

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



**Modelación y simulación dinámica de un mecanismo paralelo  
para un tobillo protésico de 3 grados de libertad**

**Tesis para optar al grado académico de Doctora en Ingeniería  
que presenta:**

*Victoria Elizabeth Abarca Pino*

**Asesor:**

*Dr. Dante Ángel Elias Giordano*

**Lima, 2024**

## Informe de Similitud

Yo, Dante Angel Elias Giordano, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada "*Modelación y simulación dinámica de un mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad*", de la autora Victoria Elizabeth Abarca Pino,dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 25%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 25/07/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 25 de julio del 2024

|                                                                                                  |                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Apellidos y nombres del asesor: <u>Elias Giordano, Dante Angel</u>                               |                                                                                             |
| DNI: 10142907                                                                                    | Firma  |
| ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0001-5920-9608">https://orcid.org/0000-0001-5920-9608</a> |                                                                                             |

## **DEDICATORIA**

Quiero dedicar este logro a la persona que ha sido mi compañero, mi apoyo incondicional y mi amor inquebrantable: mi esposo.

Desde el inicio de este viaje académico, has estado a mi lado, brindándome tu aliento constante, tu comprensión y tu paciencia. Tus palabras de aliento y tu fe en mis capacidades me han dado la fuerza necesaria para enfrentar los desafíos y superar los obstáculos que se presentaron en el camino.

Tu amor, paciencia y comprensión han sido pilares sólidos en mi vida, y este logro no habría sido posible sin ti. Eres mi inspiración y mi motivación constante para superarme cada día.

Te dedico este éxito con todo mi amor y gratitud.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que contribuyeron de manera significativa en la realización de esta tesis doctoral. Sus aportes, apoyo y aliento han sido fundamentales para alcanzar este importante logro en mi vida académica.

Quiero dedicar un agradecimiento especial a mi familia por su constante aliento, comprensión y amor incondicional. Su apoyo emocional ha sido mi sustento en momentos de duda y agotamiento. Agradezco su comprensión durante mis ausencias y su celebración en cada paso adelante que he dado.

Agradezco a mi asesor de tesis Dr. Dante Elías, por su orientación, conocimiento y dedicación a lo largo de todo el proceso de investigación. Su experiencia y guía fueron fundamentales para el desarrollo y la culminación de este proyecto. Estoy enormemente agradecida por su paciencia, por compartir su sabiduría y por su continua motivación.

## RESUMEN

La creación de modelos matemáticos precisos para mecanismos paralelos es compleja debido a la naturaleza de su cinemática y dinámica. Los mecanismos paralelos, a diferencia de los mecanismos en serie, tienen múltiples cadenas cinemáticas que trabajan en conjunto, lo que complica su análisis y modelación. El objetivo central de esta investigación es la modelación dinámica para un diseño conceptual de un mecanismo paralelo para un tobillo protésico de tres grados de libertad. La metodología aplicada inicia con un análisis detallado que va desde el estado del arte en biomecánica del tobillo, un resumen de los fundamentos teóricos de la cinemática y dinámica inversa de mecanismos paralelos, un modelo matemático que describe la cinemática y la dinámica inversa del mecanismo propuesto, así como el diseño, la construcción y la evaluación de un primer prototipo de mecanismo paralelo.

Esta investigación desarrolla un modelo del mecanismo paralelo 2SPU-1RU para tobillo protésico con tres grados de libertad, empleando el Principio de Trabajo Virtual y una metodología propia para la obtención de resultados en cinemática y dinámica inversa a través de un algoritmo computacional implementado y validado en MATLAB R2022b, el modelo se contrastó con un prototipo físico a través de cuatro experimentos prácticos abarcando movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción y una combinación de estos.

La precisión del modelo se evidenció entre los resultados experimentales y los calculados, aunque se observaron diferencias en la amplitud y respuesta temporal entre el prototipo y la modelación. Los errores de modelado variaron según el tipo de actuador y movimiento, con un máximo de 24,24% en el actuador rotatorio durante los movimientos combinados. Este análisis detallado no solo valida la eficacia del modelo propuesto, sino que también enfatiza la importancia de la configuración específica del mecanismo paralelo 2SPU-1RU en el contexto de prótesis de tobillo. La elección de esta configuración representa un aporte conceptual significativo al estudio de la articulación del tobillo protésico, ofreciendo una nueva perspectiva en el diseño de mecanismos paralelos adaptados a la biomecánica del tobillo.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

|                                                                                                                                                     |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| RESUMEN .....                                                                                                                                       | I         |
| DEDICATORIA .....                                                                                                                                   | II        |
| AGRADECIMIENTOS .....                                                                                                                               | III       |
| INTRODUCCIÓN .....                                                                                                                                  | 1         |
| <b>1 BIOMECÁNICA DEL TOBILLO .....</b>                                                                                                              | <b>3</b>  |
| 1.1 ANATOMÍA DEL TOBILLO-PIE .....                                                                                                                  | 3         |
| 1.1.1 Huesos del pie .....                                                                                                                          | 4         |
| 1.1.2 Articulaciones.....                                                                                                                           | 6         |
| 1.1.3 Ligamentos.....                                                                                                                               | 10        |
| 1.1.4 Músculos .....                                                                                                                                | 11        |
| 1.2 ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL TOBILLO-PIE.....                                                                                                     | 13        |
| 1.2.1 Tipos de pie .....                                                                                                                            | 13        |
| 1.2.2 Antropometría.....                                                                                                                            | 15        |
| 1.2.3 Planos y ejes anatómicos .....                                                                                                                | 18        |
| 1.2.4 Tipos de movimiento .....                                                                                                                     | 22        |
| 1.2.5 Rangos de movimiento.....                                                                                                                     | 23        |
| 1.3 ASPECTOS FUNCIONALES DE LA BIOMECÁNICA DE LA MARCHA HUMANA.....                                                                                 | 24        |
| 1.3.1 Ciclo de marcha humana .....                                                                                                                  | 25        |
| 1.3.2 Parámetros del ciclo de marcha.....                                                                                                           | 28        |
| 1.3.3 Cinemática del ciclo de marcha .....                                                                                                          | 32        |
| 1.3.4 Cinética del ciclo de marcha.....                                                                                                             | 34        |
| 1.3.5 Comportamiento biomecánico del tobillo-pie en diferentes tipos de terreno .....                                                               | 40        |
| 1.3.6 Marcha protésica .....                                                                                                                        | 44        |
| <b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y ANTECEDENTES .....</b>                                                                                                  | <b>56</b> |
| 2.1 PAR CINEMÁTICO.....                                                                                                                             | 56        |
| 2.2 CADENA CINEMÁTICA, MECANISMO Y MÁQUINA .....                                                                                                    | 57        |
| 2.2.1 Clasificación de los eslabones .....                                                                                                          | 57        |
| 2.2.2 Clasificación de las cadenas cinemáticas.....                                                                                                 | 58        |
| 2.2.3 Clasificación de actuadores.....                                                                                                              | 59        |
| 2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MECANISMOS PARALELOS .....                                                                                                 | 63        |
| 2.3.1 Según las cadenas cinemáticas que lo conforman.....                                                                                           | 63        |
| 2.3.2 Según los grados de libertad.....                                                                                                             | 64        |
| 2.3.3 Según el espacio de trabajo .....                                                                                                             | 64        |
| 2.4 APLICACIÓN DE MECANISMOS PARALELOS EN LA ASISTENCIA Y REHABILITACIÓN DE LAS ARTICULACIONES DE TRES GRADOS DE LIBERTAD EN EL CUERPO HUMANO ..... | 65        |
| 2.4.1 Mecanismos paralelos para la articulación del cuello .....                                                                                    | 66        |
| 2.4.2 Mecanismos paralelos para la articulación del hombro .....                                                                                    | 68        |
| 2.4.3 Mecanismos paralelos para la articulación de la muñeca .....                                                                                  | 70        |
| 2.4.4 Mecanismos paralelos para la articulación de la cadera.....                                                                                   | 74        |
| 2.4.5 Mecanismos para la articulación de rodilla .....                                                                                              | 75        |
| 2.4.6 Mecanismos paralelos para la articulación del tobillo.....                                                                                    | 78        |
| 2.5 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL .....                                                                                    | 83        |
| 2.5.1 Representación de la posición.....                                                                                                            | 83        |
| 2.5.2 Representación de la orientación.....                                                                                                         | 84        |
| 2.6 CINEMÁTICA EN MECANISMOS PARALELOS .....                                                                                                        | 89        |
| 2.6.1 Cinemática inversa en mecanismos paralelos.....                                                                                               | 90        |
| 2.6.2 Cinemática directa en mecanismos paralelos.....                                                                                               | 91        |
| 2.6.3 Matriz Jacobiana.....                                                                                                                         | 93        |



