PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE GRADUADOS

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA SOLUCIÓN GLOBAL DE UN SISTEMA DISPERSIVO NO LINEAL DE TIPO BENJAMIN-BONA-MAHONY

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas

Autor

Segundo Teófilo Vega Guadalupe

Asesor

Juan Montealegre Scott

Jurado

Julio Alcántara Bode

Ulices Zavaleta Calderón

LIMA - PERÚ
2012

DEDICATORIA

A Dios mi creador, sin él no soy nada.

A Cecilia Ramirez Medina, esposa y amiga, por su apoyo, comprensión y paciencia.

A Segundo Rolando, Carlos Alberto, Alí Manuel, Miguel Ángel y Aldo Jesús mis hijos, cada uno es la prolongación de mi vida.

A mi madre Elvia Guadalupe, quien con su esfuerzo invaluable me dió lo que soy.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios, por iluminar mi mente y haber puesto en mi camino a grandes amigos que de una manera y otra han contribuido en la realización de esta tesis, me refiero:

Al profesor Mg. Juan Montealegre Scott asesor en este trabajo de tesis, por su invaluable apoyo incondicional, por la paciencia durante ese tiempo, por tener confianza en mi desde el principio y por la amistad que me brinda. Que Dios te bendiga Juan.

Al profesor Aldo Mendoza Uribe por apoyarme en la corrección del trabajo. Gracias Aldo, por dedicar, parte de tu tiempo valioso, en apoyarme incondicionalmente.

Al profesor Mg. Jenniel Ruíz quien contribuyo con la revisión, corrección a lo largo de la tesis y tipeo. Gracias Jenniel, por tu apoyo y paciencia.

En fin, a todos que de alguna manera u otra contribuyeron para que se haga realidad este trabajo de tesis. Que Dios los bendiga a todos.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el comportamiento asíntótico de las soluciones de un sistema dispersivo no lineal de tipo Benjamin-Bona- Mahony cuando t se aproxima al infinito. El sistema de interés tiene la forma

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 \partial_t u - a_1 \partial_x^2 \partial_t v + a_2 \partial_x u + a_3 v^p \partial_x v + a_4 \partial_x (u^p v) + u^p \partial_x u = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^2 \partial_t v - a_1 \partial_x^2 \partial_t u + a_2 \partial_x v + a_3 u^p \partial_x u + a_4 \partial_x (u v^p) + v^p \partial_x v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

donde a_1, a_2, a_3 y a_4 son constantes reales con $a_2 > 0$ y $0 < a_1 < 1$, $u = u\,(x,t)$ y $v = v\,(x,t)$ son funciones reales con variables reales $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y p es un entero mayor o igual que uno.

Para ello estudiamos la existencia, unicidad y dependencia continua respecto del dato inicial en $C\left([0,T] : H^s\left(\mathbb{R}\right) \times H^s\left(\mathbb{R}\right)\right)$ para $s \geq 2$ de la solución local de (1), utilizando el teorema del punto fijo de Banach. Luego, mostramos como tal solución local puede ser extendida a una única solución global en $C\left([0,T[: H^s\left(\mathbb{R}\right) \times H^s\left(\mathbb{R}\right)\right)$ para $s \geq 2$, para luego analizar el comportamiento asintótico de la solución para valores grandes de p, utilizando el método de la fase estacionaria, el lema de Van der Corput y el lema de Strauss.

Índice general

Notaciones

X, Y espacios de Banach.

X', Y' espacios duales de los espacios de Banach X e Y.

$\mathcal{L}(X,Y)$ espacio de operadores lineales acotados de X en Y.

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

$X \hookrightarrow Y$ cuando X está contenido en Y con la aplicación ïnclusiónçontinua

$C([0,T], X)$ espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X.

$C^1([0,T], X)$ espacio de funciones continuamente diferenciables de $[0,T]$ en X.

$\mathcal{D}(A)$ dominio del operador lineal A.

$\mathcal{R}(A)$ rango del operador lineal A.

$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x)\, dx$ transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$.

$\overset{\vee}{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} u(\xi)\, d\xi$ transformada inversa de Fourie en $\mathbb{R}^n$.

$C^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones continuas diferenciables de orden k en $\mathbb{R}^n$.

$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap\limits_{k \geq 0} C^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$.

$C_0^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones de clase C^k con soporte compacto.

$S(\mathbb{R}^n)$ espacio de Schwartz en $\mathbb{R}^n$.

$S'(\mathbb{R}^n)$ espacio de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$.

$L^p(\mathbb{R}^n)$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ de orden p, $1 \leq p \leq \infty$.

$\|u\|_{L^P} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$, la norma en $L^p(\mathbb{R}^n)$ de u.

$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{u$ medible en $\mathbb{R}^n$ y existe $C > 0 : |u(x)| \leq C$ c.t.p en $\mathbb{R}^n\}$.

$\|u\|_{L^\infty} = \text{ínf}\,\{C > 0 : |u(x)| \leq C$ c.t.p en $\mathbb{R}^n\}$ norma en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de u.

J_x^s potencial de Bessel con respecto a x de orden $-s$, $\widehat{J_x^s u}(\xi) = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi)$.

$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{J^s u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$ el espacio de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$.

$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$, norma en $H^s(\mathbb{R}^n)$ de u.

$\langle u, v \rangle_s = \langle J^s u, J^s v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi$, producto interno en $H^s(\mathbb{R}^n)$ de u, v.

$\langle u, v \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ producto interno en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n) = H^s \times H^s$.

Introducción

La primera observación publicada de una onda solitaria u onda de translación fue hecha por John Scott Russell en el canal de Unión de Hermigton, Escocia, muy cerca del campus Riccarton de la universidad de Hériot-Watt (Edimburgo), descrita en su obra Reporte sobre ondas para la Asociación Británica. En este reporte, Russell, ver [16], describe como él siguió el movimiento de una masa de agua solitaria por más de una milla, montado en un caballo, observando como esta masa de agua en agitación empezó a salir hacia delante con gran velocidad, tomando la forma de una larga elevación solitaria, redonda, suave y bien definida de una masa de agua, la cual continuó su curso a lo largo del canal preservando su forma original, transcurrido un tiempo, su altura gradualmente iba disminuyendo. Russell fue capaz de repetir dicho fenómeno en su laboratorio, dedujo que el volumen de agua en la onda era igual al del agua desplazada, proponiendo una ecuación para la velocidad de propagación, c:

$$c^2 = g(h + a) \tag{2}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, h es la profundidad del agua en estado de equilibrio y a la amplitud de la onda. De (2) se deduce que a mayor amplitud mayor velocidad. Y al elevar un masa de agua era capaz de generar una onda de depresión. Sin embargo, dicha onda daba como resultado un tren de ondas dispersivas. En 1895, D. J. Korteweg y G. de Vries (KdV) obtuvieron una ecuación que describe el perfil de la onda. Esta ecuación estaba basada en la suposición de que la profundidad del agua es pequeña en comparación con el ancho de las ondas y relaciona la amplitud de la onda y sus cambios en el espacio con el cambio de la amplitud en el tiempo, es hoy en día, una de las ecuaciones clásicas del mundo no lineal. A mediados de 1960 los científicos comenzaron a usar computadoras digitales pasa estudiar la propagación de ondas no lineales, y fue entonces cuando las ideas de Russell empezaron a ser apreciadas. Los físicos Norman Zabusky y Martin Kruskal, de la universidad de Princeton, descubrieron la existencia de un tiempo de ondas localizadas muy especiales, que exhibían un comportamiento tipo partícula, que las llamaron solitón a una onda solitaria en forma de pulso que es capaz de trasladarse sin cambio de forma y sin pérdidas de energía, y además es capaz de conservar su estructura después de un choque con su semejante, es decir, con comportamiento tipo partícula que era inusual en ondas no lineales. En este tipo de sistemas hay dos procesos fundamentales que gobiernan el comportamiento de los pulsos: un proceso dispersivo que tiende a ensanchar los pulsos, y un proceso no lineal (cuando la intensidad del campo se acrecienta) que tiende a modificar de manera continua la frecuencia de las ondas que conforman el pulso. Por si solos, estos procesos serían destructivos. Sin embargo al combinarse de manera adecuada, estos dos procesos parecen cancelarse mutuamente, alcanzando un equilibrio estable. Es interesante observar aquí que el proceso no lineal no tiene la apariencia de ser un proceso contrario al proceso dispersivo, ya que su efecto no es adelgazar a los pulsos.

Bajo estas consideraciones analizamos la solución de un sistema de ecuaciones dispersivas no lineales, con diferentes constantes, estructurado de un par de ecuaciones del tipo T. B., Benjamin, J. Bona y J. J. Mahony (BBM):

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 \partial_t u - a_1 \partial_x^2 \partial_t v + a_2 \partial_x u + a_3 v^p \partial_x v + a_4 \partial_x (u^p v) + u^p \partial_x u = 0 \\ \partial_t v - \partial_x^2 \partial_t v - a_1 \partial_x^2 \partial_t u + a_2 \partial_x v + a_3 u^p \partial_x u + a_4 \partial_x (u v^p) + v^p \partial_x v = 0 \end{cases} \tag{3}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x) \tag{4}$$

Estas ecuaciones describen el movimiento de ondas con pequeña amplitud en la superficie de un canal raso limitado inferiormente por un fondo plano, impermeable constante. El fluido que llena el canal se supone incompresible, irrotacional y no se consideran efectos de la viscosidad. Estos supuestos son razonables debido a que los efectos de vorticidad y viscosidad son apreciables sólo cerca del fondo. La posición en el canal unidireccional se representa por la variable espacial x y el tiempo con t.

Las funciones de variable real $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ representan la amplitud de la onda medida con respecto al nivel de reposo del agua. Las constantes adimensionales reales a_1, a_2, a_3 y a_4 con $a_2 > 0, 0 < a_1 < 1$ miden la magnitud de los efectos no lineales (a_3 y a_4) y dispersivo (a_1), de la propagación unidireccional en la superficie de un fluido homogéneo, de ondas largas dispersivas. En el caso $p = 1$, fue originalmente deducido por J. A. Gear y R., Grimshaw en 1984, como un modelo para describir la fuerte interacción entre longitudes de ondas débilmente no lineales.

El problema de Cauchy para el sistema de Korteweg de Vries fue estudiado por Bona, Ponce, Saut y Tom [8]. Ellos mostraron que el problema de valor inicial está bien formulado globalmente en un espacio adecuado de funciones, usando la teoría e Kato's para ecuaciones evolutivas abstractas, junto con algunos estimativos originados en el análisis armónico.

Si se considera (3) con $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, se obtiene una ecuación generalizada de BBM.

Dado el problema de valor inicial (3) - (4), nos preguntamos: ¿el problema de valor inicial está bien planteado localmente?, es decir, ¿el PVI (3) - (4) tiene única solución que depende continuamente del dato inicial?, y en caso afirmativo, ¿la buena formulación del problema de valor inicial es global?. Por último, si el problema de valor inicial tiene una única solución global, ¿cuál es el comportamiento asintótico cuando $t \to +\infty$?.

Para responder estas inquietudes, organizamos el trabajo como sigue: En el capítulo 1, presentamos las definiciones y propiedades fundamentales de la transformación de Fourier, espacio de Sobolev, desigualdades usadas en el trabajo, definiciones y propiedades del análisis funcional y del análisis armónico. En este capítulo los resultados no son demostrados, sin embargo, se da las referencias en las que se encuentran sus demostraciones. En el capítulo 2 se ve el problema de Cauchy para el sistema (2). En el capítulo 3, se estudia el buen planteamiento local del sistema (3) con valor inicial, se demuestra que si $(u_0, v_0) \in H^s$ con $s \geq 2$, entonces el PVI (3) - (4) tiene solución local que depende de los datos iniciales (u_0, v_0), el resultado acerca de la solución local es establecido usando el principio de contracción y una ecuación integral equivalente para aplicar el teorema del punto fijo de Banach en el espacio de Sobolev. El buen planteamiento global del PVI (3) - (4) se estudiará en el capítulo 4, demostrando el siguiente resultado: Si (u, v) es la solución de (3) con dato inicial $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, $s \geq 2$. Entonces existe un único par de funciones $(u, v) \in C\left([0,T]\,; H^s \times H^s\right)$ para cada $T > 0$ y $(u_t, v_t) \in C\left([0,T]\,; H^s \times H^s\right)$, (u, v) solución de (3) con $(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$. Resultado que muestra el buen planteamiento global de (3).

Finalmente, en el capítulo 5 se analiza el comportamiento asintótico del par de soluciones cuando $t \to +\infty$ del problema de valor inicial, siguiendo las ideas de J. Albert [2], quien probó que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}, \text{ cuando } t \to +\infty$$

siempre que el dato inicial sea pequeño y $p > 4$. El trabajo para la parte lineal utilizó el método de la fase estacionaria y mediante el lema de Van der Corput [17] y el lema de W. A. Strauss [18], se analiza el decaimiento de las soluciones globales que también fue considerado por Albert.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Transformada de Fourier

El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene una *multiplicación* que lo convierte en un álgebra de Banach. Esta operación se define como sigue.

Definición 1.1. *Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos su convolución por*

$$(u * v)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n.$$

La convolución es conmutativa y asociativa. Además

Teorema 1.2 (Desigualdad de Young)**.** *Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^1}.$$

Demostración. Usando la desigualdad de Minkowski para integrales, tenemos

$$\begin{aligned} \|u * v\|_{L^p} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy \right\|_{L^p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|u(\cdot, y)\|_{L^p} |v(y)|\, dy \\ &= \|u\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)|\, dy = \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3 (Desigualdad de Young generalizada)**.** *Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Demostración. Ver teorema 8.9, (a) de [10], página 232. □

Teorema 1.4. *Si* $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\partial^k (f * g) = \left(\partial^k f\right) * g.$$

Demostración. Ver [5], página 69. □

A continuación, establecemos la siguiente notación. Cualquier $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ es denominado un multi-índice. El orden del multi-índice α es definido por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Además, para $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definimos

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x)$$

y para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_1^{\alpha_n}$.

1.1.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición 1.5 (Transformada de Fourier en L^1)**.** *Sea* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, la transformada de Fourier de* u*, se define por*

$$\mathcal{F}u(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

y la transformada inversa de Fourier de u*, como*

$$\mathcal{F}^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} u(\xi)\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^n$$

donde $(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$.

La integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx$ tiene sentido, pues el integrando es una función integrable desde que $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.6. *Sean* $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$*. Entonces*

1. La aplicación $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\infty(\mathbb{R}^n)$ es una transformación lineal acotada y
$$\|\mathcal{F}u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|u\|_{L^1}.$$
2. $\mathcal{F}u$ es continua.
3. $\lim\limits_{\xi \to 0} \mathcal{F}u(\xi) = 0$ (Riemann Lebesgue)
4. $\mathcal{F}(u+v)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) + \mathcal{F}v(\xi)$ y $\mathcal{F}(\alpha u)(\xi) = \alpha \mathcal{F}u(\xi)$
5. $\mathcal{F}(u * v)(\xi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}u(\xi) \mathcal{F}v(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Ver [11], pag. 303, 308 y [10], pag. 251. □

Teorema 1.7. *Si* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\partial^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *con* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, entonces*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha u)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}u(\xi),\ si \lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Demostración. Ver [11], pag. 313. □

1.1.2. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la integral $\dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx$ en general no tiene sentido. Ahora discutiremos la extensión de la transformada de Fourier para definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ usaremos la propiedad de que el espacio $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.8. *(Plancherel). Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. Ver [13], pag. 6. $\square$

Por lo tanto $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado, así tiene una única extensión lineal acotada

$$\widehat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

llamada *transformada de Fourier* sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.9. *La transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal, isométrico y sobreyectivo.*

Demostración. Ver [13], pag. 7. $\square$

Por lo tanto existe la *transformada de Fourier inversa* $\check{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\{u_k\}_{k\in N}$ es una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{L^2} = 0,$$

la transformada de Fourier de u en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y la transformada de Fourier inversa de u sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ son calculadas respectivamente por

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}u_k \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n)$$

y

$$\check{u}(x) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}u_k \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

1.1.3. Distribuciones temperadas

El *espacio de Schwartz* es el conjunto de funciones reales

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty, \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}$$

donde para cada par de multi-índices $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial_x^\beta u(x)\right| < \infty.$$

A la función u se le denomina función temperada y el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es también conocido como el espacio de las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ rápidamente decrecientes.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con la métrica

$$d(u,v)=\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{2^{|\alpha|+|\beta|}}\frac{\|u-v\|_{\alpha,\beta}}{1+\|u-v\|_{\alpha,\beta}}$$

es un espacio métrico completo.

Definamos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el siguiente criterio de convergencia para sucesiones.

Definición 1.10. *La sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si*

$$(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n:\lim_{k\to+\infty}\|u_k-u\|_{\alpha,\beta}=0.$$

La relación entre la transformada de Fourier y el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está descrita en el siguiente teorema.

Teorema 1.11. *La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.*

Demostración. Ver [10], pag. 252. □

Teorema 1.12. *Sea $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

1. $\widehat{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

2. $\partial^\alpha\widehat{u}(\xi)=(-i)^{|\alpha|}(x^\alpha u)^\wedge(\xi)$ y $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi)=(i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{u}(\xi)$.

Demostración. Ver [16], pag. 252. □

Ahora por dualidad podemos definir el conjunto $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de las distribuciones temperadas.

Definición 1.13. *$T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ define una distribución temperada si T es un funcional lineal continuo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es decir, $T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ es una distribución temperada si y sólo si*

1. *T es lineal.*

2. *T es continua en relación a la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, esto es, si $u_k\to u$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $T(u_k)\to T(u)$ en $\mathbb{R}$.*

Así, denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las distribuciones temperadas.

Si $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, para $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Escribiremos

$$\langle T,u\rangle\equiv\langle T,u\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

en vez de $T(u)$.

Definición 1.14. *Una función* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *es una distribución temperada cuando el funcional lineal* $T_u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$T_u(v) = \langle T_u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, v(x)\; dx, \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

es continuo.

El siguiente teorema prueba que el conjunto $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es "grande".

Teorema 1.15. *Los elementos de* $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *son distribuciones temperadas.*

Demostración. Ver [3], pag. 154. □

Esto prueba que $L^p(\mathbb{R}^n)$ está continua y densamente incluido en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ esto es, $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p \leq \infty$. Por lo tanto, identificaremos a $L^p(\mathbb{R}^n)$ como un subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

La distribución $T_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ será identificada con u, y

$$u(v) = \langle u, v\rangle, \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \text{ y } \ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

en particular, si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, escribiremos

$$u(v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, v(x)\; dx, \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Definición 1.16. *Una distribución temperada* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *es una función en* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *si* $T_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $T = T_u$.

Definición 1.17. *(Derivada de una distribución). Dados y* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *un multi-índice, definimos la* α*-ésima derivada de* T *por*

$$\langle \partial^\alpha T, v\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha v\rangle \ \textit{ para cualquier } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Además, $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.1.4. Transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definiremos la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vía la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.18. *Si* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *la transformada de Fourier* $\widehat{u}$ *y la transformada de Fourier inversa* $\overset{\vee}{u}$ *de* u *se definen por*

$$\langle \widehat{u}, v\rangle = \langle u, \widehat{v}\rangle$$

y

$$\left\langle \overset{\vee}{u}, v\right\rangle = \left\langle u, \overset{\vee}{v}\right\rangle$$

para $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

La topología en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ está determinada de la manera siguiente.

Definición 1.19. *Sea* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Decimos que* $u_k \to 0$ *en* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *cuando* $k \to +\infty$ *si*

$$\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle u_k, v\rangle \to 0 \text{ cuando } k \to +\infty.$$

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema de extensión

Teorema 1.20. *La transformada de Fourier es un isomorfismo de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *en sí mismo, es decir,* $\widehat{\ }: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *es biyectiva, continua con inversa continua.*

Demostración. Ver [3], pag. 156. □

Proposición 1.21. *Si* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *entonces*

$$\widehat{\partial^\alpha u} = (i)^{|\alpha|}\,\xi^\alpha \widehat{u} \quad \text{y} \quad \partial^\alpha \widehat{u} = (-i)^{|\alpha|}\,\widehat{x^\alpha u}.$$

Demostración. Basta usar la derivada de una distribución y el teorema (1.12). □

Definición 1.22. *Para* $s \in \mathbb{R}$ *definimos el operador lineal* $J^s : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$\widehat{J^s u}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{u}(\xi),\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

denominado el potencial de Bessel de orden s. J^s *es una aplicación lineal, continua, biyectiva y*

$$J^{s+t} = J^s J^t \quad y \quad (J^s)^{-1} = J^{-s}.$$

1.2. Espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$

Daremos una breve introducción a los espacios de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ a través de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ellos miden la diferenciabilidad de las funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y son una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 1.23. *El* ***espacio de Sobolev de orden*** $s \in \mathbb{R}$ *de tipo* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *es el conjunto* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{J^s u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

con la norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particular $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. A menudo usaremos la notación $\|u\|_s$ en vez de $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.
De la definición de los espacios de Sobolev tenemos el siguiente

Teorema 1.24.

1.) Si $0 \leq s \leq t$ entonces $H^t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ continua y densamente. Además

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \|u\|_s \leq \|u\|_t .$$

En particular, los elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq 0$ son funciones medibles, más precisamente, son distribuciones temperadas que provienen de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno definido para todo $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle u, v\rangle_s = \langle J^s u, J^s v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi.$$

Es decir, vía la transformada de Fourier

$$H^s(\mathbb{R}^n) = L^2\left(\mathbb{R}^n : \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi\right).$$

3.) Para todo $s \in \mathbb{R}$ el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

4.) Si $r \leq s \leq t$ con $s = (1-\theta)\, r + \theta t$ y $\theta \in [0,1]$, entonces

$$\|u\|_s \leq \|u\|_r^{1-\theta} \|u\|_t^{\theta} .$$

5.) Para todo $s \in \mathbb{R}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado, y

$$\|\partial^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}} \leq c\, \|u\|_s .$$

6.) Para todo $k \in \mathbf{N}^+$ las normas $\|u\|_k$ y $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$ son equivalentes.

Demostración.

1.) Como $0 \leq s \leq t$ implica que $\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq \left(1+|\xi|^2\right)^t$. Por tanto, si $u \in H^t(\mathbb{R}^n)$ entonces tenemos

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^t |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_t^2 < \infty,$$

por lo tanto $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y queda probado que $H^t(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ con inclusión continua. Para obtener la densidad, basta mostrar que

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} H^r(\mathbb{R}^n)$$

es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$, cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$. Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y consideremos la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}^+$ por

$$\widehat{u_n}(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{n}}\widehat{u}(\xi).$$

Entonces $u_n \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $n \in \mathbf{N}^+$. En efecto,

$$\|u_n\|_r^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^r |\widehat{u_n}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} \left(1+|\xi|^2\right)^s e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

Como $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $v(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}$, es una función de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ cualesquiera sean $r, s \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|v\|_{L^\infty} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi|^2\right)^{r-s} e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}\right] < \infty$$

y

$$\|u_n\|_r^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|v\|_{L^\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_s < \infty.$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u_n}(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|e^{-\frac{2\xi^2}{n}}\widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left(1 - e^{-\frac{2|\xi|^2}{n}}\right)^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \to 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, por el teorema de la convergencia dominada.

En el teorema anterior se probó que $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$ cualquiera sea $s \in \mathbb{R}$.

4.) De la definición de norma en $H^s(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{(1-\theta)r} \left(1+|\xi|^2\right)^{\theta t} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\theta)+2\theta} \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{(1-\theta)r} |\widehat{u}(\xi)|^{2(1-\theta)} \left(1+|\xi|^2\right)^{\theta t} |\widehat{u}(\xi)|^{2\theta} \, d\xi,
\end{aligned}$$

y por la desigualdad de Hölder con $p = \frac{1}{1-\theta}$ y $q = \frac{1}{\theta}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^r |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^t |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^\theta \\
&= \|u\|_r^{2(1-\theta)} \|u\|_t^{2\theta}.
\end{aligned}$$

Luego $\|u\|_s \leq \|u\|_r^{1-\theta} \|u\|_t^\theta$.

5.) Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces como

$$\begin{aligned}\left\|D^k u\right\|_{s-k}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-k}\left|\widehat{\partial_x^k u}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-k}\left|(i\xi)^k\,\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-k}\left(1+\xi^2\right)^k|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_s^2\end{aligned}$$

luego se tiene el resultado. □

El siguiente teorema permite relacionar ”derivadas débiles en $L^2(\mathbb{R}^n)$çon derivadas en el sentido clásico.

Teorema 1.25 (de Inmersión de Sobolev). *Si $s > \frac{1}{2} + k$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está contenido continuamente en el espacio $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ de las funciones con k derivadas continuas que se anulan en el infinito, y*

$$\|u\|_{C_\infty^k} \leq c_s\,\|u\|_s\,,$$

donde $\|u\|_{C_\infty^k} = \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha u\|_{L_\infty}$.

Demostración. Ver [13], pág. 45. □

En consecuencia, si $n = 1$ y $s > \frac{1}{2} + k$, obtenemos que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c_s\,\|u\|_s\,,\quad \|\partial_x u\|_{L^\infty} \leq c_s\,\|u\|_s\,,\quad \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^\infty} \leq c_s\,\|u\|_s\,,\cdots$$

Teorema 1.26. *Si $s \in \left]0, \frac{n}{2}\right[$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p = \dfrac{2n}{n-2s}$, es decir, $s = n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right)$. Además, para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \left]0, \frac{n}{2}\right[$,*

$$\|u\|_{L^p} \leq c_{n,s}\,\|D^s u\|_{L^2} \leq C\,\|u\|_s\,.$$

donde

$$D^s u = (-\triangle)^{s/2}\,u = \left(|\xi|^s\,\widehat{u}\right)^\vee.$$

Demostración. Ver [13], pág. 47. □

Los espacios de Sobolev pueden ser vistos como un álgebra de Banach, y desde el punto de vista del análisis no lineal tenemos las siguientes propiedades esenciales de $H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s > n/2$.

