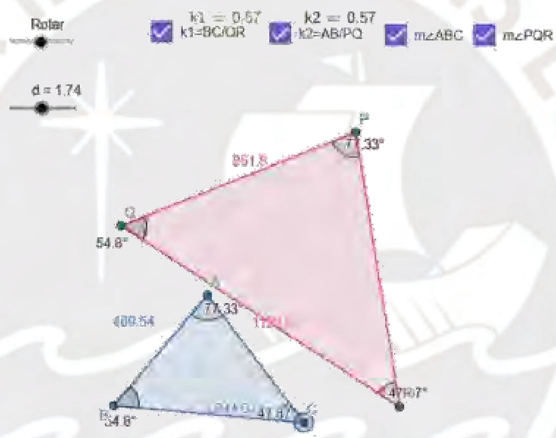

b) Luego, interactuando con las herramientas de GeoGebra para alterar las medidas de los lados, ángulos, orientación, medir más ángulos y lados, etc. Indique las relaciones que observa y que puede concluir sobre la relación de estos dos triángulos.

- Veo que ~~el~~ triangulo ABC y QPR sus angulos siempre seran iguales, no importa si lo mueves.
- Sus lados nunca seran iguales

Asimismo, en la Figura 55 se presentan las acciones realizadas por Dennis para la Tarea 2-ítem b.

Figura 55

Acciones de Dennis en GeoGebra para la Tarea 2-ítem b



A partir de las acciones realizadas por Dennis, se identifican los siguientes episodios para la Tarea 2 mostrados en la Tabla 9.

Tabla 9

Episodios identificados para Dennis en la tarea 2

Ítem	Episodios	Acciones
a y b	E1: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra	Uso de las casillas de control. Medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR.
b	E2: Conclusión y justificación sobre las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR	Uso del deslizador. Uso de la herramienta *Rotar*.

	Uso de los vértices del triángulo ABC. Justificación de las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR.

Para el **análisis de la circulación del TM de Dennis en E1**, a partir de la representación de los triángulos ABC y PQR, que toma como representamen, hace uso de las casillas de control, que los toma como artefactos para que mediante un proceso de construcción obtenga los valores tanto de las razones de los lados BC con QR y AB con PQ, así como también el valor de la medida de los ángulos ABC y PQR, dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego toma como representamen el valor de las razones y medidas obtenidas para que mediante un proceso de visualización reconozca igualdades entre las cantidad halladas, activando la génesis semiótica, esto hace que se origine la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, hace uso de la herramienta *Ángulo* que lo toma como artefacto digital para que, mediante un proceso de construcción obtenga las medidas de los ángulos interiores restantes, originando la activación de la génesis instrumental.

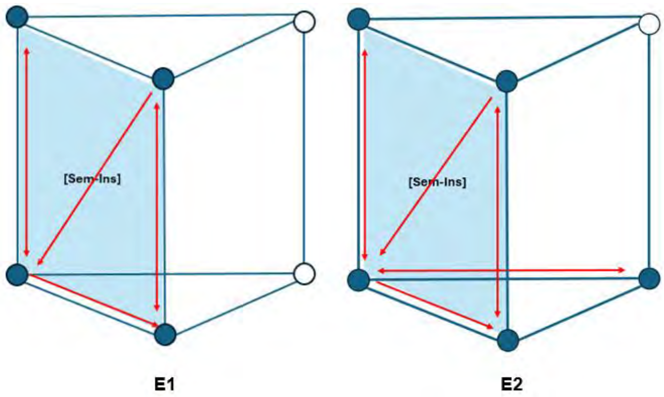
Por otro lado, para **E2** se observa que Dennis a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, que los toma como representamen, hace uso del deslizador, la herramienta *Rotar* y los vértices del triángulo ABC, tomados como artefactos para que mediante un proceso de construcción, obtenga nuevas formas de las representaciones de este par de triángulos, dando origen a la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización que parte del representamen tomado de la representación de los triángulos, determine que la medida de los ángulos interiores se mantiene, así como también las divisiones entre los lados BC con QR y AB con PQ se mantienen constantes, originando así la activación de la génesis semiótica, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Asimismo, a partir de las representaciones de las figuras y los valores obtenidos por Dennis, activa un cierto referencial relacionado al cumplimiento de estas igualdades para afirmar que los triángulos son “iguales” mediante un proceso de visualización, cabe resaltar que esta afirmación la hace de forma errónea.

Tarea 2 - etapa abajo-arriba - estudiante Dennis

Se presenta en la Figura 56, la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 2, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 56

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 2 para Dennis



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de Dennis con relación a la Tarea 2, se tiene que tanto en **E1** y **E2** se activa el plano Semiótico-Instrumental dado que se involucra en todo momento a los artefactos digitales y simbólicos como deslizadores, casillas de control, los vértices de los triángulos, la herramienta *Ángulo*, entre otros que hace favorecer la activación del plano mencionado y para **E2** el uso de un cierto referencial como medio para validar ciertas acciones matemáticas, aunque este sustento Dennis lo usa erróneamente. Para esta tarea, Dennis argumenta ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida; es decir, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

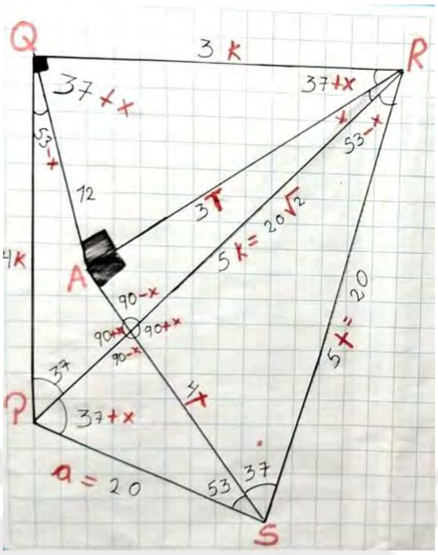
Tarea 3 - etapa arriba-abajo - estudiante Dennis

Para la tarea 3, Dennis reconoce los datos del problema y representa el valor numérico de la medida del segmento QA, también representa los ángulos QPR y ASR con sus respectivas medidas y por último le asigna a la medida del lado PS con la letra “a”. Luego, reconoce la existencia de dos triángulos rectángulos conocidos PQR y RAS de 37° y 53°, y con ello representa las proporciones de los lados de los triángulos mencionados, indicando que tienen las mismas proporciones de 3, 4 y 5 pero se le asigna distintas constantes para cada triángulo que son “k” y “t”, dado que son dos triángulos distintos. Además, asigna a la medida del ángulo QAR el valor de 90° sin ningún sustento teórico y le asigna a la medida del ángulo ARP una variable “x” y con ello indica que las medidas de los ángulos QRA y PRS son “37°+x” y “53°-x” respectivamente, además apoyado de esta variable “x” llena los demás ángulos, siendo los más relevantes el ángulo RPS que lo asigna con “37°+x” y el ángulo PSA asignándole el valor de 53°.

A continuación, en la figura 57 se muestra las acciones de Dennis para la Tarea 3.

Figura 57

Acciones de Dennis completando el gráfico con los datos de la Tarea 3 y asignando variables

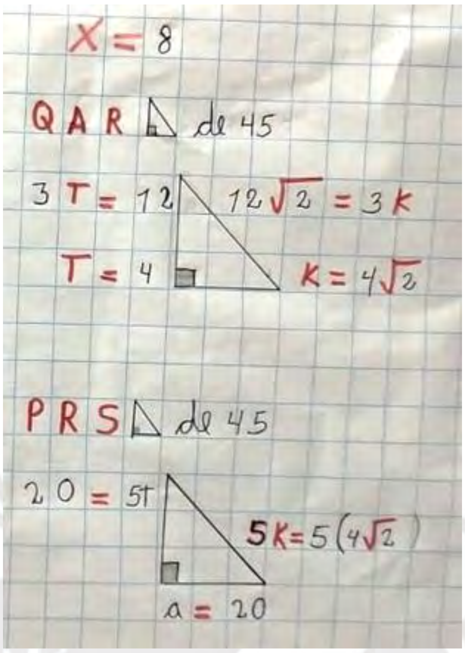


Sumado a ello, Dennis indica que los triángulos QAR y PSR son triángulos rectángulos de 45° dado que determina que el valor de “x” es igual a 8, debido a que la medida del ángulo QRP es 53° y luego de afirmar la existencia de éstos triángulos, utiliza la propiedad de éste triángulo respecto a que los catetos tienen la misma medida y con ello determina que el valor de “t” es igual a 4, para que posteriormente determine el valor de la hipotenusa del triángulo QRA, usando la relación de los lados del triángulo de 45° y así determinar el valor de la variable “k”. Sumado a ello, reemplaza el valor de “k” para la medida del lado PR, que tiene el valor de “5k” dado que es la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR de 37° y 53°, y con ello utiliza nuevamente las propiedades del triángulo rectángulo de 45° en el triángulo PSR con el cual determina el valor de lado PS.

En la Figura 58, se muestra las acciones de Dennis usando las propiedades del triángulo rectángulo de 45°.

Figura 58

Acciones de Dennis usando el triángulo rectángulo de 45°



A partir de las acciones realizadas por Dennis para la Tarea 3, se identifican los episodios descritos en la Tabla 10.

Tabla 10

Episodios identificados para Dennis en la Tarea 3

Episodios	Acciones
E1: Noción del triángulo rectángulo de 37° y 53°	Identificación de los elementos del gráfico. Reconocimiento de los triángulos rectángulos. Uso de las proporciones del triángulo de 37°y 53°.
E2: Representación de elementos del gráfico que no están proporcionados como datos	Asignación del valor numérico para la medida de los ángulos QAR. Asignación con una variable al ángulo ARP. Operaciones entre medidas de los ángulos.

	Determinación del valor de los ángulos RPS y PSA
E3: Noción del triángulo rectángulo de 45° y cálculo de la medida del lado PS	Determinación del valor de "x". Identificación de la existencia de triángulos rectángulos de 45°. Uso de las proporciones de los lados en un triángulo de 45°. Determinación del valor de "t" y "k". Cálculo del valor de la medida del lado PS.

Para el **análisis de la circulación del TM de Dennis en E1**, a partir de la representación figural de la tarea que Dennis toma como representamen, completa los datos en el gráfico según las condiciones de la tarea identificando las condiciones, datos e identifica la existencia de triángulos rectángulos aproximados conocidos mediante un proceso de visualización, dando origen a la activación de la génesis semiótica. Luego, toma como referencial teórico a las proporciones de los lados del triángulo rectángulo de 37° y 53° y mediante un proceso de prueba, justifica las proporciones de los lados PQ, QR, PR, RA, AS y RS dando origen a la activación de la génesis discursiva, esto activa el plano vertical Semiótico-Discursivo. Además, toma como artefactos simbólicos a las variables "k" y "t" para representar las medidas de los lados mencionados mediante un proceso de construcción, activando la génesis instrumental y con ello se activa el plano vertical Semiótico-Instrumental, pues entran en juego las representaciones de los triángulos PQR y RAS con el proceso de construcción para representar las medidas de los lados de los triángulos mencionados. Asimismo, se observa la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, debido a que el uso de las variables "k" y "t" como artefactos simbólicos para representar las medidas los lados de los triángulos PQR y RAS, viene apoyado del sustento teórico respecto a las propiedades de los lados de un triángulo rectángulo de 37° y 53°.

Por otro lado, para el **E2**, Dennis parte de la representación figural de la tarea tomándola como representamen, luego hace uso de un cierto referencial para que afirme que la medida del ángulo QAR es igual 90°, desde el punto de vista del investigador se puede creer que Dennis supone que Q, A y S son puntos colineales. Sumado a ello, toma como artefacto simbólico a la variable "x" para que mediante un proceso de construcción represente la medida del ángulo ARP y posteriormente represente las medidas de los ángulos QRA, PRS y RPS en términos de esta variable, dando origen a la activación de la génesis instrumental.