|          |                                                                                                                                            |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.6.4    | <i>Singularidades</i> .....                                                                                                                | 97         |
| 2.7      | DINÁMICA EN LOS MECANISMOS PARALELOS .....                                                                                                 | 98         |
| 2.7.1    | <i>Formulación Newton-Euler</i> .....                                                                                                      | 98         |
| 2.7.2    | <i>Formulación de Euler-Lagrange</i> .....                                                                                                 | 101        |
| 2.7.3    | <i>Principio del Trabajo Virtual</i> .....                                                                                                 | 102        |
| 2.7.4    | <i>Resumen de los métodos dinámicos inversos</i> .....                                                                                     | 110        |
| 2.8      | HERRAMIENTAS DE SIMULACIÓN DINÁMICA DE MECANISMOS PARALELOS.....                                                                           | 111        |
| 2.8.1    | <i>Simulación de la cinemática y dinámica en Virtual Reality Modelling Language (VRBUILD2)</i><br>111                                      |            |
| 2.8.2    | <i>Simulación en SimMechanics de MATLAB</i> .....                                                                                          | 113        |
| 2.8.3    | <i>Simulación en MSC ADAMS</i> .....                                                                                                       | 114        |
| 2.8.4    | <i>Simulación en Simulink de MATLAB</i> .....                                                                                              | 116        |
| <b>3</b> | <b>DISEÑO CONCEPTUAL DEL MECANISMO PARALELO .....</b>                                                                                      | <b>118</b> |
| 3.1      | REQUERIMIENTOS PARA EL DISEÑO.....                                                                                                         | 118        |
| 3.2      | ESTRUCTURA DE FUNCIONES .....                                                                                                              | 130        |
| 3.2.1    | <i>Caja negra</i> .....                                                                                                                    | 131        |
| 3.2.2    | <i>Diagrama de funciones</i> .....                                                                                                         | 132        |
| 3.2.3    | <i>Concepto de solución</i> .....                                                                                                          | 134        |
| 3.2.4    | <i>Concepto de solución preliminar</i> .....                                                                                               | 138        |
| 3.2.5    | <i>Proyecto preliminar</i> .....                                                                                                           | 138        |
| 3.3      | DETALLE DEL CONCEPTO PRELIMINAR OPTIMO .....                                                                                               | 143        |
| 3.3.1    | <i>Diseño eléctrico-electrónico</i> .....                                                                                                  | 145        |
| 3.3.2    | <i>Diseño del mecanismo paralelo 2SPU-1RU</i> .....                                                                                        | 151        |
| 3.4      | MOVIMIENTOS ROTACIONALES MÁXIMOS DEL MECANISMO PARALELO 2SPU-1RU EN AUTODESK INVENTOR<br>PROFESSIONAL 2021.....                            | 155        |
| <b>4</b> | <b>DISEÑO CONCEPTUAL DEL MECANISMO PARALELO .....</b>                                                                                      | <b>157</b> |
| 4.1      | MODELACIÓN CINEMÁTICA INVERSA DEL MECANISMO 2SPU-1RU.....                                                                                  | 157        |
| 4.1.1    | <i>Nomenclatura, marco de referencia global y de referencia local</i> .....                                                                | 158        |
| 4.1.2    | <i>Parámetros geométricos</i> .....                                                                                                        | 160        |
| 4.1.3    | <i>Parámetros angulares de la plataforma móvil</i> .....                                                                                   | 162        |
| 4.1.4    | <i>Análisis de posición, velocidad y aceleración</i> .....                                                                                 | 163        |
| 4.2      | MATRICES JACOBIANAS DE LAS CADENAS CINEMÁTICAS .....                                                                                       | 179        |
| 4.3      | DINÁMICA INVERSA DEL MECANISMO PARALELO .....                                                                                              | 185        |
| 4.3.1    | <i>Fuerzas y momentos externos sobre la plataforma móvil</i> .....                                                                         | 185        |
| 4.3.2    | <i>Ecuaciones de movimiento</i> .....                                                                                                      | 188        |
| <b>5</b> | <b>DISEÑO CONCEPTUAL DEL MECANISMO PARALELO .....</b>                                                                                      | <b>190</b> |
| 5.1      | PASOS DEL ALGORITMO.....                                                                                                                   | 190        |
| 5.2      | PROGRAMACIÓN DEL ALGORITMO .....                                                                                                           | 199        |
| 5.2.1    | <i>Definición de los parámetros de simulación</i> .....                                                                                    | 199        |
| 5.2.2    | <i>Condiciones de movimiento</i> .....                                                                                                     | 201        |
| 5.2.3    | <i>Código de la programación</i> .....                                                                                                     | 201        |
| 5.3      | RESULTADOS DE LA CINEMÁTICA INVERSA DE LA PLATAFORMA MÓVIL EN MATLAB R2022B .....                                                          | 201        |
| 5.3.1    | <i>Resultados del movimiento de plantar flexión-dorsiflexión (plano sagital)</i> .....                                                     | 203        |
| 5.3.2    | <i>Resultados del movimiento de eversión-inversión (plano frontal)</i> .....                                                               | 206        |
| 5.3.3    | <i>Resultados del movimiento de abducción-aducción (plano transversal)</i> .....                                                           | 210        |
| 5.3.4    | <i>Resultados del movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal)</i> .....                                                    | 213        |
| 5.4      | RESULTADOS DE LA DINÁMICA INVERSA DE LA PLATAFORMA MÓVIL EN MATLAB R2022B Y SIMSCAPE CON DATOS<br>BIOMECÁNICOS USANDO PLATAFORMA AMTI..... | 217        |
| 5.4.1    | <i>Resultados del movimiento de plantar flexión-dorsiflexión (plano sagital)</i> .....                                                     | 219        |
| 5.4.2    | <i>Resultados del movimiento de eversión-inversión (plano frontal)</i> .....                                                               | 221        |
| 5.4.3    | <i>Resultados del movimiento de abducción-aducción (plano transversal)</i> .....                                                           | 224        |
| 5.4.4    | <i>Resultados del movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal)</i> .....                                                    | 226        |
| 5.5      | DISCUSIÓN DE RESULTADOS CINEMÁTICOS Y DINÁMICOS INVERSOS .....                                                                             | 229        |
| 5.5.1    | <i>Discusión del movimiento de plantar flexión-dorsiflexión</i> .....                                                                      | 229        |

|          |                                                                                                                                       |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.5.2    | Discusión del movimiento de eversión-inversión .....                                                                                  | 230        |
| 5.5.3    | Discusión del movimiento de abducción-aducción.....                                                                                   | 231        |
| 5.5.4    | Discusión del movimiento combinado.....                                                                                               | 232        |
| <b>6</b> | <b>DISEÑO CONCEPTUAL DEL MECANISMO PARALELO .....</b>                                                                                 | <b>234</b> |
| 6.1      | FABRICACIÓN DE PROTOTIPO PARA EXPERIMENTACIÓN .....                                                                                   | 234        |
| 6.2      | VALIDACIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO MEDIANTE EL PROTOTIPO .....                                                                          | 236        |
| 6.2.1    | Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital).....                                                                        | 238        |
| 6.2.2    | Movimiento de eversión-inversión (plano frontal).....                                                                                 | 240        |
| 6.2.3    | Movimiento de abducción-aducción (plano transversal).....                                                                             | 242        |
| 6.2.4    | Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal).....                                                                      | 244        |
| 6.2.5    | Comparación de resultados experimentales de la caminata (iSen) con su equivalente en el prototipo .....                               | 246        |
| 6.3      | ERROR DE TRAYECTORIA EN MATLAB R2022B Y EXPERIMENTOS CON PROTOTIPO.....                                                               | 248        |
| 6.4      | DISCUSIÓN DE RESULTADOS CINEMÁTICOS INVERSOS DEL MODELO IMPLEMENTADO EN MATLAB R2022B Y PROTOTIPO .....                               | 250        |
| 6.4.1    | Discusión de la cinemática inversa del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión.....                                                 | 251        |
| 6.4.2    | Discusión de la cinemática inversa del movimiento de eversión-inversión.....                                                          | 251        |
| 6.4.3    | Discusión de la cinemática inversa del movimiento de abducción-aducción .....                                                         | 252        |
| 6.4.4    | Discusión de la cinemática inversa del movimiento combinado.....                                                                      | 253        |
| 6.5      | DISCUSIÓN SOBRE LAS CONSIDERACIONES DEL DISEÑO PARA REALIZAR EXPERIMENTOS CON USUARIOS HUMANOS ..                                     | 253        |
|          | <b>OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>                                                                                          | <b>263</b> |
|          | <b>CONCLUSIONES .....</b>                                                                                                             | <b>265</b> |
|          | <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                                                                                                | <b>267</b> |
|          | <b>ANEXO A.....</b>                                                                                                                   | <b>275</b> |
|          | ANÁLISIS DE LA MARCHA PROTÉSICA TRANSTIBIAL .....                                                                                     | 275        |
|          | <b>ANEXO B.....</b>                                                                                                                   | <b>279</b> |
|          | COMPARACIÓN DE MECANISMO PARALELOS Y EN SERIE.....                                                                                    | 279        |
|          | <b>ANEXO C.....</b>                                                                                                                   | <b>280</b> |
|          | MECANISMOS SERIALES EN PRÓTESIS DE MIEMBROS INFERIORES.....                                                                           | 280        |
|          | C1. Prótesis comerciales con mecanismos seriales.....                                                                                 | 280        |
|          | C2. Prótesis en investigación con mecanismos seriales.....                                                                            | 282        |
|          | C3. Patentes de prótesis con mecanismos seriales.....                                                                                 | 287        |
|          | <b>ANEXO D.....</b>                                                                                                                   | <b>289</b> |
|          | ANÁLISIS DE MARCHA TREN INFERIOR A 5KM/H O 1.3M/S .....                                                                               | 289        |
|          | <b>ANEXO E .....</b>                                                                                                                  | <b>294</b> |
|          | PARÁMETROS DE SIMULACIÓN.....                                                                                                         | 294        |
|          | <b>ANEXO F .....</b>                                                                                                                  | <b>296</b> |
|          | PROGRAMACIÓN EN MATLAB R2022b .....                                                                                                   | 296        |
|          | <b>ANEXO G.....</b>                                                                                                                   | <b>297</b> |
|          | MODELAMIENTO DEL MECANISMO PARALELO EN SIMSCAPE .....                                                                                 | 297        |
|          | <b>ANEXO H.....</b>                                                                                                                   | <b>305</b> |
|          | ANTROPOMETRÍA DEL CUERPO HUMANO .....                                                                                                 | 305        |
|          | <b>ANEXO I.....</b>                                                                                                                   | <b>306</b> |
|          | CONSIDERACIONES PARA LA ELABORACIÓN DEL PROTOCOLO DE PRUEBAS DE FUNCIONALIDAD DEL MECANISMO PARALELO EN PERSONAS SIN AMPUTACIÓN ..... | 306        |