Teorema 1.27. *Sea $s > n/2$, $s \in \mathbb{R}$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra conmutativa en relación a las operaciones de multiplicación de funciones punto a punto, esto es, para cualquier $u, v, w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos*

1. $u \cdot v \in H^s(\mathbb{R}^n)$

2. $u \cdot v = v \cdot u$

3. $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

4. $\alpha\,(u\cdot v) = (\alpha u)\cdot v$

Además, la multiplicación es una aplicación bilineal continua de $H^s(\mathbb{R}^n)\times H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$ en la topología de la norma, y secuencialmente continua en la topología débil; es decir, existe una constante $c = c(s,n)$ tal que

$$\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) : \|uv\|_s \leq c\,\|u\|_s\,\|v\|_s$$

y dados $u_k, v_k, u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\text{si } u_k \overset{H^s}{\rightharpoonup} u \text{ y } v_k \overset{H^s}{\rightharpoonup} v \text{ entonces } u_k v_k \overset{H^s}{\rightharpoonup} uv.$$

Demostración. Ver [13], pág. 48. □

1.3. Semigrupos de operadores lineales.

Definición 1.28. *Un **semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach** X es una familia $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

i) $\forall t \geq 0 : W(t) \in \mathcal{L}(X)$,

ii) $W(0) = I$ *el operador identidad sobre* X,

iii) $\forall t, s \geq 0 : W(s+t) = W(s)\,W(t)$, *y*

iv) para cada $x \in X$ *fijo,* $W(\cdot)\,x : [0,+\infty[\, \to X$ *es continua.*

En adelante X será un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$.

Teorema 1.29. *Si* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo sobre* X, *existen* $M \geq 1$ *y* $\omega \geq 0$ *tales que*

$$\forall t \geq 0 : \|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}.$$

Demostración. Ver [14], pág. 4. □

Definición 1.30. *El **generador de un semigrupo** $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X es la aplicación $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ definida por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)\,x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

y

$$Ax = \partial_t^+ W(t)\,x\big|_{t=0}\,.$$

Teorema 1.31. *Si A es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ tenemos que $W(t)x \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \geq 0$, y*

$$\partial_t W(t)x = AW(t)x = W(t)Ax. \tag{1.2}$$

Demostración. Ver [14], pág. 4. □

Teorema 1.32. *Sean X y Y dos espacios de Banach. Si $A : Y \subseteq X \to X$ es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $u_0 \in Y$ la función*

$$u : [0, +\infty[\to Y,$$

definida por $u(t) = W(t)u_0$, es la única solución del problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t), & t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Además,

$$u \in C([0, +\infty[: Y) \cap C^1([0, +\infty[: X).$$

Demostración. Ver [14], pág. 104. □

Observación. Si en la definición (1.28), i) y iii) se verifican para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y en iv), el dominio de la aplicación $W(\cdot)x$ es el conjunto de los números reales, la familia $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ define un grupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X. En este caso decimos que el grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es de tipo (M, ω) si existen $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|W(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}.$$

Por otro lado, en la definición (1.30), el límite se toma cuando $t \to 0$ y los teoremas (1.31) y (1.32) son válidos para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.4. Integrales Oscilatorias

En esta sección estudiamos el comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ cuando $\lambda \to \infty$, donde

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx;$$

y ϕ es una función real cuya derivada existe en todo $x \in [a, b]$ llamada fase, y f es una función compleja cuya derivada existe en todo $x \in [a, b]$.

Veremos que este comportamiento asintótico es determinado por los puntos críticos $\overline{x}$ de ϕ, esto es, $\phi'(\overline{x}) = 0$.

Proposición 1.33. *Sea $f \in C_0^{\infty}([a,b])$ y $\phi'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces*

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx = O\left(x^{-k}\right),$$

cuando $\lambda \to +\infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Definamos el operador diferencial L por

$$L(f) = \frac{1}{i\lambda\phi'} \frac{df}{dx},$$

entendiendo a ϕ' como la derivada de ϕ respecto a su variable independiente.

El operador L satisface

$$L^t(f) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'}\right),$$

donde L^t es el operador adjunto de L.

En efecto, por definición de operador adjunto, se tiene

$$\begin{aligned}\langle L(f), g\rangle &= \left\langle \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{df}{dx}, g\right\rangle = \left\langle \frac{df}{dx}, \frac{1}{i\lambda\phi'} g\right\rangle \\ &= -\left\langle f, \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i\lambda\phi'} g\right)\right\rangle = \left\langle f, -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i\lambda\phi'} g\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto, $L^t(g) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{i\lambda\phi'}\right)$. Además haciendo $g(x) = e^{i\lambda\phi(x)}$, tenemos

$$L\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)}\frac{d}{dx}\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} \cdot i\lambda\phi'(x)\, e^{i\lambda\phi(x)} = e^{i\lambda\phi(x)},$$

en general $L^k\left(e^{i\lambda\phi}\right) = e^{i\lambda\phi}$.

Enseguida, calculamos $\left(L^t\right)^k f(x)$. Para esto, en primer lugar

$$L^t f = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'}\right) = -\frac{i\lambda\phi' f' - f i\lambda\phi''}{(i\lambda\phi')^2} = \frac{i\lambda\left(\phi' f' - f\phi''\right)}{\lambda^2(\phi')^2} = \frac{i}{\lambda}\left(\frac{f'}{\phi'} - \frac{f\phi''}{(\phi')^2}\right),$$

entonces

$$\left(L^t\right)^k f = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^k \left(\frac{f'}{\phi'} - \frac{f\phi''}{(\phi')^2}\right)^k = \left(\frac{1}{-i\lambda}\right)^k \left(\frac{f'}{\phi'} - \frac{f\phi''}{(\phi')^2}\right)^k. \tag{1.4}$$

Finalmente, usando $\left(L^k\right)^t = \left(L^t\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx = \int_a^b L^k\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right) f(x)\, dx \\ &= \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \left(L^t\right)^k f(x)\, dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \left(\frac{1}{-i\lambda}\right)^k \left(\frac{f'(x)}{\phi'(x)} - \frac{f(x)\phi''(x)}{(\phi'(x))^2}\right)^k dx \\ &= (i)^k (\lambda)^{-k} \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} F_k(x)\, dx = O\left(\lambda^{-k}\right)\end{aligned}$$

siempre que $\lambda \longrightarrow +\infty$, con $F_k(x) = \left(\frac{f'(x)}{\phi'(x)} - \frac{f(x)\phi''(x)}{(\phi'(x))^2}\right)^k$. □

Proposición 1.34. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq 1$ para todo $x \in [a,b]$ con $\phi'(x)$ monótona en el caso $k=1$. Entonces*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k \lambda^{-1/k},\ \lambda > 0$$

donde C_k es una constante independiente de a y de b.

Demostración. Para $k=1$, usando integración por partes con $u = \frac{1}{\phi'}$ y $v = \frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda\phi}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx &= \int_a^b L\left(e^{i\lambda\phi(x)}\right)dx = \int_a^b \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} i\lambda\phi'(x)e^{i\lambda\phi(x)}dx \\ &= \left.\frac{e^{i\lambda\phi(x)}}{i\lambda\phi'(x)}\right|_a^b - \int_a^b \frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda\phi(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right) \\ &= \frac{1}{i\lambda}\left[\frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{\phi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{\phi'(a)}\right] - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)dx\end{aligned}$$

Luego, como $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\left|\frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{\phi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{\phi'(a)}\right| + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|e^{i\lambda\phi(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\right|dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(\left|\frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{\phi'(b)}\right| + \left|\frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{\phi'(a)}\right|\right) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\right|dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(\left|\frac{1}{\phi'(b)}\right| + \left|\frac{1}{\phi'(a)}\right|\right) + \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(x)}\right|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{|\phi'(b)|}\right) \\ &< 2\lambda^{-1}.\end{aligned}$$

Para $k \geq 2$ usamos inducción sobre k, suponiendo que se cumple para k, debemos probar que se cumple también para $k+1$, es decir,

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_{k+1}\lambda^{-1/(k+1)}.$$

Por hipótesis, $\left|\phi^{(k+1)}(x)\right| \geq 1$. Sea $x_0 \in [a,b]$ un minimizante global de ϕ, es decir, $\left|\phi^{(k)}(x_0)\right| = \min\limits_{a \leq x \leq b}\left|\phi^{(k)}(x)\right|$.

Si $\phi^{(k)}(x_0) = 0$, fuera del intervalo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ tenemos $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq \delta$ para algún δ con ϕ' monótona si $k=1$. Dividiendo el dominio de integración y usando las hipótesis obtenemos

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| + \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| + \left|\int_{x_0+\delta}^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right|.$$

Pero, considerando $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\delta}$ y la hipótesis inductiva, obtenemos

$$\left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| = \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i(\lambda\delta)\frac{\phi(x)}{\delta}}dx\right| = \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\psi(x)}dx\right| \leq C_k(\lambda\delta)^{-1/k}$$

entonces $\left|\psi^{(k+1)}(x)\right| = \frac{\left|\phi^{(k+1)}(x)\right|}{\delta} \geq 1$, del mismo modo

$$\left|\int_{x_0+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k (\lambda\delta)^{-1/k}.$$

Por otro lado

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|e^{i\lambda\phi(x)}\right| dx = 2\delta.$$

Finalmente eligiendo $\delta = \lambda^{-1/(k+1)}$ conseguimos

$$\begin{aligned}\left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| &\leq C_k (\lambda\delta)^{-1/k} + 2\delta + C_k (\lambda\delta)^{-1/k} \\ &= 2C_k\lambda^{-1/k}\left(\lambda^{-1/(k+1)}\right)^{-\frac{1}{k}} + 2\lambda^{-1/(k+1)} \\ &= 2(C_k+1)\lambda^{-\frac{1}{k+1}} = C_{k+1}\lambda^{-\frac{1}{k+1}}.\end{aligned}$$

Si $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$, entonces $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ y un argumento similar nos lleva a la misma cota.□

Lema 1.35. *Sea $\rho \in C^2(\mathbb{R})$ una función cóncava o convexa en el intervalo $[a,b]$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, entonces*

(i) $\left|\int_a^b e^{i\rho(x)}dx\right| \leq 2\left\{\min\limits_{[a,b]} |\rho'(x)|\right\}^{-1}$ si $\rho'(x) \neq 0$ en $[a,b]$,

(ii) $\left|\int_a^b e^{i\rho(x)}dx\right| \leq 4\left\{\min\limits_{[a,b]} |\rho''(x)|\right\}^{-1/2}$ si $\rho'(x) \neq 0$ en $[a,b]$.

Demostración. (i) Para $k = 1$, usando integración por partes y la proposición (1.34) tenemos

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\rho(x)}dx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{|\rho'(b)|} + \frac{1}{|\rho'(a)|}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho'(b)} - \frac{1}{\rho'(a)}\right)$$

Para $\lambda = 1$

$$\left|\int_a^b e^{i\rho(x)}dx\right| \leq 2\left(\frac{1}{|\rho'(b)|}\right) + \left(\frac{1}{|\rho'(a)|} - \frac{1}{\rho'(a)}\right)$$

por ser ρ una función cóncava o convexa (ρ' es creciente o ρ' es decreciente) $\rho''(a) > 0$ o $\rho''(a) < 0$ esto nos conduce a que $|\rho'(a)| = \rho'(a)$ si $\rho'(a) > 0$ lo que implica

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\rho(x)}dx\right| \leq 2\left(\frac{1}{|\rho'(b)|}\right) = 2\left(|\rho'(b)|^{-1}\right)$$

Por otra parte, sea $x_0 \in [a,b]$ tal que $|\rho'(x_0)| = \min\limits_{a\leq x\leq b} |\rho'(x)|$ (minimizante global) y como $\rho'(x) \neq 0$ en $[a,b]$, entonces $x_0 = a$ ó $x_0 = b$. Luego

$$\left|\int_a^b e^{i\rho(x)}dx\right| \leq 2\left(|\rho'(b)|^{-1}\right) = 2\left(|\rho'(x_0)|^{-1}\right) = 2\left\{\min_{a\leq x\leq b} |\rho'(x)|\right\}^{-1}.$$

(ii) Usando la proposición (1.34), obtenemos

$$C_k = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{|\rho^{(k)}(b)|} + \frac{1}{|\rho^{(k)}(a)|} + \left|\frac{1}{\rho^{(k)}(b)} - \frac{1}{\rho^{(k)}(a)}\right|\right)$$

Para $k = 2$

$$C_2 = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{|\rho''(b)|} + \frac{1}{|\rho''(a)|} + \left|\frac{1}{\rho''(b)} - \frac{1}{\rho''(a)}\right|\right)$$

por hipótesis $|\rho''(x)| \geq 1$ y $x_0 \in [a,b]$ tal que $|\rho'(x_0)| = \min\limits_{a\leq x\leq b} |\rho'(x)|$, se pide el análisis para $|\rho''(x)| \neq 0$, en este caso $x_0 = a$ ó $x_0 = b$. Luego

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\rho(x)}dx\right| < C_2 &= \frac{1}{|\rho''(x_0)|} + \frac{1}{|\rho''(x_0)|} + \frac{1}{|\rho''(x_0)|} + \frac{1}{|\rho''(x_0)|} \\ &= \frac{4}{|\rho''(x_0)|} = 4\left|\rho''(x_0)\right|^{-1} = 4\left\{\min_{a\leq x\leq b} \rho''(x)\right\}^{-1} \\ &< 4\left\{\min_{a\leq x\leq b} \rho''(x)\right\}^{-1/2}.\end{aligned}$$

La prueba está completa. $\square$

1.5. Desigualdades útiles

Proposición 1.36. *Sean $k \in L^1([a,b])$, $k(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y $f \in C([a,b])$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s)\, ds,\ a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp\left[\int_a^s k(r)\, dr\right] g(s)\, ds,\ a \leq t \leq b. \tag{1.5}$$

En particular si $g(t) = C = cte$, se sigue que

$$f(t) \leq C \exp\left[\int_a^t k(s)\, ds\right],\ a \leq t \leq b.$$

Lema 1.37. *Para cada $r \in \mathbb{R}$ existen constantes positivas $c_1 = c_1(r)$ y $c_2 = c_2(r)$ tales que*

$$c_1\left(1 + \xi^{2r}\right) \leq \left(1 + \xi^2\right)^r \leq c_2\left(1 + \xi^{2r}\right)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para demostrar la segunda desigualdad, sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{(1+x)^r}{1+x^r},\ x \geq 0.$$

Como f es continua y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, entonces f es acotada. Así, existe $c_2 = c_2(r)$ tal que

$$(1+x)^r \leq c_2(1+x^r).$$

Análogamente se prueba la primera desigualdad considerando $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1+x^r}{(1+x)^r},\ x \geq 0.$$

$\square$

Lema 1.38. *Sea* $m(t)$ *una función continua de valor real, no negativa y tal que existen constantes positivas* α, β *y* η *tal que*

$$m(t) \leq \alpha + \beta m^{\eta}(\xi)$$

para cualquier t *en un intervalo conteniendo a* $t = 0$, *donde* $\eta > 1$. *Si* $m(0) \leq \alpha$ *y* $\alpha \beta^{(\eta-1)^{-1}} < \left(1 - \eta^{-1}\right) \eta^{-(\eta-1)^{-1}}$ *entonces, en el mismo intervalo* $m(t)$ *es acotada y*

$$m(t) \leq \alpha \left(1 - \eta^{-1}\right).$$

Demostración. Ver [18] páginas 409-547. □

Lema 1.39. *Sean* α, β, $\eta \geq 0$ *satisfaciendo*

$$\alpha + \beta - \eta \geq 1, \alpha \geq \eta \quad o \quad \beta \geq \eta,$$

y

$$\alpha > \eta \text{ si } \beta = 1, \quad \beta > \eta \text{ si } \alpha = 1.$$

Entonces tenemos

$$\sup_{0 \leq t < +\infty} \int_0^t (1+t)^{\eta} (1+t-r)^{-\alpha} (1+r)^{-\beta} \, dr < +\infty.$$

Demostración. Siguiendo la idea de la prueba en R. Racke, [15], página 88. Si C denota constantes diferentes que no dependen de t, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{(1+t)^{\eta}}{(1+r)^{\beta}} (1+t-r)^{-\alpha} \, dr &= \int_0^{t/2} \frac{(1+t)^{\eta}}{(1+r)^{\beta}} (1+t-r)^{-\alpha} \, dr + \int_{t/2}^t \frac{(1+t)^{\eta}}{(1+r)^{\beta}} (1+t-r)^{-\alpha} \, dr. \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Estimamos I_1. Como $0 \leq r \leq t/2$ se tiene

$$1 + t \leq 2 + t \leq 2(1+t-r) \leq 2(1+t)$$

de donde $(1+t)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}(1+t-r)^{\alpha} \Rightarrow 1/(1+t-r)^{\alpha} \leq 2^{\alpha}/(1+t)^{\alpha}$. De esta manera

$$I_1 \leq \int_0^{t/2} \frac{(1+t)^{\eta}}{(1+r)^{\beta}} \frac{2^{\alpha}}{(1+t)^{\alpha}} dr = 2^{\alpha}(1+t)^{\eta-\alpha} \int_0^{t/2} \frac{dr}{(1+r)^{\beta}}$$

Además, como $1 \leq 1 + r \leq 1 + t/2$, entonces

$$\int_0^{t/2} (1+r)^{-\beta} \, dr = \begin{cases} \ln(1+t/2), & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{1-\beta}\left[(1+t/2)^{1-\beta} - 1\right], & \text{si } \beta \neq 1 \end{cases}$$

luego, para $\alpha > \eta$ y $\beta = 1$ tenemos que

$$I_1 \leq 2^{\alpha}(1+t)^{\eta-\alpha} \ln(1+t/2) \leq C,$$

ya que de la regla de L'Hospital

$$L = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t/2)}{(1+t)^{\alpha-\eta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1/2}{1+t/2}}{(\alpha-\eta)(1+t)^{\alpha-\eta-1}}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2(1+t/2)(\alpha-\eta)(1+t)^{\alpha-\eta-1}} = 0$$

Para $\alpha-\eta-1 \geq 1$, $\alpha \geq \eta$ o $\beta \geq \eta$ y $\beta \neq 1$ tenemos

$$I_1 \leq \frac{2^\alpha\left[(1+t/2)^{1-\beta}-1\right]}{(1-\beta)(1+t)^{\alpha-\eta}} \leq \frac{2^\alpha(1+t)^{1-\beta}}{(1-\beta)(1+t)^{\alpha-\eta}} \leq \frac{2^\alpha}{(1-\beta)(1+t)^{\alpha+\beta-\eta-1}} \leq C$$

ya que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{(1+t)^{\alpha+\beta-\eta-1}} = 0.$

De manera similar, concluimos que

$$I_2 = \int_{t/2}^{t} \frac{(1+t)^\eta}{(1+r)^\beta}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr \leq \frac{2^\beta}{(1+t)^{\beta-\eta}}\int_{t/2}^{t}(1+t-r)^{-\alpha}\,dr,$$

pues como $t/2 \leq r \leq t$ implica que $1+t \leq 2+r \leq 2(1+r)$, entonces

$1+t \leq 2(1+r) \Rightarrow (1+t)^\beta \leq 2^\beta(1+r)^\beta \Rightarrow (1+r)^{-\beta} \leq 2^\beta(1+t)^{-\beta}$; y haciendo $s = t-r$, obtenemos

$$I_2 \leq \frac{2^\beta}{(1+t)^{\beta-\eta}}\int_{t/2}^{t}(1+s)^{-\alpha}\,ds$$
$$= \frac{2^\beta}{(1+t)^{\beta-\eta}}\begin{cases} \ln(1+t/2), & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[(1+t/2)^{1-\beta}-1\right], & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases}$$

$\square$

Capítulo 2

El problema de Cauchy local

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u - a_1\partial_x^2\partial_t v + a_2\partial_x u + a_3 v^p\partial_x v + a_4\partial_x(u^p v) + u^p\partial_x u = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v - a_1\partial_x^2\partial_t u + a_2\partial_x v + a_3 u^p\partial_x u + a_4\partial_x(u v^p) + v^p\partial_x v = 0 \\ u\,(0) = u_0 \\ v\,(0) = v_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 son constantes reales con a_2 positivo, $0 < a_1 < 1$, $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ son funciones reales de variables reales x y t con $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y p es un entero mayor que o igual a uno.

El problema (2.1) lo podemos escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} 1-\partial_x^2 & -a_1\partial_x^2 \\ -a_1\partial_x^2 & 1-\partial_x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \frac{a_3}{p+1}v^{p+1} + a_4(u^p v) + \frac{1}{p+1}u^{p+1} \\ \frac{a_3}{p+1}u^{p+1} + a_4(v^p u) + \frac{1}{p+1}v^{p+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

o

$$\begin{cases} A\partial_t U(t) + B\partial_x U(t) + \partial_x F(U(t)) = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1-\partial_x^2 & -a_1\partial_x^2 \\ -a_1\partial_x^2 & 1-\partial_x^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} \frac{a_3}{p+1}v^{p+1} + a_4 u^p v + \frac{1}{p+1}u^{p+1} \\ \frac{a_3}{p+1}u^{p+1} + a_4 u v^p + \frac{1}{p+1}v^{p+1} \end{pmatrix} \text{ y } U_0 = (u_0, v_0).$$

De (2.2) obtenemos formalmente la ecuación integral asociada

$$U(x,t) = U_0(x) - \int_0^t A^{-1}\left(B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))\right) d\tau.$$

Para justificar la última igualdad, debemos analizar la existencia del operador A^{-1}.

Teorema 2.1. *Si* $0 < a_1 < 1$ *y* $s \geq 2$*, entonces* $A : H^s \times H^s \longrightarrow H^{s-2} \times H^{s-2}$ *es un operador lineal, simétrico y biyectivo y para* $g = (g_1, g_2) \in H^{s-2} \times H^{s-2}$ *tenemos que*

$$A^{-1} g(x) = K * g(x) \tag{2.3}$$

donde

$$K = (K_{lr})_{l,r=1,2} \quad y \quad K_{lr}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x} a_{lr}(\xi)\, d\xi$$

con

$$\widehat{A^{-1}}(\xi) = (a_{lr}(\xi))_{l,r=1,2}\,.$$

Además, $K_{lr} \in L^1 \cap L^\infty$ *para* $l, r = 1, 2$*.*

Demostración. La linealidad del operador A es inmediata. Probemos que $Af \in H^{s-2} \times H^{s-2}$. En efecto, sea $f = (f_1, f_2) \in H^s \times H^s$ con $s \geq 2$.

$$\|Af\|^2_{H^{s-2}\times H^{s-2}} = \left\|J^2 f_1 - a_1 \partial_x^2 f_2\right\|^2_{s-2} + \left\|-a_1 \partial_x^2 f_1 + J^2 f_2\right\|^2_{s-2}.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la inclusión continua del espacio de Sobolev H^s en H^{s-2}, el hecho de que el operador $\partial_x : H^{s-1} \longrightarrow H^{s-2}$ es acotado y la desigualdad $2\,|ab| \leq a^2 + b^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|Af\|^2_{H^{s-2}\times H^{s-2}} &\leq \|f_1\|_s^2 + |a_1|^2 \|f_2\|_s^2 + 2\,|a_1|\, \|f_1\|_s \|f_2\|_s \\
&\quad + |a_1|^2 \|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2 + 2\,|a_1|\, \|f_1\|_s \|f_2\|_s \\
&= \left(1 + |a_1|^2\right)\left(\|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2\right) + 4\,|a_1|\, \|f_1\|_s \|f_2\|_s \\
&\leq \left(1 + |a_1|^2\right)\left(\|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2\right) + 2\,|a_1| \left(\|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2\right) \\
&\leq (1 + |a_1|)^2 \left(\|f_1\|_s^2 + \|f_2\|_s^2\right) \\
&= \left(1 + |a_1|^2\right) \|f\|^2_{H^s\times H^s} < \infty,
\end{aligned}$$

entonces $\mathcal{R}(A) \subseteq H^{s-2} \times H^{s-2}$.

Probemos la inyectividad del operador A. Para $U = (u, v) \in H^s \times H^s$, $s \geq 2$, usando la integración por partes y la inclusión continua tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_{L^2\times L^2} &= \left\langle \begin{pmatrix} u-\partial_x^2 u - a_1\partial_x^2 v \\ -a_1\partial_x^2 u + v - \partial_x^2 v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2\times L^2} \\
&= \left\langle u-\partial_x^2 u - a_1\partial_x^2 v, u\right\rangle_{L^2} + \left\langle -a_1\partial_x^2 u + v - \partial_x^2 v, v\right\rangle_{L^2} \\
&= \langle u, u\rangle_{L^2} + \left\langle -\partial_x^2 u, u\right\rangle_{L^2} + \left\langle -a_1\partial_x^2 v, u\right\rangle_{L^2} \\
&+ \left\langle -a_1\partial_x^2 u, v\right\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L^2} + \left\langle -\partial_x^2 v, v\right\rangle_{L^2} \\
&= \|u\|_{L^2}^2 + \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x u\rangle_{L^2} \\
&+ a_1\langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2} + \|v\|_{L^2}^2 + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} \\
&= \|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + 2a_1\langle \partial_x v, \partial_x u\rangle_{L^2} \\
&+ \|v\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2 \\
&\geq \|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 - |a_1|\,\|\partial_x v\|_{L^2}^2 \\
&- |a_1|\,\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2 \\
&= \|u\|_{L^2}^2 + (1-|a_1|)\,\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + (1-|a_1|)\,\|\partial_x u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Desde que $|a_1| < 1$ se tiene que $(1-|a_1|) > 0$, entonces

$$
\langle AU, U\rangle_{L^2\times L^2} \geq \|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 = \|U\|_{L^2\times L^2}^2 \geq 0.
$$

En base a esto se prueba que el operador A es inyectivo. En efecto, sea $AU = AV$, entonces $A(U-V) = 0$. Luego, $0 = \langle A(U-V), U-V\rangle_{L^2\times L^2} \geq \|U-V\|_{L^2\times L^2}^2$ y por lo tanto el núcleo $\ker(A) = \{0\}$. De ahí que existe A^{-1}.

