

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

## FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

### DESARROLLO DE HOJAS DE CÁLCULO PARA EL DISEÑO EN CONCRETO ARMADO

Tesis para optar el Título de INGENIERO CIVIL, que presenta el bachiller:

**Jonathan Omar Galindo La Matta**

**ASESOR: Ing. Gianfranco Ottazzi Pasino**

Lima, junio del 2016

## RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es desarrollar cuatro hojas de cálculo para el análisis y/o diseño estructural de los siguientes elementos de concreto armado: vigas continuas, muros de corte, muros de contención y losas macizas. A través de estas hojas de cálculo se acelera la parte numérica del procedimiento de diseño y permite que el ingeniero se ocupe de otras partes del procedimiento tales como la evaluación de opciones y la compatibilización con arquitectura. El resultado final es un aumento de la calidad del diseño estructural.

La principal ventaja en el uso de estas hojas de cálculo en comparación con los programas convencionales de cálculo y diseño radica en que estos últimos, al ser extranjeros, no están adaptados totalmente a las normas peruanas actuales, especialmente en los aspectos sísmicos que son únicos de cada región.

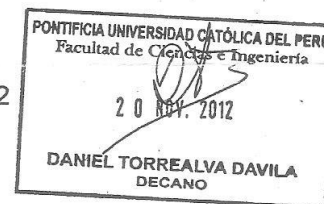
Se utilizaron funciones avanzadas y macros para mejorar la presentación y los cálculos de cada hoja de cálculo. Se desarrolla tanto los temas teóricos como los algoritmos que se utilizaron en cada hoja. Asimismo se realiza verificaciones con otros programas comerciales o cálculos manuales para demostrar su validez. Por último se presenta en el anexo ejemplos de aplicación de cada una de las hojas de cálculo y además un CD con los archivos en digital.

FACULTAD DE  
 CIENCIAS E  
 INGENIERÍA

 PONTIFICIA  
 UNIVERSIDAD  
 CATÓLICA  
 DEL PERÚ

## TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

Título : "Desarrollo de hojas de cálculo para el diseño en concreto armado".  
 Área : Estructuras  
 Asesor : Ing. Gianfranco Ottazzi P.  
 Alumno : JONATHAN OMAR GALINDO LA MATTA  
 Código : 2004.0288.3.412  
 Tema N° : 317  
 Fecha : Lima, 16 de noviembre de 2012



## OBJETIVO

Desarrollar un grupo de hojas de cálculo en Excel para el análisis y diseño de secciones y elementos estructurales de concreto armado.

## DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

El diseño de secciones y elementos estructurales de concreto armado puede realizarse con la ayuda de hojas de cálculo desarrolladas específicamente para abordar el diseño rutinario de una solicitud o conjunto de solicitudes. Las hojas de cálculo que deberán elaborarse son:

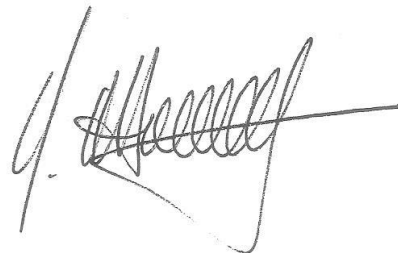
- Diseño por flexo compresión y cortante de muros (placas) de sección doble T.
- Análisis y diseño de vigas continuas.
- Diseño de losas macizas o aligeradas utilizando Líneas de Rotura o fluencia.
- Análisis y diseño de muros de contención en voladizo.

## PLAN DE TRABAJO

- Definición del alcance de cada una de las hojas de cálculo a desarrollar.
- Definición de los algoritmos de análisis y diseño y de las limitaciones de la metodología de análisis y diseño a emplearse.
- Desarrollo de las hojas de cálculo. Deberá prestarse especial atención a la entrada de datos y salida de resultados, ambas deberán ser "amigables".
- Las hojas de cálculo deberán incluir comentarios que faciliten al usuario su uso así como la interpretación de los resultados.
- Pruebas exhaustivas de cada una de las hojas de cálculo.
- Elaboración de la memoria.

## NOTA

Extensión máxima: 100 página.

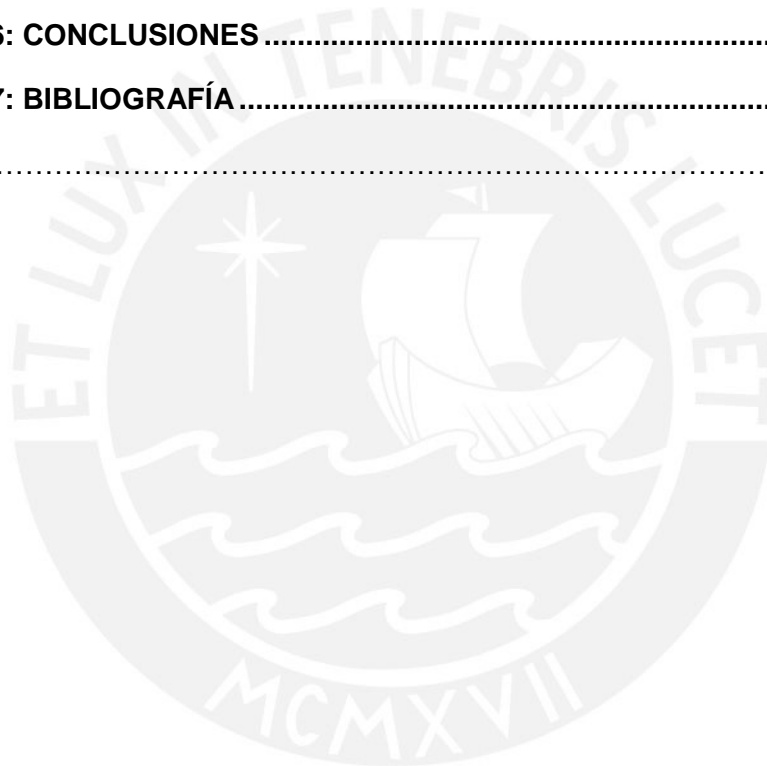




## CONTENIDO

<b>Contenido</b> .....	<b>i</b>
<b>Capítulo 1: INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Antecedentes .....	1
1.1.1 Procedimiento del diseño estructural.....	2
1.2 Justificación e importancia .....	5
1.3 Objetivo.....	7
1.4 Estructura de la tesis.....	7
<b>Capítulo 2: VIGAS CONTINUAS</b> .....	<b>8</b>
2.1 Descripción .....	8
2.2 Alcances .....	10
2.3 Sustento teórico .....	11
2.4 Principales algoritmos .....	13
2.4.1 Formación de la matriz de compatibilidad [A].....	13
2.4.2 Formación de la matriz de carga [Q] .....	14
2.4.3 Cálculo de los momentos de empotramiento.....	16
2.4.4 Efecto de los brazos rígidos en los momentos de empotramiento .....	21
2.5 Verificaciones.....	23
<b>Capítulo 3: MUROS DE CORTE</b> .....	<b>29</b>
3.1 Descripción .....	29
3.2 Alcances .....	31
3.3 Sustento teórico .....	32
3.3.1 Geometría del muro y refuerzos mínimos .....	32
3.3.2 Cortante.....	33
3.3.3 Flexión y carga axial .....	34
3.3.4 Amplificación del cortante por solicitaciones sísmicas.....	34
3.4 Verificaciones.....	35

<b>Capítulo 4: MUROS DE CONTENCIÓN</b> .....	<b>38</b>
4.1 Descripción .....	38
4.2 Alcances .....	41
4.3 Sustento teórico .....	41
4.3.1 Empujes laterales del suelo .....	43
4.3.2 Teoría de Rankine.....	44
4.3.3 Modos de falla.....	47
4.3.4 Estabilidad al volteo .....	49
4.3.5 Estabilidad al deslizamiento.....	50
4.3.6 Esfuerzos del suelo.....	50
4.3.7 Falla global del talud .....	51
4.3.8 Diseño en concreto armado .....	51
4.4 Verificaciones.....	52
<b>Capítulo 5: LOSAS MACIZAS</b> .....	<b>56</b>
5.1 Descripción .....	56
5.1.1 Método de coeficientes .....	56
5.1.2 Líneas de fluencia para losas rectangulares .....	58
5.1.3 Líneas de fluencia para losas de geometría general .....	59
5.2 Sustento teórico .....	60
5.2.1 Métodos de análisis .....	61
5.2.2 Método de los coeficientes.....	62
5.2.3 Método de líneas de fluencia o rotura .....	64
5.2.4 Patrones de líneas de fluencia .....	65
5.2.5 Análisis mediante el método de trabajo virtual .....	67
5.3 Principales algoritmos .....	68
5.3.1 Diseño de losas por Método de Coeficientes .....	68
5.3.2 Líneas de Fluencia en losas rectangulares .....	68
5.3.3 Líneas de fluencia en losas con geometría general.....	70

5.3.4	La función madre .....	71
5.3.5	Función intersección de cuerpos.....	73
5.3.6	Función intersección de rectas.....	74
5.3.7	Función ensamblaje de cuerpos.....	74
5.3.8	Función trabajo Interno .....	77
5.3.9	Función trabajo externo parcial .....	77
5.3.10	Caso de lados o bordes libres .....	79
5.4	Verificaciones.....	81
<b>Capítulo 6: CONCLUSIONES .....</b>		<b>83</b>
<b>Capítulo 7: BIBLIOGRAFÍA.....</b>		<b>84</b>
ANEXO.....		86



## CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

Durante el siglo XX, el desarrollo de computadoras y su posterior popularización permitió que se prescindiera de los métodos aproximados para el análisis estructural para dar lugar al método matricial de rigidez, desarrollado por Collar, Duncan, Argyris y Turner, cuya principal característica es su facilidad de ser programado en un computador. Posteriormente se desarrolló el método de elementos finitos, que ha permitido resolver sistemáticamente estructuras complejas

En la actualidad, el uso del software es prácticamente indispensable para el análisis y diseño de estructuras. La habilidad de las computadoras para realizar procedimientos matemáticos repetitivos permite acelerar el procedimiento de diseño estructural. Sin embargo muchos ingenieros no aprovechan todo el potencial que tienen las computadoras por no saber comunicarse con estas mediante un lenguaje de programación. Un mayor énfasis en la enseñanza de programación en la universidad permitirá que cada futuro ingeniero tenga la capacidad de elaborar sus propias aplicaciones que satisfagan sus propias necesidades, y no depender únicamente de los *software* comerciales que, aunque muy poderosos, muchas veces no son eficientes para resolver situaciones específicas.

Las computadoras aportan considerables ventajas al diseño estructural. Sin embargo es importante resaltar que estas solo se encargan de la parte numérica del proceso, que es solo una fracción de todo el procedimiento del diseño estructural, que incluye otro tipo de procesos como se explica en la siguiente sección.

El uso de ordenadores se extiende también a la documentación (planos estructurales, informes, tablas de metrados) y a la transferencia de información entre especialidades. Estos temas no están incluidos en el presente trabajo.

### 1.1.1 Procedimiento del diseño estructural

En la figura 1-1 se muestra el procedimiento de diseño de artefactos según Karl T Ulrich (Ulrich, 2005), donde se define artefacto a todo aquello realizado por el ser humano, ya sea tangible o no, para resolver un problema o cubrir una necesidad. Este procedimiento se inicia con la identificación y planteamiento del problema. Luego se proponen una cantidad de posibles soluciones (alternativas) con el objeto de evaluar cada una de ellas y determinar en qué grado estas resuelven o no el problema planteado. Si la evaluación resulta en una propuesta no satisfactoria, se formulan nuevas propuestas para ser evaluadas. De esta manera se forma un procedimiento iterativo de propuesta y evaluación que finaliza al encontrar una solución satisfactoria.

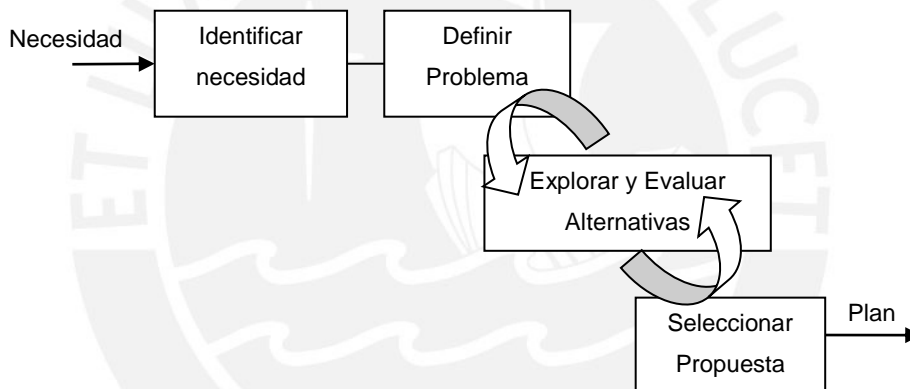


Figura 1-1 Procedimiento de diseño de artefactos (Ulrich, 2005)

El diseño estructural no es ajeno a este esquema. Una propuesta de solución equivale a una estructuración, que es una propuesta de la ubicación, dimensiones u otras características de los elementos estructurales basado en la experiencia del diseñador. Esta estructuración recorre un procedimiento llamado análisis estructural, que predice el comportamiento y la respuesta de la estructura bajo las cargas dadas, cuyos resultados son evaluados de acuerdo a los requerimientos de las normas vigentes y al criterio y experiencia del ingeniero. De esta evaluación se decide si la estructura y sus características son satisfactorias o no, en caso no lo sea se regresa proponer otra estructuración y se repite el procedimiento. Luego de un número de iteraciones

necesarias se llega a una solución satisfactoria que es el resultado final del diseño estructural.

La figura 1-2 muestra un procedimiento de diseño para estructuras metálicas (Zapata Baglieto, 1997), cuyas partes pueden relacionarse con el esquema de Ulrich. En este caso *Planteamiento* corresponde a la identificación de la necesidad o la definición del problema. *Configuración preliminar*, *determinación de cargas* y *selección de perfiles* forman parte de la formulación y exploración de alternativas. El análisis estructural, evaluación de la resistencia y diseño óptimo son la manera como se evalúa una alternativa para verificar si es o no satisfactoria. El bucle formado por la flecha *rediseñar* indica el procedimiento iterativo.

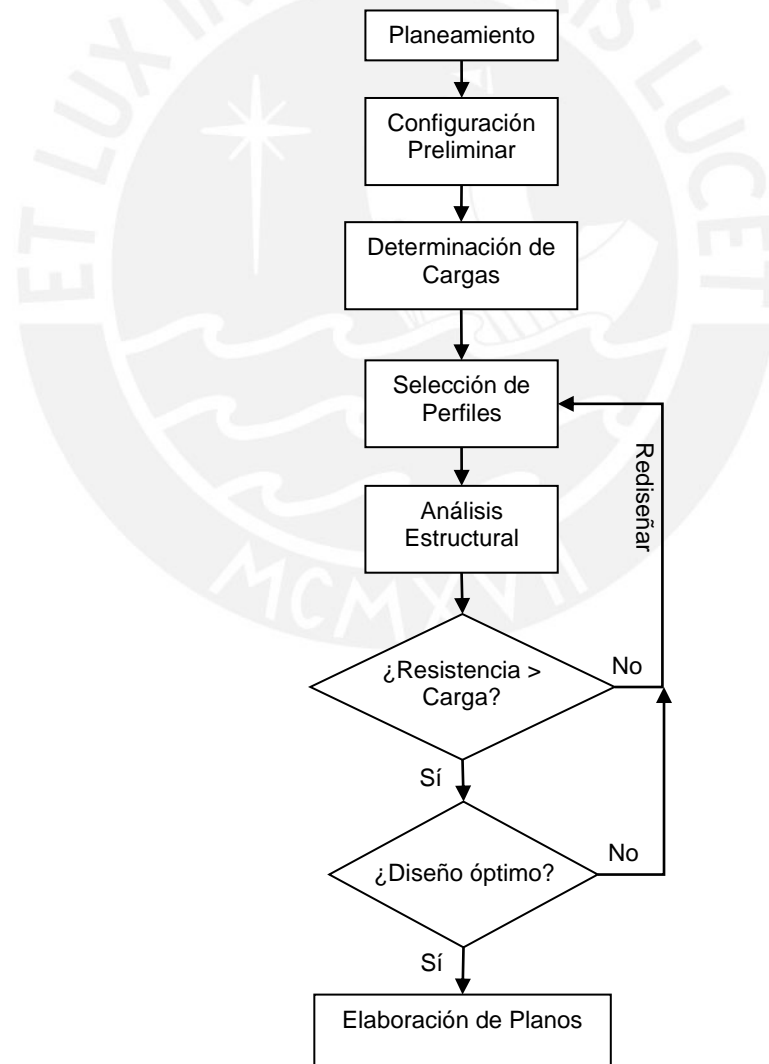


Figura 1-2 Procedimiento de diseño de estructuras metálicas (Zapata Baglieto, 1997)

En este caso se observa que el desarrollo de alternativas solo se realiza a nivel de la selección de perfiles, sin embargo nada impide que pueda ir más allá: desde diferentes opciones de geometría de los elementos estructurales hasta el cambio del material estructural. La creación de alternativas es el paso más descuidado del diseño estructural, y es donde la creatividad e intuición del diseñador juegan un papel primordial.

Los requerimientos para evaluar si una estructura es o no es satisfactoria se encuentran en las normas vigentes, sin embargo estos requerimientos son solo mínimos y no son los únicos que se deban tomar en cuenta. Criterios como constructabilidad (facilidad de construcción), eficiencia estructural, economía y estética mejoran en gran medida la calidad del diseño. Además el diseño estructural es solo una de las múltiples especialidades involucradas en un proyecto. Dependiendo de la naturaleza de este, el ingeniero debe compatibilizar su diseño con el diseño arquitectónico, sanitario, eléctrico, etc. Es necesario por lo tanto una cantidad suficiente de iteraciones para alcanzar una solución compatible con todas las especialidades.

La figura 1-3 muestra un procedimiento de diseño propuesto por el autor. Este esquema incluye los procesos descritos en las figuras 1-1 y 1-2. Todo diseño estructural empieza con la arquitectura, es esta la que plantea las necesidades a ser resueltas por el diseño estructural. El proceso iterativo se indica con las flechas “rediseñar”. Se incluye el paso “Revisión e interpretación de resultados”, ya que es un paso clave para la detección de errores en el diseño. A pesar que tanto la mente humana como el software trabajan en conjunto en todo el procedimiento, hay una predominancia casi absoluta del software en los tres procesos centrales (ver figura 1-3), y es en estos procesos donde se enfoca el trabajo de esta tesis.

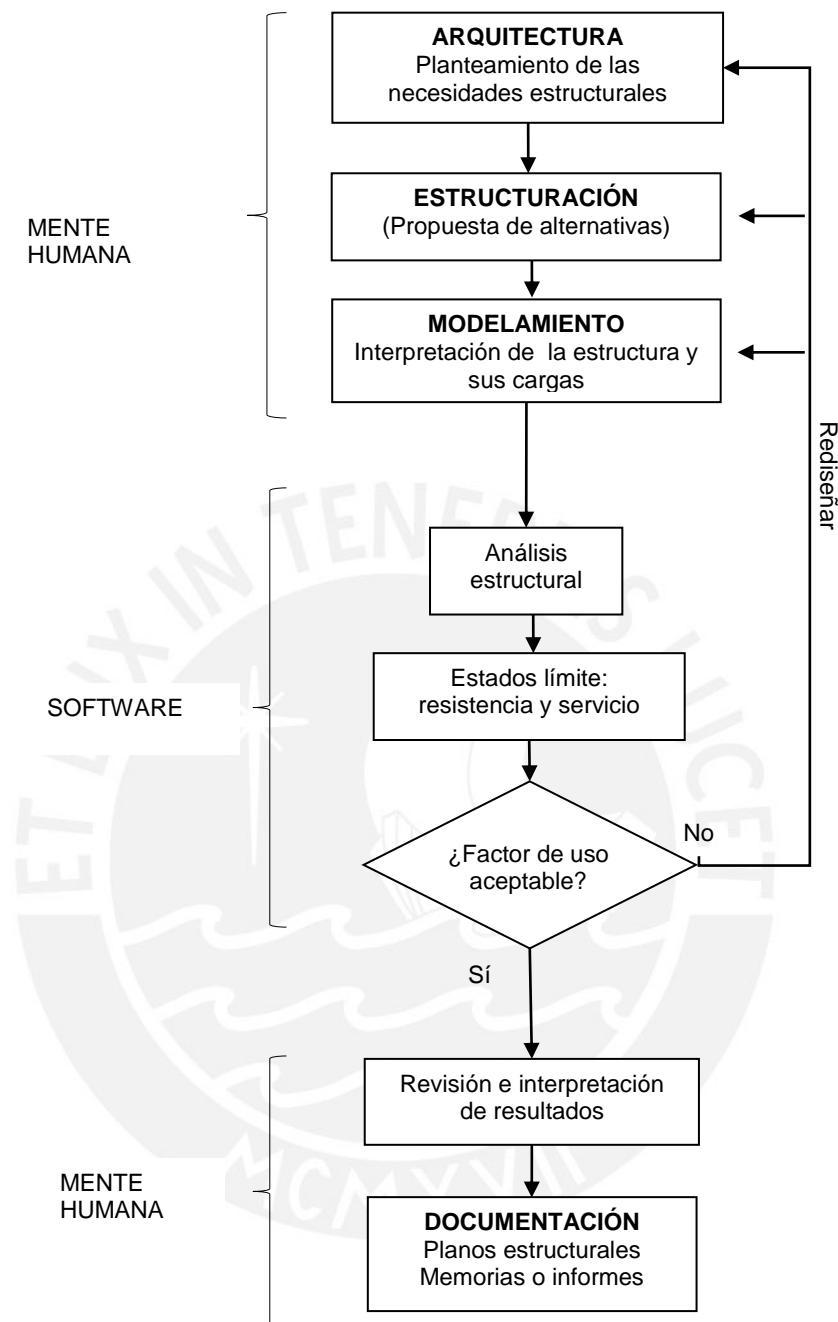


Figura 1-3 Procedimiento de diseño de estructuras en general

## 1.2 Justificación e importancia

Cada una de las iteraciones implica una gran cantidad de cálculos necesarios. Y es aquí donde los programas de cómputo ofrecen una gran ayuda debido a que estos resuelven los cálculos con mucha rapidez y reducen la probabilidad de error. El uso del software evita que el ingeniero estructural realice el trabajo de una calculadora y en su lugar

dedique más tiempo a la parte más intuitiva del diseño, como son la propuesta de alternativas o la evaluación con criterios de constructabilidad, eficiencia estructural o estética.

Otra ventaja del uso de programas de cálculo es que permite realizar cálculos detallados con relativamente poco esfuerzo. Estos cálculos detallados conllevan a un diseño más económico, en contraposición con los cálculos gruesos, donde las simplificaciones siempre inclinan el diseño hacia el lado conservador y conllevan a un sobredimensionamiento del diseño.

El uso del software de cálculo automatiza los procesos repetitivos por lo que reduce la cantidad de cálculos manuales que el diseñador debe realizar. Debido a que estos cálculos manuales son susceptibles al error humano, el uso del software reduce también este error produciendo diseños más confiables.

Un diseño con un uso ausente o limitado de programas de cálculo no tendrá las suficientes alternativas e iteraciones debido a la dificultad del cálculo en la evaluación de cada una de ellas, resultando en un diseño de menor calidad. En consecuencia el uso de programas de cálculo en el procedimiento de diseño estructural mejora en la calidad de este.

Aun cuando el uso adecuado de programas de cálculo influye en la calidad del diseño, este es solo una herramienta que es aplicada en uno de los pasos del procedimiento de diseño. Los programas de cálculo se encargan de la parte mecánica del diseño pero, como se describió anteriormente, el procedimiento de diseño incluye otros pasos donde el uso de la creatividad, intuición y experiencia son fundamentales.

Existe sin embargo una desventaja del uso generalizado de estos programas de cálculo, y esta radica en la falsa ilusión de exactitud que dan los resultados de estos programas. Tanto las propiedades de los materiales como los modelos matemáticos usados para predecir su comportamiento son idealizaciones de un objeto físico real, sujetos a incertidumbres que son cubiertas por los factores de seguridad. Sigue siendo la experiencia, los conocimientos, el sentido común, la aptitud y actitud del diseñador estructural y no los programas que este usa los principales responsables de un buen diseño estructural.

El uso del software en el procedimiento de diseño estructural no está limitado al cálculo estructural. Es muy popular el uso del dibujo asistido por computadora (CAD) y procesadores de texto para la documentación de planos e informes, así como los software BIM (Building Information Modeling) que facilita el intercambio de información entre especialidades y el hallazgo de interferencias. El desarrollo de estos tipos de software no está incluido en los alcances de la presente tesis.

### 1.3 Objetivo

El objetivo general del presente trabajo es mejorar la calidad del diseño de estructuras a través del uso de aplicaciones personalizadas para el cálculo estructural que consisten en hojas de cálculo de Excel usando funciones avanzadas y macros en VBA (Visual Basic for Applications).

El objetivo específico es la elaboración de hojas de cálculo para los siguientes elementos:

- Vigas Continuas
- Muros de Corte (Placas) doble T
- Muros de Contención
- Losas Macizas

### 1.4 Estructura de la tesis

Cada capítulo se dedica a una hoja de cálculo en particular y seguirá una misma estructura. Primero se describe la aplicación anotando sus alcances, los datos de entrada y salida, y la forma de como el usuario interactúa con esta. Luego se desarrolla un resumen de los temas teóricos que sustentan el cálculo de la aplicación. Después se describe los principales algoritmos y la lógica de los procedimientos que se desarrollan en cada hoja de cálculo. Por último se muestran verificaciones para ratificar la validez de la hoja de cálculo y verificar que esté libre de errores. Las verificaciones se realizan comparando los resultados de las hojas de cálculo con aquellos provenientes de programas comerciales o cálculos manuales.

## CAPÍTULO 2: VIGAS CONTINUAS

### 2.1 Descripción

La hoja de cálculo de vigas continuas permite obtener los diagramas de momentos, fuerzas cortantes, reacciones en los apoyos y deformada o curva elástica de vigas continuas bajo cargas de gravedad vivas y muertas. Es posible agregar automáticamente la alternancia de carga viva y presentar una envolvente de diagrama de momentos. Los resultados pueden ser presentados a nivel de servicio o a nivel de resistencia (cargas amplificadas). Admite la posibilidad de colocar columnas en los apoyos en la parte inferior y/o superior de la viga. El análisis no solo toma en cuenta la rigidez al giro de estas columnas sino también los brazos rígidos que se forman en los tramos de viga adyacentes. El programa también permite obtener el resultado de cualquier punto de la gráfica ingresando la coordenada X, que es la distancia horizontal desde el extremo izquierdo de la viga.

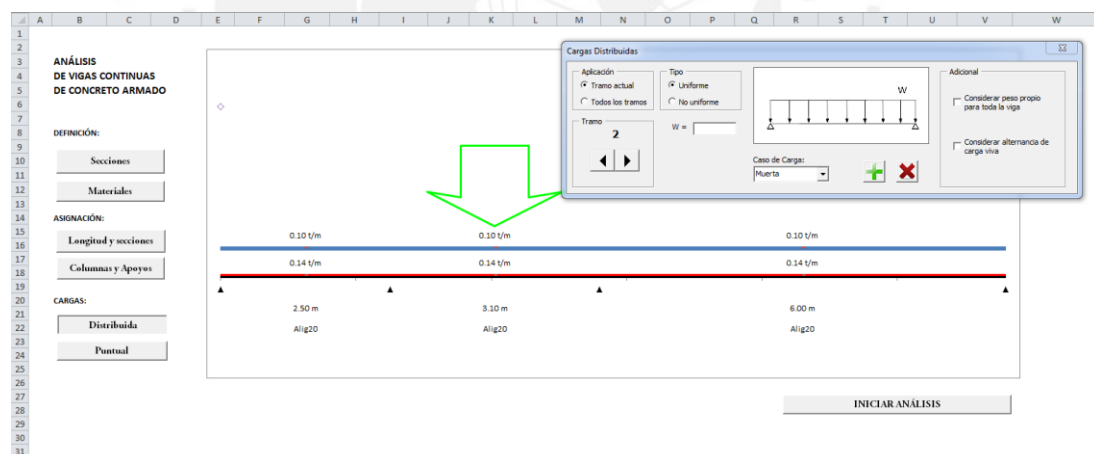


Figura 2-1 Interface de ingreso de datos de hoja de cálculo de Vigas Continuas

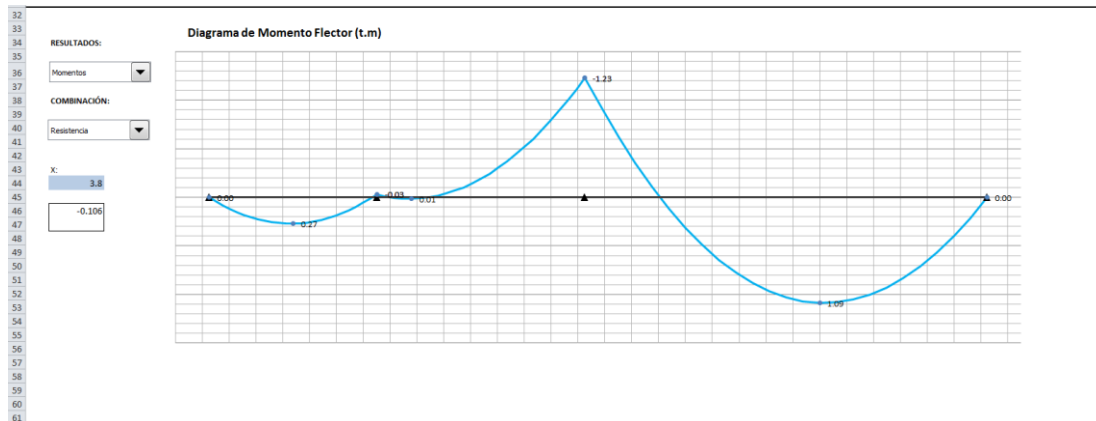


Figura 2-2 Interface de resultados de hoja de cálculo de Vigas Continuas

Los datos de entrada para definir la geometría y propiedades de la viga, así como las cargas aplicadas, se realiza mediante formularios (figuras 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 2-7, 2-8) que se activan con los botones de comando de lado izquierdo de la interface. Una vez que todo está definido, el botón “Iniciar Análisis” realiza el proceso de cálculo y muestra los resultados en la parte inferior. El ingreso y salida de datos se dan en toneladas y metros.