Además, toma como artefactos a las representaciones de las medidas de los ángulos PRS y RPS, representadas por “53°-x” y “37+x”, para que sumando éstas medidas mediante un proceso de construcción determine que el ángulo RSP tiene una medida igual a 90° y a partir de las representaciones de las medidas de los ángulos RSP y ASR, que Dennis toma como representamen identifica las medidas de éstos mediante un proceso de visualización, y éstos ángulos que Dennis toma como artefactos, resta sus medidas y mediante el proceso de construcción determine que el valor de la medida del ángulo PSA es 53°, dando origen a la activación de la génesis instrumental, originando la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

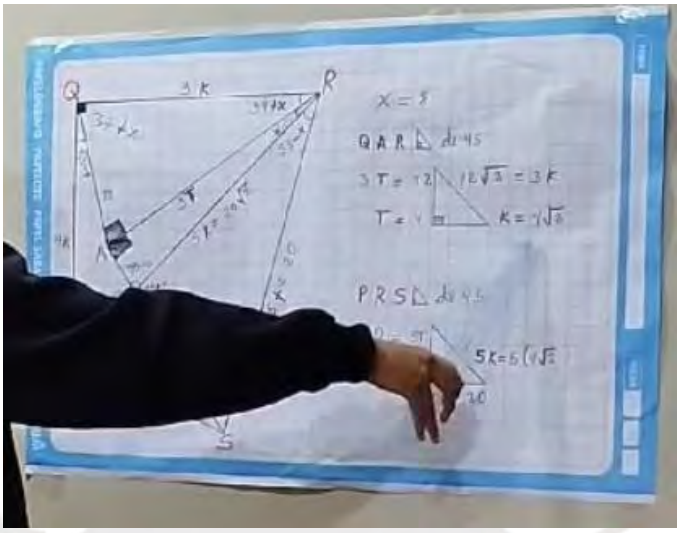
Por último, para el **E3**, a partir de la representación figural del problema, que Dennis toma como representamen, utiliza como artefactos a los ángulos QRA y QRP tales que sumando sus medidas e igualando a 53°, logra obtener el valor de “x” mediante un proceso de construcción, activando la génesis instrumental, luego mediante un proceso de visualización identifica la existencia de los triángulos rectángulos QAR y PSR de 45°, a partir de representación figural que Dennis lo toma como representamen, dando origen a la génesis semiótica, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Luego utiliza la propiedad de las proporciones de los lados de 45° como referencial para que mediante un proceso de prueba justifique que los catetos QA y AR miden lo mismo, originando la activación de la génesis discursiva, esto evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, ya que se valida la existencia y las propiedades de las proporciones del triángulo rectángulo de 45° basadas en acciones sobre la representación figural de la tarea.

Además, Dennis toma como artefactos a los catetos QA y AR y mediante un proceso de construcción determina el valor de la variable “t”, ya que iguala las expresiones numéricas y algebraicas que representan a las medidas de los catetos mencionados, dando origen nuevamente a la activación de la génesis instrumental, con ello determina el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo QAR, también mediante un proceso de construcción tomando como artefacto a uno de los catetos del triángulo QAR, ya que multiplica la medida de uno de estos catetos por la cantidad irracional $\sqrt{2}$, dando origen nuevamente a la génesis instrumental. Seguidamente, Dennis toma como artefacto a la hipotenusa del triángulo rectángulo QAR y mediante un proceso de construcción determina el valor de la variable “k” ya que iguala las expresiones numéricas y algebraicas que representan a la medida de la hipotenusa mencionada; en seguida, identifica mediante un proceso de visualización el valor de la medida del lado PR, descrita en términos de “k” y usa este valor de “k” como un artefacto para que determine el valor de la medida de éste lado mediante un proceso de construcción al multiplicar 5 por el valor numérico de “k” originando la génesis instrumental, lo que origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

A continuación, en la Figura 59 se muestran las acciones de Dennis para la Tarea 3.

Figura 59

Acciones de Dennis hallando el valor de las variables en la Tarea 3



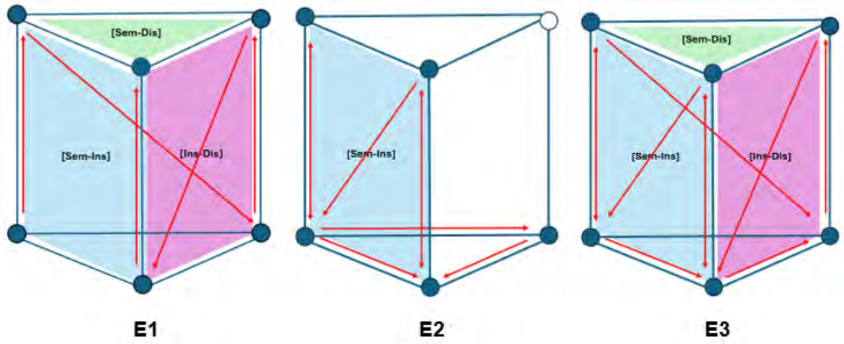
Por último, a partir de la representación figural de la tarea que Dennis toma como representamen, identifica nuevamente al triángulo rectángulo PSR de 45° mediante un proceso de visualización, que activa la génesis semiótica, luego toma como artefacto al lado PR y con ello utiliza la propiedad de las proporciones de los lados de 45° como referencial para que mediante un proceso de prueba justifique que el valor de las medidas de los catetos del triángulo PSR, para que así logre determinar el valor del lado PS, originando la activación de la génesis discursiva, esto evidencia la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, ya que el uso de las variables “k” y “t” y las operaciones que se realizan con éstas para representar las medidas de los lados de los triángulos QAR y PSR viene apoyado del sustento teórico, respecto a las propiedades de los lados de un triángulo rectángulo de 45° y en consecuencia, le permite obtener la medida requerida.

Tarea 3 - etapa abajo-arriba - estudiante Dennis

Se presenta en la siguiente figura, la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 3, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 60

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 3 para Dennis



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de Dennis en la Tarea 3, se involucra en los tres episodios con artefactos como variables, lados, ángulos, entre otros que hace favorecer la activación del plano Semiótico-Instrumental, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionando con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen. El plano Instrumental-Discursivo se activa en los episodios **1** y **3** que involucran la génesis instrumental y discursiva, dado que se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, como las proporciones de los lados de triángulos rectángulos notables que fue útil para llegar a la determinación de medidas de ciertos segmentos para que posteriormente llegue al resultado final. Cabe resaltar que el plano Semiótico-Discursivo se activa en los episodios **1** y **3**.

En relación con los paradigmas que prioriza Dennis en su trabajo matemático para esta tarea, se puede observar que para la justificación de la longitud de la medida de diversos segmentos en la representación figural de la tarea, como lo son las propiedades de los lados de triángulos rectángulos notables, hace uso de un sistema de axiomas incompletos, y éstas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica, por el cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII).** Además, al argumentar ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

Tarea 1 - etapa arriba-abajo - Kevin

En la tarea 1, se observa que para el **ítem a** el estudiante Kevin luego de haber construido los triángulos solicitados, afirma que al principio percibía que los lados estaban un poco "chuecos", es decir, creía que los lados se podían cortar, por ello usa la herramienta *Paralela* que le permite trazar una recta paralela en principio para el lado PQ, luego la recta generada la superpone en el lado BA y con ello indica que el lado BA es paralelo al lado PQ, de la misma manera realizó el proceso para determinar el paralelismo entre los lados AC con PR y BC con QR. A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista que se realizó con Kevin:

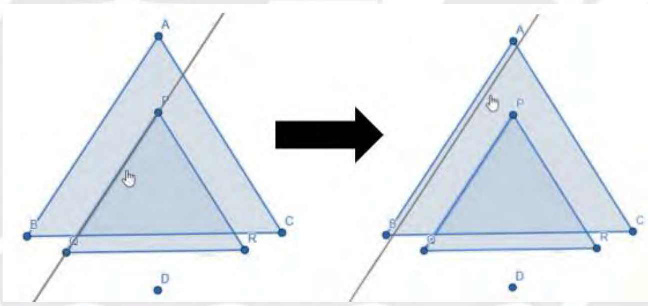
Investigador: ¿Qué más me puedes decir de lo que tú has respondido?

Kevin: Es que la recta AB era paralela a PQ, lo demostré usando la herramienta de paralelismo, con lo cual yo empecé a probar con todos los lados y me da que todos eran paralelos, porque al principio no quería mucho que eran paralelos, ya que no estaban ubicados de la misma manera y tendían a ser algo chuecos o no tan iguales como están, ahí estoy demostrando que las dos eran paralelas, después de haber usado la herramienta de paralelismo.

A continuación, se muestra en la Figura 61 las acciones de Kevin para la Tarea 1 – ítem a.

Figura 61

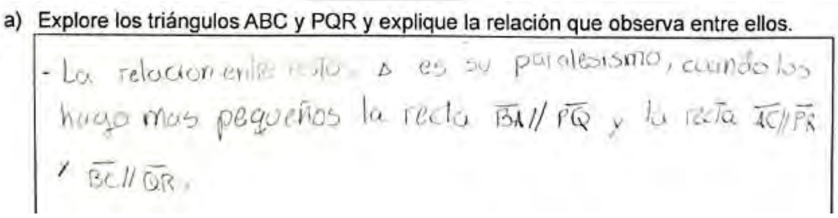
Acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 1-ítem a



A continuación, se muestra en la Figura 62 la respuesta expresada por Kevin en la ficha para la Tarea 1-ítem a:

Figura 62

Respuesta de Kevin para la Tarea 1-ítem a


a) Explore los triángulos ABC y PQR y explique la relación que observa entre ellos.

- La relacion entre estos Δ es su paralelismo, cuando los hago mas pequeños la recta $\overline{BA}$ // $\overline{PQ}$ y la recta $\overline{AC}$ // $\overline{PR}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{QR}$.

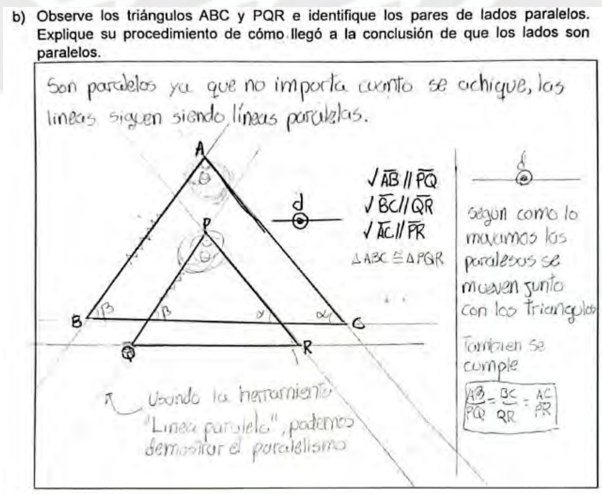
Por otro lado, para el **ítem b,** Kevin usó la herramienta *Punto* e inserta distintos puntos en los lados de los triángulos ABC y PQR, luego usa el deslizador y con ello describe que los pares de lados paralelos que identificó siguen manteniendo esta propiedad independientemente si se reduce las dimensiones de los lados del triángulo PQR. Sumado a ello, en la ficha representa los triángulos que observa en el entorno de GeoGebra, usa a las variables α, β, θ y con el paralelismo entre los lados identificados determina una igualdad de las medidas de los ángulos interiores BAC y QPR e indica a partir de ésta igualdad identificada que los triángulos ABC y PQR son congruentes, luego indica que los pares de lados identificados tienen la misma razón, esto lo comprueba dividiendo las medidas de éstos pares de lados paralelos en GeoGebra y con ello afirma que los triángulos son semejantes debido a esta igualdad entre las razones mencionadas. Como evidencia se muestra en este fragmento de la entrevista:

> **Investigador:** Bien, luego en esta parte donde, por ejemplo, dice que observes los triángulos y justificar por qué los pares de lados son paralelos y explicar tu procedimiento, me puedes decir algo más sobre eso.
>
> **Kevin:** Esta bien, también usé la herramienta que me permitía hacer que un triángulo se haga más pequeño y me di cuenta que no importa qué tan pequeño lo haga, su ángulo nunca va a variar ni cambiar, va a ser el mismo, ahí descubrí una congruencia también, porque en el triángulo grande, digamos que en la parte de arriba, en el ángulo BAC, le ponemos beta, y me di cuenta que ese ángulo es igual, siempre va a ser igual, no importa qué tan grande sea la figura, al ángulo QPR, no variaba su medida, y de ahí me di cuenta también que se cumple semejanza, que sería que la línea AB sobre la dividida de la línea PQ me iba a dar, sería lo mismo que decir BC sobre QR y que la línea AC sobre PR dividida eran lo mismo a los demás.

