PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Análisis y valoración de una organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto del segundo ciclo de Ingeniería

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Oswaldo Valentin Requejo Cotrina

Asesora:

Dra. Maritza Luna Valenzuela

Lima, 2024

Informe de Similitud

Yo, Maritza Luna Valenzuela, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada “Análisis y valoración de una organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto del segundo ciclo de Ingeniería”, del autor Oswaldo Valentín Requejo Cotrina, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 17%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 02/12/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima 05 de diciembre de 2024.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Luna Valenzuela, Maritza	
DNI:29718677	Firma
ORCID: 0000-0002-3039-451X	

A Dios, en primer lugar, por darme la vida y a mi padre por inculcarme el amor al estudio

Agradecimientos

A mi asesora, la doctora Maritza Luna Valenzuela por su orientación, exigencia y paciencia a lo largo de la elaboración del presente trabajo de investigación.

A los profesores de la Maestría, a quienes agradezco por la contribución en mi formación durante mis años de estudio en la PUCP.

A mis compañeros de la Maestría con quienes tuve el gusto de compartir en aula, realizar trabajos juntos y pasar gratos momentos durante nuestros años de estudio en la PUCP.

A mi madre, a mi hermana, mi cuñado, mi tía Rosa, Jorge y familiares por sus ánimos y apoyo durante el desarrollo de mi trabajo de investigación.

Resumen

Esta investigación busca analizar y valorar la organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en el libro de texto *Tópicos de cálculo, volumen 2* de Mitacc y Toro (2009), utilizado por estudiantes del segundo ciclo de la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). Para realizar el análisis del libro de texto, se toma como base la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); para realizar la valoración, se hace uso de los indicadores de Fonseca (2004). El análisis comienza tomando la metodología de Almoloud (2015), que incorpora criterios y elementos de la TAD. Esta metodología considera, en primera instancia, una etapa de selección y descripción del libro de texto, luego una de análisis y, finalmente, una de evaluación. A esta metodología se le añade una etapa epistemológica; esta consiste en la elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) de la integral definida. En la etapa de análisis, se identifican los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías y la teoría presentes en la organización matemática del libro de texto sobre la integral definida y se comparan con los tipos de tareas encontrados en el MER. Para la etapa de evaluación, se evalúan los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías. Finalmente, se considera si la organización matemática es completa o no, a través del cumplimiento de cada uno de los indicadores de Fonseca (2004); posteriormente, se elaboran conclusiones para conocer en qué medida se han cumplido con los objetivos generales y específicos del presente trabajo.

Palabras clave: integral definida, libro de texto, Modelo Epistemológico de Referencia, Teoría Antropológica de lo Didáctico, organización matemática.

Abstract

This research seeks to analyze and evaluate the mathematical organization proposed for teaching the definite integral in the textbook Topics of Calculus, volume 2 by Mitacc and Toro (2009), used by students in the second cycle of the Engineering degree at the National University of San Marcos (UNMSM). To carry out the analysis of the textbook, the Anthropological Theory of Didactics (TAD) is taken as a basis; to perform the assessment, Fonseca (2004) indicators are used. The analysis begins by taking the methodology of Almoloud (2015), which incorporates criteria and elements of the TAD. This methodology considers, in the first instance, a stage of selection and description of the textbook, then an analysis stage and, finally, an evaluation stage. An epistemological stage is added to this methodology; this consists of the elaboration of an Epistemological Reference Model (ERM) of the definite integral. In the analysis stage, the types of tasks, techniques, technologies and theory present in the mathematical organization of the textbook on the definite integral are identified and compared with the types of tasks found in the MER. For the evaluation stage, the types of tasks, techniques and technologies are evaluated. Finally, it is considered whether the mathematical organization is complete or not, through compliance with each of the Fonseca (2004) indicators; subsequently, conclusions are drawn to know to what extent the general and specific objectives of this work have been met.

Keywords: definite integral, textbook, Epistemological Reference Model, Anthropological Theory of Didacticism, mathematical organization.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

En la integral definida, entre los diversos usos que tiene en ingeniería, destaca la necesidad de conocer la medida de un área, la medida de volúmenes en circuitos eléctricos, y en el cálculo estructural para calcular la resistencia y estabilidad de una estructura. Es así que el uso de la integral definida simple para el cálculo de áreas representa lo más estudiado en diversos cursos de los primeros años de la carrera universitaria. Tanto arquitectos como ingenieros civiles utilizan integrales definidas, ya sea de manera explícita (calculo analítico) o implícita, mediante el uso de programas informáticos (que priorizan el cálculo numérico), para la determinación de áreas de espacios irregulares. A modo de ilustración, al levantar una edificación, es necesario utilizar esta rama específica del cálculo para conocer las medidas precisas de la construcción. Por otro lado, los estudiantes de Ingeniería Industrial y los de Ingeniería Química la utilizan en la asignatura de Fisicoquímica para resolver problemas relacionados con la ecuación de estado de los gases reales. Asimismo, en el curso de Principios de Ingeniería Química, la emplean para resolver problemas sobre cambios de temperatura (calor sensible y capacidades caloríficas). Por esta razón, comprender el concepto de integral definida es fundamental y no debe limitarse solo al cálculo de áreas.

En la presente investigación, se estudia la organización matemática de la integral definida en el libro de texto *Tópicos de cálculo, volumen II*, en el cual se dedica el capítulo 2 al presente objeto de estudio. Dicho texto se utiliza, junto con otros más, en el segundo ciclo de estudios generales de la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). Como profesor matemático, se apreciaron las complicaciones que los estudiantes padecen para entender la integral definida, desde su simbología hasta su parte conceptual. Así, resulta pertinente analizar cómo se propone su enseñanza en un libro de texto, tanto para resaltar sus deficiencias como para proponer mejoras en futuras ediciones.

Así, la pregunta que inicia esta investigación es ¿cuál es la organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto de Cálculo 2 para estudiantes del segundo ciclo de una carrera de Ingeniería y qué tan completa es dicha organización matemática? Para responder a esta pregunta y a los objetivos planteados, es pertinente desarrollar cinco capítulos: en el primero, se mostrarán las investigaciones acerca de las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender la integral definida. También se mostrarán investigaciones sobre los diferentes métodos de enseñanza que usan los profesores para una mejor comprensión del concepto. A continuación, se seguirá con las investigaciones sobre el análisis de la enseñanza de la integral definida en libros de textos, que utilizan diferentes marcos teóricos. Finalmente, se tomarán en cuenta las investigaciones sobre diferentes objetos matemáticos, usando como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Todas estas investigaciones conforman los antecedentes del presente trabajo. Como siguiente aspecto, se realizará la justificación de este trabajo, la cual toma como base los antecedentes y presenta consideraciones de diferentes autores acerca de la importancia de la integral definida como objeto matemático, la importancia del análisis de libros de texto y la importancia de la TAD, como marco teórico para realizar dicho análisis. Finalmente, el capítulo culmina presentado la pregunta de investigación, la cual plantea un objetivo general y tres objetivos específicos.

En el capítulo dos, se muestran los elementos teóricos de la TAD: los conceptos de praxeología y organización matemática. Estas son la base estructural de esta investigación, ya que proporcionan las herramientas necesarias para un adecuado análisis de las tareas propuestas en el libro de texto. También se explicarán los criterios de completitud de Fonseca (2004), criterios que revelarán qué tan completa es la organización matemática propuesta en el libro. Por último, se describirá un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), además de explicar de qué se conforma y cuál es su fin dentro del análisis de la organización matemática propuesta en el libro de texto.

El capítulo tres procederá con la elaboración de un MER de la integral definida, el cual constará primero de un análisis histórico epistemológico. En efecto, se hará una revisión histórica desde Arquímedes hasta Lebesgue, identificando las tareas que se fueron desarrollando a través de los años y que permitieron la evolución de la integral definida de ser solo un método para hallar áreas hasta convertirse en un concepto matemático con fundamentos rigurosamente probados. Se analizarán seguidamente los usos de la integral definida en cursos de las carreras de Ingeniería. Finalmente, a modo de ejemplo, se mostrará una aplicación extramatemática, que se propone en Stewart (2012).

En el capítulo cuatro, se realizará el análisis del libro de texto *Tópicos de cálculo volumen II* de Mitacc y Toro (2009), mediante la metodología de Almoloud (2015). En primera instancia, se analizará el momento de la publicación del libro, la representatividad de la obra, su estructura, y se realizará el análisis ecológico. Posteriormente, se efectuará el análisis praxeológico, el cual parte del capítulo dos. En este, se identifican los tipos de tarea, técnicas y tecnologías envueltas en la organización matemática; a continuación, se evalúan los tipos de tareas, técnicas y tecnologías. Por último, por medio de los indicadores de Fonseca (2004), se valorará la completitud de la organización matemática encontrada en el libro de texto.

En el capítulo cinco, se encuentran las conclusiones, las cuales hacen un recuento del cumplimiento de todos los objetivos específicos, y se ofrecen unas consideraciones finales y sugerencias para futuras investigaciones.

Por último, se incluye el listado de todas las referencias bibliográficas usadas en esta investigación.

Capítulo I: Problemática

En este primer capítulo, se presentarán las investigaciones que conforman los antecedentes de esta investigación y la justificación del presente trabajo. Seguidamente, se planteará la pregunta de investigación, y se establecerán el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 Antecedentes

Las búsquedas de estas investigaciones en general se realizaron en el repositorio digital de tesis y trabajos de investigación de la PUCP y, posteriormente, en Google. En este, se usaron como búsqueda de palabras lo siguiente: integral definida, análisis de libros, praxeología y teoría antropológico de lo didáctico. Ello permitió encontrar trabajos de España, Brasil, México, Argentina, Chile, Colombia, Perú y Venezuela; toda la recopilación de estas investigaciones se realizó hasta el año 2022. Se encontraron en la búsqueda inicial muchas investigaciones en castellano que consideramos relevantes; asimismo, se complementó la búsqueda con tres investigaciones en inglés: Attorps et al. (2013), Burgos et al. (2021) y Wijayanti & Winsløw (2017), y dos en portugues, Vinícius (2010) y Mateus (2006).

El objeto matemático a estudiar en la investigación es la integral definida; los antecedentes encontrados, en una primera instancia, son con respecto a los problemas y dificultades que los alumnos cuentan al momento de aprender este objeto y a los métodos que son usados para mejorar la enseñanza de este concepto. En una segunda instancia, se buscaron trabajos en los que se hayan realizado análisis de texto con respecto a su enseñanza; posteriormente, después se buscaron con respecto a la enseñanza en libros de texto de algún otro objeto matemático en el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD). Estas abarcan desde el año 1997 hasta el año 2022.

Para el primer grupo, las referidas al objeto matemático, la integral definida, se consideran las investigaciones que están descritas en la Tabla 1.

Tabla 1. *Investigaciones en relación con el aprendizaje y la enseñanza de la integral definida.*

Autor	Titulo	Tipo	Año
Llorens, J. L. y Santonja, F.	Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral.	Artículo	1997
Muñoz, G.	Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.	Artículo	2000
Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S.	Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos.	Artículo	2007
Vinicius, M.	O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas.	Tesis	2010
Boigues, F., llinares, S. y Estruch, V.	Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy.	Articulo	2010
Aldana, E. y Gonzales, M.	Análisis de la comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría “APOE”.	Artículo	2011
Fernández, L.	La historia como herramienta didáctica: el concepto integral.	Tesis de maestría	2011
Porres, M.	Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.	Tesis doctoral	2011
Narro, P.S., Kanagúsico, M. y Marente, K.	Aprendizaje de la integral definida en estudiantes de Ingeniería.	Artículo	2011
Aldana, E.	Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría “APOE”.	Tesis doctoral	2011
Attorps, I., Björk, K. y Radic, M.	Varied Ways to Teach the Definite Integral Concept.	Artículo	2013
Nitti, L. y Álvarez, M.	Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática.	Propuesta	2014
Briceño, E., Hernández, J. y Muñoz, J.	Reflexión sobre la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología, una experiencia de aula en el nivel medio superior.	Artículo	2016
Porres, M., Pecharromán, C. y Ortega, T.	Aportaciones de DERIVE y del cálculo mental al aprendizaje de la integral definida.	Investigación	2017
Jiménez, M., Ruiz, E., y Montiel, A.	Análisis de la conceptualización de la Integral definida por medio de la teoría APOE.	Artículo	2018
Aldana, E., González M., López-Leyton,C.	El desarrollo del esquema de integral definida.	Artículo	2020

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J., Pérez, O.	Onto-semiotic Complexity of the Definite Integral. Implications for Teaching and Learning Calculus.	Artículo	2021

Fuente. Elaboración propia.

Se describirán las investigaciones resaltando aspectos importantes como el objetivo, metodología, marco teórico, resultados obtenidos y las conclusiones.

Llorens y Santonja (1997) resumen las deficiencias en el aprendizaje como sigue: "a) *Generalmente, los estudiantes identifican "integral" con "primitiva"*, b*) Las integrales "definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no pueda aplicarse* y *c) No se integra el concepto de área con el de integral*" (pp. 62-63). Los autores revisan los libros de texto y encuentran el origen de las deficiencias en el aprendizaje. Los autores también analizan la forma en que los maestros tratan de resolver esas dificultades en el aprendizaje y proponen una serie de acciones que podrían implementarse para mejorarlo. Finalmente, concluyen que los estudiantes, especialmente en la enseñanza secundaria, deben aprender a calcular a mano algunas primitivas sin olvidar que esa tarea la puede realizar una máquina; del mismo modo, deben saber aplicar la regla de Barrow correctamente sin ayuda tecnológica.

Muñoz (2000), a lo largo de su investigación y tomando como marco teórico la teoría de los campos conceptuales, trata de encontrar elementos que le permitieran entender la naturaleza de cómo es un procedimiento algorítmico en los problemas de cálculo integral y en las ecuaciones diferenciales ordinarias, y si este procedimiento está disociado de la conceptualización de la Integral.

Camacho et al. (2008) muestran las características de las respuestas que un grupo de estudiantes presentó al utilizar el programa para cálculo matemático (CAS) DERIVE cuando trabajaron un conjunto de prácticas de laboratorio para el aprendizaje del concepto de integral definida. Los autores concluyeron que cuando en el problema intervienen funciones continuas a trozos, presentan dificultades de interpretación. Ello muestra una falta de coordinación entre los diferentes sistemas de representación, ya sea cuando plantean su resolución o cuando calculan las integrales. Además, destacan que cuando los alumnos tienen que utilizar como límites de integración puntos en los que la función no es continua, cometen errores relacionados con una comprensión parcial del concepto de continuidad.

Vinícius (2010) desarrolló un proyecto para trabajar con alumnos de segundo año de un curso de Ingeniería. Dicho proyecto estaba apoyado en la historia de las matemáticas y en la resolución de problemas que involucraba las integrales de Riemann. Menciona que las actividades fueron invaluables para una revisión de conceptos, pulir el lenguaje matemático e, incluso, como una oportunidad para corregir o complementar conceptos mal formados acerca de la integral. Además, enfatiza que la historia de las matemáticas fue importante, porque permitió a los estudiantes adquirir los conocimientos de cómo surgieron, evolucionaron e implementaron las ideas que originaron la construcción del concepto de integral. Además, indica que la resolución de problemas demostró ser una forma eficiente de trabajar en el aula, en la búsqueda de soluciones. Esto llama la atención de los estudiantes sobre las ideas que surgen al tratar de resolver el problema y cómo brindar el significado apropiado a dichas ideas.

En otro estudio, Boigues et al. (2010) realizaron diversas actividades para estudiantes de escuelas de Ingeniería matriculados en asignaturas del tipo fundamentos matemáticos. El objetivo era ver en qué medida desarrollaron el esquema de integral definida. Para lograr este propósito, utilizaron la métrica Fuzzy, una medida de calificación que verificaba la manera en la que los estudiantes resolvían un conjunto de problemas. Los resultados obtenidos mostraron que, aunque los estudiantes comprendieron la idea de sumas de Riemann, tuvieron dificultad en establecer relaciones entre dicho límite de sumas y la idea de área bajo una curva. Indicaron que la gran mayoría emplea el concepto de sucesión como listado de elementos más que como una función dependiente del valor n de la partición. Ello, en definitiva, dificulta posteriormente relacionarla con las sumas de Riemann y el paso al límite que configura el significado de la integral definida.

Por su parte, Fernández (2011) comenta que la historia del concepto de integral como recurso didáctico debe estar presente en una unidad didáctica de cálculo integral, ya que muestra muchas situaciones y contextos que enriquecen el aprendizaje, lo dotan de sentido y constituyen un elemento motivador. Además, consideró que puede ser un elemento clave para dotar de coherencia a la unidad didáctica. La autora reflexiona que quizás los textos se centran excesivamente en el aprendizaje de hechos y destrezas, pero que está en poder del profesor modificar este modelo de enseñanza-aprendizaje. Esto se debe a que dispone de muchos recursos (GeoGebra, Internet, historia de las matemáticas y fenomenología, representaciones concretas, etc.) que pueden ayudar en la elaboración de nuevos materiales adaptados a sus propios criterios.

Porres (2011) realiza una tesis cuyo objetivo general es investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de bachillerato de Ciencias Sociales sobre la integral definida al integrar la docencia tradicional, el cálculo mental y las nuevas tecnologías. Al comenzar su análisis, divide la parte teórica en los siguientes apartados: el estudio de los antecedentes, la epistemología del área, y el cálculo integral y el análisis curricular del concepto integral (definida e indefinida) realizado en once libros de texto de matemáticas aplicados a las ciencias sociales. A su vez, en la parte experimental, trabaja los siguientes puntos: el aprendizaje de los estudiantes de conceptos inherentes a la integral definida (analizados mediante el establecimiento de categorías de comprensión matemática), la práctica del cálculo de primitivas elementales (realizados mediante el cálculo mental) y la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE para la resolución de tareas asignadas, cuyas respuestas son analizadas también mediante categorías de comprensión matemática. Concluye finalmente que los estudiantes de bachillerato de Ciencias Sociales han aprendido, aceptablemente, los conceptos inherentes a la integral definida, a pesar de su elevada dificultad.

También Narro et al. (2011) documentan el tipo de aprendizaje logrado por estudiantes de Ingeniería en relación con la integral definida. Las actividades que plantearon buscaban identificar si los estudiantes reconocen la integral en diferentes registros de representación, si pueden transitar entre estos registros y aplicarlo a la solución de problemas. Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes adquieren un aprendizaje algorítmico y memorístico. Agregan que los alumnos proceden algorítmicamente, sin reflexionar sobre la interpretación geométrica o algebraica del concepto ni poder aplicar dicha interpretación a la resolución de problemas. Concluyeron que el aprendizaje en los estudiantes es mecánico y que esto no les permitió en las actividades realizadas construir imágenes mentales que les permitieran relacionar los diferentes elementos matemáticos que conforman el concepto de integral definida. Proponen, con base en los resultados, una reestructuración del contenido programático del curso de Cálculo Integral, además de la implementación de metodologías de aprendizaje centradas en el estudiante, que faciliten la construcción de conceptos.

De la misma forma, Aldana (2011), en el marco de la teoría APOE[1], construyó una descomposición genética, la cual consistió en los siguientes elementos matemáticos: conocimientos previos, el área como aproximación, el área como límite de una suma, la integral definida, el teorema fundamental y la generalización del concepto de integral definida para funciones no estrictamente positivas y continuas. A través de esta descomposición, estudió el desarrollo del esquema del concepto de integral definida dentro de la asignatura universitaria de Cálculo Integral. Con base en las actividades desarrolladas acerca de la integral definida, el autor concluyó que los alumnos que provienen del bachillerato llegan a la universidad sin haber

[1] La sigla APOE viene de las palabras Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La teoría fue inicialmente desarrollada por Dubinsky en 1991 y se basa en la adaptación de algunas ideas del enfoque cognitivo de Piaget al pensamiento matemático avanzado (Aldana, 2011, p. 65).

estudiado dicho concepto. Así, se cuestiona sobre cómo se podría planear un diseño curricular que permita que dichos estudiantes puedan superar esta brecha, teniendo claros los conceptos previos y adquirir un aprendizaje duradero de aquellos elementos matemáticos que configuran el concepto de integral definida. Indica también que los resultados mostraron que los estudiantes tienen un pensamiento operatorio y algorítmico. Esto podría motivar en diseñar algún proceso de enseñanza que favorezca el uso de diferentes relaciones lógicas entre los elementos matemáticos analíticos que conforman la definición.

Posteriormente Aldana y González (2011), realizaron una investigación cuyo objetivo general fue determinar el grado de desarrollo del esquema del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE de estudiantes que cursaban tercer año de licenciatura de Matemáticas y estudiaban por primera vez el concepto de integral definida. Este objetivo general se concretó con tres específicos: identificar el grado de comprensión del concepto de integral definida en los estudiantes, mediante la triada APOE (intra, inter, trans); describir el tipo de relaciones que establecen los alumnos entre los elementos matemáticos, que constituyen el concepto de integral definida; y establecer las formas de representación gráfica o algebraica usadas por los alumnos para resolver tareas relacionadas con dicho concepto. Para establecer los elementos matemáticos mencionados en los objetivos específicos, los autores realizaron un estudio de libros de texto, y concluyeron que los elementos matemáticos más habituales en estos configuran el concepto de integral basados en cinco bloques temáticos: el área como aproximación, el área como límite de una suma, la integral definida, las propiedades de la integral definida, y los teoremas fundamentales y del valor medio. En síntesis, concretaron que, en cuanto a los sistemas de representación, al determinar el área de los rectángulos superiores o inferiores, los estudiantes no fueron capaces de identificar la altura de los rectángulos a partir de la gráfica propuesta y de la expresión algebraica que representaba la función; en efecto, aunque dibujaban rectángulos inferiores, las áreas las calculaban para rectángulos superiores; por ello, no lograron coordinar el registro gráfico con el algebraico.

Otro aspecto relevante es la investigación de Attorps et al. (2013). Ellos explican que algunos estudiantes tienen dificultades en resolver problemas que requieren la capacidad de ver la integracion como un proceso de limite de sumas. Averiguaron que, aunque algunas habilidades para calcular integrales definidas pueden ser muy vistosas, su entendimiento del concepto es deficiente; además, verificaron que la mayoría de los estudiantes no pueden escribir claramente la definición de la integral definida, lo que genera dificultades en desarrollar un sólido entendimiento conceptual. Los autores investigan si es posible que, mediante el uso del GeoGebra, se puedan diseñar secuencias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a mejorar la comprensión conceptual de la integral definida. Para esto, se realiza una primera conferencia a un grupo de estudiantes que previamente realizaron un examen de entrada; posteriormente, al final del evento, se realiza otro examen. Se evalúan los exámenes y se verifica si la conferencia fue suficiente para el completo aprendizaje del concepto. Si no fue así, se realizan nuevos cambios al plan de enseñanza, además de otra conferencia hasta completar tres. En estas, participan tres profesores más un cuarto profesor, que analiza los resultados. Los autores concluyen que no son muy satisfactorias y que se requieren más investigaciones para identificar qué otros factores, aparte de la tecnología y una metodología de enseñanza-aprendizaje, pueden beneficiar tanto estudiantes como profesores.

Se han hecho propuestas de enseñanza como la de Nitti y Álvarez (2013), quienes presentaron una propuesta para la integral definida y la función integral, orientada para alumnos de profesorado de matemática. Mencionan que dicha propuesta estuvo motivada, principalmente, en que muchos autores formulan integrales a partir del concepto de función primitiva, mientras que otros lo plantean de manera independiente. El trabajo se desarrolla priorizando la línea histórica. Es decir, en una primera etapa de la propuesta, el concepto de integral se estudia independientemente del concepto de derivada. Con esto, se pretende hacer una secuencia temática en el que prevaleciera la claridad conceptual y relacional tanto como la intuición y la visualización. Esto desde la utilización de conceptos, propiedades y procedimientos conocidos. Se realiza también una revisión bibliográfica de investigaciones vinculadas a los enfoques sobre el estudio del tema integrales. Además, proponen una secuencia temática, que enfatice los problemas de exploración, vinculados al cálculo de integrales definidas y acerca de construcciones dinámicas, las cuales se pueden crear con el software GeoGebra. Esto aumentaría significativamente la interacción de los distintos marcos: geométrico, numérico y analítico.

En el articulo de Briceño et al. (2016), se hacen diversas reflexiones sobre cómo incorporar la tecnologia en el aula para la enseñanza de la integral definida. Los autores encuentran que algunos docentes no quieren implementar la tecnología, ya que prefieren mantener el método de enseñanza tradicional, por lo que resulta complicado efectuarla. También descubren que otros docentes se concentran más en enseñar el uso del software que centrarse en el concepto de la integral definida. Refelexionan, asimismo, sobre la manera más conveniente de aleccionar la integral definida usando la tecnologia. Así concluyen que, resulta indispensable planificar la incorporacion de la tecnologia de la manera más óptima para vincularse con el aprendizaje del objeto de estudio de esta investigación.

Porres et al. (2017) indican que con la idea de verificar los beneficios del uso del DERIVE y del cálculo mental en la enseñanza de la integral definida, se desarrollaron diversas actividades en las cuales participaron alumnos de segundo año de bachillerato de Ciencias Sociales del Instituto de Enseñanza Secundaria Félix Rodríguez de la Fuente (Burgos). Los resultados arrojan que, si los alumnos construyen sumas de Darboux y Riemann con un programa informático; por ejemplo, el DERIVE les permitiría reforzar la comprensión del concepto de integral definida. Con respecto al cálculo mental, destacan beneficios como la seguridad en el manejo de datos y resolución de problemas, la habilidad para realizar estimaciones y, sobre todo, la autoconfianza para abordar situaciones matemáticas. Concluyeron que se puede considerar que los programas de cálculo simbólico son un instrumento válido y eficaz para el aprendizaje de la integral definida, cuando los usuarios de estas, alumnado y profesorado, son críticos con las respuestas obtenidas. Aparte, añaden que la integración de la metodología del software DERIVE y de cálculo mental con la metodología habitual del aula enriquece la enseñanza, facilita la comprensión del concepto de integral definida y motiva los aprendizajes.

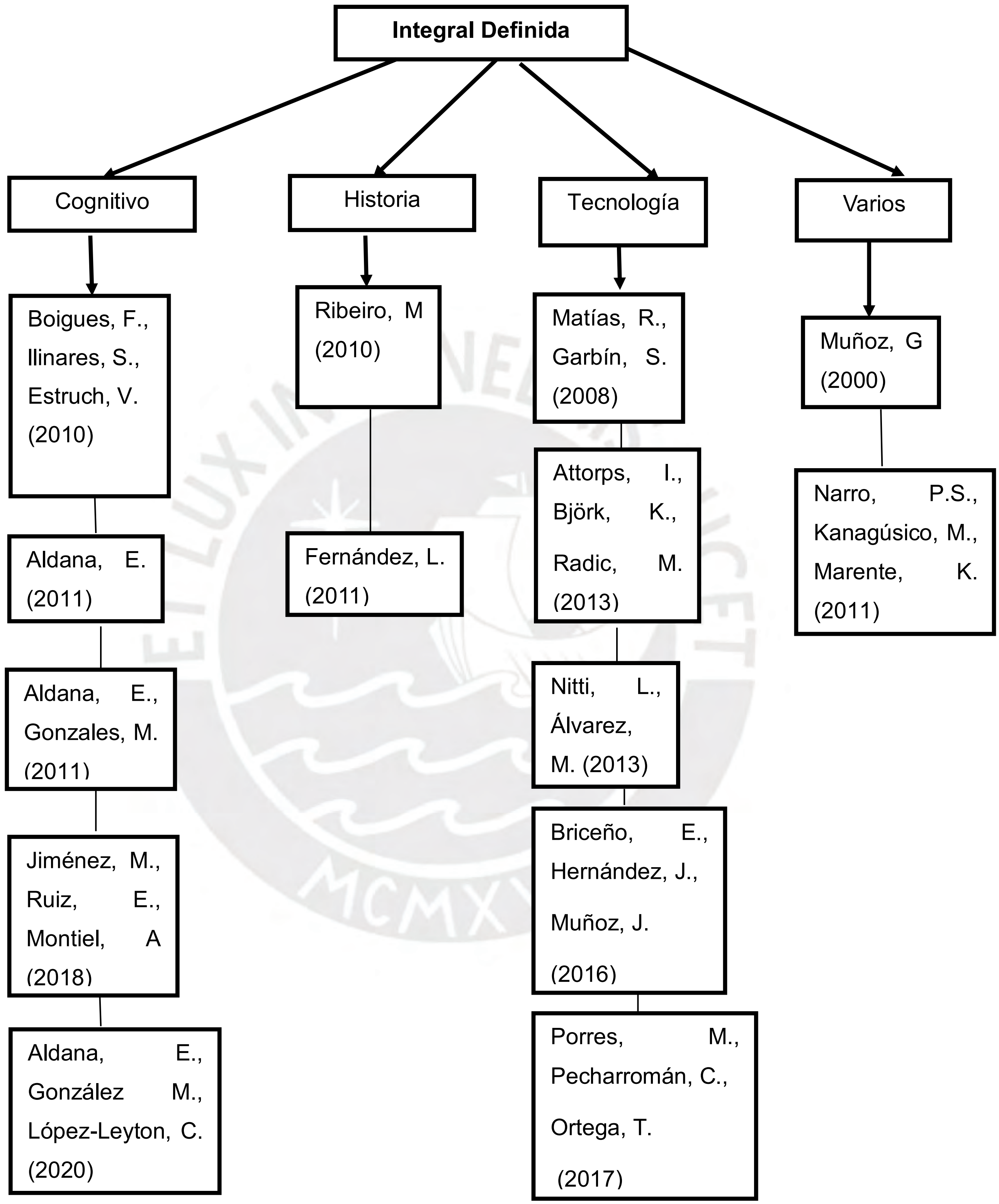
En Jiménez et al. (2018) se busca identificar, mediante la resolución de actividades, en qué etapas de entendimiento del concepto de integral definida se encuentran los estudiantes, de acuerdo con la teoría APOE. Con ello, se proponen tareas que involucren este concepto y que vayan acordes con la etapa en la que se encuentre el estudiante. Luego de las actividades, señalan que el aprendizaje de la integral definida se ha caracterizado por la memorización de fórmulas y el uso de reglas que el estudiante repite sin una comprensión real; por tanto, este no es capaz de reconocer situaciones problema relacionadas con ella y mucho menos enfrentarlas con éxito. Mencionan, además, que aquellos que ingresan a la universidad se encuentran en diferentes etapas de construcción del concepto mencionado; dichas etapas están asociadas, principalmente, a la comprensión de la integral definida como área mediante la aplicación de la regla de Barrow, pero con un paupérrimo nivel de comprensión del concepto, como el límite de una suma de cantidades formadas multiplicativamente (suma de Riemann).

Aldana et al. (2020), en su artículo, investigan la comprensión del concepto de integral usando la teoría APOE; mediante el análisis de las tareas propuestas, determinan los diferentes niveles de desarrollo del esquema en que se encuentran los estudiantes. Concluyen que el conocimiento es progresivo y continuo, y el paso de un nivel a otro se logra, a través de las relaciones lógicas que los estudiantes van estableciendo entre los elementos matemáticos que conocen y de la forma como estos elementos son utilizados para resolver las tareas propuestas. La comprensión del concepto de integral definida, según los autores, se relaciona con procesos cognitivos: la abstracción, representación, entre otros, propios de las matemáticas superiores que se enseñan, y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en el ámbito universitario.

Burgos et al. (2021) analizan la complejidad de la integral de Riemman en el estudio de la práctica matemática y subrayan la tensión dialéctica entre el significado formal e intiutivo de la integral definida. El objetivo del artículo fue comprender los diversos significados del objeto de estudio y los potenciales conflictos semióticos a partir de los datos aportados. Analizaron dos libros de texto: el primer libro centra la atención en un primer significado intuitivo, que implicó principalmente conocimientos aritméticos; en el segundo, su enfoque estuvo en el significado formal de integral definida como límite de las sumas de Riemann. Ambos significados son predominantes en las directrices curriculares. Los autores indican que el analisis del significado intuitivo de la integral definida reveló que un primer encuentro con la integral es posible seleccionando un problema-situacion introductorio que pueda ser solucionado con una secuencia de pasos que involucren objetos aritméticos y procedimientos. Mencionan que el proceso de obtener la suma de una secuencia de productos de cantidades infenitesimales resulta muy extenso. Señalan que, aun así, es necesaria la maestría en el uso de herramientas algebraicas para expresar la generalidad de conceptos matemáticos. Agregan que el análisis ontosemiótico del significado formal algebraico de la integral definida, como límite de la suma de Riemann, reflejan lo relevante del conocimiento, habilidades y entendimiento de los procesos involucrados. Reconocen que, en un primer encuentro, con la integral definida se pueden implementar medios de expresión no algebraicos, lo que resulta un evento epistémico de interés educativo. Comentan también que, para tener una buena comprensión de la integral definida, los estudiantes deben realizar conexiones entre los conceptos, como las sumas de Riemann, límites, derivadas, área y muchos otros. Concluyen que la investigación encontró que el conocimiento de los estudiantes solo se limitaba al procedimental, y que tenían dificultades para relacionar entre las diferentes representaciones de la integral definida.

A modo de resumen, se presenta en la Figura 1 un esquema en el que se muestra una clasificación de los antecedentes sobre la integral definida en cuatro grupos.

Figura 1. *Investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza de la integral definida.*



Fuente. Elaboración propia.

En el primer grupo, se encuentran las de tipo cognitivo, aquellas investigaciones en el marco de la teoría APOE. Aquí los autores buscan determinar el grado de comprensión de los estudiantes acerca del concepto de integral definida. En el segundo grupo, se encuentran las que utilizan la historia como herramienta para enseñar el concepto de integral definida. En el tercer grupo, analizan los beneficios de incorporar herramientas tecnológicas como el DERIVE o el GeoGebra en la enseñanza de la integral definida. En el último grupo, existen dos investigaciones: la de Muñoz (2000). que trata de establecer una relación entre lo algorítmico y lo conceptual al momento de plantear problemas sobre la integral definida, y, en la segunda, a Narro et al. (2011), quienes documentan el tipo de aprendizaje logrado por estudiantes de Ingeniería en relación con la integral definida.

Para las investigaciones con relación a la enseñanza de la integral definida en libros de texto, se consideran los autores descritos en la Tabla 2. Algunos ya se mencionaron, por lo que esta vez se tomará en cuenta cómo realizaron el análisis de libros de texto en su investigación. Se concentrará, para estas investigaciones, solo el marco teórico y metodológico.

Tabla 2. *Investigaciones con relación a la enseñanza de la integral definida en libros de texto.*

Autor	Titulo	Tipo	Año
Llorens, J. L., Santonja, F.	Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral.	Artículo	1997
Porres, M.	Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.	Tesis doctoral	2011
Aldana, E.	Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría “APOE”	Tesis doctoral	2011
Gonzales, W.	Praxeologías sobre la integral definida en la Formación de un ingeniero químico	Tesis	2020
Burgos, M., Bueno, S., Godino, J., Pérez, O.	Onto-semiotic Complexity of the Definite Integral. Implications for Teaching and Learning Calculus	Artículo	2021

Fuente. Elaboración propia.

Llorens y Santonja (1997), al hacer una revisión de libros de texto, indican que, en primer lugar, la secuencia de contenidos de los libros en el apartado de cálculo integral es siempre la misma. El orden es el siguiente: cálculo de primitivas; métodos de integración; la integral definida; regla de Barrow; aplicaciones de la integración, cálculo de ´áreas y volúmenes. En segundo lugar, la gran mayoría de los textos de bachillerato forzaba el formalismo cuando se referían al concepto de integral. Los autores muestran parte de la definición formal de la integral de Riemann e indican lo contraproducente que esto resulta en ayudar a comprender dicho concepto, ya que las series numéricas que se muestran en la definición aún no han sido estudiadas por los alumnos, por lo que no las comprenderán. Finalmente, indican que en todos los textos se omite una revisión del concepto de área.

Porres (2011) menciona que de los once textos que analiza solo dos otorgan un tratamiento aceptable a las categorías sobre integral definida (aproximación a la integral definida, como área por rectángulos (sumas inferiores y superiores), aproximación a la integral definida por trapecios, integral de Darboux e integral de Riemann). También comentan que ninguno de los textos que construyen la integral de Darboux la menciona con su nombre; solo un texto expresa correctamente la integral de Riemann y que, por último, la categoría "aproximación a la integral definida por trapecios" solo está presente en dos textos.