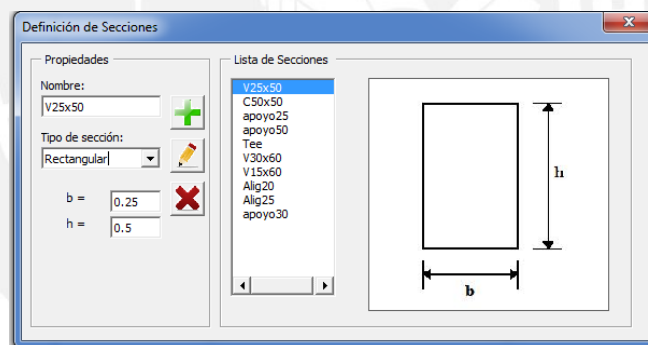


Figura 2-3 Formulario de definición de secciones transversales

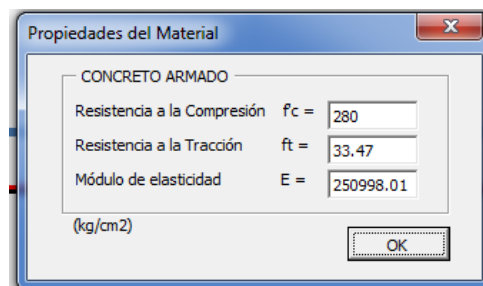


Figura 2-4 Formulario de definición de propiedades del material

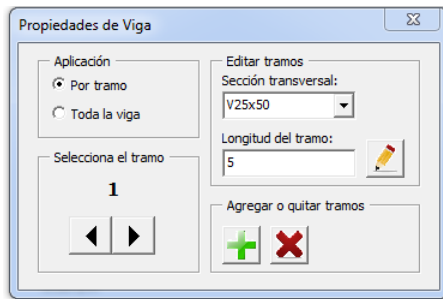


Figura 2-5 Formulario de propiedades de viga

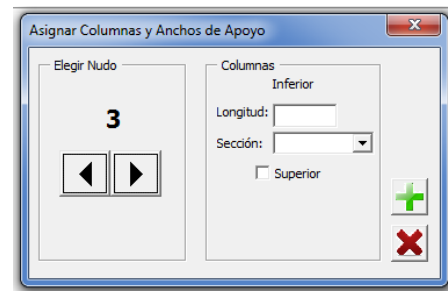


Figura 2-6 Formulario de asignación de columnas y apoyos.

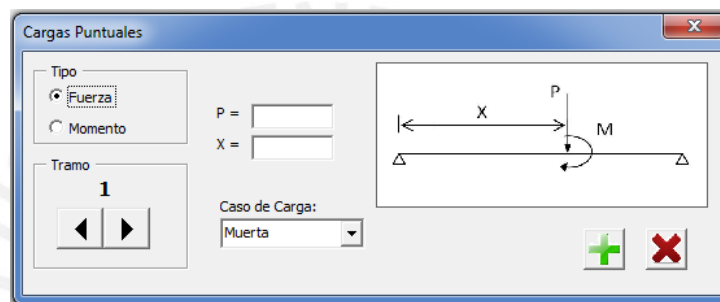


Figura 2-7 Formulario de asignación de cargas concentradas.

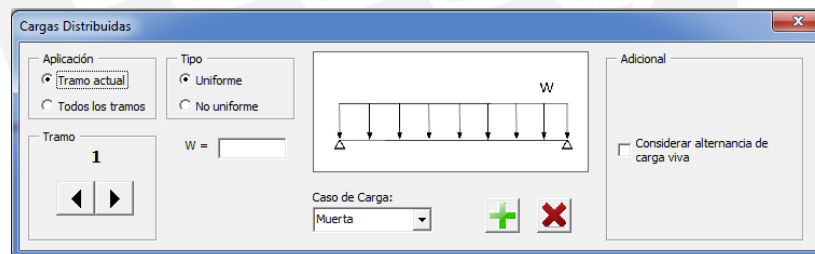


Figura 2-8 Formulario de asignación de cargas distribuidas

## 2.2 Alcances

El programa puede analizar vigas continuas de hasta 9 tramos. Se pueden definir secciones rectangulares o en forma de T. Es posible tener cada tramo de diferente sección. Las secciones se pueden asignar tanto a los tramos de viga como a las columnas que el usuario pueda colocar en los apoyos.

La naturaleza de las cargas solo puede ser muertas y vivas, las cargas pueden ser fuerzas o momentos concentrados y cargas distribuidas. Las cargas distribuidas pueden

ser uniformes o no uniformes. Las cargas no uniformes son lineales y pueden ser aplicadas en una parte de la longitud de la viga. Es posible agregar automáticamente casos de carga viva que aplique esta carga en determinados tramos para obtener momentos máximos en los apoyos y en el centro del tramo (alternancia de carga viva).

Los resultados solo admiten dos tipos de combinaciones de cargas, las cargas de servicios (Muerta+Viva) y la carga amplificada ( $1.4 \times \text{Muerta} + 1.7 \times \text{Viva}$ ). En el caso que haya alternancia de cargas, es posible mostrar la envolvente pero solo de las cargas amplificadas. Los valores máximos y mínimos de los diagramas en cada tramo se muestran como etiquetas. En el caso que haya columnas en los apoyos se agregará automáticamente brazos rígidos en los tramos de viga adyacente; y los valores de momento y cortante en los apoyos se mostrarán a la cara de la columna.

### 2.3 Sustento teórico

El programa resuelve las vigas continuas usando el *Método de Rigidez Sistematizado*. La figura 2-9 muestra un esquema de los pasos seguidos por el método.

Las hipótesis básicas de este método son las siguientes:

- *Desplazamientos pequeños.*- Los desplazamientos de la estructura provocados por las cargas a las cuales está sometida son insignificantes en comparación con las dimensiones de la estructura. De esta manera todas las ecuaciones de equilibrio se realizan en base a la geometría de la estructura sin deformar, sin provocar un error considerable.
- *Equilibrio estático.*- se asume que la aplicación de cargas se produce lentamente, de tal manera que la estructura queda en reposo después de llegar al valor final de la carga. Por lo tanto se considera que no se producirá vibraciones ni fuerzas de inercia significativas.
- *Comportamiento lineal elástico del material.*- Se asume que la gráfica esfuerzo-deformación del material es una línea recta, y que además se encuentre en el rango elástico, es decir que el material regresa a su forma original una vez se haya liberado de la carga, sin que quede alguna deformación permanente. Esta suposición es fundamental para el principio de superposición.

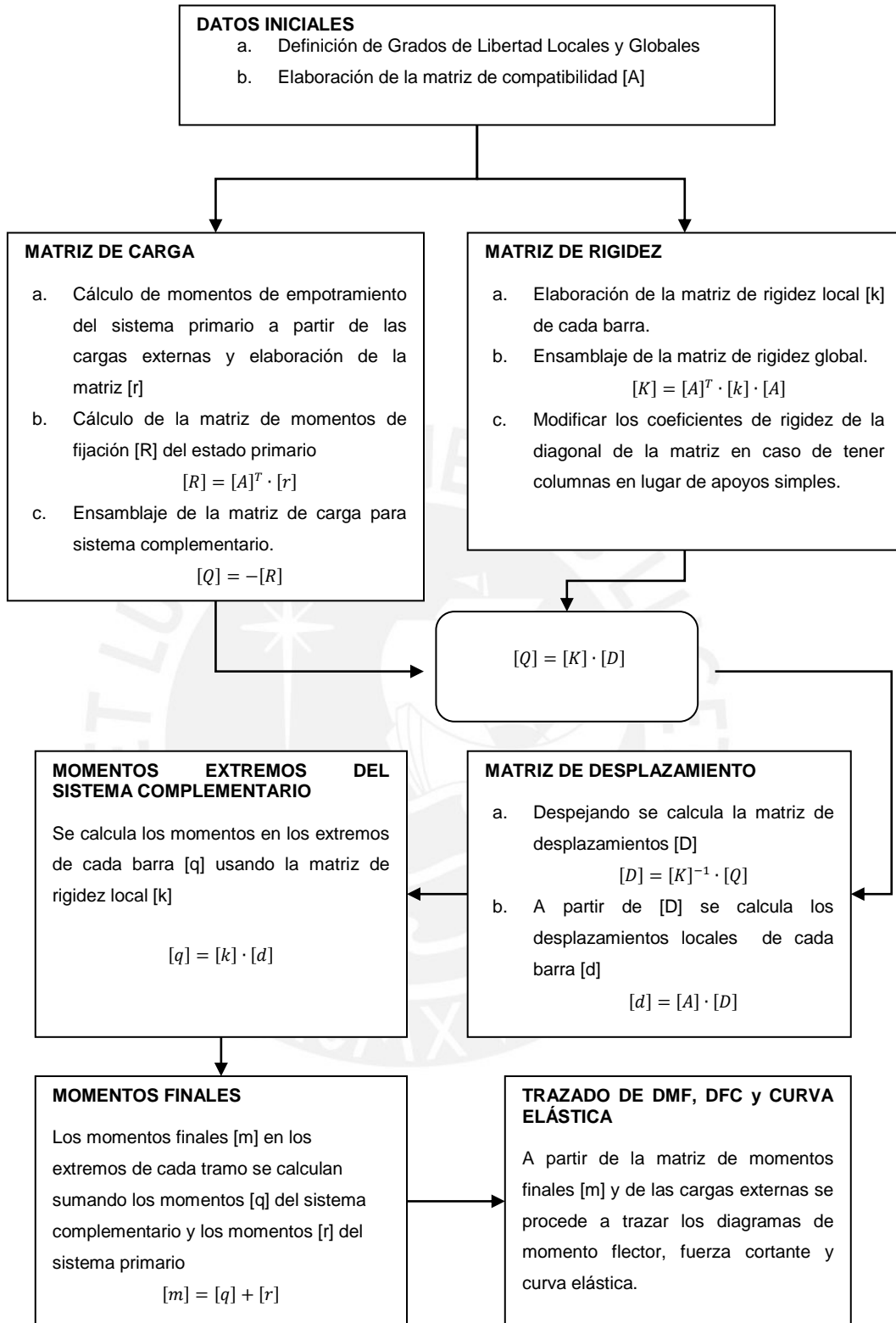


Figura 2-9 Procedimiento general del método de rigidez sistematizado

## 2.4 Principales algoritmos

En esta sección se procederá a explicar la pasos principales de la figura 2-9 y como se obtuvo las ecuaciones que fueron introducidas en el programa.

### 2.4.1 Formación de la matriz de compatibilidad [A]

Se definen dos sistemas de coordenadas o grados de libertad cinemática. En el caso de las vigas continuas se tiene los Grados de Libertad Globales y los Grados de Libertad Locales definidos según la figura 2-10. Se define la matriz [A] llamada matriz de compatibilidad o transformación de desplazamientos, que permite relacionar los desplazamientos de ambos sistemas de coordenadas, de manera que se cumple que:

$$[d] = [A] \cdot [D] \dots ec.2.1$$

Siendo [d] los desplazamientos en los grados de libertad locales y [D] los desplazamientos de los grados de libertad globales. La existencia de la matriz [A] asegura la compatibilidad de la estructura. La matriz [A] se usará repetidas veces a lo largo de todo el procedimiento del método de rigidez.

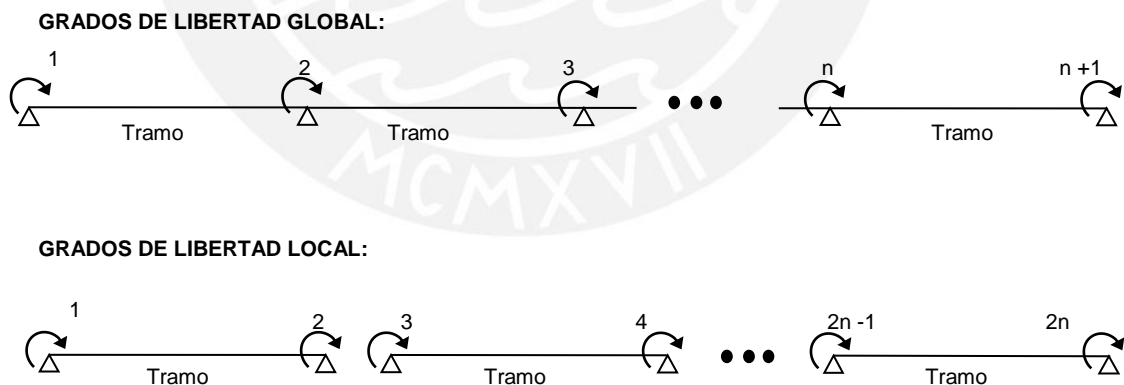


Figura 2-10 Definición de grados de libertad global y local

La matriz de compatibilidad en el caso una viga continua de n tramos se muestra en la tabla 2-1, Se observa que la matriz sigue un patrón fácil de sistematizar y programar en función de la variable n (número de tramos).

Tabla 2-1 Matriz de compatibilidad de viga continua de n tramos

		GRADOS DE LIBERTAD GLOBALES						
		D1	D2	D3	D4	D5	D n	D n+1
GRADOS DE LIBERTAD LOCALES	d1	1	0	0	0	0	0	0
	d2	0	1	0	0	0	0	0
	d3	0	1	0	0	0	0	0
	d4	0	0	1	0	0	0	0
	d5	0	0	1	0	0	0	0
	d6	0	0	0	1	0	0	0
	d7	0	0	0	1	0	0	0
	d8	0	0	0	0	1	0	0
	d9	0	0	0	0	1	0	0
	d10	0	0	0	0	0	1	0
	d 2n-1	0	0	0	0	0	1	0
	d 2n	0	0	0	0	0	0	1

### 2.4.2 Formación de la matriz de carga [Q]

La matriz de carga define las fuerzas y momentos en la ecuación general del método de rigidez ( $[Q] = [K][D]$ ), con la condición de que estas fuerzas o momentos deben estar aplicados exactamente en los grados de libertad. Como se ha observado, en el caso de vigas continuas los grados de libertad son giros en los apoyos o extremos de barras y las cargas son por lo tanto momentos aplicados en estos apoyos. Sin embargo la mayor parte de los casos las cargas se aplican a lo largo de la viga y no en los apoyos. Es por esto que es necesario hacer un procedimiento especial para trasladar las cargas desde su ubicación actual hasta los apoyos donde están ubicados los grados de libertad y obtener así la matriz de carga.

Se establece que una viga continua sometida a cargas externas a lo largo de esta es una suma de dos estados llamados estado primario y estado complementario. El estado primario se caracteriza por tener momentos externos en cada apoyo que impiden la rotación de cada nudo, estos momentos externos se denominan momentos de fijación [R]. De esta manera cada tramo de viga funciona como una viga bi-empotrada. Se calcula los momentos de fijación a partir de los momentos de empotramiento producido por las cargas aplicadas a lo largo de cada tramo, cuyo procedimiento de cálculo se desarrolla más adelante.

Se observa que los momentos de empotramiento estas organizados según los grados de libertad local, y que los momentos de fijación según los grados de libertad global. Si los momentos de empotramiento y de fijación se organizan en las matrices  $[r]$  y  $[R]$  entonces estarán relacionados con ayuda de la traspuesta de la matriz de compatibilidad  $[A]$  mediante la ecuación 2.2, de acuerdo con el principio de contragradencia. Este procedimiento es equivalente a hallar cada uno de los valores de  $R$  a partir del equilibrio de cada nudo.

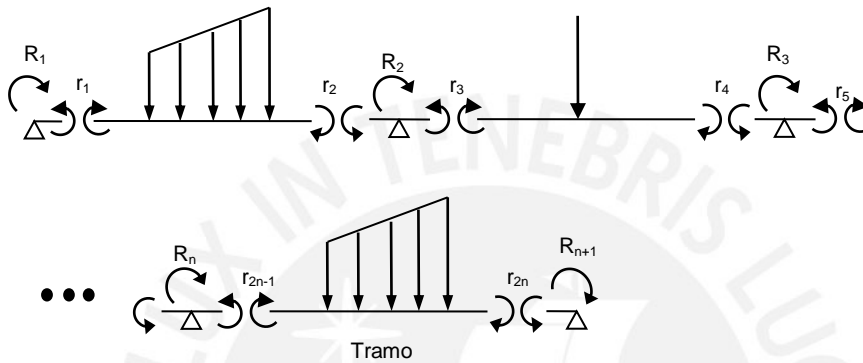


Figura 2-11 Cargas de fijación del estado primario

$$[r] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{2n-1} \\ r_{2n} \end{bmatrix}$$

Momentos de fijación  
(coordenadas locales)

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \\ R_{n+1} \end{bmatrix}$$

Momentos de fijación  
(coordenadas globales)

$$[R] = [A]^T \cdot [r] \dots \text{ec. 2.2}$$

Por otro lado, el estado complementario se caracteriza por tener a la viga continua sometida solo por los momentos de fijación en cada nudo en el sentido inverso, las cargas originales a lo largo de la viga no se incluyen en este estado. La matriz de carga  $[Q]$  es finalmente la matriz  $[R]$  multiplicada por  $-1$ . Por lo tanto al aplicar el método de rigidez en realidad se resuelve solo el estado complementario. A final del proceso se suman ambos estados para obtener los resultados totales de la estructura a analizar.

$$[Q] = -[R] \dots ec.2.3$$

### 2.4.3 Cálculo de los momentos de empotramiento

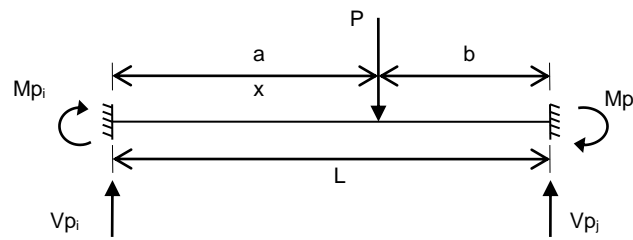
En esta sección se explicará el procedimiento para obtener las ecuaciones que rigen los valores de los momentos de empotramiento en los extremos de cada tramo de viga según los distintos tipos de cargas. Estos momentos son necesarios para formar la matriz de momentos de fijación [R], y a su vez para calcular la matriz de carga [Q].

En la aplicación existen tres tipos de cargas. Una fuerza concentrada, un momento concentrado (ambos aplicados a una distancia del extremo izquierdo de cada tramo de viga) y por último una carga distribuida lineal vertical aplicada en un intervalo cualquiera sobre la viga. Estas tres situaciones engloban todos los tipos de cargas que puede haber según los alcances del programa.

Se toma en consideración la posibilidad de brazos rígidos en uno o ambos extremos de cada tramo. Para esto primero se halla las ecuaciones de los momentos de empotramiento y cortantes en los extremos de la parte central no rígida de la viga para cada tipo de carga, y luego se halla las ecuaciones adicionales de momentos de empotramiento que incluyen los brazos rígidos, que son iguales para los tres tipos de carga. Por último se muestran las ecuaciones para el caso de que las cargas se ubiquen dentro de la zona de brazos rígidos.

#### ***Fuerza concentrada***

Los momentos de empotramiento ocasionados por la aplicación de una fuerza concentrada se calculan usando las ecuaciones típicas de momentos de empotramiento en barras de sección constante. Dichas ecuaciones pueden ser demostradas usando el método de flexibilidad. Los momentos de empotramiento están relacionados con los grados de libertad locales, por lo tanto la convención de signos debe ser la misma, en este caso los giros y momentos horarios son siempre positivos. Las cortantes en cada extremo se calculan con simple equilibrio.



**Figura 2-12 Momentos de empotramiento para fuerza concentrada**

$$Mp_i = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \dots ec. 2.3$$

$$Mp_j = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad \dots ec. 2.4$$

$$Vp_j = \frac{(Pa + Mp_i + mp_j)}{L} \quad \dots ec. 2.5$$

$$Vp_i = P - Vp_j \quad \dots ec. 2.6$$

Las ecuaciones 2.3 a 2.6 se pueden reescribir en función de "x" y de "L" y obtenemos:

$$Mp_i(x, L) = -\frac{P x (L-x)^2}{L^2} \quad \dots ec. 2.7$$

$$Mp_j(x, L) = \frac{P x^2 (L-x)}{L^2} \quad \dots ec. 2.8$$

$$Vp_j(x, L) = \frac{(Px + Mp_i(x, L) + Mp_j(x, L))}{L} \quad \dots ec. 2.9$$

$$Vp_i(x, L) = P - Vp_j(x, L) \quad \dots ec. 2.10$$

Las ecuaciones 2.7 a 2.10 son más útiles para ser usadas en nuestro programa. Además, estas ecuaciones también serán usadas para calcular los momentos de empotramiento debido a una carga distribuida lineal como se explicará más adelante.

### **Momento Concentrado**

Se desarrolla ahora el procedimiento para obtener las ecuaciones del momento de empotramiento de un momento concentrado aplicado a una distancia de los extremos de la viga. La figura 2-13 muestra que el problema a resolver es una superposición de tres estados. En el primer estado se libera el momento de empotramiento y el cortante del extremo derecho de la viga y se calculan los valores de giro  $\theta$  y desplazamiento  $d$  en ese extremo. En los dos estados restantes se usan las rigideces de barras para regresar el desplazamiento y giro del extremo derecho a su estado original.

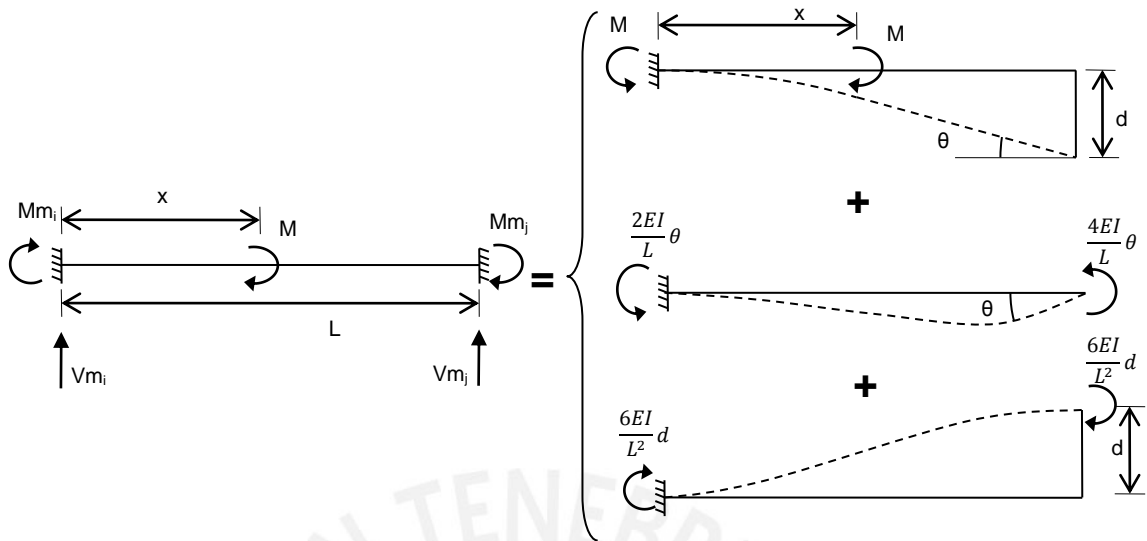


Figura 2-13 Momentos de empotramiento para momento concentrado

Usando métodos de energía podemos calcular los valores de  $\theta$  y  $d$ :

$$\theta = \frac{Mx}{EI} \quad \dots ec.2.11$$

$$d = \frac{Mx^2}{2EI} + (L - x) \frac{Mx}{EI} \quad \dots ec.2.12$$

Sumando los momentos en los extremos de los tres estados se obtiene los valores de  $m_i$  y  $m_j$  en función de  $\theta$  y  $d$  (ec. 2.11 y 2.12), luego reemplazando estos valores en las ecuaciones 2.13 y 2.14 se obtienen las expresiones finales para los momentos de empotramiento y cortantes en los extremos en función de  $x$  y  $L$ . (ec. 2.15 al 2.17)

$$Mm_i = -M - \frac{2EI}{L} \theta + \frac{6EI}{L^2} d \quad \dots ec. 2.13$$

$$Mm_j = -\frac{4EI}{L} \theta + \frac{6EI}{L^2} d \quad \dots ec.2.14$$

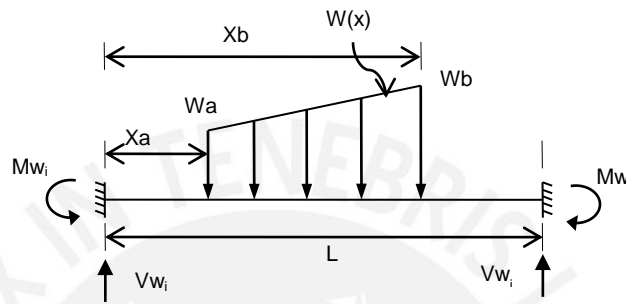
$$Mm_i(x, L) = M \left( -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} - 1 \right) \quad \dots ec.2.15$$

$$Mm_j(x, L) = M \left( -\frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x}{L} \right) \quad \dots ec.2.16$$

$$Vm_j(x, L) = -Vm_i(x, L) = (M + Mm_i(x, L) + Mm_j(x, L))/L \quad \dots ec.2.17$$

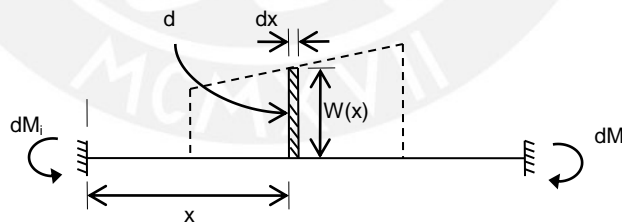
**Carga distribuida lineal**

En el tercer caso se debe hallar una expresión general que genere los momentos de empotramiento para una carga distribuida lineal que se aplica en un intervalo dentro de un tramo de viga. La figura 2-14 muestra el esquema del problema a resolver. Los datos de entrada son cuatro valores: la ubicación y magnitud de la carga distribuida al inicio y la ubicación y magnitud de la carga distribuida al final de esta ( $X_a, W_a, X_b, W_b$ ).



**Figura 2-14 Momentos de empotramiento para cara distribuida general**

Si se desea hallar el momento debido a una pequeña franja de la carga distribuida ubicada a una distancia X del extremo izquierdo "i", se podrá usar las ecuaciones 2.7 y 2.8 en donde la carga concentrada P es el área de la franja cuyo ancho es dx y altura W(x) y los momentos hallados son  $dM_i$  y  $dM_j$ .