Ahora, probaremos que el operador A es simétrico. En efecto, sea $U = (u_1, u_2)$, $V = (v_1, v_2) \in H^s \times H^s$, $s \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\langle AU, V\rangle_{L^2\times L^2} &= \left\langle u_1 - \partial_x^2 u_1 - a_1\partial_x^2 u_2, v_1\right\rangle_{L^2} + \left\langle -a_1\partial_x^2 u_1 + u_2 - \partial_x^2 u_2, v_2\right\rangle_{L^2} \\
&= \langle u_1, v_1\rangle_{L^2} + \left\langle -\partial_x^2 u_1, v_1\right\rangle_{L^2} + \left\langle -a_1\partial_x^2 u_2, v_1\right\rangle_{L^2} \\
&+ \left\langle -a_1\partial_x^2 u_1, v_2\right\rangle_{L^2} + \langle u_2, v_2\rangle_{L^2} + \left\langle -\partial_x^2 u_2, v_2\right\rangle_{L^2} .
\end{aligned}
$$

Usando la integración por partes y la inclusión continua

$$
\begin{aligned}
\langle AU, V\rangle_{L^2\times L^2} &= \langle u_1, v_1\rangle_{L^2} + \left\langle u_1, -\partial_x^2 v_1\right\rangle_{L^2} + \left\langle u_2, -a_1\partial_x^2 v_1\right\rangle_{L^2} \\
&+ \left\langle u_1, -a_1\partial_x^2 v_2\right\rangle_{L^2} + \langle u_2, v_2\rangle_{L^2} + \left\langle u_2, -\partial_x^2 v_2\right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle u_1, v_1 - \partial_x^2 v_1 - a_1\partial_x^2 v_2\right\rangle_{L^2} + \left\langle u_2, v_2 - \partial_x^2 v_2 - a_1\partial_x^2 v_1\right\rangle_{L^2} \\
&= \langle U, AV\rangle_{L^2\times L^2}
\end{aligned}
$$

y por tanto A es simétrico.

Finalmente A es sobreyectiva, esto es, dado $g=(g_1,g_2)\in H^{s-2}\times H^{s-2}$ existe $f=(f_1,f_2)\in H^s\times H^s$ tal que $Af=g$. En efecto, de $A(f_1,f_2)=(g_1,g_2)$ se tiene que

$$\begin{cases}(1-\partial_x^2)f_1-a_1\partial_x^2 f_2=g_1\\ -a_1\partial_x^2 f_1+(1-\partial_x^2)f_2=g_2\end{cases}$$

Luego, aplicando la transformada de Fourier respecto de la variable espacial, obtenemos

$$\begin{cases}(1+\xi^2)\widehat{f_1}(\xi)+a_1\xi^2\widehat{f_2}(\xi)=\widehat{g_1}(\xi)\\ -a_1\xi^2\widehat{f_1}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{f_2}(\xi)=\widehat{g_2}(\xi)\end{cases}$$

de donde

$$\widehat{f_1}(\xi)=\frac{-a_1\xi^2\widehat{g_2}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}$$

y

$$\widehat{f_2}(\xi)=\frac{-a_1\xi^2\widehat{g_1}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_2}(\xi)}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}$$

Luego, para $g=(g_1,g_2)\in H^{s-2}\times H^{s-2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^s\times H^s}&=\|f_1\|^2_{H^s}+\|f_2\|^2_{H^s}\\ &=\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\left|\frac{-a_1\xi^2\widehat{g_2}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\right|^2 d\xi\\ &+\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\left|\frac{-a_1\xi^2\widehat{g_1}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_2}(\xi)}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\right|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Como $0<a_1<1$, $\xi^2<\xi^2+1$ y $\dfrac{1}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\le\dfrac{(1-a_1)^2}{(1+\xi^2)^2}\le\dfrac{C}{(1+\xi^2)^2}$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^s\times H^s}&\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{C}{(1+\xi^2)^4}\left|\xi^2\widehat{g_2}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_1}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{C}{(1+\xi^2)^4}\left|\xi^2\widehat{g_1}(\xi)+(1+\xi^2)\widehat{g_2}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{C}{(1+\xi^2)^4}\left|(1+\xi^2)\left[\widehat{g_2}(\xi)+\widehat{g_1}(\xi)\right]\right|^2 d\xi\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s\frac{C}{(1+\xi^2)^4}\left|(1+\xi^2)\left[\widehat{g_1}(\xi)+\widehat{g_2}(\xi)\right]\right|^2 d\xi\\ &=\frac{2C}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\left|\widehat{g_2}(\xi)+\widehat{g_1}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &=C\,\|g\|^2_{H^{s-2}\times H^{s-2}}<\infty.\end{aligned}$$

Así, vía transformada de Fourier

$$\begin{aligned}\widehat{A^{-1}g}(\xi)&=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} & -\dfrac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\\[2ex] -\dfrac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} & \dfrac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{g_1}(\xi)\\ \widehat{g_2}(\xi)\end{pmatrix}\\ &=(a_{lr}(\xi))\,\widehat{g}(\xi)\\ &=\widehat{K_{lr}}(\xi)\widehat{g}(\xi)=\widehat{K*g}(\xi)\end{aligned}\tag{2.4}$$

De donde se concluye que

$$A^{-1}g(x) = K * g(x)$$

y por la definición de norma en $H^s \times H^s$, se verifica que $A^{-1}g \in H^s \times H^s$ siempre que $g = (g_1, g_2) \in H^{s-2} \times H^{s-2}$.

De la definición de $K_{lr}(x)$ hagamos

$$K_{11}(x) = K_{22}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x} \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\, d\xi$$

y

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x} \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\, d\xi$$

Haciendo uso del lema 1.37, es claro que

$$|K_{11}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\, d\xi \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1+\xi^2} d\xi = C\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Luego, $K_{11} \in L^\infty$.

Ahora, demostraremos que $K_{11} = K_{22} \in L^1$. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_{11}(x)|\, dx = \int_{|x|\le 1} |K_{11}(x)|\, dx + \int_{|x|>1} |K_{11}(x)|\, dx$$

donde la primera integral del segundo miembro existe.

De la definición de K_{11} se tiene que para $x = 0$,

$$K_{11}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} d\xi$$

existe. Luego, para un $x \ne 0$, integrando por partes obtenemos

$$K_{11}(x) = \lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{e^{i\,\xi\,x}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1+\xi^2}{ix[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]} + \frac{-2\xi - 4\xi^3 - 2\xi^5 + 2a_1^2\xi^5 + 4a_1^2\xi^3}{x^2[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^2} \right]$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\,\xi\,x} \left[\frac{-2 + 12a_1^2\xi^2 + 12\xi^4 - 12a_1^2\xi^4 + 16\xi^6 - 36a_1^2\xi^6}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right.$$

$$\left. + \frac{20a_1^4\xi^6 + 6\xi^8 - 12a_1^2\xi^8 + 6a_1^4\xi^8}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} d\xi, \right.$$

donde $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} u(\xi)v(\xi)$ se define como

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} u(\xi)v(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty} [u(\xi)v(\xi) - u(-\xi)v(-\xi)]$$

Entonces,

$$|K_{11}(x)| \leq \lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1+\xi^2}{|x|\,[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]} + \frac{\left|2\xi + 4\xi^3 + 2\xi^5 - 2a_1^2\xi^5 - 4a_1^2\xi^3\right|}{x^2[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{-2 + 12a_1^2\xi^2 + 12\xi^4 - 12a_1^2\xi^4 + 16\xi^6 - 36a_1^2\xi^6}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right.$$

$$\left. + \quad \frac{20a_1^4\xi^6 + 6\xi^8 - 12a_1^2\xi^8 + 6a_1^4\xi^8}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right| d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{-2 + 12a_1^2\xi^2 + 12\xi^4 - 12a_1^2\xi^4 + 16\xi^6 - 36a_1^2\xi^6}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right.$$

$$\left. + \quad \frac{20a_1^4\xi^6 + 6\xi^8 - 12a_1^2\xi^8 + 6a_1^4\xi^8}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right| d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{-2 + 12a_1^2\xi^2 + 12(1-a_1^2)\xi^4 + 4(5a_1^4 - 9a_1^2 + 4)\xi^6}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right.$$

$$\left. + \quad \frac{6(1 - 2a_1^2 + a_1^4)\xi^8}{[(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4]^3} \right| d\xi$$

Como $0 < a_1 < 1$, los coeficientes de cada termino del numerador estan acotados. Luego, existe $C > 0$ tal que

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{C}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |\xi|^2 + |\xi|^4 + |\xi|^6 + |\xi|^8}{\left|1 + (1-a_1^2)\xi^4\right|^3} \, d\xi \tag{2.5}$$

pues $(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4 = 1 + 2\xi^2 + (1-a_1^2)\xi^4 \geq 1 + (1-a_1^2)\xi^4$

Teniendo en cuenta que

$$\left[1 + (1-a_1^2)^{\frac{1}{4}} |\xi|\right]^4 \leq C\left[1 + (1-a_1^2)\,|\xi|^4\right], \text{ para } 0 < a_1 < 1$$

se tiene en (2.5)

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{C}{x^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |\xi|^2 + |\xi|^4 + |\xi|^6 + |\xi|^8}{\left[1 + (1-a_1^2)^{\frac{1}{4}} |\xi|\right]^{12}} d\xi \tag{2.6}$$

Como para $n = 2, 4, 6, 8$

$$|\xi|^n \leq C\left[1 + (1-a_1^2)^{\frac{1}{4}} |\xi|\right]^n$$

y para $t = 4, 6, 8, 10, 12$ la integral

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)^t} = \int_1^\infty \frac{du}{u^t}$$

converge, en (2.5) se tiene que

$$|K_{11}(x)| \leq \frac{C}{x^2}.$$

De donde,

$$\int_{|x|>1} |K_{11}(x)|\, dx \leq C \int_{|x|>1} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

Por consiguiente, $K \in L^1$.

De igual forma, se prueba que $K_{12} = K_{21} \in L^1 \cap L^\infty$. $\square$

Teorema 2.2. *Sea $g = (g_1, g_2) \in H^s \times H^s$, $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$ y $0 < a_1 < 1$. Entonces, $K * \partial_x g \in H^s \times H^s$ y existe una constante positiva C tal que*

$$\|K * \partial_x g\|_{H^s \times H^s} \leq C \|g\|_{H^s \times H^s}.$$

Demostración. Del teorema 2.1 y (2.4) tenemos que

$$\begin{aligned}(K * \partial_x g)(x) &= A^{-1}\partial_x g(x) = (a_{lr})^\vee \partial_x g(x)\\ &= \big((a_{11})^\vee \partial_x g_1(x) + (a_{12})^\vee \partial_x g_2(x), (a_{21})^\vee \partial_x g_1(x) + (a_{22})^\vee \partial_x g_2(x)\big)\end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición de norma en el espacio de Sobolev $H^s \times H^s$,

$$\begin{aligned}&\|K * \partial_x g\|^2_{H^s \times H^s}\\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|a_{11}\widehat{g_1}(\xi) + a_{12}\widehat{g_2}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|a_{21}\widehat{g_1}(\xi) + a_{22}\widehat{g_2}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\widehat{g_1}(\xi) - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\widehat{g_2}(\xi)\right|^2 d\xi\\ &+ \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|-\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\widehat{g_1}(\xi) + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\widehat{g_2}(\xi)\right|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $0 < a_1 < 1$ y la proposición 1.37, se tiene

$$\begin{aligned}&\|K * \partial_x g\|^2_{H^s \times H^s}\\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\right|^2 \left(|\widehat{g_1}(\xi)|^2 + |\widehat{g_2}(\xi)|^2\right) d\xi\\ &+ C \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \left|\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\right|^2 \left(|\widehat{g_1}(\xi)|^2 + |\widehat{g_2}(\xi)|^2\right) d\xi\\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|\frac{(1+\xi^2)\xi}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\right|^2 \left(|\widehat{g_1}(\xi)|^2 + |\widehat{g_2}(\xi)|^2\right) d\xi.\end{aligned}$$

Como $\left|\dfrac{(1+\xi^2)\xi}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4}\right| < C$, para algún $C > 0$,

$$\begin{aligned}
\|K * \partial_x g\|^2_{H^s\times H^s} &\leq C\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left(|\widehat{g_1}(\xi)|^2 + |\widehat{g_2}(\xi)|^2\right) d\xi \\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s\, |\widehat{g_1}(\xi)|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s\, |\widehat{g_2}(\xi)|^2\, d\xi\right) \\
&= C\left(\|g_1\|_s^2 + \|g_2\|_s^2\right) \\
&= C\,\|g\|^2_{H^s\times H^s} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K * \partial_x g \in H^s \times H^s$. $\square$

2.1. Existencia local de soluciones

Se desea probar que existe $T \in]0, T_0]$ y $(u,v) \in C([0,T]; H^s \times H^s)$ tal que (2.1) es satisfecha. Note que la derivada respecto al tiempo debe ser interpretada en el sentido de la topología de H^s. Se debe notar también que nuestra definición de existencia local contiene la propiedad de persistencia de la solución, es decir, la solución en cuanto existe, permanece en el espacio de H^s al cual pertenece la condición inicial $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$.

Iniciamos esta sección mostrando la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Sean $U(0) = (u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, $s \geq 2$, $s \in \mathbb{N}$, a_1, a_2, a_3, a_4 números reales con a_2 positivo, $0 < a_1 < 1$ y p un entero mayor o igual a 1. Si $(u,v) \in C([0,T_0]; H^s \times H^s)$ es una solución del problema (2.2), entonces*

$$U(x,t) = U_0(x) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))\right] d\tau \tag{EI}$$

Demostración. Para $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$, como $(u(t), v(t))$ es solución de (2.2), $U(t) = (u(t), v(t))$ satisface

$$A\partial_t U(t) + B\partial_x U(t) + \partial_x F(U(t)) = 0$$

y por el lema 2.1 se tiene que existe A^{-1}. Luego

$$\partial_t U(t) = -A^{-1}\left[B\partial_x U(t) + \partial_x F(U(t))\right]$$

Integrando de 0 a t, resulta

$$\int_0^t \partial_t U(\tau) = -\int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(\tau) + \partial_x F(U(\tau))\right] d\tau$$

de donde

$$U(t) = U(0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(\tau) + \partial_x F(U(\tau))\right] d\tau$$

$\square$

Esto significa, que si $U \in C([0,T]; H^s \times H^s)$ es solución de (2.2), también es solución de (EI). Nos preguntamos, ¿toda solución de (EI) es solución de (2.2)?, para dar respuesta a esta pregunta necesitamos del teorema del punto fijo de Banach. Para esto consideremos el espacio métrico completo definido por el espacio de funciones

$$Y(T,R) = \left\{ U = (u_1, v_1) \in C([0,T] : H^s \times H^s) : \sup_{t\in[0,T]} \|U(t) - U(0)\|_{H^s\times H^s} \leq R \right\}.$$

La norma en $Y(T,R)$ es dada por

$$\|U\|_{Y(T,R)} = \sup_{t\in[0,T]} \|U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}.$$

donde $s \geq 2$, $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, T y R reales positivos. Es claro que $(Y(T,R), d)$ es un espacio métrico completo.

Para $U \in Y(T,R)$, definimos la aplicación P por

$$(PU)(x,t) = U(x,0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))\right] d\tau, \;\; \forall t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Definido el espacio $Y(T,R)$ y la aplicación P se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Si $s \geq 2$ y $U(\cdot,0) \in H^s \times H^s$, con $U(\cdot,0) \neq 0$ existen $\overline{T}$ y $\overline{R}$ positivos dependientes de $\|U(\cdot,0)\|_{H^s \times H^s}$, tales que $P : Y(\overline{T},\overline{R}) \longrightarrow Y(\overline{T},\overline{R})$ es una contracción.*

Demostración. Probaremos que la aplicación P satisface el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} P : Y(\overline{T},\overline{R}) & \longrightarrow & Y(\overline{T},\overline{R}) & \subset & C\left([0,\overline{T}]; H^s \times H^s\right) \\ U & \longmapsto & PU : [0,\overline{T}] & \longrightarrow & H^s \times H^s \\ & & t & \longmapsto & PU(t) \end{array}$$

y lo haremos en dos etapas.

PRIMERA ETAPA.

Probaremos que P tiene rango $\mathcal{R}(P) \subseteq Y(\overline{T},\overline{R})$ para $\overline{T}$ y $\overline{R}$ positivos dependientes de $\|U(0)\|_{H^s \times H^s}$ que serán elegidos posteriormente. Para esto debemos probar que:

a. La aplicación P está bien definida por (2.7) para cualquier $T > 0$ y $R > 0$, esto es, $PU : [0,T] \longrightarrow H^s \times H^s$.

b. Cualesquiera sea $T > 0$, la aplicación $PU : [0,T] \longrightarrow H^s \times H^s$ es continua, esto es, $PU \in C\left([0,T] : H^s \times H^s\right)$ para todo $U \in Y(T,R)$.

c. Existen $T_0 = T_0\left(\|U(\cdot,0)\|_{H^s \times H^s}\right) > 0$ y $R_0 = R_0\left(\|U(\cdot,0)\|_{H^s \times H^s}\right) > 0$ tal que la aplicación P definida en $Y(T_0,R_0)$ tiene rango $\mathcal{R}(P)$ contenido en $Y(T_0,R_0)$.

En efecto,

a.

$$\begin{aligned} (PU)(\cdot,t) &= U(\cdot,0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \\ &= U(\cdot,0) - \int_0^t A^{-1}\partial_x\left[BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \end{aligned}$$

aplicando el teorema 2.1

$$(PU)(\cdot,t) = U(\cdot,0) - \int_0^t K * \partial_x\left[BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau$$

Por hipótesis $U(\cdot,0)\in H^s\times H^s$ y si $U(\cdot,t)\in H^s\times H^s$ entonces $u(t)\in H^s$ y $v(t)\in H^s$. Como

$$F(U(\cdot,t))=\begin{pmatrix} \frac{a_3}{p+1}v^{p+1}(t)+a_4(u^pv)(t)+\frac{1}{p+1}u^{p+1}(t)\\ \frac{a_3}{p+1}u^{p+1}(t)+a_4(uv^p)(t)+\frac{1}{p+1}v^{p+1}(t)\end{pmatrix}$$

entonces $F(U(\cdot,t))\in H^s\times H^s$ pues para $s\geq 2$, H^s es un álgebra de Banach, por lo tanto $v^{p+1}(t),u^{p+1}(t),u^p(t)v(t),u(t)v^p(t)$ y sus productos por escalares pertenecen a H^s. Luego, por el teorema 2.2

$$K*\partial_x\left[BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\right]\in H^s\times H^s$$

y dado que $H^{s+1}\times H^{s+1}\subseteq H^s\times H^s$, se deduce que

$$\int_0^t K*\partial_x\left[BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\in H^s\times H^s.$$

Por consiguiente, $(PU)(\cdot,t)\in H^s\times H^s$ para cualquier $t\in[0,T]$, lo que prueba que P está bien definida por (2.7)

b. Para $t_0\in[0,T]$ supongamos $t_0<t$, entonces

$$\begin{aligned}\|PU(t)-PU(t_0)\|_{H^s\times H^s}&=\Big\|U(\cdot,0)-\int_0^t A^{-1}\left[B\partial_xU(\cdot,\tau)+\partial_xF(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\\ &\quad -U(\cdot,0)+\int_0^{t_0}A^{-1}\left[B\partial_xU(\cdot,\tau)+\partial_xF(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\Big\|_{H^s\times H^s}\\ &=\Big\|\int_0^t A^{-1}\left[B\partial_xU(\cdot,\tau)+\partial_xF(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\\ &\quad -\int_0^{t_0}A^{-1}\left[B\partial_xU(\cdot,\tau)+\partial_xF(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\Big\|_{H^s\times H^s}\\ &=\Big\|\int_{t_0}^t A^{-1}\left[B\partial_xU(\cdot,\tau)+\partial_xF(U(\cdot,\tau))\right]d\tau\Big\|_{H^s\times H^s}\\ &\leq\int_{t_0}^t\left\|A^{-1}\partial_x\left[BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\right]\right\|_{H^s\times H^s}d\tau\end{aligned}$$

aplicando el teorema 2.1 y 2.2 se tiene

$$\begin{aligned}\|PU(t)-PU(t_0)\|_{H^s\times H^s}&\leq\int_{t_0}^t\|K*\partial_x\left[BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\right]\|_{H^s\times H^s}\ d\tau\\ &=|t-t_0|\sup_{t_0\leq\tau\leq t}\|K*\partial_x\left(BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\right)\|_{H^s\times H^s}\\ &\leq C(t-t_0)\sup_{t_0\leq\tau\leq t}\|BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s}\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|PU(t)-PU(t_0)\|_{H^s\times H^s}\leq C\ (t-t_0)\sup_{t_0\leq\tau\leq t}\|BU(\cdot,\tau)+F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s}.$$

Cuando $t\to t_0^+$ la expresión converge a cero. Esto prueba la continuidad de PU por la derecha de t_0. La continuidad por la izquierda de t_0 se sigue de manera análoga. Luego, PU es continua en t_0.

c. Sean $T_0 > 0$, $R_0 > 0$ y $U(t) \in Y(T_0, R_0)$, entonces para $0 \le t \le T_0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|PU(\cdot,t) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} &= \left\| - \int_0^t A^{-1}\partial_x \left[BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \right\|_{H^s\times H^s} \\ &= \left\| \int_0^t K * \partial_x \left[BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \right\|_{H^s\times H^s}\end{aligned}$$

Usando el teorema de Bochner

$$\|PU(\cdot,t) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \le \int_0^t \|K * \partial_x \left[BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\right]\|_{H^s\times H^s} d\tau$$

Aplicando el teorema 2.2

$$\begin{aligned}\|PU(\cdot,t) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} &\le C \int_0^t \|BU(\cdot,\tau) + F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} d\tau \\ &\le C \int_0^t \left(\|BU(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} + \|F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s}\right) d\tau\end{aligned}$$

pero

$$F(U(\cdot,t)) = \left(a_3 \frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4(u^p v), a_3 \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4(uv^p) \right)(t)$$

$$\begin{aligned}\|F(U(\cdot,t))\|_{H^s\times H^s} &\le \frac{1}{p+1} \left\|a_3 v^{p+1} + u^{p+1} + a_4(p+1)u^p v\right\|_{H^s} \\ &+ \frac{1}{p+1} \left\|a_3 u^{p+1} + v^{p+1} + a_4(p+1)uv^p\right\|_{H^s} \\ &\le \frac{1}{p+1} \Big[|a_3| \|v\|_s^{p+1} + \|u\|_s^{p+1} + (p+1)|a_4| \|u\|_s^p \|v\|_s \\ &+ |a_3| \|u\|_s^{p+1} + \|v\|_s^{p+1} + (p+1)|a_4| \|u\|_s \|v\|_s^p\Big] \\ &\le \frac{1}{p+1} \Big[(1+|a_3|) \|v\|_s^{p+1} + (1+|a_3|) \|u\|_s^{p+1} \\ &+ (p+1)|a_4| (\|u\|_s^p \|v\|_s + \|u\|_s \|v\|_s^p)\Big] \\ &\le \frac{1}{p+1} \Big[(1+|a_3|) \left(\|v\|_s^{p+1} + \|u\|_s^{p+1}\right) \\ &+ (p+1)|a_4| (\|u\|_s^p \|v\|_s + \|u\|_s \|v\|_s^p)\Big]\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\|PU(\cdot,t) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\ &\le C \int_0^t \Big\{|B| \|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} + \frac{1}{p+1} \Big[(1+|a_3|) \left(\|v\|_s^{p+1} + \|u\|_s^{p+1}\right) \\ &+ (p+1)|a_4| (\|u\|_s^p \|v\|_s + \|u\|_s \|v\|_s^p)\Big]\Big\} d\tau \\ &\le \int_0^t \Big[C|B| \|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} + \frac{C}{p+1}(1+|a_3|) \left(\|v\|_s^{p+1} + \|u\|_s^{p+1}\right) \\ &+ C|a_4| (\|u\|_s^p \|v\|_s + \|u\|_s \|v\|_s^p)\Big] d\tau.\end{aligned}$$

Si

$$M = \text{máx}\left\{C\left|B\right|, \frac{C(1+|a_3|)}{p+1}, C\left|a_4\right|\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}&\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\\ &\qquad\le M\int_0^t \left[\|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}+\|v\|_s^{p+1}+\|u\|_s^{p+1}+\|u\|_s^p\|v\|_s+\|u\|_s\|v\|_s^p\right]d\tau \qquad (2.8)\end{aligned}$$

donde $U=(u,v)$. Por definición del espacio $Y(T_0,R_0)$:

$$\|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\le R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,,\ \forall\tau\in[0,T_0]. \qquad (2.9)$$

entonces

$$\begin{aligned}\|u(\tau)\|_s\le\|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}&\le\|U(\cdot,\tau)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}+\|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\\ &\le R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,,\ \forall\tau\in[0,T_0]. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\|v(\tau)\|_s\le\|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\le R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,,\ \forall\tau\in[0,T_0]. \qquad (2.11)$$

Reemplazando (2.9), (2.10) y (2.11) en (2.8)

$$\begin{aligned}&\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\\ &\le M\int_0^t\Big[R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}+\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p+1}\\ &+\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p+1}+2\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p+1}\Big]d\tau\\ &=M\int_0^t\left[R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}+4\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p+1}\right]d\tau\\ &=M\left[R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}+4\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p+1}\right]t,\ \forall t\le T_0\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\\ &\le MT_0\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)\left[1+4\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p\right]\end{aligned}$$

Eligiendo

$$R_0=\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\quad\text{y}\quad T_0=\frac{1}{2M\left(1+2^{p+2}\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}^p\right)},$$

obtenemos

$$\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\le R_0,\quad\text{para todo } t\in[0,T_0].$$

Por consiguiente,

$$\sup_{0\le t\le T_0}\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\le R_0$$

de donde se concluye que $\mathcal{R}(P)\subseteq Y(T_0,R_0)$.