Aldana (2011) realiza una revisión de libros de texto de bachillerato y de la universidad para saber cómo se presenta en ellos el concepto de integral definida y, así, determinar los elementos matemáticos que lo configuran. Los libros de texto escogidos pertenecían a editoriales de gran difusión a nivel de España. Fueron cinco textos de bachillerato y cinco de universidad analizados. En cada uno de los dos niveles educativos, se consideró cómo está organizada la unidad didáctica de la integral definida, qué conceptos se incluyen y qué tipos de problemas se presentan.

Burgos et al. (2021), en el marco del enfoque ontosemiótico (EOS), realizan un análisis con dicho enfoque en dos libros de texto. Primero analizan la presentación de la integral definida propuesta por Starbird (2006) e indican que puede considerarse como un encuentro informal con la definición; luego, analizan la definición general y formal de Stewart (2016), la cual es precedida por una previa contextualización basada en el estudio de problemas referidos al área y cálculo de distancias.

Para lograr la consecución del objetivo de su investigación y en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Gonzales (2020) identifica y realiza primero un análisis de la enseñanza de la integral definida en libros de matemáticas usados en la carrera de Ingeniería Química. Esto le permite entender el significado global de la integral. Después realiza el análisis de la enseñanza de la integral definida en libros de texto de cursos de la carrera de Ingeniería Química, ajenos al área de las matemáticas. Para este análisis, consultaron la opinión de los profesores de estos cursos. La finalidad fue recoger información sobre los usos de la integral definida; dicha información posibilitaría manifestar los significados, interpretaciones y argumentaciones que se le otorgan al objeto de estudio en los libros de texto de estos cursos. Posteriormente, se identificó el modelo praxeológico (tareas, técnicas, tecnología y teoría) referido a los usos de la integral definida en los libros de texto tanto de matemáticas como los de la carrera de Ingeniería Química. Finalmente, se comparan las praxeologías encontradas y se propone un modelo praxeológico para enseñar la integral definida a estudiantes de Ingeniería Química.

Para las investigaciones con relación al análisis de la enseñanza de otros objetos matemáticos en libros de texto, se consideraron los autores descritos en la Tabla 3. Las investigaciones han sido escogidas teniendo en cuenta que el marco teórico de su investigación fuera la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Tabla 3. *Investigaciones con relación a la enseñanza de otros objetos matemáticos en libros de texto.*

Autor	Titulo	Tipo	Año
Mateus, P.	Cálculo diferencial e integral nos libros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica	Tesis	2006
Gonzales, C.	Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario	Tesis	2014
Almouloud, S.	Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos	Artículo	2015
Wijayanti. D. y Winsløw. C.	Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion	Artículo	2017
Gomez, A.	Análisis de una praxeología matemática de las inecuaciones lineales en los libros didácticos de educación secundaria	Tesis	2018
Vargas, G.	Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria	Tesis	2019

Fuente. Elaboración propia.

Mateus (2006) analiza ocho libros de texto e investiga lo que sugieren acerca de la construcción de conceptos, y las estrategias que usan para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Utiliza la teoría de registros de representación semiótica para evaluar el grado de articulación entre los registros de representación semiótica, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para analizar el tipo de tareas, técnicas y el discurso teórico-tecnológico que las justifica y la teoría de situaciones didácticas para evaluar los contextos creados en la exposición de contenidos matemáticos de los libros de texto. En los resultados con respecto a la TAD, señalan que se trabaja más el bloque práctico-técnico que la combinación entre el bloque práctico-técnico y el tecnológico-teórico. Confirma la hipótesis de que el análisis de la organización praxeológica de los libros de texto puede ayudar a comprender las causas de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos que están en el cálculo diferencial e integral. Con respecto a las estrategias que usan para la enseñanza de la integral definida, señalan que los libros de texto brindan el concepto formalmente, a través de ejemplos, definiciones y otras propiedades, y que luego sugieren tareas de aplicación, que pueden incluir tareas de contexto.

En el marco de la TAD, Gonzales (2014) describe y analiza la enseñanza de los conceptos de escala y proporción en un libro de texto universitario. Menciona que la TAD le ayudó a describir la organización matemática (tareas, técnicas, tecnología y teoría). Indica que, a partir de la revisión y clasificación de un conjunto de investigaciones, pudo observar las dificultades en el aprendizaje y las estrategias aplicadas en la resolución de problemas relacionadas a su objeto de estudio. Esto le permitió elaborar criterios de análisis para analizar la organización matemática propuesta en el texto y que, gracias a dichos criterios, pudo observar que la organización matemática que presentaba el texto separaba el estudio clásico de la proporcionalidad con el de las relaciones funcionales. Menciona también que, con el análisis de la organización matemática, pudo identificar la técnica, la cual fue como una guía para identificar qué tareas y técnicas no estaban en el libro de texto. Destaca finalmente el papel de la TAD para su trabajo. Señala que las herramientas brindadas por este marco teórico fueron necesarias para describir y analizar el objeto matemático.

En el artículo de Ag Almouloud (2015) se explican algunos aspectos de la TAD y se presenta un modelo metodológico de análisis de libros didácticos construido a partir de esta teoría. Señala que los elementos de esta metodología deben permitir caracterizar un libro de texto, identificar el contexto de su producción y determinar la relación institucional, es decir, comprender si el objeto de conocimiento que enmarca una institución forma parte de las recomendaciones curriculares. A estos elementos se le suma el análisis de materiales didácticos. Dichos análisis consisten en la evaluación de las tareas/técnicas y tecnologías involucradas en las organizaciones matemáticas y didácticas propuestas por los autores de los materiales revisados. Finalmente, a modo de aplicación del método propuesto, analiza cómo se organizan las tareas propuestas en libros que abordan conceptos de geometría analítica para tercer año de secundaria.

Wijayanti y Winsløw (2017) presentan un método para el análisis de libros de texto, basado en el modelo praxeológico de referencia que está centrado específicamente en las tareas. Proponen la TAD, y especialmente la noción de praxeología y al modelo de referencia praxeológico como el modelo capaz de sistematizar y reproducir los recursos necesarios para analizar y sintetizar las cualidades de los libros de texto. Se hace especial énfasis en las tareas.

Este método implica que el contenido matemático de un libro de texto (o parte de un libro de texto) se analiza en términos de las tareas y técnicas que se exponen a los lectores; esto puede luego ser interpretado y complementado con una discusión de los aspectos discursivos y teóricos del texto. Los autores muestran las características metodológicas de este enfoque mediante el análisis de ejemplos y ejercicios de tres libros de texto indonesios, centrados en capítulos que tratan sobre la proporción o razón aritmética. Concluyen afirmando que su enfoque con la TAD muestra, de manera general, un análisis preciso con respecto al contenido matemático de ejemplos y ejercicios. Precisan que es realmente posible y útil en el análisis de libros de texto. Por último, menciona que su objetivo principal en este artículo es brindar una primera demostración de cómo la noción de modelo de referencia praxeológico permitió analizar el núcleo matemático de los libros de texto de una manera bastante objetiva y detallada.

Gomez (2018) presenta un trabajo de investigación cuyo objetivo es reconstruir y analizar la praxeología matemática presente en cada libro de texto de una colección didáctica, asociado a la enseñanza de las inecuaciones lineales, para estudiantes de nivel secundaria. Para la reconstrucción y el análisis de la praxeología matemática, se usó como marco teórico y metodológico la TAD; así mismo, se presentó un análisis del grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida con base en los indicadores propuestos por Fonseca (2004). Como resultado de su trabajo de investigación, describió las características del modelo epistemológico dominante presente en la colección de libros didácticos, en el cual el análisis praxeológico identificó el predominio de la resolución de inecuaciones mediante las técnicas algebraicas.

En la tesis de Vargas (2019) se estudian el seno y el coseno enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Mediante el análisis de documentos históricos, obras matemáticas y libros de texto, se construye un modelo praxeológico de referencia del seno y el coseno tanto en el triángulo rectángulo como en el plano cartesiano. Menciona que, al realizar el análisis, descubre que el modelo epistemológico dominante con respecto al seno y el coseno es la razón trigonométrica, a diferencia de otros investigadores que consideran las coordenadas en la circunferencia trigonométrica. Indica también que en el estudio realizado se ve que en el origen de la trigonometría están las identidades trigonométricas y que estas son la razón de ser del seno y el coseno, por lo que estas identidades deben ser consideradas en las organizaciones matemáticas a enseñar. Así mismo, señala que las identidades trigonométricas permiten comprender la potencialidad de ciertas técnicas y tecnologías que están asociadas. Sintetiza señalando que el modelo praxeológico de referencia muestra una diversidad interesante de organizaciones matemáticas que pueden ser articuladas precisamente a través de las identidades trigonométricas.

1.2 Justificación

Se consideran dos aspectos: la justificación académica y profesional.

Justificación académica

Basado en las investigaciones presentadas en los antecedentes, se puede afirmar lo siguiente:

Con respecto a la importancia de la integral definida, Aldana (2011) indica que su comprensión es importante, ya que, además de estar incluido en el currículo de diversas carreras universitarias, es uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático (p. 20). Indica, además, que su aprendizaje moviliza diversos procesos cognitivos característicos del pensamiento matemático avanzado: analizar, demostrar, generalizar, entre otros (Aldana, 2011, p. 17). Por su lado, Camacho et al. (2008) afirman que, gracias a la integral definida, los estudiantes de Ingeniería pueden abordar una variedad de problemas a lo largo de su carrera universitaria, ya que está presente en diversos contenidos. Por lo tanto, es necesario que tengan una sólida comprensión de este concepto (Camacho et al., 2008, p. 34). Porres (2011) indica que uno de los contenidos curriculares que, sin duda, merecen una atención especial es la integral definida, ya que, desde su experiencia con estudiantes de bachillerato de Ciencias Sociales, presentan numerosas y profundas dificultades en su aprendizaje.

Con respecto a los problemas en el aprendizaje de la integral, Llorens y Santonja (1997) indican que el aprendizaje es deficiente en la mayoría de los estudiantes universitarios. Ello se demuestra al momento en que calculan primitivas y utilizan de manera indiscriminada la regla de Barrow (p. 61).

Con respecto a la enseñanza del cálculo integral, Muñoz (2000) menciona que hay un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, ya que los estudiantes aprenden a calcular integrales sin comprender los conceptos involucrados y, por tanto, solo a través de la ejercitación. Comenta también que, en la universidad, la enseñanza del cálculo se centra solo en prácticas algorítmicas y algebraicas, y que solo se evalúan las competencias adquiridas en estos dominios (p. 132). Porres et al. (2017) encontraron que, para obtener una mejora real de la docencia, no solo basta con plantear una secuencia didáctica, sino que el profesor debe conocer también las dificultades de comprensión asociadas al aprendizaje de los conceptos.

En este trabajo de investigación, se analizará la integral definida en un libro de texto. Con respecto a la importancia de este análisis, Aldana (2011) destacó que, en todos los libros de texto que analizó, los autores trabajaron la integral definida sobre la base de la integral de Riemann. Además, con respecto a la organización de la estructura curricular de la unidad didáctica sobre la integral definida, notó que se constituía de exposiciones de temas, ejemplos y una gran variedad de ejercicios de aplicación teórica y procedimental. Por su parte Gonzales (2020), revisó libros de texto sobre cálculo, con el fin de identificar las definiciones, propiedades y teoremas, así como los ejemplos, problemas y ejercicios que se plantearon. Junto con sus métodos de solución, constituyó la parte principal de su análisis. Los diferentes usos que se le otorga a la integral definida en los libros de la carrera de Ingeniería Química fueron uno de los ejes principales de su investigación.

Sobre la importancia de la TAD como marco teórico para analizar libros de texto, Wijayanti y Winsløw (2017) indican que, sobre el contenido y detalle de las tareas (ejemplos, problemas y ejercicios mencionados en el párrafo anterior), es aceptado entre los profesores de matemáticas e investigadores que tienen un efecto significativo en el aprendizaje. Agregan que, al elegir un libro de texto, deben tener un especial interés en el contenido y calidad de las tareas expuestas o propuestas en el libro. A su vez, proponen la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y especialmente la noción de praxeología y al modelo de referencia praxeológico, como el modelo capaz de sistematizar y reproducir los recursos necesarios para analizar y sintetizar las cualidades de los libros de texto, con especial énfasis en las tareas. El enfoque con la TAD puede ayudar a examinar el nivel práctico de ejercicios y ejemplos, aspecto crucial para la actividad matemática, y que esto puede apoyar y ser útil a los estudiantes. Mateus (2006), por su parte, indica que el análisis de la organización praxeológica de los libros de texto puede reforzar la comprensión de las causas de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral, y puede proporcionar algunas actitudes hacia su uso correcto y creativo. Chevallard (1999) menciona que por organización didáctica se entenderá, pues, *a priori*, al conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta, o llamarlo, de forma general, como organización praxeológica. Por otro lado, añade que, en particular, cuando el foco de estudio sean objetos matemáticos, se tratará de organizaciones matemáticas.

Justificación Profesional

Para el estudio de la integral, es necesario tener el conocimiento de área, el cual, en el sistema escolar peruano, inicia como el estudio de áreas de figuras geométricas y se encuentra en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) en la competencia 26: "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización" (CNEB, 2016, p. 144). En efecto, para llegar al nivel 6 de los estándares de aprendizaje de la competencia, el alumno "selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas…" (CNEB, 2016, p.147).

En el sistema universitario peruano, en el área de ingenierias, es parte de la malla curricular el estudio de las integrales, como figuran en los sílabos de los cursos de distintas carreras de dicho tipo, por ejemplo, en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), específicamente en el curso de Cálculo II para estudiantes del segundo ciclo; en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional Federico Villareal (UNFV), el curso de Cálculo Diferencial e Integral II del segundo ciclo; en las carreras de Ingeniería de la Pontificia Universidad católica del Perú (PUCP) en el curso de Cálculo Integral para estudiantes del tercer ciclo; en la carrera de Ingeniería de la Universidad ESAN en el curso de Cálculo II para estudiantes del tercer ciclo; y en la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) en el curso de Cálculo Integral para estudiantes del segundo ciclo.

En general, en la enseñanza universitaria, los temas tratados de cálculo, como los límites, derivadas e integrales, son enseñados en el primer año de estudios universitarios y son de mucha importancia en la formación académica de los estudiantes. En nuestros antecedentes, desde diferentes posturas teóricas, se reportan dificultades presentadas por los estudiantes, cuando abordan el aprendizaje del concepto de integral definida (Camacho et al., 2008; Boigues et al., 2010; Narro et al., 2011; Aldana y González, 2011; Attorps et al.,2013). Estas investigaciones sobre la integral definida revelan la existencia de dificultades en el aprendizaje y comprensión de este concepto, así como la necesidad de un mayor estudio en este campo. Al igual que Aldana (2011) y Aranda (2015), se considera que el análisis matemático contiene conceptos y procedimientos difíciles para los alumnos, los cuales son necesarios investigar para que puedan transmitirse bajo los parámetros de una enseñanza de calidad y que propicien un aprendizaje adecuado a fin de que perdure en los alumnos el mayor tiempo posible.

En línea con lo mencionado, se considera que está justificado analizar un texto de cálculo, en el que se enseñe la integral definida. Esto permitirá conocer la manera en cómo está estructurada y articulada dicha organización. Asimismo, dejará ver sus tareas y presenciar si sus técnicas van evolucionando. También se podrá valorar sus tareas y observar qué tan completa es la propuesta. En consecuencia, entre los diversos marcos teóricos, se ha elegido la Teoría

Antropológica de lo Didáctico (TAD) para analizar un libro de texto, ya que permitirá realizar lo señalado de una manera eficiente.

A continuación, se presentarán la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

1.3 Problema de investigación, objetivo general y objetivos específicos

Pregunta de investigación: ¿cuál es la organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto de Cálculo 2, para estudiantes del segundo ciclo de una carrera de Ingeniería y qué tan completa es dicha organización matemática?

Objetivos de la investigación

Se considerarán los siguientes objetivos:

Objetivo general

Analizar y valorar una organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto de Cálculo 2 para estudiantes del segundo ciclo de una carrera de Ingeniería.

Objetivos específicos

- Identificar y describir una organización matemática de la integral definida por medio de un modelo epistemológico de referencia.
- Analizar la organización matemática de la integral definida presente en el capítulo del libro de texto para estudiantes del segundo ciclo de una carrera de Ingeniería.
- Valorar la completitud de las tareas realizadas en el capítulo acerca de la integral definida con los indicadores de completitud de Fonseca.

Capítulo II: Aspectos teóricos y metodología

En este capítulo, están presentes los elementos teóricos de nuestra investigación, los cuales están fundamentados en algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). También están presentes los indicadores de completitud propuestos por Fonseca (2004), los cuales ayudarán al análisis de las praxeologías matemáticas. La metodología de investigación, por su parte, está adecuada al modelo de análisis de libros didácticos presentado en Almouloud (2015) y fundamentado en la TAD.

2.1 La Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propuesta por Chevallard (1999), indica que la actividad matemática está posicionada en el ámbito de las actividades humanas y de las instituciones sociales. Así, el postulado que fundamenta la TAD es que “toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de praxeología” (Chevallard, 1999, p. 221)

Con respecto a qué es una praxeología, Chevallard (2006) señala que “es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general” (p.23). No obstante, para saber con exactitud qué es una praxeología, el autor señala que uno se puede guiar de su etimología, la cual indica que el análisis de cualquier acto humano puede generarse en dos componentes interrelacionados: la praxis, que se refiere a la parte práctica; el logos, palabra griega, que se ha utilizado de manera constante para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano (Chevallard, 2006, p. 23).

Se detallará, a continuación, cada uno de las componentes que conforman una praxeología u organización praxeológica.

2.1.1 Elementos de las organizaciones praxeológicas

Tomando como base el trabajo de Chevallard (1999), se procederá a describir cada uno de las componentes de una praxeología.

Tipos de Tareas (T)

La noción de tareas y tipos de tareas se encuentran en raíz de la de praxeología. Un tipo de tareas **T** es un conjunto conformado por una o más tareas. En la mayoría de los casos, una tarea y aquellas asociadas son expresadas por un verbo, como calcular, analizar, desarrollar etc., (p. 221).

Subtipo de tareas (t)

Chaachoua y Bessot (2019) indican, además, que, si se consideran dos tipos de tareas $\mathbf{T_1}$ y **T**, tal que $\mathbf{T_1}$ está incluido en **T**, se afirma que este conjunto de tareas $\mathbf{T_1}$ se considerará como un subtipo de tareas (**t**).

Técnica (τ)

La técnica será la manera de realizar las tareas que conforman los tipos de tareas. La técnica τ, junto con el tipo de tareas **T**, conforma el bloque práctico-técnico de una praxeología matemática; además, una técnica puede ser superior a otra y su naturaleza no deber ser necesariamente algorítmica (Chevallard, 1999).

Tecnología (θ)

Chevallard (1999) también menciona que la tecnología θ es el discurso racional de la técnica, cuyo primer objetivo es la justificación de la técnica, es decir, asegurarse de que esta pueda realizar las tareas que conforman el tipo **T**. El segundo objetivo de la tecnología es la de explicar y hacer clara la técnica, con el fin de exponer por qué es correcta. Finalmente, el tercer objetivo de la tecnología es la producción de nuevas técnicas (pp. 224 -225).

Teoría (Θ)

Es un nivel superior de justificación-explicación-producción, que, en relación con la tecnología, presenta un rol que esta última tiene respecto a la técnica (p.225).

Es así como las nociones de tipos de tarea, técnica, tecnología y teoría en la TAD permiten modelar la actividad humana, en general, y de forma particular la actividad matemática (Almouloud, 2015).

2.1.2 Elementos teóricos adicionales de la TAD

Otros elementos teóricos de la TAD de interés para esta investigación son estas:

Institución

Una institución es una organización social que se caracteriza por su estabilidad, en la que, al cumplir ciertas restricciones, puede realizar ciertas actividades sociales; estas actividades son posibles porque dicha organización social puede proporcionar recursos materiales, organizativos y cognitivos (Castela, 2016).

Sujeto

El sujeto, por su parte, es aquel que participa en dichas actividades. Cabe aclarar que no es un individuo en particular, sino uno que representa una posición caracterizada por tener un conjunto de actividades, expectativas y restricciones dentro de la institución (Castela, 2016).

Almouloud (2015) indica, por otro lado, que la institución donde se encuentra el conocimiento relacionado a cierto objeto matemático llega a ser su hábitat y que la función del objeto en la institución, es decir, el nicho de este será determinado por este conocimiento relacionado (p. 11).

Pregunta generatriz y Recorridos de estudio e investigación (REI):

La pregunta generatriz es una pregunta que, según Chevallard (2004), al no tener una respuesta inmediata permitirá formular subpreguntas, las cuales serán denominadas preguntas derivadas. Esta pregunta generatriz permitirá generar los REI.

La búsqueda de respuestas a las preguntas derivadas conducirá a la construcción o reconstrucción de un conjunto de praxeologías y remitirá al investigador a la búsqueda de información; dicha información será analizada, evaluada y permitirá, finalmente, la construcción de respuestas (Chevallard, 2012).

Finalmente, Almouloud (2010) indica que la TAD ha hecho un aporte importante a la didáctica de las matemáticas por enfocarse en el análisis de organizaciones praxeológicas y didácticas pensadas para su enseñanza y aprendizaje.

2.1.3 Organización Matemática

Chevallard (1999) menciona que, *a priori*, se entenderá por organización didáctica al conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., que se movilizan para el estudio concreto de una institución determinada. La organización didáctica es una organización praxeológica y si el foco de estudio son las matemáticas, se departirá organizaciones o praxeologías matemáticas (p. 238).

Bosch et al. (2004) indican que es factible que toda actividad matemática institucional pueda ser analizada en función de praxeologías matemáticas de complejidad creciente.

Niveles de las praxeologías u organizaciones matemáticas

A partir de los trabajos de Chevallard (1999) y Bosch et al. (2006), se pasará a describir los componentes de una praxeología matemática de acuerdo con su grado de complejidad.

- **Praxeología Matemática Puntual (PMP)**: aquella praxeología que corresponde a un único tipo de tareas T y está definida a partir del bloque práctico-técnico [T/τ].
- **Praxeología Matemática Local (PML)**: resulta de integrar diversas praxeologías puntuales; cada PML se centra sobre una tecnología θ determinada $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$.

Generalmente, el fin de esta integración, según Fonseca (2004), es para responder a diversas problemáticas que las PMP no han podido resolver completamente.

• **Praxeología Matemática Regional (PMR)**: aquella que se obtiene mediante la coordinación, articulación e integración alrededor de una teoría matemática común Θ [T_{ij} / τ_{ij} / θj / Θ].

• **Praxeología Matemática Global (PMG)**: surgen cuando se agregan diversas praxeologías regionales a partir de la integración de distintas teorías [$T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k$].

2.1.4 Completitud de las praxeologías matemáticas

Lucas (2010) indica que la descripción estructural de una organización matemática debe completarse con el análisis de la dinámica interna, y de su origen y desarrollo en una institución presentada. Fonseca (2004) establece que las organizaciones matemáticas deben poseer características que les permitan integrarse en una organización matemática local (OML) y que los sistemas de enseñanza deberían procurar reconstruir al menos una OML. Corica y Ferrari (2020) indican que lograr cumplir con estas características presenta cierto grado de completitud de las OML.

Fonseca (2004) propone siete indicadores que permiten analizar el grado de completitud de una praxeología. Se expondrán tomando en cuenta sus componentes, la relación entre ellas y sus características.

1. **Integración de los tipos de tareas y de los vínculos existentes entre ellas.** En una PML, conviven varios tipos de tareas que se relacionan entre sí, ya sea por un discurso tecnológico o mediante sucesivos desarrollos de las técnicas. Una PML será más completa cuando los tipos de tareas sean concretas, esto es, que se puedan realizar mediante técnicas que estén relacionadas mediante algún elemento tecnológico.
2. **Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.** Una PML será más completa en la medida que existan técnicas alternativas (estas variaciones pueden ser de una misma técnica) para realizar algunos de sus tipos de tareas. Este indicador señala, además, que deben existir los elementos tecnológicos que cuestionen las distintas técnicas alternativas, discernir cuál es la más económica o fiable, y analizar sus equivalencias o diferencias.
3. **Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.** Bosch y Chevallard (1999) señalan que los objetos ostensivos son aquellas palabras, gráficos o escrituras que evocan o invocan a un objeto no ostensivo, por ejemplo, las ideas o conceptos (p. 90). Las técnicas utilizadas para ser flexibles deben permitir no solo el uso de diferentes representaciones, sino también la existencia de criterios explícitos

que permitan elegir la representación más adecuada. Para ello, se considera siempre la actividad matemática, en la que se hayan inmersas estas técnicas.

4. **Existencia de tareas y de técnicas "inversas".** La flexibilidad de las técnicas lo indica también el hecho de que existan en la PML técnicas "reversibles". Esto implica técnicas que permiten resolver un tipo de tarea y también a la inversa, en otras palabras, una tarea que pueda ocurrir, por ejemplo, intercambiando los datos y las incógnitas del problema o, a partir de la respuesta, analizar la situación de partida.
5. **Existencia de tareas matemáticas "abiertas".** Las tareas abiertas son situaciones, en las que los datos y las incógnitas no están prefijados totalmente de antemano. En un primer nivel de las tareas abiertas, los datos se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no como valores concretos, sino como las relaciones que se establecen entre ellos. En un segundo nivel, el estudiante debe decidir qué datos utilizar y cuáles son las incógnitas de una situación matemática o extramatemática determinada. Es aquí donde se incluyen las tareas de modelización.
6. **Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.** Debe existir un tipo de tarea que pida y permita al alumno interpretar el funcionamiento de una técnica para, *a posteriori*, percibir su beneficio matemático o ventaja en relación con otras.
7. **Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.** Un indicador importante del grado de completitud de una PML es en qué medida la tecnología permite construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas de una PML.

La noción de completitud es relativa: no sería pertinente afirmar OML completas o incompletas. Existen OML más completas que otras dependiendo del grado en que sus componentes cumplan las condiciones descritas por los indicadores (Bosch et al., 2004).

2.1.5 Modelo Epistemológico de Referencia.

Al formular un problema didáctico, el experto utiliza, aunque no necesariamente de manera explícita, un modelo epistemológico, es decir, una descripción y una interpretación del ámbito matemático en juego. Este modelo se llama Modelo Epistemológico de Referencia (MER) y solo tiene un carácter provisional; con base en este modelo, puede deconstruir y reconstruir las praxeologías, cuya difusión interna o externa a una institución pretende analizar (Gascón, 2011, p. 208).

Trigueros (2019), por su parte, menciona que el MER es un modelo que se describe en términos de praxeologías y que busca guiar el análisis de la actividad matemática de una institución.

Por su parte, García et. al (2019) indican que elaborar un MER es un trabajo complejo y laborioso, pues involucra el estudio y cuestionamiento de una variedad de fuentes de información: “fuentes sabias”, con las que se acceden a las matemáticas de las instituciones que generan conocimiento de esta disciplina; “fuentes escolares”, con las que se pueden conocer a las matemáticas de las instituciones que se encargan de la enseñanza de estas. En ambos casos, se incluyen a las “fuentes históricas”. Estas otorgan la posibilidad de averiguar el origen y desarrollo evolutivo del saber matemático a lo largo del tiempo y con relación a distintas instituciones.

La construcción de un MER, según García et. al (2019), incluye el análisis y cuestionamiento de varias fuentes de información. El autor menciona las siguientes:

- Fuentes sabias: aquellas que dan acceso a la “matemática sabia”, por ejemplo, la matemática de las instituciones productoras de saber matemático.
- Fuentes escolares: son las que dan acceso a la “matemática escolar”, por ejemplo, la matemática de las instituciones encargadas de la enseñanza de las matemáticas.
- Fuentes históricas: rastrean el origen y evolución del conocimiento matemático en el tiempo que puede citar también a las instituciones sabias y escolares.

A continuación, se detallan el tipo de investigación y el enfoque que tendrá el presente trabajo; asimismo, se presentará la metodología a utilizar.

2.2 Metodología de la investigación

Hernández et al. (2014) indican algunas de las características de la investigación cualitativa: la revisión de la literatura se realiza desde el planteamiento del problema hasta la elaboración del reporte de resultados y puede complementarse en cualquier etapa del estudio; la muestra, la recolección y el análisis son fases que pueden realizarse de manera simultánea. Se explora, describe, y luego se generan perspectivas teóricas; los métodos de recolección de datos no son estandarizados y no están predeterminados completamente; las hipótesis generalmente se forman durante el proceso y se van perfeccionando en la medida que se recolectan más datos.

La presente investigación posee características que se enmarcan en una investigación cualitativa, ya que permitirá el cumplimiento de los objetivos planteados.

Por otro lado, esta investigación es de corte bibliográfico. Al respecto, Fiorentini y Lorenzato (2006) indican que los estudios de este tipo están basados en la revisión de estudios, análisis históricos y/o procesos teniendo como material de análisis los documentos escritos y/o producciones culturales, los cuales son extraídos a partir de archivos o colecciones, especialmente cuando se procura sistematizar una producción científica (pp. 70-71).

La metodología propuesta por Almouloud (2015), para el análisis de materiales didácticos, será usada en la presente investigación. El autor presenta en su metodología elementos que permiten especificar el contexto de la producción de un libro de texto, las características, la relación con la institución que lo alberga. Menciona también la evaluación de las tareas, técnicas y tecnologías (Chevallard (1999), que están envueltas en las organizaciones matemáticas propuestas por los autores de estos materiales.

Se agrupó en tres etapas el desarrollo de los elementos metodológicos propuestos por Almouloud (2015). En la etapa evaluativa, se completará la evaluación usando los indicadores de Fonseca (2004). Asimismo, se considera una etapa epistemológica.

El análisis, por tanto, considera cuatro etapas y se establece en el siguiente orden:

1. Etapa epistemológica
2. Etapa de selección y descripción
3. Etapa de análisis
4. Etapa de evaluación

A continuación, se detallarán cada una de ellas:

2.3.1 Etapa epistemológica

Estudio histórico epistemológico: según Fernández (2011), se debe tener en cuenta, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el orden cronológico en que fueron apareciendo y desarrollando los conceptos. Esto permitirá presentar nuevos contenidos partiendo de la necesidad de responder a algún problema en el ámbito matemático o natural.

Con respecto al aspecto epistemológico, Chevallard (2006) indica que, para cada praxeología o aspecto praxeológico elegido para enseñarse, debería aclararse que dicho aspecto es una construcción humana con propósito. En consecuencia, debería mostrarse cuáles son las razones de que esté aquí a la espera de ser estudiado, dominado y utilizado correctamente (p.26).

A continuación, se presentan las etapas propuestas por Almouloud (2015), las cuales se relacionan con esta etapa epistemológica.

2.3.2 Etapa de selección y descripción

El momento de publicación del libro didáctico: Almouloud (2015) resalta que el Programa Nacional de Libros Didácticos de Brasil (PNLD) considera importante que el libro de texto sepa elegir adecuadamente el contenido y expresar de forma relevante su presentación. Ello debe estar siempre respetando las especificidades de las matemáticas y las necesidades del contexto actual (PNLD, 2016).

La representatividad de la obra: según el PNLD (2016), el libro debe transmitir al docente y al alumno el conocimiento matemático a ser estudiado, los métodos adoptados para que puedan aprender de manera más efectiva ese conocimiento y la organización curricular de los diversos temas que lo conforman (citado en Almouloud, 2015, p. 14)

La estructura del libro: el estudio de la estructura de un libro de texto, según Almouloud (2015), informa sobre la importancia que este les otorga a las actividades matemáticas, si existen ejemplos explicativos, y si hay observaciones o comentarios que los autores consideraron pertinente comunicar.

2.3.3 Etapa de análisis

El análisis ecológico: Almouloud (2015) señala también que el análisis ecológico gira alrededor de dos conceptos: el primero de ellos es el hábitat, lugar donde vive el libro de texto y el entorno conceptual al que pertenece; el segundo es el nicho, referido a la función que desarrolla en el sistema en el que interactúa con otros libros.

El análisis praxeológico: un objeto existe tan pronto como existen instituciones y personas que tienen relación con este. La naturaleza de un objeto matemático se refiere al problema de describir las prácticas institucionales, en las que se involucra el objeto. Este problema debe ser respondido en términos de organizaciones praxeológicas (Bosch y Chevallard, 1999, p. 88).

Almoloud (2015) describe los siguientes pasos necesarios para realizar el análisis praxeológico:

- **Identificación de los tipos de tareas**: se buscarán las actividades propuestas en diferentes partes de un capítulo. En efecto, los ejemplos y actividades de un curso (presentados en forma de retos o ejercicios resueltos) permiten identificar los tipos de tareas importantes para la institución.

• **Identificación de las técnicas**: tras identificar los tipos de tareas, se caracterizan las técnicas que permiten realizarlas. Estas características están basadas en ejercicios resueltos y/o análisis matemáticos de situaciones propuestas.

• **Identificación de las tecnologías**: se construye la tecnología a partir del análisis de los comentarios de los autores del libro y/o del análisis matemático de situaciones propuestas para consolidar el aprendizaje.

2.3.4 Etapa de evaluación

Continuando con el análisis praxeológico, se mostrará en esta etapa evaluativa los siguientes pasos:

• **Evaluación de los tipos de tareas**: Chevallard (1999) propone los siguientes criterios:
Criterio de identificación: se verifica qué tan claro y bien identificados están los tipos de tareas.
Criterio de las razones de ser: se constata si las razones de ser de los tipos de tareas están explicitadas o no lo están.
Criterio de pertinencia: se verifica si los tipos de tareas son una correcta muestra de las situaciones matemáticas encontradas y si son pertinentes teniendo en cuenta las necesidades matemáticas presentes o futuras de los estudiantes.

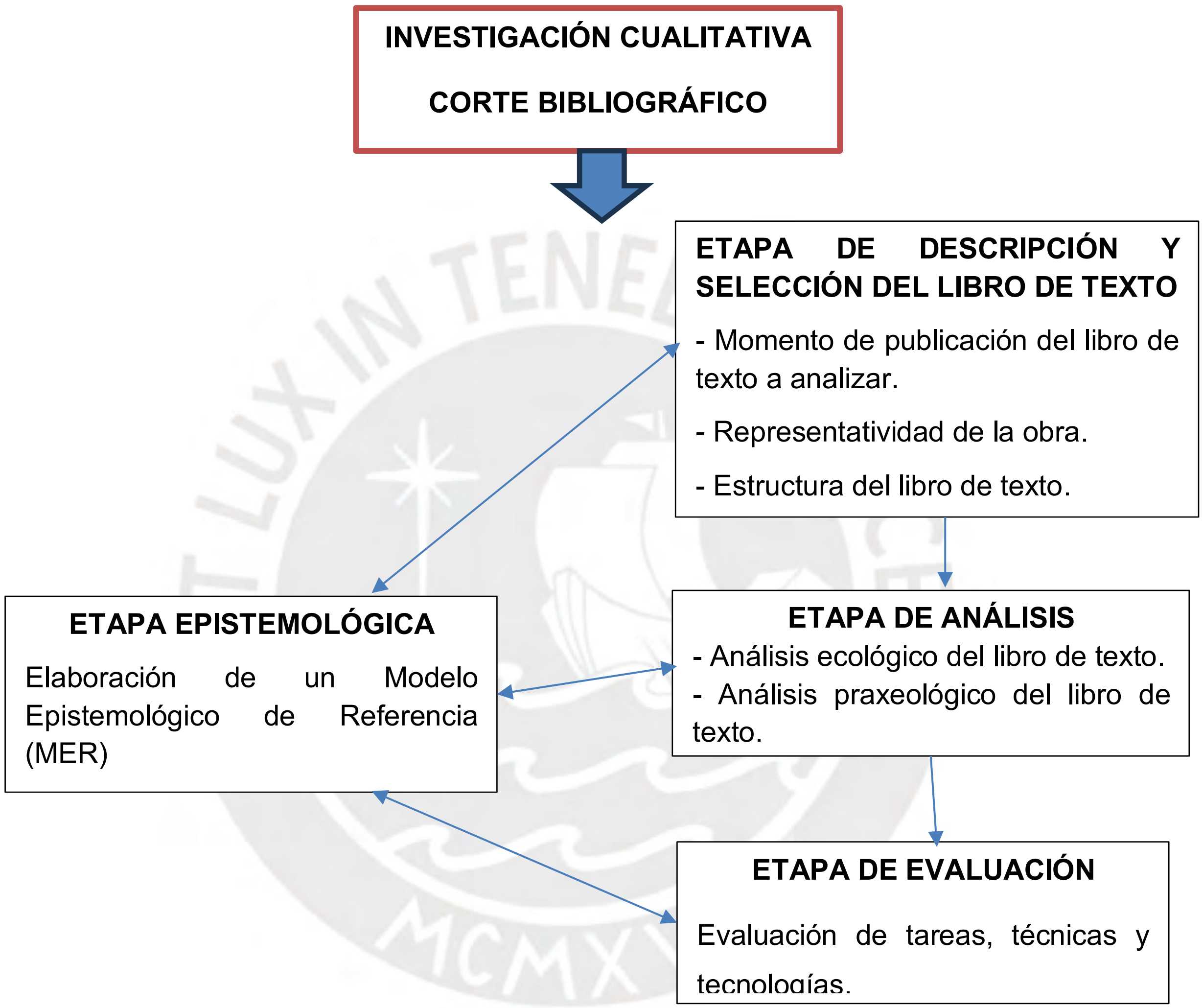
• **Evaluación de las técnicas**: Chevallard (1999) señala que se siguen los mismos criterios para evaluar los tipos de tarea. Asimismo, señala que deben plantearse las siguientes preguntas: ¿se elaboran de manera efectiva o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de utilizar? ¿Su alcance es satisfactorio? ¿Su fiabilidad es aceptable dadas unas condiciones de empleo? ¿Son suficientemente inteligibles? ¿Tienen futuro y pueden evolucionar de manera conveniente? (p. 259).