**Figura 2-15 Momentos de empotramiento para un diferencial de carga distribuida**

$$P = dF = W(x)dx \quad \dots ec.2.18$$

$$dM_j = \frac{dF x^2 (L-x)}{L^2} \quad \dots ec.2.20$$

$$dM_i = \frac{dF x (L-x)^2}{L^2} \quad \dots ec.2.19$$

Los momentos de empotramiento totales en cada extremo se calculan integrando las ecuaciones 2.19 y 2.20 en el intervalo donde se aplica la carga distribuida, de  $X_a$  a  $X_b$ .

$$Mw_i = \int_{X_a}^{X_b} \frac{W(x)x(L-x)^2}{L^2} dx \quad \dots ec.2.22$$

$$Mw_j = \int_{X_a}^{X_b} \frac{W(x)x^2(L-x)}{L^2} dx \quad \dots ec.2.23$$

$W(x)$  es la función lineal que describe la carga distribuida en el intervalo  $[X_a, X_b]$  y su ecuación es la ecuación general de una línea recta, que tiene dos puntos conocidos que son  $(X_a, W_a)$  y  $(X_b, W_b)$ .

$$W(x) = \frac{W_b - W_a}{X_b - X_a} x - \frac{W_b - W_a}{X_b - X_a} X_a + W_a \quad \dots ec.2.24$$

Para facilitar el uso de esta función se definen las constantes  $m$  y  $b$ .

$$m = \frac{W_b - W_a}{X_b - X_a} \quad \dots ec.2.25$$

$$b = W_a - \frac{W_b - W_a}{X_b - X_a} X_a \quad \dots ec.2.26$$

Y la función quedaría:

$$W(x) = mx + b \quad \dots ec.2.27$$

Luego reemplazando la ecuación 2.27 en 2.22 y 2.23 y resolviendo la integral se obtienen las expresiones para calcular los momentos de empotramiento en cada extremo.

$$Mw_i = \frac{1}{L^2} \left[ \frac{m}{5} (Xb^5 - Xa^5) + \frac{b-2Lm}{4} (Xb^4 - Xa^4) + \frac{mL^2-2Lb}{3} (Xb^3 - Xa^3) + \frac{bL^2}{2} (Xb^2 - Xa^2) \right] \quad \dots ec.2.28$$

$$Mw_j = \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{m}{5} (Xb^5 - Xa^5) + \frac{(mL-b)}{4} (Xb^4 - Xa^4) + \frac{bL}{3} (Xb^3 - Xa^3) \right] \quad \dots ec.2.29$$

Luego mediante equilibrio se obtiene las fuerzas cortantes

$$Vw_i = \frac{m}{2} (X_b^2 - X_a^2) + b(Xb - Xa) - V_j$$

$$Vw_j = \frac{m}{3L} (X_b^3 - X_a^3) + \frac{b}{2L} (X_b^2 - X_a^2)$$

Para aplicar estas ecuaciones se debe calcular previamente los valores de  $m$  y  $b$  en función de  $W_a$ ,  $W_b$ ,  $X_a$  y  $X_b$ . Se observa que las expresiones son largas y trabajosas, sin embargo una computadora la puede realizar rápidamente. Estas ecuaciones funcionan para cualquier tipo de carga distribuida lineal.

#### 2.4.4 Efecto de los brazos rígidos en los momentos de empotramiento

La presencia de brazos rígidos en uno o ambos extremos de la viga modifican las expresiones para el cálculo de los momentos de empotramiento. El diagrama de cuerpo libre de la figura 2-16 muestra el procedimiento a seguir. Se calcula en primer lugar los momentos y cortantes  $m$  y  $v$  con las expresiones halladas anteriormente según el tipo de carga, pero en función de  $u$  y  $L_t$  (ver ec. 2.30 y 2.31) en lugar de  $x$  y  $L$ , donde  $u$  es la distancia de la carga al fin de la parte rígida del lado izquierdo de la viga, y  $L_t$  es la longitud total de la parte flexible de la viga (ver figura 2-16).

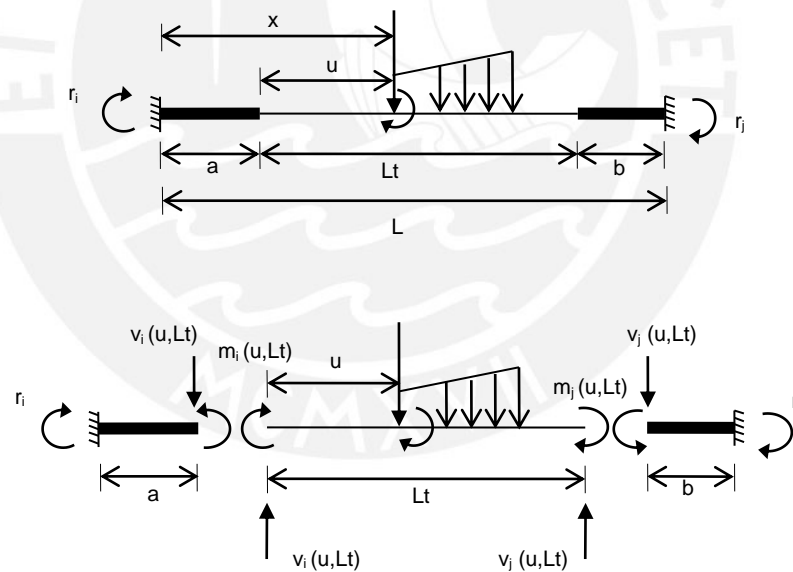


Figura 2-16 Momentos de empotramiento para el caso de brazos rígidos

$$u = x - a \quad \dots ec. 2.30$$

$$L_t = L - a - b \quad \dots ec. 2.31$$

Las ecuaciones para calcular estos momentos de empotramiento  $r_i$  y  $r_j$  tendrán diferente forma dependiendo si las cargas se ubican o no en los brazos rígidos. Se definen los parámetros  $a$  y  $b$  como la longitud de los brazos rígidos (ver figura 2-16). Los momentos de empotramiento finales se calculan con siguientes las ecuaciones dependiendo del tipo de carga.

Para la carga puntual  $P$ :

Si  $x \leq a$

$$\begin{cases} r_i = -Px \\ r_j = 0 \end{cases}$$

Si  $a < x < (L - b)$

$$\begin{cases} r_i = Mp_i(u, Lt) - Vp_i(u, Lt) \cdot a \\ r_j = Mp_j(u, Lt) + Vp_j(u, Lt) \cdot b \end{cases}$$

Si  $x \geq (L - b)$

$$\begin{cases} r_i = 0 \\ r_j = P \cdot (L - x) \end{cases}$$

Para el momento puntual  $M$ :

Si  $x \leq a$

$$\begin{cases} r_i = -M \\ r_j = 0 \end{cases}$$

Si  $a < x < (L - b)$

$$\begin{cases} r_i = Mm_i(u, Lt) - Vm(u, Lt) \cdot a \\ r_j = Mm_j(u, Lt) + Vm(u, Lt) \cdot b \end{cases}$$

Si  $x \geq (L - b)$

$$\begin{cases} r_i = 0 \\ r_j = -M \end{cases}$$

Para el caso de carga distribuida:

Si toda la carga distribuida está en la parte flexible de la viga.

Si  $a < Xa < (L - b)$  y  $a < Xb < (L - b)$ , siendo siempre  $Xa < Xb$

$$\begin{cases} r_i = Mw_i - Vw_i \cdot a \\ r_j = Mw_j + Vw_j \cdot b \end{cases}$$

Si la carga distribuida se extiende hasta la parte rígida en uno o ambos extremos de la viga, se agregara el término  $Mr_i$  o  $Mr_j$  según sea el caso. Estos valores son los momentos adicionales por la carga distribuida sobre los brazos rígidos.

$$\begin{cases} r_i = Mw_i - Vw_i \cdot a - Mr_i \\ r_j = Mw_j + Vw_j \cdot b + Mr_j \end{cases}$$

$$Mr_i = -\frac{m}{3} Xa^3 - \frac{b + a \cdot m}{2} Xa^2 - a \cdot b \cdot Xa$$

$$Mr_j = \frac{Lt \cdot m + c \cdot m - b}{2} (Xb^2 - Lt^2) + (Lt \cdot b + c \cdot b)(Xb - Lt) - \frac{m}{3} (Xb^3 + Lt^3)$$

## 2.5 Verificaciones

Se define una viga de verificación continua de cuatro tramos en el programa ETABS con las siguientes características.

- Sección constante de 25x50cm
- Longitud de tramos es 5.00; 8.50; 5.00; 5.00 (metros).
- Material es lineal y elástico, con módulo de elasticidad  $E=2173707 \text{ t/m}^2$
- Se desprecia deformaciones por cortante, solo se permiten deformaciones por flexión. Por lo tanto se modifican las propiedades de la sección: al área de cortante en la dirección 2 se le asigna un factor de 1000000.
- En el primer apoyo se restringen los desplazamientos en las tres direcciones. En los demás apoyos se restringen los desplazamientos solo en la dirección vertical (Z), esto se realiza para evitar fuerzas internas axiales en la viga. No hay restricción en los giros en todos los apoyos.
- Se ignora el peso propio de la viga
- Se asigna las siguientes cargas a todos los tramos:

- Carga muerta distribuida (DEAD): 2.40 t/m
- Carga viva distribuida (LIVE): 1.5 t/m
- Se añaden casos de carga viva adicionales para realizar alternancia de carga viva. Luego todos estos casos se unen en una sola combinación para formar una envolvente.
- Se definen los siguientes combinaciones de cargas:
  - LIVET: envolvente de cargas vivas alternadas
  - COMB1AM: 1.4 DEAD+1.7 LIVE (combinación amplificada sin alternancia)
  - COMB1ENV: 1.4 DEAD+1.7 LIVET (combinación amplificada con alternancia)
  - SERV: DEAD+LIVE (combinación en servicio sin alternancia)

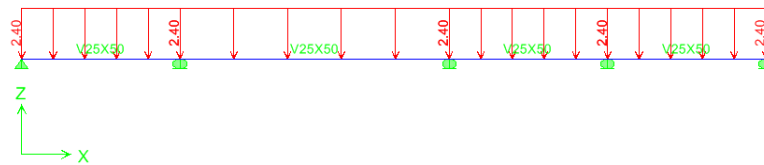


Figura 2-17 Carga muerta aplicada en viga continua

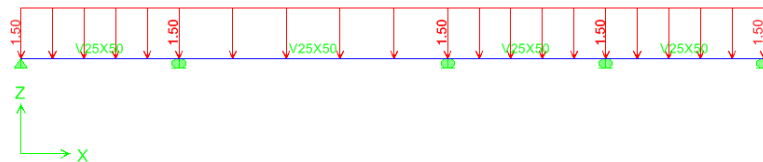


Figura 2-18 Carga viva aplicada en viga continua

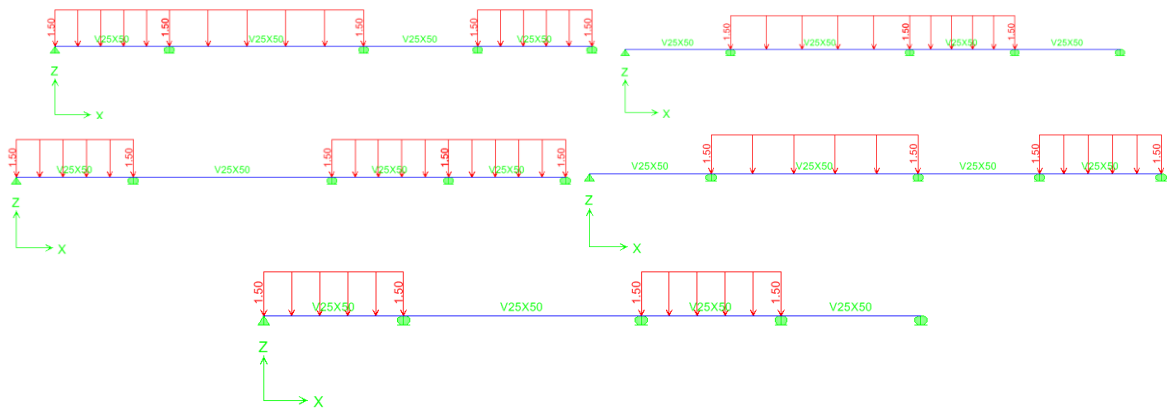


Figura 2-19 Alternancia de carga viva

Se presentan los resultados de momentos para las combinaciones COMB1AM y COMB1ENV, cortantes para el caso de carga DEAD y los desplazamientos de la combinación SERV.

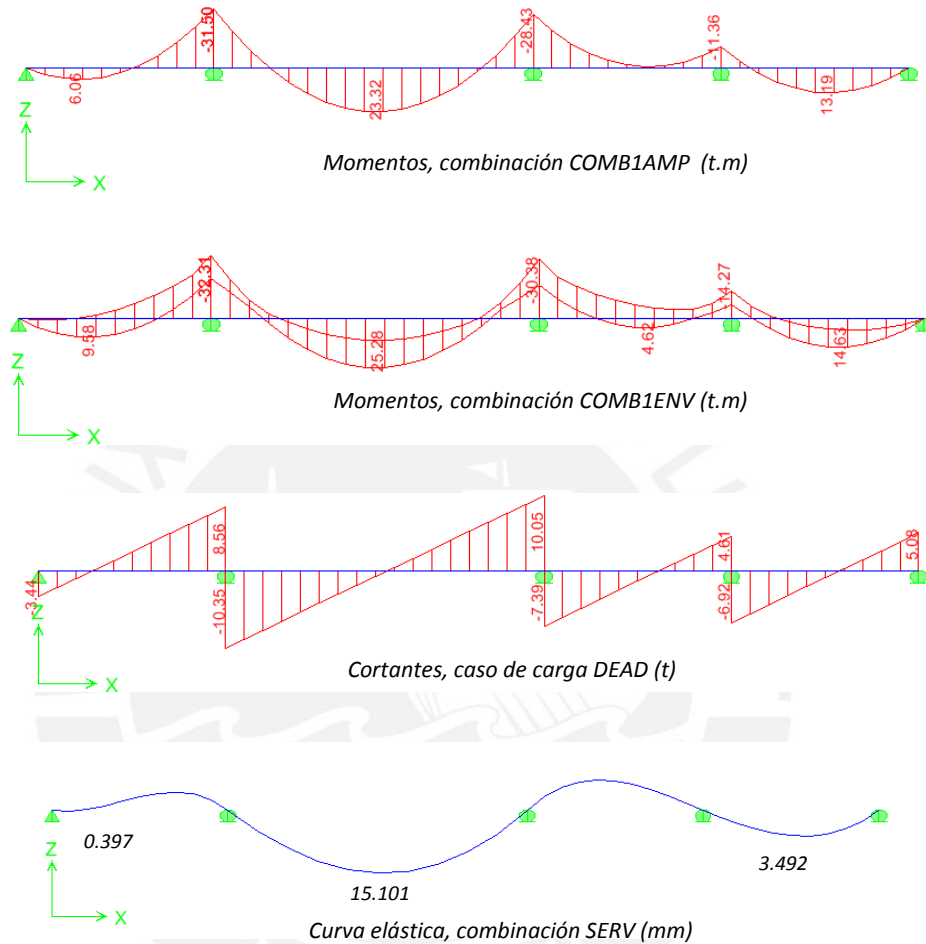
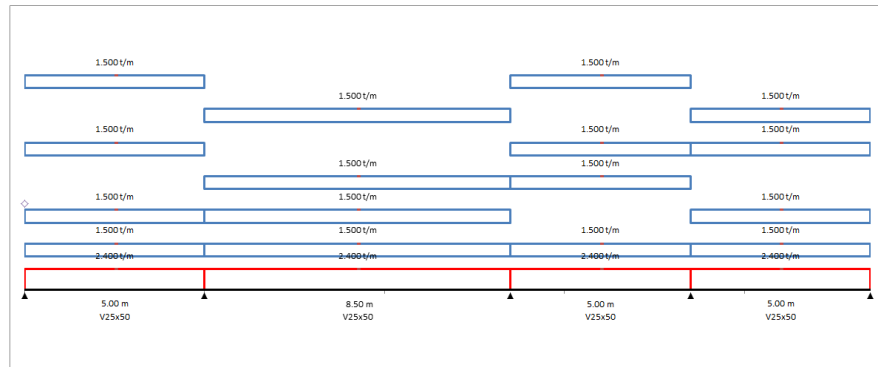


Figura 2-20 Resultados de viga de verificación en programa ETABS

Se representa la misma viga en la hoja de cálculo. Para evaluar y comparar los resultados:

**ANÁLISIS  
DE VIGAS CONTINUAS  
DE CONCRETO ARMADO**

- DEFINICIÓN:
- -
- ASIGNACIÓN:
- -
- CARGAS:
- -
- 

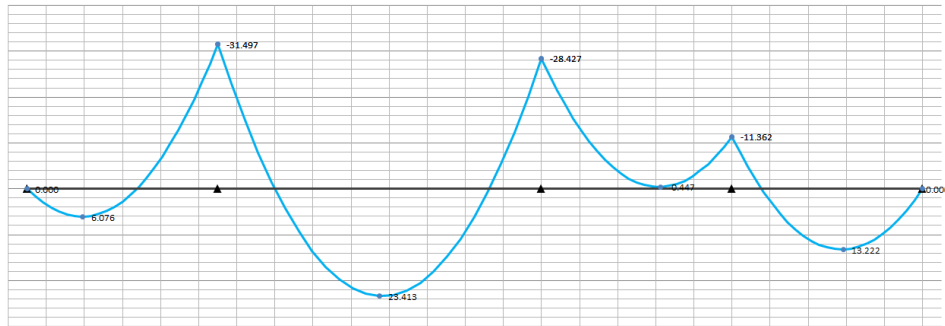


INICIAR ANÁLISIS

RESULTADOS:

- Momentos
- COMBINACIÓN:
- Amplificada
- X:
- 
- 

Diagrama de Momento Flector (t.m)



RESULTADOS:

- Momentos
- COMBINACIÓN:
- Envolvente
- X:
- 
- 

Diagrama de Momento Flector (t.m)

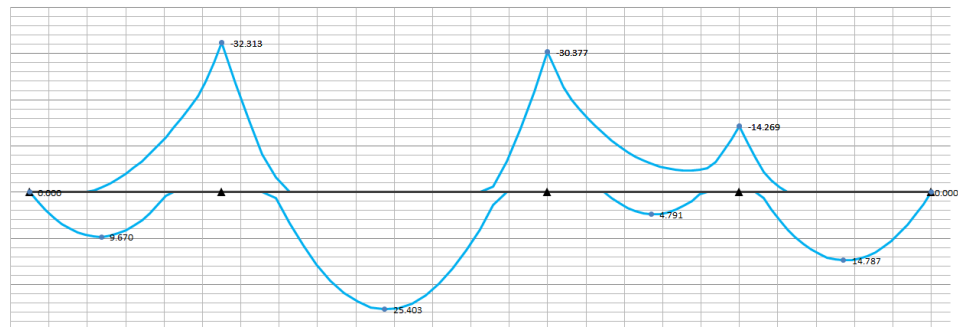


Figura 2-21 Resultados de viga de verificación en hoja de cálculo (1)

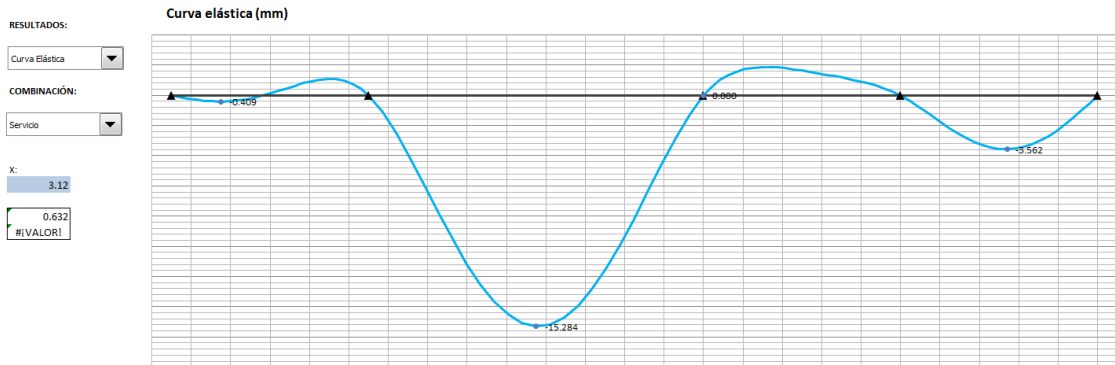
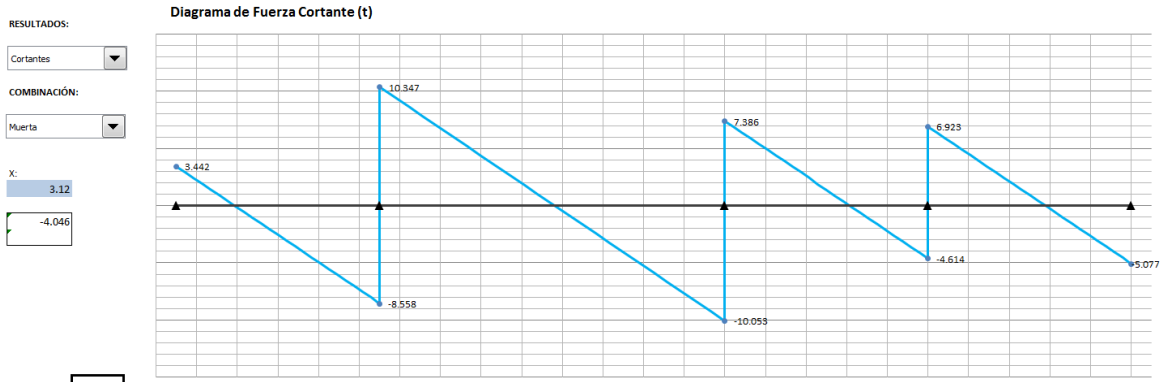


Figura 2-22 Resultados de viga de verificación en hoja de cálculo (2)

Tabla 2-2 Comparación de resultados

	ETABS	Hoja de calculo	% de variación
<b>Momentos COMB1AMP</b>	6.06	6.08	0.26%
	-31.50	-31.50	-0.01%
	23.32	23.41	0.40%
	-28.43	-28.43	-0.01%
	-11.36	-11.63	2.39%
	13.19	13.22	0.24%
<b>Momentos COMB1ENV</b>	9.58	9.67	0.94%
	-32.31	-32.31	0.01%
	25.28	25.40	0.49%
	-30.38	-30.38	-0.01%
	4.62	4.79	3.70%
	-14.27	-14.27	-0.01%
	14.63	14.79	1.07%
<b>Cortantes DEAD</b>	-3.44	-3.44	0.06%
	8.56	8.56	-0.02%
	-10.35	-10.35	-0.03%
	10.05	10.05	0.03%
	-7.39	-7.39	-0.05%
	4.61	4.61	0.09%
	-6.92	-6.92	0.04%
	5.08	5.08	-0.06%
<b>Curva elastica SERV</b>	0.40	0.41	3.02%
	15.10	15.28	1.21%
	3.49	3.56	2.00%

Para compara los resultados se utiliza un factor definido como el cociente de los resultados menos 1 “(Resultado1/Resultado2) -1” expresado en porcentaje. Se observa que los factores en su gran mayoría son cercanos a 0, lo que indica que son muy similares.

## CAPÍTULO 3: MUROS DE CORTE

### 3.1 Descripción

La hoja de cálculo de Muros de Corte de Concreto Armado permite el diseño de estos elementos a partir de cargas en servicio que deben ser obtenidas de algún programa de análisis estructural. El usuario ingresa los datos de entrada en las celdas sombreadas de azul, estos datos incluyen las dimensiones del muro, la resistencia a compresión del concreto, el esfuerzo de fluencia del acero, entre otras. Adicionalmente el usuario ingresa el refuerzo vertical del muro tanto en el alma como en los núcleos.

El programa toma los datos de entrada y construye el diagrama de interacción, utilizando el centroide de la sección transversal del muro como centro de reducción. Así también el programa combina y amplifica automáticamente las cargas y las ubica en el diagrama para que el usuario observe que las cargas amplificadas se encuentren dentro de los límites del diagrama. El programa indica automáticamente si alguna combinación de carga queda fuera de esta.

La hoja de cálculo se divide en tres sectores. El primero llamado *Datos de Entrada* permite el ingreso de estos datos, presenta un esquema general del muro o placa doble T y un gráfico con las dimensiones reales de la placa. También muestra el diagrama de interacción y la ubicación de las cargas amplificadas. Esta zona muestra también los factores de uso (en porcentaje) para las tres verificaciones del diseño por resistencia de la placa: corte por fricción (en las juntas de construcción), corte por tracción diagonal y por flexo-compresión o flexo-tracción. Estos factores de uso se actualizan automáticamente a medida que el usuario modifica los datos de entrada.

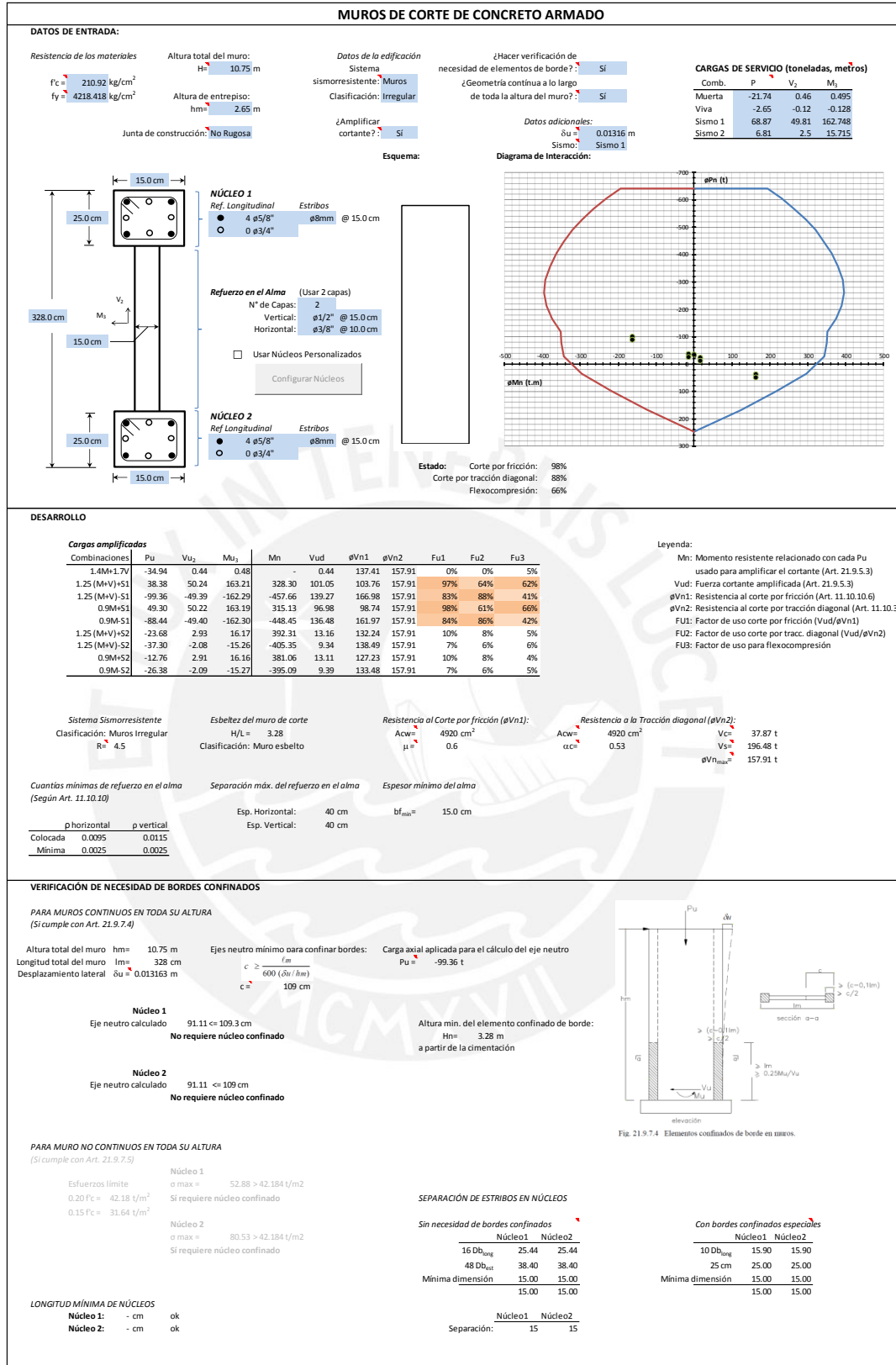


Figura 3-1 Hoja de cálculo para diseño de muros de corte

El segundo sector *Desarrollo* muestra una lista de todas las combinaciones de carga y para cada una de ellas se muestra el cortante amplificado (en caso se active la opción de amplificar cortante según Art. 21.9.5 de la norma E.060), las resistencia al corte y al corte por fricción (para ambos casos estas resistencias dependen de la carga axial, por lo que son distintas en cada caso de carga) y los factores de uso. Adicionalmente se muestran algunos pasos intermedios que permiten el cálculo de las resistencias tales como la esbeltez del muro, el área de corte, el factor  $\alpha_c$  para calcular la resistencia al corte (art. 11.10.5) y la resistencia al corte máxima. Asimismo se muestran las cuantías vertical y horizontal mínima, espaciamientos máximos del refuerzo en el alma y espesor mínimo del alma.