En la figura 63 se muestra la respuesta de Kevin para la Tarea 1 – ítem b.

Figura 63

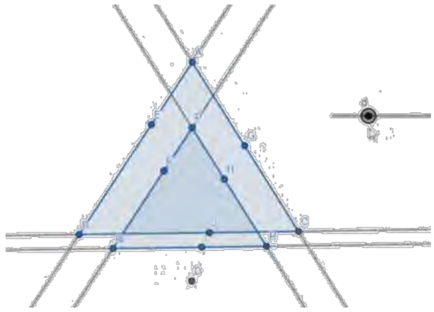
Respuesta de Kevin para la Tarea 1-ítem b



A continuación, en la Figura 64 se muestran las acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 1-ítem b:

Figura 64

Acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 1-ítem b



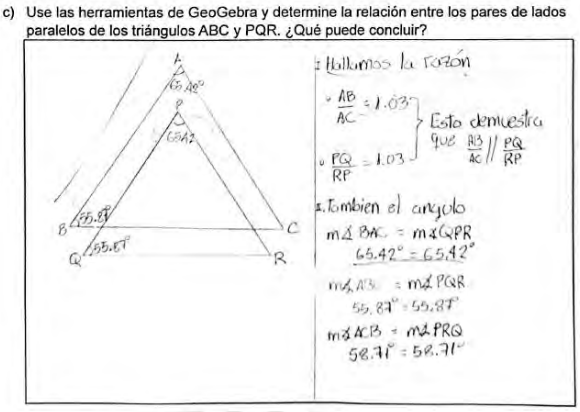
Asimismo, para el **ítem c**, Kevin hace uso de la herramienta *Ángulo* y determina las medidas de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR, con ello identifica una igualdad entre las medidas de los ángulos BAC con QPR, ABC con PQR y ACB con PRQ. Sumado a ello, Kevin representa a los triángulos ABC y PQR en la ficha y divide las medidas de los lados que forman a los ángulos BAC y QPR en GeoGebra, identificando una igualdad entre éstas razones de lo que determina una relación de ángulos congruentes entre estos par de lados con una misma razón, luego Kevin también indica que la división de los lados AB con AC es "paralela" a la división entre los lados PQ y RP, desde el punto de vista del investigador a partir de esta última afirmación, se cree que Kevin aunque no lo expresó, dedujo uno de los criterios de semejanza que viene a ser el criterio lado-ángulo-lado dado que encontró una igualdad entre las razones de los lados que forman el mismo ángulo interior de los triángulos ABC y PQR. Se evidencia lo anterior en este fragmento de la entrevista:

> **Investigador:** Para el ítem c, ¿qué podrías concluir con respecto a lo que tú has escrito?
>
> **Kevin:** Bueno, al dividir AB sobre AC, que eran dos líneas que no son paralelas, pero me di cuenta de que da el mismo resultado que dividir PQ y RP, o sea, encontré como una especie de ángulos paralelos en estos dos ángulos, o sea, como que no cambia el ángulo PAC con el ángulo QPR, porque siempre son el mismo resultado sin importar cuánto lo mueva; bueno, siempre y cuando estén anclados, pues ahí al mismo tamaño. Bueno, como ahí es la razón, dividí por AB sobre AC, me daba 1.03, esto se demuestra porque AB sobre AC es paralelo a PQ sobre RP, también el ángulo de la medida de la medida PAC es igual al ángulo de la medida QPR, y ya ahí seguí deduciendo lo demás.

Se muestra en la Figura 65 la respuesta de Kevin para la primera parte de la Tarea 1 – ítem c.

Figura 65

Respuesta de Kevin para la primera parte de la Tarea 1-ítem c



A continuación, en la Figura 66 se muestran las acciones realizadas por Kevin en GeoGebra para la primera parte de la Tarea 1-ítem c.

Figura 66

Acciones de Kevin en GeoGebra para la primera parte de la Tarea 1-ítem c

Luego, Kevin interactúa con el entorno de GeoGebra, haciendo uso del deslizador y el vértice A del triángulo ABC, obteniendo otras formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, a partir de ello indica que sus ángulos interiores van a seguir teniendo las mismas medidas y los lados que identificó como paralelos van a seguir manteniendo esta propiedad. A partir de ello para los ángulos BAC y QPR, determina la razón de los lados que forman a éstos ángulos e identifica una igualdad entre estas razones y concluye afirmando que los triángulos ABC y PQR son semejantes debido a esa igualdad, se observa desde el punto de vista del investigador, que Kevin aunque no lo expresó, determina esta semejanza usando el criterio lado-ángulo-lado, esto quiere decir que Kevin tiene ciertos conceptos previos respecto a la semejanza de triángulos que ayudaron a que llegue a esa afirmación. Lo mencionado se evidencia en este fragmento de la entrevista:

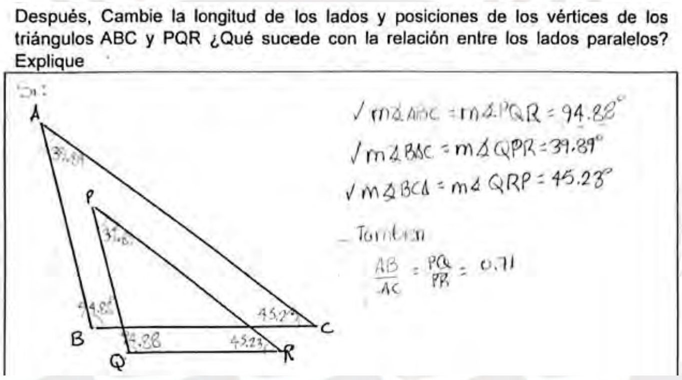
Investigador: ¿Cuál es la deducción final de lo que tú has escrito ahí en ese ítem c?

Kevin: sin importar a qué lado lo muevas, digamos izquierda, derecha, lo subas o bajes, sus ángulos no van a cambiar y sus líneas no van a dejar de ser paralelas, como la línea PA y PQ, no dejaban de ser paralelas por más que la movía de izquierda a derecha, y sus ángulos tampoco cambiaban, seguían siendo los mismos, porque estaban en un solo movimiento. Y de ahí deduje que la medida de ABC es igual a la medida de PQR, y eso era 94.88 grados. Ahora, también me di cuenta de que se había visto semejanza, y bueno, vi que la razón de AB sobre AC era igual a la razón de PQ sobre PR, y lo cual me da 0.71 al dividirlo.

A continuación, en la Figura 67 se muestra la respuesta de Kevin para la segunda parte de la Tarea 1 – ítem c.

Figura 67

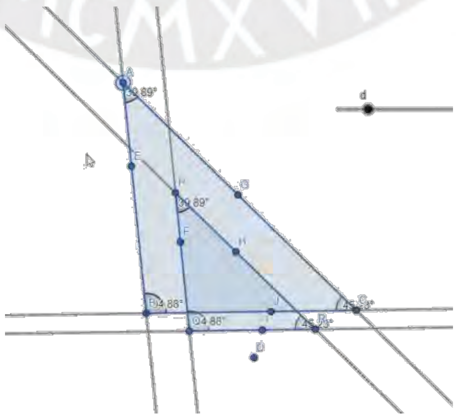
Respuesta de Kevin para la segunda parte de la Tarea 1-ítem c



También, en la Figura 68 se muestran las acciones realizadas por Kevin para la segunda parte de la Tarea 1-ítem c

Figura 68

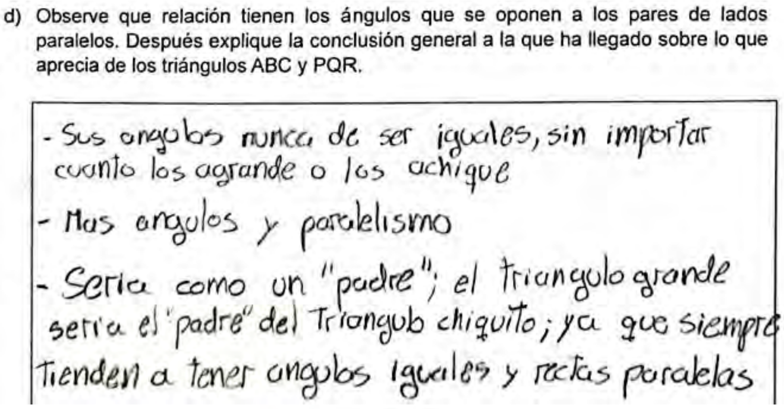
Acciones de Kevin en GeoGebra para la segunda parte de la Tarea 1-ítem c



Para el **ítem d**, Kevin indica lo que se muestra en la Figura 69:

Figura 69

Respuesta de Kevin para la Tarea 1-ítem d


d) Observe que relación tienen los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos. Después explique la conclusión general a la que ha llegado sobre lo que aprecia de los triángulos ABC y PQR.

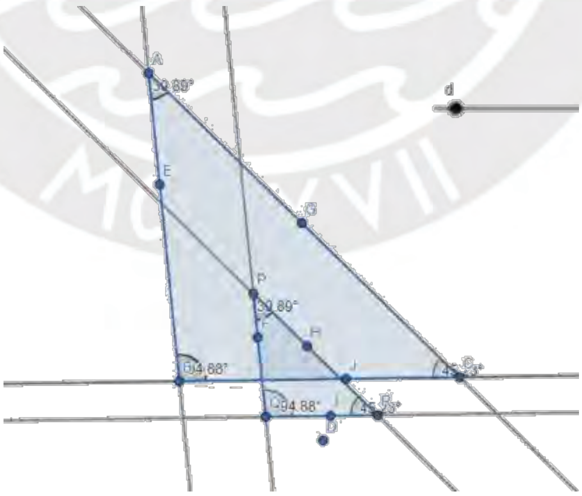
- Sus angulos nunca de ser iguales, sin importar cuanto los agrande o los achique
- Mas angulos y paralelismo
- Seria como un "padre"; el triangulo grande seria el "padre" del Triangub chiquito; ya que siempre Tienden a tener angulos iguales y rectas paralelas

Kevin continúa manipulando las representaciones de los triángulos ABC y PQR con el deslizador, generando nuevas representaciones de las formas de éstos triángulos e indica que el triángulo ABC es "padre" del triángulo pequeño PQR, debido a que cuando amplia o reduce las dimensiones del triángulo ABC, esto repercute también en el otro triángulo~~,~~ pero se siguen manteniendo las igualdades entre las medidas de sus ángulos interiores y el paralelismo entre los pares de lados identificados en la primera parte de la Tarea.

A continuación, se muestra en la Figura 70 las acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 1 – ítem d.