• **Evaluación de las tecnologías**: de acuerdo con Chevallard (1999), se pueden realizar observaciones análogas acerca del bloque tecnológico-teórico. Así, dado un enunciado, ¿se plantea únicamente el problema de su justificación? ¿O bien se considera tácitamente este enunciado como evidente, natural, o incluso bien conocido? ¿Las formas de justificación utilizadas son parecidas a las formas canónicas en matemáticas? ¿Se adaptan a sus condiciones de uso? ¿Se favorecen las justificaciones explicativas? ¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles? (p. 261).

Se concluirá presentando los indicadores de completitud de Fonseca (2004) para determinar el grado de completitud de la praxeología matemática reconstruida en el libro didáctico analizado.

En la Figura 2 se presenta el esquema de la metodología que se aplicará para el presente trabajo.

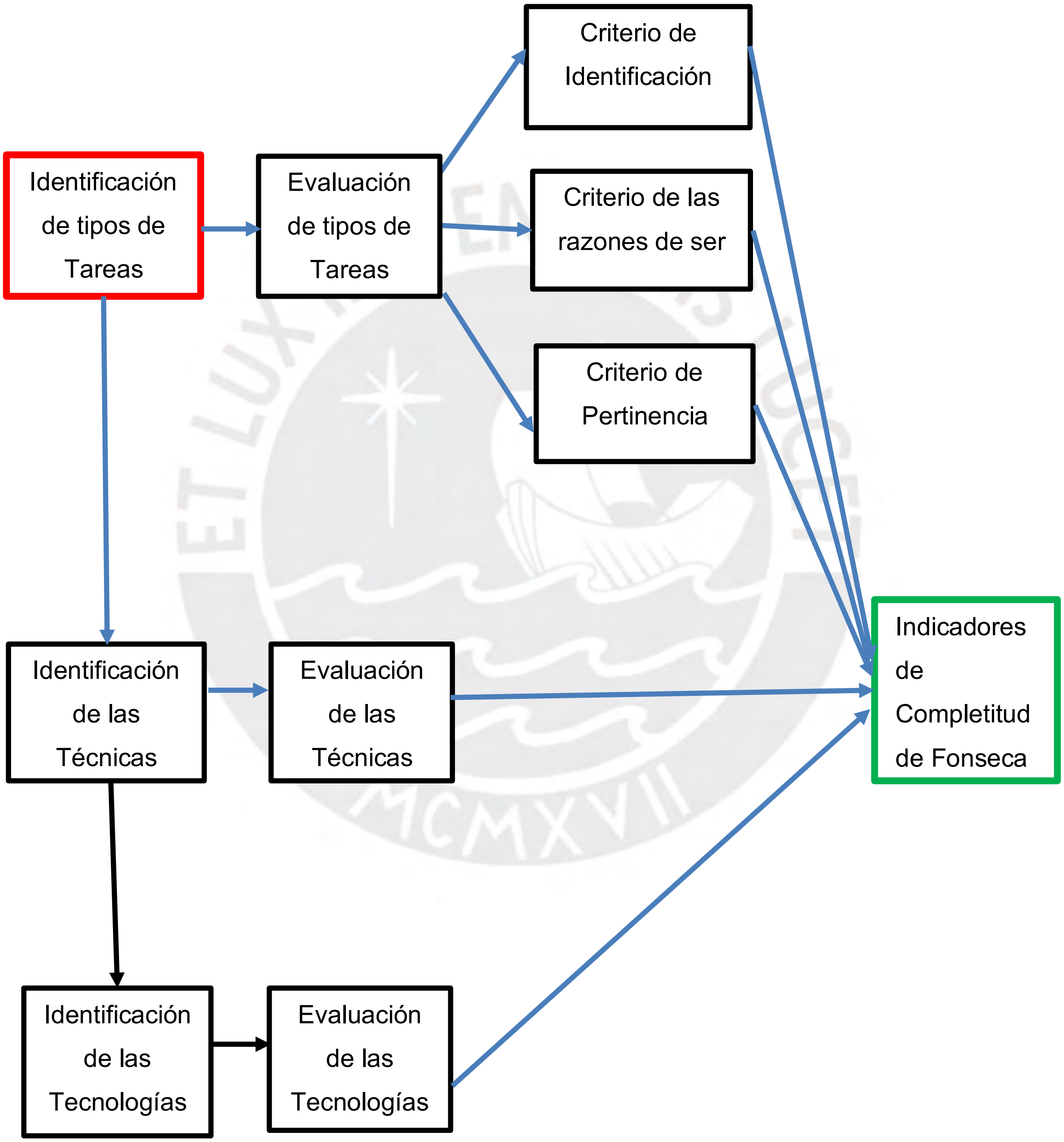
Figura 2. *Metodología de la Investigación*.



Fuente. Elaboración propia

En la Figura 3, se tiene un esquema de la última parte del análisis del libro de texto.

Figura 3. *Análisis praxeológico y completitud de la organización matemática.*



Fuente. Elaboración propia

Capítulo III: Estudio de la integral definida

En este capítulo, dentro de las matemáticas como disciplina e institución productora del saber, se realizó un análisis histórico-epistemológico de la integral definida. El objetivo del capítulo es determinar, a través del estudio de los diferentes momentos históricos, cuál es la razón de ser del objeto matemático, a fin de, junto con otras investigaciones de referencia, establecer criterios para elaborar un MER. Así, los criterios que se utilizarán para la elaboración de un MER estarán basados en tres aspectos: el análisis histórico epistemológico de la integral definida, sus usos en las carreras de Ingeniería Industrial y sus aplicaciones en libros de texto de Cálculo 2.

3.1 Aspectos históricos-epistemológicos

A continuación, se expondrán los problemas que originaron o contribuyeron al desarrollo de la integral definida; por otra parte, en la parte final de la sección, se mostrará la razón de ser encontrada en los diferentes momentos matemáticos estudiados.

Considerando a Gonzales (2020), se realizará el estudio de los aspectos históricos-epistemológicos mediante dos enfoques: el enfoque geométrico, el cual se refiere al uso de la integral para el cálculo de áreas, y el enfoque analítico, referido al empleo de un lenguaje algebraico-aritmético que se independiza del geométrico y define a la integral definida en términos de límites de una suma.

3.1.1 Enfoque geométrico de la Integral definida

Cabañas (2011) identifica el uso del área en dos contextos: el primero sería uno estático, en el que se ubican el método exhaustivo, usado en la Antigüedad Clásica; el método de comparación por elementos indivisibles, usado por Cavalieri; el método basado en una propiedad de las progresiones geométricas, usado por Fermat; el método de suma de secuencias aritméticas, utilizado por Wallis; y el método de las transformaciones, utilizado por Leibniz. El segundo se define como uno dinámico, usado por Newton, en el cual, en un primer momento, la variación de una cantidad afecta a otra y en un segundo momento, las cantidades varían con respecto al tiempo (p. 101).

Considerando lo expuesto, se divide en dos periodos históricos la evolución del concepto de integral definida. El primero corresponde a la Edad Antigua, en la cual Arquímedes es preponderante; el segundo, a partir del Renacimiento, cuyo objetivo es la búsqueda de otros métodos, aparte del exhaustivo, para hallar áreas. Este momento llega a su ápice con Newton y Leibniz.

Edad Antigua

Mateus-Nieves (2021) indica que la integral surge en la antigua Grecia en un contexto intramatemático. Su finalidad era ser un operador que brindaría solución a tres problemas: la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo. También indica que surge en la necesidad de resolver problemas con medir distancias largas (como la medida entre la Luna y la Tierra) y en los que se deben encontrar áreas, volúmenes, centros de gravedad de curvas, superficies, círculos, esferas, cónicas y espirales. Cabañas (2011), por su parte, indica que el interés por el estudio del área provino de problemas prácticos, por ejemplo, desde la necesidad de medir el área de segmentos de tierra hasta los más complejos, como determinar su forma y dimensiones (p. 93).

Arquímedes (287-212 a.C.), el origen de la integral definida se evidencia en los métodos empleados para determinar áreas y volúmenes en los trabajos de Arquímedes del siglo III A.C.

Hawking (2010) menciona que la *Cuadratura de la parábola*, *Medida del círculo* y *El método* son trabajos de Arquímedes, que están en relación con áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies.

A continuación, se presentará el análisis realizado por Arquímedes para determinar la cuadratura del segmento parabólico por medio de los métodos mecánico y de exhaución.

Cuadratura del segmento parabólico por el método mecánico:

Arquímedes, en su tratado *El método,* descubrió, mediante el "método mecánico" de equilibrio, que el área de un segmento parabólico era cuatro tercios del triángulo inscrito (Porres, 2011, p. 233).

Basados en Heath (1912, p. 15), Garcia (1983, p. 75) y Gonzales (2020, p. 8), se presentará la demostración que Arquímedes realiza para la siguiente afirmación:

Sea ABC un segmento de una parábola acotada por la recta AC y la parábola ABC y sea D el punto medio de AC. Trazar la recta DBE paralela al eje de la parábola y unir AB con BC. Así, el segmento ABC será $\frac{4}{3}$ del triángulo ABC (Heath, 1912).

La demostración que Arquímedes realiza consiste en lo siguiente:

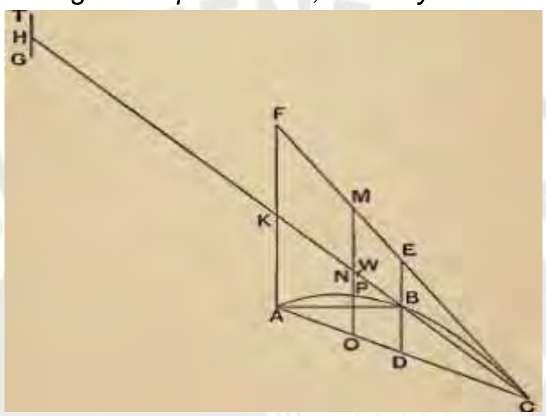
Se dibuja la recta AKF paralela a DBE. Ambas rectas terminan siendo paralelas al eje de la parábola.

Luego, se dibuja una recta tangente a la parábola en C que intercepta a DBE en E y a AKF en F.

Seguidamente, se dibuja la recta CB que intercepta a AF en K; se prolonga CK hacia H, lo que genera que KH sea igual a CK.

Luego de realizar estas construcciones, el resultado se presenta en la Figura 4.

Figura 4. *Segmento parabólico, trazos y construcciones*.



Nota. Adaptado de *The Method of Archimedes* [Imagen], por Heath,1912, https://es.scribd.com/document/101424637/The-Method-of-Archimedes-Heiberg-T-L-Heath

Se toma la palanca CH, la cual balancea en su punto medio K.

Considera MO una línea cualquiera del ΔAFC, que es paralela a AKF y a DBE.

Luego, señala las propiedades de la parábola y las construcciones establecidas para comprobar que CK es la mediana del ΔAFC. Con ello, obtiene los siguientes resultados:

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{OP}} = \frac{CA}{AO} = \frac{CK}{KN} = \frac{HK}{KN}$$

Así, se consigue

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{OP}} = \frac{HK}{KN}$$

En este punto, Arquímedes usa su suposición[2] dos y concluye que K es el centro de gravedad de las líneas rectas, como MO, interceptadas entre FC, AC y ubicadas como aparecen en la figura y de todas las líneas rectas ubicadas en H, iguales a las rectas como OP entre AC y la curva.

Arquímedes indica que el triángulo $C\mathrm{FA}$ está formado por todas las paralelas a MO y el segmento de parábola $ABC,$ por todas las rectas interiores a la parábola, como la recta OP. Bobadilla (2012) indica que Arquímedes incorpora el método de los indivisibles, el cual fue formalizado más adelante por Cavalieri.

Entonces, dicho triángulo $C\mathrm{FA}$, permaneciendo tal como en la Figura 4, quedará en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento de parábola ubicado con su centro de gravedad en H.

Esto le permite hacer uso de su suposición para determinar que

$$\frac{\Delta \mathrm{AF}C}{\mathrm{ABCseg} - \mathrm{para}b} = \frac{HK}{KW}$$

y dado que $\frac{HK}{KW} = \frac{3}{1}$ concluye que

$$\frac{\Delta \mathrm{AF}C}{\mathrm{ABCseg} - \mathrm{para}b} = \frac{3}{1}$$

Luego, utilizando las propiedades conocidas y establecidas en el libro *Los Elementos* de Euclides, Arquímedes determina que

$$\Delta \mathrm{AF}C = 4\Delta \mathrm{AB}C$$

para concluir finalmente que

El área del segmento parabólico ABC es igual a $\frac{4}{3}$ al área del ΔAFC.

Se identificó este problema de calcular el área de una región, como una tarea $\mathbf{t_1}$**.** Esta fue resuelta usando la técnica $\boldsymbol{\tau}_1$. Así, mediante construcciones geométricas y haciendo uso de las leyes de la mecánica, permite obtener la integral definida.

[2] García (1983) menciona que Arquímedes basó sus resultados en tres suposiciones propias, obtenidas usando las leyes de la mecánica, suposiciones que tenían un gran valor heurístico, pero que nunca fueron aceptadas por los geómetras griegos (p.11).

Arquímedes incorpora aquí las leyes de la mecánica y los indivisibles para solucionar problemas de áreas, pero el uso de estos últimos no lo puede formalizar dentro de la matemática (Bobadilla, 2012, p. 37).

Cuadratura del segmento parabólico por el método de exhaución:

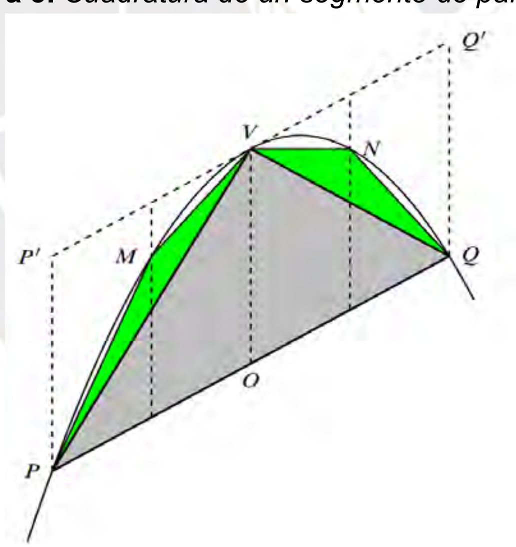
En su libro *De la cuadratura de la parábola,* se halla el mismo resultado para el área del segmento parabólico. Ahora es apoyado por la geometría, a través del método de exhaución[3] (Porres, 2011).

Basado en Heath (1897, p. 251), Vera (1970, p. 233), Martín (2008, pp. 5-7) y Gonzales (2020, p. 10) se presentará la demostración que Arquímedes realiza a su siguiente afirmación:

"Todo segmento acotado por una parábola y una cuerda PQ es igual a los cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base y altura que el segmento" (Heath, 1897, p. 251).

A continuación, se muestra en la Figura 5 lo mencionado.

Figura 5. *Cuadratura de un segmento de parábola*.



Nota. Adaptado de *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I* [Imagen], por Martin,2008, https://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf

[3] El método exhaustivo es una aproximación de áreas entre figuras geométricas inscritas y circunscritas cuya medida se conoce, lo que permite acotar la figura que se quiere conocer, de manera que, en un momento, la diferencia entre ellas es tan pequeña que pueden considerarse equivalentes. La reducción al absurdo logra el razonamiento lógico que permite garantizar la verdad geométrica de lo que se está afirmando (Bobadilla, 2012, p. 31).

Arquímedes realiza la demostración de la siguiente manera:

Sea A el área del segmento parabólico PVQ y S el área del triángulo PVQ.

Sea $K = \frac{4}{3}S$, se debe demostrar que $A = K$.

I) Suponiendo primero que $A > K$ o lo mismo $A > \frac{4}{3}S$

se tiene, entonces, que $A - \frac{4}{3}S > 0$

Se inscribe sobre los segmentos laterales PV y VQ los triángulos PMV y VNQ respectivamente, cuyos vértices M y N pertenecen a la parábola. Luego, se vuelven a inscribir, sobre los segmentos formados PM, MV, VN, NQ, más triángulos con base en esos segmentos, y cuyos vértices pertenezcan a la parábola y así sucesivamente.

Arquímedes menciona en este punto un resultado demostrado en la proposición 21 del mismo libro, el cual indica que

$$S = \text{Área del } \Delta\, PVQ = 8 \text{ Área del } \Delta\, PMV = 8 \text{ Área del } \Delta\, VNQ$$

de lo cual se deduce que $\frac{1}{4}\mathrm{S} = \text{Área del } \Delta\mathrm{PMV} + \text{Área del } \Delta\mathrm{VNQ}$.

Entonces, con base en el resultado de la proposición 22 y al sumar todos los triángulos, se tendría lo mostrado:

$$S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S}$$

Por propiedad de parábolas, se presenta lo siguiente:

$$\mathrm{S} = \text{Área del } \Delta\mathrm{PVQ} = \frac{1}{2} \text{ Área del paralelogramo circunscrito PP´QQ´}$$

También se muestra

$$\frac{1}{2} \text{ Área del Paralelogramo circunscrito PP´QQ´} > \textit{Área del segmento parabólico PVQ}$$

así se concluye que

$$\mathrm{S} = \text{Área del } \Delta\mathrm{PVQ} > \frac{1}{2}\, \textit{Área del segmento parabólicoPVQ}$$

Esto permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo[4]; por tanto, en la sucesión de áreas siguiente y siendo *A* el área del segmento parabólico, se obtiene esto:

$$A - S, A - \left(S + \frac{1}{4}\mathrm{S}\right), +A - \left(S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S}\right), \ldots$$

Se puede concluir que en alguna etapa se tendrá

$$A - \frac{4}{3}S > A - \left(S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S}\right)$$

Ello implicaría que

$$S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S} > \frac{4}{3}S$$

No obstante, en la proposición 23, Arquímedes llega a la siguiente igualdad:

$$S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S} = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}\mathrm{S}\right)$$

Ello implicaría lo siguiente: $S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S} < \frac{4}{3}S$, lo cual es contradictorio.

Por lo tanto, no puede ser $A > K$.

II) Suponiendo ahora que $A < K$ o $A < \frac{4}{3}S$.

se tiene, entonces, que $\frac{4}{3}S - A > 0$.

Como cada una de las áreas S, $\frac{1}{4}S$, $\frac{1}{16}S \ldots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede, se puede concluir, por el principio de convergencia de Eudoxo, que en alguna etapa se obtendrá que

$$\frac{1}{4^n}\mathrm{S} < \frac{4}{3}S - A$$

De la proposición 23, resulta que

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}\mathrm{S}\right) = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}\mathrm{S} + \frac{1}{16}\mathrm{S} + \cdots + \frac{1}{4^n}\mathrm{S} - \frac{4}{3}S\right)$$

De donde resulta

[4] El principio de convergencia de Eudoxo dice que, si a una magnitud se le quita una cantidad no menor que su mitad, y al resto también se le sustrae otra vez una cantidad no menor que su mitad, y así sucesivamente, al final, se obtendrá una magnitud menor a cualquiera del mismo tipo presentada de antemano (Martín, 2008).

$$\frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}S\right) < \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - A$$

Ello implicaría que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > A$$

Como la suma de la derecha representa al área de un polígono inscrito al segmento de parábola, esta nunca puede ser mayor. Esto lo deja establecido también Arquímedes en su proposición 22.

Por lo tanto, no puede ser $A < K$.

De donde se concluye necesariamente que

$$A = K$$

Se identifica esta demostración como una tarea $\mathbf{t_2}$, con el cálculo de área de una región con técnica $\boldsymbol{\tau}_2$ mediante el método de exhaución con doble reducción al absurdo. Como resultado, permite obtener la integral definida.

El método exhaustivo, que presume la existencia de un límite, logra evitar el problema de realizar operaciones con elementos infinitamente pequeños (Bobadilla, 2012).

Transcurridos más de 1750 años, desde la muerte de Arquímedes, aparecen los primeros avances en el cálculo infinitesimal con continuidad en el tiempo.

Renacimiento

Crisóstomo (2012) indica que Simón Stevin (1548-1620) fue quien hizo los primeros intentos explícitos para desprenderse de las demostraciones rigurosas (como el método de exhaución). Estas fueron realizadas al estilo de la geometría de Euclides (p. 111).

Ahora bien, será Cavalieri, quien generalizaría el cálculo de cuadraturas, mediante un proceso que abandona el método exhaustivo; esto abre nuevas perspectivas en la búsqueda de un método general que permita obtener cuadraturas (Bobadilla, 2012, p. 43).

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) tiene como obras destacadas *Un cierto método para el desarrollo de una nueva geometría de continuos indivisibles* (1635) y *Seis ejercicios de geometría* (1649). En ellas establece y perfecciona su teoría de los indivisibles, precursora del cálculo integral (Fernández y Tamaro, 2004). Porres (2011) menciona que “lo más original y discutido de Cavalieri es la formulación de sus principios” (p. 805).

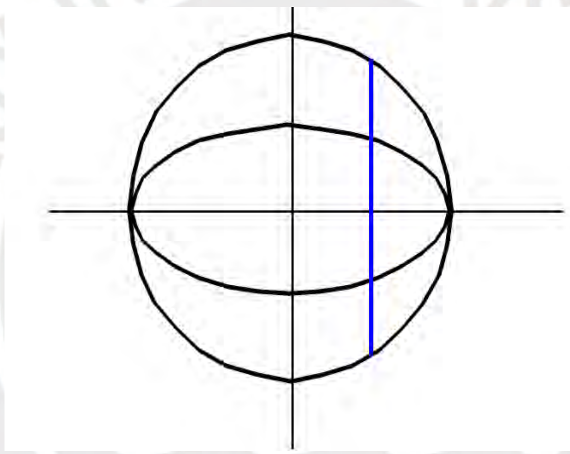
El primer principio de Cavalieri dice así:

> Si dos figuras planas tienen la misma altura y si sus secciones determinadas por líneas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces las áreas de las dos figuras están también en la misma razón (Pérez et al., 2002, citado en Porres, 2011).

Área de la Elipse

A continuación, en la Figura 6, se muestra la elipse, de la cual se deberá determinar su área; esta está inscrita en una circunferencia. Se detallará la solución a esta aplicación con el primer principio de Cavalieri (Porres 2011, p. 54).

Figura 6. *Área de la elipse por indivisibles*.



Nota. Adaptado de *Integral Definida, Cálculo Mental Y Nuevas Tecnologías* [Imagen], por Porres, 2011, http://uvadoc.uva.es/handle/10324/949

Se considera la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a > b y la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Ambas pueden ser escritas de la forma $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

La razón entre las ordenadas correspondientes, es decir, las cuerdas verticales de la elipse y la circunferencia es $\frac{b}{a}$.

Por tanto, por el primer principio se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\text{Área de la elipse}}{\text{Área del círculo}} = \frac{b}{a}$$

Entonces,

$$\text{Área de la elipse} = \frac{b}{a}\text{Área del círculo}$$

$$\text{Área de la elipse} = \frac{b}{a}\pi a^2$$

Por lo tanto,

$$\text{Área de la elipse} = \pi ab$$

Así, se determina que la superficie de una elipse es π por el producto de los semiejes.

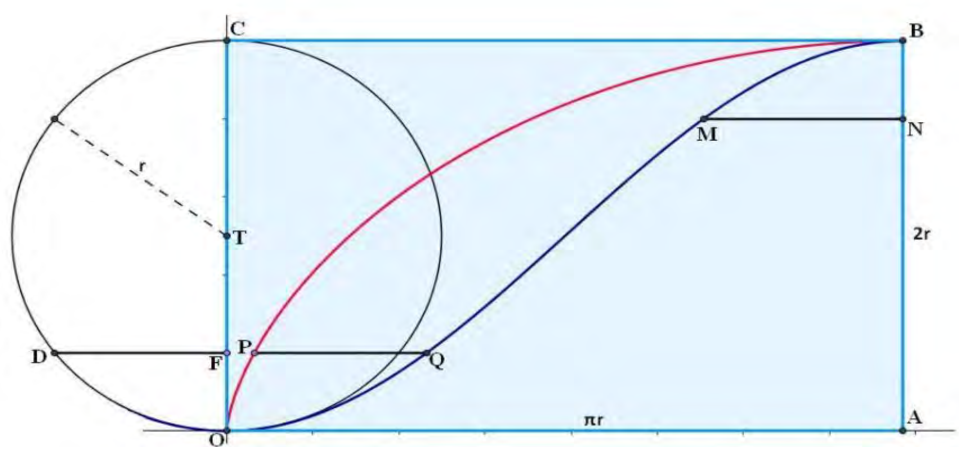
Se identifica hallar el área de una elipse como una tarea **t_3**, con el cálculo de área de una región con técnica τ_3 mediante el primer principio de Cavalieri. Esta permite obtener la integral definida.

Gilles Personne de Roberval (1602-1675), en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri, realizó la cuadratura de la cicloide.

Cuadratura de la Cicloide

En la Figura 7, se aprecia el área a determinar, la cual está limitada por el arco de cicloide OPB, la recta OA y la recta BA. Se mostrará la solución que realizó Roberval basado en las siguientes referencias: Martín (2008, p. 14), Porres (2011, p. 811) y Salazar (2011, p. 71).

Figura 7. *Método de Roberval para el área de una cicloide*.



Nota. Adaptado de *Introduccion al cálculo a través de algunas curvas especiales* [Imagen], por Salazar, 2011, https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/9112/70829946.2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

La cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar, como se muestra en la Figura 7.

Sea OPB la mitad de un arco de cicloide generada por el círculo de radio r centrado en T.

El área del rectángulo $OABC$ es $\pi r 2r = 2\pi r^2$, es decir, el doble del círculo generador.

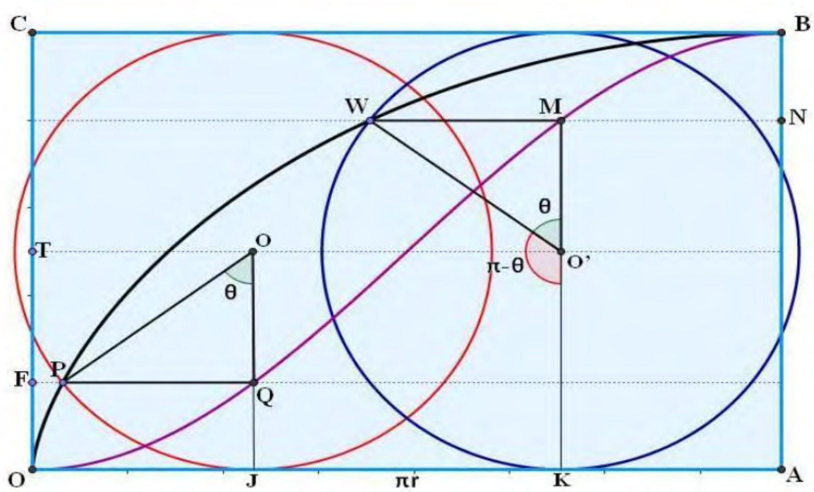
Se trazan segmentos horizontales DF, con longitud determinada por el diámetro OC y la circunferencia.

Se traslada horizontalmente el segmento DF, mientras se conserva la altura OF, de tal manera que el punto D vaya al de la cicloide P y F, y determine un punto Q. De esta forma, quedaría que $DF = PQ$.

Se realiza este mismo proceso con todas las semicuerdas del círculo para así obtener la curva OQB: curva asociada (compañera) a la cicloide.

En la Figura 8, Roberval demostrará, mediante el principio de Cavalieri, que la curva OQB divide al rectángulo $OABC$ en dos partes iguales.

Figura 8. *Método de Roberval para el área de una cicloide*.



Nota. Adaptado de *Introduccion al cálculo a través de algunas curvas especiales* [Imagen], por Salazar, 2011, https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/9112/70829946.2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sea $OF = BN$

Se trazan paralelas a OA por F y N

Por construcción, se obtiene que $PQ = WN$

Dado que $OF = BN$, también se tiene que $QO = MO'$. Además, los triángulos POQ $WO'\mathrm{M}$ son congruentes.

Como la circunferencia rueda sin deslizar, el arco JP presenta igual longitud que el segmento JO.

Entonces, $FQ = r\theta$

Asimismo, se observa también que $MN = OA - OK$

Entonces,

$$MN = r\pi - r(\pi - \theta)$$

$$MN = r\theta$$

Así, se sintetiza en que

$$FQ = NM$$

Se puede aplicar el primer principio de Cavalieri y afirmar que a cada línea FQ en $OQBC$ le corresponde una línea igual a MN en $OABQ.$ Por lo tanto,

Área $OQBC$ = Área $OABQ$

De la misma forma, aplicando el primer principio de Cavalieri, se obtiene que

Área entre OPB y OQB= Área del semicírculo ODC

También se obtiene que

Área del rectángulo $OABC$ = 2 veces el área del círculo generador

Entonces,

Área $OQBC$ = Área $OABQ$ = Área del círculo generador

Por lo tanto,

Área bajo el semiarco de cicloide = Área de $OABQ$ + Área entre OPB y OQB

$$\text{Área bajo el semiarco de cicloide} = \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

Con ello, se concluye lo siguiente:

$$\text{Área bajo el semiarco de cicloide } = \frac{3}{2}\pi r^2$$

El área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Se identifica realizar la cuadratura de la cicloide como una tarea $\mathbf{t_4}$, con el cálculo de área de una región con técnica $\boldsymbol{\tau}_4=\boldsymbol{\tau}_3$, ya que se aplica el primer principio de Cavalieri.Con ello, esta técnica permite obtener la integral definida.

Bobadilla (2012) indica que la influencia de Cavalieri, desde el punto de vista conceptual y metodológico, fue notoria en los trabajos de sus contemporáneos y sucesores. Ello determinó un camino hacia la obtención de una solución general al problema del cálculo de cuadraturas y curvaturas.

Sin embargo, los matemáticos de la época no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar al método de los indivisibles y creían que era aún necesaria una demostración por exhaución (Martín, 2008).

Como consecuencia de esto, los simpatizantes de Cavalieri (como Fermat y Wallis) crearon una alternativa intermedia entre los dos puntos de vista y ahora, con la aparición de la geometría analítica, el problema de cuadraturas se convertía en la de hallar el área bajo la curva (Bobadilla, 2012).

Pierre de Fermat (1601-1665), junto con Descartes (1596-1650), fue uno de los fundadores de la geometría analítica (la combinación de la geometría con el cálculo y el álgebra); esto está descrito en su obra *Ad locus planos et solidos isagoge* (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Descartes había comenzado a establecer clasificaciones de curvas y estaba incorporando a alguna de estas a su representación algebraica. Lo analítico reemplazó la intuición geométrica; la forma en que se hacía matemáticas cambió con la llegada de la geometría analítica (Bobadilla, 2012, p. 44).

Martín (2008) indica que Fermat logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas de la forma $X^n y^m = 1$, $(m, n \in$ N) y que, para realizar la cuadratura, incorporó rectángulos inscritos infinitesimales de bases en progresión geométrica con el método de exhaución (p. 15).

Cavalieri, con su original método, había conseguido realizar la cuadratura de la curva $y = x^n$ para $n = 1, 2 \ldots, 9$. Fermat con su método, generalizaría el cálculo del área para cualquier $n > 0$ (Martín, 2008).

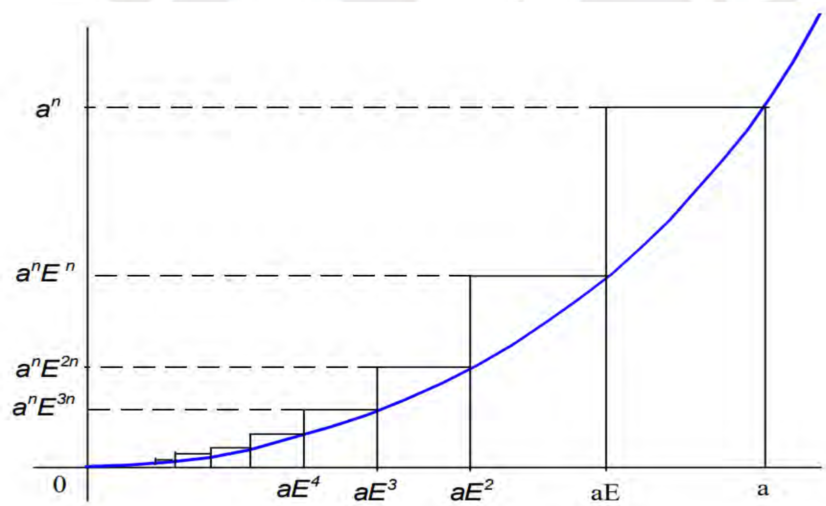
Cuadratura de curvas de la forma $y = x^n$ en un intervalo $[0, a]$

Se detallará la solución que realizó Fermat a este problema de cuadratura basado en las siguientes referencias: Boyer (1968/1987, p. 442), Porres (2011, p. 809) y Gonzales (2020, p. 23).

Sea la curva $y = x^n$, $n > 0$, en un intervalo $[0, a]$.

Para calcular el área bajo esta curva, Fermat realiza una división del intervalo $[0, a]$ en subintervalos, de tal manera que los puntos en la abscisa son $a, aE,\ aE^2, aE^3. . .$, con la condición de que $E < 1$ (ver Figura 9).

Figura 9. *Cuadratura de la curva* $\boldsymbol{y = x^n}$.



Nota. Adaptado de *Integral Definida, Cálculo Mental Y Nuevas Tecnologías* [Imagen], por Porres, 2011, http://uvadoc.uva.es/handle/10324/949

Luego, determina las áreas de los rectángulos circunscritos, empezando por el más grande.

Las bases son $a - aE,\ a - aE^2, a - aE^3. . .$

y las alturas correspondientes son a^n, a^nE^n, a^nE^{2n}, a^nE^{3n}, $\cdots$

Las áreas obtenidas son las siguientes:

$a^n(a - aE) = a^{n+1}(1 - E)$

$a^nE^n(aE - aE^2) = a^{n+1}E^{n+1}(1 - E)$

$a^{2n}E^{2n}(aE^2 - aE^3) = a^{n+1}E^{2n+2}(1 - E)$

$a^nE^{3n}(aE^3 - aE^4) = a^{n+1}E^{3n+3}(1 - E) \cdots$

Estas se encuentran en progresión geométrica de razón $0 < E^{n+1} < 1$.

Fermat realiza la suma infinita de dichas áreas y obtiene que

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$$

Si E tiende a 1, los rectángulos se hacen cada vez más estrechos y las sumas de las áreas de los rectángulos se aproximan cada vez más al área bajo la curva.