El tercer sector *Verificación de Necesidad de Bordes Confinados* desarrolla el procedimiento descrito en el artículo 21.9.7 de la norma E.060 para evaluar la obligación de colocar núcleos de placa con requerimientos especiales, que incluyen separación de estribos de confinamiento y longitud de núcleos. El procedimiento es distinto para muros continuos y muros no continuos en toda su altura. Los datos de entrada necesarios para realizar esta verificación se solicitan en el sector *Datos de entrada*.

Por último en la pestaña *Núcleos Personalizados* se puede configurar detalladamente la ubicación de las barras de refuerzo longitudinal de los núcleos en caso el usuario no desee la configuración por defecto que realiza el programa.

### 3.2 Alcances

Esta hoja de cálculo fue realizada para diseñar muros de corte o placas doble T de concreto armado. Los muros de corte se caracterizan por recibir fuerzas verticales y horizontales paralelas al plano del muro, y momentos perpendiculares al plano de este, por lo tanto los muros de sótano no pertenecen a este grupo. Estos muros pueden ser asimétricos. La hoja de cálculo permite que la distribución de barras de refuerzo vertical sea configurada por el usuario. Es posible considerar amplificación del cortante en función de la capacidad a flexión de la placa. Es posible realizar la verificación de necesidad de elementos de borde según el Artículo 21.9.7 de la norma E.060. Las cargas del muro se ingresan para un piso determinado de la edificación. La hoja de cálculo realiza las combinaciones de carga automáticamente, por lo tanto las cargas muertas y vivas deben ser ingresadas en servicio. Las cargas de sismo se obtienen mediante la aplicación de la norma E.030, por lo tanto se ingresan a nivel de resistencia.

### 3.3 Sustento teórico

La experiencia de terremotos en distintos lugares de mundo nos ha enseñado que las estructuras con mayor rigidez lateral tienen un mejor comportamiento que aquellas más flexibles. En edificios de concreto armado, los muros de corte son la mejor y más popular solución para aportar rigidez lateral a una edificación. Estos son la principal línea de defensa contra los movimientos sísmicos, la gran rigidez lateral que provee a la estructura reduce con mayor efectividad las derivas de entrepiso (en comparación con los pórticos), lo que se traduce en una reducción de daños en la edificación.

El gran aumento de la rigidez lateral castiga a la estructura con una reducción en la ductilidad, propiedad muy importante que evita colapsos repentinos y catastróficos (frágiles). Las normas actuales intentan aportar ductilidad a los muros de corte amplificando la resistencia relacionada a los modos de falla frágiles (como la resistencia al corte y al corte por fricción), sin embargo estos muros no llegan al nivel de ductilidad que puede aportar los pórticos. Esto se ve reflejado claramente en la norma sismorresistente E.030 que asigna un valor en el factor de reducción de resistencia sísmica mayor en pórticos que en muros estructurales.

En esta sección se hará un resumen de todos los requerimientos de la norma peruana de Concreto Armado E.060 para los muros de corte; requerimientos que están repartidos en los capítulos 10, 11, 14 y 21.

#### 3.3.1 Geometría del muro y refuerzos mínimos

La geometría del muro depende en gran parte de la arquitectura de la edificación y de la estructuración que el profesional en estructuras haya propuesto. La norma peruana obliga a satisfacer los siguientes requerimientos mínimos, sin embargo la geometría final debe satisfacer los requerimientos de resistencia ante las cargas demandadas.

Los requerimientos de la norma en cuanto a espesor mínimo de muros se refiere se encuentran en el Art. 21.9.3. (ecuación 3.1) donde  $L$  es la distancia entre elementos que proporcionen apoyo lateral al muro.

$$t \geq \frac{L}{25} \dots ec.3.1$$

$t \geq 15cm$  (en caso de muros de corte convencionales)

$t \geq 10cm$  (en caso de muros de ductilidad limitada)

Asimismo se debe verificar si el espesor del muro es suficiente para resistir las cargas concentradas debidas al apoyo de vigas perpendiculares a los muros y para evitar la falla por pandeo del extremo en compresión por flexión.

La cuantía de refuerzo mínimo vertical u horizontal se resume en el siguiente cuadro, esta cuantía depende tanto del área transversal del muro como de las fuerzas cortantes que recibe.

**Tabla 3-1 Refuerzo mínimo horizontal y vertical en muros de corte (unidades en kg, cm)**

	Si $Vu \leq 0.27\sqrt{f'c} Aw$ (Art. 14.3.1 ó 11.10.7)	Si $Vu > 0.27\sqrt{f'c} Aw$
$\rho$ horizontal mín	0.0020	0.0025 (Art. 11.10.10.2)
		Si $H/L > 2$ $0.0025 \leq 0.0025 + 0.5(2.5 - H/L)(\rho_h - 0.0025) \leq \rho_h$ (Art. 11.10.10.3)
$\rho$ vertical mín	0.0015	Si $H/L < 2$ $\geq \rho_h$ (Art. 21.9.5.2)

### 3.3.2 Cortante

La resistencia al cortante para muros de corte  $Vn$  se calcula sumando la resistencia al corte que provee el concreto  $Vc$  más la resistencia al corte que provee el acero  $Vs$  según las ecuaciones 3.2 y 3.3. En caso el muro este sujeto a tracciones, la fuerza cortante se multiplicara por el factor definido por la ecuación 3.5.

$$V_c = A_c w (\alpha_c \sqrt{f'_c}) \quad \dots ec.3.2$$

$\alpha_c = 0.8$  para  $h_m/l_m \leq 1.5$

$$V_s = A_c w \rho_h f_y \quad \dots ec.3.3$$

$\alpha_c = 0.53$  para  $h_m/l_m > 2$

$\alpha_c$  varía linealmente cuando  $1.5 < h_m/l_m < 2$

$$V_n \leq 2.6 \sqrt{f'_c} A_c w \quad \dots ec.3.4$$

$A_c w$ : área de corte del muro

$\rho_h$ : cuantía horizontal del alma del muro.

$$F_t = 1 - \frac{N_u}{35 A_g} \geq 0 \quad \dots ec.3.5$$

$F_t$ : factor que modifica  $V_n$  cuando hay fuerzas en tracción en el muro

$N_u$ : carga axial en tracción del muro (kg), positiva en tracción

Asimismo la resistencia al corte por fricción en las juntas horizontales de construcción del muro se rige con la ecuación 3.6

$$V_n = \mu (N_c + A_v f_y) \geq 0 \quad \dots ec.3.6$$

$N_c$ : carga axial en compresión del muro

$A_v$ : área del refuerzo

$\mu$ : coeficiente de fricción definido en Art. 11.7.4.3

### 3.3.3 Flexión y carga axial

El diseño de los muros de concreto armado que involucre los efectos simultáneos de la flexión y la carga axial (tanto en compresión como en tracción) es semejante al diseño de columnas. Considerando la geometría y refuerzo del muro del muro se elabora un diagrama de interacción. Una sección se considera satisfactoria si los puntos carga axial-momento, amplificados y combinados, se encuentran dentro de este diagrama. Las hipótesis básicas necesarias para formar este modelo se describen en el artículo 10.2 de la norma.

### 3.3.4 Amplificación del cortante por solicitaciones sísmicas

De acuerdo con los criterios sismorresistentes, se busca que la falla del muro de corte sea por flexocompresión ya que este tipo de fallas son más dúctiles que aquellas por

cortante. Por lo tanto los requerimientos del cortante son ajustados a la capacidad a flexión dada al muro mediante la ecuación 3.7.

$$Vu = Vua \left( \frac{Mn}{Mua} \right) \quad \dots ec.3.7$$

Vua: cortante proveniente del análisis

Mua: momento proveniente del análisis

Mn: momento nominal resistente del muro

Esta y detalles adicionales a la amplificación del cortante se encuentran en el artículo 21.9.5 de la norma E.060.

### 3.4 Verificaciones

Se plantea una placa de concreto armado asimétrica con respecto al eje X en el programa “Section Designer”, que viene integrado al programa ETABS, con las siguientes características:

- Las propiedades del concreto:
  - $f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$
  - $E = 250\,998 \text{ kg/cm}^2$
- Propiedades de acero de refuerzo:
  - $f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$
- Configuración del programa ETABS
  - Código de diseño: ACI 318-99
  - Número de puntos en curva de interacción: 21
- Geometría y refuerzo de la placa:
  - Longitud total: 450cm
  - Refuerzo distribuido vertical en alma:  $\emptyset 1/2'' @ 30\text{cm}$
  - Dimensiones de núcleo 1: 50x50cm
  - Refuerzo de núcleo 1: 4  $\emptyset 1''$  + 8  $\emptyset 3/4''$
  - Dimensiones de núcleo 2: 25x50cm
  - Refuerzo de núcleo 1: 8  $\emptyset 3/4''$

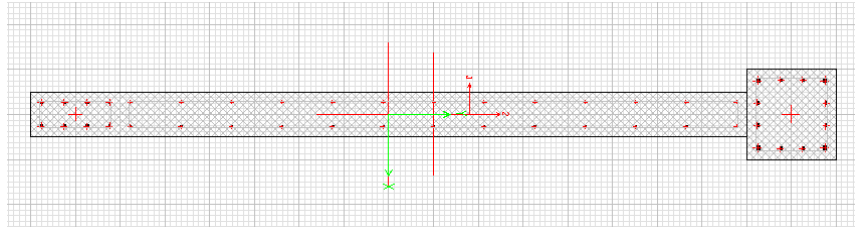


Figura 3-2 Modelo de muro de corte de verificación en el programa Section Designer

Introducimos las mismas propiedades del muro en la hoja de cálculo y comparamos ambos resultados. La tabla 3-2 muestra las coordenadas de los puntos del diagrama de interacción y la figura 3-4, el trazado de estos puntos. Se observa que ambos diagramas se superponen en casi en su totalidad.

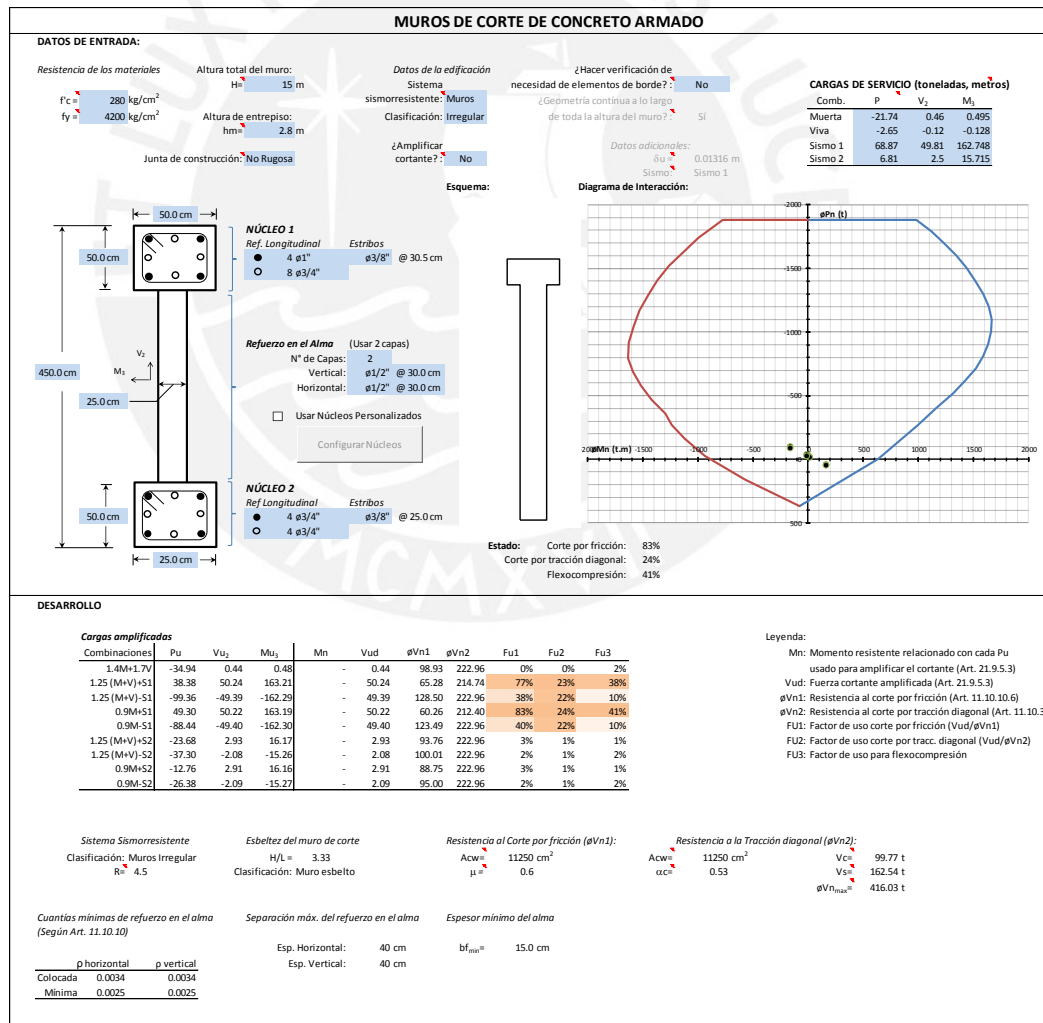


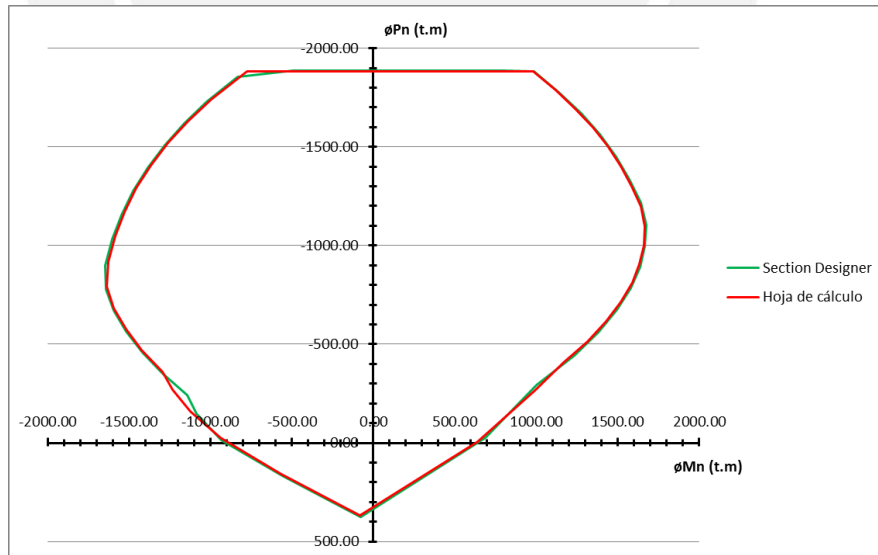
Figura 3-3 Hoja de cálculo de muros de corte con los datos definidos para la verificación

**Tabla 3-2 Puntos del diagrama de interacción obtenidos del Section Designer y de la hoja de cálculo**

Resultados del programa Section Designer

Resultados de hoja de cálculo de muros de corte

$\phi P_n$	$\phi M_n$	$\phi P_n$	$\phi M_n$	$\phi P_n$	$\phi M_n$	$\phi P_n$	$\phi M_n$
-1886.00	57.97	-1886.00	57.97	-1880.77	0.00	-1880.77	0.00
-1886.00	417.17	-1886.00	-497.11	-1880.77	982.99	-1880.77	-775.46
-1886.00	625.21	-1854.00	-831.03	-1788.59	1118.86	-1738.79	-993.30
-1886.00	816.59	-1727.00	-1021.00	-1695.05	1239.96	-1630.05	-1136.51
-1883.00	988.49	-1618.00	-1161.00	-1599.65	1347.25	-1519.85	-1260.55
-1778.00	1141.39	-1507.00	-1282.00	-1502.96	1440.29	-1407.11	-1366.38
-1671.00	1276.21	-1393.00	-1386.00	-1404.15	1520.25	-1291.50	-1455.00
-1562.00	1392.42	-1277.00	-1473.00	-1302.05	1587.92	-1171.87	-1527.55
-1451.00	1491.41	-1156.00	-1544.00	-1197.84	1641.86	-1048.03	-1584.98
-1336.00	1574.42	-1031.00	-1601.00	-1097.37	1667.30	-918.00	-1629.21
-1217.00	1642.94	-898.86	-1645.00	-1002.07	1661.81	-793.95	-1635.83
-1104.00	1674.63	-778.92	-1641.00	-907.46	1635.85	-684.40	-1591.83
-996.77	1668.42	-672.04	-1592.00	-812.55	1590.16	-576.95	-1519.67
-889.82	1637.64	-565.09	-1519.00	-714.87	1521.11	-469.08	-1421.94
-782.99	1581.13	-458.26	-1420.00	-616.01	1429.00	-359.84	-1295.20
-674.46	1497.65	-350.55	-1294.00	-514.94	1314.07	-269.20	-1234.39
-561.72	1381.89	-241.89	-1143.00	-406.42	1167.57	-160.30	-1123.19
-443.85	1232.69	-146.86	-1084.00	-265.74	993.01	-24.95	-938.31
-291.81	1003.63	-14.62	-934.18	-4.13	641.51	156.55	-572.37
-26.88	688.22	168.74	-559.31	365.90	-81.04	365.90	-81.04
375.56	-79.01	375.56	-79.01				



**Figura 3-4 Superposición de los dos diagramas de interacción**

## CAPÍTULO 4: MUROS DE CONTENCIÓN

### 4.1 Descripción

La hoja de cálculo de Muros de Contención permite el análisis y diseño de muros de contención en voladizo de concreto armado. El usuario ingresa dos tipos de datos al programa, el primero son los parámetros geotécnicos que el programa usa para calcular los empujes laterales del suelo, el segundo tipo de datos son las dimensiones, geometría y refuerzo del muro. El programa calcula la estabilidad global del muro de contención y además realiza el diseño en concreto armado de los elementos.

Esta hoja de cálculo se caracteriza por aprovechar al máximo las funciones de Excel y dejar los macros en segundo plano, solo para la presentación de algunos formularios y para dimensionar automáticamente la cimentación del muro. Debido a que todas las verificaciones necesarias se dan con funciones de Excel el programa da los resultados de diseño automáticamente a medida que uno va ingresando los datos de entrada.

Esta aplicación comprende cuatro pestañas: AYUDA, DIMENSIONAMIENTO, DISEÑO EN C.A., y M. OKABE.

En la hoja AYUDA se puede encontrar información general sobre el funcionamiento de la hoja de cálculo así como varias anotaciones sobre las opciones de diseño que el usuario puede modificar.

En la hoja DIMENSIONAMIENTO el usuario debe ingresar los datos de entrada solo en las celdas sombreadas. Los parámetros del suelo pueden ingresarse manualmente o también pueden usarse parámetros típicos según el tipo de suelos mediante el botón de comando SUELOS. Las dimensiones que definen la geometría del muro pueden ingresarse manualmente y acomodarlos de manera que cumplan con todas las verificaciones. El botón de comando DIMENSIONAR calcula automáticamente el mínimo valor del ancho de cimentación (B) que cumpla con todas las verificaciones. En esta hoja se muestran los cálculos del empuje lateral de suelo, además de las verificaciones de estabilidad por volteo y deslizamiento, y verificar que los esfuerzos sobre el suelo no superen la capacidad admisible. Es posible también introducir los coeficientes sísmicos horizontales y verticales para considerar cargas sísmicas según el método de Mononobe-Okabe.

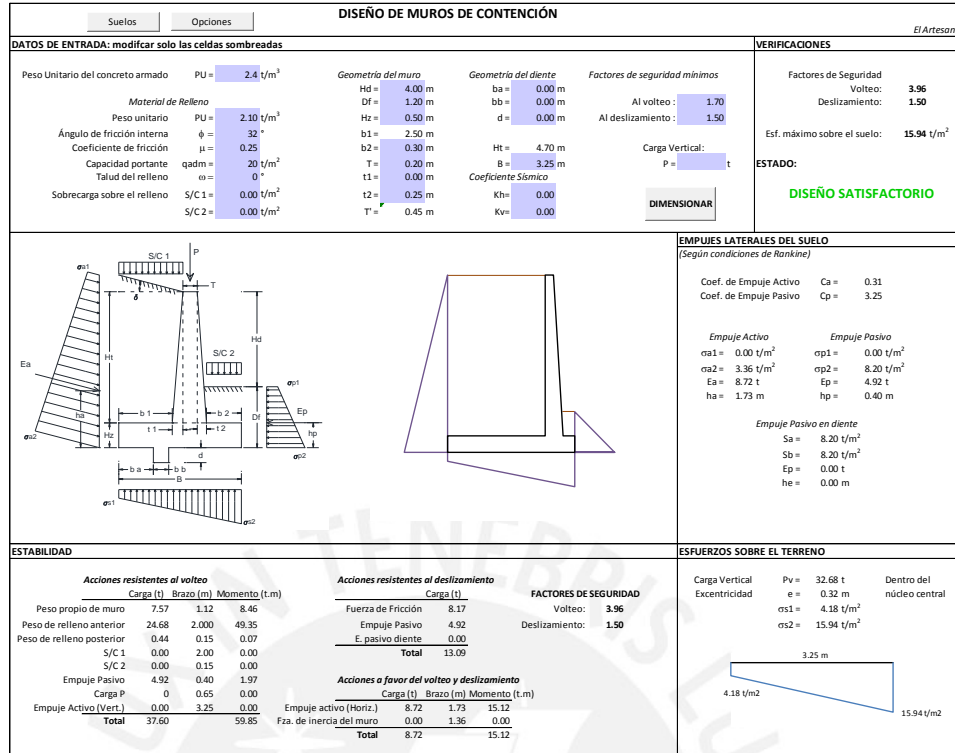


Figura 4-1 Hoja DIMENSIONAMIENTO

La hoja DISEÑO EN C.A. muestra los cálculos del análisis estructural y diseño en concreto armado del voladizo, talón y puntal del muro de contención. El usuario ingresa los refuerzos y el programa verifica las resistencias de las secciones a flexión y cortante. También se verifica la longitud del bastón, la longitud de anclaje del refuerzo vertical del voladizo y las cuantías mínimas.

La hoja M OKABE es una copia de la hoja DIMENSIONAMIENTO y tiene el objetivo de realizar diseños de muro considerando las cargas sísmicas calculadas según el método de Mononobe-Okabe y comparar este diseño con aquel que no consideraba estas cargas.

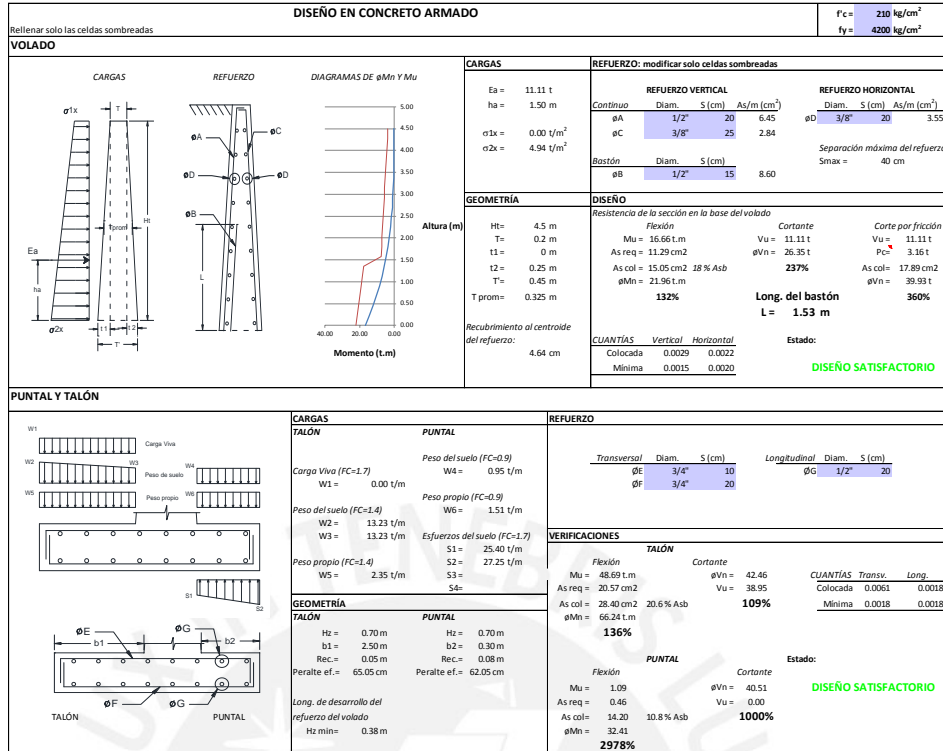


Figura 4-2 Hoja DISEÑO EN C.A.

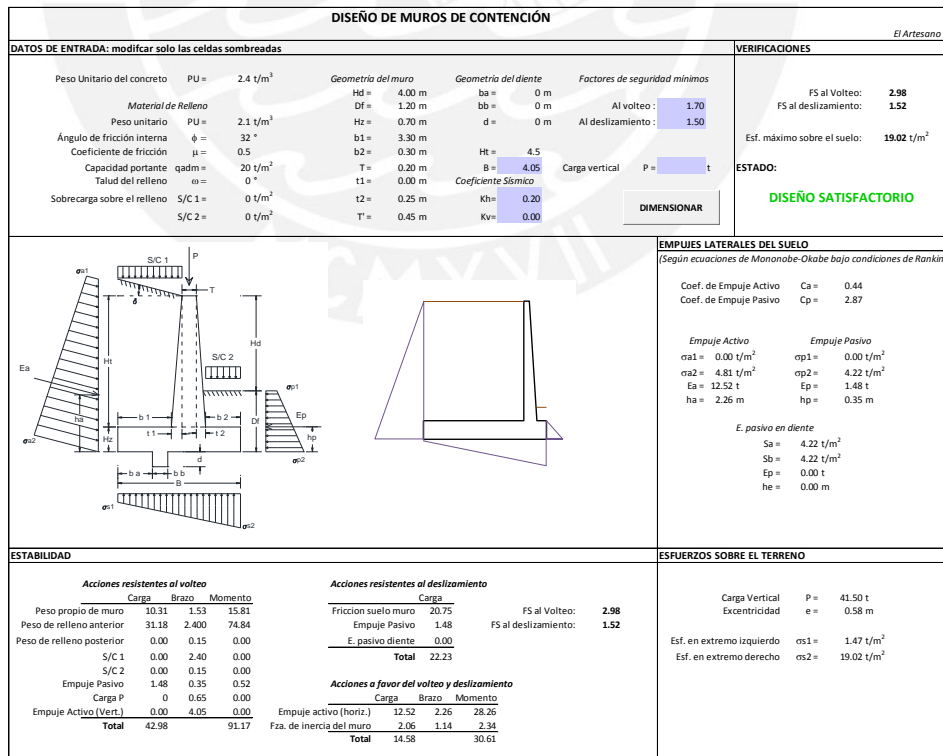


Figura 4-3 Hoja M. OKABE

## 4.2 Alcances

La hoja de cálculo solo se aplica a muros de contención en voladizo de concreto armado. También puede ser utilizada para diseñar muros de gravedad de cualquier material, si se modifica el valor de peso unitario con el del material. La hoja también permite diseñar estribos de puentes agregando la carga correspondiente sobre la corona del muro. Es posible también colocar un diente debajo de la cimentación para mejorar la estabilidad al deslizamiento.

Los empujes laterales del suelo aplicados al muro pueden ser activo, pasivo o en reposo y se calculan según la teoría de Rankine. Es posible considerar cargas de sismo según el método de Mononobe-Okabe.

## 4.3 Sustento teórico

Un muro de contención es una estructura que retiene o confina lateralmente material de suelo en un desnivel cuando el espacio no es suficiente para formar un talud natural debido a condiciones de límites de propiedad, funcionalidad o economía.