SEGUNDA ETAPA.

Por demostrar que existen $\overline{T} \in [0, T_0]$ y $\overline{R} \in [0, R_0]$ tal que la aplicación $P : Y\left(\overline{T}, \overline{R}\right) \longrightarrow Y\left(\overline{T}, \overline{R}\right)$ es una contracción. Para esto, debemos probar que existe un número real positivo $0 < \lambda < 1$, y $\overline{T} = \overline{T}\left(\|U(\cdot, 0)\|_{H^s \times H^s}\right) > 0$ y $\overline{R} = \overline{R}\left(\|U(\cdot, 0)\|_{H^s \times H^s}\right) > 0$ tal que

$$d\left(PU(\cdot, t), PV(\cdot, t)\right) \leq \lambda d\left(U(\cdot, t), V(\cdot, t)\right)$$

para todo U, $V \in Y\left(\overline{T}, \overline{R}\right)$. Consideremos $U = (u_1, v_1)$, $V = (u_2, v_2) \in Y(T_0, R_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|PU(\cdot, t) - PV(\cdot, t)\|_{H^s \times H^s} &= \Big\| U(\cdot, 0) - \int_0^t A^{-1}\partial_x \left[BV(\cdot, \tau) + F(V(\cdot, \tau))\right] d\tau \\
&\quad -U(\cdot, 0) + \int_0^t A^{-1}\partial_x \left[BU(\cdot, \tau) + F(U(\cdot, \tau))\right] d\tau \Big\|_{H^s \times H^s} \\
&= \Big\| \int_0^t A^{-1}\partial_x \left[BV(\cdot, \tau) + F(V(\cdot, \tau))\right] d\tau \\
&\quad - \int_0^t A^{-1}\partial_x \left[BU(\cdot, \tau) + F(U(\cdot, \tau))\right] d\tau \Big\|_{H^s \times H^s} \\
&= \Big\| \int_0^t \left(A^{-1}\partial_x \left[BV(\cdot, \tau) - BU(\cdot, \tau)\right]\right. \\
&\quad \left. + A^{-1}\partial_x \left[F(V(\cdot, \tau)) - F(U(\cdot, \tau))\right]\right) d\tau \Big\|_{H^s \times H^s}.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 2.1 y 2.2

$$\begin{aligned}
\|PU(\cdot, t) - PV(\cdot, t)\|_{H^s \times H^s} &= \Big\| \int_0^t \left(K * \partial_x \left[BV(\cdot, \tau) - BU(\cdot, \tau)\right]\right. \\
&\quad \left. + K * \partial_x \left[F(V(\cdot, \tau)) - F(U(\cdot, \tau))\right]\right) d\tau \|_{H^s \times H^s} \\
&\leq C \int_0^t |B| \, \|V(\cdot, \tau) - U(\cdot, \tau)\|_{H^s \times H^s} \, d\tau + \\
&\quad C \int_0^t \|F(V(\cdot, \tau)) - F(U(\cdot, \tau))\|_{H^s \times H^s} \, d\tau
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Se sabe que:

$$F(V(\cdot, \tau)) = \left(a_3 \frac{v_2^{p+1}}{p+1} + \frac{u_2^{p+1}}{p+1} + a_4(u_2^p v_2), a_3 \frac{u_2^{p+1}}{p+1} + \frac{v_2^{p+1}}{p+1} + a_4(u_2 v_2^p) \right)(\tau)$$

$$F(U(\cdot, \tau)) = \left(a_3 \frac{v_1^{p+1}}{p+1} + \frac{u_1^{p+1}}{p+1} + a_4(u_1^p v_1), a_3 \frac{u_1^{p+1}}{p+1} + \frac{v_1^{p+1}}{p+1} + a_4(u_1 v_1^p) \right)(\tau)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&F(V(\cdot, \tau)) - F(U(\cdot, \tau)) \\
&= \left(\frac{a_3}{p+1}\left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right) + \frac{1}{p+1}\left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right) + a_4\left(u_2^p v_2 - u_1^p v_1\right), \right. \\
&\left. \frac{a_3}{p+1}\left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right) + \frac{1}{p+1}\left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right) + a_4\left(u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\right) \right)(\tau)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\|F(V(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s}\\
&= \frac{1}{p+1}\| \left(a_3\left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right)(\tau) + \left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right)(\tau) + a_4(p+1)\left(u_2^p v_2 - u_1^p v_1\right)(\tau),\right.\\
&\left. a_3\left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right)(\tau) + \left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right)(\tau) + a_4(p+1)\left(u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\right)(\tau)\right)\|_{H^s\times H^s}\\
&= \frac{1}{p+1}\|a_3\left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right)(\tau) + \left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right)(\tau) + a_4(p+1)\left(u_2^p v_2 - u_1^p v_1\right)(\tau)\|_s\\
&+ \frac{1}{p+1}\|a_3\left(u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right)(\tau) + \left(v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right)(\tau) + a_4(p+1)\left(u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\right)(\tau)\|_s
\end{aligned}$$

Puesto que,

$$\|(u,v)\|_{H^s\times H^s}^2 = \|u\|_s^2 + \|v\|_s^2 \le \left(\|u\|_s + \|v\|_s\right)^2$$

se tiene que

$$\|(u,v)\|_{H^s\times H^s} \le \|u\|_s + \|v\|_s$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\|F(V(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s}\\
&= \frac{1}{p+1}\left[|a_3|\left\|v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right\|_s + \left\|u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right\|_s + |a_4|(p+1)\|u_2^p v_2 - u_1^p v_1\|_s\right.\\
&\left. + |a_3|\left\|u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right\|_s + \left\|v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right\|_s + |a_4|(p+1)\|u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\|_s\right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Operando el segundo miembro norma por norma

$$\begin{aligned}
v_2^{p+1} - v_1^{p+1} &= (v_2 - v_1)\left(v_2^p + v_2^{p-1}v_1 + v_2^{p-2}v_1^2 + \cdots + v_1^p\right)\\
&= (v_2 - v_1)\sum_{i=0}^{p} v_2^{p-i}v_1^i
\end{aligned}$$

Aplicando la norma en H^s y el hecho de que H^s es un álgebra de Banach para $s \ge 2$

$$\left\|v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right\|_s \le C\|v_2 - v_1\|_s \sum_{i=0}^{p}\|v_2\|_s^{p-i}\|v_1\|_s^i \tag{2.14}$$

De manera análoga para las otras normas que aparecen en el segundo miembro

$$\left\|u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right\|_s \le C\|u_2 - u_1\|_s \sum_{i=0}^{p}\|u_2\|_s^{p-i}\|u_1\|_s^i, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\|u_2^p v_2 - u_1^p v_1\|_s &= \|u_2^p v_2 - u_1^p v_1 + u_1^p v_2 - u_1^p v_2\|_s\\
&= \|v_2\left(u_2^p - u_1^p\right) + u_1^p(v_2 - v_1)\|_s\\
&\le C\|v_2\|_s\|u_2^p - u_1^p\|_s + C\|u_1\|_s^p\|v_2 - v_1\|_s\\
&\le C\|v_2\|_s\|u_2 - u_1\|_s\sum_{i=0}^{p-1}\|u_2\|_s^{p-1-i}\|u_1\|_s^i + C\|u_1\|_s^p\|v_2 - v_1\|_s
\end{aligned} \tag{2.16}$$

y, de manera semejante:

$$\begin{aligned}
&\|u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\|_s \\
&\leq C\,\|u_2\|_s\,\|v_2 - v_1\|_s \sum_{i=0}^{p-1} \|v_2\|_s^{p-1-i}\,\|v_1\|_s^i + C\,\|v_1\|_s^p\,\|u_2 - u_1\|_s
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $U(x,t) = (u_1(x,t), v_1(x,t)) \in Y(T_0, R_0)$, $V(x,t) = (u_2(x,t), v_2(x,t)) \in Y(T_0, R_0)$, haciendo uso de la definición del espacio $Y(T_0, R_0)$ y procediendo como en (2.10)

$$\begin{aligned}
\|v_2(\tau)\|_s &\leq \|V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} \leq R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,, \ \forall\,\tau \in [0, T_0] \\
\|v_1(\tau)\|_s &\leq \|V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} \leq R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,, \ \forall\,\tau \in [0, T_0] \\
\|u_2(\tau)\|_s &\leq \|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} \leq R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,, \ \forall\,\tau \in [0, T_0] \\
\|u_1(\tau)\|_s &\leq \|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} \leq R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\,, \ \forall\,\tau \in [0, T_0]
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades, en (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17) se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|v_2^{p+1} - v_1^{p+1}\right\|_s &\leq C\,\|v_2 - v_1\|_s \sum_{i=0}^{p} \left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p-i+i} \\
&= C\,\|v_2 - v_1\|_s\,(p+1)\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p && (2.18) \\
\left\|u_2^{p+1} - u_1^{p+1}\right\|_s &\leq C\,\|u_2 - u_1\|_s\,(p+1)\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p && (2.19) \\
\|u_2^p v_2 - u_1^p v_1\|_s &\leq C\,\|u_2 - u_1\|_s\,\|v_1\|_s\,p\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^{p-1} \\
&\quad + C\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \|v_2 - v_1\|_s \\
&\leq C\,\|u_2 - u_1\|_s\,p\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \\
&\quad + C\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \|v_2 - v_1\|_s \\
&\leq C\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,(p+1)\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p && (2.20) \\
\|u_2 v_2^p - u_1 v_1^p\|_s &\leq C\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,(p+1)\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p && (2.21)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21) en (2.13) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\|F(V(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq C\,|a_3|\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \\
&+ C\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \\
&+ C\,|a_4|\,(p+1)\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p \\
&\leq 3k_1\,\|V(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\left(R_0 + \|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde

$$k_1 = \max\{C\,|a_3|\,, C, C\,|a_4|\}.$$

Sustituyendo (2.22) en (2.12):

$$\begin{aligned}
&\|PU(\cdot,t)-PV(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}\\
&\leq C\int_0^t |B|\,\|V(\cdot,\tau)-U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\\
&+3k_1C\int_0^t \|V(\cdot,\tau)-U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p d\tau.
\end{aligned}$$

Haciendo $k_2=\text{máx}\{C\,|B|\,,3k_1C\}$

$$\begin{aligned}
&\|PU(\cdot,t)-PV(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s}\\
&\leq k_2\left[1+\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p\right]\int_0^t \|V(\cdot,\tau)-U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\\
&\leq k_2\left[1+\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p\right]td(U,V),\quad \forall\, t\in[0,T_0]\\
&\leq k_2\left[1+\left(R_0+\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)^p\right]T_0d(U,V),\quad \forall\, t\in[0,T_0]
\end{aligned}$$

Eligiendo $R_0=\overline{R}=\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}$ y para todo $t\in[0,T_0]$ obtenemos

$$\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\leq k_2\left[1+2^p\,\|U(\cdot,0)\|^p_{H^s\times H^s}\right]T_0d(U,V).$$

Tomando supremo en $[0,T_0]$,

$$\begin{aligned}
d(PU,PV)&=\sup_{0\leq t\leq T_0}\|PU(\cdot,t)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\\
&\leq k_2\left[1+2^p\,\|U(\cdot,0)\|^p_{H^s\times H^s}\right]T_0d(U,V).
\end{aligned}$$

Como

$$k_2\left[1+2^p\,\|U(\cdot,0)\|^p_{H^s\times H^s}\right]T_0\to 0 \text{ cuando } T_0\to 0^+$$

de la definición de límite se sigue que existe $\overline{T}=\overline{T}\left(\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)$ tal que

$$0<\overline{T}\leq T_0<\delta=\delta\left(\|U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\right)\tag{2.23}$$

donde la función $\delta:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ se define como

$$\delta(x)=\frac{1}{k_2\,(1+2^px^p)}.$$

Así se deduce que

$$d(PU,PV)\leq\lambda d(U,V),\ \text{con } 0<\lambda<1$$

lo que muestra que P es una contracción.

Por el teorema del punto fijo de Banach, existe una única $U\in Y(\overline{T},\overline{R})\subseteq C\left([0,\overline{T}]:H^s\times H^s\right)$ tal que $PU=U$, es decir,

$$PU(x,t)=U(x,t)=U(x,0)-\int_0^t k*\partial_x\left[BU(x,\tau)+F(U(x,\tau))\right]d\tau$$

para todo $t \in [0, \overline{T}]$, lo cual muestra la existencia de la solución de la ecuación integral (EI) en $Y(\overline{T}, \overline{R})$.

A continuación probaremos que la función U, solución de la ecuación integral (EI), es la única solución de (2.2). $\square$

Teorema 2.5. *Sea $U_0 = (u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, $s \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, a_1, a_2, a_3, a_4 números reales con a_2 positivo, $0 < a_1 < 1$ y p un entero ≥ 1. Entonces, existen $\overline{T} > 0$ y un par de funciones $(u, v) \in C\left([0, \overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ tal que $(\partial_t u, \partial_v) \in C\left([0, \overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ y (u, v) satisface (2.2).*

Demostración. Probaremos que la función U, solución única de la ecuación integral (EI) es la solución del problema de valor inicial (2.2) y que $\partial_x U(x, t)$ existe.

En efecto, consideremos

$$\begin{aligned} U(x,t) &= U(x,0) - \int_0^t k * \partial_x \left[BU(x,\tau) + F(U(x,\tau))\right] d\tau \\ &= U(x,0) - \int_0^t \partial_x k * \left[BU(x,\tau) + F(U(x,\tau))\right] d\tau \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hagamos $U_L(x, 0) = U(x, 0)$ y $U_P(x, t) = -\int_0^t \partial_x k * [BU(x, \tau) + F(U(x, \tau))]\, d\tau$. Luego, $U_L(x, t)$ es solución del problema lineal

$$\begin{cases} A\partial_t U_L(x,t) + B\partial_x U_L(x,t) = 0 \\ U_L(x,0) = U(x,0) = (u_0, v_0). \end{cases}$$

y demostraremos que $U_P(x, t)$ es solución de

$$\begin{cases} A\partial_t U_P(x,t) + B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t)) = 0 \\ U_P(x,0) = 0. \end{cases}$$

En efecto, de la definición de U_P es claro que $U_P(x, 0) = 0$. Sea $h > 0$ tal que $t + h \in [0, \overline{T}]$. Realizando los cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{U_P(x,t+h) - U_P(x,t)}{h} &= -\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \right] \\ &= -\frac{1}{h}\left[\int_0^t \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \right. \\ &\qquad + \int_t^{t+h} \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \\ &\qquad \left. - \int_0^t \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \right] \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{U_P(x,t+h) - U_P(x,t)}{h} = -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \partial_x k * [BU_P(x,\tau) + F(U(x,\tau))]\, d\tau \tag{2.25}$$

Por el teorema del valor medio para integrales de Bochner en el intervalo $[t, t+h]$ con $t_h \in [t, t+h]$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{U_P(x,t+h)-U_P(x,t)}{h} &= -\frac{1}{h}\partial_x k * [BU_P(x,t_h)+F(U(x,t_h))]\,h \\ &= -\partial_x k * [BU_P(x,t_h)+F(U(x,t_h))] \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ahora, aplicando las propiedades de límite cuando $h \to 0^+$ a (2.26)

$$\partial_t^+ U_P(x,t) = -\partial_x k * [BU_P(x,t)+F(U(x,t))]$$

En forma análoga, para $h < 0$

$$\partial_t^- U_P(x,t) = -\partial_x k * [BU_P(x,t)+F(U(x,t))]$$

En consecuencia $\partial_t^- U_P(x,t) = \partial_t^+ U_P(x,t)$. Luego, existe $\partial_t U_P(x,t)$ y

$$\begin{aligned}\partial_t U_P(x,t) &= -\partial_x k * [BU_P(x,t)+F(U(x,t))] \\ &= -k * \partial_x BU_P(x,t) + F(U(x,t)) \\ &= -k * [B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t))] \\ &= -A^{-1}[B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t))]\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t

$$U_P(x,t) = -\int_0^t A^{-1}[B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t))]\,d\tau$$

Por consiguiente, $U_P(x,t)$ existe y es solución de la ecuación diferencial

$$A\partial_t U_P(x,t) + B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t)) = 0$$

Ahora probaremos que $U = U_L + U_P$ es solución de (2.2). En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}A\partial_t U(x,t) &= A\partial_t U_L(x,t) + A\partial_t U_P(x,t)] \\ &= -B\partial_x U_L(x,t) - [B\partial_x U_P(x,t) + \partial_x F(U(x,t))] \\ &= -[B\partial_x U_L(x,t) + B\partial_x U_P(x,t)] - \partial_x F(U(x,t)) \\ &= -B\partial_x U(x,t) - \partial_x F(U(x,t)).\end{aligned}$$

Además $U(x,0) = U_L(x,0) + U_P(x,0) = U(0)$.

Veamos que $U \in C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ con $\partial_t U \in C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$. En efecto, puesto que $PU(x,t) = U(x,t)$ y PU es una función diferenciable en t, tenemos que $U \in C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ y $U(\cdot,t)$ es solución de la ecuación diferencial (2.2), es decir,

$$\partial_t U(\cdot,t) = -A^{-1}B\partial_x U(\cdot,t) - A^{-1}\partial_x F(U(\cdot,t)).$$

Pero anteriormente se mostró que $-A^{-1}B\partial_x U(\cdot,t) \in H^s \times H^s$ y $-A^{-1}\partial_x F(U(\cdot,t)) \in H^s \times H^s$, lo cual prueba que $\partial_t U(\cdot,t) \in H^s \times H^s$. Usando el Teorema de Inmersión de Sobolev se tiene que $H^s \times H^s \hookrightarrow C_\infty \times C_\infty$, de ahí que $\partial_t U(\cdot,t) \in C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$. Así, $\partial_t U(\cdot,t)$ existe y está dado por

$$\partial_t U(\cdot,t) = \partial_t PU(\cdot,t) = -A^{-1}\partial_x[BU(\cdot,t) + F(U(\cdot,t))].$$

que es una función continua en $t \in [0,\overline{T}]$ con valores en $H^s \times H^s$.

Con esto se prueba la existencia local de la solución de la ecuación diferencial (2.2) y la unicidad en $Y(\overline{T},\overline{R})$. Queda por probar la unicidad en $C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$. □

2.2. Unicidad de la solución local

La unicidad de la solución local del problema (2.2) será una consecuencia inmediata del siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sean $U(\cdot,0)$, $V(\cdot,0) \in H^s \times H^s$ con $s \geq 2$. Entonces, existen $\overline{\overline{T}} > 0$ y $U,V \in C\left([0,\overline{\overline{T}}] : H^s \times H^s\right)$ soluciones de (2.2) tales que $U(x,0) = U(0)$, $V(x,0) = V(0)$ y*

$$\|U(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \leq \|U(\cdot,0) - V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\, e^{C\,t} \tag{2.27}$$

para todo $t \in [0,\overline{\overline{T}}]$, donde C es una constante.

Demostración. Por el teorema 2.5, existen $\overline{T}_{U(0)} > 0$ y $\overline{T}_{V(0)} > 0$ tales que $U \in C\left([0,\overline{\overline{T}}] : H^s \times H^s\right)$ y $V \in C([0,T] : H^s \times H^s)$, con $s \geq 2$, $U = (u_1,v_1)$ y $V = (u_2,v_2)$ que satisfacen las ecuaciones

$$U(x,t) = U(x,0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))\right] d\tau$$

$$V(x,t) = V(x,0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x V(x,\tau) + \partial_x F(V(x,\tau))\right] d\tau$$

para todo $t \in [0,\overline{\overline{T}}]$, siendo $\overline{\overline{T}} = \text{mín}\left\{\overline{T}_{U(0)}, \overline{T}_{V(0)}\right\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|U(\cdot,t) - V(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U(\cdot,0) - V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\quad + \int_0^t \|K * \partial_x\left[BU(\cdot,\tau) - BV(\cdot,\tau)\right]\|_{H^s\times H^s} d\tau \\
&\quad + \int_0^t \|K * \partial_x\left[F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\right]\|_{H^s\times H^s} d\tau \\
&\leq \|U(\cdot,0) - V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\quad + C_1\,|B| \int_0^t \|BU(\cdot,\tau) - V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} d\tau \\
&\quad + C_2 \int_0^t \|F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} d\tau.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Acotando, para ello usamos las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) y como H^s es un álgebra de Banach para $s \geq 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\|F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} \\
&= \frac{1}{p+1}\left[(1+|a_3|)\,\|v_2-v_1\|_s \sum_{j=0}^{p} \|v_2\|_s^{p-j}\,\|v_1\|_s^j\right. \\
&+ (1+|a_3|)\,\|u_2-u_1\|_s \sum_{j=0}^{p} \|u_2\|_s^{p-j}\,\|u_1\|_s^j \\
&+ |a_4|\,(p+1)\left(\|v_2\|_s\,\|u_2-u_1\|_s \sum_{i=0}^{p-1} \|u_2\|_s^{p-1-i}\,\|u_1\|_s^i + \|u_1\|_s^p\,\|v_2-v_1\|_s\right) \\
&\left.+ |a_4|\,(p+1)\left(\|u_2\|_s\,\|v_2-v_1\|_s \sum_{i=0}^{p-1} \|v_2\|_s^{p-1-i}\,\|v_1\|_s^i + \|v_1\|_s^p\,\|u_2-u_1\|_s\right)\right]
\end{aligned}$$

Como $(u_1(\tau), v_1(\tau)), (u_2(\tau), v_2(\tau) \in H^s \times H^s$ para todo $\tau \in [0,T]$, consideremos

$$N = \text{máx}\{\sup_{[0,T]} \|U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}, \sup_{[0,T]} \|V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\}$$

se tiene por equivalencia de normas

$$\|u_1\|_s \leq \|u_1\|_s + \|v_1\|_s = \|U\|_{H^s\times H^s} \leq N$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\|F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq \frac{1}{p+1}\left[(1+|a_3|)\,\|v_2-v_1\|_m\,(p+1)N^p + (1+|a_3|)\,\|u_2-u_1\|_m\,(p+1)N^p\right. \\
&+ |a_4|\,(p+1)\left(N\,\|u_2-u_1\|_m\,pN^{p-1} + N^p\,\|v_2-v_1\|_m\right) \\
&\left.+ |a_4|\,(p+1)\left(N\,\|v_2-v_1\|_m\,pN^{p-1} + N^p\,\|u_2-u_1\|_m\right)\right] \\
&= \frac{1}{p+1}\left[((1+|a_3|)(p+1)N^p + |a_4|\,(p+1)pN^p)\,\|v_2-v_1\|_m\right. \\
&\left.+ ((1+|a_3|)(p+1)N^p + |a_4|\,(p+1)pN^p + |a_4|\,(p+1)N^p)\,\|u_2-u_1\|_m\right] \\
&= [(1+|a_3|)N^p + |a_4|\,N^p + |a_4|\,pN^p]\,(\|v_2-v_1\|_m + \|u_2-u_1\|_m).
\end{aligned}$$

Sea

$$M = \text{máx}\{(1+|a_3|)N^p,$$

Por lo tanto,

$$\|F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} \leq M\,(\|v_2-v_1\|_s + \|u_2-u_1\|_s)$$

Por equivalencia de normas

$$\|F(U(\cdot,\tau)) - F(V(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} \leq C_3 M\,\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{H^s\times H^s}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.28)

$$
\begin{aligned}
\|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U(\cdot,0)-V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\quad + C_1\,|B| \int_0^t \|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\, d\tau \\
&\quad + C_2 r \int_0^t \|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\, d\tau \\
&\leq \|U(\cdot,0)-V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\quad + C \int_0^t \|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\, d\tau
\end{aligned}
$$

donde $C = C_1\,|B| + C_2 r$.

Usando la desigualdad de Gronwall se tiene que para todo $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
\|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U(\cdot,0)-V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \exp\left[C \int_0^t \|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\, d\tau\right] \\
&\leq \|U(\cdot,0)-V(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\, e^{CT}.
\end{aligned}
$$

lo que prueba el teorema. $\square$

Corolario 2.7. *Si $U(0) \in H^s \times H^s$ con $s \geq 2$, existen $\overline{T} = \overline{T}\left(\|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right) > 0$ y $U \in C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ con $\partial_t U \in C\left([0,T] : H^s \times H^s\right)$ única solución de (2.2).*

Demostración. Sean U y V dos soluciones de (2.2), con datos iniciales $U(0) = V(0)$. Reemplazando en (2.28) tenemos

$$
\|U(\cdot,\tau)-V(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} \leq \|U(\cdot,0)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s}\, e^{CT} = 0.
$$

para todo $t \in [0,\overline{T}]$.

Así, queda probada la unicidad local en $C\left([0,T] : H^s \times H^s\right)$. $\square$

2.3. Dependencia continua de la solución local respecto del dato inicial

Veamos que la solución depende continuamente del dato inicial.