Figura 70

Acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 1-ítem d



A partir de las acciones realizadas por Kevin en la Tarea 1, se identifican los episodios en la Tabla 11.

Tabla 11

Episodios identificados para Kevin en la Tarea 1

Ítem	Episodios	Acciones
a y b	E1: Identificación y justificación de rectas paralelas.	Trazado de la recta paralela al lado PQ. Superposición de la recta paralela trazada sobre el lado AB. Justificación del paralelismo.
b	E2: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra.	Uso de la herramienta *Punto*. Uso del deslizador.
	E3: Cálculo de las razones entre lados paralelos y semejanza de triángulos	Representación de los triángulos ABC y PQR en la ficha. Representación de los ángulos interiores mediante variables. Congruencia de triángulos. División de las medidas de los pares de lados paralelos. Semejanza de triángulos.
c	E4: Cálculo de las razones entre lados que forman al mismo ángulo	Medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Representación de los triángulos ABC y PQR en la ficha. División de las medidas de los lados que forman el mismo ángulo interior para los triángulos ABC y PQR. Uso del deslizador y del vértice A. Determinación de la semejanza de los triángulos ABC y PQR.
d	E5: Conclusión y justificación sobre las formas de los triángulos ABC y PQR	Uso del deslizador. Conclusión de las formas de los triángulos ABC y PQR.

En cuanto al **análisis de la circulación del TM de Kevin en E1,** a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que Kevin los toma como representamen, activa un cierto referencial debido a que afirma que los lados de los triángulos estaban "chuecos", ello conlleva a que use la herramienta *Paralela*, que lo toma como artefacto digital y por un proceso de construcción obtiene una recta paralela al lado PQ, activando la génesis instrumental. Luego, a partir de las representaciones de la recta y los triángulos, que lo toma como representamen, hace uso de ésta recta tomándola como artefacto para superponerla sobre el lado AB y con ello, mediante un proceso de visualización indica que los lados AB y PQ son paralelos, debido a que ya no los observa "chuecos", de forma análoga determinó el paralelismo entre los pares de lados AC con PR y BC con QR, esto da origen a la activación de la génesis semiótica y, por ende, se origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. En este episodio se resalta lo útil y necesario que resulta la tecnología para que Kevin pueda determinar el paralelismo entre los pares de lados mencionados, algo que a lápiz y papel resultaría más complejo debido a que trabajando por ese medio lo dibujos no suelen ser precisos.

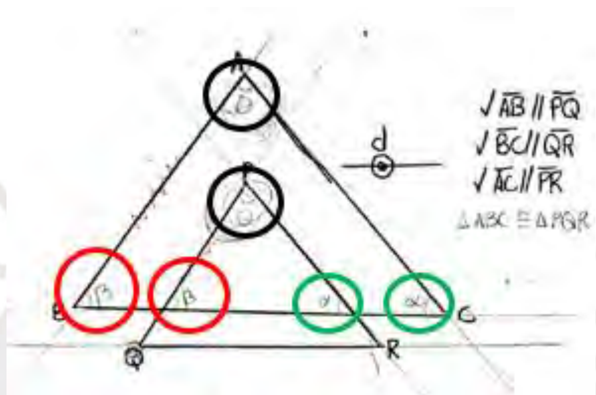
Por otro lado, en **E2** Kevin usa la herramienta *Punto*, que lo toma como artefacto digital y realiza un proceso de construcción al insertar distintos puntos sobre los lados de los triángulos ABC y PQR, dando origen a la activación de la génesis instrumental. Luego, toma las representaciones de los triángulos como representamen y a partir de ello, hace uso del deslizador, que lo toma como artefacto digital y mediante un proceso de construcción genera nuevas dimensiones de los lados de las representaciones de los triángulos, ya sean ampliándolos o reduciéndolos, originando nuevamente la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización indica que sin importar la forma en cómo se alteren las representaciones de los triángulos, la propiedad del paralelismo se mantiene, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Luego, para **E3**, toma como representamen a las representaciones de los triángulos y así, poder representarlas en la ficha, con ello toma a las variables α, β, θ como artefactos simbólicos para la representación de los ángulos interiores del triángulo ABC en la ficha, mediante un proceso de construcción, dando origen a la activación de la génesis instrumental. Luego, tomando como referencial teórico la propiedad del paralelismo, identificado entre los lados de los triángulos ABC y PQR, que justifique mediante un proceso de prueba que existe una igualdad entre las medidas de los ángulos interiores de estos triángulos, dando origen a la activación de la génesis discursiva. Luego, al identificar la igualdad de las medidas de los ángulos interiores mediante un proceso de visualización, toma como referencial teórico, aunque de forma incompleta y errónea, la propiedad de triángulos congruentes (respecto a la igualdad de las medidas de los ángulos interiores de los triángulos) para justificar mediante un proceso de prueba que los triángulos ABC y PQR son congruentes, cabe resaltar que esta conclusión es errónea. En lo mencionado, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, ya que se valida las propiedades de triángulos congruentes (aunque de forma errónea) basada en acciones sobre la representación figural de los triángulos.

A continuación, en la Figura 71 se muestran las acciones de Kevin usando las variables como artefactos simbólicos.

Figura 71

Acciones realizadas por Kevin usando a variables como artefactos simbólicos



Luego, Kevin origina la activación de la génesis instrumental; usó la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto y con ello realizó un proceso de construcción que permite obtener las razones entre los lados paralelos y mediante un proceso de visualización a partir de los valores de las razones obtenidas tomados como representamen, permitió que describa en la ficha que éstas razones tienen el mismo valor, dando origen a la activación de la génesis semiótica, esto activa el plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, toma como referencial teórico a la definición de triángulos semejantes (respecto a la igualdad de las razones de lados correspondientes) para afirmar mediante un proceso de prueba que los triángulos son semejantes, dando origen a la activación de la génesis discursiva, esto evidencia la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, debido a que el uso de los artefactos (herramienta de la división dentro de GeoGebra) genera la construcción de nuevas configuraciones para ayudar al proceso de prueba.

Además, en **E4** Kevin usa como artefacto digital a la herramienta *Ángulo* y mediante un proceso de construcción, determinó la medida de los ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR, originando la génesis instrumental y luego mediante un proceso de visualización indica que las medidas de los ángulos interiores de los triángulos son iguales partiendo de la representación de los triángulos ABC, que los toma como representamen y así origina la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Sumado a ello, usa la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto y con ello realiza un proceso de construcción que le permite obtener las razones entre los pares de lados que forman a los ángulos BAC y QPR dando origen a la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización, identifica una igualdad entre éstas razones al partir de las representaciones de éstos triángulos, que los toma como representamen, originando nuevamente la génesis semiótica y por ende, la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Luego, Kevin activa un cierto referencial al afirmar que éstas razones son “paralelas” partiendo de esta igualdad de razones que identifica.

Además, Kevin usa como artefactos al deslizador y al vértice A , mediante un proceso de construcción logra obtener nuevas dimensiones de los lados de las representaciones del par de triángulos ABC Y PQR, originando la activación de la génesis instrumental y a partir de estas nuevas representaciones que lo toma como representamen, indica mediante un proceso de visualización que los ángulos interiores de éste par de triángulos van a seguir teniendo las mismas medidas y que los lados paralelos que identificó van a seguir teniendo esta misma propiedad independientemente de cómo se modifiquen sus formas, lo que origina la activación de la génesis semiótica, esto da origen la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental. Además, parte de esta representación y usa la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto y con ello realiza un proceso de construcción que le permite obtener las razones entre los pares de lados que forman a los ángulos BAC y QPR, dando origen a la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización identifica una igualdad entre estas razones al partir de las representaciones de estos triángulos, que los toma como representamen, originando la génesis semiótica.

Asimismo, Kevin activa un cierto referencial, desde el punto de vista del investigador, se considera que toma en cuenta un criterio de la semejanza, aunque no lo explica explícitamente, para justificar la semejanza de los triángulos ABC y PQR mediante un proceso de prueba, debido a la igualdad entre las razones obtenidas entre los pares de lados de ambos triángulos, esto origina la activación de la génesis discursiva. Con lo mencionado, se evidencia la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, debido a que el uso de los artefactos (herramienta de la división dentro de GeoGebra) genera la construcción de nuevas configuraciones que ayudan al proceso de prueba. Sumado a ello, también se activa el plano vertical Semiótico-Discursivo ya que las distintas acciones sobre las representaciones figurales (se refiera a las distintas representaciones que se obtienen de los triángulos ABC y PQR) apoyan en la validación de la prueba de semejanza de los triángulos.

En este episodio la tecnología resulta importante dado que permitió a Kevin, al momento de interactuar con las representaciones de los triángulos que independientemente de cuál sean las dimensiones de éstos, los ángulos interiores correspondientes van a seguir teniendo la misma medida y el paralelismo se seguirá manteniendo, además de ello usó las operaciones que proporciona el software GeoGebra para determinar una igualdad entre las razones de estos pares de lados paralelos, algo que resultaría más trabajoso si se realiza a lápiz y papel, y esto conllevó a que afirme que existe una semejanza entre los triángulos ABC y PQR.

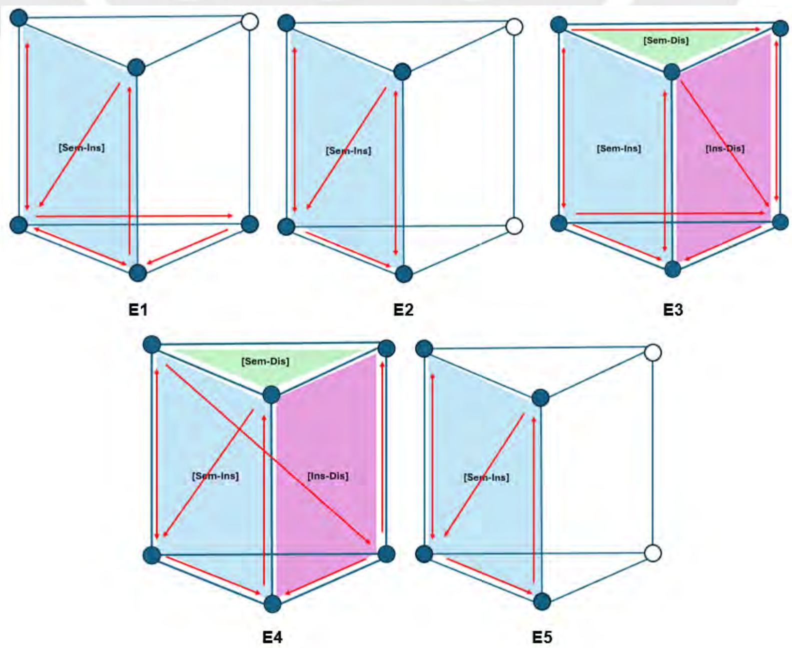
Por último, para **E5**, Kevin parte de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que toma como representamen y luego toma como artefacto digital al deslizador y mediante un proceso de construcción al interactuar con éste artefacto, sigue obteniendo nuevas formas de las representaciones del par de triángulos ABC y PQR, originando la activación de la génesis instrumental para que posteriormente mediante un proceso de visualización concluya que al alterar la forma de la representación del triángulo ABC ya sea ampliando o reduciendo, hace que las dimensiones del otro triángulo se alteren, indicándolo al triángulo ABC como un "padre" para el triángulo PQR y además, siempre se mantiene una igualdad con respecto a la medida de sus ángulos interiores y se sigue manteniendo el paralelismo entre los lados que Kevin identificó en los ítems anteriores, todo esto lo hace partiendo de la representación de los triángulos ABC y PQR, los cuales toma como representamen y esto evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Tarea 1 - etapa abajo-arriba - estudiante Kevin

Se presenta en la Figura 72 la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 1, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 72

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 1 para Kevin



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de Kevin, con relación a la Tarea 1, se resalta en todo momento el uso de los artefactos simbólicos como variables, los vértices de los triángulos y artefactos digitales como deslizadores y las herramientas *Paralela*, *Punto, Medida o Longitud* y *Ángulo*, entre otros que hace favorecer la activación del plano Semiótico-Instrumental, ya que este plano se activa en los cinco episodios de la Tarea 1, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionados con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen. El plano Instrumental-Discursivo se activa en los episodios **3** y **4,** que involucran la génesis instrumental y discursiva, dado que se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, referente a que las rectas paralelas no se cortan, esto fue útil para que llegue a la conclusión que los tres pares de lados identificados son paralelos construyendo progresivamente las rectas paralelas mediante la herramienta *Paralela* y la calculadora del GeoGebra (para determinar las igualdad de la razones entre los lados paralelos), así como también se basa en un referencial teórico referido a la definición y criterios de la semejanza de triángulos que ayudan a justificar esta relación entre los triángulos, aunque no lo expresa de forma explícita. Sumado a ello, en el episodio **1** se aprecia que Kevin activa un cierto referencial respecto a que las rectas paralelas no se cortan y esto conlleva a que realice acciones en las cuales intervienen los artefactos y con ello favorecer la activación del plano Semiótico-Instrumental. Cabe resaltar que el plano Semiótico-Discursivo se activa en el episodio **3** y **4**.