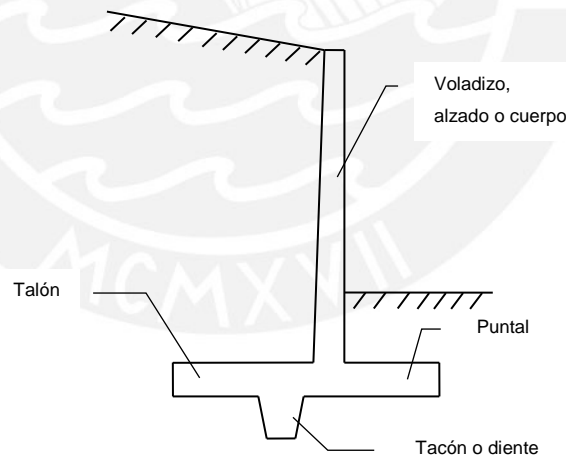


Figura 4-4 Partes de un muro de contención en voladizo

Estas estructuras se clasifican tres grupos: muros de gravedad, muros en voladizo y muros con contrafuertes. Los muros de gravedad, hechos de concreto armado o albañilería, usan su peso propio para mantener su estabilidad. Los muros en voladizo, contruidos en concreto armado, usan el peso del suelo o relleno contenido además del

peso propio del muro para obtener su estabilidad. Estos muros son económicos con una altura de 3 a 6 metros (Nilson, 1999) y no se recomienda superar la altura de 8 metros (Harmsen & Mayorca, 2000). Si la altura es mayor, el voladizo se encontrará demasiado esforzado y con posibles problemas de deflexiones, estos problemas se aliviarán agregando contrafuertes espaciados entre sí a una distancia aproximadamente igual a la mitad de la altura del muro. En este caso el muro ya no trabajará como un voladizo sino como una losa rectangular apoyada en tres lados.

Sobre el muro de contención se aplican cargas verticales, como el peso propio del muro y el peso del suelo o relleno, y cargas horizontales como los empujes laterales del suelo. El suelo o relleno retenido por el muro ejerce una fuerza lateral que puede ser un empuje activo o un empuje en reposo dependiendo de la capacidad de deformación, desplazamiento o rotación del muro. El suelo delante del muro ejerce una reacción que equilibra el sistema, su valor puede aumentar hasta llegar a un máximo denominado empuje pasivo. El suelo debajo de la cimentación del muro recibirá esfuerzos verticales que, en un diseño de muro de contención satisfactorio, serán menores que su capacidad admisible. Además la interfase suelo-muro ofrece una fuerza de rozamiento que ayuda al empuje pasivo a impedir una falla por deslizamiento.

La magnitud del empuje activo, reposo y/o pasivo depende de parámetros del suelo que se obtienen mediante ensayos en un laboratorio de mecánica de suelos. Sin embargo en una etapa de pre-diseño puede usarse valores típicos de estos parámetros para tener una idea de las dimensiones y costo de la estructura.

Un aumento del nivel freático aumenta el valor de los empujes del suelo debido a la presión hidrostática adicional que se ejerce sobre la cara del muro. Este aumento de cargas puede ser suficiente para provocar la falla del muro, es por esto que un sistema adecuado de drenaje es importante.

Se prefiere usar suelos granulares en lugar de los cohesivos para rellenos en muros de contención por una serie de ventajas. Los suelos granulares son altamente permeables, no son susceptibles a la acción del congelamiento y no pierden estabilidad con el paso del tiempo (Nilson, 1999). Los suelos arcillosos en cambio pueden cambiar sus propiedades cuando se humedecen: su volumen aumenta y el ángulo de fricción interno puede reducirse a cero, produciendo un aumento excesivo de las presiones laterales sobre el muro no contemplado en el diseño.

### 4.3.1 Empujes laterales del suelo

El suelo presenta un comportamiento intermedio entre un sólido rígido y un líquido. En un sólido las fuerzas internas permiten que tome pendientes verticales por su cuenta, por lo tanto la carga lateral sobre un muro que lo contenga es nula. En un líquido sucede lo contrario, la nula resistencia al corte permite que el íntegro de la presión vertical producida por el peso propio del líquido se transmita horizontalmente ( $C=1$ ) al muro de contención, esta presión se denomina presión hidrostática. Un suelo se comporta en un estado intermedio a estos dos ( $0 < C < 1$ ), el valor de  $C$  dependerá del ángulo de fricción interna del suelo " $\phi$ ", que es una medida de la resistencia al corte en suelos granulares.

$$P_h = C\gamma h \quad \dots ec. 4.1$$

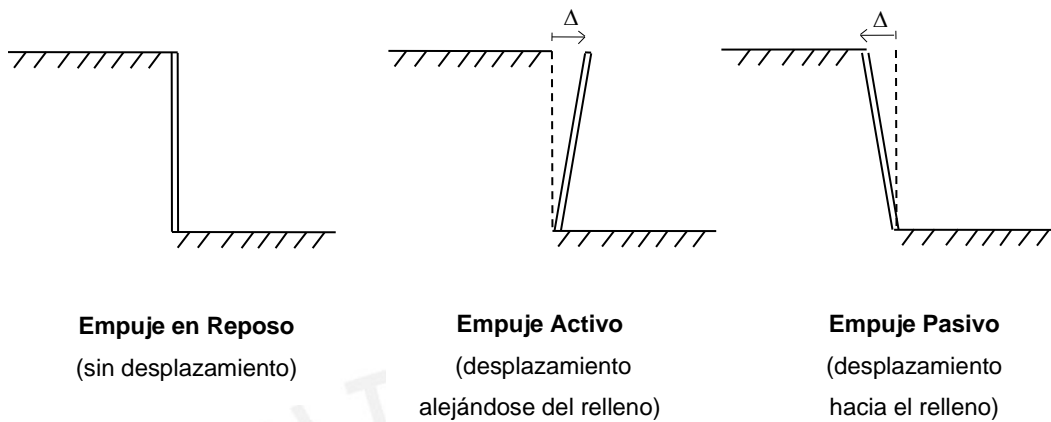
La presión horizontal del suelo  $P_h$  será una fracción de la presión vertical, que depende de la profundidad  $h$  y el peso específico del suelo  $\gamma$ . Dicha fracción se denomina coeficiente de presión de tierra  $C$ , que puede estar en reposo, activo o pasivo ( $C_0$ ,  $C_a$  y  $C_p$  respectivamente).

Si el muro que contiene el suelo es rígido o tiene arriostres que impiden un desplazamiento lateral, entonces el suelo desarrolla un empuje en reposo ( $C_0$ ). Esto se presenta en los muros de sótano, donde las losas de entrepiso restringen el desplazamiento lateral el muro.

En los muros de contención de gravedad, voladizo o con contrafuertes, el empuje del suelo y los asentamientos en la cimentación ocasionan un desplazamiento horizontal o una rotación del muro. Este movimiento produce un reacomodo de la estructura del suelo retenido y el empuje en reposo se reduce a un valor mínimo llamado *empuje activo*, que puede interpretarse como una relajación del suelo. En el caso muros en voladizo, la deformación del voladizo favorece el desarrollo del empuje activo. Para suelos granulares, una deflexión horizontal del muro en el punto más alto de 0.001 a 0.005 veces la altura total del mismo es suficiente para desarrollar un empuje activo (Bowles, 2009) .

En el caso contrario en el que el muro empuja al suelo debido a cargas externas, el suelo reaccionará con una presión lateral suficiente para lograr el equilibrio hasta que se llega a un desplazamiento tal (opuesto al caso del empuje activo, y mayor que este en valor

absoluto) que produzca la falla del suelo. Cuando se llega a este estado la presión lateral se denomina *empuje pasivo* y es la presión lateral máxima que el suelo puede ofrecer.



**Figura 4-5 Tipos de empuje lateral del suelo**

En la realidad, no es posible determinar con exactitud los empujes laterales del suelo en un muro de contención en estado de servicio. El empuje activo se desarrolla solo si los desplazamientos del muro son suficientes, si esto no ocurre el esfuerzo lateral es indeterminado pero se encuentra dentro del intervalo entre el activo y el reposo (Bowles, 2009). El empuje pasivo es un valor máximo que se presenta ante un volteo o desplazamiento inminente y no durante la vida útil del muro. Estos detalles se deben tomar en cuenta al momento de diseñar el muro.

#### 4.3.2 Teoría de Rankine

La teoría más usada para calcular la magnitud de las presiones laterales de tierra fue desarrollada en 1857 por el ingeniero y físico escocés William John Macquorn Rankine, que se basó en la teoría de Coulomb y de otros investigadores. Las hipótesis básicas de esta teoría son las siguientes:

- a) El suelo es isotrópico y homogéneo.
- b) El suelo es granular (no hay cohesión) e incompresible.
- c) La fuerza de fricción es uniforme a lo largo del plano de rotura. El coeficiente de fricción suelo-suelo es  $\tan(\varphi)$ , siendo  $\varphi$  el ángulo de fricción interna.
- d) No hay fricción entre el muro de concreto y el suelo.

- e) Superficie de rotura es plana y la superficie del relleno también es plana (puede ser inclinada).
- f) La cuña de falla es un cuerpo rígido en traslación pura.
- g) Se trabaja en un ancho unitario de un muro infinitamente largo.

Cuando se construye un muro que retiene una masa de suelo, las presiones en reposo son las primeras en aparecer. Estas presiones son tales que producen un desplazamiento de la zona superior del muro. La figura 4-6 muestra un diagrama de fuerzas de lo que está ocurriendo en el relleno, a medida que el muro se desplaza el valor de la fuerza  $E$  irá disminuyendo y la inclinación de la fuerza  $R$  (con respecto a la normal de la superficie de falla) irá aumentando para equilibrar el sistema. Esta inclinación llegará a un valor máximo que no es otra cosa que el ángulo de fricción interna del suelo  $\varphi$ . Cuando esto sucede se la fuerza  $R$  aportará más al equilibrio del sistema y la fuerza  $E$  aportará lo menos posible. En este estado la fuerza  $E$  se denomina empuje activo, y es el menor valor de empuje que el suelo puede ofrecer.

La ecuación para obtener el coeficiente de empuje activo  $C_a$  (ecuación 4.2) se deduce formulando las ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la figura 4-6, asumiendo que la superficie de falla del suelo es plana y nace de la parte inferior del muro con una inclinación de  $45^\circ + \varphi / 2$ .

En el caso del empuje pasivo, una fuerza externa empuja al muro contra el suelo y ocurre un desplazamiento del muro hacia al suelo retenido. Se forma un sistema de fuerzas igual al caso del empuje activo, con la excepción de que al inclinación de la fuerza  $R$  debe ser en sentido opuesto que en el caso anterior para lograr el equilibrio. De la misma manera se llegará a un punto en que la inclinación de  $R$  alcance el valor de  $\varphi$ , se formará una superficie de falla y el valor de  $E$  llegará a un máximo llamado empuje pasivo.

La ecuación para obtener el coeficiente de empuje pasivo  $C_p$  (ecuación 4.3) se deduce formulando las ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre de la figura 4-6, asumiendo que la superficie de falla del suelo es plana y nace de la parte inferior del muro con una inclinación de  $45^\circ - \varphi / 2$ .

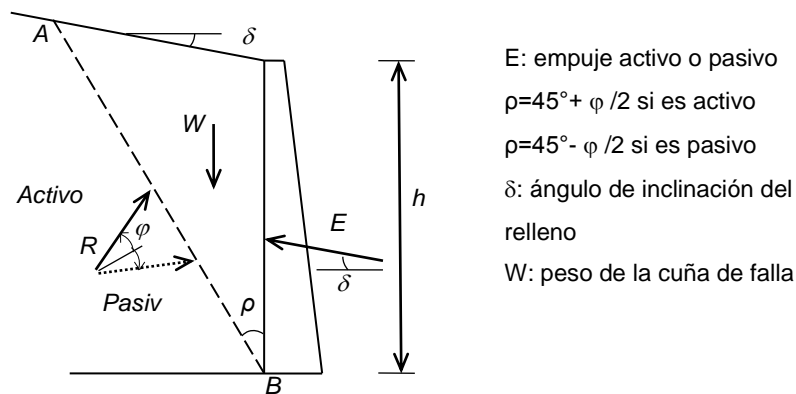


Figura 4-6 Diagrama de cuerpo libre de cuña de falla para estados activo y pasivo

$$C_a = \frac{\cos \delta - \sqrt{\cos^2 \delta - \cos^2 \varphi}}{\cos \delta + \sqrt{\cos^2 \delta - \cos^2 \varphi}} \quad \dots ec. 4.2$$

$$C_p = \frac{\cos \delta + \sqrt{\cos^2 \delta - \cos^2 \varphi}}{\cos \delta - \sqrt{\cos^2 \delta - \cos^2 \varphi}} \quad \dots ec. 4.3$$

Se observa que es necesario un desplazamiento del muro para desarrollar tanto los empujes activos como los pasivos. En caso el muro este arriostrado en la parte superior de manera que se restrinja el desplazamiento, tal como ocurre en los muros de sótano donde las losas de entrepiso restringen los desplazamientos laterales, entonces el suelo ejerce un empuje en reposo sobre el muro. La ecuación 4.4 nos permite hallar el coeficiente de empuje en reposo  $C_o$ , cuyo valor será un intermedio entre los estados activo y pasivo.

$$C_o = 1 - \sin \varphi \quad \dots ec. 4.4$$

La figura 4-7 muestra dos casos comunes de presiones activas en un muro de contención. En (a) la distribución de presiones horizontales es triangular, por lo tanto la resultante se ubica al tercio de la altura ya que es la altura de su centroide. En la figura (b) la carga viva o sobrecarga sobre el relleno también produce un empuje lateral que es equivalente a tener una capa de suelo adicional cuya altura es tal que su peso por metro lineal es igual a la sobrecarga. En este caso el diagrama de empujes laterales es trapezoidal.

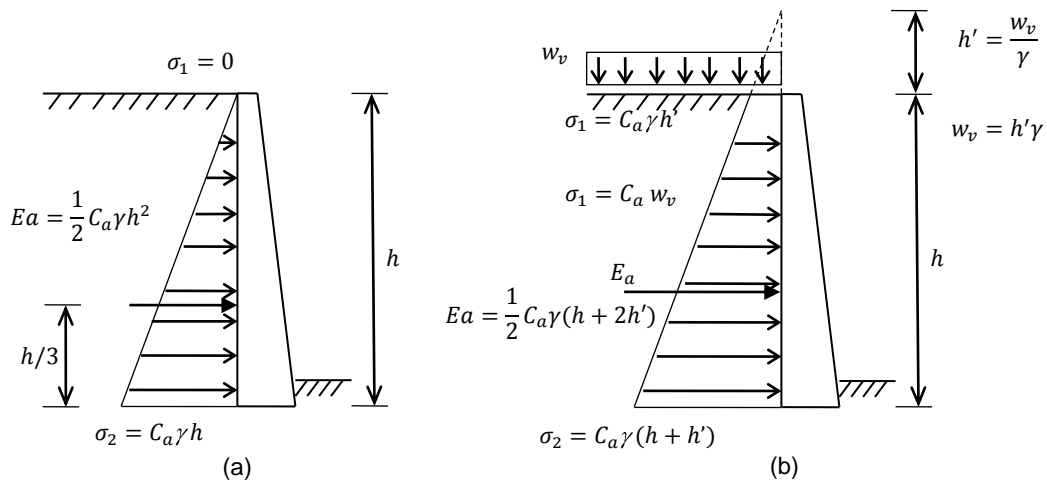


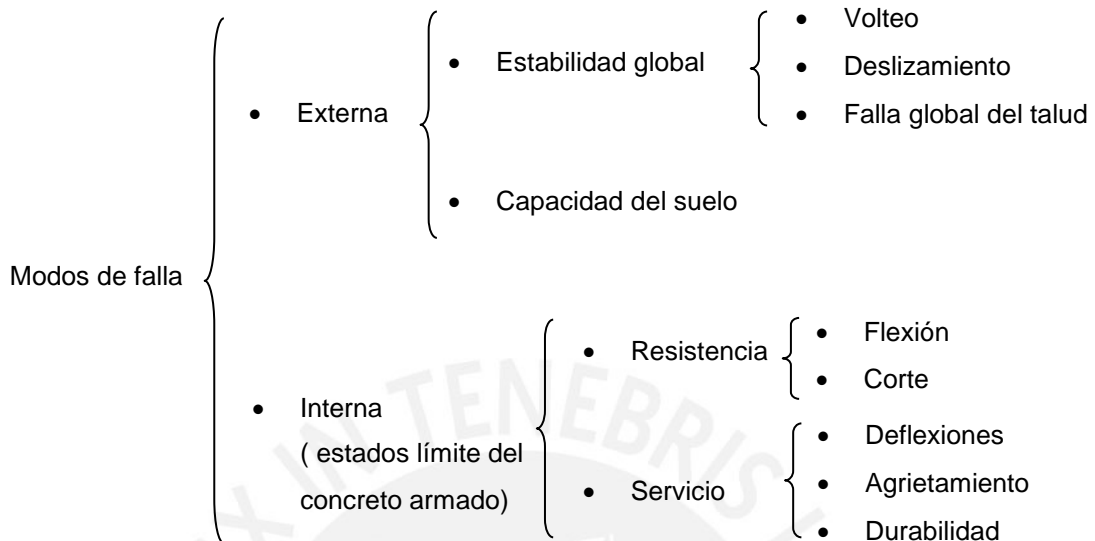
Figura 4-7 Distribución de presiones laterales del suelo

Varios experimentos muestran que los esfuerzos laterales del suelo medidos en la parte superior del muro son similares a los esfuerzos activos calculados, mientras que en la parte inferior los esfuerzos medidos son mayores. Esto es razonable considerando que en una rotación o deflexión del muro, los desplazamientos son mayores en parte superior, por lo que el estado activo se puede desarrollar bien, mientras que en la zona inferior el suelo se encontrará en un estado más cercano al reposo. Particularmente este efecto se observa cuando se compacta el relleno. Aun así el empuje total resultante, que se obtiene sumando todas las presiones a lo largo de la altura del muro, es similar al empuje activo teórico. Sin embargo la altura de esta resultante no se encuentra a  $H/3$ , sino cercano a 0.4 o 0.45 H (Bowles, 2009).

### 4.3.3 Modos de falla

Para el diseño de un muro de contención es necesario evaluar los distintos modos de falla que le puede ocurrir. Estos modos de falla se pueden dividir en externos e internos. Los modos de falla externos se refieren a la estabilidad global de la estructura (volteo, deslizamiento y falla de talud) y a que los esfuerzos que la cimentación del muro aplica al suelo sea menor que la capacidad de este. La estabilidad interna se refiere a la resistencia y comportamiento de los materiales que constituyen el muro, que en nuestro caso es el concreto armado.

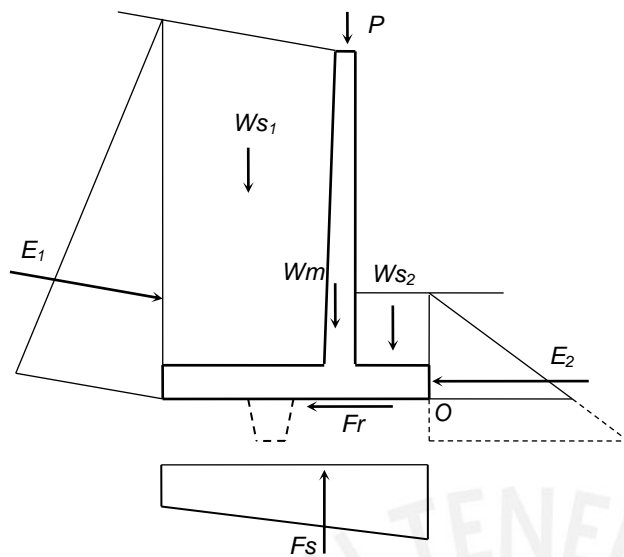
Las dimensiones y refuerzo de los distintos elementos de un muro de contención deben ser los adecuados para obtener seguridad ante los siguientes tipos de falla.



**Figura 4-8 Modos de falla para muros de contención**

La figura 4-9 muestra un diagrama de cuerpo libre de un muro de contención típico en voladizo, donde se muestra las cargas que participan en el diseño del muro, su ubicación y naturaleza. Las masas de suelo sobre el talón y puntal se consideran parte del muro de contención y se desplazan junto con él, como si fueran un solo sólido rígido. Las cuñas de falla tanto para los empujes activos y pasivos se forman más allá de estas masas de suelo, por lo que las fuerzas de empuje son aplicados sobre caras imaginarias verticales que nacen en los extremos del talón y del puntal.

En los siguientes párrafos se describirán cada una de las secciones de falla y el método de diseño adecuado para aportar una seguridad ante cada una de ellas. Los valores de factor de seguridad mínimos dependen del uso de la estructura: si la falla del muro tiene como consecuencia la pérdida de vidas humanas o daños a estructuras importantes entonces los factores de seguridad mínimos debe ser altos.



- E<sub>1</sub>**: empuje del suelo retenido, estado activo o en reposo.
- E<sub>2</sub>**: empuje de reacción del suelo delante del muro, en situaciones críticas de volteo o deslizamiento aumenta hasta empuje pasivo.
- W<sub>s1</sub>**: peso del suelo sobre el talón.
- W<sub>s2</sub>**: peso del suelo sobre el puntal.
- W<sub>m</sub>**: peso propio total del muro de contención (volado y cimentación).
- P**: carga sobre la corona del muro.
- Fr**: fuerza de fricción, cuyo valor máximo es  $f \times F_s$ , (siendo  $f$  el coeficiente de fricción suelo-concreto)
- F<sub>s</sub>**: Reacción vertical del suelo debajo de la cimentación

Figura 4-9 Diagrama de cuerpo libre del muro de contención

#### 4.3.4 Estabilidad al volteo

La seguridad de un muro ante la falla por volteo se evalúa realizando una comparación entre el estado en servicio del muro, que tiende al volteo debido a la presión lateral del suelo contenido, y un estado crítico de volteo, que es el instante teórico en que el muro está a punto de voltearse. La comparación se realiza mediante el Factor de Seguridad al Volteo, que es el cociente de la suma de los momentos resistentes al volteo entre la suma de los momentos a favor de este. La suma de los momentos resistentes al volteo es equivalente al momento mínimo necesario para ocasionar el volteo de la estructura en el estado crítico de volteo, mientras que la suma de momentos a favor del volteo es el momento que tiende a voltear el muro en el estado de servicio.

Los momentos resistentes son causados por el peso del muro ( $W_m$ ), el peso del suelo sobre el talón y puntal ( $W_{s1}$  y  $W_{s2}$ ), y el empuje  $E_2$ , que en este estado de volteo inminente es un empuje pasivo. Los momentos a favor del volteo son provocados solo por el empuje activo del relleno en contención. Todos los momentos se toman con respecto al punto O de la figura 4-9, que es el centro de rotación teórico del muro a punto de ser volteado. La reacción del suelo debajo del muro no se toma en cuenta porque se

asume que en el estado crítico de volteo esta reacción es una fuerza concentrada hacia arriba aplicada en el punto O, por lo que su momento es cero. Lo mismo ocurre con la fuerza de fricción. El factor de seguridad al volteo debe ser de 2 como mínimo (Harmsen & Mayorca, 2000).

#### 4.3.5 Estabilidad al deslizamiento

La evaluación de la seguridad ante la falla por deslizamiento del muro es similar al del volteo. Se compara un estado de servicio con un estado crítico de deslizamiento, que es el instante en que el muro está a punto de deslizar. El factor de seguridad al deslizamiento es el cociente de la suma de las fuerzas resistentes al deslizamiento entre la suma de fuerzas a favor de este. Las fuerzas resistentes al deslizamiento son la fuerza  $E_2$  y la fuerza  $Fr$  de la figura 4-9. Debido a que se encuentra en un estado de deslizamiento inminente ambas fuerzas toman su valor máximo, que es el empuje pasivo para  $E_2$  y la fuerza de fricción máxima para  $Fr$ , que es el producto de  $f$  (coeficiente de fricción suelo-concreto) y  $F_s$  que es la reacción vertical del suelo.

Los factores de seguridad varían de 1.5 a 2 (Harmsen & Mayorca, 2000). Si es necesario se puede colocar un tacón o diente que incremente la profundidad del diagrama del empuje pasivo (ver figura 4-9). Se recomienda, para mayor efectividad, que este tacón se ubique en el extremo del talón, lo más a la izquierda posible según la figura 4-9 (Bowles, 2009).

El empuje pasivo es una fuerza resistente que contribuye a la seguridad del muro tanto al volteo como al deslizamiento. Por seguridad el relleno delante del muro debe colocarse antes del relleno de suelo contenido. Asimismo se debe asegurar que la escorrentía o algún otro suceso natural o humano no retiren el suelo responsable del empuje pasivo durante la vida útil del muro, una manera de asegurar esto es mediante un pavimento. Si no se puede asegurar su permanencia se recomienda prescindir de los efectos del empuje pasivo en el diseño (Nilson, 1999).

#### 4.3.6 Esfuerzos del suelo

El cálculo de las presiones sobre el suelo se realiza de forma similar a una zapata a partir de la resultante de cargas verticales y la resultante de momentos aplicados al sistema

reducidos al centroide de la cimentación. Si la excentricidad es menor que un sexto del ancho de la cimentación, la resultante de cargas verticales se encontrará dentro del núcleo central y el diagrama de presiones será trapezoidal, de acuerdo con la ecuación 4.5. Si por el contrario la excentricidad es mayor a un sexto del ancho, entonces el diagrama de presiones será triangular de acuerdo con la ecuación 4.6. Las ecuaciones se aplican a una cimentación rectangular de ancho unitario y largo B.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{6M}{B^2} \quad \dots ec.4.5$$

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3\left(\frac{B}{2} - e\right)} \quad \dots ec.4.6$$

El cálculo de la resultante de cargas verticales y momentos del muro para calcular las presiones se realiza en estado de servicio. Debido a que el empuje pasivo es un valor máximo de empuje lateral del suelo y se necesita un desplazamiento considerable para desarrollarse (mayor desplazamiento que el empuje activo), no se asegura que la fuerza  $E_2$  alcance este valor en un estado de servicio. El valor de  $E_2$  es en realidad indeterminado pero menor que el empuje pasivo. A medida que  $E_2$  disminuye el esfuerzo máximo  $\sigma_{max}$  aumenta, por lo tanto resulta conservador y razonable ignorar por completo el empuje pasivo al calcular las presiones del suelo.

#### 4.3.7 Falla global del talud

El último modo de falla que el muro de contención debe enfrentar es la falla global del talud. Este tipo de falla es importante si el suelo es cohesivo y húmedo. La mecánica de suelos permite evaluar taludes usando el método de Fellenius o Bishop. Evaluar la estabilidad del muro por una falla del talud está fuera de los alcances del presente trabajo.

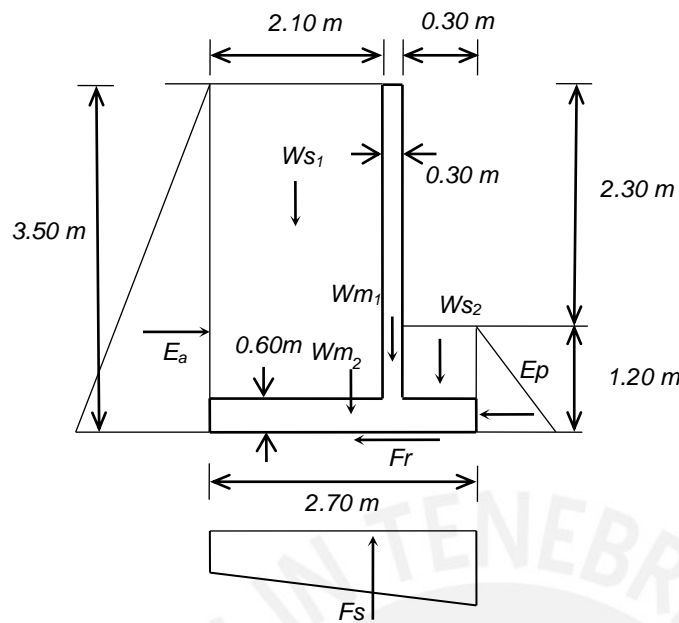
#### 4.3.8 Diseño en concreto armado

El diseño en concreto armado es el mismo que cualquier estructura de este tipo. El muro actúa como un voladizo con un momento máximo en la base. El refuerzo y dimensiones deben ser suficientes para satisfacer los requerimientos por flexión y corte. Algunos aspectos del diseño se mencionan sin los siguientes:

- Generalmente se coloca el refuerzo en dos capas tanto horizontal como verticalmente.
- En el muro la cuantía de refuerzo mínima horizontal es 0.002 y la cuantía mínima vertical 0.0015. En la zapata la cuantía mínima total es 0.0018.
- Separación máxima del refuerzo es 3 veces el ancho del elemento o 40cm (E.060 14.3).
- Si el voladizo es una sección variable se puede tomar el ancho promedio para calcular los refuerzos mínimos.
- La norma permite colocar una mayor proporción de refuerzo en el lado de la cara visible del muro ya que esta presenta mayores variaciones de temperatura. Se recomienda usar las 2/3 partes en el refuerzo total en la cara visible del muro (Harmsen & Mayorca, 2000).
- La longitud de estos bastones deben ir más allá del punto teórico de corte una distancia de  $d$  (peralte efectivo) o 12 veces el diámetro de la barra. Se debe asegurar un anclaje del refuerzo a ambos lados de la sección crítica, que es la base del voladizo. Hacia arriba la longitud del bastón debe ser mayor que la longitud de desarrollo de una barra recta. Hacia abajo el talón debe ser lo suficientemente peraltado para anclar este refuerzo mediante un gancho cumpliendo con la longitud de desarrollo de barras deformadas.
- No está de más verificar el corte por fricción en la junta de construcción en la base del voladizo del muro. Indicar en los planos el rayado de la junta ya que esto mejora considerablemente la resistencia al corte por fricción.
- Recubrimiento de 7cm por concreto vaciado directamente sobre el terreno, pero 5 cm si se usan encofrados.