Teorema 2.8. *Sean $U_n(0), U(0) \in H^s \times H^s$ con $U_n(0) \longrightarrow U(0)$ en $H^s \times H^s$, para $s \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ y $T < \overline{T}\left(\|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right)$. Entonces $U_n \longrightarrow U$ en $C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ donde U_n y U son soluciones del problema (2.2) correspondientes a los datos iniciales $U_n(0)$ y $U(0)$.*

Demostración. Dado $T < \overline{T}\left(\|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right)$, por demostrar que si $\{U_n(0)\}_{n>0} \in H^s \times H^s$ es una sucesión tal que

$$
\lim_{n\to+\infty} U_n(0) = U(0)
$$

en $H^s \times H^s$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para cualquier $n > n_0$ y $T < \overline{T}\left(\|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right)$, $U_n \longrightarrow U$ en $C\left([0,\overline{T}] : H^s \times H^s\right)$ o

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,\overline{T}]} \|U_n(t) - U(t)\|_{H^s\times H^s} = 0.$$

Por el teorema 2.5 y (2.9); $\overline{T} : U(0) \in H^s \times H^s \longmapsto \overline{T}(\|U(0)\|_{H^s\times H^s})$ definida por

$$\overline{T}(U(0)) = \left(R_0 + \|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right) \in]0, +\infty[$$

es una función continua en $U(0)$, pues si $U_n(0) \longrightarrow U(0)$ en $H^s \times H^s$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\overline{T}(U_n(0)) - \overline{T}(U(0))\right| &= \left|R_0 + \|U_n(0)\|_{H^s\times H^s} - R_0 - \|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right| \\
&= \left|\|U_n(0)\|_{H^s\times H^s} - \|U(0)\|_{H^s\times H^s}\right| \\
&\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}
\end{aligned}$$

Luego, $\overline{T}$ es una función continua en $U(0)$, y por lo tanto existe n_0 tal que

$$\overline{T}(\|U(0)\|_{H^s\times H^s}) > T$$

para todo $n \geq n_0$; de esta manera U_n esta definida en $[0, T]$ para todo $n \geq n_0$.

Sea $U_n \in Y(T, R)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|U_n(t)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U_n(t) - U_n(0)\|_{H^s\times H^s} + \|U_n(0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq R_0 + \|U_n(0)\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq R_0 + M
\end{aligned}$$

donde $M = \sup_{t\in[0,T]} \|U_n(0)\|_{H^s\times H^s}$. Luego por el teorema 2.5

$$U_n(t) = U_n(0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U_n(x,\tau) + \partial_x F(U_n(x,\tau))\right] d\tau$$

$$U(t) = U(0) - \int_0^t A^{-1}\left[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))\right] d\tau.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|U_n(t) - U(t)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s} \\
&+ \left\|\int_0^t K * \partial_x\left[BU_n(\cdot,\tau) - BU(\cdot,\tau)\right] d\tau\right\|_{H^s\times H^s} \\
&+ \left\|\int_0^t K * \partial_x\left[F(U_n(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau\right\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s} \\
&+ C_1 |B| \int_0^t \|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s} d\tau \\
&+ C_2 \int_0^t \|F(U_n(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} d\tau
\end{aligned}$$

Tomando $U_n = (u_{1n}, u_{2n})$ y $u = (u_1, u_2)$ y por el teorema 2.6

$$\begin{aligned}\|F(U_n(\cdot,\tau)) - F(U(\cdot,\tau))\|_{H^s\times H^s} &\leq M\,\|(u_{1n},u_{2n})\,(\cdot,\tau) - (u_1,u_2)(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\\ &= M\,\|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\\ &+ C_1\,|B| \int_0^t \|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\\ &+ C_2 \int_0^t \|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\\ &= \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\\ &+ (C_1\,|B| + C_2M) \int_0^t \|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\\ &= \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\\ &+ C \int_0^t \|U_n(\cdot,\tau) - U(\cdot,\tau)\|_{H^s\times H^s}\,d\tau\end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Gronwall, para $t < T$ tenemos

$$\begin{aligned}\|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} &\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\, exp\left(\int_0^t C d\tau\right)\\ &\leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\, e^{CT}\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\sup_{t\in[0,T]} \|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \leq \|U_n(0) - U(0)\|_{H^s\times H^s}\, e^{CT}. \tag{2.29}$$

Tomando límite cuando $n \to +\infty$ en (2.29) se obtiene el resultado. $\square$

De esta manera queda probada la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial, con lo cual el problema está bien formulado localmente.

Capítulo 3

El problema de Cauchy global

En este capítulo probaremos la buena formulación global del problema de valor inicial asociado al sistema de ecuaciones dispersivas no lineales del tipo BBM de la forma

$$\begin{cases} (1-\partial_x^2)\partial_t u - a_1\partial_x^2\partial_t v + a_2\partial_x u + a_3 v^p\partial_x v + a_4\partial_x(u^p v) + u^p\partial_x u = 0 \\ (1-\partial_x^2)\partial_t v - a_1\partial_x^2\partial_t u + a_2\partial_x v + a_3 u^p\partial_x u + a_4\partial_x(u v^p) + v^p\partial_x v = 0 \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

en el espacio $H^s \times H^s$, con $s \geq 2$. Como la dependencia continua es una propiedad local en el tiempo, es suficiente mostrar la existencia, unicidad de la solución global $U \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$ de (3.1), siempre que $s \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, $0 < a_1 < 1$ y $U_0 \in H^s \times H^s$ y que esta solución depende continuamente del dato inicial.

3.1. Existencia y unicidad de la solución global

Para el sistema dispersivo no lineal (3.1) demostraremos que la solución local U de (3.1) se puede extender a una solución global siempre que $U(0) \in H^s \times H^s$ con $s \geq 2$, que se obtiene del siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Existencia global). *Si $U(0) = (u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $s \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, $0 < a_1 < 1$ y a_2, a_3, a_4 números reales con $a_2 > 0$ y $a_3 = a_4$ en (3.1). Entonces, para cada $T > 0$ existen un único par de funciones $(u,v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$ y $(\partial_t u, \partial_t v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$, (u,v) solución de (3.1) con $(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$.*

Demostración. La prueba se desarrolla en dos etapas.

PRIMERA ETAPA.

Probaremos que $\|U\|_{H^s\times H^s}$ es acotada sobre $[0,T]$, donde T es dado por la existencia local. En efecto, multiplicando la primera ecuación de (3.1) por u y la segunda por v se tiene

$$\left\langle u, \partial_t u - \partial_x^2\partial_t u - a_1\partial_x^2\partial_t v + a_2\partial_x u + a_3 v^p\partial_x v + a_4\partial_x(u^p v) + u^p\partial_x u\right\rangle_{L^2} = 0$$

$$\langle u, \partial_t u\rangle_{L^2} - \left\langle u, \partial_x^2 \partial_t u\right\rangle_{L^2} - a_1 \left\langle u, \partial_x^2 \partial_t v\right\rangle_{L^2}$$

$$+a_2 \langle u, \partial_x u\rangle_{L^2} + a_3 \langle u, v^p \partial_x v\rangle_{L^2} + a_4 \langle u, \partial_x (u^p v)\rangle_{L^2} + \langle u, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} = 0$$

$$\partial_t \langle u, u\rangle_{L^2} + \partial_t \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + a_1 \partial_t \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2}$$

$$+a_2 \langle u, \partial_x u\rangle_{L^2} + a_3 \langle u, v^p \partial_x v\rangle_{L^2} - a_4 \langle \partial_x u, u^p v\rangle_{L^2} + \langle u, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} = 0.$$

Integrando por partes, transponiendo términos y factorizando resulta

$$a_2 \langle u, \partial_x u\rangle_{L^2} = -a_2 \langle \partial_x u, u\rangle_{L^2} = -a_2 \langle u, \partial_x u\rangle_{L^2}$$

Luego, $2a_2 \langle u, \partial_x u\rangle_{L^2} = 0$. Entonces, $\langle u, \partial_x u\rangle_{L^2} = 0$. Además,

$$\langle u, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} = \left\langle u^{p+1}, \partial_x u\right\rangle_{L^2} = -\left\langle \partial_x u^{p+1}, u\right\rangle_{L^2} = -(p+1) \langle u^p \partial_x u, u\rangle_{L^2}$$

De ahí que, $(p+2) \langle u, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} = 0$. Entonces, $\langle u, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} = 0$

Por consiguiente,

$$\partial_t \left[\langle u, u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2}\right] + a_1 \partial_t \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2} + a_3 \langle u, v^p \partial_x v\rangle_{L^2} - a_4 \langle \partial_x u, u^p v\rangle_{L^2} = 0 \tag{3.2}$$

Del mismo modo,

$$\left\langle v, \partial_t v - \partial_x^2 \partial_t v - a_1 \partial_x^2 \partial_t u + a_2 \partial_x v + a_3 u^p \partial_x u + a_4 \partial_x (u v^p) + v^p \partial_x v\right\rangle_{L^2} = 0$$

nos da:

$$\partial_t \left[\langle v, v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2}\right] + a_1 \partial_t \langle \partial_x v, \partial_x u\rangle_{L^2} + a_3 \langle v, u^p \partial_x u\rangle_{L^2} - a_4 \langle \partial_x v, u v^p\rangle_{L^2} = 0 \tag{3.3}$$

Sumando (3.2) y (3.3)

$$\begin{gathered}
\partial_t \left[\langle u, u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2}\right] \\
+a_1 \partial_t \left[\langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x u\rangle_{L^2}\right] \\
+a_3 \left[\langle u, v^p \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle v, u^p \partial_x u\rangle_{L^2}\right] \\
-a_4 \left[\langle \partial_x u, u^p v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, u v^p\rangle_{L^2}\right] = 0
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Aplicando la propiedad de simetría del producto interno, se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(\langle u, u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + 2a_1 \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2}\right) & \\
+a_3 \left(\langle u, v^p \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle v, u^p \partial_x u\rangle_{L^2}\right) - a_4 \left(\langle \partial_x u, u^p v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, u v^p\rangle_{L^2}\right) & = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

y como, por hipótesis, $a_3 = a_4$, entonces

$$\partial_t \left(\langle u, u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + 2a_1 \langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_{L^2}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Integrando (3.6) de 0 a t y usando la definición de producto interno en L^2.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 + 2a_1 \partial_x u \partial_x v\right)(x,t)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 + 2a_1 \partial_x u \partial_x v\right)(x,0)\, dx
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando la desigualdad de Holder's y la desigualdad $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ con $p, q \geq 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, válido para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{R}$,

$$2a_1 \partial_x u \partial_x v \leq a_1 \left|\sqrt{2}\partial_x u\right| \left|\sqrt{2}\partial_x v\right| \leq a_1 \left((\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2\right)$$

Entonces,

$$-a_1 \left((\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2\right) \leq -2a_1 \partial_x u \partial_x v$$

Sumando a ambos miembros $u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2$, luego integrando en $\mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 - a_1(\partial_x u)^2 - a_1(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 - 2a_1 \partial_x u \partial_x v\right)(x,t)dx
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (1-a_1)(\partial_x u)^2 + v^2 + (1-a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 - 2a_1 \partial_x u \partial_x v\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 + 2a_1 |\partial_x u|\, |\partial_x v|\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 + a_1 |\partial_x u|^2 + a_1 |\partial_x v|^2\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (1+a_1)(\partial_x u)^2 + v^2 + (1+a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + v^2 + (\partial_x v)^2 + a_1(\partial_x u)^2 + a_1(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(u^2 + (1+a_1)(\partial_x u)^2 + v^2 + (1+a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left((1+a_1)u^2 + (1+a_1)(\partial_x u)^2 + (1+a_1)v^2 + (1+a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx
\end{aligned}$$

Se sabe además

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left((1-a_1)u^2 + (1-a_1)(\partial_x u)^2 + (1-a_1)v^2 + (1-a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left((1+a_1)u^2 + (1+a_1)(\partial_x u)^2 + (1+a_1)v^2 + (1+a_1)(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx
\end{aligned}$$

Factorizando $(1-a_1)$ y $(1+a_1)$ a cada lado respectivamente

$$(1-a_1)\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx$$
$$\leq (1+a_1)\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx$$

De ahí que,

$$\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,t)dx$$
$$\leq \frac{1+a_1}{1-a_1}\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,0)dx$$

Por consiguiente, existe una constante positiva $C=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,t)\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}}\left(u^2+(\partial_x u)^2+v^2+(\partial_x v)^2\right)(x,0)\,dx \tag{3.9}$$

Se sabe que $u^2=|u|^2$; $(\partial_x u)^2=|\partial_x u|^2$; $v^2=|v|^2$; $(\partial_x v)^2=|\partial_x v|^2$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}}\left(|u|^2+|\partial_x u|^2+|v|^2+|\partial_x v|^2\right)(x,t)\,dx$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}}\left(|u_0|^2+|\partial_x u_0|^2+|v_0|^2+|\partial_x v_0|^2\right)(x)\,dx$$

Haciendo uso de la definición de norma en L^2

$$\|u\|_0^2+\|\partial_x u\|_0^2+\|v\|_0^2+\|\partial_x v\|_0^2 \leq C\left[\|u_0\|_0^2+\|\partial_x u_0\|_0^2+\|v_0\|_0^2+\|\partial_x v_0\|_0^2\right]$$

Como $\|\partial_x u_0\|_0 \leq \|u_0\|_1$ y haciendo uso de la equivalencia de normas

$$C_1\|u\|_1^2+C_2\|u\|_1^2+C_3\|v\|_1^2+C_4\|v\|_1^2 \leq C\left[C_5\|u_0\|_1^2+C_6\|u_0\|_1^2+C_7\|v_0\|_1^2+C_8\|v_0\|_1^2\right]$$

Sea $m=\text{mín}\{C_1,C_2,C_3,C_4,\}$ y $M=\text{máx}\{C_5,C_6,C_7,C_8,\}$. Luego,

$$\|u\|_1^2+\|v\|_1^2 \leq \frac{CM}{m}\left(\|u_0\|_1^2+\|v_0\|_1^2\right)$$

ó

$$\|(u,v)\|_{H^1\times H^1}^2 \leq K\,\|(u_0,v_0)\|_{H^1\times H^1}^2$$

donde $K=\dfrac{CM}{m}$. Esto es,

$$\|(u,v)\|_{H^1\times H^1} \leq K\,\|(u_0,v_0)\|_{H^1\times H^1} \tag{3.10}$$

para todo $t\in[0,T]$. Es decir, $\|(u,v)\|_{H^1\times H^1}$ está uniformemente acotado en $[0,T]$ y por lo tanto U puede ser extendida de manera única a $[0;+\infty[$. Por consiguiente, tenemos que (u,v) satisface un estimado a priori en H^1 siempre y cuando ello exista.

SEGUNDA ETAPA

Por el teorema 2.5 existe $U(x,t)$, que es solución del problema (2.2). En efecto, sean t y h tales que t y $t+h \in [0,T[$, entonces

$$\|U(\cdot,t+h)-U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} =$$

$$\begin{aligned}
&= \|U(\cdot,h) - \int_0^{t+h} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \\
&- U(\cdot,0) + \int_0^{t} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau\|_{H^s\times H^s} \\
&= \|\left(U(\cdot,h)-U(\cdot,0)\right) + \int_0^{t} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau \\
&- \int_0^{t+h} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau\|_{H^s\times H^s} \\
&= \left\|\left(U(\cdot,h)-U(\cdot,0)\right) - \int_t^{t+h} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau\right\|_{H^s\times H^s} \\
&\leq \|U(\cdot,h)-U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} \\
&+ \left\|\int_t^{t+h} A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau\right\|_{H^s\times H^s}
\end{aligned}$$

Luego, $\|U(\cdot,t+h)-U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \to 0$, cuando $h\to 0$. En consecuencia, $U \in C\left([0,T[;H^s\times H^s\right)$ y puede ser extendida para cada $t\in[0,T]$. Ahora consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} A\partial_t V(t) + B\partial_x V(t) + \partial_x F(V(t)) = 0 \\ V(x,0) = U(x,T) = U(x,0) - \int_0^T A^{-1}\left[B\partial_x U(\cdot,\tau) + \partial_x F(U(\cdot,\tau))\right] d\tau. \end{cases} \tag{3.11}$$

Por el teorema 2.5, existe $T^*>0$ y una única $V \in C\left([0,T^*];H^s\times H^s\right)$ que satisface (3.11). Definimos

$$W(x,t) = \begin{cases} U(x,t)\ , & 0\leq t\leq T \\ V(x,t-T)\ , & T\leq t\leq T+T^* \end{cases}$$

Notemos que $W(0)=U(x,0)=(u_0,v_0)$ y $W(T)=V(x,0)=U(x,T)$, W cumple las condiciones (P') y

$$A\partial_t W(t) + B\partial_x W(t) + \partial_x F(W(t)) = 0, \ \text{ si } t\in[0,T[\cup]0,T^*].$$

Además, debido a la continuidad de $U(x,t)$ en $[0,T]$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{W(x,T)-W(x,T-h)}{h} \\
&= \frac{U(x,T)-U(x,T-h)}{h} \\
&= \frac{U(x,0)-U(x,-h)}{h} - \frac{1}{h}\left[\int_0^T A^{-1}[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))]\, d\tau \right.\\
&\left. - \int_0^{T-h} A^{-1}[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))]\, d\tau\right] \\
&= \frac{U(x,0)-U(x,-h)}{h} - \frac{1}{h}\left[\int_{T-h}^T A^{-1}[B\partial_x U(x,\tau) + \partial_x F(U(x,\tau))]\, d\tau\right]
\end{aligned}$$

Usando el teorema del valor medio para integrales en el intervalo $[T-h,T]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{W(x,T)-W(x,T-h)}{h} &= \frac{U(x,0)-U(x,-h)}{h}\\ &\quad - A^{-1}\left[B\partial_x U(x,t_h)+\partial_x F(U(x,t_h))\right]\end{aligned}$$

para algún $t_h \in [T-h,T]$. Usando propiedades de límites y haciendo $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial^- W}{\partial_t} = -A^{-1}\left[B\partial_x U(x,T)+\partial_x F(U(x,T))\right].$$

Ahora analizamos la diferenciabilidad por la derecha de T $\left(\dfrac{\partial^+ W(T)}{\partial_t}\right)$, con $h>0$ y $T+h \in]T,T+T^*]$, es decir

$$\begin{aligned}&\frac{W(x,T+h)-W(x,T)}{h} =\\ &= \frac{V(x,h)-V(x,0)}{h} - \frac{1}{h}\int_T^{T+h} A^{-1}[B\partial_x U(x,\tau)+\partial_x F(U(x,\tau))]\,d\tau\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema del valor medio para integrales en el intervalo $[T,T+h]$, y en la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned}\frac{W(x,T+h)-W(x,T)}{h} &= \frac{V(x,h)-V(x,0)}{h}\\ &\quad - A^{-1}\left[B\partial_x U(x,T_h)+\partial_x F(U(x,T_h))\right]\end{aligned}$$

para algún $T_h \in [T,T+h]$. Usando propiedades de límites y haciendo que$h \to 0+$, se tiene

$$\frac{\partial^+ W}{\partial_t} = -A^{-1}\left[B\partial_x U(x,T)+\partial_x F(U(x,T))\right].$$

Como $\dfrac{\partial^- W}{\partial_t} = \dfrac{\partial^+ W}{\partial_t}$, así, $\partial_t W$ existe y esta dada por

$$\partial_t W = -A^{-1}\partial_x\left[BW+F(W)\right]$$

Por consiguiente, W es diferenciable en T y

$$A\partial_t W(t) + B\partial_x W(t) + \partial_x F(W(t)) = 0.$$

Esto muestra que U puede ser extendida como solución del problema P al intervalo $[0,T+T^*]$.

TERCERA ETAPA.

Demostraremos que existe un único par de funciones $(\partial_t u, \partial_t v) \in C\left([0,T];H^s\times H^s\right)$ tal que (u,v) es solución de (3.1) con $(u(x,0),v(x,0)) = (u_0(x),v_0(x))$. Esto se logra:

a. Diferenciando (3.1) respecto a x

$$\begin{cases}\partial_x\partial_t u - \partial_x^3\partial_t u - a_1\partial_x^3\partial_t v + a_2\partial_x^2 u + a_3\partial_x(v^p\partial_x v) + a_4\partial_x^2(u^p v) + \partial_x(u^p\partial_x u) = 0\\[2ex] \partial_x\partial_t v - \partial_x^3\partial_t v - a_1\partial_x^3\partial_t u + a_2\partial_x^2 v + a_3\partial_x(u^p\partial_x u) + a_4\partial_x^2(uv^p) + \partial_x(v^p\partial_x v) = 0.\end{cases} \tag{3.12}$$

b. Multiplicando la primera ecuación de (3.12) por $\partial_x u$ e integrando por partes

$$\langle \partial_x u, \partial_x\partial_t u - \partial_x^3\partial_t u - a_1\partial_x^3\partial_t v + a_2\partial_x^2 u + a_3\partial_x(v^p\partial_x v)$$

$$+a_4\partial_x^2(u^p v) + \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} = 0$$

$$\partial_t \langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \partial_t \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2} + a_1\partial_t \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 v\rangle_{L^2} + a_2 \langle \partial_x u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2}$$

$$+a_3 \langle \partial_x u, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} - \langle \partial_x^2 u, u^p\partial_x u\rangle_{L^2} + a_4 \langle \partial_x u, \partial_x^2(u^p v)\rangle_{L^2} = 0$$

Pero, $a_2 \langle \partial_x u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2} = 0$,

$$\begin{aligned}&\partial_t \left[\langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2}\right] + a_1\partial_t \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 v\rangle_{L^2}\\ &+ a_3 \langle \partial_x u, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + a_4 \langle \partial_x u, \partial_x^2(u^p v)\rangle_{L^2} = 0\end{aligned} \tag{3.13}$$

De manera análoga: multiplicando la segunda ecuación (3.12) por $\partial_x v$ e integrando por partes

$$\langle \partial_x v, \partial_x\partial_t v\rangle_{L^2} - \langle \partial_x v, \partial_x^3\partial_t v\rangle_{L^2} - a_1 \langle \partial_x v, \partial_x^3\partial_t u\rangle_{L^2} + a_2 \langle \partial_x v, \partial_x^2 v\rangle_{L^2}$$

$$+a_3 \langle \partial_x v, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} + a_4 \langle \partial_x v, \partial_x^2(uv^p)\rangle_{L^2} = 0$$

Pero, $a_2 \langle \partial_x v, \partial_x^2 v\rangle_{L^2} = 0$,

$$\begin{aligned}&\partial_t \left[\langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 v, \partial_x^2 v\rangle_{L^2}\right] - a_1\partial_t \langle \partial_x v, \partial_x^3 u\rangle_{L^2}\\ &+ a_3 \langle \partial_x v, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} + a_4 \langle \partial_x v, \partial_x^2(uv^p)\rangle_{L^2} = 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por hipótesis, $a_3 = a_4$ y sumando (3.12) y (3.14) se obtiene

$$\partial_t \left[\langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 v, \partial_x^2 v\rangle_{L^2}\right]$$

$$+a_1\partial_t \left[\langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 v, \partial_x^2 u\rangle_{L^2}\right]$$

$$+a_3 \left[\langle \partial_x u, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x u, \partial_x^2(u^p v)\rangle_{L^2}\right]$$

$$+a_3 \left[\langle \partial_x v, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x^2(uv^p)\rangle_{L^2}\right]$$

$$+ \langle \partial_x u, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} = 0$$

Esto es,

$$\partial_t \left[\langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 u\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 v, \partial_x^2 v\rangle_{L^2}\right]$$

$$+a_1\partial_t \left[\langle \partial_x^2 u, \partial_x^2 v\rangle_{L^2} + \langle \partial_x^2 v, \partial_x^2 u\rangle_{L^2}\right] + a_3 \left[\langle \partial_x u, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2}\right.$$

$$\left. + \langle \partial_x u, \partial_x^2(u^p v)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle \partial_x v, \partial_x^2(uv^p)\rangle_{L^2}\right]$$

$$+\langle\partial_x u, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \langle\partial_x v, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} = 0$$

Así,

$$\partial_t\left[\langle\partial_x u, \partial_x u\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, \partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} + \langle\partial_x v, \partial_x v\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, \partial_x^2 v\right\rangle_{L^2}\right]$$
$$+a_1\partial_t\left[\left\langle\partial_x^2 u, \partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, \partial_x^2 u\right\rangle_{L^2}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= a_3\left[-\langle\partial_x u, \partial_x(v^p\partial_x v)\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, pu^{p-1}v\partial_x u\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, u^p\partial_x v\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.-\langle\partial_x v, \partial_x(u^p\partial_x u)\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, puv^{p-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, v^p\partial_x u\right\rangle_{L^2}\right]\\
&-\left[p\left\langle\partial_x u, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x u, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} + p\left\langle\partial_x v, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x v, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_3\left[-\left\langle\partial_x u, pv^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} - \left\langle\partial_x u, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} - \left\langle\partial_x v, pu^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2}\right.\\
&-\left\langle\partial_x v, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, pu^{p-1}v\partial_x u\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, u^p\partial_x v\right\rangle_{L^2}\\
&\left.+\left\langle\partial_x^2 v, puv^{p-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, v^p\partial_x u\right\rangle_{L^2}\right] - \left[p\left\langle\partial_x u, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x u, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} + p\left\langle\partial_x v, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x v, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_3 p\left[-\left\langle\partial_x u, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} - \left\langle\partial_x v, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, u^{p-1}v\partial_x u\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x^2 v, uv^{p-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2}\right] + a_3\left[-\left\langle\partial_x u, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} - \left\langle\partial_x v, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x^2 u, u^p\partial_x v\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 v, v^p\partial_x u\right\rangle_{L^2}\right] - \left[p\left\langle\partial_x u, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x u, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} + p\left\langle\partial_x v, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x v, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2}\right]
\end{aligned}$$