## ÍNDICE DE TABLAS

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 1.1 Medidas antropométricas del cuerpo de la mujer y hombre según percentil. ....                                | 16  |
| Tabla 1.2 Masa de los segmentos corporales según percentil.....                                                        | 17  |
| Tabla 1.3 Momento de inercia de los segmentos corporales según percentil. ....                                         | 18  |
| Tabla 1.4 Velocidad y pasos en el ciclo de marcha en concreto, césped, arena seca y arena mojada [Psarras, 2016]. .... | 43  |
| Tabla 1.5 Parámetros del ciclo de marcha en césped natural, césped artificial y arena [Psarras, 2016]. ....            | 44  |
| Tabla 1.6 Gasto energético de personas con amputación por debajo de la rodilla BK [ICRC,2014]. ....                    | 49  |
| Tabla 2.1 Pares cinemáticos [Tsai, 1999] [Haijun, 2002]. ....                                                          | 57  |
| Tabla 2.2 Tipos de eslabones. ....                                                                                     | 58  |
| Tabla 2.3 Clasificación de las cadenas cinemáticas: ....                                                               | 58  |
| Tabla 2.4 Par rotacional como fuente de energía. ....                                                                  | 62  |
| Tabla 2.5 Par prismático como fuente de energía [Barrientos, 2007]. ....                                               | 62  |
| Tabla 2.6 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación de cuello. ....                      | 67  |
| Tabla 2.7 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación del hombro. ....                     | 69  |
| Tabla 2.8 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación de la muñeca. ....                   | 72  |
| Tabla 2.9 Diferentes configuraciones de mecanismos para la articulación de la cadera. ....                             | 75  |
| Tabla 2.10 Diferentes configuraciones de mecanismos en articulación del tobillo. ....                                  | 81  |
| Tabla 2.11 Métodos dinámicos inversos. ....                                                                            | 110 |
| Tabla 3.1 Dimensiones antropométricas. ....                                                                            | 119 |
| Tabla 3.2 Fases del ciclo de marcha en el plano sagital. ....                                                          | 121 |
| Tabla 3.3 Fases del ciclo de marcha en el plano frontal. ....                                                          | 122 |
| Tabla 3.4 Fases del ciclo de marcha en el plano transversal. ....                                                      | 123 |
| Tabla 3.5 Matriz morfológica ....                                                                                      | 134 |
| Tabla 3.6 Evaluación de criterios técnicos y económicos del concepto de solución ....                                  | 138 |
| Tabla 3.7 Balance técnico-económico ....                                                                               | 141 |
| Tabla 3.8 Valor técnico $x_i$ ....                                                                                     | 141 |
| Tabla 3.9 Valor económico $y_i$ ....                                                                                   | 142 |
| Tabla 3.10 Valor técnico-económico ....                                                                                | 142 |
| Tabla 3.11 Comparativa de sensores inerciales. ....                                                                    | 146 |
| Tabla 3.12 Comparativa de actuadores lineales. ....                                                                    | 147 |
| Tabla 3.13 Comparativa de microcontroladores. ....                                                                     | 148 |
| Tabla 3.14 Cálculo de demanda energética. ....                                                                         | 149 |
| Tabla 3.15 Capacidad de baterías seleccionadas. ....                                                                   | 149 |
| Tabla 3.16 Plano, movimientos y ángulos. ....                                                                          | 152 |
| Tabla 4.1 Relación entre la simbología y la descripción del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. ....                          | 161 |
| Tabla 4.2 Coordenadas Cartesianas. ....                                                                                | 162 |
| Tabla 4.3 Parámetros geométricos de la Figura 4.5. ....                                                                | 164 |
| Tabla 4.4 Parámetros geométricos de la Figura 4.7. ....                                                                | 166 |

|                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla 4.5 Parámetros geométricos de la Figura 4.9. ....                                                                                                            | 176 |
| Tabla 5.1 Matriz de Rotación $ZXY$ . ....                                                                                                                          | 191 |
| Tabla 5.2 Distancias y vectores unitarios de las cadenas cinemáticas. ....                                                                                         | 192 |
| Tabla 5.3 Vectores unitarios. ....                                                                                                                                 | 192 |
| Tabla 5.4 Vectores unitarios y ángulos. ....                                                                                                                       | 192 |
| Tabla 5.5 Matriz de Rotación. ....                                                                                                                                 | 193 |
| Tabla 5.6 Velocidades lineales. ....                                                                                                                               | 193 |
| Tabla 5.7 Velocidades angulares. ....                                                                                                                              | 193 |
| Tabla 5.8 Aceleraciones lineales en crucetas $B1, B2, B3$ expresados en el marco de referencia global. ....                                                        | 194 |
| Tabla 5.9 Aceleraciones lineales en crucetas $B1, B2, B3$ en los marcos de referencias de las cadenas cinemáticas. ....                                            | 194 |
| Tabla 5.10 Aceleración angular de las cadenas cinemáticas. ....                                                                                                    | 194 |
| Tabla 5.11 Aceleración lineal del cilindro y pistón de los actuadores lineales. ....                                                                               | 195 |
| Tabla 5.12 Matriz Jacobiana. ....                                                                                                                                  | 195 |
| Tabla 5.13 Matrices Jacobianas de la plataforma móvil, y la segunda y tercera cadenas cinemáticas. ....                                                            | 196 |
| Tabla 5.14 Matrices Jacobianas expresadas en el marco de referencia local. ....                                                                                    | 196 |
| Tabla 5.15 Matrices Jacobianas expresadas en el marco de referencia local del eslabón, cilindro y pistón de las cadenas cinemáticas. ....                          | 197 |
| Tabla 5.16 Matriz Jacobiana del mecanismo. ....                                                                                                                    | 197 |
| Tabla 5.17 Fuerza en la plataforma móvil. ....                                                                                                                     | 198 |
| Tabla 5.18 Fuerzas aplicadas y de inercia en los actuadores. ....                                                                                                  | 198 |
| Tabla 5.19 Torque en la plataforma móvil. ....                                                                                                                     | 198 |
| Tabla 5.20 Coordenadas de las juntas de la plataforma fija y móvil. ....                                                                                           | 200 |
| Tabla 5.21 Masa de la plataforma móvil, cilindro, pistón de las cadenas cinemáticas. ....                                                                          | 200 |
| Tabla 5.22 Distancias entre las juntas $A2, B2, A3, B3$ y el centro de la masa del cilindro y pistón. ....                                                         | 200 |
| Tabla 5.23 Momento de inercia de la plataforma móvil, cilindro y pistón de las cadenas cinemáticas. ....                                                           | 201 |
| Tabla 6.1 Error de trayectoria del modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo. ....                                                                       | 250 |
| Tabla 6.2 Dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura. ....                                                                                  | 257 |
| Tabla 6.3 Cálculo de la longitud regulable considerando las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura. ....                                | 258 |
| Tabla 6.4 Cálculo del ancho y largo del pie protésico, teniendo en cuenta las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura. ....              | 258 |
| Tabla 6.5 Cálculo de la longitud disponible considerando las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura y la longitud del muñón. ....       | 261 |
| Tabla 6.6 Cálculo de la longitud disponible teniendo en cuenta las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura y la longitud del muñón. .... | 261 |
| Tabla A.1 Marcha protésica transtibial. Excesiva flexión de rodilla [ICRC, 2014]. ....                                                                             | 275 |
| Tabla A.2 Marcha protésica transtibial, hiperextensión de rodilla [ICRC, 2014]. ....                                                                               | 275 |
| Tabla A.3 Marcha protésica transtibial, empuje lateral del encaje durante la fase de apoyo [ICRC, 2014]. ....                                                      | 276 |
| Tabla A.4 Marcha protésica transtibial, tiempo desigual y balanceo desigual del brazo [ICRC, 2014]. ..                                                             | 276 |
| Tabla A.5 Marcha protésica transtibial, paso protésico demasiado corto y largo [ICRC, 2014]. ....                                                                  | 277 |

|                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabla A.6 Marcha protésica transtibial, flexión lateral del tronco sobre el lado protésico [ICRC, 2014].                                          | 277 |
| Tabla A.7 Marcha protésica transtibial, flexión lateral del tronco del lado sano [ICRC, 2014].                                                    | 278 |
| Tabla A.8 Marcha protésica transtibial, marcha de base estrecha [ICRC, 2014].                                                                     | 278 |
| Tabla B.1 Comparación de mecanismos paralelos y en serie [Pandilov, 2014].                                                                        | 279 |
| Tabla D.1 Ángulos de dorsiflexión-plantarflexión, inversión-eversión y abducción-aducción del tobillo en el ciclo de marcha [Elaboración propia]. | 291 |



## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.1 Grupos principales de huesos del pie.....                                                                                                                                                                                                    | 4  |
| Fig. 1.2 Huesos del pie y tobillo. ....                                                                                                                                                                                                               | 5  |
| Fig. 1.3 Articulaciones talocrural, subtalar y tarsal transversa. ....                                                                                                                                                                                | 7  |
| Fig. 1.4 Articulación talocrural o articulación de tobillo: (a) vista anterior con el pie en plantarflexión, (b) esquemático articulación, (c) vista superior de la articulación talocrural [Drake, 2015]. ....                                       | 7  |
| Fig. 1.5 Superficies que forman la articulación talocalcánea o subtalar: (a) visión externa, (b) visión interna [Kapandji, 2012]. ....                                                                                                                | 8  |
| Fig. 1.6 Articulación de Chopart.....                                                                                                                                                                                                                 | 9  |
| Fig. 1.7 Ligamentos del miembro inferior. ....                                                                                                                                                                                                        | 10 |
| Fig. 1.8 Músculos plantares del pie [Drake, 2015]. ....                                                                                                                                                                                               | 11 |
| Fig. 1.9 Músculos dorsales: (a) primera capa, (b) segunda capa, (c) tercera capa, (d) cuarta capa del pie [Drake, 2015]. ....                                                                                                                         | 12 |
| Fig. 1.10 Tipos de pie según longitud del primer y segundo dedo: (a) pie egipcio, (b) pie griego, (c) pie cuadrado.....                                                                                                                               | 14 |
| Fig. 1.11 Tipos de pie según bóveda plantar: (a) pie plano, (b) pie normal, (c) pie cavo. ....                                                                                                                                                        | 15 |
| Fig. 1.12 Medidas antropométricas del cuerpo: (a) mujer, (b) hombre.....                                                                                                                                                                              | 16 |
| Fig. 1.13 Masas del segmento del cuerpo humano. ....                                                                                                                                                                                                  | 17 |
| Fig. 1.14 Planos y ejes anatómicos del cuerpo humano [Abarca, 2023].....                                                                                                                                                                              | 19 |
| Fig. 1.15 Planos anatómico del tobillo-pie. ....                                                                                                                                                                                                      | 20 |
| Fig. 1.16 Ejes de movimiento del tobillo-pie [Kapandji, 2012].....                                                                                                                                                                                    | 20 |
| Fig. 1.17 Eje de movimiento de la articulación subastragalina: (a) representación en plano transversal, (b) representación en plano sagital [Nuñez, 2006]. ....                                                                                       | 21 |
| Fig. 1.18 Eje de Hencke: (a) representación isométrica, (b) representación en plano sagital. ....                                                                                                                                                     | 21 |
| Fig. 1.19 Movimientos del pie: (a) plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital, (b) eversión-inversión en plano frontal, (c) abducción-aducción en plano transversal.....                                                                            | 22 |
| Fig. 1.20 Rango de movimiento del pie: (a) plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital, (b) eversión-inversión en plano frontal, (c) abducción-aducción en plano transversal.....                                                                    | 23 |
| Fig. 1.21 Marcha humana: (a) sistemas involucrados, (b) fuerzas y momentos involucrados [Vaughan, 1999]. ....                                                                                                                                         | 24 |
| Fig. 1.22 Ciclo de marcha humana compuesto por el período de soporte (62%) y el de balanceo (38%) [Lesmes, 2007]. ....                                                                                                                                | 25 |
| Fig. 1.23 Período de soporte: (a) fase de contacto inicial, (b) fase de respuesta a la carga, (c) fase de soporte medio, (d) fase de soporte terminal, (e) fase de pre-balanceo [Lesmes, 2007]. ....                                                  | 26 |
| Fig. 1.24 Período de balanceo: (a) fase balanceo inicial, (b) fase de balanceo medio, (c) fase de balanceo terminal [Lesmes, 2007]. ....                                                                                                              | 28 |
| Fig. 1.25 Parámetros espaciales: (a) zancada, paso corto, (b) ancho de paso, (c) ángulo de paso [Lesmes, 2007]. ....                                                                                                                                  | 29 |
| Fig. 1.26 Posición de la pierna derecha en el plano sagital a intervalos de 40ms durante el ciclo de marcha [Whittle, 2015]. ....                                                                                                                     | 33 |
| Fig. 1.27 Ángulos de la articulación del tobillo en el plano sagital en las fases de contacto inicial, respuesta a la carga, soporte medio, soporte terminal, pre-balanceo, balanceo inicial, balanceo medio, balanceo terminal [Whittle, 2015]. .... | 34 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1.28 Representación del diagrama de mariposa del vector fuerza de reacción del suelo a 10ms de intervalo propuesto por Pedotti en 1977. La progresión es de izquierda a derecha [Whittle, 2015].                                                                  | 35 |
| Fig. 1.29 Fuerza vertical del tobillo en las fases: (a) contacto inicial, (b) respuesta a la carga, (c) soporte medio, (d) soporte terminal, (e) pre-balanceo [Whittle, 2015].                                                                                         | 36 |
| Fig. 1.30 Fuerza en el ciclo de marcha [Whittle, 2015].                                                                                                                                                                                                                | 37 |
| Fig. 1.31 Momento interno del tobillo durante el ciclo de marcha [Whittle, 2015].                                                                                                                                                                                      | 38 |
| Fig. 1.32 Fuerzas: (a) en plano sagital, (b) en plano transversal [Vidalot, 2003].                                                                                                                                                                                     | 39 |
| Fig. 1.33. Características de la articulación del tobillo de un sujeto de 75 kg caminando a una cadencia normal en plano sagital: (a) ángulo del tobillo, momento, y potencia vs porcentaje del ciclo de marcha [Winter, 1991], (b) torque vs ángulo [Cherelle, 2014]. | 39 |
| Fig. 1.34 Análisis de movimiento: (a) en superficie plana, (b) subiendo escaleras, (c) bajando escaleras [Yuan, 2013].                                                                                                                                                 | 40 |
| Fig. 1.35. Ángulo de inclinación del pie: (a) terreno con inclinación negativa, (b) terreno plano, (c) terreno con inclinación positiva [Yuan, 2013].                                                                                                                  | 41 |
| Fig. 1.36. Fuerzas de reacción en el suelo en la fase de soporte del ciclo de marcha en pendiente descendente, superficie nivelada, pendiente ascendente: (a) eje medio lateral, (b) eje anteroposterior, (c) eje vertical [Psarras, 2016].                            | 41 |
| Fig. 1.37. Ángulos vs ciclo de marcha sobre un terreno irregular: (a) cadera, (b) rodilla, (c) tobillo [Psarras, 2016].                                                                                                                                                | 42 |
| Fig. 1.38 Ángulos de la cadera, rodilla y tobillo sobre un terreno rocoso [Psarras, 2016].                                                                                                                                                                             | 42 |
| Fig. 1.39 Trabajo ejercido por el pie sobre la arena en el plano sagital [Psarras, 2016].                                                                                                                                                                              | 43 |
| Fig. 1.40 Tipos de pie: (a) pie SACH (Solid Ankle Cushion Heel), (b) pie articulado o uniaxial (single Axis Foot), (c) pie multiaxial (multiaxis foot), (d) pie de absorción o de almacenamiento de energía (PAE) o de respuesta dinámica, (e) pie biónico.            | 46 |
| Fig. 1.41 Áreas de presión en encaje protésico: (a) tolerante a la presión en vista anterior, (b) tolerante a la presión en vista lateral, (c) sensible a la presión en vista anterior, (d) sensible a la presión en vista lateral [ICRC, 2014].                       | 47 |
| Fig. 1.42 Tipos de encaje protésico en amputación transtibial: (a) encaje PTB (Patellar Tendon Bearing), (b) encaje PTS (Prosthèse Tibiale Supracondylienne), (c) encaje KBM (Kondilem Bettung Münster), (d) encaje HST (Hidrostatic Total Surface).                   | 48 |
| Fig. 1.43 Flexión excesiva de rodilla [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                                    | 50 |
| Fig. 1.44 Alineación anterior del encaje protésico con el eje de acción de la fuerza "A": (a) alineación correcta, (b) alineación con desplazamiento leve, (c) desplazamiento excesivo anterior [Bowker, 2002].                                                        | 50 |
| Fig. 1.45 Flexión insuficiente de rodilla [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                                | 51 |
| Fig. 1.46 Alineación posterior del encaje protésico con el eje de acción de la fuerza "A": (a) alineación correcta, (b) alineación con desplazamiento leve, (c) alineación con desplazamiento excesivo [Bowker, 2002].                                                 | 51 |
| Fig. 1.47 Desplazamiento excesivo posterior [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                              | 52 |
| Fig. 1.48 Inclinación lateral del tronco en el lado de la prótesis transtibial [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                           | 52 |
| Fig. 1.49 Pie en posición medial excesiva [Bowker, 2002].                                                                                                                                                                                                              | 53 |
| Fig. 1.50 Flexión temprana de la rodilla [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                                 | 53 |
| Fig. 1.51 Flexión retardada de la rodilla [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                                | 54 |
| Fig. 1.52 Flexión retardada de la rodilla [ICRC, 2014].                                                                                                                                                                                                                | 55 |
| Fig. 2.1. Mecanismos: (a) serial [Fernández, 2016], (b) paralelo [Lung, 1999].                                                                                                                                                                                         | 63 |
| Fig. 2.2 Mecanismos paralelos de 3 grados de libertad (2 rotaciones y 1 traslación): (a) 3RPS [Villaveces, 2012], (b) 3RRS [Villaveces, 2012], (c) 3PRS [Fatehi, 2011], (d) 2RPS-RRS [Villaveces, 2012], (e) 3SPS-PU [Lu, 2007], (f) 2RRS-RPS [Villaveces, 2012].      | 64 |