#### 4.4 Verificaciones

En esta sección se calculará manualmente los factores de seguridad al volteo y deslizamiento de un muro de contención en voladizo de concreto armado con las dimensiones de la figura 4-10 y las propiedades del suelo indicadas. Luego se introducirán estos datos en la hoja de cálculo para verificar si los valores obtenidos de factor de seguridad y esfuerzos en el suelo son similares. Unidades en toneladas y metros.



**Parámetros del suelo**

$Pu=1.8 \text{ t/m}^3$   
 $\phi=28^\circ$   
 $\mu=0.25$   
 $Qadm=35 \text{ t/m}^2$

Donde:

$Pu$ : peso unitario  
 $\phi$ : ángulo de fricción interna  
 $\mu$ : coeficiente de fricción en interface concreto-suelo  
 $Qadm$ : capacidad admisible del suelo

**Figura 4-10 Características del muro de contención para verificación**

En primero lugar calculamos los pesos de cada uno de los bloques de suelo y de muro, por unidad de longitud.

$$W_{s1} = 2.1 \times 2.9 \times 1.8 = 10.962$$

$$W_{m1} = 0.3 \times 2.9 \times 2.4 = 2.088$$

$$W_{s2} = 0.3 \times 0.6 \times 1.8 = 0.324$$

$$W_{m2} = 0.6 \times 2.7 \times 2.4 = 3.888$$

Luego calculamos los empujes de suelo activo y pasivo, para  $\phi=28^\circ$  y  $\delta=0^\circ$  (talud del relleno)

$$C_a = \frac{\cos 0 - \sqrt{\cos^2 0 - \cos^2 28^\circ}}{\cos 0 + \sqrt{\cos^2 0 - \cos^2 28^\circ}} = 0.36$$

$$E_a = \frac{1}{2} C_a Pu h^2 = \frac{1}{2} \times 0.36 \times 1.8 \times 3.5^2$$

$$E_a = 3.969$$

$$C_p = \frac{\cos 0 + \sqrt{\cos^2 0 - \cos^2 28^\circ}}{\cos 0 - \sqrt{\cos^2 0 - \cos^2 28^\circ}} = 2.77$$

$$E_p = \frac{1}{2} C_p Pu h^2 = \frac{1}{2} \times 2.77 \times 1.8 \times 1.2^2$$

$$E_p = 3.59$$

Luego para calculamos el factor de seguridad al volteo y deslizamiento

$$FS_{volteo} = \frac{0.324 \times 0.15 + 10.962 \times 1.65 + 2.088 \times 0.45 + 3.888 \times 1.35 + 3.59 \times 0.4}{3.969 \times 1.1667}$$

$$FS_{volteo} = 5.563$$

$$FS_{desliz.} = \frac{(0.324 + 10.962 + 2.088 + 3.888) \times 0.25 + 3.59}{3.969}$$

$$FS_{desliz.} = 1.99$$

Calculamos el esfuerzo sobre el suelo

$$P = 10.962 + 0.324 + 2.088 + 3.888 = 17.262$$

$$M = 10.962 \times 0.3 - 0.324 \times 1.2 - 2.088 \times 0.9 + 3.888 \times 0 - 3.969 \times 1.1667 = -3.61$$

$$A = 2.70 \times 1 = 2.70$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \mp \frac{6M}{BH^2} = \frac{17.262}{2.70} \mp \frac{6 \times -3.61}{1 \times 2.70^2}$$

$$\sigma_{max} = 9.36 \text{ t/m}^2 \quad \sigma_{min} = 3.42 \text{ t/m}^2$$

La figura 4-11 muestra la hoja de cálculo con los datos del muro incluidos, la tabla 4-1 compara los resultados del cálculo manual y la de la hoja de cálculo, y se observa que son muy similares.

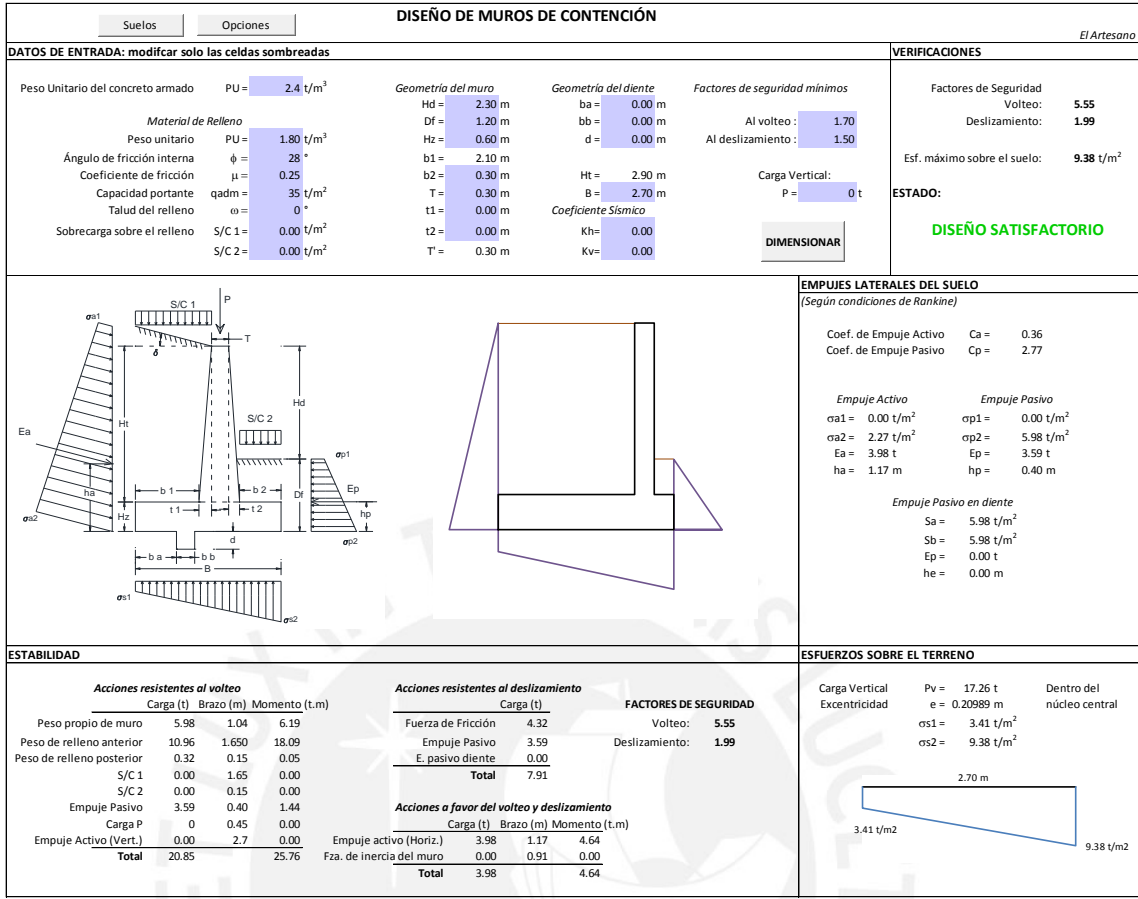


Figura 4-11 Resultados de muro de verificación usando la hoja de cálculo

Tabla 4-1 Cuadro comparativo

	Cálculo manual	Hoja de cálculo
FS volteo	5.56	5.55
FS desliz.	1.99	1.99
$\sigma \text{ max}$	9.36	9.38
$\sigma \text{ min}$	3.42	3.41

## CAPÍTULO 5: LOSAS MACIZAS

### 5.1 Descripción

La aplicación correspondiente al diseño de losas macizas posee cinco hojas de cálculo. La primera llamada PRESENTACIÓN contiene indicaciones básicas para el uso apropiado de las hojas de cálculo. La segunda hoja M. COEFICIENTES corresponde al diseño de losas rectangulares bajo el método de los coeficientes de la norma E.060. La tercera hoja L. ROTURA RECT corresponde al método de líneas de fluencia o rotura aplicado solamente a losas rectangulares apoyadas en los bordes. Estas dos hojas nos permiten comparar los diseños de ambos métodos para las mismas solicitaciones. La cuarta hoja L. ROTURA GENERAL corresponde al método de líneas de rotura aplicado a un rango más general de losas, que incluyen losas convexas e irregulares de tres hasta quince lados, con la posibilidad de tener lados libres, es decir, lados que no están apoyados en una viga o muro. La quinta hoja “Auxiliar” contiene la tabla de coeficientes usados en el Método de Coeficientes y datos del refuerzo de acero, en caso el usuario desee revisarlos.

#### 5.1.1 Método de coeficientes

La hoja de cálculo COEFICIENTES permite el diseño de losas macizas rectangulares apoyadas en sus bordes según el Método de Coeficientes desarrollado en la norma E.060. Los datos de entrada son verificados para cumplir con las suposiciones iniciales necesarias para aplicar el método. La interface del programa resulta intuitiva para el usuario, que solo debe modificar las celdas sombreadas de azul mientras el programa determina si el diseño es satisfactorio o no.

La hoja se divide en tres sectores: datos de entrada, diseño y desarrollo. El usuario solo puede interactuar con el programa en los dos primeros sectores, el sector “Desarrollo” solo presenta los pasos intermedios del procedimiento para fines informativos. El usuario escoge si cada lado de la losa es apoyado o empotrado y el programa reconoce automáticamente a que caso de las tablas de coeficiente corresponde y se encarga de su correcta orientación. Los coeficientes se obtienen mediante interpolación lineal de los coeficientes dados en la norma.

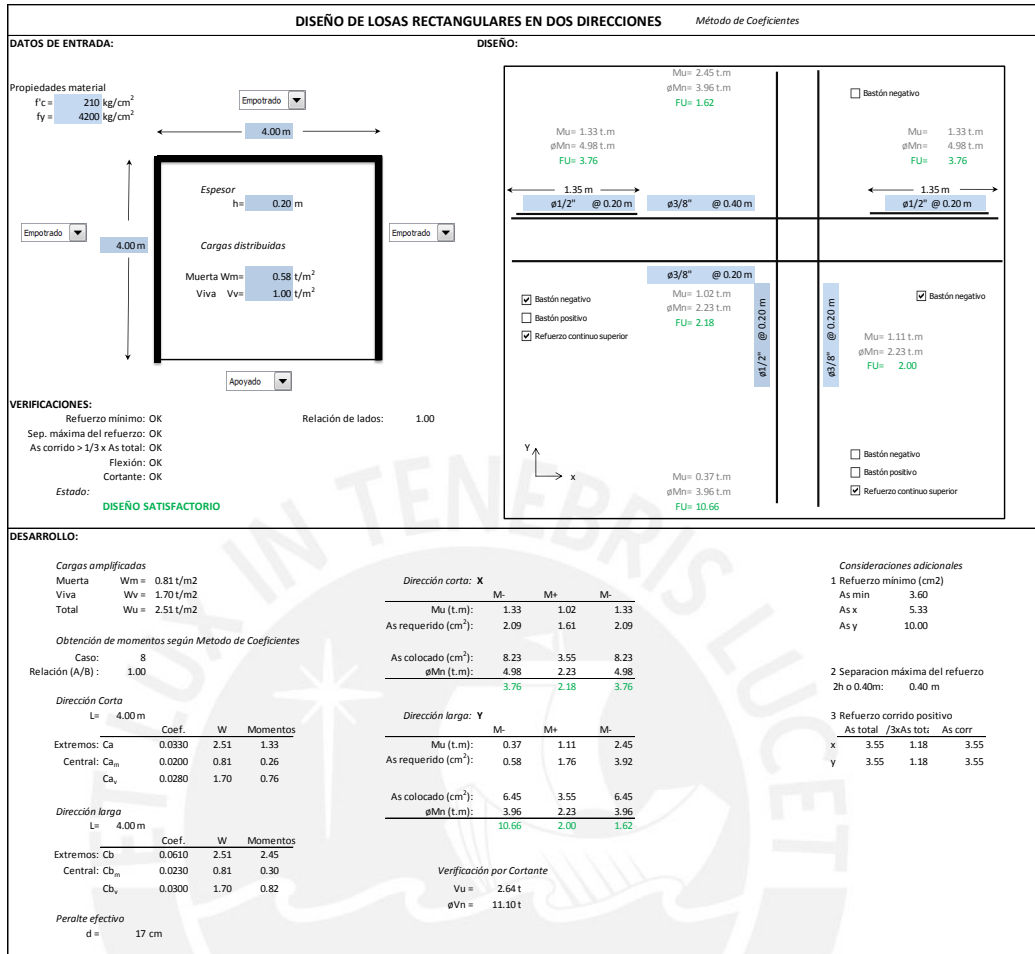


Figura 5-1 Hoja de cálculo para diseño de losas macizas en dos direcciones usando el Método de los Coeficientes

La hoja permite al usuario colocar directamente la distribución de las barras de refuerzo en la losa en ambas direcciones. Se evalúa en todo momento todos los requerimientos para el diseño tales como el refuerzo mínimo, separación máxima de barras, etc. Asimismo, se verifica siempre que los momentos y cortantes requeridos son menores a los resistentes en todas las secciones de la losa.

### 5.1.2 Líneas de fluencia para losas rectangulares

Esta hoja de cálculo permite el diseño de losas macizas rectangulares mediante el método de líneas de fluencia. Es similar a la hoja de cálculo “Coeficientes” en la interface y los alcances de aplicación excepto que no hay límites con la relación de lados ni con la relación de carga viva y muerta.

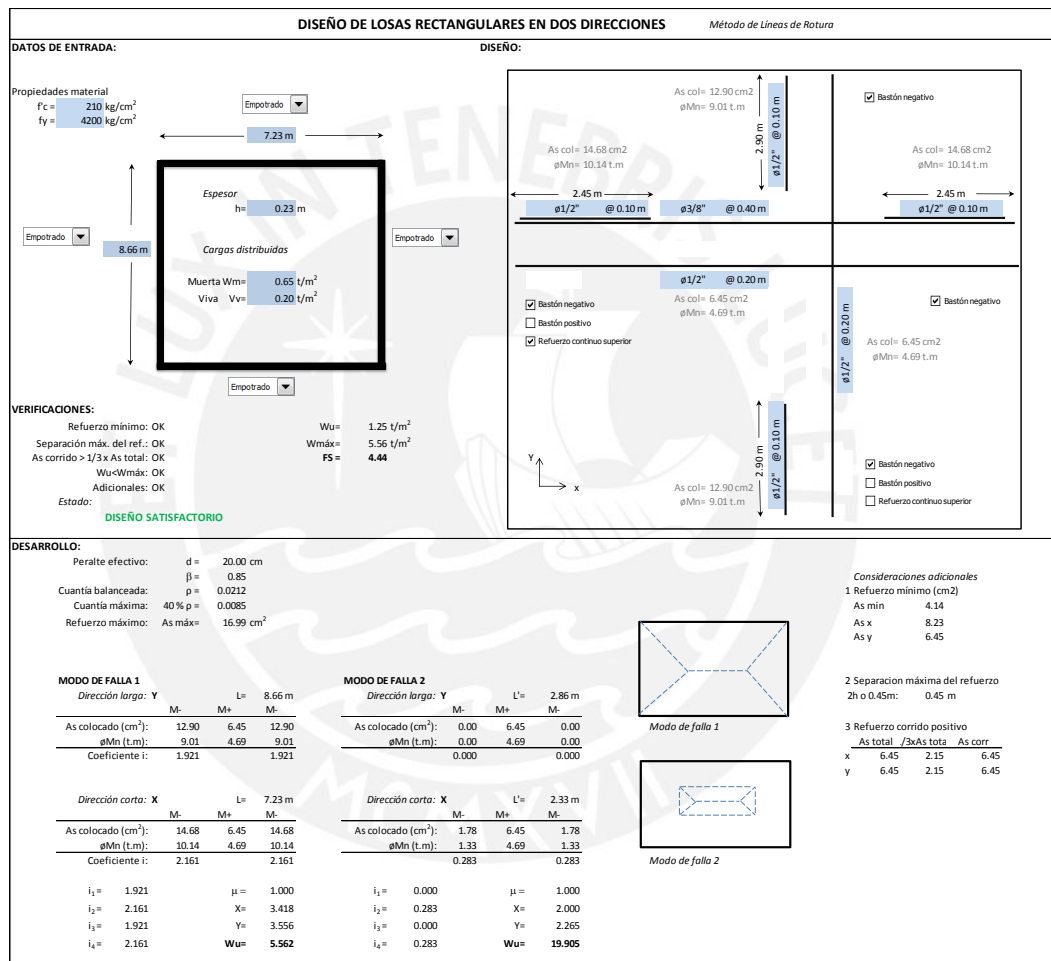


Figura 5-2 Hoja de Cálculo para Diseño de Losas Macizas en dos direcciones usando el Método de Líneas de Fluencia o Rotura.

Las ecuaciones se calculan en base a los momentos resistentes y la geometría de la losa la carga máxima que la losa puede soportar, que debe ser mayor que la carga distribuida total amplificada aplicada a la losa. El cociente de esos dos valores nos da el factor de seguridad real de la losa frente al agotamiento por flexión.

Con el objetivo de evitar una fisuración excesiva, se recomienda que el cociente del momento resistente negativo entre el momento resistente positivo sea similar al de una distribución de momentos elástica, luego este cociente puede ser de 1.5 a 2 (Park & Gamble, 1987).

A diferencia del método de coeficientes o cualquier otro método elástico, el método de líneas de fluencia exige que se verifique la cuantía máxima necesaria no solo para obtener fallas dúctiles a flexión sino también para que esta ductilidad sea la suficiente para que se desarrollen los patrones de líneas de fluencia. Las líneas de fluencia, que son rótulas plásticas a lo largo de una longitud, deben tener una capacidad de rotación suficiente para poder redistribuir momentos. De forma simplificada, se asume que la capacidad de rotación de una sección es suficiente si se limita la cuantía a un máximo de 40% de la cuantía balanceada (Park & Gamble, 1987).

### 5.1.3 Líneas de fluencia para losas de geometría general

La interface del programa de Líneas de Fluencia es la más simple de todos los programas realizados en el presente trabajo. Consiste en dos sectores: Datos de entrada y Resultados. En los Datos de Entrada el usuario ingresa las coordenadas de los vértices que forman la losa. Estas coordenadas deben ser ingresadas en orden de manera que dibujen el polígono en sentido antihorario. El usuario indica también el valor de los momentos resistentes tanto positivos como negativos, así también indica si los lados son libres o apoyados. Un lado simplemente apoyado tendrá como momento resistente el valor de cero.

En el sector de Resultados se muestra una gráfica de la losa y de los patrones de las líneas de fluencia. Se muestra también el valor de la carga distribuida de colapso en toneladas por metro cuadrado. El programa se ejecuta cuando el usuario presiona el botón "Calcular" (una vez que termine de ingresar los datos de entrada) ubicado en este sector.

Es indispensable para el adecuado funcionamiento de programa que se instale una extensión del Excel llamada *Solver*. Las instrucciones para la instalación y otras configuraciones se encuentran en la hoja de ayuda del mismo archivo.

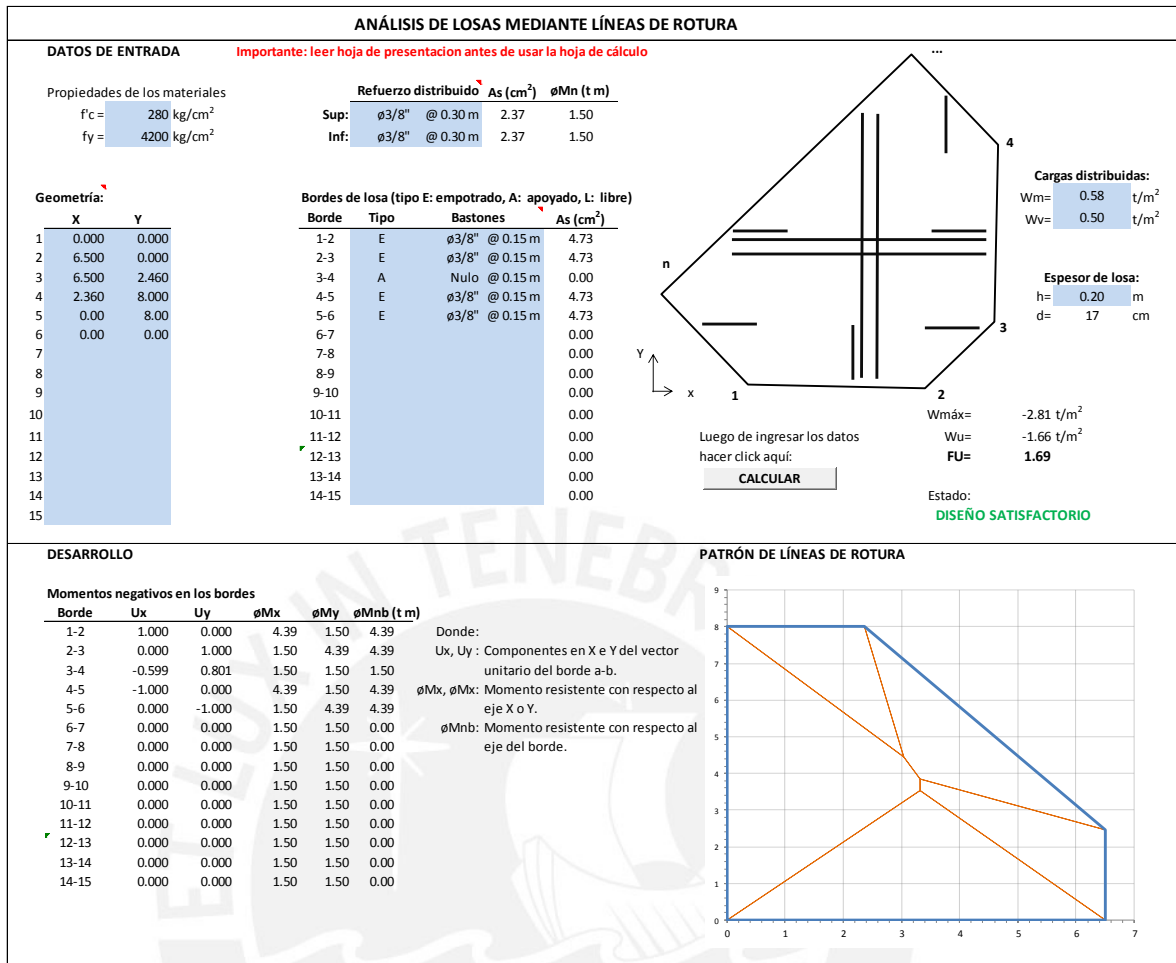


Figura 5-3 Hoja de Cálculo para Diseño de Losas Macizas en dos direcciones usando el Método de Líneas de Fluencia o Rotura para geometrías generales.

## 5.2 Sustento teórico

Si definimos a una estructura como un sistema de transmisión de cargas que empieza desde los puntos de aplicación de estas y termina en la cimentación, entonces podemos afirmar que para el caso de una edificación de concreto armado, las losas son el primer frente de todo el trayecto de cargas. Las cargas vivas de una edificación, que representan el peso de las personas, muebles u otros objetos que permiten que la edificación cumpla su función, se aplican directamente sobre las losas. Asimismo el peso propio de la edificación se concentra mayormente en las losas, y esto ocasiona que la fuerza de inercia proveniente de los sismos sea aplicada en allí también. Las losas se encargan de transferir estas cargas al siguiente nivel en el sistema de transmisión de cargas, que pueden ser vigas, muros o columnas.

Según el comportamiento estructural de las losas, estas se pueden clasificar en dos tipos: losas planas o losas sin vigas, y losas apoyadas en vigas o muros en sus bordes. Las losas planas se apoyan directamente sobre columnas, y se caracteriza por tener una concentración alta de esfuerzos cortantes alrededor de estas, razón por la cuál es usual la presencia de ábacos o capiteles en la conexión columna-losa.

Con respecto a las losas apoyadas en vigas o muros en sus bordes se puede realizar una sub-clasificación que depende de la relación entre la longitud de sus lados y los apoyos en sus bordes. Si asumimos que la losa tiene forma rectangular en planta, esta trabaja en una dirección si está apoyada en dos bordes opuestos, o si está apoyada en los cuatro bordes pero la longitud del borde mayor es mayor que el doble del borde menor. En este caso el procedimiento de análisis es igual al de una viga cuya luz es la longitud del lado menor de la losa.

Una losa trabaja en dos direcciones si la longitud de lado mayor es aproximadamente menor que el doble del lado menor, y además está apoyada en más de dos de sus bordes. En este caso se obtienen momentos significativos en ambas direcciones ortogonales. Las losas en dos direcciones transmiten de manera más eficiente las cargas, se obtiene momentos y deflexiones más pequeños. El análisis de este tipo de losas es más complejo que el caso de una sola dirección. Diferentes métodos de análisis se han desarrollado para el diseño de este tipo de losas. Debido a la complejidad del problema se escogen métodos simplificados.

### 5.2.1 Métodos de análisis

A través de la historia reciente se han desarrollado varios métodos de análisis y diseño para losas de concreto reforzado. Estos métodos se basan tanto en análisis elásticos como en análisis plásticos.

Dentro de los análisis elásticos podemos mencionar el método de los elementos finitos, que en la actualidad es fácil de realizar debido a la popularidad de los programas de computadora. El método de los coeficientes también se basa en análisis elásticos, pero solo es aplicable a losas apoyadas en sus bordes ya sea por muros o vigas peraltadas. El método directo y el método del pórtico equivalente también pertenecen a este grupo, y pueden abarcar los casos de losas sin vigas.

Un análisis plástico tiene la principal ventaja de tomar en consideración la redistribución de momentos y cortantes, por lo que se toma en cuenta la reserva de resistencia que es ignorada en los análisis elásticos, por lo que se obtienen diseños más económicos. Los métodos basados en un análisis plástico pueden ser de límite inferior o de límite superior. El método de las franjas (Hillerbor) es un ejemplo de uno de límite inferior, donde se asegura que la carga real de colapso es superior al calculado mediante el método, por lo tanto da resultados conservadores. El método de líneas de fluencia o de rotura (Johansen) es un método de límite superior, donde la carga real de colapso no puede ser mayor a la calculada por el método.

Para los alcances del presente trabajo se eligió un método basado en un análisis elástico y uno plástico para luego poder comparar el diseño resultante de ambos métodos. Como método de análisis elástico se escogió el Método de los coeficientes, basado en la sección 13.7 de la norma E.060. Como método de análisis plástico se escogió el Método de líneas de fluencia o rotura. Independientemente del método de elegido para el análisis y diseño, la losa se debe comportar adecuadamente bajo cargas de servicio. Es primordial que las deflexiones y fisuración durante su vida útil estén dentro de los rangos aceptables.

### **5.2.2 Método de los coeficientes**

El método de los coeficientes es un procedimiento simplificado basado en un análisis elástico para calcular los momentos flectores tanto en los extremos como en el centro de la losa y en ambas direcciones. Se hacen uso de tablas de coeficientes que dependen de la relación entre los lados de la losa y de las condiciones de borde. Un borde empotrado representa a un paño de losa adyacente de geometría similar al paño analizado mientras que uno apoyado significa el límite de la losa.

Aunque los coeficientes se basan en análisis elásticos, también tienen en cuenta cierta redistribución inelástica hacia secciones cercanas, de manera que los momentos obtenidos por este método pueden resultar menores al momento elástico que se puede obtener mediante un análisis de elementos finitos.

El artículo 13.7.1 de la norma explica las características que debe tener la losa para ser analizada por este método. Las losas deben ser rectangulares apoyadas en sus cuatro bordes ya sea por muros o vigas con un peralte mínimo de  $1/15$  de la luz libre o 1.5 veces

el espesor de la losa. La losa debe comportarse en dos direcciones por lo tanto el lado mayor no debe ser mayor que el doble del lado menor. Los bordes continuos deben tener poca rotación para que sean representados adecuadamente como bordes empotrados, por tanto la longitud de los paños adyacentes en cualquier dirección no deben diferir en más de 1/3 de la luz mayor. Por último todas las cargas deben ser de gravedad y estar uniformemente distribuida en toda el área del paño, y a carga viva no debe exceder del doble de la muerta.