Pero

$$\left\langle\partial_x u, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2} = \left\langle v^p\partial_x^2 v, \partial_x u\right\rangle_{L^2} = \left\langle\partial_x^2 v, v^p\partial_x u\right\rangle_{L^2}$$

y

$$\left\langle\partial_x v, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2} = \left\langle\partial_x^2 u, u^p\partial_x v\right\rangle_{L^2}$$

que reemplazado en la expresión anterior nos da:

$$\begin{aligned}
&= a_3 p\left[-\left\langle\partial_x u, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} - \left\langle\partial_x v, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x^2 u, u^{p-1}v\partial_x u\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+\left\langle\partial_x^2 v, uv^{p-1}\partial_x v\right\rangle_{L^2}\right] - \left[p\left\langle\partial_x u, u^{p-1}(\partial_x u)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x u, u^p\partial_x^2 u\right\rangle_{L^2}\right.\\
&\left.+p\left\langle\partial_x v, v^{p-1}(\partial_x v)^2\right\rangle_{L^2} + \left\langle\partial_x v, v^p\partial_x^2 v\right\rangle_{L^2}\right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

aplicando la definición de producto interno en L^2, definido por $\langle x, y\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)dt$, la propiedad simétrica del producto interno y su norma $\|x\| = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2(t)dt\right)^{1/2}$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$

$$= a_3p\int_{\mathbb{R}}\left[u^{p-1}v\partial_x u\partial_x^2 u - v^{p-1}\partial_x u(\partial_x v)^2 + uv^{p-1}\partial_x v\partial_x^2 v - u^{p-1}(\partial_x u)^2\partial_x v\right]dx$$
$$-\left[p\int_{\mathbb{R}}u^{p-1}(\partial_x u)^3dx + \int_{\mathbb{R}}u^p\partial_x u\partial_x^2 udx + p\int_{\mathbb{R}}v^{p-1}(\partial_x v)^3dx\right.$$
$$\left.+\int_{\mathbb{R}}v^p\partial_x v\partial_x^2 vdx\right]$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx =$$

$$= a_3p\left[\int_{\mathbb{R}}u^{p-1}v\partial_x u\partial_x^2 udx - \int_{\mathbb{R}}v^{p-1}\partial_x u(\partial_x v)^2dx + \int_{\mathbb{R}}uv^{p-1}\partial_x v\partial_x^2 vdx\right.$$
$$\left.-\int_{\mathbb{R}}u^{p-1}(\partial_x u)^2\partial_x vdx\right] - \left[p\int_{\mathbb{R}}u^{p-1}(\partial_x u)^3dx + \int_{\mathbb{R}}u^p\partial_x u\partial_x^2 udx\right.$$
$$\left.+p\int_{\mathbb{R}}v^{p-1}(\partial_x v)^3dx + \int_{\mathbb{R}}v^p\partial_x v\partial_x^2 vdx\right] \tag{3.16}$$

Usando la desigualdad de Holder y el teorema de inmersión de Sobolev, deducimos que

$$\begin{aligned}\left\|u^{p-1}v\partial_x u\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}}|u|^{p-1}|v||\partial_x u|\left|\partial_x^2 u\right|dx\\ &\leq \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$

$$\leq |a_3p|\left[\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^2}^2\|\partial_x u\|_{L^\infty}\right.$$
$$\left.+\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}^2\right]$$
$$+p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p}\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}$$
$$+p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|\partial_x v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{p}\|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} \tag{3.17}$$

De (3.10) y (3.17) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$

$$\leq |a_3p|\left[\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}\right.$$
$$\left.+\|\partial_x u\|_{L^2}^2\right] + p\left[\|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x v\|_{L^2}^2\right]$$
$$+\left[\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \|\partial_x v\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}\right]$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$

$$\leq (|a_3p|+1)\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + (|a_3p|+p)\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2$$
$$+ (|a_3p|+1)\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} + (|a_3p|+p)\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2$$

Sea $C_1 = \text{máx}\{|a_3p|+1, |a_3p|+p\}$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$
$$\leq C_1\left[\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x v\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2\right] \tag{3.18}$$

Usando la desigualdad $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ con $p, q \geq 1$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2} \leq \frac{\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2}{2}$$

y

$$\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2} \leq \frac{\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2}{2},$$

que reemplazado en (3.18), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$

$$\leq C_1\left[\frac{\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2}{2} + \left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + \frac{\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2}{2} + \left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2\right]$$
$$= \frac{3}{2}C_1\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2}C_1\left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2$$

Sea $C = \text{máx}\{\frac{1}{2}C_1, \frac{3}{2}C_1\}$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial_t}\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right]dx$$
$$\leq C\left[\left\|\partial_x u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x v\right\|_{L^2}^2 + \left\|\partial_x^2 v\right\|_{L^2}^2\right]. \tag{3.19}$$

Integrando la ecuación (3.19) de 0 a t y aplicando la definición de producto interno en L^2, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right](x,t)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right](x,0)dx$$
$$+ C\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,\tau)dxd\tau \tag{3.20}$$

De (3.20) se deduce

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2 + 2a_1\partial_x^2 u\partial_x^2 v\right](x,t)dx$$

$$\leq C_2 + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,\tau)\,dxd\tau$$

donde $C_2 = C_2\left(\partial_x u(x,0), \partial_x v(x,0), \partial_x^2 u(x,0), \partial_x^2 v(x,0)\right)$. Por otra parte, sabemos por la primera etapa

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (1-a_1)(\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (1-a_1)(\partial_x^2 v)^2\right](x,t)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (1+a_1)(\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (1+a_1)(\partial_x^2 v)^2\right](x,t)dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (1-a_1)(\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (1-a_1)(\partial_x^2 v)^2\right](x,t)dx$$

$$\leq C_2 + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,\tau)dxd\tau. \tag{3.21}$$

Para $0 < a_1 < 1$ existe la constante positiva C_3 tal que

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,t)dx$$

$$\leq C_2 + C_3\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,\tau)dxd\tau \tag{3.22}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall's a (3.22) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}}\left[(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_x^2 v)^2\right](x,t)dx \leq C_2 e^{C_3 T} \tag{3.23}$$

para todo $t \in [0,T]$ Por consiguiente, de (3.10) y (3.23) obtenemos que $(u,v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$. Desde que $(\partial_t u, \partial_t v)$ existe y satisface (3.1) entonces, usando el teorema 2.2 se concluye que $(u,v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$. □

3.2. Dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

El teorema 3.1, plantea si $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{Z}$ y $s \geq 2$, $0 < a_1 < 1$ y a_2, a_3, a_4 números reales con $a_2 > 0$ y $a_3 = a_4$ en (3.1), entonces, para cada $T > 0$ existe una función $(\partial_t u_t, \partial_t v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$, única solución del problema (3.1) con dato inicial $(u_0(x), v_0(x))$. Este resultado nos conduce a la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Si $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$, para $s \geq 2$, la única solución $(\partial_t u, \partial_t v) \in C\left([0,T]; H^s \times H^s\right)$ del problema (3.1) con dato inicial $U(x,0) = (u_0, v_0)$ depende continuamente de $U(x,0)$. Es decir, $\{U_n(x,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H^s \times H^s$ convergente a $U(x,0)$ en $H^s \times H^s$ y para* *cada $n \in \mathbb{N}$ la función $U_n(x,t) \in C^1([0,T]; H^s \times H^s)$ es la única solución del problema (P) con dato inicial $U(x,0)$, entonces para cada $T > 0$ se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} = 0.$$

Demostración. Por el teorema 3.1, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $T > 0$, las funciones $U_n'(x,t)$ y $U'(x,t)$ pertenecen a la clase $C([0,T]; H^s \times H^s)$, entonces por el teorema 2.6, para todo $t \in [0,T]$ tenemos

$$\|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \leq \|U_n(\cdot,0) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} e^{CT}.$$

Luego, se tiene el resultado

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|U_n(\cdot,t) - U(\cdot,t)\|_{H^s\times H^s} \leq \sup_{[0,T]} \|U_n(\cdot,0) - U(\cdot,0)\|_{H^s\times H^s} e^{CT} = 0.$$

Por consiguiente, el problema global está bien formulado. □

Capítulo 4

Comportamiento Asintótico

4.1. Comportamiento Asintótico del Problema Lineal

Dado el problema lineal asociado al problema (2.1)

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_2 v_x = 0 \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

Nuestro analisis está basado en el método de la fase estacionaria a fin de obtener estimados del problema lineal (4.1).

Aplicando la transformada de Fourier al sistema (4.1), respecto a la variable espacial x, obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + \xi^2 \partial_t \widehat{u}\left(\xi,t\right) + a_1 \xi^2 \partial_t \widehat{v}(\xi,t) + a_2 i \xi \widehat{u}\left(\xi,t\right) = 0 \\ \partial_t \widehat{v}(\xi,t) + \xi^2 \partial_t \widehat{v}\left(\xi,t\right) + a_1 \xi^2 \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + a_2 i \xi \widehat{v}\left(\xi,t\right) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}\left(\xi\right), \quad \widehat{v}(\xi,0) = \widehat{v_0}\left(\xi\right) \end{cases}$$

agrupando términos comunes resulta

$$\begin{cases} \left(1+\xi^2\right) \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + a_1 \xi^2 \partial_t \widehat{v}(\xi,t) + a_2 i \xi \widehat{u}\left(\xi,t\right) = 0 \\ \left(1+\xi^2\right) \partial_t \widehat{v}(\xi,t) + a_1 \xi^2 \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + a_2 i \xi \widehat{v}\left(\xi,t\right) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}\left(\xi\right), \quad \widehat{v}(\xi,0) = \widehat{v_0}\left(\xi\right) \end{cases}$$

y expresando en forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} 1+\xi^2 & a_1\xi^2 \\ a_1\xi^2 & 1+\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \widehat{u}\left(\xi,t\right) \\ \partial_t \widehat{v}\left(\xi,t\right) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a_2\xi & 0 \\ 0 & a_2\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}\left(\xi,t\right) \\ \widehat{v}\left(\xi,t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definiendo

$$\widehat{U}(\xi,t) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(\xi,t) \\ \widehat{v}(\xi,t) \end{pmatrix}, \; A\left(\xi\right) = \begin{pmatrix} 1+\xi^2 & a_1\xi^2 \\ a_1\xi^2 & 1+\xi^2 \end{pmatrix} \text{ y } B\left(\xi\right) = \begin{pmatrix} a_2\xi & 0 \\ 0 & a_2\xi \end{pmatrix}$$

resulta el problema de valor inicial vectorial (en la variable t)

$$\begin{cases} A(\xi)\,\partial_t \widehat{U}(\xi) + iB(\xi)\,\widehat{U}(\xi) = \mathbf{0} \\ \widehat{U}(\xi,0) = \widehat{U_0}(\xi)\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

En seguida, resolvemos el problema (4.2). Como

$$\partial_t \widehat{U}(\xi) = -iA^{-1}B\widehat{U}(\xi,t)$$

de donde

$$\widehat{U}(\xi,t) = \widehat{U_0}(\xi)\,e^{-iA^{-1}Bt}\widehat{U_0}(\xi)\,. \tag{4.3}$$

Pero

$$A^{-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi^2+1}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1\xi^2}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1\xi^2}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{\xi^2+1}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} A^{-1}(\xi)\,B(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{\xi^2+1}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1\xi^2}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1\xi^2}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{\xi^2+1}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2\xi & 0 \\ 0 & a_2\xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sea $M(\xi) = A^{-1}(\xi)\,B(\xi)$, en seguida, diagonalizamos la matriz $M(\xi)$. Para esto, el polinomio característico asociado a $M(\xi)$ es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |M(\xi) - \lambda I_2| &= \begin{vmatrix} \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} - \lambda & -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} - \frac{a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} - \lambda\right)\left(\frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} + \frac{a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} - \lambda\right) \end{aligned}$$

luego, los valores propios de $M(\xi)$ son

$$\lambda_1 \equiv \lambda_1(\xi) = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right) + a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} \text{ y } \lambda_2 \equiv \lambda_2(\xi) = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right) - a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4}.$$

Enseguida, hallamos los vectores propios asociados.

i.) Para $\lambda_1(\xi) = \dfrac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right) + a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4}$, tenemos

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_1} &= \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (M - \lambda_1 I_2)\, v = \mathbf{0}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x + y = 0\right\} = \left\{y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

escogemos el vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii.) Para $\lambda_2(\xi) = \dfrac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right) - a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_2} &= \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (M - \lambda_2 I_2)\, v = \mathbf{0}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \\ -\frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{a_1a_2\xi^3}{(\xi^2+1)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x - y = 0\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

seleccionamos el vector propio $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego $M(\xi)$ es diagonalizable, es decir, existe una matriz inversible C tal que

$$J = C^{-1}M(\xi)\,C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde $C = (v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por consiguiente, de (4.3), la solución del problema de valor inicial (4.2) es

$$
\begin{aligned}
\widehat{U}(\xi,t) &= e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}\widehat{U_0}(\xi) = e^{-iM(\xi)t}\widehat{U_0}(\xi) \\
&= Ce^{Jt}C^{-1}\widehat{U_0}(\xi) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0} \\ \widehat{v_0} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)} & e^{-it\lambda_2(\xi)} - e^{-it\lambda_1(\xi)} \\ e^{-it\lambda_2(\xi)} - e^{-it\lambda_1(\xi)} & e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0} \\ \widehat{v_0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0} - \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0} \\ -\frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0} + \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) - \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi)
$$

y

$$
\hat{v}(\xi,t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0} + \frac{1}{2}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}.
$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a las dos últimas expresiones resulta

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\left[\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) - \left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi)\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)+i\xi x} + e^{-it\lambda_2(\xi)+i\xi x}\right)\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_2(\xi)+i\xi x} - e^{-it\lambda_1(\xi)+i\xi x}\right)\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi, \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\left[-\left(e^{-it\lambda_1(\xi)} - e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) + \left(e^{-it\lambda_1(\xi)} + e^{-it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi)\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_2(\xi)+i\xi x} - e^{-it\lambda_1(\xi)+i\xi x}\right)\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_1(\xi)+i\xi x} + e^{-it\lambda_2(\xi)+i\xi x}\right)\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Proposición 4.1. *Los autovalores $\lambda_1(\xi)$ y $\lambda_2(\xi)$ satisfacen las siguientes propiedades.*

(i) *λ_1 y λ_2 son funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$;*

(ii) *λ_1 y λ_2 tiene tres puntos de inflexión no degenerados;*

(iii) *existen constantes positivas C_1 y C_2 tal que*

$$
\left|\lambda_1''(\xi)\right| \geq C_1|\xi|^{-3} \qquad y \qquad \left|\lambda_2''(\xi)\right| \geq C_2|\xi|^{-3}
$$

para $|\xi|$ suficientemente grande.

Demostración.

(i) Observemos que

$$\lambda_1(\xi) = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)+a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2-a_1^2\xi^4} = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1+a_1\xi^2\right)}{\left(\xi^2+1-a_1\xi^2\right)\left(\xi^2+1+a_1\xi^2\right)} = \frac{a_2\xi}{\xi^2+1-a_1\xi^2}$$

y

$$\lambda_2(\xi) = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1\right)-a_1a_2\xi^3}{\left(\xi^2+1\right)^2-a_1^2\xi^4} = \frac{a_2\xi\left(\xi^2+1-a_1\xi^2\right)}{\left(\xi^2+1-a_1\xi^2\right)\left(\xi^2+1+a_1\xi^2\right)} = \frac{a_2\xi}{\xi^2+1+a_1\xi^2}.$$

en seguida, calculamos el dominio de λ_1, para ello procedemos analizando el denominador.

Como $1-a_1>0$ entonces $1+(1-a_1)\xi^2>0$, por lo que el dominio de λ_1 es $\mathbb{R}$, para todo $\xi\in\mathbb{R}$ y como es una función racional que es infinitamente diferenciable en su dominio, se concluye que $\lambda_1\in C^\infty(\mathbb{R})$; de manera análoga, $\lambda_2\in C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) λ_1, λ_2 tiene a lo más seis puntos de inflexión no degenerados; en efecto

$$\lambda_1'(\xi) = a_2\frac{(1-a_1)\xi^2+1-2(1-a_1)\xi^2}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^2} = a_2\frac{1-(1-a_1)\xi^2}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^2}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda_1''(\xi) &= a_2\frac{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^2\left[-2(1-a_1)\xi\right]-4\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]\xi(1-a_1)\left[1-(1-a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^4}\\
&= a_2\frac{-2\left[1+(1-a_1)\xi^2\right](1-a_1)\xi-4\xi(1-a_1)\left[1-(1-a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^3}\\
&= -2a_2(1-a_1)\xi\frac{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]+2\left[1-(1-a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^3}\\
&= 2a_2(a_1-1)\xi\frac{3-(1-a_1)\xi^2}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^3}
\end{aligned}$$

entonces los puntos de inflexión de $\lambda_1$son $\xi=0$, $\xi=\pm\sqrt{\frac{3}{1-a_1}}$. Análogamente

$$\lambda_2'(\xi) = a_2\frac{(1+a_1)\xi^2+1-2(1+a_1)\xi^2}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^2} = a_2\frac{1-(1+a_1)\xi^2}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^2}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda_2''(\xi) &= a_2\frac{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^2\left[-2(1+a_1)\xi\right]-4\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]\xi(1+a_1)\left[1-(1+a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^4}\\
&= a_2\frac{-2\left[1+(1+a_1)\xi^2\right](1+a_1)\xi-4\xi(1+a_1)\left[1-(1+a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^3}\\
&= -2a_2(1+a_1)\xi\frac{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]+2\left[1-(1+a_1)\xi^2\right]}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^3}\\
&= -2a_2(1+a_1)\xi\frac{3-(1+a_1)\xi^2}{\left[1+(1+a_1)\xi^2\right]^3}
\end{aligned}$$

entonces los puntos de inflexión de λ_2 son $\xi=0$, $\xi=\pm\sqrt{\frac{3}{1+a_1}}$.

(iii) Tenemos que

$$\lambda_1''(\xi) = \frac{2a_2(1-a_1)\xi\left[(1-a_1)\xi^2 - 3\right]}{\left[1+(1-a_1)\xi^2\right]^3}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{|\xi|^3\lambda_1''(\xi)} &= \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\left(1+(1-a_1)\xi^2\right)^3}{2a_2(1-a_1)\xi^4\left[(1-a_1)\xi^2-3\right]}\\ &= \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\left[1/\xi^2+(1-a_1)\right]^3\xi^6}{2a_2(1-a_1)\left[(1-a_1)-3/\xi^2\right]\xi^6}\\ &= \frac{1-a_1}{2a_2}.\end{aligned}$$

Se tiene que para $\varepsilon = \frac{1-a_1}{2a_2}$, existe $M>0$ tal que

$$\left|\frac{1}{|\xi|^3\lambda_1''(\xi)} - \frac{1-a_1}{2a_2}\right| \leq \varepsilon = \frac{1-a_1}{2a_2}, \text{ siempre que } \xi > M,$$

de donde

$$\left|\frac{1}{|\xi|^3\lambda_1''(\xi)}\right| \leq \frac{1-a_1}{a_2}$$

Luego, existe $C_1 = \dfrac{a_2}{1-a_1} > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\xi|^3\left|\lambda_1''(\xi)\right|} \leq C_1^{-1} \Rightarrow \left|\lambda_1''(\xi)\right| \geq C_1|\xi|^{-3} \quad \text{para } \xi > M.$$

Del mismo modo, se prueba que para $|\xi|$ suficientemente grande, se cumple la desigualdad $|\lambda_2''(\xi)| \geq C_2|\xi|^{-3}$. □

Proposición 4.2. *Sea* $\lambda_1(\xi) = \dfrac{a_2\xi}{1+(1-a_1)\xi^2}$, $\lambda_2(\xi) = \dfrac{a_2\xi}{1+(1+a_1)\xi^2}$ *y* $0<a_1<1$. *Sean* η, $\eta_1>0$, *entonces para todo* r_1, r_2 *suficientemente grandes, para* $t>0$ *fijo, se cumplen las siguientes desigualdades*

$$(i)\ \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\int_{|\xi|<r_1} e^{it(\lambda_1(\xi)+z\xi)}d\xi\right| \leq C\left[t^{-\eta}+t^{(\eta-1)/2}+t^{-1/2}r_1^{3/2}\right]$$

$$(ii)\ \sup_{z\in\mathbb{R}}\left|\int_{|\xi|<r_2} e^{it(\lambda_2(\xi)+z\xi)}d\xi\right| \leq C\left[t^{-\eta_1}+t^{(\eta_1-1)/2}+t^{-1/2}r_2^{3/2}\right],$$

donde C *es una constante positiva (independiente de* r_1, r_2 *y* z *).*

Demostración.

(i) Sea ξ_j, $j=1,2,3$ los puntos de inflexión de λ_1, según la parte (ii) de la proposición 4.1

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}.$$

La concavidad y convexidad se da en los intervalos $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}\right[$, $\left]-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}, 0\right[$, $\left]0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}\right[$ y $\left]\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-a_1}}, +\infty\right[$. Sean $r > 0$ un número suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ un número suficientemente pequeño tales que para $j = 1, 2, 3$ se cumple $\xi_j \in \left]-r, r\right[$ y $\left]\xi_j - \varepsilon, \xi_j + \varepsilon\right[\subset \left]-r, r\right[$.

Consideremos el conjunto

$$B_\varepsilon = \{\xi_j \in \left]-r, r\right[: |\xi - \xi_j| \geq \varepsilon \text{ para } \quad j = 1, 2, 3\}$$

Calculemos la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{|\xi|<r} e^{it(\lambda_1(\xi)+z\xi)} d\xi = \int_{B_\varepsilon} e^{it(\lambda_1(\xi)+z\xi)} d\xi + \int_{\left]-r,r\right[-B_\varepsilon} e^{it(\lambda_1(\xi)+z\xi)} d\xi \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

haciendo $h(\xi) = \lambda_1(\xi) + z\xi$, vemos que los puntos de inflexión de $h(\xi)$ en ξ_j son los puntos de inflexión de $\lambda_1(\xi)$ en ξ_j pues $h''(\xi) = \lambda_1''(\xi)$, entonces h es cóncava o convexa en pequeñas vecindades de ξ_j, $j = 1, 2, 3$, en el interior del intervalo $\left]-r, r\right[$. Si $h''(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in B_\varepsilon$, así podemos estimar I_1, usando el lema de Van der Corput 1.35, obtenemos

$$|I_1| \leq 4 \left\{ t, \min_{\xi \in B_\varepsilon} h''(\xi) \right\}^{-1/2}$$

En seguida, estimamos $h''(\xi)$, para ello, usando (iii) de la proposición 4.1 tenemos que

$$|h''(\xi)| = |\lambda_1''(\xi)| \geq C_1 |\xi|^{-3}$$

de donde $\min\limits_{\xi \in B_\varepsilon} h''(\xi) \geq C_1 |\xi|^{-3}$. Así,

$$|I_1| \leq 4 \left\{ t \min_{\xi \in B_\varepsilon} h''(\xi) \right\}^{-1/2} \leq 4 \left(tC_1 |\xi|^{-3} \right)^{-1/2} \leq Ct^{-1/2} r^{3/2}.$$

Luego, estimamos I_2 dada en (4.6). Cuando $t \to \infty$ entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que $t_0 \geq \varepsilon^{-1/\eta}$ para todo $t \geq t_0$.

Para $t \geq t_0$ descomponemos la integral

$$\int_{|\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{ith(\xi)} d\xi = \int_{|\xi-\xi_j|<t^{-\eta}} e^{ith(\xi)} d\xi + \int_{t^{-\eta} \leq |\xi-\xi_j|<\varepsilon} e^{ith(\xi)} d\xi = I_3 + I_4$$

Haciendo $\xi - \xi_j = s$ en I_3 obtenemos

$$|I_3| = \left| \int_{|s|<t^{-\eta}} e^{ith(\xi)} d\xi \right| \leq 2t^{-\eta} \tag{4.7}$$

puesto que h es cóncava o convexa. Estimamos I_4, para esto usando el lema 1.35 se sigue que

$$|I_4| \leq 4 \left\{ t, \min_{t^{-\eta} \leq |s| < \varepsilon} h''(\xi) \right\}^{-1/2}.$$

En la vecindad de cada punto ξ_j, $j=1,2,3$ la función $h''(\xi)$ tiene una expansión de Taylor

$$h''(\xi)=h'''(\xi_j)(\xi-\xi_j)+R(\xi)$$

donde $R(\xi)=\frac{1}{2}h^{(4)}(\theta)(\xi-\xi_j)^2$ para algún θ entre ξ y ξ_j. Por consiguiente, en la misma vecindad las desigualdades

$$\begin{aligned}\left|h''(\xi)\right| &= \left|h'''(\xi_j)+\frac{1}{2}h^{(4)}(\theta)(\xi-\xi_j)\right||\xi-\xi_j| \\ &\geq \left[\left|h'''(\xi_j)\right|-\left|\frac{1}{2}h^{(4)}(\theta)\right||\xi-\xi_j|\right]|\xi-\xi_j| \\ &\geq \left[\left|h'''(\xi_j)\right|-\delta_1\right]|\xi-\xi_j|\end{aligned}$$

son verdaderas siempre que $\delta_1>0$ es pequeña, juntamente con $\lim\limits_{\xi\to\xi_j}\frac{R(\xi)}{\xi-\xi_j}=0$. Tomando $0<\delta_1<\min\limits_{j=1,2,3}|h'''(\xi_j)|$ concluimos que existe una constante positiva C tal que

$$\left|h''(\xi)\right|\geq C|\xi-\xi_j|$$

para cualquier ξ cercano a ξ_j. Se sigue que

$$\min_{t^{-\eta}\leq|\xi-\xi_j|<\varepsilon}\left|h''(\xi)\right|\geq Ct^{-\eta}$$

para algún $j=1,2,3$. Luego

$$|I_4|\leq 4\left\{t,\min_{t^{-\eta}\leq|s|<\varepsilon}h''(\xi)\right\}^{-1/2}\leq 4t^{-1/2}C^{-1}t^{\eta/2}\leq 4Ct^{(n-1)/2}. \tag{4.8}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{|\xi|<r}e^{it(\lambda_1(\xi)+z\xi)}d\xi\right| &\leq I_1+I_2 \\ &\leq I_1+(I_3+I_4) \\ &\leq Ct^{-1/2}r^{3/2}+2t^{-\eta}+4Ct^{(n-1)/2} \\ &\leq C\left(t^{-\eta}+t^{(n-1)/2}+t^{-1/2}r^{3/2}\right).\end{aligned}$$

de donde se sigue (i).