|                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 2.3 Mecanismos paralelos de 3 grados de libertad (3 rotaciones): (a) 3PUS-1S [Khoshnoodi, 2018], (b) 3SPS-1S [Zavala, 2015], (c) 3RPSP-S [Enferadi, 2016], (d) 3UPS-S [Zhang, 2016], (e) 3URU [Huda, 2006], (f) 3RRS [Du, 2017]. | 65  |
| Fig. 2.4 Prótesis de rodilla: (a) monocéntrica con bloqueo a la carga y asistencia a la extensión, (b) policéntrica mecánica con asistencia a la extensión [Ortiz, 2022].                                                             | 76  |
| Fig. 2.5 Prótesis de rodilla: (a) policéntrica 3R106 Ottobock, (b) policéntrica hidráulica 3R60 Ottobock, (c) monocéntrica hidráulica con sistema de control hidráulico de balanceo y apoyo (SNS) 3R80 Ottobock [Ortiz, 2022].        | 77  |
| Fig. 2.6 Prótesis con control electrónico rodilla 3E80 Ottobock [Ortiz, 2022].                                                                                                                                                        | 78  |
| Fig. 2.7 Patentes de mecanismos paralelos, (a) US 9,949,849 B2 [Maitland, 2015], (b) US 7,118,601 B2 [Yasui, 2006].                                                                                                                   | 79  |
| Fig. 2.8 Representación de un vector de posición en coordenadas cartesianas: (a) dos dimensiones, (b) tres dimensiones [Barrientos, 2007].                                                                                            | 83  |
| Fig. 2.9 Coordenadas: (a) cartesiana, (b) polar y cilíndrica, (c) esférica [Barrientos, 2007].                                                                                                                                        | 84  |
| Fig. 2.10 Sistema de referencia $OXYZ$ [Barrientos, 2007].                                                                                                                                                                            | 85  |
| Fig. 2.11 Rotación del sistema $OUVW$ : (a) con respecto al eje $OX$ , (b) con respecto a $OY$ , (c) con respecto a $OZ$ [Barrientos, 2007].                                                                                          | 86  |
| Fig. 2.12 Ángulos de Euler: $WUW$ [Barrientos, 2007].                                                                                                                                                                                 | 87  |
| Fig. 2.13 Ángulos de Euler: $WVW$ [Barrientos, 2007].                                                                                                                                                                                 | 88  |
| Fig. 2.14 Ángulos de Tai-Bryan secuencia $ZYX$ .                                                                                                                                                                                      | 89  |
| Fig. 2.15 Diagrama en relación entre la cinemática directa e inversa [Barrientos, 2007].                                                                                                                                              | 90  |
| Fig. 2.16 Modelo de mecanismo paralelo: (a) topología 3SPS-1S, (b) ángulos de la base, (c) representación vectorial [Chaparro, 2015].                                                                                                 | 91  |
| Fig. 2.17 Modelo geométrico: (a) intersección de las esferas del actuador y la plataforma, (b) intersección espacial de los actuadores [Chaparro, 2015].                                                                              | 92  |
| Fig. 2.18 Red neuronal artificial [Chaparro, 2015].                                                                                                                                                                                   | 93  |
| Fig. 2.19 Jacobiana analítica directa e inversa [Barrientos, 2007].                                                                                                                                                                   | 94  |
| Fig. 2.20 Jacobiana geométrica [Barrientos, 2007].                                                                                                                                                                                    | 95  |
| Fig. 2.21 Diagrama del cuerpo libre de un eslabón [Cuellar, 2022].                                                                                                                                                                    | 100 |
| Fig. 2.22. Modelado en 3D del robot paralelo [Fernández, 2016].                                                                                                                                                                       | 112 |
| Fig. 2.23. GUIDE: interfaz gráfica de usuario del mecanismo paralelo [Fernández, 2016].                                                                                                                                               | 112 |
| Fig. 2.24. Simulación de la cinemática inversa del mecanismo paralelo [Fernández, 2016].                                                                                                                                              | 113 |
| Fig. 2.25 Esquema del modelo en SimMechanics [Villaveces, 2012].                                                                                                                                                                      | 113 |
| Fig. 2.26 Esquema bloque cadena cinemática RPS en SimMechanics [Villaveces, 2012].                                                                                                                                                    | 114 |
| Fig. 2.27 Simulación de los movimientos del mecanismo paralelo: (a) dorsiflexión, (b) plantarflexión [Liu, 2006].                                                                                                                     | 114 |
| Fig. 2.28 Gráfica de los ángulos de rotación vs tiempo [Liu, 2006].                                                                                                                                                                   | 115 |
| Fig. 2.29 Mecanismo paralelo 3PRS: (a) prototipo, (b) simulación en ADAMS [Arockia, 2014].                                                                                                                                            | 115 |
| Fig. 2.30 Mecanismo paralelo 3RPSP-S: (a) diseño, (b) trayectoria del torque vs tiempo en MSC ADAMS [Enferadi, 2016].                                                                                                                 | 116 |
| Fig. 2.31 Mecanismo paralelo SPS: (a) prototipo rehabilitador de tobillo, (b) modelo de simulación [Kazem, 2015].                                                                                                                     | 117 |
| Fig. 2.32 Diagrama de bloques de los actuadores [Kazem, 2015].                                                                                                                                                                        | 117 |
| Fig. 3.1 Ciclo de marcha de una persona de 50 kg de sexo femenino.                                                                                                                                                                    | 120 |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 3.2 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 120 |
| Fig. 3.3 Movimiento de eversión-inversión: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 121 |
| Fig. 3.4 Movimiento de abducción-aducción: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 122 |
| Fig. 3.5 Articulación talocrural en el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 123 |
| Fig. 3.6 Articulación subtalar en el movimiento de eversión-inversión.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 124 |
| Fig. 3.7 Articulación tarsal transversal en el movimiento de abducción-aducción.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 124 |
| Fig. 3.8 Situación de los centros de rotación en el astrágalo, en 4 se produce el deslizamiento [Viladot, 2022]......                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 125 |
| Fig. 3.9 Datos de las fuerzas de reacción pie-plataforma de fuerza AMTY. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 126 |
| Fig. 3.10 Caja negra del mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 131 |
| Fig. 3.11 Estructura de funciones de mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 132 |
| Fig. 3.12 Concepto de solución 1.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 135 |
| Fig. 3.13 Concepto de solución 2.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 136 |
| Fig. 3.14 Concepto de solución 3.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 137 |
| Fig. 3.15 Concepto de solución 4.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 137 |
| Fig. 3.16 Solución preliminar 1. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 139 |
| Fig. 3.17 Solución preliminar 2. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 140 |
| Fig. 3.18 Solución preliminar 3. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 140 |
| Fig. 3.19. Diagrama de evaluación según la norma VDI 2225. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 142 |
| Fig. 3.20 Síntesis estructural de la topología del mecanismo paralelo.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 143 |
| Fig. 3.21 Mecanismo paralelo 2SPU-1RU con aplicabilidad directa al tobillo humano, (a) tobillo humano, (b) diseño del mecanismo paralelo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 144 |
| Fig. 3.22 Gama de motores de pasos. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 146 |
| Fig. 3.23 Motor de pasos y driver. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 147 |
| Fig. 3.24 Driver Puente H BTS7960.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 148 |
| Fig. 3.25 Arquitectura del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 149 |
| Fig. 3.26 Dimensiones generales del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 151 |
| Fig. 3.27 Dimensiones de la distancia entre actuadores.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 151 |
| Fig. 3.28 Diseño CAD del mecanismo paralelo 2SPU-1RU: (a) elementos principales, (b) sensor e interruptor. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 153 |
| Fig. 3.29 Cadena cinemáticas: (a) primera cadena tipo 1RU, (b) segunda y tercera cadena tipo SPU.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 154 |
| Fig. 3.30 Plataformas fija y móvil: (a) vista superior, (b) vista inferior.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 155 |
| Fig. 3.31 Movimientos del mecanismo paralelo: (a) en plano sagital, (b) en plano frontal, (c) en el plano transversal.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 156 |
| Fig. 5.1 Representación de las cadenas cinemáticas del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 191 |
| Fig. 5.2 Mecanismo paralelo: (a) modelo realizado en Autodesk Inventor Profesional 2021, (b) representación gráfica. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 199 |
| Fig. 5.3 Resultados de la cinemática inversa del mecanismo paralelo.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 202 |
| Fig. 5.4 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular del actuador rotatorio, (d) velocidad lineal de los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo..... | 204 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 5.5 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.....            | 208 |
| Fig. 5.6 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3. ....                 | 211 |
| Fig. 5.7 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo..... | 215 |
| Fig. 5.8 Dinámica inversa del mecanismo paralelo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 218 |
| Fig. 5.9 Biomecánica del tobillo: (a) fuerzas de reacción pie-plataforma de fuerza, (b) torque del tobillo. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 218 |
| Fig. 5.10 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.....                                                                                                                                                                                   | 219 |
| Fig. 5.11 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo respectivamente. ....                                                                                                                                                                           | 222 |
| Fig. 5.12 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.....                                                                                                                                                                                        | 225 |
| Fig. 5.13 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.....                                                                                                                                                                                                        | 227 |
| Fig. C1 Prótesis Propio Foot- Ossur. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 280 |
| Fig. C2 BioM- MIT: (a) prótesis-usuario (b), partes de la prótesis, (c) diagrama [Au, 2007]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 281 |
| Fig. C3 Prótesis Ottobock: (a) isométrico, (b) vista frontal (c) partes integradas. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 282 |
| Fig. C4. Sparky 3-USA: (a) partes de la prótesis, (b) movimiento de inversión/eversión, (c) prototipo [Bellman, 2008]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 283 |
| Fig. C5. Diseño de prótesis activa de la Universidad de Massachusetts Amherst [Kennedy, 2016]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 283 |
| Fig. C6. Prótesis de University of Massachusetts Amherst: (a) mecanismo, (b) prototipo [Kennedy, 2016]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 284 |
| Fig. C7. Prótesis (a) diagrama del cuerpo libre DCL, (b) prototipo de prótesis transtibial [Bergelin, 2012]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 284 |
| Fig. C8. Mecanismo de prótesis transtibial de 3 GDL [Madusanka, 2014]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 285 |
| Fig. C9. Prótesis con accionamiento neumático: (a) prótesis con actuador artificial de Estados Unidos, (b) prótesis con músculo artificial de Bélgica, (c) prótesis de tobillo neumático de Estados Unidos, (d) prótesis transtibial, (e) prótesis transhumeral de Estados Unidos [Cherelle, 2014]. ....                                                                                                                                           | 285 |
| Fig. C10. Patente de prótesis N° US8,721,737 B2: (a) vista isométrica, (b) vista posterior, (c) vista Frontal [Schimmels, 2012]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 287 |
| Fig. C11. Patente N° US 2017/0095355 [Holgate, 2016]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 288 |
| Fig. D1. Protocolo aplicado para la adquisición de datos cinemáticos con sensores inerciales [Elaboración propia].....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 289 |
| Fig. D2. Parámetros de marcha obtenidos del protocolo tren inferior aplicado [Elaboración propia]. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 290 |
| Fig. E1. Inercia de la plataforma móvil. ....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 294 |