El método reconoce dos tipos de franjas en cada dirección de la losa. Una franja central cuyo ancho es el 50% del ancho total, y dos franjas laterales que ocupan el 25% del ancho total cada una. El cálculo del valor de los momentos por unidad de longitud tanto positivos en el centro como negativos en los extremos de la franja central se realiza mediante las ecuaciones 5.1 y 5.2.

$$M_a = C_a w l_a^2 \quad \dots ec. 5.1$$

$$M_b = C_b w l_b^2 \quad \dots ec. 5.2$$

- $L_a$ : luz libre en la dirección corta
- $L_b$ : luz libre en la dirección larga
- $M_a$ : momento en la dirección corta
- $M_b$ : momento en la dirección larga
- $C_a$  y  $C_b$ : coeficientes que se obtienen en las tablas de la norma.
- $w$ : carga uniformemente repartida por unidad de área.

Los coeficientes  $C_a$  y  $C_b$  se encuentran en tres tablas de la norma E.060 y dependen de la relación de los lados y de la combinación de bordes apoyados o empotrados.

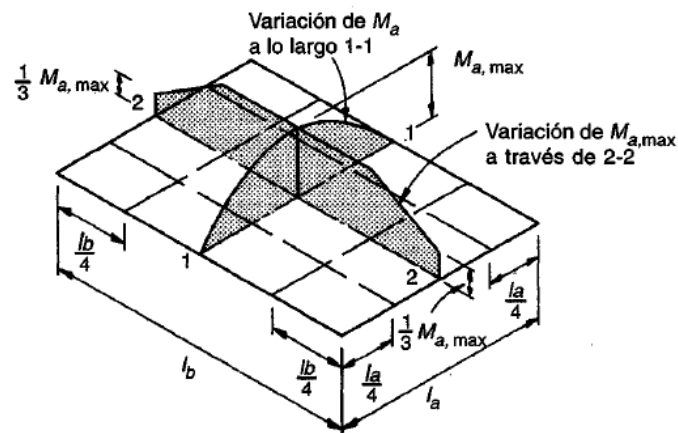


Figura 5-4 Variación de momentos a través del ancho de las secciones críticas supuestas para el diseño (Nilson, 1999).

Con respecto a las franjas laterales, se asume que su valor de momento varía desde el máximo obtenido en la franja central hasta un tercio de esta en el extremo de la losa, ver figura 5-4.

Un extremo apoyado representa en realidad una viga de borde o un muro perimetral, ya sea por la rigidez a la torsión de la viga o a la flexión en el muro, se desarrolla un momento negativo pequeño en ese borde. La norma indica que el valor de ese momento es un tercio de momento positivo al centro del tramo de la dirección correspondiente.

Para el cálculo de la fuerza cortante en la losa la norma nos da la ecuación 5.3 tomando en cuenta que la distancia crítica se encuentra a  $d$  (peralte efectivo) de la cara de apoyo.

$$V = w \left( \frac{l_a}{2} - d \right) \left( 1 - 0.5 \frac{l_a}{l_b} \right) \dots \text{ec. 5.3}$$

### 5.2.3 Método de líneas de fluencia o rotura

La forma de diseño actual de concreto armado, el diseño por resistencia, presenta importantes ventajas con respecto a la forma de diseño de esfuerzos admisibles. Sin embargo, el diseño por resistencia aún presenta inconvenientes que deben ser evaluados y resueltos. Uno de ellos es el hecho de usar un análisis lineal-elástico para obtener solicitaciones a nivel de resistencia. El análisis lineal-elástico representa bien lo que sucede en la estructura a nivel de servicio, sin embargo, cuando las cargas aumentan y acercan a sus materiales a su esfuerzo de falla, la relación esfuerzo-deformación del concreto y el acero dejan de ser lineal-elástica y las secciones fisuradas reducen la rigidez a la flexión de los elementos estructurales. Esto ocasiona que las fuerzas internas se distribuyan de manera distinta al indicado por el análisis lineal-elástico.

Por otro lado, en el caso de las vigas, columnas y las losas, la falla a flexión de una sección en particular no produce el colapso total de la estructura. La hiperestaticidad típica en elementos de concreto armado hace que sea necesario un mecanismo de colapso, donde varias secciones deben fallar y producir rótulas plásticas con capacidad suficiente de rotación para que recién se produzca el colapso total. Para el caso de las vigas, se tiene una teoría de análisis límite donde se toma en cuenta la formación de rótulas plásticas y la redistribución de momentos para calcular la carga última de colapso. Esta es una aproximación más realista de la capacidad verdadera de la estructura, toma

en cuenta una reserva de resistencia que es ignorada en el análisis lineal-elástico y conlleva a diseños más económicos.

En el caso de losas macizas se tiene una teoría análoga a la del análisis límite en vigas, esta teoría es la de Líneas de Rotura o Líneas de fluencia. En este caso, las rótulas plásticas no son puntuales como en las vigas (puntuales en teoría, en realidad las rótulas plásticas tiene una longitud determinada), sino son líneas rectas que atraviesan la superficie de la losa o los bordes de esta (en caso de bordes continuos). Estas líneas de fluencia forman un patrón en la superficie de la losa que depende de la geometría de la losa, de si los bordes son apoyados, libres o continuos, y de las resistencias a flexión nominales de las secciones transversales. Las características geométricas de este patrón están asociadas a una carga última de colapso. El objetivo del método es encontrar el patrón de líneas de fluencia que resulte en el mínimo valor de esta carga. Debido a que generalmente las cuantías de refuerzo en losas son pequeñas, se asume que las secciones tienen la capacidad de rotación suficiente para redistribuir momentos. Asimismo se usa un modelo bilineal para la gráfica momento curvatura de las secciones.

Según la teoría de la plasticidad, el método de líneas de rotura o fluencia da como resultado un límite superior de carga de colapso, lo que quiere decir que la carga real puede ser menor que el valor calculado por este método. Esto puede ser indeseable para un método de diseño ya que siempre se prefiere tener resultados conservadores, que estén de lado de la seguridad. Sin embargo, si se tiene especial cuidado en investigar los patrones de líneas correctos, los resultados obtenidos por este método pueden ser confiables.

En el método de líneas de fluencia o rotura se trabaja a nivel de resistencia, por lo tanto de debe verificar adicionalmente los estados límite de servicio tales como deflexiones, fisuración o vibraciones.

#### **5.2.4 Patrones de líneas de fluencia**

Se tiene una losa maciza simplemente apoyada en sus cuatro bordes con una carga distribuida constante  $w$  en toda su superficie. Cuando la carga  $w$  alcance la carga límite o de colapso, se habrán formado fisuras en la superficie inferior de la losa. Estas fisuras revelan la ubicación de las secciones de losa cuya capacidad resistente a flexión ha sido agotada y se han formado rótulas plásticas. Estas zonas fisuradas se idealizan como

segmentos de recta, y cada segmento se considera una intersección de dos porciones de losa. Cada una de estas porciones, a la que llamaremos cuerpos, se comporta como un sólido rígido que gira con respecto a un eje de rotación. Se observa que cada lado de la losa define un eje de rotación para cada cuerpo.

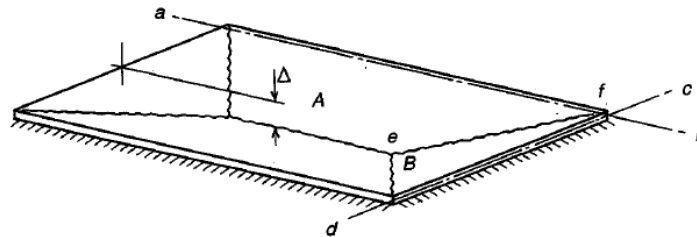


Figura 5-5 Patrón de líneas de fluencia para losa rectangular apoyada en sus cuatro bordes (Nilson, 1999).

Es posible asumir que cada cuerpo de losa se comporta como un sólido rígido debido a que sus deformaciones elásticas pueden ser despreciadas en el cálculo por ser muy pequeñas en comparación con las deformaciones inelásticas. Cada cuerpo se considera plano, por lo tanto las líneas de fluencia, al ser la intersección de dos planos, son siempre líneas rectas y además pasan por el punto de intersección de los ejes de rotación (o sus extensiones) de ambos cuerpos. Por lo tanto, en el caso de una losa sin bordes libres, siempre se tendrá una línea de fluencia que nace de cada vértice de la losa, ya que cada uno de estos vértices es una intersección de dos ejes de rotación de dos cuerpos adyacentes. Se deduce también que dos cuerpos cuyos ejes de rotación sean paralelos producirán una línea de fluencia paralela también a estos ejes, ya que su punto de intersección se encontrará en el infinito.

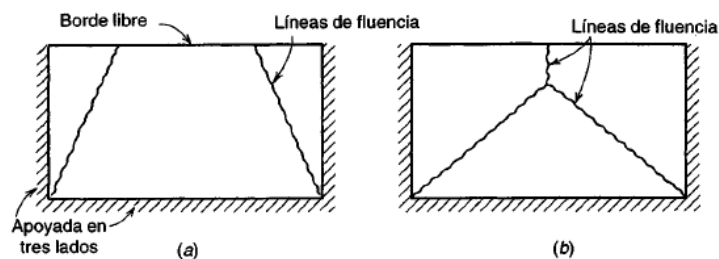


Figura 5-6 Patrones de líneas de fluencia para losa rectangular apoyada en tres bordes (Nilson, 1999).

Los lados apoyados de la losa no son los únicos lugares donde aparecen ejes de rotación. Si la losa se apoya en una columna sin vigas (un apoyo puntual), entonces un eje de rotación debe pasar por este apoyo.

### 5.2.5 Análisis mediante el método de trabajo virtual

Las características geométricas de cada patrón están asociadas a una determinada carga aplicada. Existen dos métodos para encontrar esta relación: el método de equilibrio de segmentos y el método del trabajo virtual. Se eligió el método del trabajo virtual para ser usado en el programa debido a su fácil sistematización, como se explicará en más adelante.

El método del trabajo virtual consiste en asumir un desplazamiento arbitrario ficticio en los cuerpos de la losa. El trabajo externo producido por las cargas para provocar ese desplazamiento debe ser igual al trabajo interno producido por las líneas de fluencia (que son rótulas plásticas) a medida que cada cuerpo gira con respecto a su eje de rotación. Al igualar ambas expresiones se despeja la incógnita  $w$ , que es la carga aplicada.

Para el cálculo del trabajo externo, se multiplica la carga aplicada (que es considerada constante) por el desplazamiento virtual ocurrido en el punto de aplicación de la carga. Si se tiene una carga distribuida, el trabajo externo sería el producto de la resultante por el desplazamiento en el punto de aplicación de esta resultante.

El trabajo interno es la sumatoria de los productos de los momentos resistentes por las rotaciones de cada línea de fluencia. Debido a que los momentos resistentes se dan por metro lineal, se debe multiplicar estos valores por la longitud de la línea de fluencia.

Es importante recalcar que una vez calculada la carga aplicada, este no necesariamente representa la carga de colapso. Se debe variar la geometría del patrón de líneas de fluencia y calcular nuevos valores de carga aplicada hasta encontrar la carga de menor magnitud, esta carga sí correspondería a la carga de colapso. Se observa que este es un procedimiento de optimización y es trabajoso realizarlo manualmente, es por esto que un programa de computadora es necesario.

En la sección de algoritmos se explicará a detalle de qué manera fueron calculados los trabajos internos y externos para el programa. Asimismo se explicará cómo el programa dibuja las líneas de fluencia en función de las rotaciones de cada cuerpo.

### 5.3 Principales algoritmos

#### 5.3.1 Diseño de losas por Método de Coeficientes

En esta hoja de cálculo no se desarrolló un algoritmo relevante

#### 5.3.2 Líneas de Fluencia en losas rectangulares

Esta hoja de cálculo usa funciones simples de Excel con algunas líneas de código de VBA para la interface. Se utilizó la ecuación 5.4 que nos permite calcular la carga distribuida máxima para una losa rectangular apoyada en sus cuatro bordes de forma directa. Esta ecuación se deduce mediante equilibrio en cada cuerpo, su demostración se puede encontrar en el libro *Losas de Concreto Reforzado* de los autores Park y Gamble.

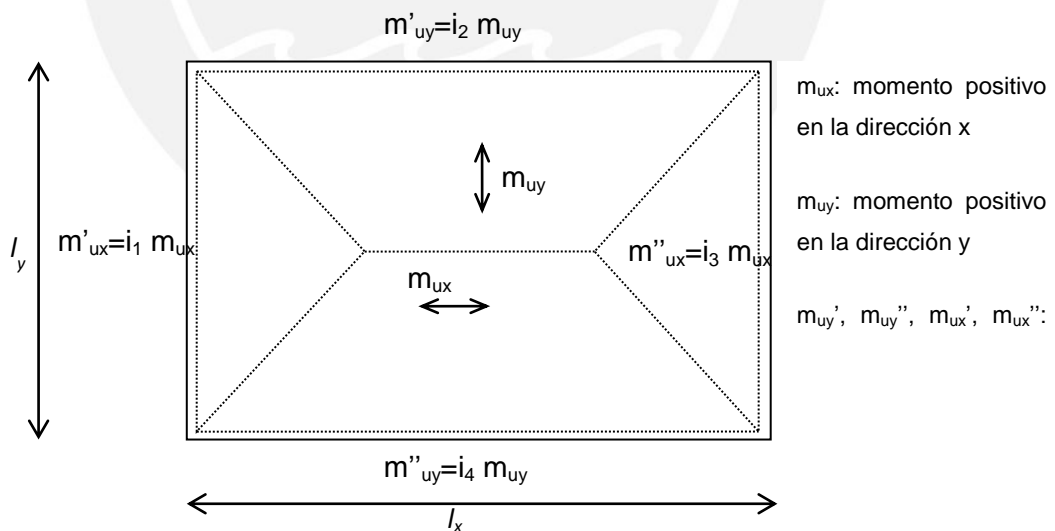


Figura 5-7 Líneas de fluencia de una losa rectangular (Park & Gamble, 1987)

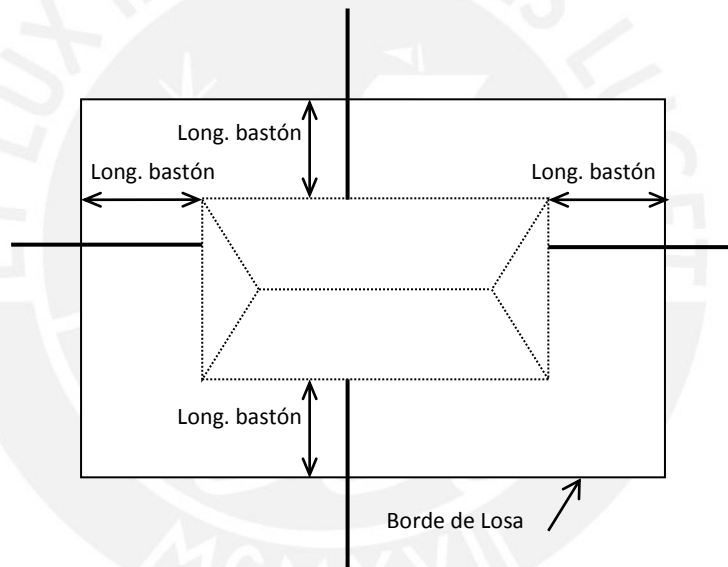
$$W_u = \frac{6 m_{uy} \mu Y^2}{l_y^2 (l_y/l_x)^2 \left\{ \left[ (X/Y)^2 + 3 \mu (l_x/l_y)^2 \right]^{1/2} - (X/Y) \right\}^2} \quad \dots ec. 5.4$$

$$\mu = m_{uy}/m_{ux}$$

$$X = \sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_3}$$

$$Y = \sqrt{1 + i_2} + \sqrt{1 + i_4}$$

La presencia de bastones negativos obliga a considerar un segundo modo de falla, igual al caso que cubre la ecuación 5.4, pero los lados de la losa son definidos por la longitud de los bastones (ver figura 5-8). La hoja de cálculo considera también este modo de falla.



**Figura 5-8 Patrón alternativo de líneas de fluencia para losa rectangular con bastones negativos**

La ecuación 5.4 funciona para un refuerzo distribuido homogéneo en cada dirección, por lo que no admite la presencia de bastones positivos. Además la presencia de estos conllevaría a considerar un tercer modo de falla, donde las líneas de fluencia positivas coinciden con los límites de estos bastones.

### 5.3.3 Líneas de fluencia en losas con geometría general

Se elaboró un programa que calcula la carga última distribuida que una losa puede soportar según el método de líneas de fluencia. A diferencia de la hoja de cálculo anterior, este programa no se limita a losas rectangulares sino que abarca también losas de tres hasta quince lados que sean convexas (sin esquinas entrantes). Además considera lados libres, es decir, que no están apoyados en vigas ni muros.

El programa principal es una función madre, que anida a varias sub funciones que se encargan de distintas tareas. Los datos de entrada de esta función madre son las coordenadas del perímetro de la losa, los momentos resistentes positivos en el centro y negativos en los lados, la naturaleza de los lados de la losa (si es apoyada o libre) y las rotaciones de cada cuerpo de la losa. La función madre procesa todos estos datos y obtiene como salida la carga distribuida última.

Mediante esta función madre, cada combinación de valores de rotaciones de cuerpos nos da un patrón distinto de líneas de fluencia, y una carga distribuida última relacionada con ese patrón. Por lo tanto se debe buscar la combinación correcta de rotaciones que nos dé el valor de carga distribuida mínima. Este problema se convierte por lo tanto en un problema de optimización de una función objetivo.

Existe una extensión del Excel llamada *Solver* que se encarga de resolver ecuaciones lineales y no lineales mediante un procedimiento iterativo, este programa también tiene la capacidad de optimizar funciones bajo ciertas opciones que el usuario puede modificar. Utilizaremos la extensión *Solver* para optimizar la función madre y así obtener la carga distribuida mínima de la losa.

El programa solo admite un valor de momento resistente positivo en toda el área de la losa en ambas direcciones, por lo tanto no admite la presencia de bastones positivos. Asimismo el programa no verifica modos de falla adicionales provocados por la presencia de bastones tanto positivos como negativos.

El programa *Solver* solo resuelve problemas de optimización local, que es suficiente para la mayoría de los casos típico de losas macizas, pero no para todos los casos.

### 5.3.4 La función madre

La función madre es la función principal de la hoja de cálculo y da como resultado la carga distribuida asociada con el patrón de líneas de fluencia resultante de las rotaciones dadas de cada cuerpo. La extensión *Solver* se encargará de optimizar esta función jugando con distintos valores de las rotaciones hasta encontrar aquella combinación que resulte en la carga distribuida mínima.

Los datos de entrada deben cumplir con algunas condiciones. El polígono que forma el perímetro de la losa es ingresado como una lista de coordenadas de los vértices. Estas coordenadas deben formar un polígono cerrado (el primer y el último punto deben ser iguales) y en sentido antihorario. El número mínimo de vértices es tres, y el máximo quince. Los valores de momentos resistentes deben ser ingresados con su respectivo signo, y un lado con momento resistente igual a cero es interpretado como un lado simplemente apoyado.

La figura 5-9 muestra un esquema de las sub-funciones que conforman la Función Madre. De todo este procedimiento podemos agrupar a dos pasos esenciales. El primero es la obtención del patrón de líneas de fluencia a partir de las rotaciones de los cuerpos, y el segundo es el cálculo de la carga distribuida a partir de ese patrón.

El patrón de líneas de fluencia es formada por la geometría final de cada uno de los cuerpos. Se asume que cada lado de la losa es un eje de rotación de un plano infinito. La geometría de un cuerpo se forma cuando cada plano es limitado por las intersecciones con los planos adyacentes, y por el eje mismo de rotación. La cantidad de lados que un cuerpo puede tener dependerá de la rotación de este y de los cuerpos adyacentes, y será como mínimo tres y como máximo el número total de lados de la losa. Por lo tanto, el patrón de líneas de fluencia se obtendrá calculando primero todas las rectas de intersección de los planos en rotación, luego calculando todos los puntos de intersección de estas rectas y finalmente seleccionando qué puntos son los que forman la geometría de cada cuerpo.

El valor de carga distribuida se obtiene igualando el trabajo interno con el trabajo externo. Una vez se obtiene el patrón de líneas de fluencia, se calcula el trabajo interno y parte del trabajo externo, y una simple división nos da la carga distribuida final.

Varias de las ecuaciones relacionadas con el método de líneas de rotura fueron reescritas a forma vectorial o matricial. Las operaciones básicas para vectores y matrices fueron programadas manualmente ya que no se contaba con estas funciones predefinidas en el VBA. En las siguientes páginas se desarrollará de manera detallada todas las matemáticas necesarias para el funcionamiento del programa.

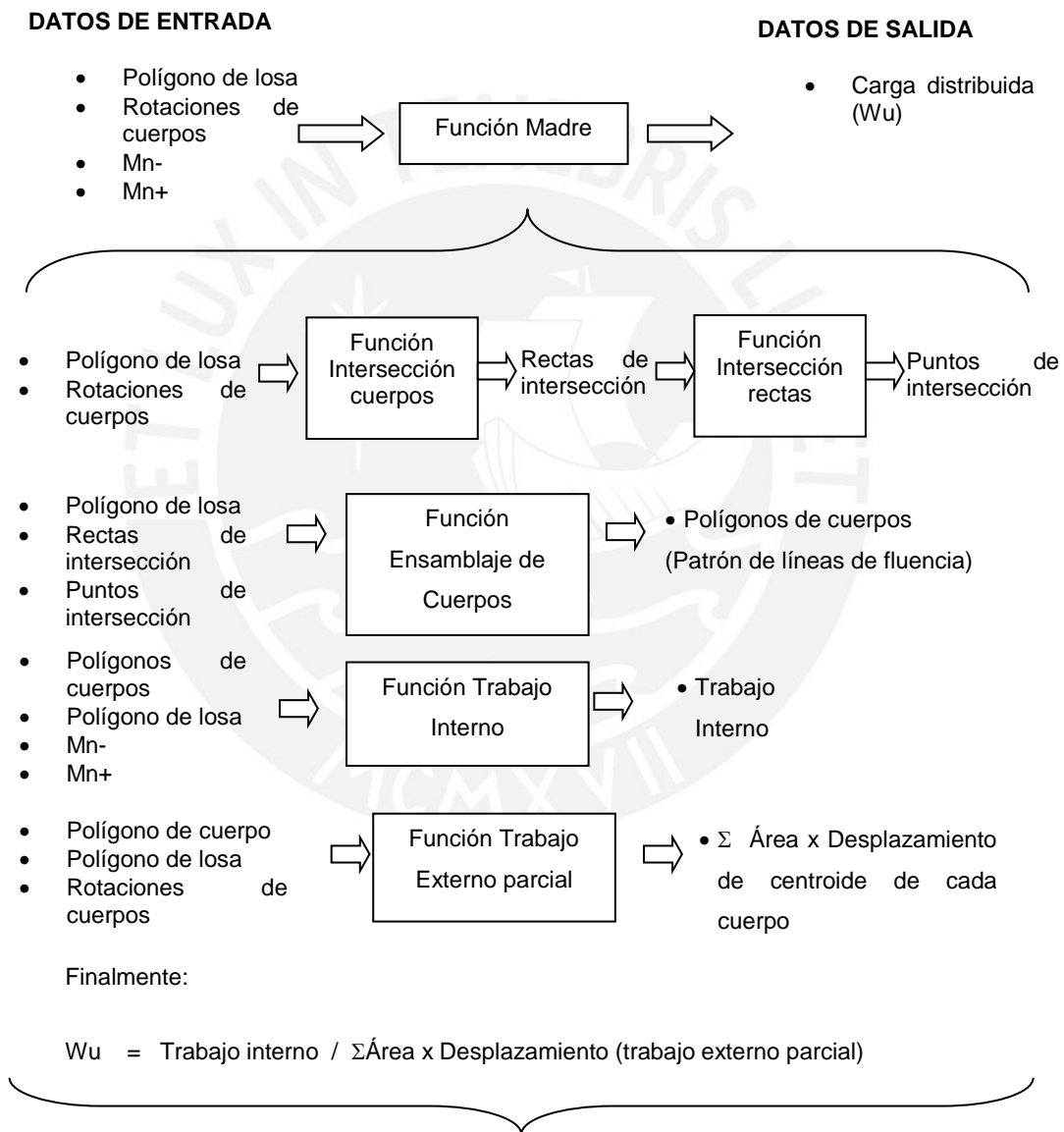


Figura 5-9 La función madre

### 5.3.5 Función intersección de cuerpos

El cálculo de las rectas de intersección de cuerpos es el primer paso para obtener el patrón de líneas de fluencia. A partir de los datos del polígono de la losa y las rotaciones de los cuerpos, esta función nos permite obtener las rectas de intersección de todas las combinaciones posibles de cuerpos.

Cada recta de intersección es definida mediante un vector unitario y un vector posición. Dado dos ejes de rotación de dos planos, se puede calcular la recta de intersección de ambos planos mediante las ecuaciones 5.5 y 5.6.

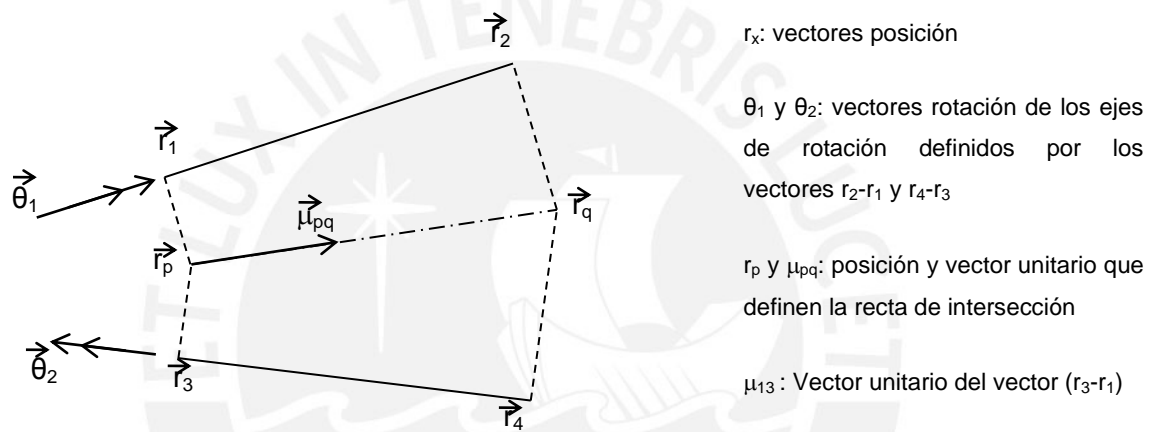


Figura 5-10 Esquema para encontrar la recta de intersección de dos planos (cuerpos) que rotan con respecto a un eje.

$$\vec{r}_p = \vec{r}_3 + \frac{\|\vec{\theta}_1 \times \vec{\mu}_{13}\|}{\|(\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_2) \times \vec{\mu}_{13}\|} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad \dots ec. 5.5$$

$$\vec{\mu}_{pq} = \frac{\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1}{\|\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1\|} \quad \dots ec. 5.6$$

Esta recta pasa por la intersección de los ejes de rotación o sus extensiones. Estas ecuaciones funcionan aún en casos de ejes paralelos o ejes que comparten un punto extremo.

Esta función además etiqueta las rectas de intersección según el par cuerpos de donde provienen. La etiqueta de los cuerpos se realiza en sentido antihorario.

### 5.3.6 Función intersección de rectas

Se calcula todos los puntos de intersección que existen a partir de todas las rectas. Los puntos son etiquetados en función a las rectas de donde provienen. Se demostró que las ecuaciones 5.7 o 5.8 permiten calcular el vector posición de la intersección de dos rectas.