Y cuando $E = 1$, se obtiene que el área bajo la curva $y = x^n$ es esta:

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}, \text{ en el intervalo } [0, a]$$

Boyer (1968/1987) indica que este método es válido para exponentes fraccionarios también. Explica también que, para el caso de $n < 0$ (excepto -1)[5]. Fermat utiliza un método análogo, que consiste en considerar E >1, en el que E tiende a 1 por valores superiores.

Se identifica realizar este problema como una tarea $\mathbf{t_5}$, con el cálculo de área de una región mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$. Con ello, se permite obtener la integral definida.

Esta técnica τ_5 podría describirse en tres aspectos esenciales, como señala Martín (2008):

> La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños. Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva. Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños (p. 17).

[5] Para n = -1 el método falla, fue el matemático Gregory de St. Vincent (1548-1667), quien resolvió este caso y lo publicó en su obra de 1647 titulada *Obra geométrica sobre la cuadratura del círculo y de las secciones cónicas* (Boyer, 1968/1987).

Según Crisóstomo (2012), el método de integración desarrollado por Fermat se parecía bastante a la integral de Riemann (p. 113).

“Wallis se da cuenta *[sic]* que las sumas necesarias para el cálculo de cuadraturas pueden realizarse aritméticamente mejor que en términos de razones geométricas”. (Bobadilla, 2012, p. 45).

Según Beeley (2008), Wallis logró vislumbrar que la suma de los indivisibles de Cavalieri se lleva a cabo mejor de forma aritmética que geométrica, ya que esta forma facilita el desarrollo de un método general a la resolución de problemas (citado en Ortiz, 2013, párr. 19).

John Wallis (1616-1703) “fue uno de los precursores del cálculo infinitesimal. Sus trabajos sobre aritmética y álgebra dieron a estas ramas de las matemáticas una independencia respecto de la geometría”. (Fernández y Tamaro, 2004).

Arithmetica infinitorum y De sectionibus conicis fueron publicadas por John Wallis en 1656. En el primero, muestra su método de cuadraturas aritméticas; en el segundo, expone los fundamentos de este (Ortiz, 2013, p. 1).

Así que en *Arithmetica infinitorum,* a través de 194 proposiciones, Wallis estableció un nuevo método para investigar la cuadratura de curvas mediante su denominado “modus induction”[6] e interpolaciones (Bobadilla, 2012, p. 45).

A continuación, se muestra el método general de Wallis para hallar la cuadratura del mismo tipo de curvas hallado anteriormente por Fermat.

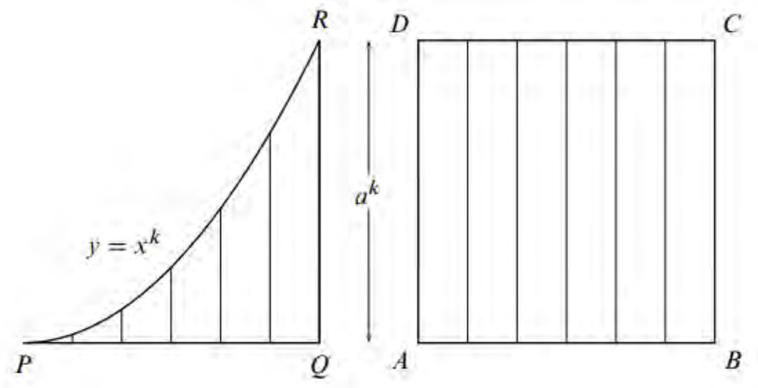
Área bajo la curva $\boldsymbol{y = x^k}$ $(\boldsymbol{K \neq -1})$ y sobre el segmento $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}]$

Se detallará la solución que realizó Wallis a este problema considerando las siguientes referencias: Boyer (1968/1987, p. 479), Gonzales (1995, p. 425), Martin (2008, p. 39), Cabañas (2011, p. 98) y Gonzales (2020, 26).

Sea la curva y el rectángulo $ABCD$ mostrados en la Figura 10.

[6] Conclusión por analogía o método de inducción incompleta. Método criticado por Fermat por su falta de rigor como el método de inducción completa, pero que, según Boyer (1968), le permitía numerosos descubrimientos.

Figura 10. *Comparando indivisibles*.



Nota. Adaptado de *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I* [Imagen], por Martin, 2008, https://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf

Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas (a la manera de Cavalieri), cada una de ellas con longitud igual a x^k.

Se divide el segmento $PQ = AB = a$ en n partes.

Sea la longitud de cada una de esas partes $h = \frac{a}{n}$, en la cual $n = \infty$[7].

Entonces, la suma de estas infinitas líneas resultará el área de PQR:

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k$$

Análogamente, el área del rectángulo $ABCD$ es

$$a^k + a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k$$

La razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\acute{A}rea\ de\ PQR}{\acute{A}rea\ de\ ABCD} = \frac{0^k+1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k}$$

Nótese que dado $AD = a^k\ y\ AB = a$, se obtiene que

$$\acute{A}rea\ de\ ABCD = a^{k+1}$$

[7] Wallis introdujo en la obra *De Sectionibus Conicis* de 1656 el símbolo "∞" con el significado de "infinito" (Martin, 2008).

Así, se necesita el valor de la siguiente expresión cuando n tienda al ∞ para hallar el área de la región bajo la curva x^k :

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

Así, para $k = 1$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n + n + n + n + \cdots + n} = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)}$$

así, se obtiene que

$$\frac{0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n + n + n + n + \cdots + n} = \frac{1}{2}$$

Para $k = 2$ **,** se tiene lo siguiente:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + n^2 + \cdots + n^2}$$

se obtiene la expresión

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^2(n+1)}$$

Tomando en la expresión diferentes valores de n:

Para n = 1, se tiene

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2(1+1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(1)}$$

Para $n = 2$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2(2+1)}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(2)}$$

Para $n = 3$, se encontró

$$\frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(3)}$$

Wallis, mediante su método de inducción incompleta, concluye que, para un *n* entero positivo, se tendrá que

$$\frac{0^2 + 1^2 + \ 2^2 + \ 3^2 + \cdots + n^2}{n^2(n+1)} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Bajo el mismo procedimiento, Wallis encuentra que para $k = 3$, se obtiene

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

Se tienen, entonces, los siguientes aspectos:

$$k = 1 \qquad \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k(n+1)} = \frac{\sum_0^n i}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

$$k = 2 \qquad \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k(n+1)} = \frac{\sum_0^n i^2}{n^2(n+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

$$k = 3 \qquad \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k(n+1)} = \frac{\sum_0^n i^3}{n^3(n+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

Igualmente, Wallis concluye inductivamente que, para un k entero positivo cualquiera, se tendría que

$$\frac{0^k + 1^k + \ 2^k + \ 3^k + \cdots + n^k}{n^k(n+1)} = \frac{\sum_0^n i^k}{n^3(n+1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{mn} \ donde \ \ m > 0$$

Cuando n tiende a ∞, se obtiene que

$$\frac{0^k + 1^k + \ 2^k + \ 3^k + \cdots + n^k}{n^k(n+1)} = \frac{1}{k+1}$$

Entonces, el área bajo la curva x^k sería lo siguiente:

$$\left(a^{k+1}\right)\left(\frac{0^k + 1^k + \ 2^k + \ 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}\right), \text{cuando n tiende a } \infty$$

$$= \ \left(a^{k+1}\right)\frac{1}{k+1}$$

Se identifica realizar este problema como una tarea $\mathbf{t}_6$, con el cálculo de área de una región mediante la técnica $\boldsymbol{\tau}_6$. Con ello, permite obtener la integral definida.

Esta técnica $\boldsymbol{\tau}_6$ podría describirse en tres aspectos, como señala Bobadilla (2012):

> La división del área bajo la curva en infinitas líneas verticales paralelas, de altura dada por la ecuación analítica de la curva. Aproximación de la suma de esos elementos por medio de relación de áreas y usando el método de inducción incompleta. Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente (p. 51).

Hay que precisar también que el tipo de operaciones usado en este método con respecto a los objetos postulados suponían una ruptura con la geometría clásica (Ortiz, 2013).

Boyer (1968/1987) indica que, para 1670, los problemas de tangentes y cuadraturas dominaban la época y que estos ocupaban un lugar prominente en el tratado de Barrow *Lectiones geometricae* (p. 487). Señala, además, que de todos los matemáticos que anticiparon fragmentos del cálculo diferencial e integral. Ninguno se aproximó, tanto como Barrow, al nuevo análisis que se avecinaba (p. 489).

Isaac Barrow (1630-1677) era un admirador de los geómetras antiguos. Ello lo llevó a editar las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes a la vez que publicaba sus propias obras, *Lectiones opticae* (1669) y *Lectiones geometricae (1670),* en cuyas ediciones participó su alumno Newton (Boyer, 1968/1987, p. 487).

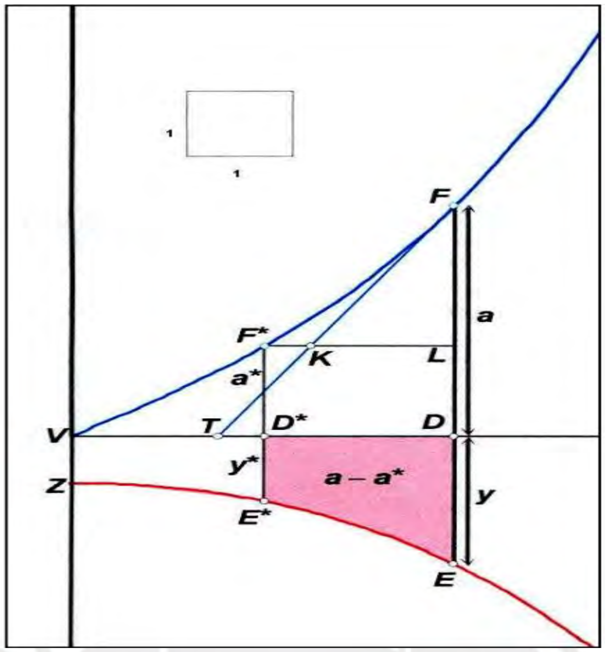
Barrow es el responsable de fundir en un solo cauce los cálculos diferencial e integral y es el que brindó la solución: el problema del área es inverso al problema de la tangente (Rey Pastor, 1973, p. 447).

A continuación, se detallará la solución que realizó Barrow a este problema de tangentes y cuadraturas: Barrow (1670/1916, p. 116), Martin (2008, p. 31), Porres (2011, p. 816) y Kindt (2011, p. 1).

Relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas (teorema fundamental del cálculo)

Barrow detalla primero el grafico presentado en la Figura 11 y luego pasa a su solución.

Figura 11. *Relación entre el área de una región y la recta tangente*.



Nota. Adaptado de *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna* [Imagen], por Kindt, 2011, https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/11/mkindt.pdf

Sea la curva $ZE^{*}E$, la cual representa una función monótona (Barrow menciona este dato de manera más geométrica en su proposición).

La curva $VF^{*}F$ representa el área encerrada entre el eje horizontal, la curva $ZE^{*}E$, y las rectas verticales DE y VZ.

Esto es, las longitudes a^{*} y *a* representan, respectivamente, las áreas de $VD^{*}E^{*}Z$ y $VDEZ$.

El punto T es construido de tal modo que

$$DT = \frac{FD}{ED} = \frac{a}{y}$$

Barrow afirma, entonces, que la línea TF toca a la curva en el punto F; es decir, TF es tangente a la curva $VF^{*}F$.

A continuación, pasa a demostrarlo:

Supone que K es un punto de TF entre T y F. Así, se aprecia que K es un punto a la derecha de la curva $VF^{*}F$.

Por la construcción de T, se tiene que

$$\frac{FL}{LK} = \frac{FD}{DT} = ED = y$$

Entonces,

$$FL = LK * y$$

De otro lado,

$$FL = a - a^{*} = Área\, VDEZ - Área\, VD^{*}E^{*}Z < D^{*}D * y$$

Es decir,

$$FL < D^{*}D * y$$

Puesto que la curva $ZE^{*}E$ representa una función monótona, se tiene que

$$LK * y < D^{*}D * y$$

$$LK < D^{*}D$$

En consecuencia,

$$LK < LF^{*}$$

Así, se concluye que toda recta LK a la derecha de la curva es menor que LF^{*}.

Prolongando la recta TF se demuestra, de modo análogo, que cada punto de la parte prolongada está a la derecha de $VF^{*}F$.

Entonces, todos los puntos de la recta, salvo F, están a la derecha; por tanto, TF es tangente a la curva en F.

Se identifica, este problema, como una tarea $\mathbf{t}_7$, en el que realizar construcciones geométricas para relacionar el área de una región y la recta tangente es una técnica $\boldsymbol{\tau}_7$. Ello permite demostrar que la recta es tangente a la curva y a la vez obtener la relación inversa entre la recta tangente y la integral definida.

En términos actuales, lo que Barrow ha probado es lo que se observa:

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

“Las raíces del cálculo infinitesimal están en la geometría. El contraste entre geometría y análisis es menos fuerte de lo que muchos matemáticos piensan; mejor es hablar sobre una diferencia de enfoques” (Kindt, 2011, p. 2).

Es así como Barrow establece la relación inversa entre estos dos problemas milenarios y es considerado el primer enunciado del teorema fundamental del cálculo infinitesimal en términos geométricos, que se encuentra en la lección X, proposición 11, de su libro *Lectiones geometricae*, (Bobadilla, 2012, p. 56).

Kline (1972) señala que la formulación geométrica de Barrow hacía difícil el reconocimiento de las ideas generales. Es así como Newton propuso brindar una mayor generalidad al método de su maestro, aunque de una manera más aritmética, como lo había hecho Wallis, mientras explora la nueva álgebra y la geometría de coordenadas (p. 471).

Al llegar los trabajos de Arquímedes a Europa, se revivió el interés por hallar áreas y con los nuevos métodos que se encontraban, el método exhaustivo empezó a ser desplazado paulatinamente y la invención del cálculo provocó que este método desapareciera totalmente (p. 454).

Isaac Newton (1642-1727) cuenta, desde mediados de 1660, con cuadernos con contenido sobre cálculo diferencial e integral. Para 1669, Newton circuló entre sus amigos la monografía titulada *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* publicada recién en 1711; en 1672, escribe su libro *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* publicado en 1736; en 1676, escribe su artículo sobre cálculo llamado *Tractatus de qudratura curvarum,* publicado en 1704. Newton no publicó sus artículos básicos sobre el cálculo hasta mucho tiempo después de haberlos escrito. No obstante, la sección I del libro I de la obra *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, de 1687, es la primera publicación que explicó acerca del desarrollo del cálculo (Boyer,1968/1987; Kline, 1972/1992).

Según Kline (1972), el método de las fluxiones usado por Newton en *De analysi* (1672) se basa en el indivisible estático de Cavalieri (p. 479). Con este método, Newton enuncia y prueba su regla I que, según Bobadilla (2012), es uno de los principales aportes para el cálculo, ya que prueba la relación inversa entre el cálculo de tangentes y el cálculo de áreas, de una manera algebraica (p. 55).

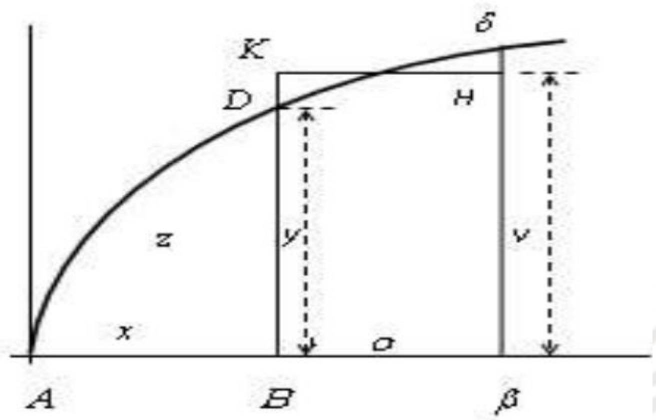
La obtención de la integral invirtiendo el proceso de diferenciación, junto con la conceptualización de la integral y la derivada como límites de una suma, es la principal característica del cálculo (Kline, 1972/1992, p. 470).

Regla I: Si $\frac{an}{m+n}x^{\frac{n+m}{n}} = Área\ ABD,$ entonces $ax^{\frac{m}{n}} = y$ (Teorema Fundamental del Cálculo)

A continuación, se detallará la solución que otorgó Newton a su afirmación: Bobadilla, (2012, p. 54) y Gonzales (2020, p. 31).

Se presenta la Figura 12 en la que Newton detalla y demuestra la regla I.

Figura 12. *Regla I de Newton*.



Nota. Adaptado de *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico* [Imagen], por Bobadilla,2012, https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/0615f602-24a7-434c-9eb4-539107340353/content

Newton comienza la demostración de la siguiente manera:

Sea $AB = x$ base de una curva cualquiera $AD\delta$, la cual es perpendicular a la ordenada $BD = y$

Sean m, n enteros y a un número real.

Sea el área $ABD = z$.

Sea $B\beta = \mathrm{o}$ y $BK = \mathrm{v}$

Sea el área del rectángulo $B\beta HK$ (ov), el cual es igual al área de la región $B\beta\delta D$.

Newton garantiza la relación entre dichas áreas, de tal manera que la variación de o produce una variación en el área total.

Sea: $A\beta = \mathrm{x} + \mathrm{o}$ y $\acute{A}rea\ A\delta\beta = \mathrm{z} + \mathrm{ov}$

A partir de esto, para cualquier relación arbitraria existente entre x y z, se puede determinar el valor de y.

Con fines didácticos, Newton realiza la demostración con un caso particular, donde $a = 1,\ m = 2,\ n = 3$ para que el procedimiento quede claro. Así, se generalizará el resultado.

Entonces, si $z = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}$, se debe determinar que $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Se eleva z al cuadrado y se obtiene

$$z^2 = \frac{4}{9}\ x^3$$

Reemplazando $x\ por\ x + \mathrm{o}$ y $z\ por\ z + \mathrm{ov}$, se obtiene

$$\frac{4}{9}\ (x + \mathrm{o})^3 = (z + \mathrm{ov})^2$$

Se observa que la variación o produce una variación ov en el área total.

Desarrollando el binomio se tiene esta operación:

$$\frac{4}{9}\ (x^3 + 3x^2\mathrm{o} + 3x\mathrm{o}^2 + \mathrm{o}^3) = z^2 + 2z\mathrm{ov} + \mathrm{o}^2\mathrm{v}^2$$

Reemplazando $z^2 = \frac{4}{9}\ x^3$ y simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2\mathrm{o} + \left(\frac{4}{9}\right) 3x\mathrm{o}^2 + \left(\frac{4}{9}\right) \mathrm{o}^3 = 2z\mathrm{ov} + \mathrm{o}^2\mathrm{v}^2$$

Dividiendo ambos miembros por o, resulta

$$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2 + \left(\frac{4}{9}\right) 3x\mathrm{o} + \left(\frac{4}{9}\right) \mathrm{o}^2 = 2z\mathrm{v} + \mathrm{ov}^2$$

En suma, Newton hace que $B\beta$ sea infinitamente pequeño para que v sea igual a y. De esta forma, resultan cero los sumandos que contengan el factor o.

Así, se obtiene

$$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2 = 2z\mathrm{v}$$

Reemplazando los valores de z y v, se obtiene

$\left(\frac{4}{9}\right) 3x^2 \ = \ 2(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}})y$. Despejando y, se logra este resultado:

$$y \ = \ x^{\frac{1}{2}}$$

Demostrada la premisa, a continuación, con el mismo procedimiento, Newton generalizará el resultado demostrando finalmente que

Si $\frac{an}{m+n} x^{\frac{n+m}{n}} = z,$ entonces $ax^{\frac{m}{n}} = y$, en el que $z = Área \ ABD$

De esta manera, garantiza que, a partir de la cuadratura particular, se puede determinar la curva que la representa. En la terminología actual, quedaría así:

$$\int_0^x at^{\frac{m}{n}} dt = \frac{an}{m+n} x^{m+n}$$

Ahora bien, si se toma el punto A como el origen $(0,0)$, el punto B como $(x, 0)$ y la curva $AD\delta$ como $y = ax^{\frac{m}{n}}$, se apreciaría que se ha derivado la función área; es decir, se tiene la integral definida (Gonzales, 2020).

Se identifica demostrar la regla I como una tarea $\mathbf{t_8}$, con el cálculo de la expresión que representa la curva a través de la cuadratura de la región bajo dicha curva. Esta se presenta con técnica $\boldsymbol{\tau_8}$, mediante el método de fluxiones. Así, se obtiene el teorema fundamental del cálculo.

Newton (2003) enuncia la regla II en el mismo *De analysi,* "Si el valor de y está compuesto por varios de dichos términos, el área también se hará de las áreas que resulten de cada uno de los términos" (citado en Bobadilla, 2012, p. 55).

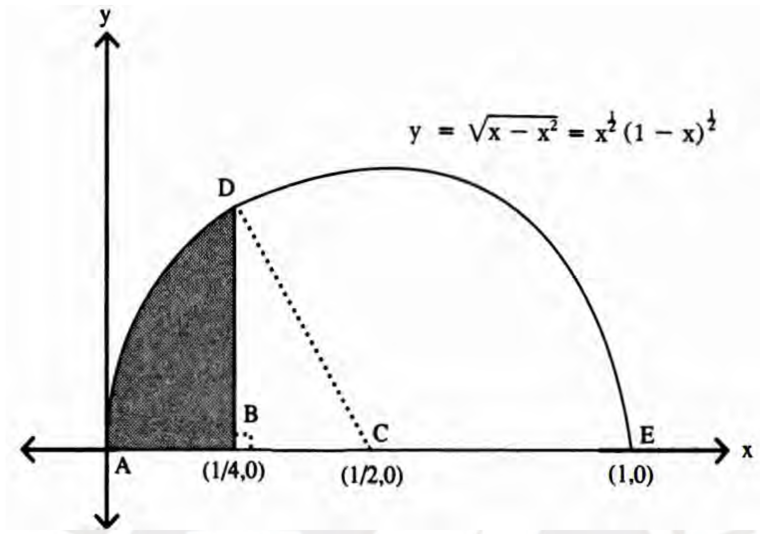
Por ejemplo, Newton notó que el área bajo la curva de $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$ es $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}$ Por otra parte, logra extender su desarrollo binomial también para el caso de exponentes racionales. Así, el teorema del binomio y el método de las fluxiones serían las herramientas de Newton para encontrar el área bajo la curva. Estas le sirvieron para atacar un extenso número de problemas matemáticos y físicos, (Dunham, 1990, p. 173).

Determinar el área ABD

Un claro ejemplo de lo mencionado se encuentra en el libro *Methodus fluxionum.* Newton utiliza la cuadratura del círculo de ecuación $y = \sqrt{x - x^2}$ para hallar el área ABD que se muestra en la Figura 13.

Basados en Dunham, (1990, p. 173) y Bobadilla (2012, p. 57), se presenta la solución a este problema.

Figura 13. *Área bajo la curva de una porción de circunferencia*.



Nota. Adaptado de *Journey Through Genius: The great theorems of mathematics* [Imagen], por Dunham,1990, https://jwilson.coe.uga.edu/emt725/References/Dunham.pdf

La presenta ecuación del semicírculo es

$$y = x^{\frac{1}{2}} + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

La expresión $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ puede ser reemplazada por su expansión binomial. Así, se tiene

$$y = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \cdots\right)$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} - \frac{7}{256}x^{\frac{11}{2}} - \cdots$$

Aplicando la regla I y la regla II, el área de la circunferencia está dada por la suma

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}\right)x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}\left(\frac{2}{9}\right)x^{\frac{9}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \cdots$$

Evaluando para $x = \frac{1}{4}$ y aproximando para los nueve primeros términos de la serie se obtiene que el área es igual a

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{160} - \frac{1}{3584} - \frac{1}{36864} - \cdots - \frac{429}{163208757248}$$
$$= 0.7677310678$$

Se identifica determinar el área ABD como una tarea $\mathbf{t_9}$, con el cálculo de área de una región con técnica $\boldsymbol{\tau_9}$ mediante el teorema del binomio y las reglas I y II. Esta técnica permite obtener la integral definida.

Bobadilla (2012) indica que, en este mismo libro, Newton reformula el problema general del cálculo en términos dinámicos mediante fluentes y fluxiones[8]. Para este, el área de una región es como una variable, por lo que se puede mencionar su fluxión y tomarla como una variable con la que también se puede operar. Newton considera que la curva que se genera a partir del movimiento de un punto genérico ocasiona que las coordenadas *x*, *y*, así como la cuadratura *z,* “fluyan” o cambien con el tiempo (p. 60).

Bobadilla (2012) agrega que Newton presenta un método más general, lo que le permite ampliar el dominio de su uso a funciones más generales, ya que sus antecesores limitaban a trabajar con funciones algebraicas racionales (p. 62).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue un matemático y filósofo alemán, creador también del cálculo diferencial. A diferencia de Newton, su visión fue más en el área de las matemáticas que en la física. Hacia 1676, Leibniz había desarrollado su cálculo infinitesimal y en 1684 publicaría su primer artículo respecto al tema, *Nova methodus pro maximis et minimis*, en la revista científica *Acta Eruditorium*. En él, muestra su método para calcular tangentes, y encontrar máximos y mínimos de una curva. En 1686, publica un segundo artículo titulado *De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum,* en el cual trata el problema inverso de las tangentes y el cálculo de las cuadraturas mediante su nuevo método, Además, muestra que la diferenciación y la integración son operaciones recíprocas (De Mora, s.f.).

La geometría de los indivisibles había considerado que la suma (infinita) de líneas o superficies debía representar una figura (finita). Ello implicaba una heterogeneidad entre los elementos de las sumas y estas mismas. Leibniz, con el triángulo característico, retoma el

[8] “Los fluentes son cantidades generadas por movimientos continuos y las fluxiones son las velocidades de dichos movimientos. Las fluxiones son proporcionales a los aumentos de las fluentes, cuando se consideran intervalos de tiempo iguales pero muy pequeños” (Bobadilla, 2012, p. 59).

problema de la homogeneidad, al plantear que las superficies están compuestas de pequeñas zonas y las líneas de pequeños segmentos, lo que permite conservar las relaciones al pasar de lo finito a lo infinitesimal. Esto debido a que las magnitudes son homogéneas (González, 2004, p. 8).

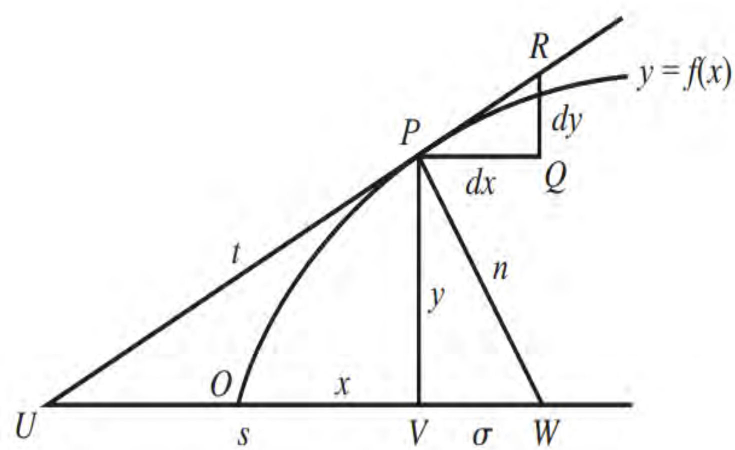
Edwards (1979) señala que Leibniz toma la idea del triángulo característico de Pascal, que lo usó en el *Tratado de senos de un cuadrante de circulo* para demostrar su proposición I[9] (p. 240).

El matemático lo generalizó para hallar relaciones de áreas de cualquier tipo de curvas, en el que el rol del radio del círculo de Pascal lo cumple ahora la normal (n) a la curva (Edwards, 1979, p. 241).

Triángulo característico de Leibniz (área de superficies de revolución)

A continuación, se presenta en la Figura 14 el triángulo característico, sus propiedades y una aplicación (Edwards (1982), Bobadilla (2012, p. 64) y Gonzales (2020, p. 40)).

Figura 14. *Triangulo característico.*



Nota. Adaptado de *The History of Mathematics* [Imagen], por Burton, 2011, https://jontalle.web.engr.illinois.edu/uploads/298/HistoryMath-Burton.85.pdf

Leibniz muestra las propiedades de su triángulo característico de la siguiente manera: para una curva $f(x)$, el triángulo característico es el de tipo rectángulo PQR de lados

[9] La suma de los senos (ordenadas) de un arco de un cuadrante (de un círculo) es igual a la porción de la base entre el seno extremo multiplicado por el radio (Edwards, 1979).

infinitesimales $PQ = dx$, $RQ = dy$ y el segmento PR, el cual es parte de la tangente que toca a la curva en P.

Al igual que Pascal y su triángulo, Leibniz sigue la misma metodología y establece primero semejanzas entre el triángulo característico y otros triángulos. Así, se nota en el gráfico que

Triángulo característico ~ ΔPVW

Leibniz indica que, cuando el triángulo característico se hace muy pequeño, el segmento PR puede ser considerado de la misma longitud que un diferencial de arco de la curva (ds).

De allí, se obtiene que

$$\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}$$

$$\mathrm{yds} = \mathrm{ndx}$$

Sumando los infinitesimales se llega a lo siguiente:

$$\int \mathrm{yds} = \int \mathrm{ndx}$$ [10]

Este resultado le permite Leibniz demostrar el siguiente resultado:

Si se multiplica por 2π a ambos términos, se logra que

$$\int 2\pi\mathrm{yds} = \int 2\pi\mathrm{ndx}$$

Así, $\int \boldsymbol{2\pi}\mathbf{yds}$ sería el área de la superficie de revolución obtenida por rotar la curva original alrededor del eje x. De esta manera, Leibniz indica que la relación de áreas encontrada mediante el triángulo característico permite reducir la obtención de superficies descritas por rotación a la obtención de cuadraturas de figuras planas como $\int \mathbf{2\pi ndx}$.

Se identifica encontrar una relación entre el área de una superficie de revolución y una región plana como una tarea $\mathbf{t_{10}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{10}}$, mediante las propiedades del triángulo característico de Leibniz. Dicha técnica permite obtener el área de una superficie de revolución, mediante la obtención de una integral definida.

[10] En el manuscrito de 1675 titulado "*Ejemplos del método inverso de las tangentes*", Leibniz utiliza el símbolo ∫ en vez de *omn* para identificar las sumas infinitesimales (Kline 1972/1992).

Leibniz en su respuesta a la *Epistolar prior* de Newton explica que su método está basado en una teoría general de transformaciones, ya que el área de cualquier figura, dada por cualquier ecuación, se reduce al área de otra figura equivalente y que no solamente sirve para series infinitas y aproximaciones, sino también para soluciones geométricas (Edwards, 1979, p. 245).

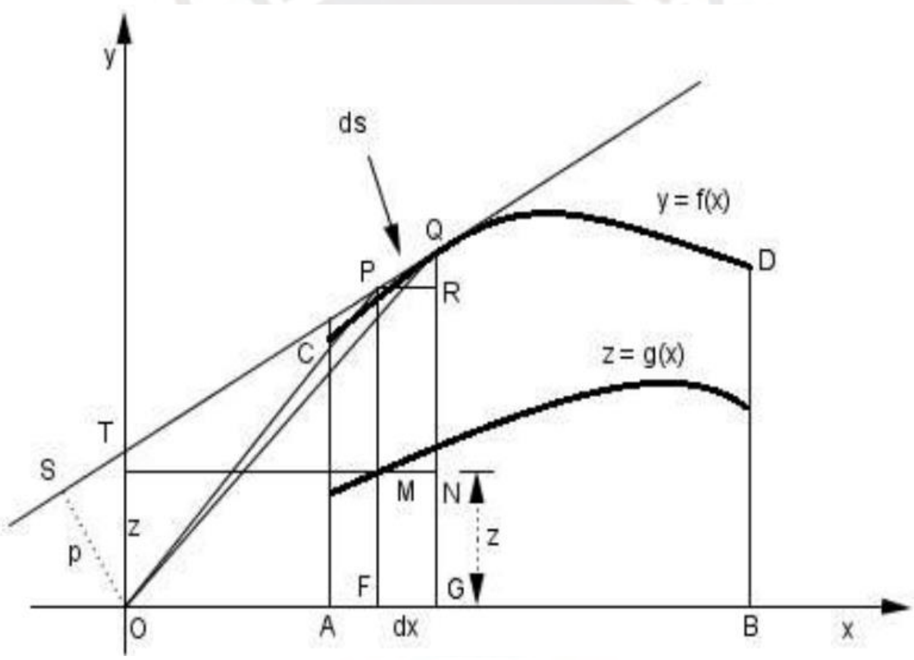
Con la ayuda de su triángulo característico, Leibniz plantea el método de transmutación.

Método de Transmutación (Cuadratura de la curva $f(x)$)

Basados en Edwards (1979) y Bobadilla (2012), se muestra la cuadratura de la curva $f(x)$ mediante el método de transmutación.

Sea la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ presentada en la Figura 15.

Figura 15. *El método de transmutación*.



Nota. Adaptado de *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico* [Imagen], por Bobadilla, 2012, https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/0615f602-24a7-434c-9eb4-539107340353/content

Sea la curva $y = f(x)$, x $\in [a, b]$.

Se toman los puntos $P\ (x, y)$ y $Q\ (x + dx, y + dy)$ sobre la curva $f(x)$, de tal manera que se forma el triángulo característico PRQ.

Sea la tangente determinada por el arco infinitesimal $ds \cong PQ$ y cuya prolongación corta al eje y en el punto $T\ (0, z)$.

Sea el segmento OS = p perpendicular a la tangente SQ.

Del grafico se denota que

$$\Delta PQR \sim^{11} \Delta TMP$$

Entonces,

$$\frac{TM}{PR} = \frac{MP}{QR}$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{y - z}{dy}$$

De allí que

$$\mathrm{z} = \mathrm{y} - \mathrm{x}\frac{dy}{dx}$$

Se tiene también que el triángulo OST es semejante al triángulo característico PRQ. Con ello, se obtiene que

$$\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$$

$$zdx = pds$$

Entonces, el área del triángulo infinitesimal está dada por

$$Area\ OCD = \frac{1}{2}pds = \frac{1}{2}zdx$$

Leibniz considera el sector OAB, el cual está acotado por y = $f(x)$ y los segmentos OA y OB. Ello está formado por la suma de los triángulos infinitesimales OPQ. Así, se obtiene

$$Área\ OCD = \tfrac{1}{2}\int_a^b z\,dx, \text{ donde } z = g(x)$$

Tal como se puede verificar de la gráfica, se tiene que

$$Área\ ACDB = Área\ ODB + Área\ OCD - Área\ OCA$$

Dicha expresión es equivalente a

[11] También se debe a Leibniz los símbolos "∼" para designar “es semejante a” y “≅” para “es congruente con” (Boyer, 1968/1987, p. 509).

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + Area\ OCD = \frac{1}{2}[xy]_a^b + Area\ OCD$$

A partir de allí, se obtiene que el valor del $Área\ ACDB$ es la siguiente:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{2}\left([xy]_a^b + \int_a^b z\,dx\right)$$

Se identifica hallar una expresión que permita realizar la cuadratura de la curva $f(x)$, como una tarea **t_{11}**, con el cálculo de área de una región con técnica **τ_{11}** mediante el uso del triángulo característico. Con ello, se puede hallar una expresión llamada el “método de trasmutación” para obtener la integral definida.

Newton resolvió los problemas de áreas en términos de cambio relativo. Para él la diferenciación y su proceso inverso resolvían todos los problemas de cálculo, mientras que Leibniz pensaba en términos de suma (Burton, 2011, p. 501).

Los matemáticos de comienzos y mediados del siglo XVII querían un método general para resolver algunos de los más importantes problemas que habían heredado. El éxito del cálculo de Newton y Leibniz satisfizo esta demanda (Kitcher, 1981, p. 231).