(ii) se prueba del mismo modo. □

Teorema 4.3. *Sean* $(u_0,v_0)\in H^4(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})\times H^4(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$, a_1,a_2 *números reales con* $a_2>0$ *y* $0<a_1<1$. *Entonces, la solución del problema lineal (4.1) satisface los estimados*

(i) $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right)(1+t)^{-1/3}$

(ii) $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty}\leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right)(1+t)^{-1/3}$,

1. para todo t suficientemente grande donde C es una constante positiva independiente de x y de t.

Demostración. De (4.4) y (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_1+i\xi x}+e^{-it\lambda_2+i\xi x}\right)\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\\ &+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_2+i\xi x}-e^{-it\lambda_1+i\xi x}\right)\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}v(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_2+i\xi x}-e^{-it\lambda_1+i\xi x}\right)\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\\ &+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-it\lambda_1+i\xi x}+e^{-it\lambda_2+i\xi x}\right)\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = x/t$ se tiene que

$$\begin{aligned}u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg[&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\\ &-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\Bigg],\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg[&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi+\\ &+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[-\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\Bigg].\end{aligned} \tag{4.10}$$

Demostraremos la estimativa (i). Para esto, definamos $h(\xi) = -\lambda_1(\xi)+z\xi$ y $g(\xi) = -\lambda_2(\xi)+z\xi$, sean $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ que serán elegidos más adelante y dividamos las integrales en (4.9) en dos partes, así obtenemos

$$\begin{aligned}u(x,t) \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg[&\left|\int_{|\xi|\le r_1} e^{ith(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right|+\left|\int_{|\xi|>r_1} e^{ith(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right|\\ &+\left|\int_{|\xi|\le r_2} e^{itg(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right|+\left|\int_{|\xi|>r_2} e^{itg(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right|\\ &+\left|\int_{|\xi|\le r_1} e^{ith(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\right|+\left|\int_{|\xi|>r_1} e^{ith(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\right|\\ &+\left|\int_{|\xi|\le r_2} e^{itg(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\right|+\left|\int_{|\xi|>r_2} e^{itg(\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi\right|\\ =\ &\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8\right].\end{aligned} \tag{4.11}$$

Estimamos la integral I_2 en (4.11)

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|\xi|>r_1} e^{ith(\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>r_1} \left| e^{ith(\xi)} \widehat{u_0}(\xi) \right| d\xi$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>r_1} |\widehat{u_0}(\xi)|\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^{-4} (1+|\xi|)^4 |\widehat{u_0}(\xi)|\, d\xi.$$

Usando la desigualdad de Holder con $p = q = 2$, y el lema (1.37) se sigue que

$$I_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^{-8}\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^8 |\widehat{u_0}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{|\xi|>r_1} (1+|\xi|)^{-8}\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^8 |\widehat{u_0}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(2\int_{r_1}^{+\infty} (1+\xi)^{-8}\, d\xi \right)^{1/2} \left(C\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^4 |\widehat{u_0}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$
$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(1+r_1)^{-7}}{7} \right)^{1/2} \|u_0\|_{H^4} = C(1+r_1)^{-7/2} \|u_0\|_{H^4}. \tag{4.12}$$

De la misma forma podemos estimar las integrales I_4, I_6 y I_8 en (4.11) y obtenemos

$$I_4 \leq C\left(1+r_2^2\right)^{-7/2} \|u_0\|_{H^4}, \tag{4.13}$$
$$I_6 \leq C\left(1+r_1^2\right)^{-7/2} \|v_0\|_{H^4}, \tag{4.14}$$
$$I_8 \leq C\left(1+r_2^2\right)^{-7/2} \|v_0\|_{H^4}. \tag{4.15}$$

Ahora estimamos I_1.

$$I_1 = \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{ith(\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{ix\xi} e^{-it\lambda_1(\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right|$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \left(\chi_{|\xi|\leq r_1} e^{-it\lambda_1(\xi)} \right) \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \beta(\xi,t)\, \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right|$$

donde $\beta(\xi,t) = \chi_{|\xi|\leq r_1} e^{-it\lambda_1(\xi)}$, χ_M es la función característica sobre el conjunto $M = \{\xi : |\xi| \leq r_1\}$, notemos que $\beta \in L^2_\xi(\mathbb{R})$ pues

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \chi_{|\xi|\leq r_1} e^{-it\lambda_1(\xi)} \right|^2 d\xi = \int_{|\xi|\leq r_1} d\xi = 2r_1,$$

entonces existe $\check{\beta}$. Por ello, usando la desigualdad de Young deducimos

$$I_1 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \left(\check{\beta}(\cdot,t) * u_0 \right)^{\wedge}(\xi)\, d\xi \right| = \sqrt{2\pi} \left| \check{\beta}(x,t) * u_0(x) \right| \leq \sqrt{2\pi} \left\| \check{\beta}(\cdot,t) \right\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^1}. \tag{4.16}$$

Ahora estudiemos $\left\| \check{\beta}(\cdot,t) \right\|_{L^\infty}$, como $z = x/t$

$$\left| \check{\beta}(x,t) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \beta(\xi,t)\, d\xi \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_{|\xi|\leq r_1} e^{ix\xi} e^{-it\lambda_1(\xi)} d\xi \right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{ix\xi} e^{-it\lambda_1(\xi)} d\xi \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{it(z\xi - \lambda_1(\xi))} d\xi \right|.$$

Usando la proposición (4.2) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\check{\beta}(x,t)\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \int_{|\xi|\leq r_1} e^{it(z\xi-\lambda_1(\xi))} d\xi \right| \\
&\leq C\left(t^{-\eta}+t^{(\eta-1)/2}+t^{-1/2}r_1^{3/2}\right).
\end{aligned}
$$

Luego de la última expresión y (4.16) deducimos que

$$
I_1 \leq C\left(t^{-\eta}+t^{(\eta-1)/2}+t^{-1/2}r_1^{3/2}\right)\|u_0\|_{L^1}. \tag{4.17}
$$

Similarmente podemos probar que

$$
I_3 \leq C\left(t^{-\eta_1}+t^{(\eta_1-1)/2}+t^{-1/2}r_2^{3/2}\right)\|u_0\|_{L^1}, \tag{4.18}
$$

$$
I_5 \leq C\left(t^{-\eta}+t^{(\eta-1)/2}+t^{-1/2}r_1^{3/2}\right)\|v_0\|_{L^1}, \tag{4.19}
$$

$$
I_7 \leq C\left(t^{-\eta_1}+t^{(\eta_1-1)/2}+t^{-1/2}r_2^{3/2}\right)\|v_0\|_{L^1}, \tag{4.20}
$$

Luego de (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.17), (4.18), (4.19) y (4.20) concluimos que

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| \leq\ & C\left(t^{-\eta}+t^{(\eta-1)/2}+t^{-1/2}r_1^{3/2}\right)\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}\right) \\
&+ C\left(t^{-\eta_1}+t^{(\eta_1-1)/2}+t^{-1/2}r_2^{3/2}\right)\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}\right) \\
&+ C\left(1+r_1^2\right)^{-7/2}\left(\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right) + C\left(1+r_2^2\right)^{-7/2}\left(\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora escogemos $r_1 = t^{1/10}$, $\eta = 1/3$ con el fin de usar la proposición (4.2) válido para $t \geq T_1$ y seleccionamos $r_2 = t^{1/10}$, $\eta_1 = 1/3$ con el fin de usar la proposición 4.2 válido para $t \geq T_2$. Tomando $T_0 = \text{máx}\{T_1, T_2\}$ obtenemos

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right)t^{-1/3} \tag{4.21}
$$

Observe que la expresión de arriba es válida para t grande, suponer $t \geq T_0$. Usando la representación (4.9) podemos probar que

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right) \tag{4.22}
$$

para todo $t \geq T_0$. Por lo tanto de (4.21) y (4.22) implica la conclusión de la estimativa (i). del teorema 4.3 para todo $t \geq T_0$.

La estimativa (ii) se demuestra en forma similar. □

4.2. Comportamiento asintótico del problema no lineal

Teorema 4.4. *Sea* $(u_0, v_0) \in H^5(\mathbb{R}) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R}) \cap W^{1,1}(\mathbb{R})$*, y* $p > 4$*,* $p \in \mathbb{Z}$*,* a_1, a_2, a_3, a_4 *números reales con* $a_2 > 0$ *y* $0 < a_1 < 1$ *y* $a_3 = a_4$*. Sea* (u, v) *la solución global del problema (2.1), entonces*

1. $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}$, *y*

2. $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1/3}$,

para todo t suficientemente grande, siempre que

$$\|u_0\|_{L^1} + \left\|u_0'\right\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \left\|v_0'\right\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5}$$

es suficientemente pequeño donde C es una constante posotiva independiente de x y de t y $u_0' = du_0/dx$, $v_0' = dv_0/dx$.

Demostración. Seaa $u = u(x,t)$ y $v = v(x,t)$ soluciones globales de (2.1).

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} - a_1 v_{xxt} + a_2 u_x + a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x = 0 \\ v_t - v_{xxt} - a_1 u_{xxt} + a_2 v_x + a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (uv^p)_x = 0 \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier respecto a la variable espacial obtenemos

$$\begin{cases} A\partial_t \widehat{U}(\xi,t) - iB\widehat{U}(\xi,t) - \widehat{F}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{U}(\xi,0) = \widehat{U}_0(\xi) \end{cases} \tag{4.23}$$

donde

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1+\xi^2 & a_1\xi^2 \\ a_1\xi^2 & 1+\xi^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_2\xi & 0 \\ 0 & a_2\xi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(U)_x = \begin{pmatrix} a_3\frac{v^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+1}}{p+1} + a_4(u^p v) \\ a_3\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{v^{p+1}}{p+1} + a_4(uv^p) \end{pmatrix}_x,$$

y las componentes de $F(U)$ son dadas por

$$F_1(u,v) = a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x, \;\; F_2(u,v) = a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (uv^p)_x.$$

De (4.23) tenemos que: $\partial_t \widehat{U}(\xi,t) - iA^{-1}(\xi)B(\xi)\widehat{U}(\xi,t) = A^{-1}(\xi)\widehat{F}(\xi,t)$, si a esta ecuación lineal de primer orden se multiplica ambos miembros por $e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}$ obtenemos

$$e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}\partial_t \widehat{U}(\xi,t) - ie^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}A^{-1}(\xi)B(\xi)\widehat{U}(\xi,t) = e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}A^{-1}(\xi)\widehat{F}(\xi,t)$$

escribiendo la ecuación como

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}\cdot\widehat{U}(\xi,t)\right) = e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}A^{-1}(\xi)\widehat{F}(\xi,t),$$

luego, integrando (respecto de t) ambos miembros tenemos

$$e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)t}\cdot\widehat{U}(\xi,t) = \widehat{U}(\xi,0) + \int_0^t e^{-iA^{-1}(\xi)B(\xi)r}A^{-1}(\xi)\widehat{F}(\xi,r)\,dr$$

despejando $\widehat{U}(\xi,t)$ y haciendo $M(\xi) = A^{-1}(\xi)\,B(\xi)$ obtenemos

$$\widehat{U}(\xi,t) = e^{iM(\xi)t}\widehat{U}_0 + \int_0^t e^{i(t-r)M(\xi)}A^{-1}(\xi)\,\widehat{F}(\xi,r)\,dr. \tag{4.24}$$

Si $e^{iM(\xi)t}$ y $\Phi(t)$ son matrices fundamentales de

$$\left(e^{-iM(\xi)t}\widehat{U}(\xi,t)\right)' = e^{-iM(\xi)t}A^{-1}(\xi)\,\widehat{F}U(\xi,t)$$

sobre $-\infty < t < \infty$, existe una matriz C no singular tal que $e^{iM(\xi)t} = \Phi(t)\,C$, para $t = 0$,

$$C = \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por consiguiente $e^{iM(\xi)t} = \frac{1}{2}\Phi(t)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la cual reemplazando en (4.24) conseguimos

$$\begin{aligned}\widehat{U}(\xi,t) &= \frac{1}{2}\Phi(t)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\widehat{U}_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi(t-r)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A^{-1}(\xi)\,\widehat{F}(\xi,r)\,dr \\ &= \frac{1}{2}(E_1 + E_2).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Pero

$$\begin{aligned} E_1 = \Phi(t)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\widehat{U}_0 &= \begin{pmatrix} -e^{it\lambda_1(\xi)} & e^{it\lambda_2(\xi)} \\ e^{it\lambda_1(\xi)} & e^{it\lambda_2(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)} & e^{it\lambda_2(\xi)} - e^{it\lambda_1(\xi)} \\ e^{it\lambda_2(\xi)} - e^{it\lambda_1(\xi)} & e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\xi) \\ \widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) - \left(e^{it\lambda_1(\xi)} - e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi) \\ -\left(e^{it\lambda_1(\xi)} - e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) + \left(e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

y definiendo

$$p(\xi) = i(t-r)\,\lambda_1(\xi)\,,\; q(\xi) = i(t-r)\,\lambda_2(\xi)\,,\; c(\xi) = \frac{\xi^2+1}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4} \text{ y } d(\xi) = \frac{a_1\xi^2}{\left(\xi^2+1\right)^2 - a_1^2\xi^4}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} E_2 &= \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{i(t-r)\lambda_1(\xi)} & e^{i(t-r)\lambda_2(\xi)} \\ e^{i(t-r)\lambda_1(\xi)} & e^{i(t-r)\lambda_2(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A^{-1}(\xi)\,\widehat{F}(\xi,r)\,dr \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{p(\xi)} + e^{q(\xi)} & e^{q(\xi)} - e^{p(\xi)} \\ e^{q(\xi)} - e^{p(\xi)} & e^{p(\xi)} + e^{q(\xi)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c(\xi) & -d(\xi) \\ -d(\xi) & c(\xi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{F_1}(\xi,r) \\ \widehat{F_2}(\xi,r) \end{pmatrix}dr \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} \left(\left(e^p+e^q\right)c(\xi) + d(\xi)\left(e^p - e^q\right)\right)\widehat{F_1}(\xi,r) - \left(d(\xi)\left(e^p+e^q\right) + c(\xi)\left(e^p-e^q\right)\right)\widehat{F}_2(\xi,r) \\ \left(\left(e^p-e^q\right)d(\xi) + c(\xi)\left(e^p + e^q\right)\right)\widehat{F}_2(\xi,r) - \left(d(\xi)\left(e^p+e^q\right) + c(\xi)\left(e^p-e^q\right)\right)\widehat{F_1}(\xi,r) \end{pmatrix}dr \end{aligned} \tag{4.27}$$

Reemplazando (4.26) y (4.27) en (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}(\xi,t) = \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) - \frac{1}{2}\left(e^{it\lambda_1(\xi)} - e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi) \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t e^p\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr + \frac{1}{2}\int_0^t e^q\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t e^p\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr + \frac{1}{2}\int_0^t e^q\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\widehat{v}(\xi,t) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{it\lambda_1(\xi)} - e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) + \frac{1}{2}\left(e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi) \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t e^p\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr + \frac{1}{2}\int_0^t e^q\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t e^p\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr + \frac{1}{2}\int_0^t e^q\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)dr
\end{aligned}$$

luego aplicando la transformada inversa de Fourier tenemos que

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg\{&\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\left[\left(e^{it\lambda_1(\xi)} + e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{u_0}(\xi) - \left(e^{it\lambda_1(\xi)} - e^{it\lambda_2(\xi)}\right)\widehat{v_0}(\xi)\right]d\xi \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\int_0^t e^p\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)drd\xi \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\int_0^t e^q\left(c(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) - d(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)drd\xi \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\left[\int_0^t e^p\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)drd\xi+\right] \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\int_0^t e^q\left(-d(\xi)\widehat{F_1}(\xi,r) + c(\xi)\widehat{F}_2(\xi,r)\right)drd\xi\Bigg\},
\end{aligned}$$

es decir,

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right.\\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi\\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)} \left[\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)} \left[\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)} \left[-\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&\left. + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)} \left[-\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

y de la misma forma

$$
\begin{aligned}
&v(x,t)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[\lambda_1(\xi)+z\xi]} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[\lambda_2(\xi)+z\xi]} \widehat{u_0}(\xi)\, d\xi \right.\\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[\lambda_1(\xi)+z\xi]} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it[\lambda_2(\xi)+z\xi]} \widehat{v_0}(\xi)\, d\xi\\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)} \left[\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)} \left[\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)} \left[-\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr\\
&\left. + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)} \left[\frac{-a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_1}(\xi,r) + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2 - a_1^2\xi^4} \widehat{F_2}(\xi,r) \right] d\xi dr \right\},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
A^{-1}(\xi)\,\partial_x F(U) &= \begin{pmatrix} \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{-a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} \\ \frac{-a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} & \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} F_1 - \frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} F_2 \\ -\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} F_1 + \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4} F_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

es decir

$$A^{-1}\widehat{(\xi)\,\partial_x F}\left(U\left(\xi,\tau\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_1}\left(\xi,\tau\right)-\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_2}\left(\xi,\tau\right)\\ -\frac{a_1\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_1}\left(\xi,\tau\right)+\frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_2}\left(\xi,\tau\right)\end{pmatrix}$$

por definición $\widehat{k_{ij}}\left(\xi\right)=a_{ij}\left(\xi\right)$, por lo tanto

$$\widehat{A^{-1}}\left(\xi\right)=\left(a_{ij}\left(\xi\right)\right)\widehat{F}\left(\xi\right)=\widehat{\left(k_{ij}\right)*F}\left(\xi\right)=\widehat{K*F}\left(\xi\right)$$

esto es

$$\begin{aligned}\frac{1+\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_1}\left(\xi,s\right)&=\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,s\right),\\ -\frac{1+\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_2}\left(\xi,s\right)&=\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,s\right),\\ -\frac{a_1\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_1}\left(\xi,s\right)&=\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,s\right),\\ \frac{a_1\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4}\widehat{F_2}\left(\xi,s\right)&=\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,s\right).\end{aligned}$$

por lo tanto de (4.28) y (4.29) obtenemos

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg\{&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)}\widehat{u_0}\left(\xi\right)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)}\widehat{u_0}\left(\xi\right)d\xi\\ &+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)}\widehat{v_0}\left(\xi\right)d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)}\widehat{v_0}\left(\xi\right)d\xi\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &-\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\Bigg\}\end{aligned}\tag{4.30}$$

y

$$\begin{aligned}v\left(x,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Bigg\{&\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it[\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}\left(\xi\right)d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it[\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{u_0}\left(\xi\right)d\xi\\ &+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it[\lambda_1(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}\left(\xi\right)d\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it[\lambda_2(\xi)+z\xi]}\widehat{v_0}\left(\xi\right)d\xi\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\\ &+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,s\right)-\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,s\right)\right]d\xi dr\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Afirmamos que $F_j(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t\geq 0$, $j=1,2$. En efecto, para $F_1(\cdot,t)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|F_1(x,t)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\left|a_3v^pv_x+u^pu_x+a_4u^pv_x+a_4pu^{p-1}u_xv\right|^2dx\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}}\left(|a_3|^2|v^pv_x|^2+|u^pu_x|^2+|a_4|^2|u^pv_x|^2+|a_4p|^2\left|u^{p-1}u_xv\right|^2\right)dx\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}}|v^pv_x|^2dx+\int_{\mathbb{R}}|u^pu_x|^2dx+\int_{\mathbb{R}}|u^pv_x|^2dx+\int_{\mathbb{R}}\left|u^{p-1}u_xv\right|^2dx\right)\\
&\leq C\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v|^{2p}\right)|v_x|^2dx+\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2p}\right)|u_x|^2dx\right.\\
&\left.+\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2(p-1)}\right)|u_x|^2|v|^2dx+\int_{\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2p}\right)|v_x|^2dx\right]\\
&= C\left[\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|v_x|^2dx+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|u_x|^2dx\right.\\
&\left.+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2(p-1)}\right)\int_{\mathbb{R}}|u_x|^2|v|^2dx+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|v_x|^2dx\right]\\
&= C\left(\|v\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_x\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\|u_xv\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq C\left(\|v\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_x\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\|u_x\|_{L^2}^2\|v\|_{L^\infty}^2+\|u\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2\right)<\infty
\end{aligned}
$$

donde $C=\text{máx}\left(|a_3|^2,|a_4p|^2,|a_4|^2\right)$.

En forma análoga probemos que $F_2(\cdot,t)\in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t\geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|F_2(x,t)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\left|a_3u^pu_x+v^pv_x+a_4(uv^p)_x\right|^2dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left(|a_3|^2|u|^{2p}|u_x|^2+|v|^{2p}|v_x|^2+|a_4|^2|v^pu_x|^2+|a_4p|^2|v|^{2(p-1)}|v^pu|^2\right)dx\\
&\leq C\left[\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|u_x|^2dx+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|v_x|^2dx\right.\\
&\left.+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v|^{2p}\right)\int_{\mathbb{R}}|u_x|^2dx+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|u|^{p-1}|u|\right)^2\int_{\mathbb{R}}|v_x|^2dx\right]\\
&= C\left(\|u\|_{L^\infty}^{2p}\|u_x\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^\infty}^{2p}\|v_x\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\|u\|_{L^\infty}^2\|v_x\|_{L^2}^2\right)<\infty.
\end{aligned}
$$

La afirmación queda probada, garantizando de esta manera la existencia de las transformadas de Fourier y sus inversas de F_1 y F_2 en $L^2(\mathbb{R})$.

Definamos para cada $t\geq 0$ la función $m=m(t)$ por

$$
\begin{aligned}
&m(t)\\
&=\sup_{0\leq\tau\leq t}\left\{\left(\|u(\tau)\|_{L^\infty}+\|u_x(\tau)\|_{L^\infty}+\|v(\tau)\|_{L^\infty}+\|v_x(\tau)\|_{L^\infty}\right)(1+\tau)^{1/3}+\|u(\tau)\|_{H^4}+\|v(\tau)\|_{H^4}\right\}.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que existe una constante positiva C tal que

$$
m(t)\leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^5}+\|v_0\|_{H^5}+m^{p+1}(t)\right). \qquad (4.32)
$$

En efecto, para probar la afirmación, estimamos cada término de la definición de $m(t)$. Usando el teorema 4.3 se sigue de (4.30) que

$$\begin{aligned}
&\|u(x,t)\|_{L^\infty} \\
&\leq C\left(\|u_0\|_{L^1}+\|v_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{H^4}+\|v_0\|_{H^4}\right)(1+\tau)^{-1/3} \\
&+C\int_0^t \left[\|K_{11}*F_1\|_{L^1}+\|K_{12}*F_2\|_{L^1}+\|K_{21}*F_1\|_{L^1}+\|K_{22}*F_2\|_{L^1}+\right. \\
&\left.+\|K_{11}*F_1\|_{H^4}+\|K_{12}*F_2\|_{H^4}+\|K_{21}*F_1\|_{H^4}+\|K_{22}*F_2\|_{H^4}\right](1+t-\tau)^{-1/3}\,d\tau \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

siempre que $K_{11}*F_1,\ K_{12}*F_2,\ K_{21}*F_1,\ K_{22}*F_2\in L^1(\mathbb{R})\cap H^4(\mathbb{R})$.

Esta afirmación es verdadera porque usando el teorema (2.1) y la desigualdad de Holder obtenemos

$$\begin{aligned}
\|K_{11}*F_1\|_{L^1} &\leq \|K_{11}\|_{L^1}\|F_1\|_{L^1}=\|K_{11}\|_{L^1}\|a_3v^pv_x+u^pu_x+a_4(u^pv)_x\|_{L^1} \\
&\leq \|K_{11}\|_{L^1}\left(|a_3|\,\|v^pv_x\|_{L^1}+\|u^pu_x\|_{L^1}+|a_4p|\left\|u^{p-1}u_xv\right\|_{L^1}+|a_4|\,\|u^pv_x\|_{L^1}\right) \\
&\leq C\,\|K_{11}\|_{L^1}\left(\|v^pv_x\|_{L^1}+\|u^pu_x\|_{L^1}+\left\|u^{p-1}u_xv\right\|_{L^1}+\|u^pv_x\|_{L^1}\right) \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Estimando cada término

$$\begin{aligned}
\|v^pv_x\|_{L^1}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}}|v^pvv_x|^2\,dx\leq\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|v|\right)^{2(p-1)}\int_{\mathbb{R}}|vv_x|^2\,dx \\
&=\|v\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\|vv_x\|_{L^2}^2\leq\|v\|_{L^\infty}^{2(p-1)}\|v\|_{L^2}^2\|v_x\|_{L^2}^2\,, \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

del mismo modo

$$\|u^pu_x\|_{L^1}\leq\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}\,, \qquad (4.36)$$

$$\left\|u^{p-1}u_xv\right\|_{L^1}\leq\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \qquad (4.37)$$

y

$$\|u^pv_x\|_{L^1}\leq\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}\,. \qquad (4.38)$$

Reemplazando (4.35), (4.36), (4.37) y (4.38) en (4.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|K_{11}*F_1\|_{L^1} &\leq \|K_{11}\|_{L^1}\Big(a_3\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} \\
&\quad +a_4p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2}+a_4\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}\Big) \\
&\leq \|K_{11}\|_{L^1}\Big(a_3\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^4}^2+\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}^2 \\
&\quad +a_4p\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}+a_4\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}\Big) \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

De la misma manera, probamos que

$$\begin{aligned}
\|K_{12}*F_2\|_{L^1} &\leq \|K_{12}\|_{L^1}\Big(a_3\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}^2+\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v\|_{H^4}^2 \\
&\quad +a_4\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}+a_4p\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}\Big)\,, \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\left\|K_{21} * F_1\right\|_{L^1} \leq \left\|K_{21}\right\|_{L^1}\left(a_3\|v\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|v\|_{H^4}^2+\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}^2\right.$$
$$\left.+a_4 p\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}+a_4\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}\right), \tag{4.41}$$

$$\left\|K_{22} * F_2\right\|_{L^1} \leq \left\|K_{22}\right\|_{L^1}\left(a_3\|u\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}^2+\|v\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|v\|_{H^4}^2\right.$$
$$\left.+a_4\|v\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}+a_4 p\|v\|_{L^{\infty}}^{p-1}\|u\|_{H^4}\|v\|_{H^4}\right), \tag{4.42}$$

y aplicando la norma de los espacios de Sobolev $\|f\|_{H^s} := \|f\|_s$

$$\begin{aligned}
\left\|K_{11} * F_1\right\|_{H^4}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^4\left|K_{11}(\xi)\right|^2\left|\widehat{K_{11} * F_1}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^4\left|\frac{1+\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4}\hat{F}_1(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^4 \frac{\left(1+\xi^2\right)^2}{\left[\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4\right]^2}\left|\hat{F}_1(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\left(1+\xi^2\right)^3}{\left[\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4\right]^2}\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^3\left|\hat{F}_1(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= C\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^3\left|\hat{F}_1(\xi)\right|^2 d\xi = C\left\|F_1\right\|_{H^3}^2
\end{aligned}$$

ya que $\frac{\left(1+\xi^2\right)^3}{\left[\left(1+\xi^2\right)^2-a_1^2\xi^4\right]^2}$ es acotada para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $0<a_1<1$. Por lo tanto

$$\left\|K_{11} * F_1\right\|_{H^4} \leq \left\|F_1\right\|_{H^3} \tag{4.43}$$

la misma estimación se tiene cuando K_{11} es reemplazado en (4.43) por K_{ij}, para algún $i,j=1,2$.