En relación con los paradigmas que prioriza Kevin en su trabajo matemático para esta tarea, se puede observar que, para la justificación del paralelismo entre los lados de ambos triángulos y la relación de las formas de las representaciones de los triángulos, lo hace bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos simbólicos para llegar a una respuesta válida, por ende, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**. Por otro lado, para la justificación de la semejanza entre los triángulos ABC y PQR, hace uso de un sistema de axiomas incompleto, y estas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica, por el cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII),** aunque presenta algunos errores en el manejo del concepto**.**

Tarea 2 - etapa arriba-abajo – Kevin

Respecto a esta tarea, en el **ítem a**, Kevin parte de las representaciones de los triángulos ABC y PQR que los toma como representamen y los dibuja en la ficha, además hace uso de las casillas de control proporcionadas en el applet de GeoGebra y con ello describe en la ficha, el valor de las razones de los lados BC con QR y AB con PQ, también describe el valor de las medidas de los ángulos ABC y PQR. A partir de ello, indica que las divisiones entre los lados BC con QR y AB con PQ son iguales y que las medidas de los ángulos ABC y PQR también eran la mismas. Además, usa los deslizadores para modificar las dimensiones de las representaciones de los triángulos ABC y PQR y con ello indica que los triángulos son semejantes sustentando su respuesta, debido a que ambos triángulos tienen un ángulo con la misma medida y que por más que modifique las dimensiones de los lados de los triángulos por medio de los deslizadores, la división entre los lados que forman ese mismo ángulo va a seguir siendo la misma, desde el punto de vista del investigador se observa que Kevin tiene ciertos conceptos previos respecto a la semejanza de triángulos.

También, Kevin divide los lados PR con AC y CB con QR usando la división dentro del entorno de GeoGebra, teniendo como resultados 1.44 y 0.69 respectivamente, aunque no reflexiona con respecto al porqué le salieron resultados distintos.

A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista:

Investigador: Pasamos a la Tarea 2, ¿qué apreciación tienes de todo lo que tú has hecho acá? ¿Qué me podrías decir?

Kevin: En primer lugar, me puse a mover los dos triángulos con la herramienta de D, y usé la herramienta rotar un poco también para ir probando. Y me di cuenta de que es lo mismo que un triángulo semejante a otro. Y después empecé a leer las razones para ir buscando algo más que buscar más así.

Investigador: ¿Y por qué para ti eran semejantes?

Kevin: Porque en inicios me di cuenta de que tenían un ángulo, que eran dos ángulos iguales, los cuales no cambiaban. Por más que movía, rotaba, no importa su rotación o movimiento en los agrandes, no cambiaba el ángulo. De ahí, me di cuenta de que tenían semejanza. Porque desde el primer ángulo, que siempre encuentro que siguen siendo iguales, me di cuenta de que el triángulo puede ser semejante. Pero me di cuenta de que los lados sí cambiaban su tamaño.

Kevin: O sea, esa relación nunca se va a perder en esos lados, por más que modifique el triángulo. Seguí deduciendo, y ahí es la razón de PR sobre AC que me daba 1.44, la razón de CB sobre QR que era 0.69. Y mi conclusión fue que eran semejantes, porque al principio no lo veía como semejante, después fui probando y me di cuenta de que sí.

Investigador: La verdad que hay algo interesante, ¿no? Que tu razón, las razones te salen distintas**.**

Kevin: Sí, son distintas

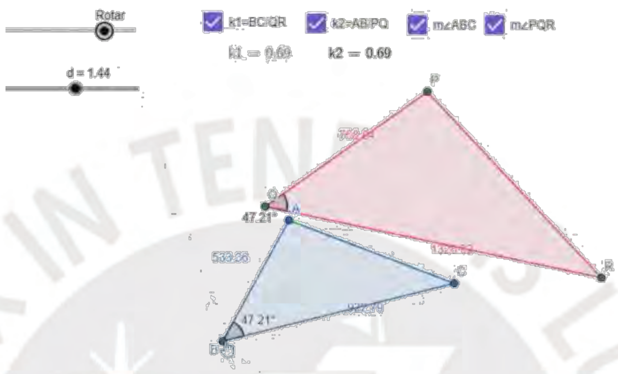
Investigador: ¿Hay alguna reflexión que puedes hacer sobre eso, o no hay nada? ¿es normal que te haya salido algo así?

Kevin: Nada

A continuación, en la Figura 73 se muestran las acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 2 – ítem a.

Figura 73

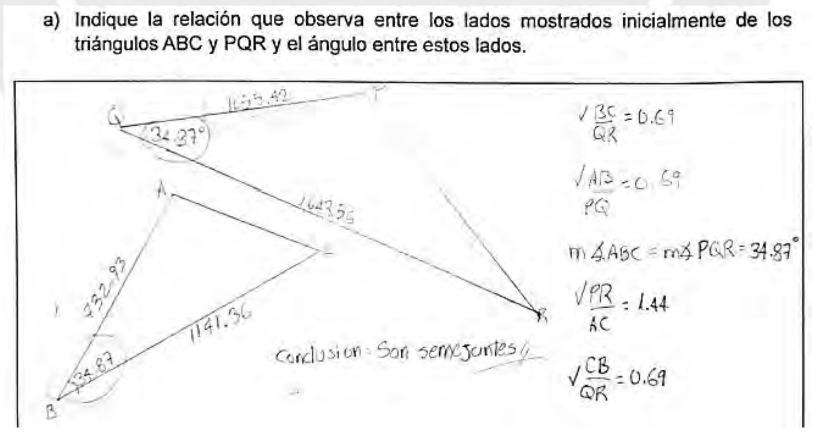
Acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 2-ítem a



A continuación, se muestra en la Figura 74 la respuesta dado por Kevin para la Tarea 2-ítem a

Figura 74

Respuesta de Kevin para la Tarea 2-ítem a



Por último, para el **ítem b**, Kevin mide los ángulos PRQ y ACB usando la herramienta *Ángulo* de GeoGebra, además usa el deslizador y la herramienta *Rotar* para cambiar la orientación, la medida de los lados y ángulos interiores de los triángulos ABC y PQR. Luego, hace uso de la herramienta *Distancia o longitud* para hallar la medida de los lados restantes de ambos triángulos, así como también hace uso de la herramienta *Área* y determina las áreas de los triángulos ABC y PQR. A partir de interactuar con estas herramientas, Kevin indica que los ángulos interiores de ambos triángulos son iguales sin importar que rota o se cambie de posición a las representaciones de los triángulos ABC y PQR y, debido a que siempre estos ángulos interiores se mantienen con la misma medida, indica que los triángulos ABC y PQR son semejantes, esto se evidencia en este fragmento de la entrevista:

Investigador: ¿Cuál es tu conclusión de los triángulos que tenías ahí?

Kevin: Cumple semejanza

Investigador: ¿Esa es tu conclusión? ¿A partir de qué?

Kevin: A partir de ser un ángulo.

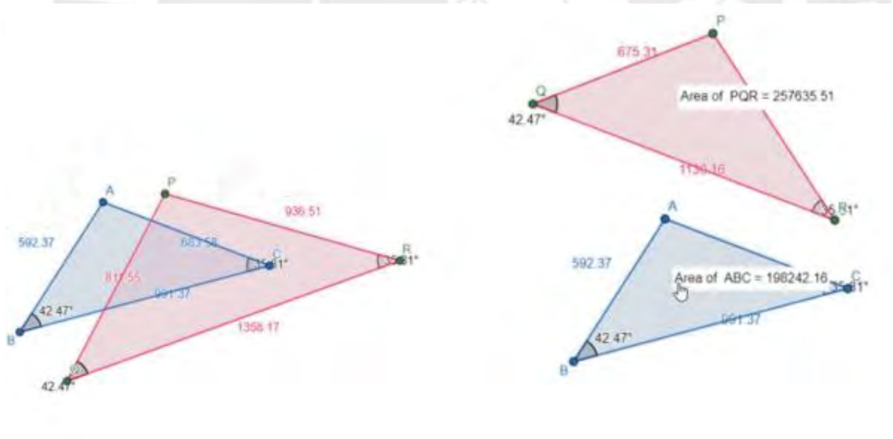
Investigador: O sea, me dices entonces que son semejantes, porque a partir de un ángulo congruente nada más, ya son semejantes.

Kevin: Sí, y porque tienen la misma forma de ser ángulos.

A continuación, se muestra en la Figura 75 las acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 2 – ítem b.

Figura 75

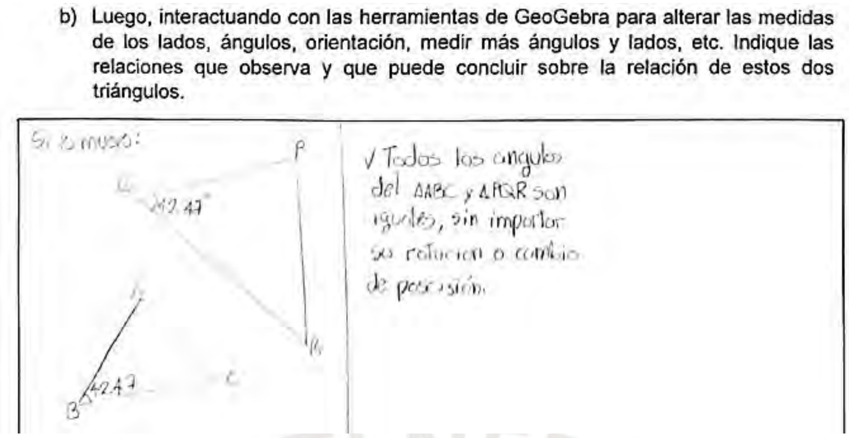
Acciones de Kevin en GeoGebra para la Tarea 2-ítem b



A continuación, se muestra en la Figura 76 la respuesta dada por Kevin para la Tarea 2-ítem b.

Figura 76

Respuesta de Kevin para la Tarea 2-ítem b


b) Luego, interactuando con las herramientas de GeoGebra para alterar las medidas de los lados, ángulos, orientación, medir más ángulos y lados, etc. Indique las relaciones que observa y que puede concluir sobre la relación de estos dos triángulos.

Si lo muevo:

√ Todos los ángulos del ΔABC y ΔPQR son iguales, sin importar su rotación o cambio de posición.