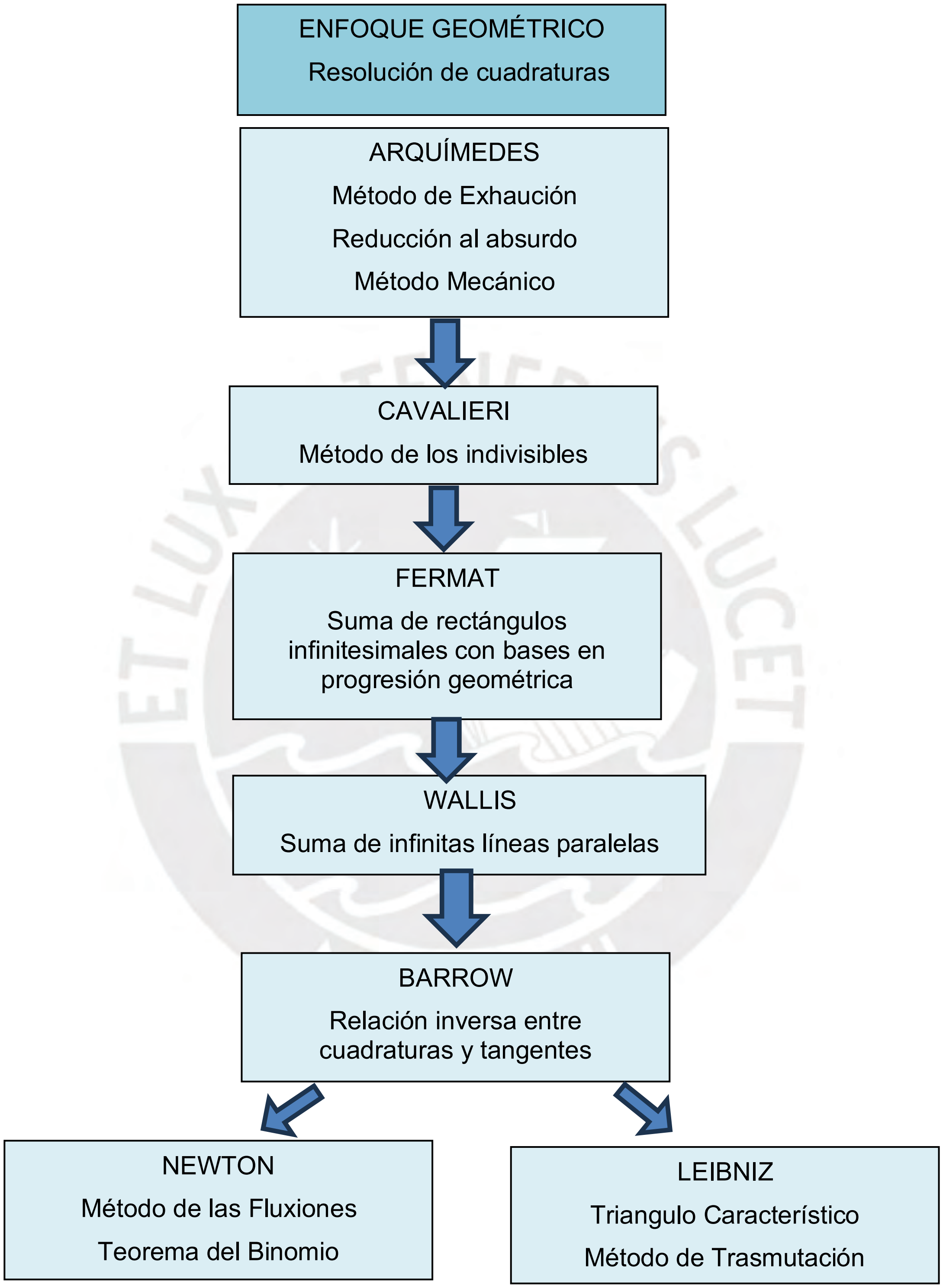
Kline (1972/1992) indica que el desarrollo del cálculo infinitesimal fue acompañado de esfuerzo para dotarlo también de los fundamentos de los que carecía. Newton, Leibniz y los libros que aparecieron para explicar los conceptos y justificar los procedimientos incrementaron la confusión existente (p. 567).

La mayoría de los matemáticos del siglo XVIII hicieron algún esfuerzo por darle lógica al cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, pero finalmente todos sus esfuerzos resultaron en vano (Kline, 1972/1992, p. 576).

En consecuencia, la integral dejó de ser solo una herramienta para el cálculo de cuadraturas para paulatinamente llegar a convertirse en un concepto nuevo con sus propios problemas y métodos (Bobadilla, 2012). No obstante, no fue hasta el siglo XIX que el cálculo infinitesimal alcanzó el rigor requerido.

En la Figura 16, se presenta un resumen del enfoque geométrico de la integral definida, con los autores involucrados y las técnicas que utilizaron para resolver las distintas tareas predominantes en su época.

Figura 16. *Enfoque Geométrico (autores y técnicas)*.



Fuente. Elaboración propia

3.1.2 Enfoque analítico de la Integral

Boyer (1968/1987) indica que el estudio de los procesos infinitos (el análisis) fue entendido por Newton y Leibniz, como aquel referido solo a las llamadas magnitudes continuas, tales como, áreas, velocidades, etc. La aparición del concepto función y su intento por aclararlo originó la tendencia de la "aritmetización del análisis" (p. 685).

Los trabajos sobre las cuerdas vibrantes hicieron ampliar el concepto de función a cualquier curva de trazo libre, como son las funciones mixtas, irregulares o discontinuas. Cabe resaltar que ya no era posible usar solo como guía las funciones más simples (como las continuas simples o con discontinuidades aisladas) (Kline, 1972/1992, p. 577).

D'Alembert y Euler solucionaron al problema de las cuerdas vibrantes utilizando un par de funciones arbitrarias; por otro lado, Daniel Bernoulli encontró una solución en términos de una serie infinita de funciones trigonométricas. Esta última solución parecía menos general y a la vez menos apropiada, pero para Fourier este no era el caso y lo demostró en 1824 (Boyer, 1968/1987).

Joseph Fourier (1768-1830) presenta en su célebre obra *Théorie analytique de la chaleur*, de 1822, la preocupación principal de Fourier. Esta era la difusión del calor en los cuerpos sólidos. No obstante, durante el desarrollo matemático, demuestra que una función arbitraria $f\ (x)$ puede ser expresada en el intervalo [-π, π], como una serie trigonométrica infinita, tal como lo había sugerido Daniel Bernoulli a finales de 1740 (Hawking, 2010, p. 426).

Sea la serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$, hallar los coeficientes a_0, a_n, b_n[12]

A continuación, basados en (Hawking, 2010), se muestra la técnica que usó Fourier para hallar los coeficientes de la serie.

Para determinar estos valores, empezó suponiendo que esa serie era una función arbitraria:

$$f\ (x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\}$$

Así, procedió de la siguiente manera:

- Integró en el intervalo de [-π, π] ambos lados de la igualdad y halló a_0.

[12] Dicho problema fue extraído de la obra *Dios creó los números* (Hawking, 2010, p. 426)

- Multiplicó ambos lados de la igualdad por cos (mx) e integró en el intervalo de [-π, π], y halló a_n.
- Multiplicó ambos lados de la igualdad por sen (mx) e integró en el intervalo de [-π, π], y halló a_n.
- Para hallar el valor de los coeficientes b_n, multiplicó a ambos lados de la ecuación por sen (mx) e integró entre los limites [-π, π].

Para esto Fourier, realiza dos suposiciones importantes:

- $f\ (x)$ es integrable en el intervalo [-π, π].
- La integral de las sumas infinitas es igual a la suma infinita de las integrales, es decir,

$$\int_{-\text{л}}^{\text{л}}\left[\frac{1}{2}a_0+\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\text{л}}^{\text{л}}\left[\frac{1}{2}a_0+a_n\cos(nx)+ b_n\operatorname{sen}(nx)\ \right]dx$$

Con ello, se obtiene lo siguiente:

$$a_0=\frac{1}{\text{л}}\int_{-\text{л}}^{\text{л}}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\text{л}}\int_{-\text{л}}^{\text{л}}f(x)\cos\ (nx)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\text{л}}\int_{-\text{л}}^{\text{л}}f(x)\operatorname{sen}\ (nx)dx$$

Se identifica hallar los coeficientes $\boldsymbol{a_0, a_n, b_n}$ como una tarea $\mathbf{t_{12}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{12}}$ usando la técnica indicada anteriormente expuesta. Con ello, dicha técnica permite obtener los coeficientes.

Kline (1972/1992) señala que Fourier consideró la integral a la manera de Leibniz, es decir, como una suma y, por eso, no le fue difícil manejar funciones $f(x)$ incluso discontinuas. Puesto que para hallar los coeficientes de su serie eran necesarias las integrales de tales funciones, fue necesario abordar el problema del significado analítico de la integral, cuando $f(x)$ es discontinua (p. 1263).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), con la publicación de tres de sus libros *Cours d´analyse de l´ecole polytechnique* (1821)*, Resume des lecons sur le calcul infinitesimal* (1823*),* y *Lecons sur le calcul differentiel* (1829), aportó al cálculo infinitesimal elemental la forma que actualmente presenta (Boyer, 1968/1987, p. 647).

Cauchy desarrolló la primera teoría de la integral, la cual no era dependiente de la función particular ni tampoco del cálculo diferencial; para esto, desarrolló nuevas bases, las cuales se desprendían de las intuiciones geométricas (Hawking, 2010).

En consecuencia, abandona la definición de la integral definida como la antiderivada en favor de la definición como el límite de sumas, ya que era absolutamente necesaria para un riguroso cálculo (Boyer, 1968/1987, p. 648).

Según Mateus-Nieves (2021), Cauchy "a través de los conceptos de límite, función y convergencia, logró posicionar una definición analítica de integral definida para funciones continuas" (p. 1608).

Integral Definida

Con base en a Cauchy (1823, p. 81), Cauchy (1821/1994, p. 287), Grabiner (2005, p. 235) y Hawking (2010, p. 571), se mostrará la definición que dio Cauchy en la lección 21 de su obra titulada *Resume des lecons sur le calcul infinitesimal*.

Sea $f(x)$ continua y monótona entre dos limites finitos $x = x_0$ y $x = X$, que se designa por $x_1, x_2 \dots\dots\dots x_{n-1}$ nuevos valores intercalados entre los límites. Se usarán dichos valores para dividir la diferencia $X - x_0$ en estos elementos:

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \dots\dots, X - x_{n-1}$$

Multiplica cada elemento por el valor f(x) correspondiente al origen de este mismo elemento, a saber, el elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, el elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1)$ y así sucesivamente. A continuación, se suman los productos y se obtiene:

$$S = (x_1 - x_0)\, f(x_0) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \dots\dots\dots + (X - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

Cauchy genera que los valores numéricos de los elementos de $X - x_0$ sean aun menores. Para ello, reduce los valores intercalados entre los límites. Así, le permite justificar el cambio de $f(x_0)$ por $f[x_0 + \theta_0\,(x_1 - x_0)\,]$, $f(x_1)$ por $f[x_1 + \theta_1\,(x_2 - x_1)\,]$ y así sucesivamente.

Así, se obtienen elementos de la suma S de la forma:

$(x_1 - x_0)\, f[x_0 + \Theta_1\,(x_1 - x_0)\,]$, $(x_2 - x_1)\, f[x_1 + \theta_1\,(x_2 - x_1)\,]$, y así sucesivamente.

Siendo: 0 < θ <1

Entonces, el nuevo valor de S quedará de la siguiente forma:

$$S = (x_1 - x_0)\, f[x_0 + \theta_0\,(x_1 - x_0)\,] + (x_2 - x_1)\, f[x_1 + \theta_2\,(x_2 - x_1)\,] + \cdots + (X - x_{n-1})$$
$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}\,(X - x_{n-1})\,]$$

Esto genera que

$$f[x_0 + \theta_1\,(x_1 - x_0)\,] = f(x_0) \pm \varepsilon_0$$

$$f[x_1 + \theta_2\,(x_2 - x_1)\,] = f(x_1) \pm \varepsilon_1$$

•

•

$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}\,(X - x_{n-1})\,] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}$$

Se reemplaza en la suma S:

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[\,f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}$$

Se desarrollan los productos y quedaría:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$
$$\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

Añade que si los elementos $(x_1 - x_0), (x_2 - x_1) \ldots\ldots (X - x_{n-1})$, tienen valores numéricos pequeños, entonces, cada una de las cantidades $\pm \varepsilon_0, \pm \varepsilon_1, \ldots. \pm \varepsilon_{n-1}$, diferirá muy poco de cero y, debido a esto, un caso similar puede generarse en la siguiente suma:

$$\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

Cauchy concluye que, si disminuye indefinidamente el valor numérico de los elementos, mientras aumenta su número el valor de S, será constante; es decir, ese valor de S alcanzará un cierto limite que dependerá de la función $f(x)$, y los valores limitantes x_0 y X atribuidos a la variable x.

Así, nombra a ese límite como integral definida, mencionando que la forma más simple para denominarla es

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$ [13]

[13] Cauchy (1823) sustituye la notación de Fourier $\int f(x)dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$ por $\int_a^b f(x)dx$.

Se identifica definir la integral definida como una tarea **t_{13}**, probando la existencia del área bajo la curva con técnica **τ_{13}** mediante la noción de limite y sumando elementos cada vez más pequeños. Dicha técnica permite obtener la integral definida.

Cauchy demuestra, a continuación, la relación que liga la integral con la antiderivada utilizando el teorema del valor medio.

Primer teorema fundamental del cálculo:

Con base en Cauchy (1823, p. 101), Cauchy (1823/1994, p. 311), Grabiner (2005, p. 239) y Bobadilla (2012, p. 82), se mostrará la definición que dio Cauchy en la lección 26 de su obra titulada *Resume des lecons sur le calcul infinitesimal*.

Sea $\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, en el que f(x) es finita y continua en el intervalo [x_0, x]

Se sabe que

$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)f\ [x_0 + \theta\,(X - x_0)]$, $0 < \theta < 1$

Reemplazando los términos, se tendría que

$\mathfrak{F}(x) = (x - x_0)f\ [x_0 + \theta\,(x - x_0)]$, de tal forma que $\mathfrak{F}(x_0) = 0$

Se sabe que

$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx$, $x_0 \leq \xi \leq X$

Se tendría, entonces, que

$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx$, donde $\alpha>0$

Acomodando los términos, se lograría mostrar esto:

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx$$

Así, se tiene que

$$\int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f\ [x + \theta\,(\alpha)]$$

Para finalmente llegar a

$$\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f\ [x + \theta\,\alpha]$$

Dividiendo ambos miembros entre α y tomando limite cuando $\alpha \to 0$ se concluirá que

$$\mathfrak{F}'(x) = f(x)$$

Se identifica demostrar algebraicamente el primer teorema fundamental del cálculo como una tarea $\mathbf{t_{14}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{14}}$ mediante propiedades encontradas por Cauchy asociadas a su definición de integral definida. Dicha técnica permite obtener la demostración.

Bobadilla (2012) indica que una vez que se han definido la integral y la derivada de manera separada recién aparece la relación inversa.

Segundo teorema fundamental del cálculo: encontrar el valor general de y que satisface $\boldsymbol{dy = f(x)\,dx}$, de la cual $\boldsymbol{f(x)}$ es continua

Con base en Cauchy (1823), se mostrará la definición que otorgó Cauchy en la misma lección 26.

Cauchy usa el teorema hallado anteriormente y despeja la variable y:

$$y = \int f(x)dx$$

Expresa y de manera general:

$$y = \int_{x_0}^{X} f(x)dx + \tilde{\omega}(x) \text{ donde } \tilde{\omega}'(0) = 0$$

Cauchy menciona que del teorema anterior se tiene que $\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$ es un valor particular de *y*. Usando ese razonamiento, indica que, de manera general, puede definirse $\mathfrak{F}(x)$ como

$$\mathfrak{F}(x) = F(x) + \tilde{\omega}(x)$$

$F(x)$ es un valor particular de y. Con ello, acomodando los términos se tiene

$$\tilde{\omega}(x) = \mathfrak{F}(x) - F(x)$$

Evaluando en x_0 se tiene que

$$\tilde{\omega}(x) = \tilde{\omega}(x_0)$$

Entonces,

$$\mathfrak{F}(x) - F(x) = \mathfrak{F}(x_0) - F(x_0)$$

De los cálculos anteriores se tiene que $\mathfrak{F}(x_0) = 0$. Con ello, se obtiene

$$\mathfrak{F}(x) - F(x) = -F(x_0)$$

$$\mathfrak{F}(x) = F(x) - F(x_0)$$

Reemplazando $\mathfrak{F}(x)$, se tiene que

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(x) - F(x_0)$$

Se identifica demostrar algebraicamente el segundo teorema fundamental del cálculo como una tarea $\mathbf{t_{15}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{15}}$ mediante el primer teorema fundamental del cálculo y propiedades encontradas por Cauchy. Dicha técnica permite obtener la demostración.

Kline (1972/1992) señala que Cauchy logró definir la integral para cualquier integrando continuo y con discontinuidades de salto finito e infinito, pero, a medida que el análisis se desarrollaba, se manifestó la necesidad de considerar integrales de funciones de comportamiento más irregular. Fue Riemann, quien en su artículo de 1854 retomó el tema de la integrabilidad en este tipo de funciones (p. 1265).

Bernhard Riemann (1826-1866), en 1854, escribe un artículo titulado *Sobre la representatividad de una función mediante una serie trigonométrica*, publicado en 1868 (después de su muerte). Aquí Riemann impulsó el desarrollo de teorías de la integral y la medida, que llegaron a su ápice con la teoría de Lebesgue en 1904 (Hawking, 2010).

Integral Definida, ¿Qué hay que entender por $\int_a^b f(x)dx$?[14]

Tomando como base las investigaciones de Kline (1972/1992, p. 1266), García (p. 4), Hawking (2010, p. 745) y Bobadilla (2012, p. 89), se detallará la definición que postuló Riemann.

Riemann comienza su definición de integral definida de la siguiente manera:

Sean $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_{n-1}$ valores entre *a* y *b*, que se suceden de acuerdo con su magnitud.

Sean $x_1 - a = \delta_1$; $x_2 - x_1 = \delta_2$; $x_3 - x_2 = \delta_3, \ldots\ldots, b - x_{n-1=}\delta_n$

Sea $0 < \varepsilon < 1$

Entonces, análogamente, como hizo Cauchy, obtiene que

$$S = \delta_1 f[a + \varepsilon_1\, \delta_1\,] + \delta_2 f[x_2 + \varepsilon_2\, \delta_2\,] + \cdots + \delta_n f[x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}\, \delta_n\,]$$

[14] Riemann empieza con esta pregunta la explicación de su definición.

Riemann indica que si esa suma tiene la propiedad de que tan pronto los δ se hagan infinitamente pequeños, la suma se aproxima a un límite fijo A. Con ello, ese valor será $\int_a^b f(x)dx$. Sin embargo, si la suma no tiene esa propiedad, $\int_a^b f(x)dx$ no significa nada.

Riemann, entonces, propone una manera más general de definir la integral definida, no solo para funciones continuas, sino también para integrandos con funciones discontinuas.

Sea $f(x)$ acotada y la diferencia $\sup\{f(x): x \epsilon[a,b]\} - \inf\{f(x): x \epsilon[a,b]\}$., la oscilación máxima de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

Sea D_n que representa la oscilación en el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$.

Se tiene, entonces, que $D_1 \quad D_2 \ldots\ldots D_n$ son las oscilaciones de la función en sus respectivos intervalos.

Entonces,

$$f \text{ es integrable si y solo si } \lim_{\delta_n \to 0} \sum_n D_n \delta_n$$

Sea $\sigma > 0$ y una partición P, de tal manera que $\|P\|$ sea su norma.

Sea $\lambda\,(P,\sigma)$ la suma de las longitudes de la partición, en los cuales la oscilación de la función es mayor que σ.

Entonces,

$$f \text{ es integrable si y solo si } \lim_{\|P\| \to 0} \lambda\,(P,\sigma) = 0$$

Kline (1972/1992) señala que la condición de oscilación le permitió a Riemann reemplazar las funciones continuas por funciones con discontinuidades aisladas y también por funciones que tengan, en un intervalo finito, un conjunto denso de discontinuidades. Añade que esto le permitió prescindir de la continuidad al momento de definir la integral (p.1266).

Se identifica definir la integral definida como una tarea $\mathbf{t_{16}}$, con la existencia del área bajo la curva con técnica $\boldsymbol{\tau_{16}}$ mediante el uso de los primeros pasos de Cauchy y usando, además, el concepto de oscilación. Así, se permite ampliar el concepto de integral definida.

Jean Gaston Darboux (1842-1917), en su *Mémoire sur les fonctions de discontinues* de 1875, toma como base los resultados de Riemann y Hankel para clasificar las funciones discontinuas en integrables y no integrables en términos del concepto de oscilación de Riemann (Bobadilla, 2012).

Gonzales (2020) indica que, en el estudio realizado por Darboux, se muestran dos argumentos fundamentales: representar la definición de integral definida mediante dos sumas, considerando cada partición del intervalo; el segundo, se puede considerar una cota superior y una inferior para la integral definida. Por estos aportes, Darboux es reconocido en el campo del análisis (p. 61).

Integral definida

Se presenta, a continuación, la definición de Darboux basada en la definición de Riemann: Darboux (1875, p. 70) y Bobadilla (2012, p. 114).

Darboux, al igual que Cauchy y también Riemann, usa la siguiente suma:

$$S = \delta_1 f[a + \Theta_1 \delta_1] + \delta_2 f[x_2 + \Theta_2 \delta_2] + \cdots + \delta_n f[x_{n-1} + \Theta_{n-1} \delta_n]$$

Designa, por consiguiente, M_i y m_i como los limites máximo y mínimo de la función en el i-ésimo intervalo. El término $\delta_i f[x_i + \Theta_{i+1} \delta_{i+1}]$ seguirá estando comprendido cualquiera sea el Θ_{i+1} entre $\delta_i M_i$ y $\delta_i m_i$, y se acercará lo más que pueda a una de esas cantidades. Así, la suma S quedará comprendida entre las sumas:

$$M = \delta_1 M_{1+\ldots+} \delta_n M_n,$$

$$m = \delta_1 m_{1+\ldots+} \delta_n m_n$$

Define Δ como la oscilación de la función en el intervalo [a,b] como la diferencia entre el límite máximo M y el límite mínimo m de la función f en el intervalo [a,b].

Es decir, $$\Delta = M - m$$

$$\Delta = \Delta_1 \delta_1 + \Delta_2 \delta_2 + \cdots + \Delta_n \delta_n$$

Para n suficientemente grande y todos los intervalos δ que tiendan a cero, las tres sumas precedentes, cualquiera que sea la función considerada continua o discontinua, tendrán cada uno un límite finito y determinado cualquiera sea el Θ . Es necesario y suficiente que los límites M y m sean iguales.

Si los límites son $M_{ab}, m_{ab}, \Delta_{ab}$ con $\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{ab}$

(Darboux demuestra con anterioridad la existencia de M_{ab} y m_{ab})

Entonces, se tendría que $\Delta_{ab} = 0,\ M_{ab} = m_{ab}$

Con ello, la condición de Riemann $\lim_{\|P\| \to 0} \lambda (P, \sigma) = 0$ es necesaria y suficiente para que la suma S tenga limite.

Es decir, $\lim_{\|P\| \to 0} \lambda\,(P, \sigma) = \Delta_{ab} = 0$

Si la condición se cumple, entonces, Darboux concluye que

$$\lim S = \int_a^b f(x)dx$$

Se identifica definir la integral definida como una tarea **t_{17}**, con la existencia del área bajo la curva con técnica **τ_{17}** mediante las sumas superiores e inferiores y usando también una de las condiciones de Riemann. Así, esta permite obtener la integral definida.

En el mismo artículo, Darboux demuestra que el primer teorema fundamental del cálculo se cumple, en el sentido amplio, para funciones integrables también.

En la década de los 70 y 80 del siglo XIX, se construyeron funciones con diversos conjuntos infinitos de discontinuidades y se encontró que no siempre eran integrables en el sentido de Riemann. La noción de integral se extendió a funciones no acotadas y a varias integrales impropias. La extensión más significativa se llevó a cabo por Lebesgue, (Kline, 1972/1992, p. 1268).

Henri Leon Lebesgue (1875-1941), en la introducción de su tesis doctoral *Integrale, Longueur, Aire* de 1902, expresa que las bases de la integral de Riemann están en la medida de objetos geométricos. El concepto de medida permitió a Lebesgue establecer una definición de integral capaz de solucionar los problemas implícitos en la integral de Riemann (Recalde, 2007, p.119).

Integral definida (definición analítica)

Basados en Crisóstomo (2012, p. 131), se presenta la definición analítica de la integral definida de Lebesgue.

Sea $x \epsilon [a, b], m \leq f \leq M$ y a_n una partición de $[m, M]$

Sea $E_i = \{x: a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}$ un conjunto medible

Sea el conjunto E_f comprendido entre los rectángulos generalizados de base E_i y alturas respectivas a_i y a_{i+1}.

La medida de E_f estaría, entonces, entre $\sum a_i m(E_i)$ y $\sum a_{i+1} m(E_i)$.

Sabiendo que la diferencia entre estas dos sumas tiende a cero con la norma de la partición $[m, M]$, se puede afirmar que

$$\int_a^b f = \sum a_i m(E_i) = \sum a_{i+1} m(E_i)$$

Se identifica definir la integral definida como una tarea **t_{18}**, con la existencia del área bajo la curva con técnica τ_{18} mediante la noción de medida y conjunto medible. Ello permite obtener la integral definida.

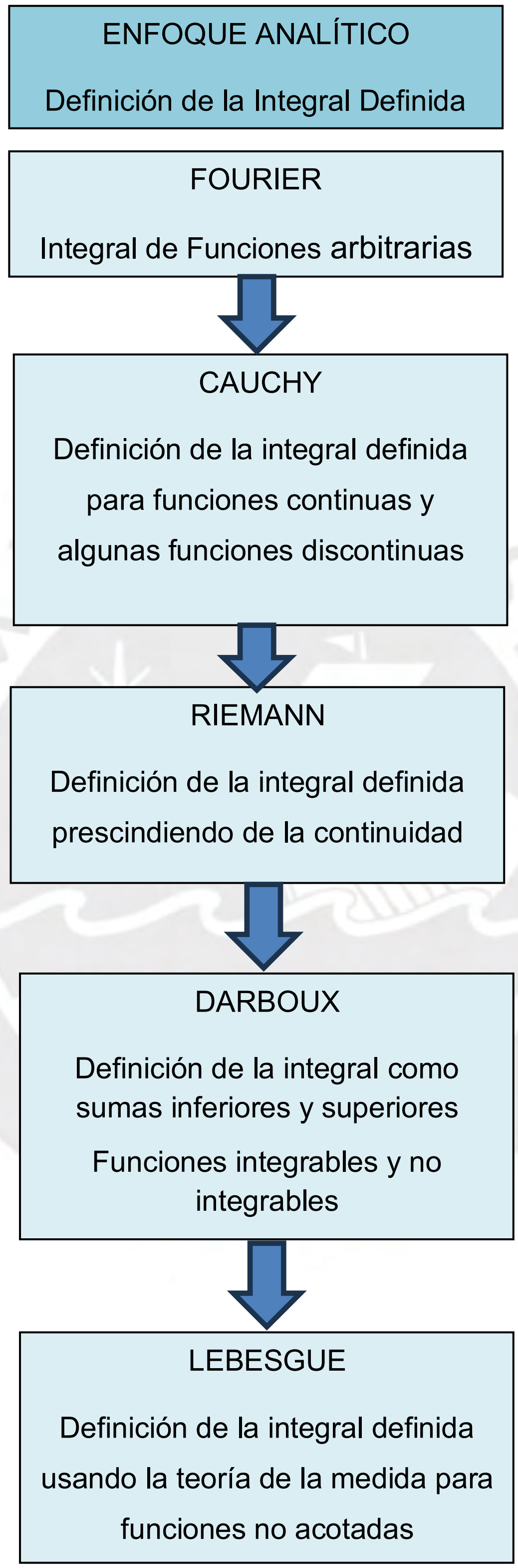
Lebesgue indica que una generalización de la definición de la integral definida debe permitir la resolución de los mismos problemas de siempre, por ejemplo, la de encontrar una función conociendo su derivada, resolver el problema fundamental del cálculo, entre otros, que han sido parte de la formación del concepto (Hawkins, 1975, p.131).

Finalmente, Kline (1972/1992) indica que, en el sentido de Lebesgue, una función ya no debe ser necesariamente continua para ser integrable, por lo cual puede decirse que esta definición es más general que la de Riemann; la aplicabilidad de la integral de Lebesgue puede extenderse, incluso, hasta las funciones no acotadas (p. 1379).

Así, finaliza la definición de Lebesgue y, por ende, el análisis historio-epistemológico que llevó a recorrer las tareas presentadas en los diversos periodos históricos. Ello, como se observó, ha enfrentado a los intelectuales de cada época a retos cada vez mayores para hallar la solución a dichas tareas. Así, esto permitió obtener un extenso conocimiento y desarrollo matemático, que permite el acceso a conocer uno de los principales conceptos del análisis matemático.

En la Figura 17, se presenta un resumen del enfoque analítico de la integral definida con los autores involucrados y las técnicas que utilizaron para resolver las distintas tareas predominantes en su época.

Figura 17. *Enfoque Analítico (autores y técnicas)*.



Fuente. Elaboración propia.

A continuación, se muestra en la Tabla 4 un resumen de todas las fechas y los autores con sus respectivas tareas resueltas y técnicas usadas.

Tabla 4. *Resumen del análisis histórico-epistemológico*.

Año	Autor	Tarea	Técnica
Siglo II a.c.	Arquímedes	**t_1**: Cuadratura de un segmento parabólico	τ_1: Método mecánico. τ_2: Método de exhaución con reducción al absurdo.
1635	Cavalieri (Roverbal)	**t_3**: Área de la elipse	τ_3: Primer principio de Cavalieri
		t_4: Cuadratura de la cicloide	
1629	Fermat	**t_5**: Cuadratura de la curva y^n	τ_5: Método de exhaución con rectángulos infinitesimales inscritos o circunscritos cuyas bases están en progresión geométrica.
1655	Wallis	**t_6**: Área bajo la curva y^n	τ_6: Suma de infinitas líneas paralelas ayudado del método de inducción incompleta.
1670	Barrow	**t_7**: Relación entre el área de una región y la recta tangente	τ_7: Construcciones geométricas.
1711 (1669) 1736 (1672)	Newton	**t_8**: Si $\frac{an}{m+n}x^{\frac{n+m}{n}} = Área\ ABD$, entonces $ax^{\frac{m}{n}} = y$	τ_8: Método de las fluxiones.
		t_9: Área de un segmento de circulo	τ_9: Método de fluxiones y Teorema del binomio.
1676	Leibniz	**t_{10}**: Área de superficie de revolución	τ_{10}: Triángulo característico.
		t_{11}: Cuadratura de la curva $f(x)$	τ_{11}: Método de transmutación
1822	Fourier	**t_{12}**: Sea la serie $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Hallar los coeficientes a_0, a_n, b_n	τ_{12}: Integración de una función arbitraria.

1823	Cauchy	**t_{13}**: Definición de la integral definida. **t_{14}**: Primer teorema fundamental del cálculo. **t_{15}**: Segundo teorema fundamental del cálculo.	τ_{13}: Limites, función y convergencia.
1854 (1868)	Riemann	**t_{16}**: Definición de integrales de funciones de comportamiento más irregular.	τ_{16}: Condición de oscilación de una función en un intervalo.
1875	Darboux	**t_{17}**: Definición de la integral definida fundamentándose en Riemann.	τ_{17}: Sumas inferiores y sumas superiores.
1904	Lebesgue	**t_{18}**: Definición de la integral definida ampliada a funciones no acotadas.	τ_{18}: Noción de medida y conjunto medible.

Fuente. Elaboración propia.

Se considerará ahora los usos de la integral definida en las aplicaciones de los cursos de la carrera de ingeniería industrial.

3.2 Aplicaciones de la integral definida en cursos de la carrera de ingeniería

Esta investigación se limita en estudiar la integral definida simple, la cual sirve de base para formas más complejas de la integral, como las integrales dobles, triples, de línea, etc., por lo cual se mostrarán aplicaciones que solo involucren una integral definida. Para ello, se toman en cuenta dos aplicaciones: la primera en un curso de Ingeniería Eléctrica y la otra en un curso que puede ser llevado en Ingeniería Industrial, Ingeniería Química o Ingeniería Agroindustrial; todas estas carreras son de la UNMSM.

Procesamiento digital de señales

En este curso de séptimo ciclo de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la UNMSM, se enseñan las series de Fourier. Como se mostró en el análisis histórico epistemológico, está presentada por los elementos de la siguiente función:

$$f\ (x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

La técnica de solución (**τ_{12}**) consiste primero en definir la existencia de la integral definida de la función periódica $f\ (x)$ en el intervalo $< x_0 - T, x_0 + T >$. T es el periodo de la función; luego, se debe hallar los coeficientes (a_0, a_n, b_n), calculando las integrales definidas que conforman cada coeficiente.

Extraemos de Alcaraz (s.f.) la siguiente aplicación:

Graficar y determinar los coeficientes de Fourier de la siguiente función:

$$f\ (t) = \begin{cases} -k & si\ \ -\pi \leq t \leq 0 \\ k & si\ \ \ \ 0 \leq t \leq \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad f\ (t + 2\pi) = f\ (t)$$

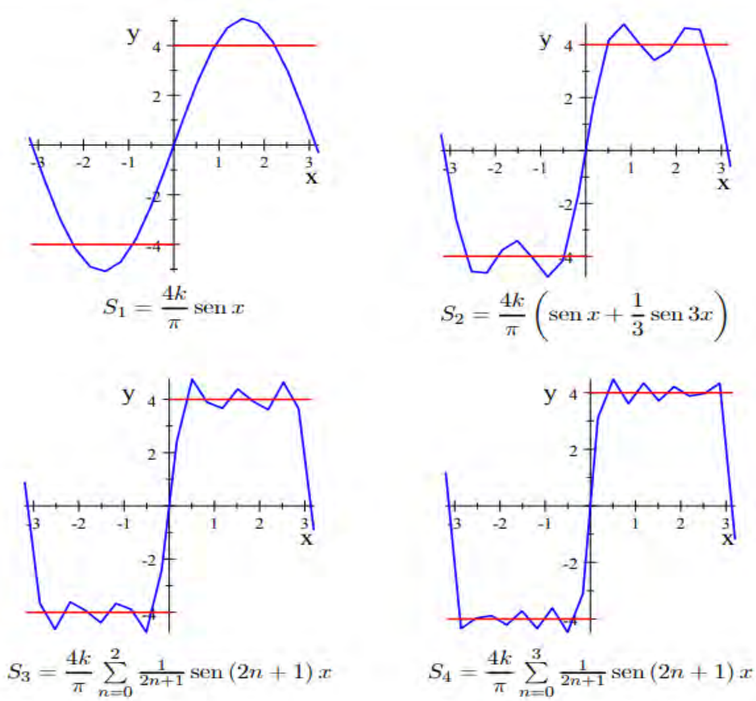
Se parte sabiendo que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ (nx)dx \quad \text{para todo } n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}\ (nx)dx \quad \text{para todo } n > 0$$

Así, se aprecia en la Figura 18, las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{4}$ de la serie de Fourier:

Figura 18. *Serie de Fourier.*



Nota. Adaptado de *Series y transformadas de Fourier* [Gráfico], por Alcaraz, s.f., https://www.dmae.upct.es/~paredes/am_ti/apuntes/Tema%202.%20Series%20y%20transformadas%20de%20Fourier.pdf

Alcaraz (s.f.) señala que “funciones de este tipo se presentan como fuerzas externas que actúan sobre sistemas mecánicos, fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, etc.” (p. 6).

Se identifica hallar los coeficientes de una serie de Fourier como una tarea $\mathbf{t_{19}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{19}}$ mediante la integral definida de una función periódica. Dicha técnica permite obtener los coeficientes.

Fisicoquímica

En este curso de cuarto ciclo de la carrera de Ingeniería Industria, Ingeniería Química e Ingeniería Agroindustrial de la UNMSM, se estudia el comportamiento de los gases reales a diferentes condiciones de presión (P), volumen (V) y temperatura (T).

Extraemos de Gonzales (2020) la siguiente aplicación: “Calcular el trabajo de un gas ideal si se conoce el número de moles (n), su temperatura (T) y si sus moles se expanden isotérmica y reversiblemente desde un volumen inicial (V_i) hasta un volumen final (V_f)" (p. 213).