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. E2. Inercia del cilindro .....                                                                    | 294 |
| Fig. E3. Inercia del vástago .....                                                                     | 295 |
| Fig. E4. Inercia del eslabón. ....                                                                     | 295 |
| Fig. G1. Modelamiento del mecanismo paralelo mediante Simscape .....                                   | 298 |
| Fig. G2. Modelamiento del actuador rotatorio 1 mediante Simscape .....                                 | 298 |
| Fig. G3. Modelamiento del eslabón 1 mediante Simscape .....                                            | 299 |
| Fig. G4. Modelamiento de la cruceta 1 mediante Simscape .....                                          | 299 |
| Fig. G5. Modelamiento del actuador lineal 2 mediante Simscape .....                                    | 300 |
| Fig. G6. Modelamiento de cilindro2 mediante Simscape .....                                             | 300 |
| Fig. G7. Modelamiento del cuerpo del pistón 2 mediante Simscape .....                                  | 301 |
| Fig. G8. Modelamiento de la cruceta 2 mediante Simscape .....                                          | 301 |
| Fig. G9. Modelamiento del actuador lineal 3 mediante Simscape .....                                    | 302 |
| Fig. G10. Modelamiento del cilindro 3 mediante Simscape .....                                          | 302 |
| Fig. G11. Modelamiento del cuerpo del pistón 3 mediante Simscape .....                                 | 303 |
| Fig. G12. Modelamiento de la cruceta 3 mediante Simscape .....                                         | 303 |
| Fig. G13. Modelamiento de la base móvil mediante Simscape .....                                        | 304 |
| Fig. H1. Longitudes de los segmentos corporales expresados como fracción de la altura corporal H. .... | 305 |
| Fig. I1. Ambiente para las pruebas de laboratorio. ....                                                | 307 |
| Fig. I2. Posicionamiento de video cámaras en plano sagital y frontal. ....                             | 308 |
| Fig. I3. Posicionamiento de marcadores en los segmentos importantes analizar .....                     | 308 |

## INTRODUCCIÓN

En Perú, la diabetes mellitus es la principal causa de la mayoría de las amputaciones de miembro inferior, considerando que 142 mil personas sufren de esta enfermedad crónica según los datos del CONADIS de 2016. Además, unas 3.7 mil personas utilizan prótesis de piernas de acuerdo con el INEI en 2015. Sin embargo, el acceso a prótesis mecánicas es limitado y, por lo general, se obtienen mediante donación, mientras que el acceso a prótesis robóticas es casi inexistente debido a su elevado costo, que oscila entre 50 a 70 mil dólares. En este contexto, el desarrollo de prótesis avanzadas y funcionales busca mejorar la calidad de vida de las personas con amputaciones y proporcionar una mayor autonomía en sus actividades diarias. En particular, el diseño y la implementación de prótesis del miembro inferior es de gran importancia, siendo el tobillo una de las articulaciones más complejas y fundamentales para lograr una marcha natural y eficiente.

La presente tesis se centra en la modelación y simulación dinámica de un mecanismo paralelo aplicado a un tobillo protésico. Se propone un mecanismo paralelo con tres grados de libertad como una solución para replicar los movimientos naturales del tobillo humano; plantarflexión-dorsiflexión, eversion-inversion y abduction-adduction.

En esta investigación, se realiza un estudio exhaustivo del estado del arte, enfocándose en la biomecánica del tobillo. Este estudio incluye la anatomía del complejo tobillo-pie, los aspectos fundamentales y funcionales de la biomecánica de la marcha humana.

Así mismo, se revisan los fundamentos teóricos y los antecedentes de los mecanismos paralelos, incluyendo el par cinemático, la cadena cinemática, la clasificación de los mecanismos paralelos y su aplicación en la asistencia y rehabilitación de las articulaciones de tres grados de libertad del cuerpo humano, junto con las herramientas matemáticas para la localización espacial, la cinemática y la dinámica inversa en mecanismos paralelos, y las herramientas de simulación dinámica.

Posteriormente, se elabora la propuesta conceptual de un mecanismo paralelo para el tobillo-pie protésico de 3 grados de libertad. Esto incluye los requerimientos para el diseño del mecanismo paralelo, caja negra del sistema, la estructura de funciones, la cual

incorpora las funcionalidades de los dominios electrónico, mecánico y de control; se presenta la matriz morfológica, de la cual se pueden plantear los conceptos de solución y finalmente, le evaluación técnica y económica de cada solución y la elección del concepto de solución óptimo, siguiendo la metodología VDI 2225.

A continuación, se presenta la modelación cinemática del mecanismo 2SPU-1RU, así como las matrices Jacobianas de las cadenas cinemáticas y el modelo dinámico inverso del mecanismo paralelo basado en el Principio del Trabajo Virtual. Luego se programa un algoritmo en MATLAB R2022b y se resuelven las ecuaciones de movimiento de la cinemática y dinámica, obteniendo resultados que muestran el desplazamiento, las velocidades y aceleraciones angulares y lineales, así como también torques y fuerzas de los actuadores en función del tiempo.

La validación se realiza mediante la comparación de la solución teórica realizado con el algoritmo programado en MATLAB R2022b con los resultados numéricos obtenidos en un entorno de simulación Simscape. Así mismo, la validación continúa con la construcción de un prototipo físico del mecanismo paralelo. Finalmente se compara solución teórica realizado con el algoritmo programado en MATLAB R2022b con el prototipo de mecanismo paralelo. Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

La modelación del mecanismo paralelo de 3 grados de libertad para tobillo protésico impulsa el desarrollo de dispositivos que asisten en la locomoción de personas con amputación, consolidando el área de biomecánica, robótica y análisis de movimiento.



## **CAPÍTULO 1**

### **BIOMECÁNICA DEL TOBILLO**

En el primer capítulo de esta tesis se aborda la anatomía del tobillo-pie, donde se presenta en detalle los elementos que lo componen, incluyendo los huesos, articulaciones, ligamentos y músculos. A continuación, se exponen los aspectos fundamentales del tobillo-pie, centrándose en el tipo de pie, la antropometría, los planos anatómicos, los ejes de movimiento, los tipos de movimientos y los rangos de movimiento correspondientes. Además, se presentan los aspectos funcionales de la biomecánica del tobillo-pie en el ciclo de marcha. Se analizan los períodos y las fases que conforman este ciclo, los parámetros espaciales, temporales y espaciotemporales del ciclo de marcha, y se profundiza en la cinemática y la cinética asociadas. Por último, se estudia el comportamiento biomecánico del tobillo-pie en diferentes tipos de terreno y el caso particular de la marcha protésica en personas con amputación transtibial.

#### **1.1 Anatomía del tobillo-pie**

La anatomía del tobillo y el pie comprende una variedad de estructuras que trabajan en conjunto para permitir el movimiento, el equilibrio y la función adecuada. Estas estructuras comprenden los huesos, articulaciones, músculos, ligamentos y tendones. El tobillo y pie forman una estructura anatómica compleja y están formados por 26 huesos en el pie, 30 articulaciones sinoviales, 30 músculos y más de 100 ligamentos y tendones [Hamill, 2015].

### 1.1.1 Huesos del pie

El pie está compuesto por un total de 26 huesos que trabajan en conjunto para proporcionar estabilidad, movimiento y soporte al pie durante la marcha y otras actividades diarias. Cada hueso tiene una función específica y se articula con otros huesos y estructuras para permitir una amplia gama de movimientos y adaptarse a diferentes superficies y terrenos.