A partir de las acciones realizadas por Kevin se identifican los siguientes episodios para la Tarea 2 mostrados en la Tabla 12:

Tabla 12

Episodios identificados para Kevin en la Tarea 2

Ítem	Episodios	Acciones
a	E1: Exploración de la representación de los triángulos con el uso de las herramientas de GeoGebra	Uso de las casillas de control. Uso del deslizador. División entre las medidas de los lados PR con AC y CB con QR. Semejanza de triángulos.
b	E2: Conclusión y justificación sobre las formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR	Uso de la herramienta *Ángulo.* Uso del deslizador. Uso de la herramienta *Rotar*. Uso de la herramienta *Distancia o longitud.* Uso de la herramienta *Área*. Semejanza de triángulos.

Para el **análisis de la circulación del TM de Kevin en E1**, a partir de la representación de los triángulos ABC y PQR, que toma como representamen, lo dibuja en la ficha. Además, en GeoGebra hace uso de las casillas de control, que los toma como artefactos digitales para que mediante un proceso de construcción, obtenga los valores tanto de las razones de los lados BC con QR y AB con PQ, así como también el valor de la medida de los ángulos ABC y PQR, dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego toma como representamen el valor de las razones y medidas obtenidas para que mediante un proceso de visualización reconozca igualdades entre las cantidad halladas, lo que activa la génesis semiótica, esto hace que se origine la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

Asimismo, hace uso del deslizador que lo toma como artefacto digital para que mediante un proceso de construcción, obtenga nuevas formas de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, originando la activación de la génesis instrumental y mediante un proceso de visualización sigue identificando que los ángulos se mantienen con la misma medida; y a partir de esto activa un referencial, que aunque no lo expresa explícitamente, trata sobre un criterio de la semejanza, para que mediante un proceso de prueba justifique la semejanza entre los triángulos ABC y PQR, dando origen a la activación de la génesis discursiva, lo que evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, ya que las distintas acciones sobre las representaciones figurales (referido a las distintas representaciones que se obtienen de los triángulos ABC y PQR al usar los deslizadores) apoyan en la validación de la prueba de semejanza de los triángulos. También, se activa el plano vertical Instrumental-Discursivo debido a que el uso de los artefactos (casillas de control y deslizadores en GeoGebra) genera la construcción de nuevas configuraciones que ayudan al proceso de prueba de la semejanza de los triángulos ABC y PQR.

Sumado a ello, usa la división dentro del entorno de GeoGebra como artefacto y con ello realiza un proceso de construcción que le permite obtener las razones entre los pares de lados PR con AC y CB con QR.

Por otro lado, para **E2** se observa que Kevin a partir de las representaciones de los triángulos ABC y PQR, que los toma como representamen, hace uso del deslizador y la herramienta *Rotar*, tomados como artefactos digitales para que mediante un proceso de construcción, obtenga nuevas formas de las representaciones de éste par de triángulos, dando origen a la activación de la génesis instrumental, luego toma nuevamente como artefacto a la herramienta *Distancia o longitud* y *Área* para que mediante un proceso de construcción, halle la medida de los lados restantes de los triángulos ABC y PQR, así como también el valor de sus áreas y mediante un proceso de visualización que parte del representamen tomado de la representación de los triángulos, determine que la medida de los ángulos interiores se mantiene, originando así la activación de la génesis semiótica, esto da origen a la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental.

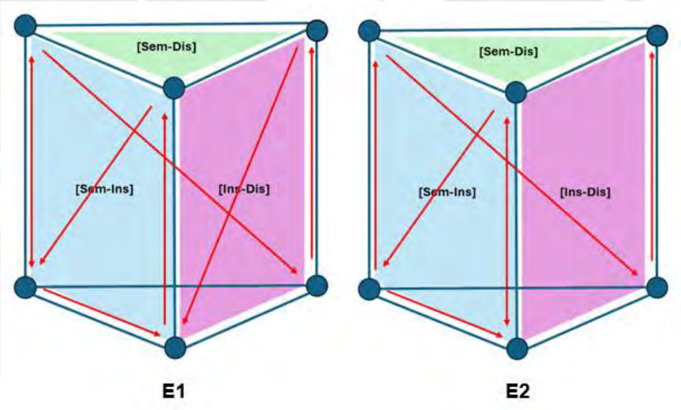
Asimismo, Kevin activa un referencial que, aunque no lo expresa de forma explícita se refiera a un criterio de semejanza, para justificar mediante un proceso de prueba que los triángulos son semejantes debido a que ambos triángulos tienen un par de ángulos con la misma medida, lo que origina la activación de la génesis discursiva. Por ello, se origina la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo, ya que las distintas acciones sobre las representaciones figurales (referido a las distintas representaciones que se obtienen de los triángulos ABC y PQR) apoyan en la validación de la prueba de semejanza de los triángulos ABC y PQR. También, se activa el plano vertical Instrumental-Discursivo debido a que el uso de los artefactos (deslizadores y herramientas en GeoGebra) genera la construcción de nuevas configuraciones que ayudan al proceso de prueba de la semejanza de los triángulos ABC y PQR.

Tarea 2 - etapa abajo-arriba - estudiante Kevin

Se presenta en la Figura 77, la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 2, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 77

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 2 para Kevin



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de Kevin con relación a la Tarea 2, se tiene que tanto en **E1** y **E2** se activan los tres planos verticales Semiótico-Instrumental, Instrumental-Discursivo y Semiótico-Discursivo. La activación del plano Semiótico-Instrumental se evidencia dado que se involucra en todo momento a los artefactos como deslizadores, casillas de control, los vértices de los triángulos, la herramienta *Ángulo*, entre otros que hace favorecer la activación del plano mencionado.

El plano Instrumental-Discursivo se activa en ambos episodios, dado que involucran la génesis instrumental y discursiva, pues se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, referente a la definición y criterios de la semejanza de triángulos que ayudan a justificar esta relación entre los triángulos, aunque no lo expresa de forma explícita o de forma incompleta.

En relación con los paradigmas que prioriza Kevin en su trabajo matemático para la Tarea 2, se puede observar que, para la justificación de la relación de las formas de las representaciones de los triángulos, lo hace bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos simbólicos para llegar a una respuesta válida; por ende, se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**. Por otro lado, para la justificación de la semejanza entre los triángulos ABC y PQR hace uso de un sistema de axiomas incompleto, y estas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica por el cual se tiene la **Geometría axiomática natural (GII),** aunque presenta algunas falencias en el manejo de los conceptos dado que los tiene del todo claro**.**

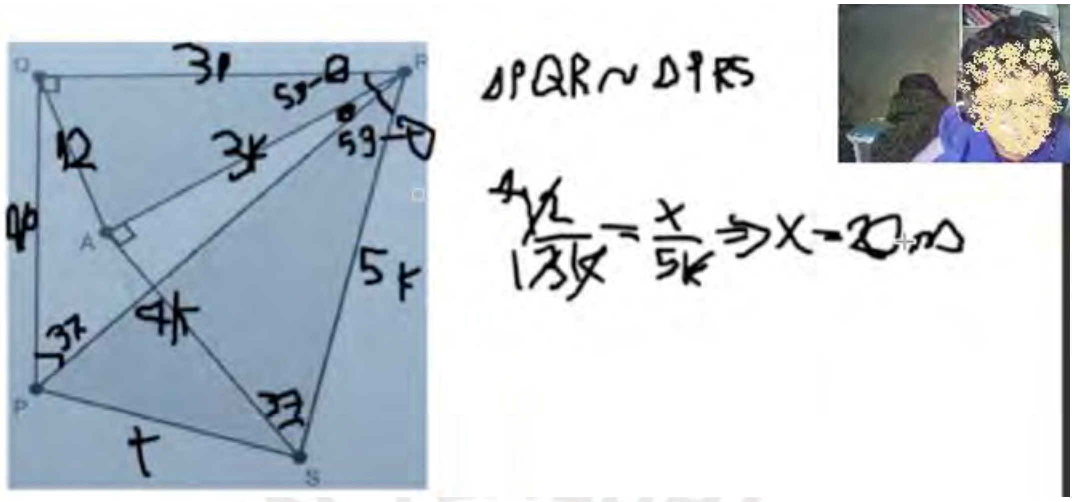
Tarea 3 - etapa arriba-abajo - estudiante Kevin

En la tarea 3, Dennis reconoce los datos del problema y representa el valor numérico de la medida del segmento QA, también representa los ángulos QPR y ASR con sus respectivas medidas. Luego, reconoce la existencia de dos triángulos rectángulos conocidos PQR y RAS de 37° y 53°, y con ello representa las proporciones de los lados de los triángulos mencionados, indicando que tienen las mismas proporciones de 3, 4 y 5 pero le asigna constantes distintas para cada triángulo que son “k” y “p” dado que son dos triángulos distintos. Además, le asigna a la medida del ángulo ARP una variable “θ” y con ello indica que las medidas de los ángulos QRA y PRS son “53°- θ”. En seguida, Kevin indica que hay una semejanza entre los triángulos PQR y PRS, señalando el criterio de semejanza lado-ángulo-lado y, a partir de identificar estos triángulos hace uso de la definición de la semejanza en la cual plantea una igualdad de razones con lo que determina el valor del lado PS. Cabe resaltar que, los triángulos que Kevin identifica no son triángulos semejantes ya que los verdaderos triángulos semejantes son QRA y PRS.

En la Figura 78 se presentan las acciones de Kevin para la Tarea 3.

Figura 78

Acciones de Kevin para la Tarea 3



A partir de las acciones realizadas por Kevin para la Tarea 3, se identifican los episodios en la siguiente tabla:

Tabla 13

Episodios identificados para Kevin en la Tarea 3

Episodios	Acciones
E1: Noción del triángulo rectángulo de 37° y 53°	Identificación de los elementos del gráfico. Identificación de los triángulos rectángulos de 37° y 53°. Completitud del ángulo complementario de 37°. Uso de las proporciones del triángulo de 37°y 53°.
E2: Noción de semejanza de triángulos y cálculo de la medida del lado PS	Representación con la variable θ al ángulo ARP. Operaciones entre medidas de los ángulos. Identificación de triángulos semejantes y el caso de la semejanza. Cálculo del valor de la medida del lado PS.

Para el **análisis de la circulación del TM de Kevin en E1**, a partir de la representación figural de la Tarea, que Kevin toma como representamen, completa los datos en el gráfico según las condiciones de la tarea identificando las condiciones, datos e identifica la existencia de triángulos rectángulos aproximados conocidos de 37° y 53°, mediante un proceso de visualización, dando origen a la génesis semiótica. Seguidamente, toma como referencial teórico a las propiedades de los lados de un triángulo rectángulo de 37° y 53° y mediante un proceso de prueba justifica las proporciones de los lados PQ, QR, PR y RA, AS, RS dando origen a la génesis discursiva, esto origina la activación del plano vertical Semiótico-Discursivo. En seguida, toma como artefactos simbólicos a las variables “k” y “p” para representar las medidas de los lados mencionados mediante un proceso de construcción, dando origen a la génesis instrumental y así, se origina la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo. Asimismo, se evidencia la activación del plano vertical Semiótico-Instrumental, pues entra en juego las representaciones de los triángulos PQR y RAS con el proceso de construcción para representar las medidas de los lados de los mencionados triángulos.