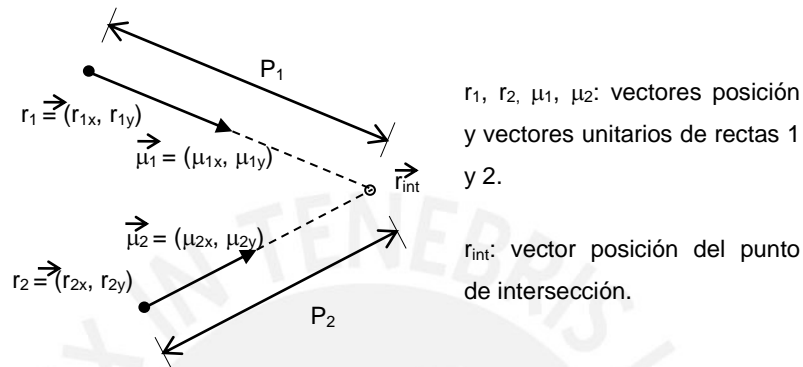


Figura 5-11 Esquema para encontrar el punto de intersección de dos rectas

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1x} - \mu_{2x} \\ \mu_{1y} - \mu_{2y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{2x} - r_{1x} \\ r_{2y} - r_{1y} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{int} = \vec{r}_1 + P_1 \vec{\mu}_1 \quad \dots ec.5.7$$

ó

$$\vec{r}_{int} = \vec{r}_2 + P_2 \vec{\mu}_2 \quad \dots ec.5.8$$

### 5.3.7 Función ensamblaje de cuerpos

Una vez se obtienen todos los puntos de intersección, el siguiente paso es seleccionar qué puntos son los que forman cada uno de los cuerpos del patrón de líneas de fluencia. Ya se sabe de antemano que los dos puntos extremos de cada lado de la losa pertenecen a su cuerpo correspondiente.

Para resolver este problema podemos imaginar que los cuerpos son planos infinitos delimitados por las intersecciones de otros planos adyacentes y por su propio eje de rotación (cada lado de la losa). Tomamos como ejemplo la losa rectangular de la figura 5-

12, cada uno de los cuerpos siempre se interseca con los tres cuerpos restantes, por lo tanto cada uno de ellos siempre tiene tres intersecciones. Sin embargo hay cuerpos que tienen cuatro lados (C1 y C3) y otros que tienen tres (C2 y C4), esto sucede porque los cuerpos que tienen tres lados tienen una recta de intersección escondida. Si se observa a la parte (b) de la figura 5-12 la recta de intersección resultante de los cuerpos C2 y C4 se encuentra debajo de los cuerpos C1 y C3 y por lo tanto está invisible y no forma parte del cuerpo C2. Al contrario en la parte (a) de la figura 5-12 todas las rectas de intersección son visibles para el cuerpo C1

Con respecto a los puntos de intersección, cada cuerpo tiene un total de tres puntos que son candidatos para ser parte de este. De forma similar a las rectas, se deben descartar los puntos que están escondidos, en la parte (a) un solo punto es el descartado por estar debajo del cuerpo C3 mientras que en la parte (b) son dos los puntos descartados por estar debajo de los cuerpos C1 y C3.

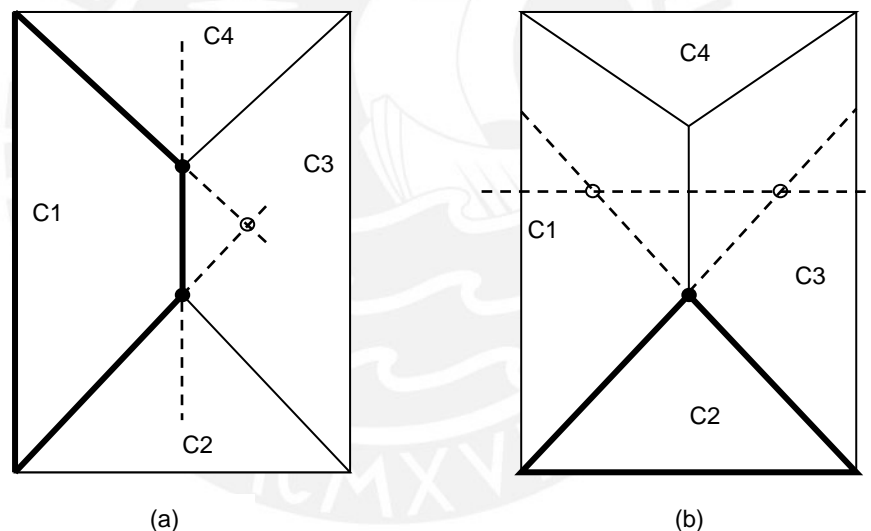


Figura 5-12 Definición de cuerpos en rotación

La función Ensamblaje de Cuerpos se encarga por lo tanto de seleccionar los puntos de intersección que no están escondidos debajo de otro cuerpo o que no estén fuera de la losa. Para realizar esto se sigue el procedimiento mostrado en la figura 5-13, donde se muestra la formación de un cuerpo de cinco lados. Se parte del lado de la losa que origina el cuerpo, sus dos puntos extremos automáticamente ya son partes del cuerpo ( $P_a$  y  $P_b$ ). Se inicia evaluando la recta de intersección con el cuerpo inmediatamente a la

derecha. Esta recta de intersección tiene cuatro puntos de intersección con otras rectas y son candidatos para formar parte del cuerpo. Si vas desde el punto  $P_b$  y sigues la dirección del vector unitario  $\mu_1$ , el primer punto con el que te encontrarías es el punto  $P_1$ , por lo tanto es este el punto elegido para formar parte del cuerpo, ya que todos los demás puntos detrás de él se encontrarían debajo de algún otro cuerpo. En el paso 2 ahora partes del punto que acabamos de elegir  $P_1$  y seguimos el vector unitario  $\mu_2$ , el primer punto que encontramos es el  $P_6$  por lo tanto este es el segundo punto elegido. Es importante indicar que los vectores unitarios siempre deben “girar hacia la izquierda” en cada paso. Los valores de estos vectores unitarios no son otra cosa que los vectores unitarios de las rectas de intersección que ya han sido obtenidas anteriormente, solo se debe tener cuidado que el sentido sea el correcto. Se repite este proceso hasta que se encuentra a  $P_a$ , que es el último punto.

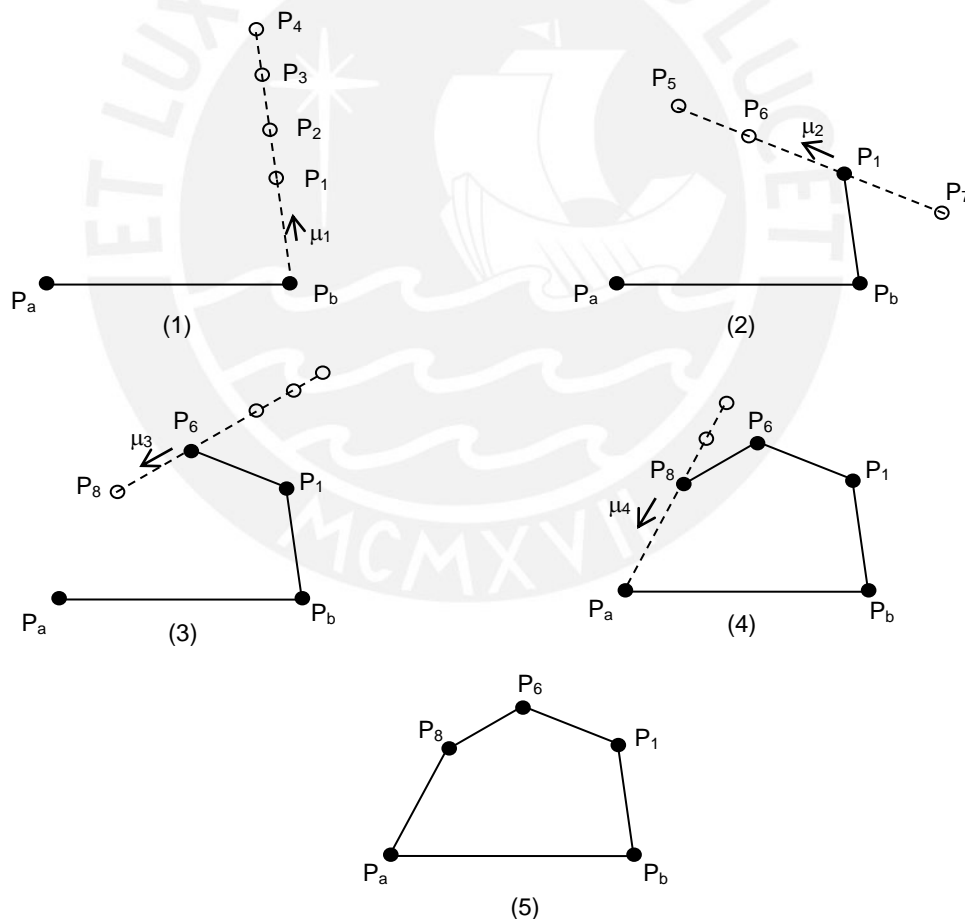


Figura 5-13 Procedimiento para seleccionar los puntos que serán parte de cada cuerpo

Se realiza este procedimiento para obtener la geometría de cada uno de los cuerpos de la losa, al final todos estos cuerpos deben encajar como un rompecabezas y formar la geometría total de la losa maciza.

### 5.3.8 Función trabajo Interno

Una vez obtenidos la geometría de los cuerpos de la losa maciza, es posible calcular el trabajo interno ocasionado por las rotaciones de los cuerpos. La ecuación 5.9 muestra el cálculo del trabajo interno en forma vectorial para un solo cuerpo. El valor de  $M_n$  es el momento resistente negativo en el primer lado, que es el eje de rotación o lado de la losa. En los demás lados del cuerpo (de  $i=2$  hasta  $n$ ) el valor de  $M_n$  corresponde al momento resistente positivo, que se considera igual tanto en la dirección X como en la Y. En caso se tengan momentos resistentes diferentes se puede escalar las coordenadas Y del polígono de losa, de acuerdo con el teorema de la afinidad.

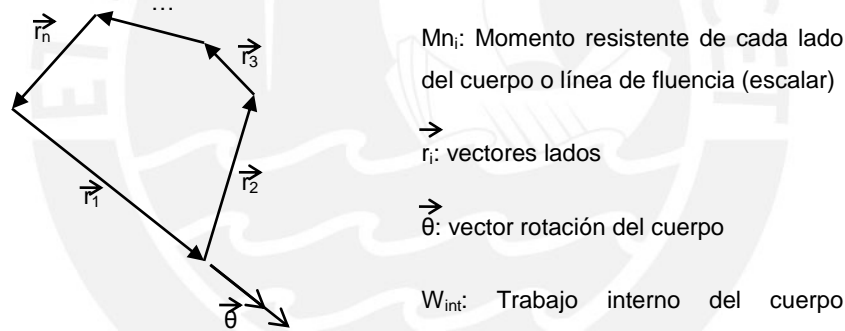


Figura 5-14 Esquema para calcular el trabajo interno de un cuerpo

$$W_{int} = \sum_{i=1}^n M_{n_i} \vec{r}_i \cdot \vec{\theta} \quad \dots ec. 5.9$$

El trabajo interno total es la sumatoria de los trabajos internos de cada uno de los cuerpos calculados con la ecuación 5.9.

### 5.3.9 Función trabajo externo parcial

El último paso del programa es igualar los trabajos externos e internos y despejar el valor de carga distribuida  $w$ . Una vez se calcula el trabajo interno, falta encargarse solo del

trabajo externo. El trabajo externo de total se calcula con la ecuación 5.11 siendo  $i$  el número de cuerpo y  $n$  la cantidad de cuerpos que existen en la losa (que es igual a la cantidad de lados de la losa).  $A_i$  es el área de cada cuerpo y  $d_i$  es el desplazamiento vertical del centroide de cada cuerpo provocado por su rotación. Igualando y despejando las ecuaciones se nota que lo único que falta para calcular el valor de  $w$  es la sumatoria del producto de las áreas por los desplazamientos de cada cuerpo; denominamos dicha sumatoria Trabajo externo parcial ya que solo falta la multiplicación por  $w$  para ser realmente el trabajo externo.

$$W_{Ext T} = W_{Int T} \quad \dots ec.5.10$$

$W_{Ext T}$ ,  $W_{Int T}$ : trabajo externo e interno total, suma de los trabajos de todos los cuerpos.

$$W_{Ext T} = \sum_{i=1}^n w A_i d_i \quad \dots ec.5.11$$

$w$ : carga distribuida uniforme

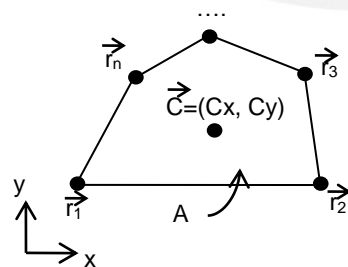
$$\sum_{i=1}^n w A_i d_i = W_{Int T} \quad \dots ec.5.12$$

$A_i$ : área del cuerpo  $i$

$$w = \frac{W_{Int T}}{\sum_{i=1}^n A_i d_i} \quad \dots ec.5.13$$

$d_i$ : desplazamiento vertical del centroide del cuerpo  $i$  debido a la rotación.

Es necesario para obtener el Trabajo Externo parcial ecuaciones que nos permitan calcular el área y el centroide de cada cuerpo de la losa. Se demostró que las ecuaciones 5.14, 5.15 y 5.16 nos permiten realizar esto a partir de las coordenadas de los vértices (vectores posición). El uso de la determinante de una matriz dentro de estas ecuaciones resulta del cálculo de la componente en  $z$  (perpendicular al plano de la losa) del producto vectorial ( $r_i \times r_{i+1}$ ). La sumatoria se debe incluir todos los lados del polígono, por lo que cuando se llega a  $i=n$ , entonces se debe cumplir que  $i+1=1$ . Estas ecuaciones que pueden resultar complejas para el cálculo manual resultan muy fáciles de programar.



$\vec{r}_i$ : vector posición de los vértices.

$\vec{A}$ : Área encerrada por el polígono

Figura 5-15 Esquema para calcular el centroide de cada cuerpo

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} r_{ix} & r_{iy} \\ r_{i+1x} & r_{i+1y} \end{vmatrix} \quad \dots ec.5.14$$

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \begin{vmatrix} r_{ix} & r_{iy} \\ r_{i+1x} & r_{i+1y} \end{vmatrix} \cdot (r_{ix} + r_{i+1x}) \right)}{6A} \quad \dots ec.5.15$$

$$C_y = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \begin{vmatrix} r_{ix} & r_{iy} \\ r_{i+1x} & r_{i+1y} \end{vmatrix} \cdot (r_{iy} + r_{i+1y}) \right)}{6A} \quad \dots ec.5.16$$

Una vez calculadas las áreas y centroides de los polígonos solo falta calcular el desplazamiento vertical del centroide del cuerpo debido a la rotación. El producto vectorial de la ecuación 5.17 nos permite obtener esto de manera sencilla.

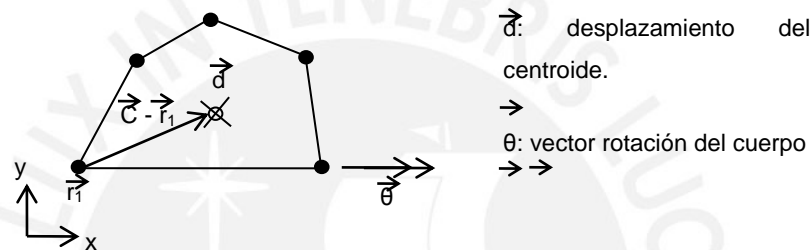


Figura 5-16 Esquema para calcular el desplazamiento vertical del centroide de un cuerpo en rotación.

$$\vec{d} = \vec{\theta} \times (\vec{C} - \vec{r}_1) \quad \dots ec.5.17$$

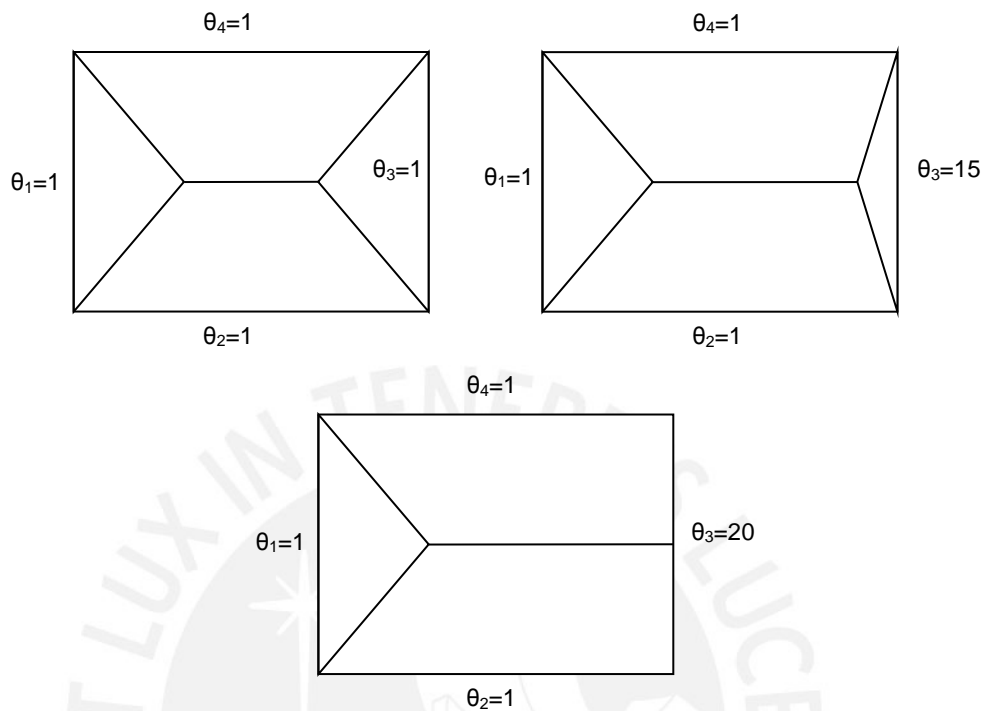
En conclusión, la función madre nos permite calcular la carga distribuida  $w$  asociada con un patrón de líneas de fluencia definido por una combinación de rotaciones de cada cuerpo. El programa optimización *Solver* usa esta función con diferentes valores de rotaciones una y otra vez hasta encontrar el mínimo valor posible de  $w$ .

### 5.3.10 Caso de lados o bordes libres

Para que el programa pueda resolver losas con uno o más lados libres, es decir sin apoyo de una viga peraltada o muro, se debe agregar consideraciones adicionales.

El cuerpo correspondiente al lado o borde libre no es eliminado, sino que se le asigna una rotación muy grande en comparación con los demás cuerpos. Cuando el programa dibuje

las líneas de fluencia, el área del polígono será cercana a cero, y la apariencia del patrón de líneas de fluencia será igual al correspondiente con un borde libre (ver figura 5-17).



**Figura 5-17 Esquema para considerar un borde libre**

Se debe tener cuidado que este cuerpo no aporte trabajo externo ni interno. Siendo el valor del área cercano a cero, aporta un trabajo externo insignificante. El programa debe además anular los valores de momentos resistentes tanto positivos como negativos de las líneas de fluencia de este cuerpo para que tampoco aporte trabajo interno alguno. Además, el programa debe anular los momentos resistentes positivos de los lados de los otros cuerpos adyacentes en contacto con el cuerpo originario de un borde libre.

Finalmente, el programa de optimización (*Solver*) no debe modificar el valor de rotación de este cuerpo, que ya ha sido definido como un valor muy grande en comparación con los demás. Este valor debe permanecer constante mientras el *Solver* juega con los valores de rotación de los cuerpos restantes para hallar el valor de mínimo de carga distribuida.

### 5.4 Verificaciones

En esta sección se realiza la verificación de los resultados de la hoja de cálculo del diseño de losas macizas mediante el método de líneas de fluencia para losas de geometría general. Se tiene una losa maciza rectangular con las características indicadas en la figura 5-18. Para calcular la carga distribuida última que la losa es capaz de soportar se utilizará la ecuación 5.4 y luego este resultado se comparará con el valor obtenido mediante la hoja de cálculo a verificar.

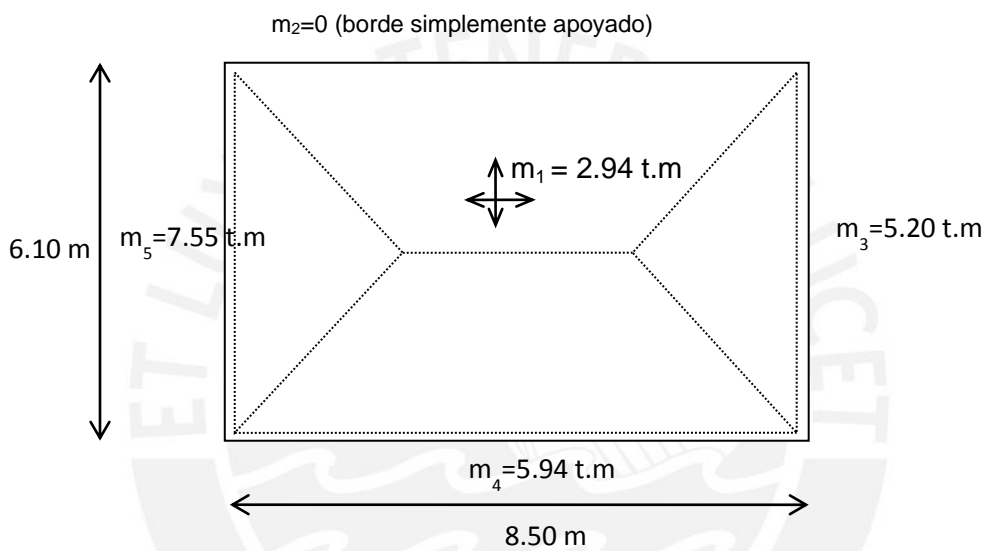


Figura 5-18 Losa rectangular para verificación

En primer lugar calculamos los valores de  $i$  (ver figura 5-7), los parámetros  $X$ ,  $Y$ ,  $\mu$ , para luego reemplazarlos en la ecuación 5.4.

$$i_1 = \frac{m_5}{m_1} = \frac{7.55}{2.94} = 2.5680$$

$$i_3 = \frac{m_3}{m_1} = \frac{5.20}{2.94} = 1.7687$$

$$i_2 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{0}{2.94} = 0$$

$$i_4 = \frac{m_4}{m_1} = \frac{5.94}{2.94} = 2.0204$$

$$X = \sqrt{1 + 2.5680} + \sqrt{1 + 1.7687} = 3.5529$$

$$Y = \sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 2.0204} = 2.7379$$

$$\mu = 1$$

$$W_u = \frac{6 \times 2.94 \times 2.7379^2}{6.10^2 \left(\frac{6.10}{8.50}\right)^2 \left\{ \left[\left(\frac{3.5529}{2.7379}\right)^2 + 3 \times 1 \times \left(\frac{8.50}{6.10}\right)^2\right]^{1/2} - \left(\frac{3.5529}{2.7379}\right) \right\}^2}$$

$$W_u = 3.32 \text{ t/m}^2$$

Resolviendo la misma losa usando la hoja de cálculo, acomodamos los refuerzos y el espesor de losa para obtener los mismos momentos resistentes de la figura 5-18. Se observa que la carga distribuida máxima es  $W_{m\acute{a}x} = -3.32 \text{ t/m}^2$  (ver figura 5-19) con lo cual queda verificada que funciona correctamente.

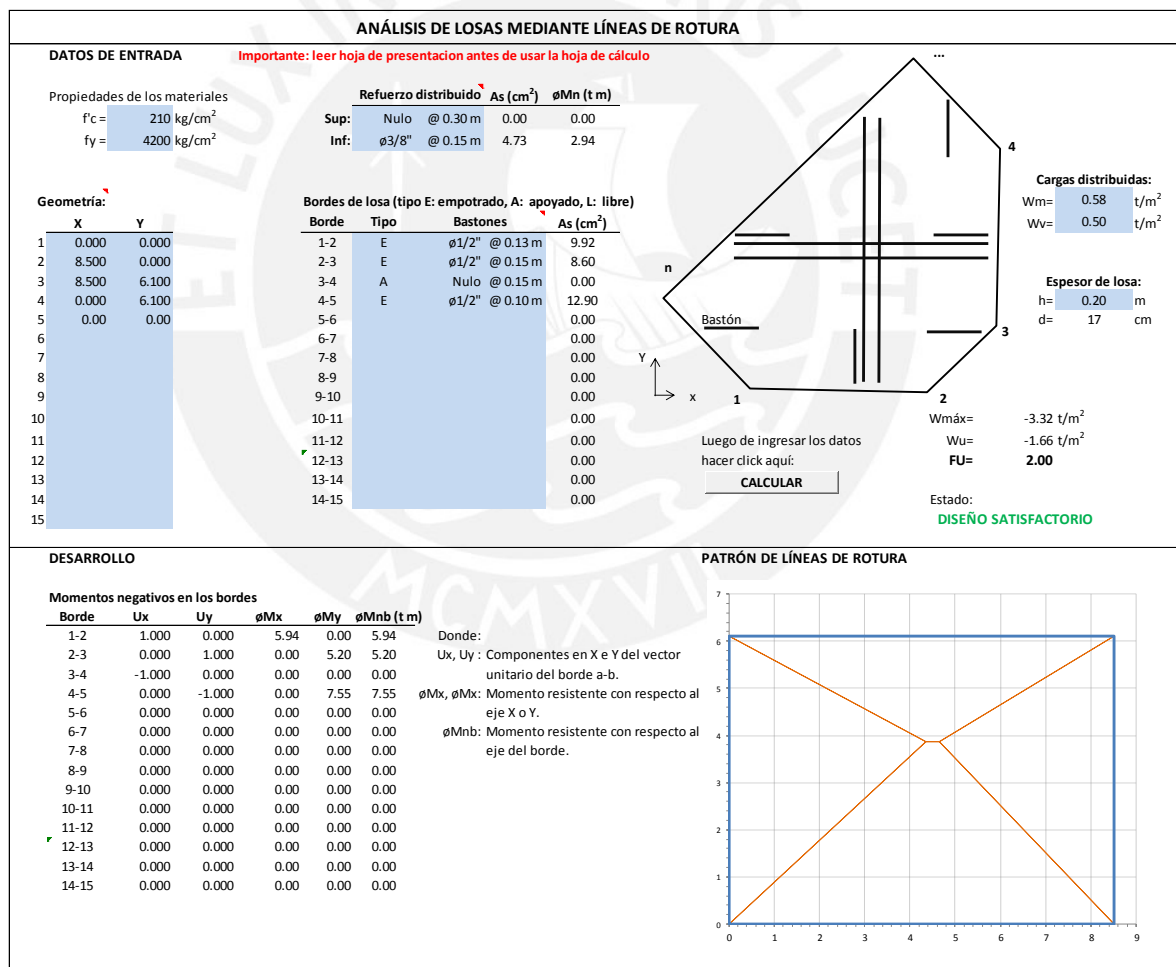


Figura 5-19 Cálculo de carga distribuida última según hoja de cálculo

## CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrollaron cuatro hojas de cálculo usando el programa MSEXcel y VBA (Visual Basic for Applications), cada una permite el diseño de los siguientes elementos estructurales: vigas continuas, muros de contención, muros de corte o placas y losas macizas. Se procuró que cada hoja de cálculo posea una interfaz amigable y que sea fácil de usar, así también que el diseño resultante cumpla con todos los requerimientos de las normas peruanas.

Las hojas de cálculo están diseñadas para que el usuario trabaje de manera rápida y notifiican claramente, mediante el uso de formatos condicionales, cuando un diseño no cumple con algún requerimiento de la norma.

El uso de software para diseño estructural permite que la parte iterativa del procedimiento de diseño se realice rápidamente. Dando más tiempo al diseñador para ocuparse de la parte creativa del procedimiento de diseño. El diseñador puede incrementar la cantidad de alternativas de solución a ser evaluadas, así también tendrá más tiempo para tomar mejores decisiones, tomando en cuenta otros factores que pueden ir más allá del área estructural.

## CAPÍTULO 7: BIBLIOGRAFÍA

- Beer, F., Johnston Jr, E., & DeWolf, J. (2004). *Mecánica de Materiales*. México D.F.: McGraw-Hill.
- Bowles, J. E. (2009). *Foundation Analysis and Design*. New York: McGraw-Hill.
- Harmsen, T. E., & Mayorca, J. P. (2000). *Diseño de Estructuras de Concreto Armado*. Lima, Perú: PUCP.
- Nilson, A. H. (1999). *Diseño de Estructuras de Concreto*. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.
- NTP E.030. (2009). *Concreto Armado*. Lima, Perú.
- Ottazi Pasino, G. (2012). *Apuntes de Curso Análisis Estructural I*. Lima: Pucp.
- Ottazi Pasino, G. (2008). *Apuntes del Curso Concreto Armado I*. Lima, Perú: Pucp.
- Park, R., & Gamble, W. L. (1987). *Losas de Concreto Reforzado*. Mexico: Limusa.
- Ulrich, K. T. (2005). *Design, Creation of Artifacts in Society*. Philadelphia: University of Pennsylvania.
- Zapata Baglieto, L. F. (1997). *Diseño Estructural en Acero*. Lima: UNI.
- Microsoft Excel (Versión 2010) [Computer Software]. (n.d.).
- CSI ETABS (Version 9.7.4) [Computer Software]. (n.d.).