Para resolver esta tarea, Gonzales (2020) indica que hay que Identificar las variables que intervienen en la representación de la integral definida que representa el trabajo y luego aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo. Además, menciona que, para el cálculo del trabajo en una expansión isotérmica y reversible, se reemplazan los datos en la siguiente expresión:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV$$

Como condiciones están que la temperatura está dada en grados Kelvin ($°k$), $R = 8.314 \frac{j}{°k \text{ mol}}$ y V es la única variable del integrando.

Se identifica calcular el trabajo realizado por un gas real como una tarea $\mathbf{t_{20}}$, con técnica $\boldsymbol{\tau_{20}}$ mediante la integral definida de la función $f\left(\frac{1}{V}\right)$. Dicha esta técnica permite obtener el trabajo realizado por el gas real.

Finalmente, se verá el uso de la integral definida en otro libro de Cálculo II.

3.3 Aplicaciones de la integral definida en libros de texto de Cálculo II

En el sílabo del curso de Cálculo II de la UNMSM, se encuentran diversos libros que son usados como fuente de información para la enseñanza del curso. De estos libros, se escogió el libro de James Stewart titulado *Cálculo*. Fonseca (2004) indicaría que de ahí se extrajo una tarea del tipo abierto y se espera encontrar en el libro de texto analizado para valorar su completitud.

La aplicación en mención se muestra en la Figura 19.

Figura 19. *Depreciación de una maquinaria*.

79. Una compañía manufacturera tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Ya que cada vez que la máquina se somete a una reparación se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones.

a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación.

b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por que desearía la compañía minimizar C?

c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

Nota. Adaptado de *Cálculo* [Imagen], por Stewart, 2012, https://www.fbioyf.unr.edu.ar/evirtual/pluginfile.php/107533/course/section/2765/calculo-james-stewart-7ed.pdf

Hemos recurrido al libro de Anderson et al. (2012), el cual es un solucionario de los problemas propuestos del libro *Cálculo*. Con base en este libro, se muestra la solución de la tarea.

a) Sea $F(x) = \int_0^t f(s)ds$. Así, por el primer teorema fundamental del cálculo integral, se tiene

$$F'(x) = f(x)$$

Esta es la tasa de depreciación, por lo que $F(x)$ representa la pérdida de valor en el intervalo $[0, t]$.

b) $C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right] = \frac{A+F(x)}{t}$

Ello representa el costo promedio por unidad en el intervalo $[0, t]$, asumiendo que solo hay una reparación en ese periodo, por lo que la compañía debería querer minimizar $C(t)$.

c) Por el primer teorema fundamental del cálculo integral, se tiene que

$$C'(t) = -\frac{1}{t^2}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right] + \frac{1}{t}f(t)$$

Se plantea $C'(t) = 0$ para hallar los mínimos de la función $C(t)$. Entonces, se tiene que $\frac{1}{t^2}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right] = \frac{1}{t}f(t)$, y se obtiene como resulta

$$f(t)=\frac{1}{t}\left[A+\int_0^t f(s)ds\right]=C(t)$$

Si $t=T$, se obtiene finalmente que $C(T)=f\ (T)$

Se identifica determinar el significado de las expresiones requeridas como una tarea **t_{21}**, con técnica **τ_{21}** mediante el primer teorema fundamental del cálculo integral y propiedades de máximos y mínimos de una función. Dicha esta técnica permite obtener el significado de las expresiones pedidas.

Seguidamente, en la Tabla 5, se muestran los subtipos de tarea y tipos de tarea.

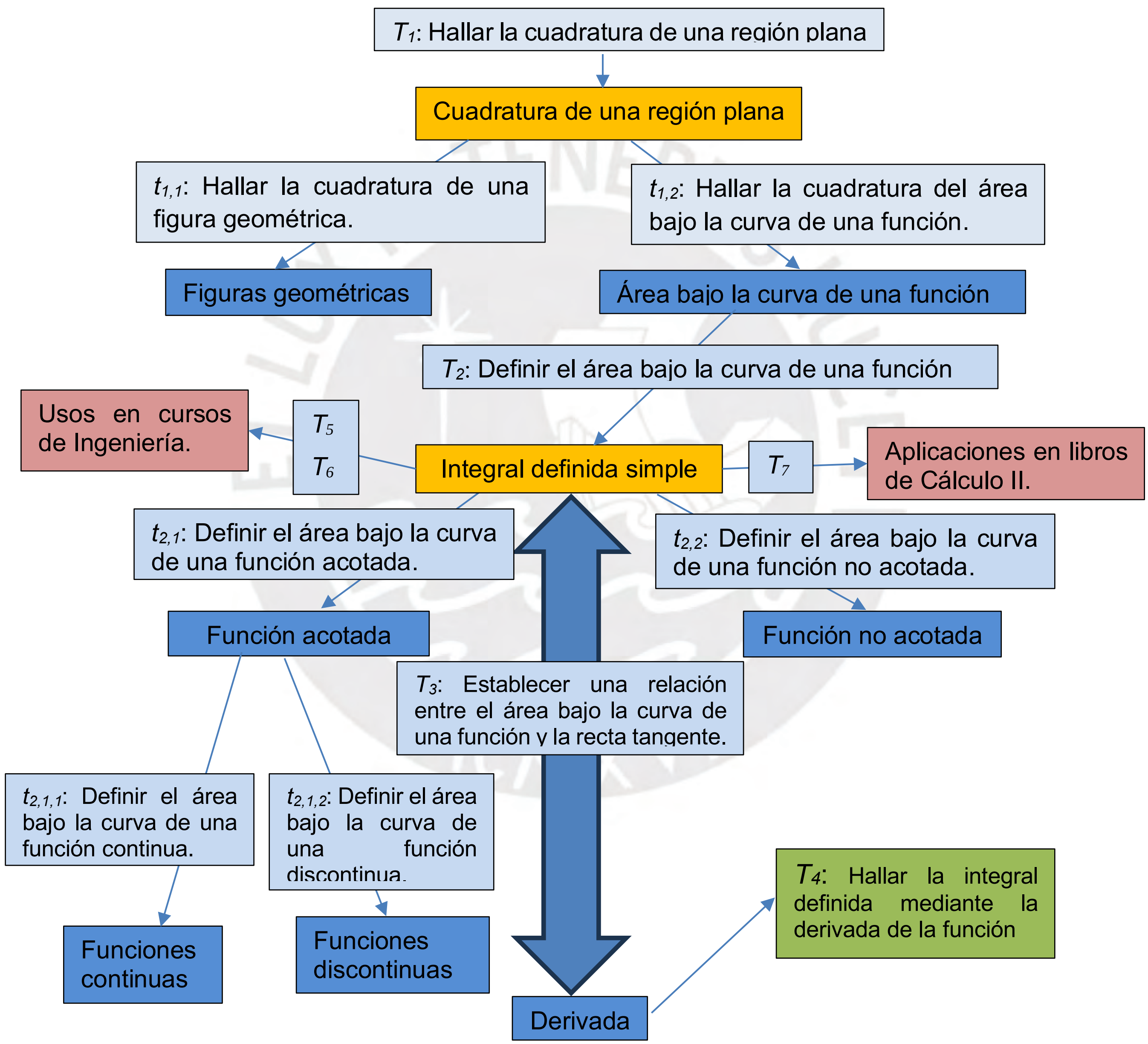
Tabla 5. *Tipo de tarea, subtipo de tarea y tareas, halladas en la construcción del MER***.**

Tipo de tarea	Subtipo de tarea	Tareas
T_1: Hallar la cuadratura de una región plana.	$t_{1,1}$: Hallar la cuadratura de una figura geométrica.	Tareas $t_{1,1}$: t_1, t_2, t_3, t_4
	$t_{1,2}$: Hallar la cuadratura del área bajo la curva de una función.	Tareas $t_{1,2}$: t_5, t_6, t_8, t_9. t_{11}
T_2: Definir el área bajo la curva de una función.	$t_{2,1}$: Definir el área bajo la curva de una función acotada.	
	$t_{2,1,1}$: Definir el área bajo la curva de una función continua.	Tarea $t_{2,1,1}$: t_{13}
	$t_{2,1,2}$: Definir la integral definida de una función continua y discontinua.	Tareas $t_{2,1,2}$: t_{16}, t_{17}
	$t_{2,2}$: Definir el área bajo la curva de una función acotada y no acotada.	Tarea $t_{2,2}$: t_{18}
T_3: Establecer una relación entre el área bajo la curva de una función y la recta tangente.		Tareas t_3: t_7, t_{14}
T_4: Hallar el área bajo la curva de una función continua mediante su derivada.		Tarea t_4: t_{15}
T_5: Graficar y determinar las series de Fourier de una función periódica.		Tarea t_5: t_{19}
T_6: Hallar el trabajo de un gas real.		Tarea t_5: t_{20}
T_7: Determinar el costo de una maquinaria usando la integral definida		Tarea t_5: t_{21}

Fuente. Elaboración propia.

En total se han encontrado 21 tareas, las cuales se han agrupado en 7 tipos de tarea. Esto permite establecer el siguiente *esquema del MER,* que se detalla en la Figura 20.

Figura 20. *Esquema del MER de la integral definida*.



Fuente. Elaboración propia.

Se aprecia en la Figura 20 el camino que sigue la integral definida desde su incorporación a las matemáticas como un método para hallar áreas hasta su formalización como un nuevo objeto matemático. Ello no solo para hallar áreas de figuras geométricas, sino también para hallar áreas bajo curvas de funciones muy irregulares y funciones no acotadas; así mismo, se observa su relación con la derivada y sus aplicaciones fuera del ámbito de las matemáticas a través de las tareas T_5, T_6 y T_7.

.

Capítulo IV: Análisis del libro de texto

4.1 Momento de publicación del libro

En esta segunda edición del libro *Tópicos de cálculo, volumen II*, los autores mencionan en el prólogo que se han esforzado por presentar el cálculo integral. Para esto consideran las funciones reales de una variable real y la geometría analítica en el espacio, de tal forma que resulte provechoso para los estudiantes, no solo de matemáticas, sino de otras especialidades. Indican también que la orientación principal del libro está enfocada de manera general hacia aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, lo cual permite ampliar el uso y la utilidad del texto (Mitacc y Toro, 2009).

4.2 Representatividad de la obra

En esta parte se hará una descripción de la forma en que los autores abordan la organización de los diferentes temas que conforman el concepto de la integral definida. El interés de esta investigación se centra en el capítulo 2, desde la sección 2.2: “Cálculo del área de una región plana por sumatorias” hasta la sección 2.6: “Teoremas fundamentales del cálculo integral”.

2.2 Cálculo del área de una región plana por sumatorias

Esta sección está dividida en dos partes:

2.2.1 Partición de un intervalo cerrado.

2.2.2 Aproximación del área de una región por áreas de rectángulos.

2.2.1 Partición de un intervalo cerrado

La sección comienza presentando la definición 1 acerca de la partición de un intervalo cerrado. Asimismo, se indican conceptos adicionales acerca de dicha definición, los cuales están presentados en la observación 1, como se muestra en la Figura 21.

Figura 21. *Partición de un intervalo cerrado*.

Definición 1. Sea $[a;b]$ un intervalo cerrado. Una partición del intervalo $[a;b]$ es el conjunto P de puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$; con $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$. Se denota con $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Observación 1

i) *Toda partición P de $[a;b]$ divide en n subintervalos al intervalo $[a;b]$.*

ii) *La longitud de cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$, para $i = 1,2,\dots,n$, se denota con $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

iii) *Se llama norma o diámetro de la partición P al número*

$$\|P\| = \text{máx}\{\Delta_i x \ / \ i = 1,2,\dots,n\}$$

iv) *Cuando el intervalo $[a;b]$ se divide en n partes iguales, la longitud de cada subintervalo es*

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

En este caso, los extremos de cada subintervalo son

$$x_0 = a\,,\ x_1 = a + \Delta x\,,\ x_2 = a + 2\Delta x\,, \dots,\ x_i = a + i\Delta x\,, \dots,\ x_n = b$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Seguidamente, los autores pasan a definir el punto 2.2.2:

2.2.2 Aproximación del área de una región por áreas de rectángulos

En esta sección, tomando como base una función continua positiva, los autores aproximan el área bajo la curva mediante *n* rectángulos inscritos y circunscritos. Ello forma un polígono rectangular inscrito y circunscrito respectivamente, tal como muestra la Figura 22.

Figura 22. *Aproximación del área de una región por áreas de rectángulos*.

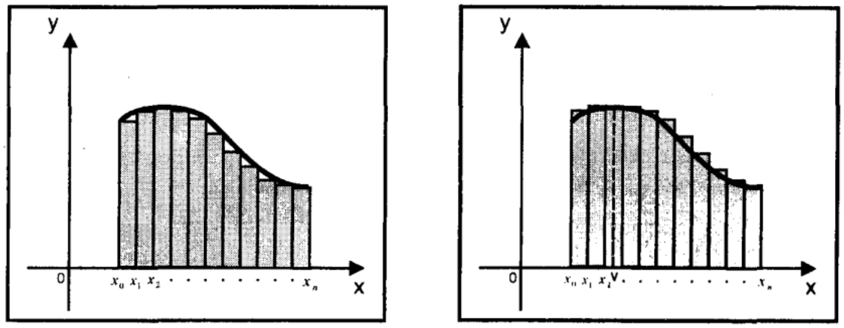


Fig. 2.2 Fig. 2.3

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

A continuación, muestran que existen las áreas A_i y A_s. A_i representa el supremo de todo el conjunto de áreas de los polígonos rectangulares inscritos y A_s el ínfimo de todo el conjunto de polígonos circunscritos a la región *A*.

Usando la definición de ínfimo y de supremo, los autores continúan explicando que el área de la región *A* si existe debe estar entre A_i y A_s y demuestra que $A_i = A_s$ y que, por lo tanto,

$$A = A_i = A_s$$

Indican que si $t_1, t_2, \dots \dots, t_n$ son puntos elegidos de los *n* subintervalos con $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2, \dots .n$, entonces,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta_i x \right)$$

Finalmente, terminan con dos observaciones acerca de las definiciones dadas anteriormente tomando como punto de partida la parte 4 de la observación 1 tal como se muestra en la Figura 23.

Figura 23. *Observación 2.*

i) *Considerando la parte (iv) de la observación 1, si cada* t_i *es el extremo derecho de cada subintervalo* $(t_i = a + i\Delta x,\ i = 1,2,\dots n)$ *y teniendo en cuenta que* $\|P\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$, *entonces (II) puede ser escrito como:*

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\right) \quad \text{ó} \quad A = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\right)u^2 \quad \dots \quad \text{(III)}$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $t_i = a + i\Delta x$, $i = 1,\dots,n$

(Esta fórmula es un caso particular).

ii) *Si cada* t_i *es el extremo izquierdo de cada subintervalo, entonces* $t_i = a + (i-1)\Delta x,\ i = 1,\dots,n$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Termina la sección presentando 7 ejemplos y 16 problemas propuestos; seguidamente, se aborda la sección 2.3: “suma Superior y suma Inferior”.

2.3 Suma superior y suma inferior

En esta sección, mediante la definición 3, los autores indican que si f es acotada en un intervalo *I* con partición *P* siendo I_j un subintervalo de *I*, entonces, existe m_j y M_j, ínfimo y supremo de *f(x)* respectivamente, en el subintervalo I_j. Así, se cumple que $m_j \leq f(x) \leq M_j$.

Con estas dos definiciones, definen la suma inferior de f para *P*:

$$\underline{S}(f;P) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta_j x$$

y la suma superior de f para P como

$$\bar{S}(f;P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta_j x$$

A continuación, Mitacc y Toro (2009) presentan 3 ejemplos y dividen el resto de la sección en dos partes:

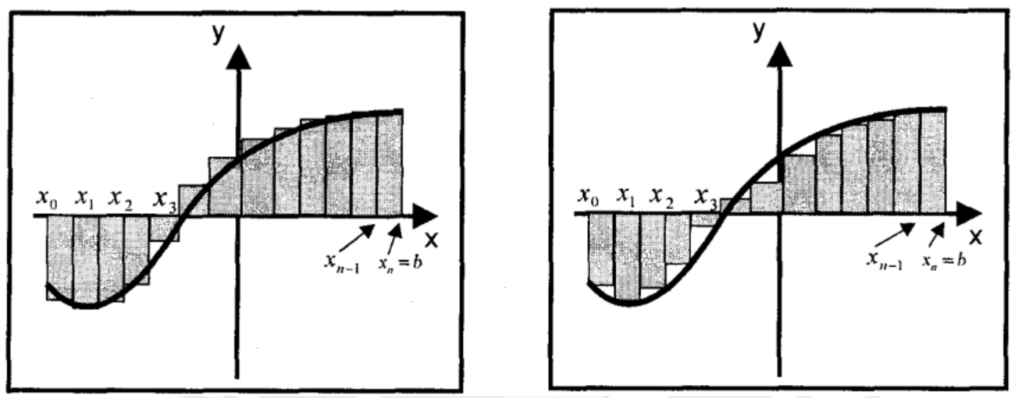
2.3.1 Significado geométrico de las sumas superiores e inferiores.

2.3.2 Propiedades de las sumas superiores e inferiores.

2.3.1 Significado geométrico de las sumas superiores e inferiores.

Las sumas inferiores y sumas superiores son mostradas en la Figura 24:

Figura 24. *Significado geométrico de las sumas superiores e inferiores*.



Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Los autores denominan a $h_j \Delta_j x$ como el área algebraica del rectángulo, cuya base es I_j y altura | h_j |, tal que h_j, es m_j o M_j. Muestran, además, las sumas inferiores y superiores para una función no necesariamente positiva.

Seguidamente, terminan la sección mostrando las Figuras 25, 26 y 27, tres proposiciones que son las propiedades de las sumas superiores e inferiores.

Figura 25. *Propiedades de las sumas superiores e inferiores: proposición I*.

Como f es acotada sobre I, existen m y M tales que

$$m = \inf\{f(x) \ / \ x \in I\} \quad y \quad M = \sup\{f(x) \ / \ x \in I\}$$

Proposición 1. Sea f una función acotada en $I = [a;b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de I. Entonces

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq M(b-a) \qquad (1)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Figura 26. *Propiedades de las sumas superiores e inferiores: proposición II***.**

Proposición 2. Si f es una función acotada en I, y P_1 y P_2 son dos particiones de I tales que P_2 es un refinamiento de P_1, $(P_1 \subset P_2)$, entonces

a) $\underline{S}(f,P_1) \leq \underline{S}(f,P_2)$ y $\overline{S}(f,P_1) \geq \overline{S}(f,P_2)$

b) Si $P_2 - P_1$ tienen r puntos, entonces

$$\underline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_1) \leq r(M-m)\|P_1\|$$

$$\overline{S}(f,P_1) - \overline{S}(f,P_2) \leq r(M-m)\|P_1\|$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Figura 27. *Propiedades de las sumas superiores e inferiores: proposición III***.**

Proposición 3. Sea f una función acotada en I, y P_1 y P_2 dos particiones arbitrarias de I. Entonces

$$\underline{S}(f,P_1) \leq \overline{S}(f,P_2) \qquad (2)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

De estas tres, se demuestran la proposición 1 y la proposición 3. La proposición 2 la dejan como tarea para ser demostrada por el lector.

2.4 Integrales Inferiores y Superiores

En esta sección, los autores definen *D* como el conjunto de todas las particiones *P* posibles de *I* e indican que la primera proposición de las sumas superiores e inferiores asegura que los conjuntos $\left[\, \underline{S}(f;P) \;/\; P \in D \right]$ y $[\bar{S}(f;P) / \; P \in D\;]$ están acotados superior e inferiormente.

Definen, así, a la Integral inferior de f en *I* como

$$\underline{J} = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = sup\left[\, \underline{S}(f;P) \;/\; P \in D \right]$$

y a la Integral superior de f en *I* como

$$\bar{J} = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = inf[\bar{S}(f;P) / \; P \in D\;]$$

Los autores unen ambas definiciones en una sola titulada como definición 4.

La sección termina mencionando cuatro propiedades. Las tres primeras son desigualdades y la última dos igualdades, tal como se indica en la Figura 28.

Figura 28. *Propiedades de las integrales superiores e inferiores***.**

1. Si f es función acotada en I, entonces

$$\underline{J} \leq \overline{J} \quad \text{ó} \quad \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx \qquad (3)$$

2. Si f es función acotada en I, entonces

$$m(b-a) \leq \underline{J} \leq \overline{J} \leq M(b-a) \qquad (4)$$

donde $m = \inf\{f(x) \;/\; x \in I\}$ y $M = \sup\{f(x) \;/\; x \in I\}$.

3. Si f es acotada en I, existen c_1 y $c_2 \in I$ tales que

$$\underline{J} = f(c_1)(b-a) \text{ y } \overline{J} = f(c_2)(b-a) \qquad (5)$$

de modo que $m \leq f(c_1) \leq f(c_2) \leq M$.

4. Si f es acotada en I y $c \in \langle a; b\rangle$, se tiene

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{c}} f(x)dx + \int_{c}^{\overline{b}} f(x)dx$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{c} f(x)dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)dx$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

2.5 Integral de Riemann

Teniendo ya el conocimiento previo, la Figura 29 muestra la definición de la Integral de Riemann.

Figura 29. *Integral de Riemann*.

2.5 INTEGRAL DE RIEMANN

Definición 5. Se dice que una función acotada $f: I \to \mathbb{R}$ es **integrable Riemann en I** si

$$J = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Seguidamente, se presentan 2 ejemplos para luego, mediante la observación 3, detallar cuál es la interpretación geométrica de la integral definida. Dicha observación se muestra en la Figura 30.

Figura 30. *Interpretación geométrica de la integral definida: observación 3.*

Observación 3. Interpretación geométrica de la integral definida de una función continua f en $[a;b]$.

De la interpretación geométrica de las sumas superiores e inferiores (secc. 2.3.1), deducimos que si R es la región plana limitada por las gráficas de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x, y $A(R)$ representa numéricamente al área de la región R; entonces

a) *Si* $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, $A(R) = \int_a^b f(x)dx$

b) *Si* $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a;b]$, $-A(R) = \int_a^b f(x)dx$

c) *Si al número* $\int_a^b f(x)dx$ *lo llamamos área algebraica, para una función arbitraria f continua en $[a;b]$, esta integral definida de f en $[a;b]$ representa la suma de las áreas algebraicas de las regiones determinadas por la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$.*

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Después de presentar el ejemplo 22, presentan el criterio de integrabilidad de Riemann, tal como se aprecia en la Figura 31.

Figura 31. *Criterio de integrabilidad de Riemann: teorema 1.*

Teorema 1 (Criterio de integrabilidad de Riemann). Si f es una función acotada en I, una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en I es que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista una partición P de I tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon \qquad (6)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Los autores demuestran este teorema, partiendo primero de que si f es integrable en *I* entonces,

$$\bar{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) \leq \bar{S}(f;P_2) - \underline{S}(f;P_1) < \epsilon$$

De tal forma que $P_1 \cup P_2 = P$

Luego, se demuestra que, dado un $\epsilon > 0$ en el que existe una partición P de *I,* tal que $\bar{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \epsilon$, se obtendría que

f es integrable en *I*

Posteriormente, indican, sin demostración, la definición 6 y 7, y la proposición 4, presentadas en las Figuras 32 y 33 respectivamente.

Figura 32. *Integral definida: definición 6 y 7*.

Definición 6. Si $a < b$, se define

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \text{ siempre que } \int_a^b f(x)dx \text{ exista.}$$

Definición 7. Si f es una función definida en a, se define

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Figura 33. *Integrabilidad de una función continua: proposición 4*.

Proposición 4. Si f es una función continua en $I = [a;b]$, entonces f es integrable en I.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

A continuación, se presenta ocho propiedades de la integral definida, tal como se detalla en la Figura 34:

Figura 34. *Propiedades de la integral definida*.

1. Si f es una función integrable en I, entonces es integrable en cualquier subintervalo $[c; d] \subset I$.

2. Si f es una función integrable en I, entonces para toda constante real k, kf es integrable en I y se tiene:

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (9)$$

3. Si f y g son funciones integrables en I, entonces $f \pm g$ es integrable en I y se tiene:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (10)$$

4. Si f es integrable en los intervalos $[a; c]$ y $[c; b]$, entonces f es integrable en $I = [a; b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (11)$$

(**Propiedad aditiva** respecto al intervalo de integración).

Esta propiedad es válida para tres números arbitrarios a, b, c siempre que las tres integrales existan.

5. Si f es integrable en $I = [a; b]$ y $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (12)$$

6. Si f y g son funciones integrables en I y $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (13)$$

7. Si f es integrable en $I = [a; b]$ y $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in I$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (14)$$

8. Si f es integrable en I, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (15)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Seguidamente, los autores presentan en la Figura 35, el teorema del valor intermedio para integrales:

Figura 35. *Teorema del valor intermedio para integrales: teorema 2.*

Teorema 2. Si f es una función continua en $I = [a; b]$, entonces existe un número $c \in I$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Los autores demuestran este teorema haciendo uso de la proposición 4 y de la propiedad 7 de la integral definida; así, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Dividen ambos miembros por $(b - a)$ y haciendo $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$ con x_m y $x_M \in a\, I$. A continuación, indican que por el teorema del valor intermedio para funciones continuas existe un c entre x_m y $x_M \in a\, I$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

Así concluyen que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

La investigación termina con la sección 2.6, que presenta los dos teoremas fundamentales del cálculo integral.

2.6 Teoremas fundamentales del cálculo integral

Se comienza la sección con la presentación del primer teorema fundamental del cálculo integral, que se muestra en la Figura 36.

Figura 36. *Primer teorema fundamental del cálculo integral: teorema de Barrow*.

Si f es una función continua en $I = [a;b]$ y $\boldsymbol{F}$ es la función definida por $\boldsymbol{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$, entonces se tiene

$$\boldsymbol{F}'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \ \forall\, x \in I$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Para demostrarlo, los autores llegan, a través de la definición de derivada, a la siguiente igualdad:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Luego, haciendo uso del teorema del valor intermedio para integrales, definen que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)(x+h-h) = hf(c), \qquad c \text{ entre } x \text{ y } x+h$$

reemplazando en la expresión anterior concluyen que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{hf(c)}{h}$$

$$F'(x) = f(x)$$

Por último, se hace una observación a este teorema, que se muestra en la Figura 37:

Figura 37. *Integral definida e integral indefinida: observación 4.*

Observación 4. *Este teorema establece un enlace entre los conceptos de integral definida e indefinida. Se prueba que una función f continua en I admite una antiderivada dada por* $\mathbf{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$, *pues* $\mathbf{F}'(x) = f(x), \forall\, x \in I$.

Este es un teorema de existencia, pues si f es una función continua en I, existe $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *tal que* $\mathbf{F}'(x) = f(x), \forall\, x \in I$. *Como* $\mathbf{F}(a) = 0$, $\mathbf{F}$ *es la antiderivada de f en I cuya gráfica pasa por el punto* $(a; 0)$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

A continuación, realizan la demostración del segundo teorema fundamental del cálculo integral, presentado en la Figura 38:

Figura 38. *Segundo teorema fundamental del cálculo integral.*

Si f es una función continua en $I = [a; b]$ y F es una antiderivada de f en I $(F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in I)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \qquad (16)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Los autores lo demuestran mediante el primer teorema fundamental y la observación 4. Indican, entonces, que existe una constante *c,* tal que $F(x) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + c$, siendo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_a^x f(t)dt$. Teniendo lo siguiente

$$F(b) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) + c$$

$$F(a) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) + c$$

Se restan ambas expresiones y, tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se obtiene que

$$\int_a^b f(x)dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$$

Se continúa la sección con la observación 5, mostrada en la Figura 39.

Figura 39. *Cálculo de la integral definida y notación: observación 5.*

a) $[F(x)]_a^b$ *es una notación para* $F(b) - F(a)$.

*b) La fórmula dada en (16) es llamada "**Fórmula de Newton-Leibniz**" debido a que estos dos matemáticos establecieron, independientemente uno del otro, la relación íntima entre los conceptos de la derivada y de la integral. El nombre que se le da a esta fórmula es convencional, ya que ni Newton (1642-1727) ni Leibniz (1646-1716) dieron exactamente con esta fórmula.*

c) Obsérvese que la diferencia $F(b) - F(a)$ *no depende de la elección de la antiderivada* F*, puesto que todas las antiderivadas se diferencian en una constante, la que desaparece al efectuar la diferencia. Por eso, al calcular una integral definida no es necesario considerar la constante en la antiderivada.*

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Se termina la sección con 6 ejemplos y 18 ejercicios propuestos. Dichos ejercicios abarcan los temas abordados desde la sección 2.3 hasta la 2.6.

A modo de conclusión y previo a presentar el siguiente apartado acerca de la estructura del libro, se presenta la Tabla 6. Esta muestra la cantidad de definiciones, teoremas, proposiciones, propiedades, ejemplos y ejercicios propuestos encontrados en las secciones del capítulo 2 que se han analizado.

Tabla 6. *Resumen en números de las secciones analizadas.*

Definiciones	Teoremas	Proposiciones	Propiedades	Ejemplos	Ejercicios propuestos
7	4	4	15	21	33

Fuente. Elaboración propia.

4.3 Estructura del libro.

La estructura del libro *Tópicos de cálculo, volumen II* se conforma de un prólogo y el desarrollo de siete capítulos. Cada capítulo contiene definiciones, proposiciones, propiedades, teoremas, ejemplos y ejercicios propuestos, de manera similar al capítulo 2. Las proposiciones se demuestran o se dejan como tarea para ser demostradas por el lector; los teoremas vienen con su respectiva demostración y los ejercicios propuestos vienen, en general, con su respectiva respuesta.

A continuación, se muestra el contenido de los 7 capítulos que conforman el libro:

En el capítulo 1, se estudia la integral Indefinida. Dicho capitulo está dividido en 12 secciones y abarca desde la página 1 hasta la 94.

A continuación, se muestra en la Figura 40 cómo está conformado el capítulo 2, punto de interés de la presente investigación.

Figura 40. *Capítulo 2.*

CAPITULO 2: INTEGRAL DEFINIDA

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Este capítulo, desde la sección “Cálculo del área de una región plana por sumatorias” hasta la de “Teoremas fundamentales del cálculo integral” está dividido en 10 secciones y abarca desde la página 95 hasta la 148.

El capítulo 3 aborda las integrales impropias; dicho capítulo está dividido en 3 secciones y abarca desde la página 149 hasta la 166.

El capítulo 4 estudia las aplicaciones de la integral definida; dicho capítulo está dividido en 8 secciones y abarca desde la página 167 hasta la 236.

El capítulo 5 aborda el tema de las coordenadas polares; dicho capítulo está dividido en 12 secciones y abarca desde la página 237 hasta la 272.

El capítulo 6 se estudian las rectas y planos en el espacio tridimensional; dicho capítulo está dividido en 14 secciones y abarca desde la página 273 hasta la 341.

Finalmente, el capítulo 7 estudia las superficies; dicho capitulo está dividido en 8 secciones y abarca desde la página 342 hasta la última, la 379.

4.4 Análisis ecológico del libro

Los temas tratados en el libro *Tópicos de cálculo volumen II,* desde capítulo 1 hasta el 4, van de acuerdo con el sílabo del ciclo 2022-2 del curso denominado Cálculo II del área de Ingeniería de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM). El libro es relevante en su bibliografía de consultas, tal como lo muestra la Figura 41.

Figura 41. *Fuentes de información del sílabo del curso Cálculo II*.

8.1. Bibliográficas

BÁSICA:

- Mitacc M. (2013) . *Tópicos de cálculo.* (3ra. Ed.) Perú . Thales S.R.L.
- Larson R & Edwars B.. (2010). *Cálculo I*. (9naEd.) México. Mc. Grawhill

COMPLEMENTARIA:

- Apóstol J. (2015). *Calculus Vol. I.* (3ra. Ed.) México .Reverte

Nota. Adaptado de *Sílabo Cálculo II* [Imagen], por UNMSM, 2022, Calculo II sílabus-2022-II - UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES - Studocu

Parte de la sumilla del curso de Cálculo II menciona el desarrollo de los siguientes temas: La integral indefinida, métodos de integración, la integral definida y sus propiedades; Integración numérica; La integral impropia, criterios de convergencia; Aplicaciones de la integral definida: áreas, volumen, longitud de arco, centro de masa, momento de inercia, trabajo fuerza (UNMSM, 2022, p. 1).

Los temas mencionados en la sumilla también son estudiados en el libro de texto, como se puede comprobar al revisar la estructura del libro en el punto 4.3 de este capítulo. Con ello, se concluye que la función (el nicho) de la integral definida en el libro de texto (hábitat de este objeto matemático) no solamente se limita a hallar áreas de figuras planas.

Para esta investigación, es de interés el capítulo 2. Este está dedicado al estudio de la integral definida que se encuentra en la unidad temática 2 del curso; dicha parte del silabo es mostrada en la Figura 42 y representa una caracterización parcial del Modelo Epistemológico Dominante (MED) en esta unidad temática.

Figura 42. *La integral definida en el sílabo del curso Cálculo II*.

UNIDAD TEMÁTICA N° 2: INTEGRAL DEFINIDA

UNIDAD II
INTEGRAL DEFINIDA

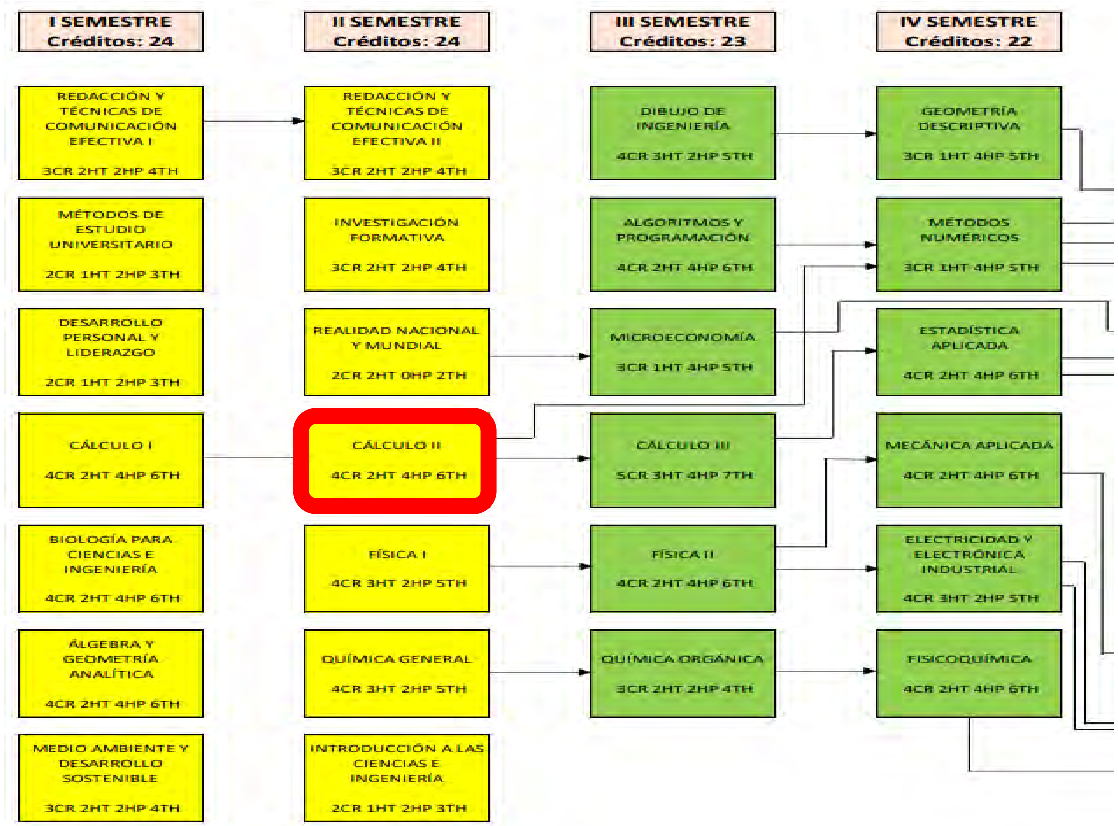
CAPACIDAD: Identifica la integral definida. Reconoce los teoremas fundamentales del cálculo. Aplica la integral defina para resolver problemas de aplicación.