Por último, para el **E2**, a partir de la representación figural de la Tarea, que Kevin toma como representamen, toma como artefacto simbólico a la variable θ para representar a la medida del ángulo ARP mediante un proceso de construcción y luego, representa las medidas de los ángulos QRA y PRS, en términos de ésta variable mediante un proceso de construcción al usar la operación de la resta respecto a las medidas de los ángulos QRP y PRS con la variable “x”, dando origen nuevamente a la génesis instrumental. Luego toma como representamen a las representaciones de los triángulos PRQ y PRS, reconoce los lados que, para Kevin cumplen una misma relación mediante un proceso de visualización, dando origen a la génesis semiótica, lo que origina el plano vertical Semiótico-Instrumental e indica que hay una semejanza entre los triángulos PRQ y PRS, justificando ésta afirmación mediante un proceso de prueba al tomar como referencial teórico al criterio de la semejanza lado-ángulo-lado, dando origen a la génesis discursiva, esto evidencia la activación del plano vertical Instrumental-Discursivo, dado que el uso de los artefactos simbólicos (como las variables y las operaciones) generan nuevas configuraciones en la representación figural de la tarea que ayudan al proceso de prueba de la semejanza de los triángulos PQR y PRS.

También, se activa el plano vertical Semiótico-Discursivo, pues las acciones en las representaciones tanto de la tarea como la de los triángulos PQR y PRS, ayudan en el proceso de prueba para validar la semejanza de los triángulos mencionados.

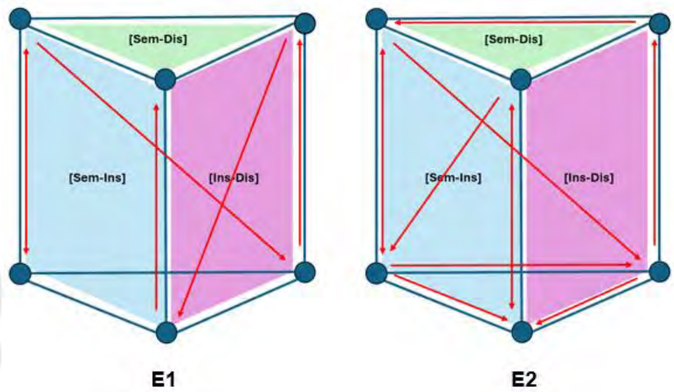
Por último, identifica los lados correspondientes de los triángulos semejantes identificados partiendo de la representación figural de los triángulos PQR y PRS, que los toma como representamen y usa su referencial de la definición de semejanza respecto a la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes para que mediante un proceso de construcción, se determine el valor del segmento PS al tomar como artefacto a la división respecto a las medidas entre estos lados, esto da origen a la génesis instrumental.

Tarea 3 - etapa abajo-arriba - estudiante Kevin

Se presenta en la siguiente figura la descripción global del trabajo matemático para la Tarea 3, según los episodios identificados en la etapa arriba-abajo.

Figura 79

Descripción global del ETM según los episodios identificados en la Tarea 3 para Kevin



Respecto a la descripción global del trabajo matemático de Kevin para la Tarea 3, en el cual para los episodios **1** y **2** se activan los tres planos verticales. Además, en los episodios mencionados se involucra con artefactos como variables, ángulos, entre otros que hace favorecer la activación del plano Semiótico-Instrumental, esto permite explorar las representaciones de los triángulos relacionados con el uso de artefactos para que se logre visibilizar los resultados que se producen; por otro lado, el plano Instrumental-Discursivo se activa también en los dos episodios, ya que involucran la génesis instrumental y discursiva, dado que se desarrolla un razonamiento deductivo basado en un referencial teórico, como las proporciones de los lados de triángulos rectángulos de 37° y 53°, así como también la definición y criterios de la semejanza de triángulos, que fue útil para llegar a la determinación de la relación de medidas de ciertos segmentos y aplicar una igualdad de razones para que posteriormente llegue al resultado final.

En relación con los paradigmas que prioriza Kevin en su trabajo matemático para la Tarea 3, se puede observar que para la justificación de la relación de la medida de diversos segmentos en la representación figural de la Tarea, como lo son las propiedades de los lados de triángulos rectángulos de 37° y 53°, así como también para la justificación de la semejanza entre los triángulos ABC y PQR, hace uso de un sistema de axiomas incompleto, y éstas justificaciones o pruebas se desarrollan dentro del axioma establecido, el cual está relacionado con la geometría euclidiana clásica por el cual se tiene la **Geometría axiomática**

natural (GII), aunque presenta algunos errores en la identificación de los triángulos semejantes**.** Además, justifica ciertas relaciones entre los dos triángulos bajo la percepción, la deducción y la exploración haciendo uso de artefactos concretos o simbólicos para llegar a una respuesta válida, por lo que se observa una geometría práctica que se relaciona a la **Geometría natural (GI)**.

Conclusiones

Este trabajo de investigación tiene como objetivo principal, analizar el trabajo matemático que realizan los estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica constituida por tres tareas sobre semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital, que en este caso es en GeoGebra, éste objetivo se logró dado que se llevó a cabo mediante el análisis de las acciones de los estudiantes tomando en cuenta aspectos asociados a las componentes y procesos de los planos epistemológico y cognitivo de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático. Los objetivos específicos que se plantearon fueron tres y con relación a ellos se concluyó lo siguiente:

Para el primer objetivo específico: identificar las génesis que los estudiantes activan cuando resuelven tareas sobre semejanza de triángulos, se encontró que al analizar las acciones de los estudiantes se activan en distintos momentos, las génesis semiótica, instrumental y discursiva, siendo la instrumental y semiótica las que con mayor frecuencia se activan; la génesis instrumental debido a que son favorecidas por la diversidad de herramientas que se manejan al trabajar con el entorno de GeoGebra, así como también artefactos simbólicos y la calculadora en el caso de María, que fue la única de los estudiantes que utilizó herramientas que no están contempladas en GeoGebra y la génesis semiótica, debido a la constante observación de las representaciones de los triángulos para poder describir el comportamiento y las relaciones que existen entre ellas, esto se observó en los tres estudiantes. Sumado a ello. La génesis discursiva se activó en una menor frecuencia, cabe resaltar que, de los tres estudiantes el que más activó su génesis discursiva fue Kevin (ocho veces), dado que frecuentemente recurría a sus referencial tales como conceptos y definiciones sobre triángulos rectángulos notables, semejanza y congruencia, aunque éstos últimos con ciertas falencias, tal como Haj-Yahia (2021) menciona en su investigación al referirse a la constante confusión entre el concepto de semejanza y congruencia por parte de los estudiantes cuando estudian estos objetos matemáticos.

Con respecto al segundo objetivo específico: identificar los planos verticales que activan los estudiantes, se encontró que los planos que se priorizan con mayor frecuencia son el plano Semiótico-Instrumental ya que, en gran parte de las tareas se utilizaron las distintas herramientas de GeoGebra y artefactos simbólicos para la exploración de las representaciones de los triángulos. También, otro plano que se prioriza es el plano Instrumental-Discursivo ya que usan los artefactos tanto digitales como simbólicos para justificar ciertas relaciones y propiedades entre los triángulos como la semejanza y congruencia y entre los segmentos, como es el paralelismo, aspecto importante para construir el concepto de semejanza en la Tarea 1.

Con relación al tercer objetivo específico: caracterizar los paradigmas de la geometría que los estudiantes privilegian, se observó que los tres estudiantes priorizan al paradigma de la Geometría Natural I, ya que relacionaron la noción de semejanza justificándolos con aspectos concretos debido a que utilizaron las representaciones de los triángulos que se van generando en el entorno de GeoGebra, las medidas de los lados y las operaciones que lograron plantear y resolver. También, se pudo observar que en ciertos episodios se priorizó el paradigma de la Geometría axiomática natural, como lo hizo María para justificar el paralelismo entre segmentos, usando el Teorema de los ángulos alternos interno, así como también para llegar a resolver la Tarea 3, donde recurrió a la definición de la semejanza de los triángulos para poder plantear ciertas proporciones con el fin de lograr llegar a la respuesta de la tarea. Sumado a ello, con respecto a Dennis, se observa que prioriza este paradigma al usarlo para el desarrollo de la Tarea 3, donde recurre a las definiciones de los triángulos rectángulos para poder justificar las proporciones de los lados de los triángulos identificados y, por último, para Kevin, se observa que prioriza este paradigma al usar la definición, criterios de la semejanza y la congruencia de los triángulos en las tres tareas, aunque con ciertos errores para poder resolver éstas.

Como parte de las conclusiones, también se puede observar que sigue existiendo dificultad para identificar triángulos semejantes, pues se observó en María y Kevin que, aunque indican una existencia de semejanza entre determinados triángulos, cometen errores en esta identificación. Por otro lado, en el caso de Dennis se puede observar que no logra identificar la semejanza de los triángulos en la Tarea 2 y 3.

Con lo mencionado, se concluye que la secuencia didáctica planteada resalta la importancia de diseñar tareas para la enseñanza de la semejanza de triángulos, debido a que implica un análisis del trabajo matemático muy rico y diverso con relación a procesos cognitivos y epistemológicos que pueden desarrollar los estudiantes y con ello poder mejorar los niveles de comprensión del concepto del objeto matemático en estudio. También, se resalta la importancia de la tecnología, como GeoGebra, debido a que con sus herramientas permitió a los estudiantes interactuar con las dimensiones y las relaciones de las representaciones de los triángulos y poder construir mediante las Tareas 1 y 2 propuestas en la secuencia didáctica, la noción de la semejanza de triángulos, se puede observar que ésta herramienta tecnológica ayudó en gran parte a los estudiantes para que puedan observar y deducir que las proporciones de los triángulos semejantes siempre se mantiene constantes y que además tienen ángulos correspondientes congruentes. El uso de ésta tecnología en el aprendizaje de la semejanza de triángulos es importante ya que les permite explorar conceptos de una forma dinámica e interactiva, dado que por ejemplo, permitió a los estudiantes manipular las representaciones de los triángulos en tiempo real modificando medidas y observando cómo se conservan ciertas relaciones propias de la semejanza de triángulos, caso contrario lo que ocurre a lápiz y papel ya que si se requiere hacer una modificación en las dimensiones de las representaciones exige rehacer los dibujos y ello conlleva a una limitación en la exploración. Además, los estudiantes lograron comprobar al arrastrar los vértices que los criterios de semejanza se cumplen en diferentes casos y esto les ayudó a formular conjeturas sobre la proporcionalidad de los lados y la conservación de la congruencia de los ángulos sin la necesidad de depender sólo de cálculos numéricos, que es lo que ocurre cuando se realizan este tipo de tareas a lápiz y papel, permitiendo en ellos que validen experimentalmente las propiedades que existen en la semejanza de triángulos.

Con respecto al aporte de este trabajo a futuras investigaciones:

Se sugiere aplicar la propuesta didáctica que se planteó para analizar el trabajo matemático de los estudiantes en estudiantes de menor grado en secundaria, priorizando un mayor tiempo para cada tarea con el fin de observar cómo va consolidando y aprendiendo la semejanza de triángulos desde una etapa temprana. Asimismo, se sugiere aplicar la secuencia didáctica para analizar el trabajo matemático de profesores en formación inicial, considerando cómo su experiencia previa como estudiantes, en relación con objeto matemático estudiado, condiciona su desempeño en la enseñanza de la semejanza de triángulos. Además, resulta de gran relevancia adaptar esta secuencia didáctica al uso de otros softwares o herramientas tecnológicas, con el fin de ampliar su aplicabilidad en diversos contextos educativos.

Por último, se espera que futuros investigadores puedan utilizar esta secuencia, ya validada, como referencia para analizar los Espacios de Trabajo Matemático personal, idóneo o de referencia. De este modo, se abre un sinnúmero de opciones para continuar investigando sobre el trabajo matemático de los estudiantes en el dominio de la geometría, un campo que presenta notorias dificultades, sobre todo en el nivel secundario.