Los huesos se dividen en tres grupos principales: el retropié, el mediopié y el antepié, como se puede observar en la Figura 1.1. En el retropié está formado por los dos huesos más grandes, que incluyen el calcáneo, y el astrágalo. El mediopié está formado por cinco huesos, que comprenden el escafoide, el cuboide y las cuñas interna, intermedia y lateral. Por último, el antepié está compuesto por cinco metatarsianos; el primer, segundo, tercer, cuarto y quinto metatarsiano, y por catorce las falanges, que incluyen las falanges proximales, mediales y distales, como se puede observar en la Figura 1.2.

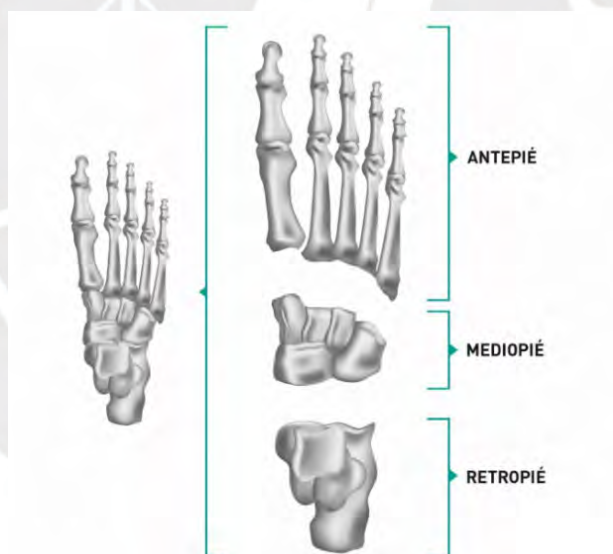


Fig. 1.1 Grupos principales de huesos del pie<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Tomado de: <https://www.podoactiva.com/blog/huesos-del-pie-nombres-partes-y-funciones-de-esta-anatomia-osea> Fecha de revisión: 11-04-2019.

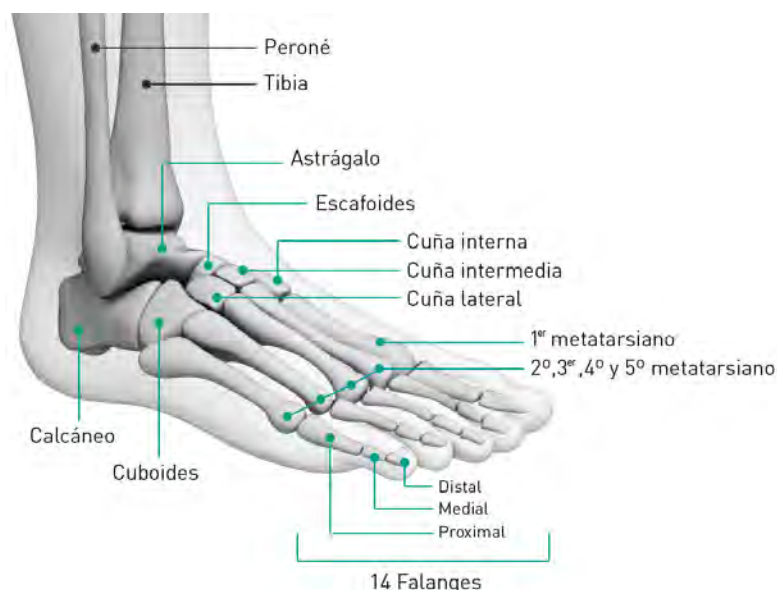


Fig. 1.2 Huesos del pie y tobillo<sup>2</sup>.

### a) Huesos del retropié

Calcáneo: es el hueso más grande del pie y desempeña una función importante en el talón como el primer hueso en recibir el impacto durante el paso. El calcáneo distribuye las presiones generadas y ayuda a amortiguar el choque. Además, está cubierto por una capa gruesa de tejido adiposo, que actúa como amortiguación.

Astrágalo: se encuentra encima del calcáneo y es el segundo hueso más grande del pie. Su posición y forma le permiten encajar con la tibia y el peroné, formando así la articulación del tobillo. Esta articulación posibilita movimientos importantes, como la plantarflexión, que consiste en bajar la punta del pie, y la dorsiflexión, que implica elevar la punta del pie hacia arriba.

### b) Huesos del mediopie

Escafoides o navicular: es un hueso del pie que se articula por su parte posterior con el astrágalo, por la parte lateral con el cuboides y en su cara anterior con las 3 cuñas. En su parte medial se inserta un tendón de gran importancia conocido como el tendón tibial posterior.

<sup>2</sup> Tomado de: <https://www.podoactiva.com/blog/huesos-del-pie-nombres-partes-y-funciones-de-esta-anatomia-osea> Fecha de revisión: 11-04-2019.

Cuboides: tiene una forma similar a la de un cubo y se encuentra en la zona lateral del pie. Por su parte medial articula con el escafoides, por la parte posterior con el calcáneo y por su parte anterior con el cuarto y quinto metatarsiano.

Cuneiformes o cuñas: el pie cuenta con tres huesos conocidos como cuneiformes o cuñas. Estos huesos se denominan cuña medial, cuña intermedia y cuña lateral. Junto con el cuboides forman la articulación tarsometatarsiana y se conectan con los metatarsos por sus caras anteriores.

### **c) Huesos del antepié**

Huesos del metatarso: está compuesto por cinco huesos alargados, similares entre sí, pero de diferentes longitudes. Estos huesos se articulan con los dedos del pie y proporcionan soporte estructural y funcional.

Falanges: el pie cuenta con un total de 14 falanges. Las falanges proximales se articulan con los huesos del metatarso. Los cuatro dedos laterales del pie tienen tres falanges cada uno, denominadas falange proximal, falange media y falange distal. En cambio, el dedo del pie consta solo de dos falanges, la falange proximal y la falange distal. Estas falanges permiten la flexión y extensión de los dedos del pie, facilitando los movimientos necesarios durante la marcha y otras actividades. Su estructura articulada y su conexión con los huesos del metatarso son fundamentales para el equilibrio y la función adecuada del pie.

#### **1.1.2 Articulaciones**

Las articulaciones del pie interactúan de manera coordinada para permitir un movimiento fluido. En particular, la mayoría de los movimientos del pie se producen en tres articulaciones sinoviales principales que se muestra en la Figura 1.3: talocrural (tibio talar, tibio-peroné talar, suprastragalina), subtalar (subastragalina) y tarsal transversa (mediotarsiana). Estas articulaciones trabajan en conjunto para permitir una amplia variedad de movimientos y adaptabilidad del pie durante la marcha y otras actividades. Su funcionamiento adecuado y coordinado permite mantener la estabilidad, el equilibrio y la capacidad de respuesta del pie en diferentes situaciones [Hamill, 2015].

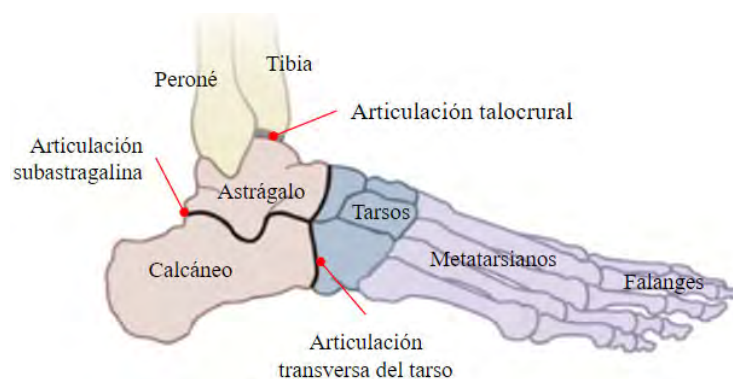


Fig. 1.3 Articulaciones talocrural, subtalar y tarsal transversa<sup>3</sup>.

#### a) Articulación talocrural

La articulación talocrural o articulación del tobillo que se presenta en la Figura 1.4 es la articulación proximal del pie tipo bisagra uniaxial. Es la unión entre la tibia-peroné (articulación tibiofibular distal) y tibia-astrágalo (articulación tibiotalar). Esta articulación proporciona estabilidad en lugar de movilidad [Drake, 2015]. La superficie articular principal de esta articulación es la interfaz entre la tibia y el astrágalo. Es importante destacar que el astrágalo no tiene una conexión muscular directa, ya que solo incluye la cabeza, el cuello y el cuerpo. La tróclea del astrágalo se encaja en la mortaja formada por los extremos distales de los huesos largos de la pierna.

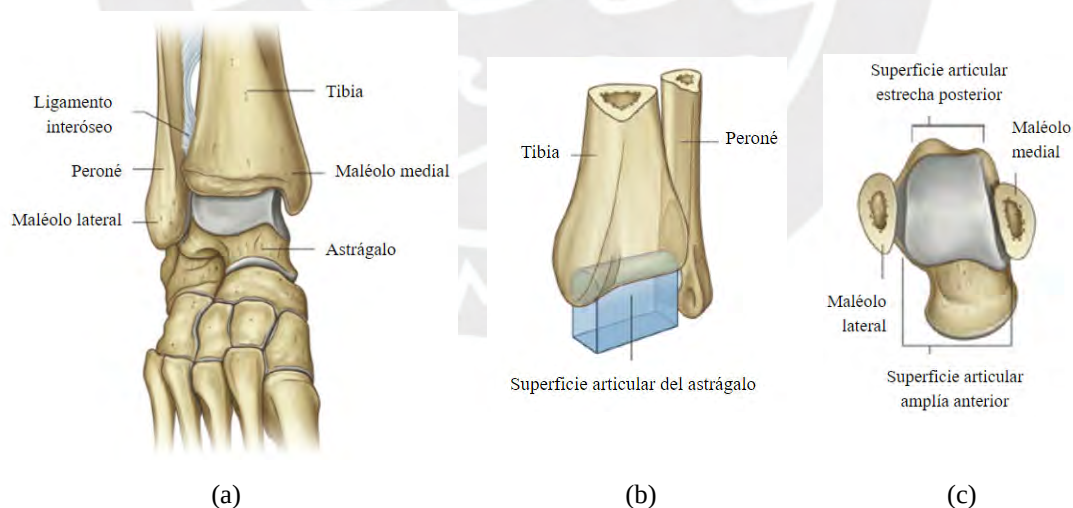


Fig. 1.4 Articulación talocrural o articulación de tobillo: (a) vista anterior con el pie en plantarflexión, (b) esquemático articulación, (c) vista superior de la articulación talocrural [Drake, 2015].