De la definición de F_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|F_1\right\|_{H^3} &= \left\|a_3 v^p v_x+u^p u_x+a_4\left(u^p v\right)_x\right\|_{H^3} \\
&\leq a_3\left\|v^p v_x\right\|_{H^3}+\left\|u^p u_x\right\|_{H^3}+a_4\left\|\left(u^p v\right)_x\right\|_{H^3}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Usando la inmersión: $H^j(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R})$ con $j=1,2,\cdots$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|u^p u_x\right\|_{H^3}^2 &= \left\|u^p u_x\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_x\left(u^p u_x\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_{xx}\left(u^p u_x\right)\right\|_{L^2}^2+\left\|\partial_{xxx}\left(u^p u_x\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\|u^p u_{xxxx}\right\|_{L^2}^2+3p\left\|u^{p-1}u_x u_{xxx}\right\|_{L^2}^2+\left\|3p(p-1)u^{p-2}u_{xx}+3pu^{p-1}\left(u_{xx}\right)^2\right\|_{L^2}^2 \\
&+\left\|3p(p-1)(p-2)u^{p-3}u_x^4+3p(p-1)u^{p-2}u_x^2u_{xx}+pu^{p-1}u_x u_{xxx}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq p(p-1)(p-2)\left\|u^{p-3}u_x^4\right\|_{L^2}^2+4p\left\|u^{p-1}u_x u_{xxx}\right\|_{L^2}^2 \\
&+6p(p-1)\left\|u^{p-2}u_x^2u_{xx}\right\|_{L^2}^2+3p\left\|u^{p-1}\left(u_{xx}\right)^2\right\|_{L^2}^2+\left\|u^p u_{xxxx}\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Sea $C = \text{máx}\{p(p-1)(p-2), 4p, 6p(p-1), 3p, 1\}$, entonces

$$\|u^p u_x\|_{H^3}^2 \leq C\left[\left\|u^{p-3}u_x^4\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^{p-1}u_x u_{xxx}\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^{p-2}u_x^2 u_{xx}\right\|_{L^2}^2 + \left\|u^{p-1}(u_{xx})^2\right\|_{L^2}^2 + \|u^p u_{xxxx}\|_{L^2}^2\right]. \tag{4.45}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left\|u^{p-3}u_x^4\right\|_{L^2}^2 &= \left\|u^{p-3}u_x^3 u_x\right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|u^{p-3}u_x^3 u_x\right|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|u^{p-3}u_x^3\right|^2\right) |u_x|^2\, dx \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|u^{p-3}(\partial_x u)^3\right|\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2\, dx \\
&\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |u|^{p-3}\right)^2 \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u|^3\right)^2 \|u_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|u\|_{L^\infty}^{2(p-3)} \|u_x\|_{L^\infty}^6 \|u_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|u\|_{L^\infty}^{2p-6} \|u\|_{L^\infty}^6 \|u_x\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^\infty}^{2p} \|u_x\|_{L^2}^2 \\
&= \|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \|u\|_{L^\infty}^2 \|u_x\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

es decir, $\left\|u^{p-3}u_x^4\right\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^\infty} \|u_x\|_{L^2}$.

Análogamente

$$\begin{aligned}
\left\|u^{p-1}u_x u_{xxx}\right\|_{L^2} &\leq \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \|u_{xxx}\|_{L^2} \\
\left\|u^{p-2}u_x^2 u_{xx}\right\|_{L^2} &\leq \|u\|_{L^\infty}^{p-2} \|u\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2} \\
\left\|u^{p-1}(u_{xx})^2\right\|_{L^2} &\leq \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_{xx}\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2} \\
\|u^p u_{xxxx}\|_{L^2} &\leq \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^\infty} \|u_{xxxx}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

reemplazando estas condiciones en (4.45)

$$\begin{aligned}
\|u^p u_x\|_{H^3}^2 &\leq C\Big[\|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^\infty} \|u_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_x\|_{L^\infty} \|u_{xxx}\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-2} \|u\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2} \\
&\quad + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_{xx}\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^\infty} \|u_{xxxx}\|_{L^2}\Big] \\
&\leq C\Big[\|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^1} \|u_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^2} \|u_{xxx}\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-2} \|u\|_{H^2} \|u_x\|_{L^\infty} \|u_{xx}\|_{L^2} \\
&\quad + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^3} \|u_{xx}\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{H^1} \|u_{xxxx}\|_{L^2}\Big]
\end{aligned} \tag{4.46}$$

las estimaciones de $\|v^p v_x\|_{H^3}$ y de $\|(v^p v)_x\|_{H^3}$ son encontradas en forma similar.

De la definición de $m(t)$ y las desigualdades (4.39) - (4.46) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|K_{11} * F_1\|_{L^1} \leq \|K_{11}\|_{L^1} \Big[&|a_3| \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{L^1}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^1}^2 + |a_4|\, p\, \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1} \\
&+ |a_4| \|u\|_{L^\infty}^{p-1} \|u\|_{L^1} \|v\|_{L^1}\Big]
\end{aligned}$$

y usando $\|u\|_{L^\infty} \leq C_1 \|u\|_{L^1} \leq C_1 m(t)$ y $\|u\|_{L^\infty} (1+\tau)^{-1/3} \leq C_1 m(t) (1+\tau)^{-1/3}$ se sigue, de la última expresión

$$\begin{aligned}\|K_{11} * F_1\|_{L^1} \leq \|K_{11}\|_{L^1} \Big[& |a_3| C_1 m^{p+1} (1+\tau)^{-1/3(p-1)} + C_1 m^{p+1} (1+\tau)^{-1/3} \\ & + |a_4| p C_1 m^{p+1} (1+\tau)^{-1/3} + |a_4| C_1 m^{p+1} (1+\tau)^{-1/3(p-1)} \Big] \\ \leq {} & C \|K_{11}\|_{L^1} m^{p+1} (t) (1+\tau)^{-\frac{1}{3}(p-1)}\end{aligned}$$

donde $C = \{|a_3| C_1, C_1, |a_4| pC_1, |a_4| C_1\}$.

Del mismo modo se cumple cuando K_{11} es reemplazado por K_{ij} y F_1 por F_j para cualquier $i, j = 1, 2$. Así

$$\|K_{ij} * F_j\|_{L^1} \leq C \|K_{ij}\|_{L^1} m^{p+1} (t) (1+\tau)^{(1-p)/3}, \quad i, j = 1, 2 \tag{4.47}$$

y

$$\|K_{ij} * F_j\|_{H^4} \leq C m^{p+1} (t) (1+\tau)^{(1-p)/3}, \quad i, j = 1, 2. \tag{4.48}$$

Reemplazando (4.47) y (4.48) en (4.33) se tiene

$$\begin{aligned}\|u(x,t)\|_{L^\infty} \leq {} & C \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4} \right) (1+\tau)^{-\frac{1}{3}} \\ & + C m^{p+1} (t) \int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3} (1+t-\tau)^{-1/3} \, d\tau\end{aligned} \tag{4.49}$$

Pero, aplicando el lema (1.39) con $\alpha = 1/3 = \eta$, $\beta = \frac{1}{3}(p-1)$ y $p > 4$, tenemos

$$\sup_{0 \leq t \leq +\infty} \int_0^t (1+t)^{1/3} (1+\tau)^{(1-p)/3} (1+t-\tau)^{-1/3} \, d\tau < +\infty$$

equivalentemente

$$\int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3} (1+t-\tau)^{-1/3} \, d\tau \leq C (1+t)^{-\frac{1}{3}}.$$

Por lo tanto, de la desigualdad (4.49) concluimos

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty} \leq C \left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4} \right) (1+\tau)^{-\frac{1}{3}} + C m^{p+1} (t) (1+t)^{-\frac{1}{3}}$$

de esta forma, obtenemos

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} \|u(x,t)\|_{L^\infty} \leq C \left[\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4} (1+\tau)^{-\frac{1}{3}} + m^{p+1} (t) \right]. \tag{4.50}$$

De manera similar estimamos $\|v\|_{L^\infty}$. Aplicando el teorema (4.3) en (4.31), tenemos

$$\begin{aligned}\|v(x,t)\|_{L^\infty} \leq C \Big[& \|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4} (1+t)^{-\frac{1}{3}} \\ & + \int_0^t \big(\|K_{11} * F_1\|_{L^1} + \|K_{12} * F_2\|_{L^1} + \|K_{21} * F_1\|_{L^1} + \|K_{22} * F_2\|_{L^1} \\ & + \|K_{11} * F_1\|_{H^4} + \|K_{12} * F_2\|_{H^4} + \|K_{21} * F_1\|_{H^4} + \|K_{22} * F_2\|_{H^4} \big) \\ & (1+t-\tau)^{-1/3} \, d\tau \Big]\end{aligned} \tag{4.51}$$

reemplazando (4.47) y (4.48) en (4.51) se tiene

$$\begin{aligned} \|v(x,t)\|_{L^\infty} &\leq C\left(\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}\right)(1+t)^{-\frac{1}{3}} \\ &+ Cm^{p+1}(t)\int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3}(1+t-\tau)^{-1/3}\,d\tau. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Del mismo modo, usando el lema (1.39) con $\alpha = 1/3 = \eta$, $\beta = \frac{1}{3}(p-1)$ y $p > 4$, tenemos

$$\int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3}(1+t-\tau)^{-1/3}\,d\tau \leq C(1+t)^{-\frac{1}{3}}.$$

De (4.52) se sigue que

$$(1+t)^{\frac{1}{3}}\|v(x,t)\|_{L^\infty} \leq C\left[\|u_0\|_{L^1} + \|v_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}(1+\tau)^{-\frac{1}{3}} + m^{p+1}(t)\right] \tag{4.53}$$

Estimemos $\|u(x,t)\|_{H^4}$. De (4.30)

$$\begin{aligned} &|u(x,t)| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\,d\xi\right.\right. \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_2(\xi)+x\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\lambda_1(\xi)+x\xi)}\widehat{v_0}(\xi)\,d\xi \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{12}*F_2}(\xi,r)\right]d\xi dr \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{11}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{12}*F_2}(\xi,r)\right]d\xi dr \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_1(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{22}*F_2}(\xi,r)\right]d\xi dr \\ &\left.\left.+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)(\lambda_2(\xi)+z\xi)}\left[\widehat{K_{21}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{22}*F_2}(\xi,r)\right]\right| d\xi dr\right\} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} &|u(x,t)| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{u_0}(\xi)|\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{u_0}(\xi)|\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{v_0}(\xi)|\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{v_0}(\xi)|\,d\xi\right. \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{11}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{12}*F_2}(\xi,r)\right| d\xi dr \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{11}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{12}*F_2}(\xi,r)\right| d\xi dr \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{21}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{22}*F_2}(\xi,r)\right| d\xi dr \\ &+ \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{21}*F_1}(\xi,r) + \widehat{K_{22}*F_2}(\xi,r)\right| d\xi dr \end{aligned}$$

equivalentemente

$$
\begin{aligned}
&\left\| u\left(x,t\right)\right\|_{H^4}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right| d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,r\right)+\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr\right.\\
&\left.+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,r\right)+\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr\right\}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{ 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right| d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{12}*F_2}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr\right.\\
&\left.+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{21}*F_1}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{22}*F_2}\left(\xi,r\right)\right| d\xi dr\right\},
\end{aligned}
$$

en seguida, aplicando la desigualdad de Holder

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right| d\xi &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}1^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\\
&= C_1\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} = C_1\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^4\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right|^2\frac{d\xi}{\left(1+\xi^2\right)^4}\right)^{1/2}\\
&\leq C_1\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^4}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\xi^2\right)^4\left|\widehat{u_0}\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\\
&\leq C\left\| u_0\right\|_{H^4}.
\end{aligned}
$$

Siguiendo el mismo procedimiento, estimamos

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,r\right)\right| d\xi \leq C\left\|\widehat{K_{11}*F_1}\left(\xi,r\right)\right\|_{H^4}
$$

de esta manera

$$
\begin{aligned}
\left\| u\left(x,t\right)\right\|_{H^4} &\leq C\left(\left\| u_0\right\|_{H^4}+\left\| v_0\right\|_{H^4}\right)\\
&+C\int_0^t\left(\left\|\widehat{K_{11}*F_1}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{12}*F_2}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{21}*F_1}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{22}*F_2}\right\|_{H^4}\right) d\tau
\end{aligned}
$$

y de (4.48) obtenemos

$$
\left\| u\left(x,t\right)\right\|_{H^4} \leq C\left(\left\| u_0\right\|_{H^4}+\left\| v_0\right\|_{H^4}\right)+Cm^{p+1}\left(t\right)\int_0^t\left(1+\tau\right)^{(1-p)/3} d\tau
$$

como la integral $\int_0^t\left(1+\tau\right)^{(1-p)/3} d\tau$ es convergente, entonces

$$
\left\| u\left(x,t\right)\right\|_{H^4} \leq C\left(\left\| u_0\right\|_{H^4}+\left\| v_0\right\|_{H^4}+Cm^{p+1}\left(t\right)\right). \tag{4.54}
$$

Estimamos ahora $\left\| v\left(\tau\right)\right\|_{H^4}$. En efecto, de (4.31) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\| v\left(x,t\right)\right\|_{H^4} &\leq C\left(\left\| u_0\right\|_{H^4}+\left\| v_0\right\|_{H^4}\right)\\
&+C\int_0^t\left(\left\|\widehat{K_{11}*F_1}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{12}*F_2}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{21}*F_1}\right\|_{H^4}+\left\|\widehat{K_{22}*F_2}\right\|_{H^4}\right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la siguiente estimación de $\|v(x,t)\|_{H^4}$ se sigue de (4.48)

$$\|v(x,t)\|_{H^4} \leq C(\|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4}) + Cm^{p+1}(t)\int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3}\, d\tau,$$

como la integral $\int_0^t (1+\tau)^{(1-p)/3}\, d\tau$ es convergente, entonces

$$\|v(x,t)\|_{H^4} \leq C\left(\|u_0\|_{H^4} + \|v_0\|_{H^4} + Cm^{p+1}(t)\right). \tag{4.55}$$

Por otro lado, derivando respecto de x, cada ecuación del sistema (2.1), obtenemos

$$\begin{cases} (u_x)_t - (u_x)_{xxt} - a_1(v_x)_{xxt} + a_2(u_x)_x + (F_1(x,t))_x = 0, \\ (v_x)_t - (v_x)_{xxt} - a_1(u_x)_{xxt} + a_2(v_x)_x + (F_2(x,t))_x = 0, \\ u_x(x,0) = u_0'(x), \quad v_x(x,0) = v_0'(x). \end{cases} \tag{4.56}$$

Haciendo $u' = u_x$, $v' = v_x$, se sigue que (u', v') satisface

$$\begin{cases} u_t' - u_{xxt}' - a_1 v_{xxt}' + a_2 u_x' + (F_1(x,t))_x = 0, \\ v_t' - v_{xxt}' - a_1 u_{xxt}' + a_2 v_x' + (F_2(x,t))_x = 0, \\ u'(x,0) = u_0'(x), \quad v'(x,0) = v_0'(x). \end{cases} \tag{4.57}$$

aplicando la transformada de Fourier, respecto de la variable espacial, podemos escribir la forma integral de la solución de (4.56) como

$$\begin{aligned} u'(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Bigg\{ & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_1(\xi)} \widehat{u_0'}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_2(\xi)} \widehat{u_0'}(\xi)\, d\xi \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_1(\xi)} \widehat{v_0'}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_2(\xi)} \widehat{v_0'}(\xi)\, d\xi \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_1(\xi)} \left[\widehat{K_{11} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{12} * (F_2)_x}(\xi,r)\right] d\xi dr \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_2(\xi)} \left[\widehat{K_{11} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{12} * (F_2)_x}(\xi,r)\right] d\xi dr \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_1(\xi)} \left[\widehat{K_{21} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{22} * (F_2)_x}(\xi,r)\right] d\xi dr \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_2(\xi)} \left[\widehat{K_{21} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{22} * (F_2)_x}(\xi,r)\right] d\xi dr \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
v'(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Bigg\{ &- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_1(\xi)} \widehat{u_0'}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_2(\xi)} \widehat{u_0'}(\xi)\, d\xi \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_1(\xi)} \widehat{v_0'}(\xi)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itw_2(\xi)} \widehat{v_0'}(\xi)\, d\xi \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_1(\xi)} \left[\widehat{K_{11} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{12} * (F_2)_x}(\xi,r) \right] d\xi dr \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_2(\xi)} \left[\widehat{K_{11} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{12} * (F_2)_x}(\xi,r) \right] d\xi dr \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_1(\xi)} \left[\widehat{K_{21} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{22} * (F_2)_x}(\xi,r) \right] d\xi dr \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-r)w_2(\xi)} \left[\widehat{K_{21} * (F_1)_x}(\xi,r) + \widehat{K_{22} * (F_2)_x}(\xi,r) \right] d\xi dr \Bigg\} \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

donde $w_1(\xi) = \lambda_1(\xi) + z\xi$, $w_2(\xi) = \lambda_2(\xi) + z\xi$, $z = x/t$, y

$$(F_1(x,t))_x = (a_3 v^p v_x + u^p u_x + a_4 (u^p v)_x)_x \ \text{ y } \ (F_2(x,t))_x = (a_3 u^p u_x + v^p v_x + a_4 (uv^p)_x)_x .$$

Afirmamos que $(F_i(x,t))_x \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

En efecto, para $(F_1(x,t))_x$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(F_1(x,t))_x|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| a_3 (v^p v_x)_x + (u^p u_x)_x + a_4 ((u^p v)_x)_x \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |a_3 (v^p v_x)_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |(u^p u_x)_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left| a_4 ((u^p v)_x)_x \right|^2 dx \\
&\leq C \left[\int_{\mathbb{R}} |v^p v_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |u^p u_x|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left| (u^{p-1} u_x v)_x \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |(u^p v_x)_x|^2 dx \right] \\
&\leq C \left[\|v\|_{L^\infty}^{2p} \|v_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2p} \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \|v\|_{L^\infty}^2 \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2p} \|v_x\|_{L^2}^2 \right] \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donde usamos $|\partial_x (v^p v_x)| \leq |v^p v_x|$.

Se realiza el mismo procedimiento para demostrar que $(F_2(\cdot,t))_x \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t \geq 0$.

Por lo tanto la afirmación queda probada y con ello garantizamos la existencia de la transformada de Fourier y de su inversa de $(F_1)_x$ y $(F_2)_x$ en $L^2(\mathbb{R})$, y

$$\left\| K_{ij} * (F_j)_x \right\|_{H^4} \leq C \|F_j\|_{H^3} \ \text{ para } i,j = 1,2.$$

De (4.58) y siguiendo la misma sucesión de ideas dadas anteriormente y con los cálculos similares, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| u'(x,t) \right\|_{L^\infty} &\leq C \left(\left\| u_0' \right\|_{L^1} + \left\| v_0' \right\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^5} + \|v_0\|_{H^5} \right) (1+t)^{-1/3} \\
&\quad + C m^{p+1}(t) \int_0^t (1+t-\tau)^{-1/3} (1+\tau)^{(1-p)/3} d\tau.
\end{aligned}$$

Del lema (1.39) para $p > 4$ obtenemos

$$(1+t)^{1/3}\left\|u'(x,t)\right\|_{L^\infty} \leq C\left(\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}+m^{p+1}(t)\right) \tag{4.60}$$

De (4.53) y (4.59) y el teorema (4.3) podemos probar en forma análoga

$$(1+t)^{1/3}\left\|v(\cdot,t)\right\|_{L^\infty} \leq C\left(\left\|u_0\right\|_{L^1}+\left\|v_0\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}+m^{p+1}(t)\right), \tag{4.61}$$

$$(1+t)^{1/3}\left\|v'(\cdot,t)\right\|_{L^\infty} \leq C\left(\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}+m^{p+1}(t)\right), \tag{4.62}$$

$$\left\|v(\cdot,t)\right\|_{H^4} \leq C\left(\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}+m^{p+1}(t)\right). \tag{4.63}$$

Ahora de (4.50), (4.54), (4.60), (4.61), (4.62) y (4.63) se prueba (4.32) ya que

$$\begin{aligned}&(1+t)^{1/3}\left(\left\|u(x,t)\right\|_{L^\infty}+\left\|v(x,t)\right\|_{L^\infty}+\left\|u'(x,t)\right\|_{L^\infty}+\left\|v'(x,t)\right\|_{L^\infty}\right)+\left\|u(x,t)\right\|_{H^4}+\left\|v(x,t)\right\|_{H^4}\\ &\leq C\left\|u_0\right\|_{L^1}+\left\|v_0\right\|_{L^1}+\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}+m^{p+1}(t)\end{aligned}$$

tomando supremo en $[0,t]$ obtenemos

$$m(t) \leq C\left\|u_0\right\|_{L^1}+\left\|v_0\right\|_{L^1}+\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}+m^{p+1}(t)$$

Finalmente, vamos a verificar las hipótesis del lema (1.38)

$$\begin{aligned} m(0) &= \left\|u_0\right\|_{L^\infty}+\left\|v_0\right\|_{L^\infty}+\left\|u_0'\right\|_{L^\infty}+\left\|v_0'\right\|_{L^\infty}+\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}\\ &\leq 3\left(\left\|u_0\right\|_{H^4}+\left\|v_0\right\|_{H^4}\right)\\ &\leq 3\left(\left\|u_0\right\|_{L^1}+\left\|v_0\right\|_{L^1}+\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}\right).\end{aligned}$$

Así, tomando $\alpha = 3\left(\left\|u_0\right\|_{L^1}+\left\|v_0\right\|_{L^1}+\left\|u_0'\right\|_{L^1}+\left\|v_0'\right\|_{L^1}+\left\|u_0\right\|_{H^5}+\left\|v_0\right\|_{H^5}\right)$, $\beta = C$, $\eta = p+1$ y $\delta = \dfrac{p}{C^{1/(p+1)}(p+1)^{(p+1)/p}}$ entonces todos las hipótesis del lema (1.38) se verifican lo que implica la conclusión del teorema (4.4). $\square$

Bibliografía

[1] J. Albert. *Dispersión of low energy waves for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Differential equations 63 (1986), 117-134.

[2] J. Albert. *On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation.* J. Math. Anal. and Appl. 141 (1989), 527-537.

[3] T. Arbogast, J. Bona. *Method of Applied Mathematics.* Department of Mathematics the University of Texas at Austin Fall and Spring Semesters, (2001).

[4] V. Bisognin. *On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of a Nonlinear Dispersive System of Benjamin-Bona-Mahony's Type.* Bollettino U.M.I., 10-B, 99-128, (1996).

[5] Haim Brézis. *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[6] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Philos. Trans. Royal Soc. London, series A, 272, 47-48, (1972).

[7] J. Bona, M. Chen, J. C. Saut. *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II. The nonlinear theory.* Institute of Physics Publishing, Nonlinearity 17, 925-952, (2004).

[8] J. Bona, G. Ponce, J. C. Saut, M. Tom. *A model system for strong inter action between internal solitary waves.* Comm. Math. Phys. 143 (1992).

[9] J. Bona, R. Smith. *A model for the two-way propagation of water waves in a channel.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79-15,167-182, (1976).

[10] G. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* A Wiley-Interscience Publication, U.S.A, (1984).

[11] R. J. Iório, V. Iório. *Fourier analysis and partial diferential equations.* Cambridge University Press, New York, (2001).

[12] E. Hewitt y K. Strombert. *Real and Abstract Analysis.* Springer - Verlag, New York, Heildelberg, Berlin.

[13] F. Linares y G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive Equations.* Springer (2009).

[14] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematica Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983. 279 pp. ISBN:0-387-90845-5.

[15] R. Racke, *Lectures on Nonlinear Evolution Equations.* Initial value problems, Aspects of math. (1991).

[16] L. Vega G. *La ola solitaria.* La Gaceta de la RSME: Volumen 4, Número 3, pp. 528-566, (2001). (1991).

[17] E. M. Stein. *Oscillatory integrals in Fourier analysis.* Beijing. Lectures Notes in Harmonic Analysis, Princeton University Press (1986), 35-47.

[18] W. Strauss, *Decay and asymptotics for* $\Box u = F(u)$, J. Funct. Anal. 2(1968), 409-547.