SE MA NA	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	HORAS LECTIVAS
			Exposición dialogada	2
6	Sumatorias y sus propiedades. Integral definida. Propiedades de la integral definida.	Usar la suma deáreas de regiones rectangulares para aproximar el área de una región plana.	Actividad aplicativa. Trabajo individu ual de problemas propuest@ en la plataforma virtual. Desarrollo de la práctica dirigida N°6.	4
7	Primer y SegundO teoremas fundamentales del Cálculo Integral. Teorema del valor medio para integrales.	Calcular la integral definida de una función.	Exposición dialogada	2
		Usar la integración definida en las diferentes aplicaciones.	Taller sobre los teoremas fundamentales del Calculo Integral. Desarrollo de la práctica dirigida N°7.	4
	EVALUACION CONTINUA 2	Demostrar IOS teoremas fundamentales del cálculo		

Nota. Adaptado de *Sílabo Cálculo II* [Imagen], por UNMSM, 2022, Calculo II sílabus-2022-II - UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES - Studocu

En la Figura 43, que se presenta a continuación, se aprecia la relación del curso Cálculo II con cursos anteriores y posteriores, así como conocer junto con qué cursos se enseña.

Figura 43. *Parte de la malla curricular de la EP de Ingeniería Industrial de la UNMSM*



Nota. Adaptado de *Malla curricular de la EP de ingeniería industrial 2023* [Imagen], por UNMSM, 2023, https://industrial.unmsm.edu.pe/wp-content/uploads/2024/04/Malla-Curricular-2023-Ingenieria-Industrial.pdf

En esta parte de la malla curricular se observa que el curso Cálculo II (recuadro rojo) se enseña en el segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial, junto con los cursos Química General, Física, entre otros. Se observa como requisitos para llevarlo el haber aprobado el curso Cálculo I. Por otro lado, se aprecia que, al aprobar el curso, permite llevar el curso Cálculo III, prerrequisito para llevar el curso Métodos Numéricos.

4.5 Análisis praxeológico del libro

A continuación, se presentan los tipos de tareas y tareas encontradas en el capítulo que consideramos para el análisis. Las tareas están presentadas con una técnica general que abarcan diversos ejemplos y ejercicios propuestos; cada técnica está acompañada de su tecnología y teoría correspondiente.

Se comenzará con el análisis de los ejemplos y ejercicios propuestos de la sección denominada "Cálculo del área de una región plana por sumatorias". En primer lugar, se identificarán los tipos de tareas, técnicas y tecnologías involucradas, así mismo la teoría predominante.

4.5.1 Cálculo del área de una región plana por sumatorias.

Tipo de tarea T_1: Calcular, mediante rectángulos **inscritos**, el área de una región limitada por una función con las rectas $X = X_1$, $X = X_2$ y el eje X.

Subtipo de tarea $t_{1,1}$: Calcular, mediante rectángulos **inscritos**, el área de una región limitada por una función lineal positiva con las rectas $X = X_1$, $X = X_2$ y el eje X.

<u>Técnica</u> $\tau_{1,1}$:

Paso 1: Dibujo de la Región.

Paso 2: Cálculo de t_i mediante la formula dada en la observación 2ii (Figura 23).

Paso 3: Cálculo de $\Delta_i x$ mediante la formula dada en la observación 2i (Figura 23).

Paso 4: Cálculo del área *A* mediante la fórmula dada en la observación 2i.

- $A = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x)$

Paso 5: Cálculo de la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ usando las propiedades $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, tal que k es constante y $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Paso 6: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Límites, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

<u>Teoría</u> Θ_1:

Análisis real.

A continuación, se muestra en la Figura 44 la única tarea **$t_{1,1}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 44. *Tarea $t_{1,1}$: ejemplo 10.*

> **Ejemplo 10.** Por rectángulos inscritos, calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Tipo de tarea T_2: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos,** el área de una región limitada por una función continua y positiva las rectas verticales y el eje X.

Subtipo de tarea $t_{2.1}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por una función polinómica de grado n ≤ 3 con rectas verticales $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2,1}$:

Paso 1: Dibujo de la Región

Paso 2: Cálculo de t_i y Δx mediante las formula dadas en la observación 2i.

Paso 3: Cálculo del área *A* mediante la fórmula dada en la observación 2i.

- $A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\right)$

Paso 4: Cálculo de la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ usando la propiedad $\sum_{i=1}^{n} k = nk$ y alguna o todas las siguientes propiedades: ($\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$)

Paso 5: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

Teoría Θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 45 una tarea **t$_{2.1}$**, en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 45. *Tarea $t_{2,1}$: ejemplo 11.*

Ejemplo 11. Por rectángulos circunscritos, calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 3$ y el eje x.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejemplo 12 y en los ejercicios propuestos 1, 2, 3, 6, 7 y 10. Con ello, se obtiene en total 8 tareas **t$_{2.1}$**.

Subtipo de tarea t$_{2.2}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función raíz cuadrada** con la recta vertical $X = X_1$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2,2}$:

Paso 1: Cambio de la variable independiente.

Paso 2: Obtención de los nuevos límites de la región:

- Las funciones $f(y)$ y $g(y) = X_1$
- Los puntos $Y_1 = 0$ y $Y_2 = f(X_1)$

Paso 3: Dibujo de la Región.

Paso 4: Cálculo de $\Delta y = \frac{Y_2 - Y_1}{n}$

Paso 5: Cálculo de $z_i = Y_1 + i\Delta y$

Paso 6: Cálculo de $f(z_i)\ y\ g(z_i)$

Paso 7: Cálculo del área *A* mediante la fórmula:

- $A = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (g(z_i) - f(z_i))\Delta y\right)$

Paso 8: Cálculo de la sumatoria $\sum_{i=1}^{n}(g(z_i) - f(z_i)\Delta y$, usando las propiedades $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, tal que k es constante y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Paso 9: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias

Teoría Θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 46 una tarea $\mathbf{t_{2.2}}$, en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 46. *Tarea $t_{2,2}$: ejemplo 16.*

Ejemplo 16. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, eje x, y $x = 9$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto 5. Así, hay en total 2 tareas $\mathbf{t_{2.2}}$.

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{2.3}}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función valor absoluto**: $f(x) = a - |\ x\ |$, y el eje X.

Técnica $\tau_{2,3}$:

Paso 1: Aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_{2.1}}$ para hallar el área **A** limitada por la función

- $f(x) = a - x, x \geq 0$ y el eje X

Paso 2: Esta área es simétrica con respecto al área limitada por la función

- $f(x) = a + x, x \leq 0$ y el eje X

Paso 3: El área será igual a 2**A.**

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias, $\boldsymbol{\theta_4}$**:** Funciones.

Teoría:

Partición de un intervalo cerrado y teoría de sumatorias.

A continuación, se presenta en la Figura 47 una tarea $\mathbf{t_{2.3}}$, en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 47. *Tarea $t_{2,3}$: Ejercicio propuesto 4*.

4. $y = 4 - |x|$, $x = -4$, $x = 4$, el eje x $\quad$ $R.\ 8\,u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto 8; Así, hay en total 2 tareas $\mathbf{t_{2.3}}$.

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{2.4}}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función exponencial**, $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2,4}$:

Paso 1: Aplicación de los 3 primeros pasos de la técnica $\tau_{2,1}$.

Paso 2: Aplicar la propiedad $\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a(a^n-1)}{a-1}$ a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$

Paso 3: Aplicar la regla de *L'Hóspital* al límite y tomarlo.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limites, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

Teoría θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 48 la única tarea $\mathbf{t_{2.4}}$ en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 48. *Tarea $t_{2,4}$: ejemplo 13.*

Ejemplo 13. Calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje x.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea $t_{2.5}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función trigonométrica $\boldsymbol{Cos\ x}$**, $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2.5}$:

Paso 1: Aplicación de los 3 primeros pasos de la técnica $\tau_{2,1}$.

Paso 2: Aplicar la propiedad $\sum_{k=1}^{n} Sen\ kx = \frac{Cos\ (n+1)x + Cos\ nx - Cosx - 1}{2Senx}$ a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$

Paso 3: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

Teoría Θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 49 la única tarea **$t_{2.5}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 49. *Tarea $t_{2,5}$: ejemplo 14.*

Ejemplo 14. Calcule el área de la región bajo la gráfica de $f(x) = \text{sen}\ x$ en $[0; \pi/2]$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea t2.6: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función trigonométrica inversa $\boldsymbol{Senh\ x}$** con las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2,6}$:

Paso 1: Aplicación de los 3 primeros pasos de la técnica $\tau_{2,1}$.

Paso 2: Aplicar la propiedad $\sum_{k=1}^{n} Sen\ kx = \frac{Cosh\ (n+1)x + Cosh\ nx - Coshx - 1}{2Senhx}$ a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

Paso 3: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

Teoría Θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 50 la única tarea **t2.6** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 50. *Tarea $t_{2,6}$: ejemplo 15.*

Calcule el área de la región bajo la curva $y = \operatorname{senh} x$ en $[0\ ;1]$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea t2.7: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por la **función trigonométrica inversa $\boldsymbol{Cosh\ x}$** con las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{2,7}$:

Paso 1: Aplicación de los 3 primeros pasos de la técnica $\tau_{2,1}$.

Paso 2: Aplicar la propiedad $\sum_{i=1}^{n} Cosh\,(t_i) = \frac{Senh(1+t_i)+Senh\,(1)-Senh(t_i)}{2Senh(t_i)}$ a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$.

Paso 3: Tomar como límite al resultado de la sumatoria.

Tecnología:

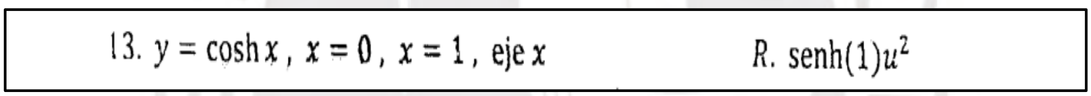
$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

Teoría Θ_2:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 51 la única **$t_{2.7}$** tarea en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 51. *Tarea $t_{2,7}$: ejercicio propuesto 13.*


13. $y = \cosh x$, $x = 0$, $x = 1$, eje x R. $\operatorname{senh}(1)u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Tipo de tarea T_3: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por una función continua y no necesariamente positiva con las rectas verticales y el eje X.

Subtipo de tarea $t_{3,1}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por una función polinómica continua y no necesariamente positiva de grado n ≤ 3 con las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Técnica $\tau_{3,1}$:

Hallar los puntos de intersección X' de la gráfica con el eje X.

Paso 1: Dividir el intervalo cerrado en dos: $< X_1, X' >$ y $< X', X_2, >$. X' es el punto de intersección de la función con el eje X.

Paso 2: Aplicar la técnica $\tau_{2.1}$ para cada intervalo.

Paso 3: Sumar los resultados encontrados en cada intervalo.

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

<u>Teoría</u> Θ_3:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 52 una tarea **t₃,₁** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 52. *Tarea $t_{3,1}$: ejercicio propuesto 11.*

11. $y = x^2 - 2x - 1$, eje x, $x = 1$, $x = 4$ $\qquad$ $R.\ \left(\frac{13\sqrt{2}}{3} - 4\right)u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto 12; así, hay en total 2 tareas $\mathbf{t}_{3.1}$.

Subtipo de tarea $\mathbf{t}_{3,2}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos**, el área de una región limitada por una **función trigonométrica** con las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

<u>Técnica</u> $\tau_{3,2}$:

Paso 1: Aplicar los 2 primeros pasos de la técnica anterior.

Paso 2: Aplicar la propiedad $\sum_{i=1}^{n} Cos\ (ix) = \frac{Sen(n+1)x + Sen\ (nx) - Sen\ x}{2Senx}$ a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ en cada intervalo.

Paso 3: Sumar los resultados encontrados en cada intervalo.

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

<u>Teoría</u> Θ_3:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 53 la única tarea **$t_{3,2}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 53. *Tarea $t_{3,2}$: ejercicio propuesto 14***.**

14. $y = \cos x$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, eje x $\qquad$ $R.\ 2u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Tipo de tarea T_4: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos** el área de una región limitada por **funciones cuadráticas** y rectas verticales.

Subtipo de tarea $t_{4,1}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos** el área de una región limitada por dos **funciones cuadráticas: $\boldsymbol{g(x)}$** y **$\boldsymbol{h(x)}$** y las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$.

Técnica $\tau_{4,1}$:

Paso 1: Sea $f(x) = h(x) - g(x)$

Paso 2: Aplicar la técnica $\tau_{2,1}$ como si la región estuviera limitada por la grafica $f(x)$ con las rectas $X = X_1$ y $X = X_2$ y el eje X.

Paso 3: El área será el valor absoluto del resultado obtenido.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$: Partición de un intervalo, **$\boldsymbol{\theta_2}$:** Limite, **$\boldsymbol{\theta_3}$:** Sumatorias, **$\boldsymbol{\theta_4}$**: $Funciones$.

Teoría Θ_4:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 54 la única tarea **$t_{4,1}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 54. *Tarea $t_{4,1}$: ejercicio propuesto 16*.

16. $y = 3x^2$, $y = -1 - 3x^2$, $x = 0$, $x = 3$ $\qquad$ $R.\ 57u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{4,2}}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos** el área de una región limitada por dos **funciones cuadráticas:** $\boldsymbol{g(x)}$ y $\boldsymbol{h(x)}$.

Técnica $\tau_{4,2}$:

Paso 1: Hallar los puntos de intersección de las funciones.

Paso 2: Aplicar la técnica $\tau_{2,1}$ en la que X_1 y X_2 serán los puntos de intersección de las funciones $\boldsymbol{g(x)}$ y $\boldsymbol{h(x)}$.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias, $\boldsymbol{\theta_4}$**:** Funciones.

Teoría Θ_4:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 55 la única tarea $\mathbf{t_{4,2}}$ en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 55. *Tarea $t_{4,2}$: ejercicio propuesto 9*.

9. $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$ R. $16/3\,u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{4,3}}$: Calcular, mediante rectángulos **circunscritos** el área de una región, limitada por cuatro **funciones cuadráticas**: $f_{1,2,3,4} = \pm(x \pm a)^2$

Técnica $\tau_{4,3}$:

Paso 1: La función $(x-a)^2$ es simétrica respecto al eje X con la función $(x+a)^2$.

Paso 2: La función $(x-a)^2$ es simétrica respecto al eje Y con la función $-(x-a)^2$.

Paso 3: La función $(x + a)^2$ es simétrica respecto al eje Y con la función $-(x + a)^2$.

Paso 4: Aplicar la técnica para la tarea $\mathbf{t_{2,1}}$ para hallar la región **A** limitada por la grafica $f(x) = (x - a)^2$, las rectas $X = 0$, $X = a$ y el eje X.

Paso 5: El área de la región será 4**A.**

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_2}$**:** Limite, $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias, $\boldsymbol{\theta_4}$**:** Funciones.

Teoría Θ_4:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 56 la única tarea $\mathbf{t_{4,3}}$ en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 56. *Tarea $t_{4,3}$: ejercicio propuesto 16.*

16. $y = 3x^2$, $y = -1 - 3x^2$, $x = 0$, $x = 3$ R. $57u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Seguidamente, se presenta el análisis de los ejemplos y ejercicios propuestos, que abarcan desde la sección "Sumas superiores y sumas inferiores" hasta la sección "Teoremas fundamentales del cálculo integral".

4.5.2 Sumas superiores y sumas inferiores, integrales superiores e integrales inferiores, integral de Riemann, teoremas fundamentales del cálculo integral

Tipo de tarea $\mathbf{T_5}$: Hallar la suma superior y suma inferior de una función**.**

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{5,1}}$: Hallar la suma superior $\bar{S}(f;P)$ y la suma inferior $\underline{S}(f;P)$ de una función f definida en un intervalo $I = [a, b]$, en el que P es una partición de I.

Técnica $\tau_{5,1}$:

Paso 1: Aplicación de la definición tres (página 101 del presente trabajo).

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_5}$: Sumas superiores y sumas inferiores.

<u>Teoría</u> Θ_5:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 57 una tarea **$t_{5,1}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 57. *Tarea $t_{5,1}$: ejemplo 17.*

Sea $f(x) = k$ la función constante definida en $I = [a;b]$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en los ejemplos 18 y 19; así, es obtiene en total 3 tareas **$t_{5,1}$**.

Tipo de tarea T_6: Determinar si una función f es integrable.

Subtipo de tarea $t_{6,1}$: Determinar si una función f definida en un intervalo $I = [a, b]$ es integrable**.** Si f es integrable, hallar la integral.

<u>Técnica</u> $\tau_{6,1}$:

Paso 1: Aplicación de la definición tres (página 101 del presente trabajo).

Paso 2: Aplicación de la definición cuatro (página 103 del presente trabajo).

Paso 3: Aplicar la definición cinco (Figura 29).

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_5}$: Sumas superiores y sumas inferiores.

<u>Teoría</u> Θ_6:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 58 una tarea **$t_{6,1}$** en la que se desarrolla la técnica que se ha mostrado.

Figura 58. *Tarea $t_{6,1}$: ejemplo 20.*

Ejemplo 20. Sea $f(x) = k$ la función constante. Por el ejemplo 16, para $I = [a; b]$ se tiene $\underline{S}(f, P) = \overline{S}(f, P = k(b - a)$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejemplo 21; así, existe en total 2 tareas **$t_{6.2}$**.

Tipo de tarea T_7: Hallar la integral definida de una función continua y acotada.

Subtipo de tarea $t_{7,1}$: Dado un gráfico, hallar el valor de la integral de una función arbitraria que está formada por varias funciones conocidas.

Técnica $\tau_{7,1}$:

Paso 1: Aplicar la observación 3 (Figura 30).

Paso 2: Sumar las áreas encontradas.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_6}$: Interpretación geométrica de la integral definida.

Teoría Θ_7:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 59 una tarea **$t_{7,1}$** en la que se desarrolla la técnica mostrada.

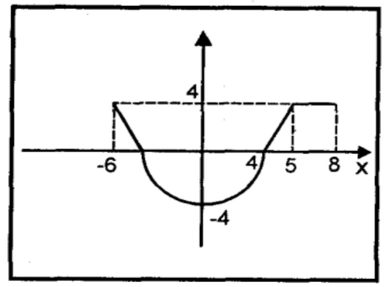
Figura 59. *Tarea $t_{7,1}$: ejemplo 22.*

Ejemplo 22. La gráfica de f consta de segmentos de recta y una semicircunferencia, como se indica en la figura adjunta. Halle:

a) $\int_0^4 f(x)dx$ b) $\int_{-6}^4 f(x)dx$

c) $\int_{-6}^8 f(x)dx$ d) $\int_{-6}^8 |f(x)|dx$

e) El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = -6$ y $x = 8$.



Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto # 9; así, se tienen en total 2 tareas $\mathbf{t_{7.1}}$.

Subtipo de tarea $t_{7,2}$: Hallar el valor de la integral de una función definida.

<u>Técnica</u> $\tau_{7,2}$:

Paso 1: Aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo integral.

<u>Tecnología</u>:

$\boldsymbol{\theta_7}$: Teoremas fundamentales del cálculo integral.

<u>Teoría</u> Θ_7:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 60 una tarea $\mathbf{t_{7,2}}$ en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 60. *Tarea $t_{7,2}$: ejemplo 24.*

Ejemplo 24. Calcule el valor de cada una de las integrales

a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$ c) $\int_0^1 e^x\, dx$ d) $\int_0^1 \operatorname{senh} x\, dx$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en los ejercicios propuestos 8, 15a, 15b, 15c, 15d, 15h, 15j y 17; así, se tienen en total 9 tareas **t**$_{7.2}$.

Subtipo de tarea t$_{7,3}$: Hallar el valor de la integral de una función que involucra valor absoluto.

Técnica $\tau_{7,3}$:

Paso 1: Definir la función en varios intervalos en los que desaparezca el valor absoluto de la función.

Paso 2: Aplicación de la propiedad 2 y 4 de integrales definidas (Figura 34).

Paso 3: Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_8}$: Propiedades de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría θ_7:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 61 una tarea **t**$_{7,3}$, en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 61. *Tarea $t_{7,3}$: ejemplo 28.*

Calcule el valor de $\int_{-1}^{1} \frac{|x|dx}{1+x^2}$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejemplo 29, y en los ejercicios propuestos 15e, 15f y 15g; así, se tiene en total 5 tareas **t**$_{2.2}$.

Subtipo de tarea t$_{7,4}$**:** Hallar la integral definida de una función arbitraria.

Técnica $\tau_{7,4}$:

Paso 1: Aplicar el principio de simetría del área de una función impar con respecto al origen.

Paso 2: Aplicar la propiedad 3 de la integral definida (Figura 34).

Paso 3: Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_8}$**:** Propiedades de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral, $\boldsymbol{\theta_4}$**:** Funciones.

Teoría θ_7:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 62 una tarea $\mathbf{t}_{7,4}$, en la que se desarrolla la técnica mostrada.

Figura 62. *Tarea $t_{7,4}$: ejercicio propuesto 10.*

10. Sea $f:[-6;6] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g:[-6;6] \to \mathbb{R}$ una función impar continua, tal que $\int_{-6}^{0} f(x)dx = 10$ y $\int_{-6}^{6} g(x)dx = -2$. Halle:

a) $\int_{-6}^{0} [f(x) + g(x)]\, dx$ $\quad R.\ 12$ b) $\int_{-6}^{0} [f(x) + s\, g(x)]dx$ $\quad R.\ 20$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto 16.

Tipo de tarea T$_8$: Demostraciones

Subtipo de tarea t$_{8,1}$: Demostración 1

Técnica $\tau_{8,1}$:

Paso 1: Composición de funciones.

Paso 2: Derivación usando regla de la cadena.

Paso 3: Aplicación de la propiedad 2 de integrales definidas (Figura 34).

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_8}$**:** Propiedades de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_4}$**:** Funciones, $\boldsymbol{\theta_9}$**:** Derivación.

Teoría Θ_8:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 63 la única tarea **t$_{8,1}$**, en la que se desarrolla la técnica que se ha mostrado.

Figura 63. *Tarea $t_{8,1}$: ejemplo 25.*

i) Sea $G(x) = \int_a^u f(t)dt$, donde $f: I = [a; b] \to \mathbb{R}$ es continua y $u = u(x)$ es una función derivable $(u: I_1 \to I)$. Pruebe que

$$G'(x) = f(u).u', \text{ donde } u' = \frac{d}{dx}(u(x))$$

ii) Sea $H(x) = \int_u^a f(t)dt$, donde f y $u = u(x)$ tienen las condiciones dadas en (i). Demuestre que

$$H'(x) = -f(u).u', \text{ donde } u' = \frac{d}{dx}(u(x))$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea t$_{8,2}$: Demostración 2

Técnica $\tau_{8,2}$:

Paso 1: Derivar y usar la sugerencia dada.

Paso 2: Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Paso 3: Evaluar la integral en los límites de integración.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral, $\boldsymbol{\theta_9}$**:** Derivación.

Teoría Θ_8:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 64 la tarea **t$_{8,2}$**, que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 64. *Tarea $t_{8,2}$: ejercicio propuesto 12.*

12. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du$$

Sug: considere $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du$, entonces $F'(x) = \int_0^x f(u)du$.

Luego, halle su antiderivada y calcule $F(0)$ para su constante.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea $t_{8,3}$: Demostración 3

Técnica $\tau_{8,3}$:

Paso 1: Cambiar “x” por “u” y “u” por “z” en la integral de la izquierda.

Paso 2: Derivar la integral.

Paso 3: Aplicar la regla de Leibniz.

Paso 4: Derivar la expresión interior del integrando.

Paso 5: Integrar el resultado obtenido y aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Paso 6: Aplicar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

Paso 3: Evaluar la integral en cero y usar la igualdad del ejercicio anterior.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral, $\boldsymbol{\theta_9}$**:** Derivación.

Teoría Θ_8:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 65 la tarea $\mathbf{t_{8,3}}$, que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 65. *Tarea $t_{8,3}$: ejercicio propuesto 13.*

13. A partir del ejercicio anterior, demuestre que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2du = 2\int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^z f(t)dt\right) dz\right] du$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Tipo de tarea T_9: Hallar la derivada de una integral

Subtipo de tarea $t_{9,1}$: Hallar la derivada de una integral cuando el límite superior es la variable independiente.

Técnica $\tau_{9,1}$:

Paso 1: Aplicar el primer teorema fundamental del cálculo integral.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_9:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 66 una tarea **$t_{9,1}$**, que desarrolla la técnica que mostrada.

Figura 66. *Tarea $t_{9,1}$: ejercicio propuesto 1c.*

c) $F(x) = \int_2^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\text{sen}^2 t}dt\right)dy$ R. $F'(x) = \int_8^x \frac{1}{1+t^2+\text{sen}^2 t}dt$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en el ejercicio propuesto 1e; así, se tiene en total 2 tareas **$t_{2.2}$**.

Subtipo de tarea $t_{9,2}$: Hallar la derivada de una integral cuando uno de los limites es una función.

Técnica $\tau_{9,2}$:

Paso 1: Uso de las fórmulas halladas en el ejemplo 25 (Figura 62).

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$: Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_9:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 67 una tarea $\mathbf{t_{9,2}}$, que desarrolla la técnica que se ha mostrado.

Figura 67. *Tarea $t_{9,2}$: ejemplo 26.*

Ejemplo 26. Sea $G(x) = \displaystyle\int_{-3}^{x^4} \frac{1}{1+9\,\mathrm{sen}^2 t}\,dt$ y $H(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{2} \frac{1}{t^2+9\,\mathrm{sen}\,t+15}\,dt.$

Halle: a) $G'(x)$ b) $H'(x)$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en los ejercicios propuestos 1a, 1b, 1d, 2, 3 y 18; así, se tiene en total 7 tareas $\mathbf{t_{9.2}}$.

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{9,3}}$: Hallar la derivada de una integral cuando los dos limites son funciones de límite inferior (f_1) y límite superior (f_2).

Técnica $\tau_{9,3}$:

Paso 1: Identificación de la continuidad de la función integrando.

Paso 2: Separar el intervalo en dos: $(<f_1\,, 0>, <0, f_2>)$

Paso 3: Aplicación de la propiedad 4 de integrales definidas (Figura 34), tomando en cuenta los intervalos obtenidos en el paso anterior.

Paso 4: Uso de las fórmulas halladas en el ejemplo 25 (Figura 62).

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_8}$**:** Propiedades de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_{10}}$**:** Continuidad, $\boldsymbol{\theta_9}$**:** Derivación, $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_9:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 68 una tarea **t$_{9,3}$** que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 68. *Tarea $t_{9,3}$: ejemplo 27.*

Ejemplo 27. Si $G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt[3]{1+y^3}\, dy$, halle $G'(x)$.

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en los ejercicios propuestos 4, 5, 6 y 7; así, existen en total 5 tareas **t$_{2.2}$**.

Tipo de tarea T$_{10}$: Hallar la derivada de una integral y evaluar la función objetivo $f(x)$ en un punto dado.

Subtipo de tarea t$_{10,1}$: Hallar la derivada de una integral, en la que $f(x)$ está en el integrando, evaluar $f(x)$ en un punto dado.

Técnica $\tau_{10,1}$:

Paso 1: Aplicación de la variación del primer teorema fundamental del cálculo integral o las fórmulas halladas en el ejemplo 25 (Figura 62).

Paso 2: Evaluar $f(x)$ en el punto dado.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_{10}:

Análisis real.

A continuación, se presentas en la Figura 69 una tarea **t$_{10,1}$** que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 69. *Tarea $t_{10,1}$: ejercicio propuesto 11a.*

a) $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$ $\qquad\qquad$ $R.\ 16$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Esta técnica se aplica también en los ejercicios propuestos 11b y 11d; así, se tienen en total 3 tareas $\mathbf{t_{10,1}}$.

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{10,2}}$: Hallar la derivada de una integral, tal que $f(x)$ está en el límite superior de la integral, evaluar $f(x)$ en un punto dado.

Técnica $\tau_{10,2}$:

Paso 1: Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Paso 2: Despejar $f(x)$.

Paso 3: Evaluar $f(x)$ en el punto dado.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_{10}:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 70 la única tarea que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 70. *Tarea $t_{10,2}$: ejercicio propuesto 11c.*

c) $\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x^2(1+x)$ $\qquad\qquad$ $R.\ \sqrt[3]{36}$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{10,3}}$: Hallar la primera y segunda derivada de $F(x)$. Evaluar $F'(x)$ en un punto.

Técnica $\tau_{10,3}$:

Paso 1: Aplicación del primer teorema fundamental del cálculo para hallar $F´(x)$.

Paso 2: Derivar $F´(x)$ para hallar $F´´(x)$

Paso 3: Evaluar $F´(x)$ en el punto dado.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_9}$**:** Derivación, $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Teoría Θ_{10}:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 71 la única tarea $\mathbf{t_{10,3}}$, que desarrolla la técnica que se ha mostrado.

Figura 71. *Tarea $t_{10,3}$: ejemplo 23.*

Ejemplo 23. Sea la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Calcule

a) $F'(x)$ b) $F''(x)$ c) $F'(1)$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Tipo de tarea $\mathbf{T_{11}}$: Resolver una ecuación, en la que hay una integral definida.

Subtipo de tarea $\mathbf{t_{11,1}}$: Resolver una ecuación, en la cual solo uno de los miembros tiene una integral definida.

Técnica $\tau_{11,1}$:

Paso 1: Cambio de variable en el integrando y cálculo de la antiderivada.

Paso 2: Obtención de la integral aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Paso 3: Reemplazar de la expresión hallada en el paso anterior en la ecuación.

Paso 4: Operaciones para hallar la variable incógnita “x” de la ecuación.

Tecnología:

$\boldsymbol{\theta_8}$**:** Propiedades de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral, $\boldsymbol{\theta_{11}}$**:** Ecuaciones.

Teoría Θ_{11}:

Análisis real.

A continuación, se presenta en la Figura 72 la única tarea **$t_{11,1}$** que desarrolla la técnica mostrada.

Figura 72. *Tarea $t_{11,1}$: ejemplo 30.*

Ejemplo 30. Sabiendo que $x \geq 9$, resuelva la ecuación:

$$\int_9^x \frac{16\,dt}{\sqrt{2}(16-t^2)} = \frac{2\pi}{3} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-10}\right) - 2\arctan\frac{3}{2} - \ln 5 \quad \ldots\ (\alpha)$$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

En la Tabla 7, se muestran los tipos de tareas y tareas encontradas en el análisis praxeológico realizado.

Tabla 7. *Tipos de tareas y subtipo de tareas halladas en el análisis praxeológico***.**

Tipo de tareas	Subtipo de tareas
T_1: Calcular, mediante rectángulos inscritos, el área de una región limitada por una función, rectas verticales y el eje X.	$t_{1,1}$: Calcular, mediante rectángulos inscritos, el área de una región limitada por una función lineal positiva, rectas verticales y el eje X.
T_2: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por una función continua y positiva, rectas verticales y el eje X.	$t_{2,1}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por una función polinómica de grado n ≤ 3, rectas verticales y el eje X.
	$t_{2,2}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por la función raíz cuadrada, rectas verticales y el eje X.
	$t_{2,3}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región, limitada por la función valor absoluto: $f(x) = a - \mid x \mid$, y el eje X.

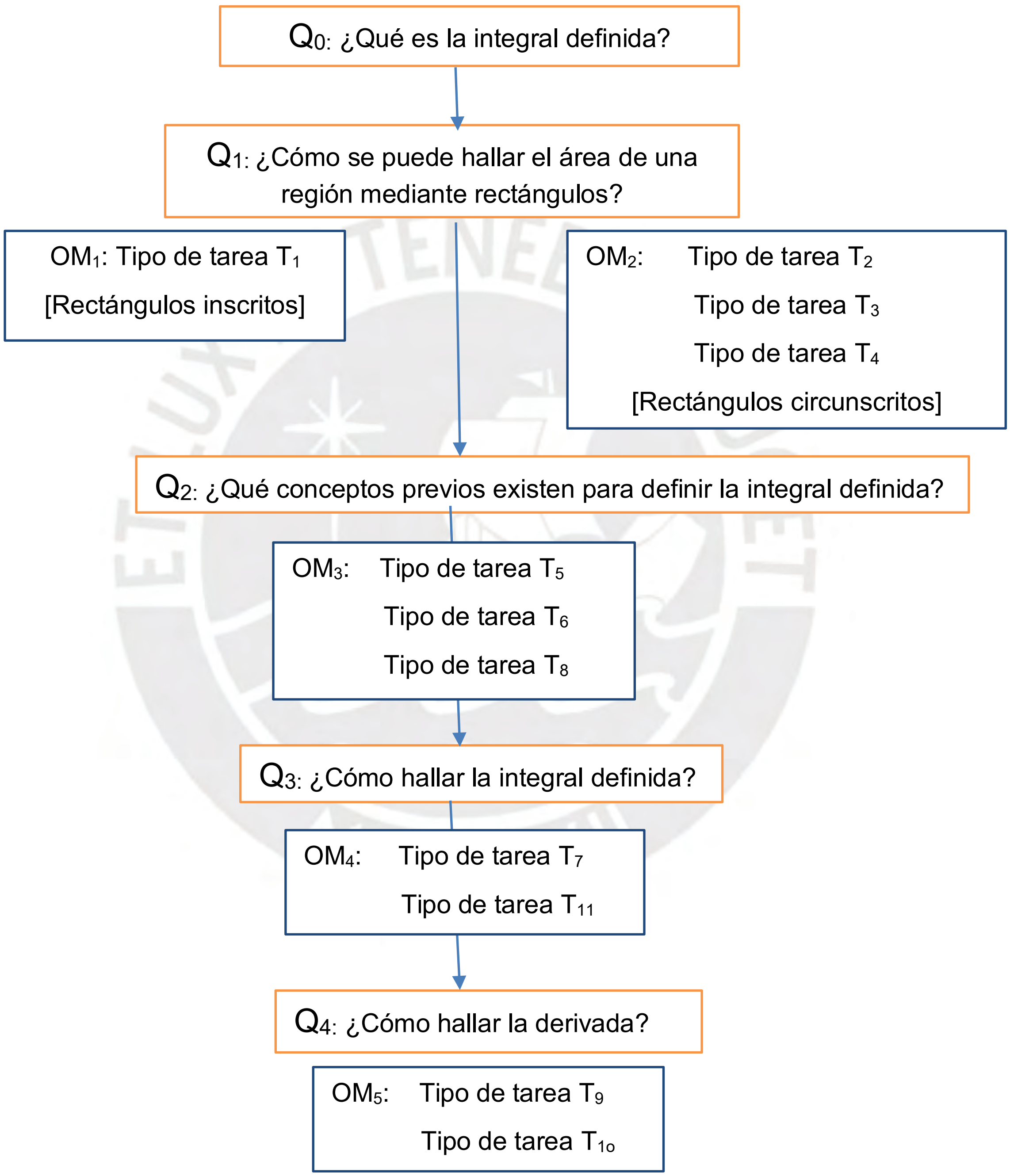
	$t_{2,4}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por la función exponencial, rectas verticales y el eje X.
	$t_{2,5}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por la función trigonométrica $Cos\, x$, rectas verticales y el eje X.
	$t_{2,6}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por la función trigonométrica inversa $Senh\, x$, rectas verticales y el eje X.
	$t_{2,7}$: Calcular mediante rectángulos circunscritos, el área de una región, limitada por la función trigonométrica inversa $Cosh\, x$, rectas verticales y el eje X.
T_3: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por una función continua y no necesariamente positiva, rectas verticales y el eje X.	$t_{3,1}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por una función polinómica continua y no necesariamente positiva de grado $n \leq 3$, rectas verticales y el eje X.
	$t_{3,2}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por una función trigonométrica, rectas verticales y el eje X.
T_4: Calcular, mediante rectángulos circunscritos el área de una región limitada por funciones cuadráticas y rectas verticales.	$t_{4,1}$: Calcular, mediante rectángulos circunscritos, el área de una región limitada por dos funciones cuadráticas, $g(x)$ y $h(x)$, y rectas verticales.
	$t_{4,2}$: Calcular mediante rectángulos circunscritos el área de una región limitada por dos funciones cuadráticas: $g(x)$ y $h(x)$.
T_5: Hallar la suma superior y suma inferior de una función acotada.	$t_{5,1}$: Hallar la suma superior $\bar{S}(f;P)$ y suma inferior $\underline{S}(f;P)$ de una función f acotada definida en un intervalo $I=[a,b]$. P es una partición de I.
T_6: Determinar si una función f es integrable.	$t_{6,1}$: Determinar si una función f definida en un intervalo $I=[a,b]$ es integrable. Si f es integrable, hallar la integral.