Referencias

Boyer, C. (1994). Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial

Brito, C. de S., & Bairral, M. A. (2023). Triangle similarity: interactions in meshes and slider. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *13*(3), 1–21. https://doi.org/10.37001/ripem.v13i3.3543

Cribillero Aching, J. A. (2022). *Transformaciones en las representaciones semióticas de la semejanza de triángulos en estudiantes de 4to año de secundaria mediado por GeoGebra* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional – Pontifica Universidad Católica del Perú.

Ferreira Cabral, C. A., & Silva de Almeida, T. C. (2020). Semelhança de Triângulos e GeoGebra: uma alternativa de ensino por meio de representações dinâmicas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, *5*(1). https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.12061

Haj-Yahya, A. (2022). Students' conceptions of the definitions of congruent and similar triangles*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(10), 2703–2727. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1902008

Henríquez Rivas, C., & Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), 1550–1572. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15

Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias/Enseñanza de las Ciencias*, *39*(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. (Sexta ed.).

Kuzniak A., Montoya E. y Vivier L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 235- 249. http://www.centroedumatematica.com/Cuadernos/CuadernosCompletos/Cuaderno15 . pdf

Kuzniak, A. y Nechache, A. (diciembre de 2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), Espacio de Trabajo Matemático. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271-289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., & Philippe R. Richard. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa,* 17(4(I)), 5–15. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. [Tesis doctoral. Université Louis Pasteur. Strasbourg]

Lutfi, M. K., & Jupri, A. (2020). Analysis of junior high school students' spatial ability based on Van Hiele's level of geometrical thinking for the topic of triangle similarity. *Journal of Physics. Conference Series*, 1521(3), 032026. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1521/3/032026

Nolasco, H., Velázquez, S. (2013). Análisis histórico y epistemológico del concepto de semejanza. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 427-435. (ISBN: 978-607-95306-6-2). Belo Horizonte, Brasil, CLAME

Masgo Lara, L. A. (2021). *Movilización del concepto semejanza de triángulos en estudiantes de cuarto de secundaria por medio de las representaciones semióticas* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional – Pontifica Universidad Católica del Perú.

Menares Espinoza, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. R. (eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol. 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Montoya-Delgadillo, E. y Reyes Avendaño, C.G. (2022). The Reference Mathematical Working Space. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4

Ojeda Zañartu, Erlita (2018) *Matemática IV.* Ediciones Corefo

Perú, Ministerio de Educación. (2016). *Diseño Curricular Nacional de la educación Básica Regular. Lima.*

Prior, J. M., & Torregrosa, G. G. (2020). Razonamiento Configural y Espacio de Trabajo Geométrico en la Resolución de Problemas de Probar. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 178–198. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09

Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students. *Mathematics*, *10*(5), 789. https://doi.org/10.3390/math10050789

Reichert, J. T., & Horbach, I. C. (2021). Semelhança de triângulos: estudo propositivo através do Scratch. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas Em Educação Matemática*, *3*(1), 38–55. https://doi.org/10.36661/2596-318x.2021v3n1.12409

Santillana (2018) *Guía de recursos didácticos Matemática 4*

Ubah, I., & Bansilal, S. (2019). The use of semiotic representations in reasoning about similar triangles in Euclidean geometry. *Pythagoras*, *40*(1). https://doi.org/10.4102/pythagoras.v40i1.480

Yeonha Kim; Bomi Shin. (2023). *Analysis of students' communication in a shape similarity class using RGE Math*. Journal of the Korean Society for Mathematics, 26(2), 111-135. http://doi.org/10.30807/ksms.2023.26.2.003

Anexos

Tarea 1: Explorando triángulos

Apellidos y nombres: ………………………………………………………………………

1. Ingrese a https://www.geogebra.org/geometry/pfmetaxg

2. Vamos a representar un triángulo ABC

Para ello, realice los siguientes pasos de construcción:

a) Con la herramienta *Punto* , dibuje tres puntos no colineales A, B y C
b) Con la herramienta *Polígono* , represente el triángulo ABC.

3. Ubique un punto D exterior a la región triangular contenida en ABC. Luego, con la herramienta *Deslizador* , cree un deslizador con un mínimo de 0.2 y un máximo de 2 con un incremento de 0.1, luego, haciendo clic izquierdo en el deslizador y seleccionando propiedades, seleccione **Básico**, para luego en la opción etiqueta seleccionar la opción Nombre haciendo que solo aparezca el deslizador sin ningún valor.
4. Mediante la herramienta *Homotecia* , seleccione el triángulo ABC como objeto y el punto D como centro de homotecia. Luego escriba como factor de escala la letra “d”

5. Luego, haga uso del deslizador para separar y los triángulos y renombre al triángulo $A'B'C'$ con PQR.

Al finalizar la construcción, responda las siguientes cuestiones:

a) Explore los triángulos ABC y PQR y explique la relación que observa entre ellos.

b) Observe los triángulos ABC y PQR e identifique los pares de lados paralelos. Explique su procedimiento de cómo llegó a la conclusión de que los lados son paralelos.

c) Use las herramientas de GeoGebra y determine la relación entre los pares de lados paralelos de los triángulos ABC y PQR. ¿Qué puede concluir?

Después, Cambie la longitud de los lados y posiciones de los vértices de los triángulos ABC y PQR ¿Qué sucede con la relación entre los lados paralelos? Explique

d) Observe qué relación tienen los ángulos que se oponen a los pares de lados paralelos. Después explique la conclusión general a la que ha llegado sobre lo que aprecia de los triángulos ABC y PQR.

Tarea 2: ¿Qué misterio conectan los lados y ángulos de estos triángulos?

Apellidos y nombres: ………………………………………………………………………

Ingrese al enlace https://www.geogebra.org/geometry/jdtcvufs

Trabajemos con dos triángulos denotados por ABC y PQR que están representados en el entorno de GeoGebra. A simple vista, se observa que los lados de los triángulos tienen medidas diferentes y están orientados de manera distinta. Vamos a investigar algunas relaciones entre sus lados y ángulos interactuando con los triángulos, utilizando las casillas de control y las herramientas disponibles en GeoGebra.

a) Indique la relación que observa entre los lados mostrados inicialmente de los triángulos ABC y PQR y el ángulo entre estos lados.

b) Luego, interactuando con las herramientas de GeoGebra para alterar las medidas de los lados, ángulos, orientación, medir más ángulos y lados, etc. Indique las relaciones que observa y que puede concluir sobre la relación de estos dos triángulos.

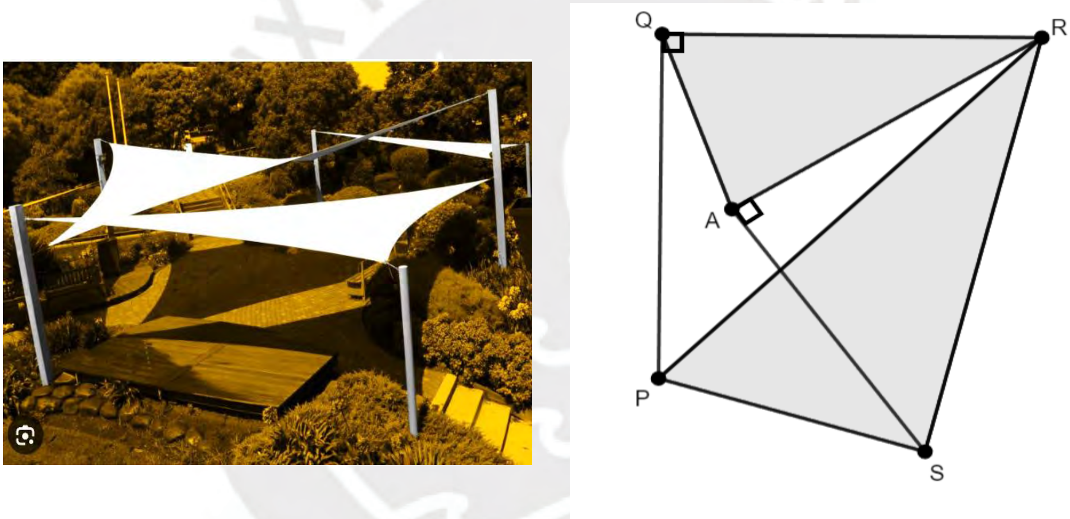
Tarea 3: “Toldo para zona de descanso”

Apellidos y nombres: ....

Para cubrir una zona de descanso en un parque público, la empresa “Acoger” debe instalar un toldo de forma triangular (ver figura 1a). Un arquitecto de la empresa realizó un plano del modelado del toldo vista desde arriba (ver figura 1b) e indicó que los cables se deben fijar en los postes verticales en 4 puntos, todos a una misma altura del piso, dos de estos cables los ubica en los puntos Q y A de su plano y los otros dos los representa ubicados en los puntos P y S. Además, los ángulos que forman los cables representados por los ángulos QPR y ASR que sostienen la estructura deben ser de 37° y la distancia entre los puntos de soporte Q y A debe tener 12 metros.

Sin embargo, ocurrió un inconveniente y el arquitecto olvidó de anotar la medida del cable $\overline{PS}$, elemento necesario para la instalación del toldo.

La empresa “Acoger” necesita saber que longitud del cable PS para proceder con la instalación. ¿Cómo podemos ayudar a la empresa a obtener esta información?



(a) (b)

Fuente: https://zagleslonezne.eu/es_ES/p/Toldo-vela-4%2C2x4%2C2x5%2C9/616

CONSENTIMIENTO LIBRE E INFORMADO

El objetivo de este formulario es brindarle información clara sobre una investigación cuyo propósito es desarrollar, aplicar y analizar el Trabajo Matemático de estudiantes de cuarto año de secundaria cuando resuelven tareas de semejanza de triángulos con el uso de tecnología digital. Esta investigación está a cargo del estudiante de la maestría **Miguel Angel Urquiza Ruiz**, del Programa de Maestría en la enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, y se desarrollará conforme al reglamento del comité de ética para la investigación con Seres Humanos y Animales de dicha universidad.
Toda la información recogida durante el estudio será tratada con estricta confidencialidad. Los datos serán accesibles únicamente para el investigador responsable y no se divulgará la identidad de los participantes. Se utilizarán seudónimos para preservar su anonimato
Además, la participación en este estudio es completamente voluntaria. Nadie será penalizado si decide no participar en el estudio en cualquier momento, y puede retirarse de la investigación sin riesgo y sin sufrir daños personales.

Después de conocer y comprender el objetivo de la investigación, así como estar consciente de la necesidad de utilizar testimonios para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias).
Yo (padre/madre) ____ identificado(a) con DNI _________ autorizo a mi hijo(a) ________________________ a participar como sujeto en la investigación, que se realizará en el mes de octubre del 2024, y estoy dispuesto a responder a los cuestionarios relativos a la investigación y algunos datos personales confidenciales.
Por este medio **AUTORIZO** al investigador **Miguel Angel Urquiza Ruiz** a tomar fotografías, grabar audio y video, recopilar producción escrita de las sesiones didácticas y actividades realizadas, que sean necesarias para recoger el testimonio sin carga económica para ninguna de las partes.
Al mismo tiempo, cedo el uso de imágenes (fotos), audio, vídeo y/o testimonios de mi hijo(a) para fines científicos y de estudio (libros, artículos, diapositivas y transparencias) a favor del investigador arriba especificados, en cumplimiento de la legislación que protege los derechos de los niños y adolescentes (Nuevo código del Niño y del Adolescente, Ley nº 27337). Soy consciente de que yo y/o los tutores legales del menor recibiremos una copia de este documento

____

Firma del padre/madre del participante

El investigador ha respondido a mis preguntas y han hablado con mis padres y/o tutores. He leído y acepto participar como voluntario en la investigación descrita anteriormente: __________

____

Miguel Angel Urquiza Ruiz
investigador

Contacto con el investigador responsable:
Si necesita más información sobre este estudio, llame al investigador: Teléfono: 980585404