T_7: Hallar la integral definida de una función continua y acotada.	$t_{7,1}$: Dado un gráfico, hallar el valor de la integral de una función arbitraria que está formada por varias funciones conocidas.
	$t_{7,2}$: Hallar el valor de la integral de una función definida.
	$t_{7,3}$: Hallar el valor de la integral de una función que involucra valor absoluto.
	$t_{7,4}$: Hallar la integral definida de una función arbitraria.
T_8: Demostraciones.	Demostración 1.
	Demostración 2.
	Demostración 3.
T_9: Hallar la derivada de una integral.	$t_{9,1}$: Hallar la Derivada de una integral cuando el límite superior es la variable independiente.
	$t_{9,2}$: Hallar la Derivada de una integral cuando uno de los limites es una función.
	$t_{9,3}$: Hallar la Derivada de una integral cuando los dos limites son funciones: límite inferior (f_1) y límite superior (f_2).
T_{10}: Hallar la derivada de una integral y evaluar la función objetivo $f(x)$ en un punto dado.	$t_{10,1}$: Hallar la derivada de una integral, en la que $f(x)$ está en el integrando. Luego, evaluar $f(x)$ en un punto dado.
	$t_{10,2}$: Hallar la derivada de una integral, en la que $f(x)$ está en el límite superior de la integral. Luego, evaluar $f(x)$ en un punto dado.
	$t_{10,3}$: Hallar la primera y segunda derivada de $F(x)$. Evaluar $F´(x)$ en un punto.
T_{11}: Resolver una ecuación, en la que hay una integral definida.	$t_{11,1}$: Resolver una ecuación, en la que solo uno de los miembros tiene una integral definida.

Fuente. Elaboración propia.

En la Figura 73, se tiene un esquema del análisis praxeológico realizado que ayudará a comprender la organización matemática encontrada en el libro de texto. Aquí se plantea la cuestión directriz Q_0, de la cual se desprenden otras más que a continuación se mostrarán.

Figura 73. *Esquema del análisis praxeológico del texto analizado*.



Fuente. Elaboración propia.

El esquema mostrado en la Figura 73 se compone de un grupo de organizaciones matemáticas que están presentes al realizar el análisis praxeológico. Se plantea la pregunta directriz:

Q_0: ¿Qué es la integral definida?

A partir de esta pregunta, se derivan otras que originan 4 organizaciones matemáticas:

Q_1: ¿Cómo se puede hallar el área de una región mediante rectángulos?

Esta deriva a las organizaciones matemáticas OM_1 y la OM_2 asociadas a calcular el área de una región mediante rectángulos inscritos (Tipo de tarea $\mathbf{T_1}$) o rectángulos circunscritos (Tipos de tarea $\mathbf{T_2}$**,** $\mathbf{T_3}$ y $\mathbf{T_4}$), que, según el MER elaborado, están conformados por tareas que se asocian con hallar la cuadratura del área bajo la curva de una función (subtipo de tarea $\mathbf{t_{1,2}}$ del MER). Para esto, es necesario la ayuda de otros elementos para definir correctamente este método. Con lo expuesto, se plantea esta pregunta:

Q_2: ¿Qué conceptos previos existen para definir la integral definida?

Esta origina la organización matemática OM_3 asociada a sumas superiores e inferiores ($\mathbf{T_5}$), integral de Riemann ($\mathbf{T_6}$) y demostraciones que involucren los teoremas fundamentales del cálculo integral para funciones continuas ($\mathbf{T_8}$), que, según el MER elaborado, están conformadas por tareas que se asocian con definir el área bajo la curva de una función acotada y continua (subtipo de tarea $\mathbf{t_{2,1}}$ del MER), y establecer una relación entre el área bajo la curva de una función y la recta tangente (tipo de tarea $\mathbf{T_3}$ del MER). Asegurada la existencia de la integral definida y la relación con la derivada, surge esta pregunta:

$Q_{3:}$ ¿Cómo hallar la integral definida?

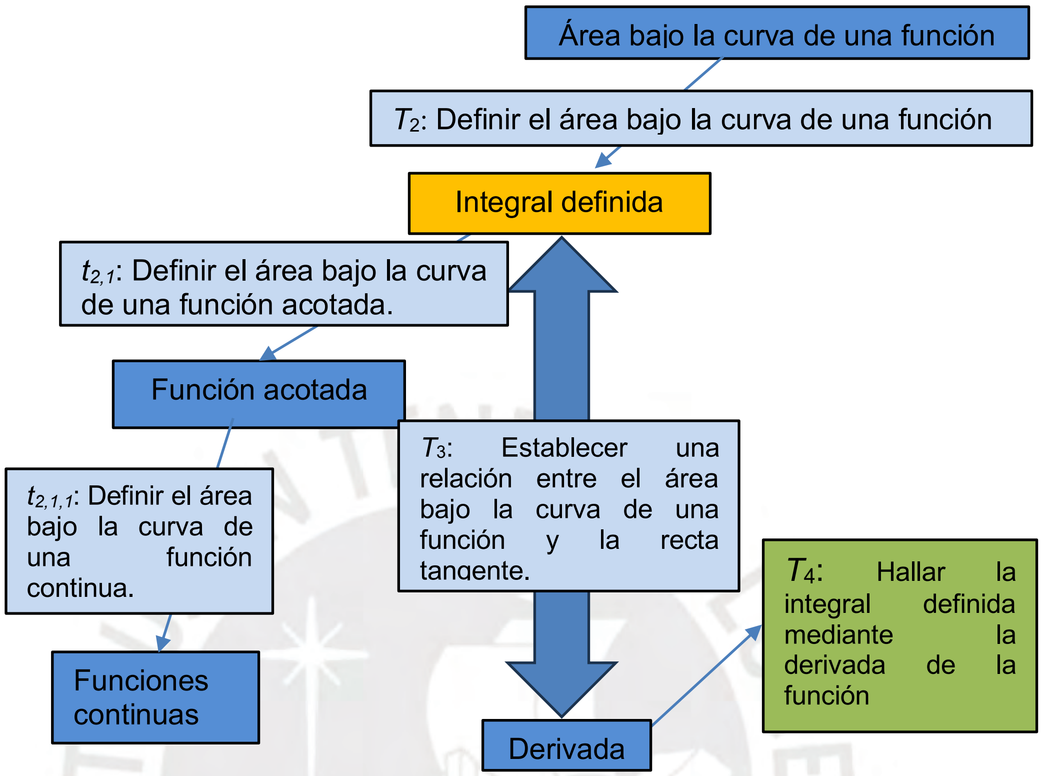
Esta presenta a la organización matemática OM_4 asociada a hallar la integral definida de una función continua y acotada ($\mathbf{T_7}$) y resolver una ecuación, en la cual existe una integral definida ($\mathbf{T_{11}}$), que, según el MER elaborado, está conformada por tareas que se relacionan con hallar la integral definida, dado un gráfico, y mediante la derivada de la función (tipo de tarea $\mathbf{T_4}$ del MER). Asimismo, determinada la relación inversa surge la siguiente pregunta:

$Q_{4:}$ ¿Cómo hallar la derivada de la integral definida?

Esta origina la organización matemática OM_4, asociada a hallar la derivada de la integral de una función continua y eventualmente evaluar la función en un punto ($\mathbf{T_9}$ y $\mathbf{T_{10}}$).

En la Figura 74, se observa la ruta del MER (Figura 20), que ha seguido el análisis praxeológico del texto analizado:

Figura 74. *Ruta del MER del análisis praxeológico*



Fuente. Elaboración propia

En la presente figura, se aprecia el camino del MER que ha seguido el análisis praxeológico. Esta comienza con los tipos de tarea para determinar el área de una región bajo la curva de una función mediante rectángulo infinitesimales (T_1, T_2, T_3 y T_4), como lo hizo Cauchy, para formalizar la definición de integral definida para una función continua (tipo de tarea T_2 del MER). Una vez planteada la definición se puede hallar la integral definida de manera grafica (T_7); seguidamente, se encuentran los tipos de tareas que involucran hallar las sumas superiores y sumas inferiores de una función acotada (T_5). Continúa el tipo de tarea que utiliza la definición de la integral de Riemann para determinar si una función acotada es integrable (T_6); estos tipos de tareas (T_5 y T_6) corresponderían al periodo en que Darboux formaliza la integral de Riemann para funciones acotadas y no solamente continuas; así, se pone en función de sumas superiores e inferiores (subtipos de tareas $t_{2,1}$ y $t_{2,1,1}$); finalmente, se tienen los tipos de tarea que hacen uso de la relación inversa entre la integral definida y la recta tangente (T_8, T_9, T_{10} y T_{11}), que corresponderían al tipo de tareas T_3 y T_4 del MER.

A continuación, se presentarán los criterios propuestos por Chevallard (1999) para evaluar los tipos de tareas.

Criterio de identificación: Los tipos de tareas y sus subtipos mostrados en la Tabla 7 están identificados y presentados de una forma clara. Los tipos de tareas $\mathbf{T_2}$. $\mathbf{T_7}$ y $\mathbf{T_9}$ son los que más están ramificados en varios subtipos. Los subtipos $\mathbf{t_{2,1}}$, $\mathbf{t_{7,2}}$, $\mathbf{t_{7,3}}$, $\mathbf{t_{9,2}}$ **y**, $\mathbf{t_{9,3}}$ son los que poseen más tareas, como se puede apreciar en los comentarios a las Figuras 44, 59, 60, 66 y 67 respectivamente.

Criterio de razón de ser: La razón de ser de los tipos de tareas no es evidente. Se puede afirmar que la razón de ser de las tareas $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$ y $\mathbf{T_4}$ se desprende del análisis histórico epistemológico, en el cual se requería de una formalización de la integral definida, Asimismo, Cauchy usa la suma de rectángulos infinitesimales para esta formalización. El tipo de tarea $\mathbf{T_5}$ nace en el hecho de hacer más entendible la integral de Riemann. Los tipos de tareas $\mathbf{T_7}$, $\mathbf{T_9}$, $\mathbf{T_{10}}$ y $\mathbf{T_{11}}$ surgen de la relación inversa entre la integral y la derivada. Con ella, se aplican soluciones al cálculo integral haciendo uso del cálculo diferencial y viceversa.

Criterio de pertinencia: Desde un punto de vista matemático, la pertinencia de los tipos de tareas $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$, $\mathbf{T_4}$, $\mathbf{T_5}$ se manifiesta al momento de aprender la integral de Riemann, ya que el conocimiento de los conceptos previos y su puesta en práctica permite comprender cabalmente dicha integral. Con respecto a los tipos de tareas $\mathbf{T_6}$, $\mathbf{T_7}$ y $\mathbf{T_{11}}$, permiten conocer y aplicar la integral definida, un concepto importante que servirá en los siguientes cursos matemáticos de una carrera de Ingeniería. Los tipos de tareas $\mathbf{T_9}$ y $\mathbf{T_{10}}$ permiten apreciar la importancia del aprendizaje del concepto de la integral definida al poder solucionar también problemas de derivadas. La pertinencia de los tipos de tarea con respecto a la definición ($\mathbf{T_6}$) y con respecto a hallar integrales ($\mathbf{T_7}$), aparte de la importancia matemática, radica su importancia en tratar problemas de ingeniería como lo mostrado en el capítulo 3, al tratar las series de Fourier ($\mathbf{T_6}$ y $\mathbf{T_7}$) o hallar el trabajo de un gas real ($\mathbf{T_7}$). No obstante, esta importancia no se evidencia en ningún momento, ya que no se encuentran tipo de tareas aplicados a la ingeniería.

Con respecto a la evaluación de las técnicas, se consideraron algunas preguntas planteadas por Chevallard (1999):

¿Se elaboran de manera efectiva, o solamente se bosquejan?

Las técnicas empleadas por los autores, para la solución de los 21 ejemplos analizados del libro de texto, se muestran de manera efectiva, ya que no solo se bosquejan, sino que se revelan mediante esas técnicas su solución.

¿Son fáciles de utilizar?

La técnica $\boldsymbol{\tau_{2,2}}$, por ejemplo, se diferencia de las realizadas previamente, ya que en el siguiente límite: $A = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}(g(z_i) - f(z_i))\Delta y)$ se usa en la sumatoria la diferencia de funciones. Esta técnica es diferente de las anteriores y posteriores del capítulo 2. En efecto, dentro de la sumatoria, solo se encuentra una sola función: esto puede complicar un poco al estudiante. Las técnicas $\boldsymbol{\tau_{8,1}}$, $\boldsymbol{\tau_{8,2}}$ y $\boldsymbol{\tau_{8,3}}$ de las demostraciones también pueden resultar un poco complicadas, debido a que son muy diferentes entre sí y no permiten establecer un patrón de solución. Sin embargo, en general, las técnicas son fáciles de usar y muy inteligibles.

Con respecto la evaluación de las tecnologías, se muestra la siguiente pregunta planteada por Chevallard (1999):

¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles?

Se piensa que las tecnologías disponibles y expuestas en la sección 4.2 de este capítulo, $\boldsymbol{\theta_1}$: Partición de un intervalo, $\boldsymbol{\theta_5}$**:** Sumas superiores y sumas inferiores, $\boldsymbol{\theta_6}$**:** Interpretación geométrica de la integral definida, $\boldsymbol{\theta_7}$: Teoremas fundamentales del cálculo integral y $\boldsymbol{\theta_8}$: Propiedades de la integral definida, son usadas de forma óptima como justificación de las técnicas usadas para resolver los ejemplos del presente libro.

Con lo expuesto, se finaliza la evaluación de las tareas, técnicas y tecnologías. A continuación, se realizará la valoración de la organización matemática identificada en el capítulo 2 acerca de la integral definida del libro de texto analizado. Para esto, se hará uso de los indicadores de completitud de Fonseca (2004) con el objetivo de medir el grado de completitud de dicha organización.

4.6 Valoración de la organización matemática en el libro de texto analizado

1. Integración de los tipos de tareas.

Para este indicador, una organización matemática local será menos completa en la medida que exista una mayor cantidad de tipos de tareas aisladas. En el esquema del análisis praxeológico, se aprecian cinco bloques de tipos de tareas:

OM_1: Tipo de tarea T_1.

OM_2: Tipo de tarea T_2, tipo de tarea T_3 y tipo de tarea T_4.

OM_3: Tipo de tarea T_5, tipo de tarea T_6 y tipo de tarea T_8.

OM_4: Tipo de tarea T_7 y tipo de tarea T_{11}.

OM_5: Tipo de tarea T_9 y tipo de tarea T_{10}.

En la OM_2, el conjunto de tipos de tarea está relacionado por el bloque tecnológico $\boldsymbol{\theta_1}$**:** Partición de un intervalo y $\boldsymbol{\theta_3}$**:** Sumatorias.

En la OM_3, los tipos de tarea T_5 y T_6 están relacionados por el bloque tecnológico $\boldsymbol{\theta_5}$: Sumas superiores y sumas inferiores.

En la OM_4, el conjunto de tipos de tarea está relacionado por el bloque tecnológico $\boldsymbol{\theta_8}$**:** Propiedades de la integral definida.

En la OM_5, el conjunto de tipos de tarea está relacionado por el bloque tecnológico $\boldsymbol{\theta_7}$**:** Teoremas fundamentales del cálculo integral.

Se puede apreciar que, salvo la OM_1, los demás bloques de tipos de tareas están integrados en pares de tipos de tareas o más.

2. Diferentes técnicas para la resolución de determinada tarea y criterios para escoger entre ellas.

En el libro de texto analizado, las soluciones presentadas para los ejemplos constan de una sola técnica. La solución de las tareas propuestas, que también forman parte del análisis praxeológico, se ha realizado utilizando una sola técnica, basada en la teoría y ejemplos otorgados en la sección correspondiente.

3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.

Según este indicador, las técnicas se valdrán de diferentes representaciones de la actividad matemática y deberán existir criterios para elegir la representación que sea más adecuada.

En libro de texto, se hace uso constante de la representación algebraica y aunque los autores usan la representación gráfica para la solución de sus ejemplos, la solución de los ejemplos en la sección “Cálculo del área de una región plana por sumatorias” sería también entendible sin esta representación. A continuación, se presentará, en la Figura 75, la siguiente tarea propuesta, cuya solución, en la opinión de uno, cumple con este indicador:

Figura 75. *Ejercicio propuesto 15.*

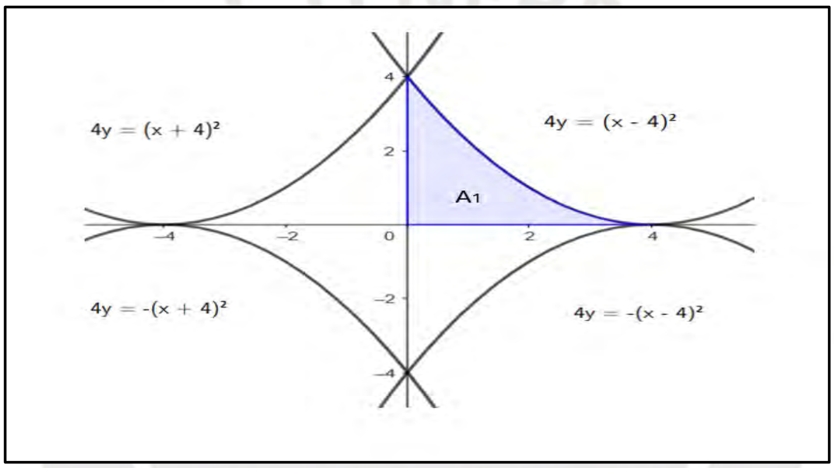
15. $4y = (x - 4)^2$, $4y = (x + 4)^2$, $4y = -(x - 4)^2$, $4y = -(4 + x)^2$

$R.\ 64/3\ u^2$

Nota. Adaptado de *Tópicos de cálculo, volumen 2* [Imagen], por Mitacc y Toro, 2009, https://es.scribd.com/document/236973748/Topicos-de-Calculo-Vol-II-Mitacc

Para solucionar esta tarea propuesta, se crea una representación gráfica, tal como se muestra en la Figura 76:

Figura 76. *Solución al ejercicio propuesto 15.*



Fuente. Elaboración propia.

Dicha representación simplifica mucho la solución, ya que empleando simetría solo es necesario hallar el área de la región A_1 y multiplicarla por 4; en cambio, hallar el área bajo la curva de cada función propuesta en la tarea haría más laboriosa la solución.

Aunque no se encuentra explícitamente en el libro de texto, se puede afirmar que esta tarea propone implícitamente en su técnica el uso de la representación gráfica para su solución, al ser esta más eficiente.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas.

Según el tipo de tarea T_3 del MER: “Establecer una relación entre el área bajo la curva de una función y la recta tangente”, se indica que los tipos de tareas que deberían aparecer en la organización matemática de la sección del libro que se analiza son dos:

- Dada una función, hallar la integral.
- Dada la integral de una función, hallar la función.

Revisando el análisis praxeológico del libro, se asevera que, para el primer caso, se tiene el tipo de tarea T_7 y para el segundo, los tipos de tarea de la OM_5: T_9 y T_{10}.

5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

No hay tareas que cuyo objetivo sea interpretar o justificar el funcionamiento o el resultado de aplicar una técnica. Hay ausencia de ejercicios en los que se requiera la interpretación del resultado.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.

Tareas abiertas como la encontrada en la Figura 19 no se encuentran en la sección del libro de texto analizada.

7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.

Las técnicas $\tau_{2,4}$, $\tau_{2,5}$, $\tau_{2,6}$, $\tau_{2,7}$ utilizan en su primer punto los 3 primeros pasos de la técnica $\tau_{2,1}$; también las técnicas $\tau_{3,1}$, $\tau_{4,1}$, $\tau_{4,2}$ utilizan en su segundo paso la técnica $\tau_{2,1}$. Por su parte, la técnica $\tau_{3,2}$ utiliza en su primer paso los 2 primeros de la técnica $\tau_{3,1}$; asimismo, la técnica $\tau_{9,2}$ usa como técnica el resultado de la tarea $t_{8,1}$, lo cual demuestra que sus respectivos elementos tecnológicos están relacionados.

Conclusiones

La presente investigación tuvo por objetivo general describir, analizar y valorar una organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto de Cálculo 2 para estudiantes de segundo ciclo de una carrera de Ingeniería. Para lograrlo, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es la organización matemática propuesta para la enseñanza de la integral definida en un libro de texto de Cálculo 2 para estudiantes de segundo ciclo de una carrera de Ingeniería y qué tan completa es dicha organización matemática? Para responderla, se inició con la descripción de los resultados obtenidos para cada objetivo específico.

En relación con el objetivo específico de Identificar y describir una organización matemática sobre la integral definida por medio de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), se utilizaron diferentes tipos de fuentes de información históricas y académicas. Así, se pudo elaborar un MER que permitió establecer la razón de ser de la integral definida, la cual permitió una mejor comprensión del concepto y, por tanto, uso de este, tanto en el ámbito intramatemático como en el extramatemático. En dicho estudio, se apreció que la integral definida nace en la antigüedad para realizar cuadraturas de figuras geométricas y que, cuando los escritos de Arquímedes llegaron a Europa, surge un afán de mejorar y reemplazar el método exhaustivo. Finalmente, con la llegada del cálculo, si bien desaparece dicho método, surge la necesidad de darle el rigor formal. Esto último llega con Cauchy y se generaliza hasta las funciones no acotadas con Lebesgue. También se analizó la utilización de la integral definida en carreras de Ingeniería y en libros de texto de Cálculo 2. Ello muestra su alcance y utilidad en otros ámbitos aparte del matemático. La estructura del MER permitió comprender los resultados del análisis praxeológico del libro de texto y se utilizó en diferentes puntos de este análisis. Gracias a dicha estructura, se pudo apreciar que el enfoque de la integral definida en el libro de texto es analítico y se circunscribe a las funciones continuas. Así mismo, la razón de ser de la integral definida, considerando el análisis praxeológico realizado al capítulo 2 del libro de texto, es la de hallar áreas de funciones continuas y resolver problemas mediante la relación inversa entre la recta tangente y la integral definida. Finalmente, se observó que el libro no presenta tareas sobre su uso en la ingeniería ni contiene aplicaciones fuera del ámbito matemático.

En relación con el objetivo específico de analizar la organización matemática presente en el libro texto sobre la integral definida para estudiantes del segundo ciclo de una carrera de Ingeniería, se encontraron, al momento de revisar los antecedentes, diversos estudios que revelaban la utilidad de las herramientas de la TAD para realizar análisis praxeológicos de distintos objetos matemáticos. Esta permitió realizar el análisis de la organización matemática del capítulo sobre la integral definida del libro de texto, en el que se identificaron y describieron los tipos de tarea, las tareas, las técnicas para resolverlas, las tecnologías que justifican dichas técnicas y la teoría que justicia la tecnología, que, para este caso, fue el análisis real. En los antecedentes, se presenta el trabajo de Gonzales (2020). En él, se realiza el análisis praxeológico de libros de matemáticas y de la carrera de Ingeniería Química sobre la integral definida. Ello muestra la utilidad para este análisis. Por otro lado, el libro *Tópicos de cálculo volumen* II se imparte en el segundo ciclo de estudios generales de la Universidad Mayor de San Marcos (UNMSM), dentro de las carreras de Ingeniería, y sirve como base para el curso de Cálculo III. Aparte de los cursos de Fisicoquímica y Procesamiento Digital de Señales, revisados en la sección 3.2 del capítulo 3, en la que se hace uso de la integral definida, también se realizan en cursos de estudios generales de carreras de Ingeniería, como Física I. En este, se hace uso de la integral definida, por ejemplo, hallar la posición de un objeto, el cual integra en un intervalo de tiempo la función velocidad respecto del tiempo.

En el capítulo 2, se analizó en el libro de texto 21 ejemplos y 33 ejercicios propuestos. Los ejemplos iban acompañados de sus respuestas. De todas estas tareas, se pudo identificar 11 tipos de tareas, lo que permitió evaluar no solo ello, sino también identificar y evaluar las técnicas y tecnologías involucradas.

Para el objetivo específico de valorar la organización matemática del libro de texto mediante los indicadores de completitud de Fonseca (2004), se determinó que la organización matemática encontrada en el libro de texto analizado es relativamente completa, ya que no hay presencia de los indicadores “Diferentes técnicas para la resolución de determinada tarea y criterios para escoger entre ellas”, “Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas” y “Existencia de tareas matemáticas ‘abiertas’”. Con respecto a los indicadores que sí se encontraron en la organización matemática, se pudo realizar una observación en relación con el tercer indicador “Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática”, ya que la presencia de una sola tarea (el ejercicio propuesto 15), que cumple con este indicador, demuestra, en general, la ausencia de técnicas que privilegien diferentes representaciones en la solución de las tareas.

Así, se puede concluir que, gracias a la TAD, se ha podido realizar el análisis praxeológico a un texto de nivel superior, ya que la teoría posee las herramientas necesarias para llevarlo a cabo. Por ello, se considera que la presente investigación puede servir de referencia para futuras investigaciones que realicen análisis de textos de nivel superior en relación con la integral definida, partiendo como marco teórico la TAD. Por su parte, la construcción del MER (que no es definitivo y siempre está sujeto a una constante evolución) puede aprovecharse también para el análisis y la formulación de nuevos textos didácticos para la enseñanza de la integral definida. Todo ello teniendo presente los indicadores que no fueron considerados en el texto analizado.

Finalmente, se considera que la razón de ser de la integral definida hallada en el análisis del libro de texto generará una serie de fenómenos didácticos que proporcionarán información para generar preguntas generatrices de recorridos de estudio e investigación (REI).

Bibliografía

Alcaraz Candela, D. (s.f.). *Series y transformadas de Fourier*. Universidad politécnica de Cartagena. https://www.dmae.upct.es/~paredes/am_ti/apuntes/Tema%202.%20Series%20y%20transformadas%20de%20Fourier.pdf

Aldana Bermúdez, E. (2011). *Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la Teoría "Apoe".* [Tesis de doctorado, Universidad De Salamanca]. https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/83204/DDMCE_AldanaBerm%FAdez_El%E9cer_Comprensi%F3n.pdf;jsessionid=6881341DFB1A06DDC1A1CE8D51F090B0?sequence=1

Aldana Bermúdez, E. y González Astudillo, M. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de integral. En G. Obando Zapata (Ed.), *Matematica Educativa 13 Encuentro Colombiano Ecme* (pp. 689-705). Sello Editorial Universidad de Medellín. https://core.ac.uk/download/pdf/147430303.pdf

Aldana, E., González, M., y López-Leyton, C. (2020). El desarrollo del esquema de integral. *Revista Espacios, 41*(2), 4-19. https://www.revistaespacios.com/a20v41n02/a20v41n02p04.pdf

Almouloud, S. (2010). *Fundamentos da didática da matemática.* Editora UFPR.

Almouloud, S. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodología de análisis de materiales didácticos. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9-34.

Alvarez Jimenez, C. (1994). *Curso de análisis.* Colección Mathema.

Anderson, D., Cole, J. y Drucker, D. (2012). *Single Variable Calculus.* Brook/Cole.

Aranda López, M. (2015). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato.* [Tesis de doctorado]. Universidad De Alicante.

Attorps, I., Björk, K., Radic, M. y Tossavainen, T. (2013). Varied ways to teach the definite integral concept. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 8*(2-3), 81-99. doi:10.29333/iejme/275

Barrow, I. (1916). *The geometrical lectures of Isaac Barrow.* (J. M. Child, Trad.) The open court publishing company. (Trabajo original publicado en 1670)

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* [Tesis de doctorado, Universidad del valle]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/0615f602-24a7-434c-9eb4-539107340353/content

Boigues, F., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la Integral definida en estudiantes de ingenierias relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Relime, 13*(3), 255-282. https://relime.org/index.php/relime/article/view/301/263

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bosch, M., Fonseca Bon, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2-3), 205-250. https://revue-rdm.com/2004/incompletitud-de-las/

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol18/2/vol18-2-02_REM_18-2.pdf

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* (M. Martínez, Trad.) Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1968).

Briceño, E., Hernández, J., y Muñoz, J. (2016). Reflexión sobre la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología una experiencia de aula en el nivel medio superior. *El Cálculo y su Enseñanza, 7*(1), 23-45. https://doi.org/10.61174/recacym.v7i1.94

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Burton, D. (2011). *The History of Mathematics.* McGraw-Hill.

Cabañas Sánchez, M. G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. ResearchGate.

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. *Educación Matemática, 20*(3), 33-57.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29. doi:10.24844/EM2802.01

Cauchy, A. (1823). *Résumé des leçon sur le calcul infinitésimal.* A Paris ,De L'Imprimerie Royale.

Cauchy, A. (1994). *Curso de análisis.* (C. Alvarez, Trad.) Colección MATHEMA (Trabajo original publicado en 1821).

Chaachoua, H y Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa (EMP), 21*(4), 234-247. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21-30). Fundemi IQS. http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME4_2_Plenaries.pdf

Chevallard, Y. (2012). *Éléments pour une instruction publique nouvelle*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_CNEM_-_Intervention.pdf

Corica, A. y Ferrari, C. (2020). Análisis de las praxeologías estadísticas que se proponen estudiar en la formación de estudiantes de profesorado en matemática. *Revista Eletrônica de Educação Matemática, 15*(2), 1-24. doi:https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e75590

Crisóstomo dos Santos, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del Cálculo y el conocimiento profesional.* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada] DIGIBUG: Repositorio Institucional de la Universidad de Granada https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Edson_Crisostomo_tesis.pdf

Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4*, 57-112. http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.122/

De Mora, M. (s.f.). *Gottfried Wilhelm Leibniz*. DivulgaMAT: https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Leibniz3.asp.htm

Dunham , W. (1990). *Journey Through Genius: The great theorems of mathematics.* Wiley Science Editions.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag.

Fernández Fernández, L. (2011). *La historia como herramienta didactica: el concepto de la integral.* [Tesis de maestria, Universidad de Cantabria]. Repositorio Institucional – Universidad de Cantabria. https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/1642

Fernández, T. y Elena, T. (2004). *[Biografias de personajes famosos]*. Biografias y Vidas. https://www.biografiasyvidas.com

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2012). *Investigação em educação matemática percursos teóricos.* Autores Associados.

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Vigo.

García de la Sierra, A. (1983). El metodo de Arquimedes. *DIANOIA Revista de filosofia*, 53-80. doi:https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.1983.29.782

García, F., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de investigación en Educación, 15*, 75-94. https://aiem.es/article/view/3873/4316

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(2), 203-231. https://relime.org/index.php/relime/article/view/259/230

Gomez Huasco, A. (2018). *Análisis de una Praxeología Matemática de las Inecuaciones lineales en libros didácticos de Educación Secundaria [*Tesis de Maestria, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/20.500.12404/13586

Gonzales Caicedo, W. (2020). *Praxeologías sobre la Integral Definida en la formación de un Ingeniero Químico.* [Tesis de Maestria, Pontificia Universidad Católica del Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/17296

Gonzales Hernández, C. (2014). *Una Praxeología Matemática de Proporción en un Texto Universitario.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Catolica del Perû]. Repositorio Institucional – Pontificia Universidad Catolica del Perû. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5225

González Astudillo, M. y Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología De Análisis De Libros De Texto De Matemáticas. Los Puntos Críticos En La Enseñanza Secundaria En España Durante El Siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 389–408.

González Gilmas, O. (2004). El cálculo infinitesimal leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro. *Signos Filosóficos*, 97-120. https://signosfilosoficos.izt.uam.mx/index.php/SF/article/view/231/222

González Urbaneja, P. (1995). *Las Técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. Fundación canaria orotava de historia de la ciencia: https://fundacionorotava.org/media/web/publication_files/publication23__a2_c016w.pdf

Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Dover Publications.

Hawking, S. (2010). *Dios creó los números.* Crítica.

Hawkins, T. (1975). *Lebesgue's theory of integration.* AMS Chelsea Publishing.

Heath, T. (1897). *The Works of Archimedes.* Editorial Cambridge.

Heath, T. (1912). *The Method of Archimedes.* Editorial Cambridge.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la Investigación.* McGraw-Hill.

Iiris , A., Kjell, B., y Mirko, R. (2013). Varied Ways to Teach the Definite Integral Concept . *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 81-99.

Instituo Nacional de Estadistica. (s.f.). Historia de personajes. https://www.ine.es/explica/docs/historia_personajes.pdf

Jiménez Villanueva, M., Ruiz Ledesma, E., y Montiel Sánchez, Á. (2018). Análisis de la conceptualización de la integral definida por medio de la teoría APOE. *Pistas Educativas,* *40*(130), 17. https://pistaseducativas.celaya.tecnm.mx/index.php/pistas/article/view/1699/1374

Kindt, M. (2011). *Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.* Universidad de la laguna. https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/11/mkindt.pdf

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matematico de la antigüedad a nuestros días.* (M. Martínez, J. Tarrés, A . Casal. Trad.) Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1972).

Llorens Fuster, J. y Santonja Gómez, F. (1997). Una Interpretacion de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas, 5*(1/2), 61–76.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas.* Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Martín Suárez, M. (2008). *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I.* Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf

Mateus, P. (2006). *Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análise do potno de vista da organização praxeológica.* [Tesis de maestría, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Repositorio institucional Universidade Católica de São Paulo.

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema, Rio Claro (SP), 35*(71), 1593-1615. doi:http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

Muñoz Ortega, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algoritmico en el cálculo integral. *Relime, 3*(2), 131-170.

Narro Ramírez, P., Kanagúsico Muñoz, M. y Marente Ibarra, K. (2011). Aprendizaje de la Integral Definida en estudiantes de Ingenieria. *El cálculo y su enseñanza, 3*(1), 32-42. https://doi.org/10.61174/recacym.v3i1.138

Nitti, L. y Álvarez, M. (2013). Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática. *Yupana, 1*(7), 69-83. https://doi.org/10.14409/yu.v1i7.4263

Nortes Checa, A y Nortes Martínez-Artero, R. (2011). Los libros de texto y la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educatio Siglo XXI*, 67-98.

Ortiz, E. (2013). *De lo que se puede hacer con los números: el método de cuadraturas aritméticas de John Wallis [Ponencia].* XXIII Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia. https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/21160

Perú. Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima.

Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/documentos.php#top

Porres Tomé, M. (2011). *Integral Definida, Cálculo Mental Y Nuevas Tecnologías.* [Tesis de doctorado, Universidad de Valladolid]. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/949

Porres, M., Pecharromán, C., & Ortega, T. (2017). Aportaciones de DERIVE y del cálculo mental al aprendizaje de la integral definida. *PNA: Revista de la universidad de Granada, 11*(2), 125-153. https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6077

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 15*(2), 103-127. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/510af388-4297-4124-bd4e-67b93972266d/content

Salazar Hoyos, W. (2011). *Introduccion al cálculo a través de algunas curvas especiales.* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/9112/70829946.2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Stewart, J. (2012). *Cálculo.* Cengage Learning.

Trigueros, M. (2019). Diálogo entre las teorías APOE y TAD Dialogue between APOE and ATD theories. *Educação Matemática Pesquisa, 21*(5), 30-43. doi:https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p30-43

Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2022). Sílabo. En W. Acuña Montañez (Ed.), *Cálculo II.* Escuela de Estudios Generales Área de Ingeniería.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2023). Facultad de Ingeniería Industrial. https://industrial.unmsm.edu.pe/wp-content/uploads/2024/04/Malla-Curricular-2023-Ingenieria-Industrial.pdf

Vargas Vargas, G. (2019). *Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional – Pontificia Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/15169

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos.* Aguilar.

Vinícius Ribeiro, M. (2010). *O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da historia da matematica e da resolução de problemas .* [Tesis de maestria, Universidade Estadual Paulista]. Repositorio institucional - Universidade Estadual Paulista. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91053

Wijayanti, D. y Winsløw, C. (2017). Mathematical Practice in Textbooks Analysis: Praxeological Reference Models, the Case of Proportion. *REDIMAT*, 307-330.