<sup>3</sup> Tomado de: <https://musculoskeletalkey.com/structure-and-function-of-the-ankle-and-foot/> Fecha de revisión: 11-04-2019.



Los maléolos medial y lateral de la tibia y el peroné respectivamente actúan como restricciones para el astrágalo, lo que hace que la articulación funcione principalmente como una articulación de bisagra, permitiendo movimientos de plantarflexión y dorsiflexión del pie. La dorsiflexión se refiere a la elevación de la parte superior del pie hacia la tibia, mientras que la plantarflexión implica la extensión del pie hacia abajo [Brockett, 2016].

Aunque la articulación tibiotalar se considera generalmente como una bisagra, la geometría de la articulación, como la superficie de la tróclea en forma de cono y el eje de rotación oblicuo, sugiere que su funcionamiento puede ser más complejo. Además, la parte anterior más ancha del astrágalo brinda mayor estabilidad en la dorsiflexión. La geometría específica de la articulación tibiotalar contribuye a su estabilidad y funcionamiento adecuado [Brockett, 2016].

#### **b) Articulación subtalar (subastragalina o astrágalo calcánea)**

La articulación subtalar es una articulación importante del pie que se forma entre el calcáneo, el hueso más grande y fuerte en la parte posterior del pie, y el astrágalo, ubicado en una posición superior al calcáneo [Kapandji, 2012]. La articulación subtalar tiene dos superficies articulares: las caras inferiores del astrágalo, que son convexas, (ver Figura 1.5a) y las superficies superiores y posteriores del calcáneo, que son cóncavas (ver Figura 1.5b). Esta geometría de las superficies articulares permite los movimientos de inversión y eversión del tobillo [Brockett, 2016]. La inversión es un movimiento en el cual la superficie plantar del pie gira hacia la línea media del cuerpo, mientras que la eversión es el movimiento contrario.



Fig. 1.5 Superficies que forman la articulación talocalcánea o subtalar: (a) visión externa, (b) visión interna [Kapandji, 2012].

La articulación subtalar permite la adaptación del pie a diferentes superficies y terrenos, así como en la absorción de impactos durante la marcha y otras actividades. Esta articulación es triplanar y uniaxial, lo que significa que permite movimientos en tres planos diferentes. El movimiento triplanar en la articulación se denomina pronación-supinación. La pronación ocurre en un sistema de cadena abierta con el pie del suelo, consiste en eversión, abducción y dorsiflexión. La supinación es el conjunto de movimientos contrarios (inversión, aducción y plantarflexión).

### c) Articulación tarsal transversal (mediotarsiana)

La articulación tarsal transversal también conocida como articulación de Chopart se muestra en la Figura 1.6. Esta articulación combina la unión entre el astrágalo y el escafoides, donde la cabeza del astrágalo se articula con la cara posterior del escafoides y la articulación calcáneo-cuboidea, que es la articulación entre el calcáneo y el cuboide.

La articulación tarsal transversa se considera parte de la misma unidad funcional que la articulación subtalar, ya que comparten un eje de movimiento común y están involucradas en los movimientos de eversión-inversión, abducción-aducción y plantarflexión-dorsiflexión.

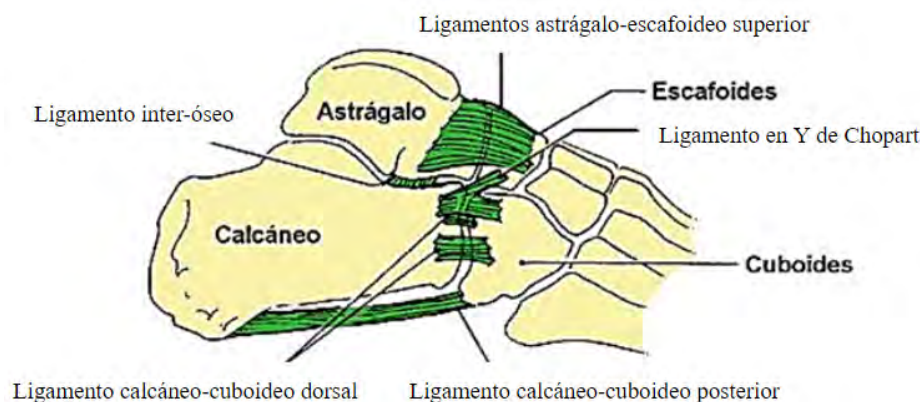


Fig. 1.6 Articulación de Chopart<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Tomado de: <https://docplayer.es/75550931-I-fisiologia-articular-de-la-cadera-1.html> Fecha de revisión: 11-04-2019.



### 1.1.4 Músculos

Los músculos del pie contribuyen en varios movimientos, entre ellos se encuentra plantarflexión-dorsiflexión y eversión-inversión del pie. En el pie existen 20 músculos, los cuales se dividen en plantares y dorsales [Drake, 2015].

#### a) Músculos plantares

Los músculos plantares del pie se dividen en músculos plantares laterales, músculos plantares centrales, y músculos plantares mediales como se muestra en la Figura 1.8.

Los músculos plantares laterales: actúan sobre el quinto dedo. Estos son el músculo abductor del quinto dedo, el flexor corto del quinto dedo y el músculo oponente del quinto dedo.

Los músculos plantares centrales: actúan sobre los cuatro dedos laterales del pie. Estos son el flexor corto de los dedos, el cuadrado plantar, cuatro lumbricales, tres interóseos plantares y cuatros interóseos dorsales.

Los músculos plantares mediales: actúan sobre el dedo gordo del pie. Estos son el abductor del dedo gordo, el aductor del dedo gordo, el flexor corto del dedo gordo del pie.

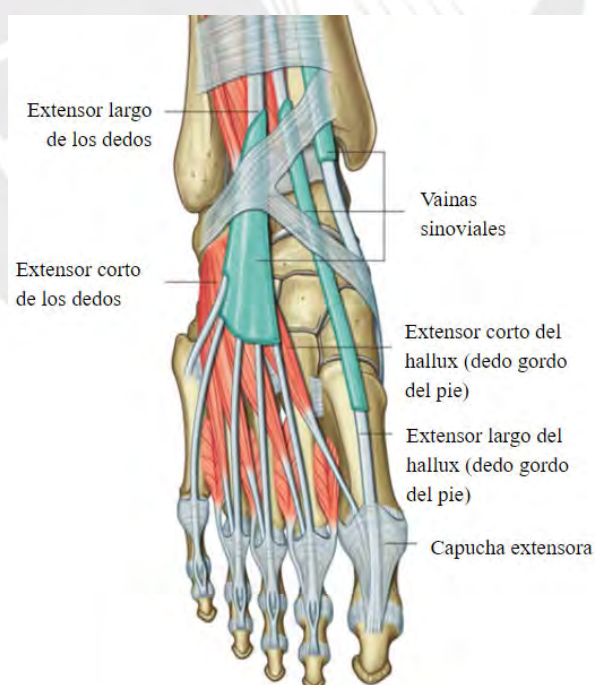


Fig. 1.8 Músculos plantares del pie [Drake, 2015].







Primera capa: se encuentran el abductor del dedo gordo, el flexor corto de los dedos, y el abductor del quinto dedo.

Segunda capa: se encuentran el cuadrado plantar, y los lumbricales.

Tercera capa: está el flexor corto del dedo gordo, el aductor del dedo gordo, flexor corto del quinto dedo.

Cuarta capa: están los interóseos plantares, y los interóseos dorsales.

## **1.2 Aspectos fundamentales del tobillo-pie**

En los aspectos fundamentales del tobillo-pie se estudiará los tipos de pie, la antropometría, los planos de movimiento, tipos de movimiento y los rangos de movimiento.

### **1.2.1 Tipos de pie**

El pie humano puede clasificarse en diferentes tipos según la longitud relativa del primer y segundo dedo, y se conocen como pie egipcio, pie griego y pie cuadrado.

El pie egipcio (Figura 1.10a) se caracteriza por tener el segundo dedo más corto que el primer dedo. En este caso, el dedo más largo es el dedo gordo (primer dedo) y los demás dedos se van acortando progresivamente hacia el quinto dedo.

En contraste, en el pie griego (Figura 1.10b) el segundo dedo es más largo que el primer dedo. Esto significa que el dedo más largo en este tipo de pie es el segundo dedo, mientras que los otros dedos se van acortando sucesivamente hacia el quinto dedo.

Por último, el pie cuadrado (Figura 1.10c) se refiere a aquel en el que el primer y el segundo dedo tienen la misma longitud. En este caso, ambos dedos son aproximadamente del mismo tamaño, lo que resulta en una apariencia más cuadrada en la parte frontal del pie.

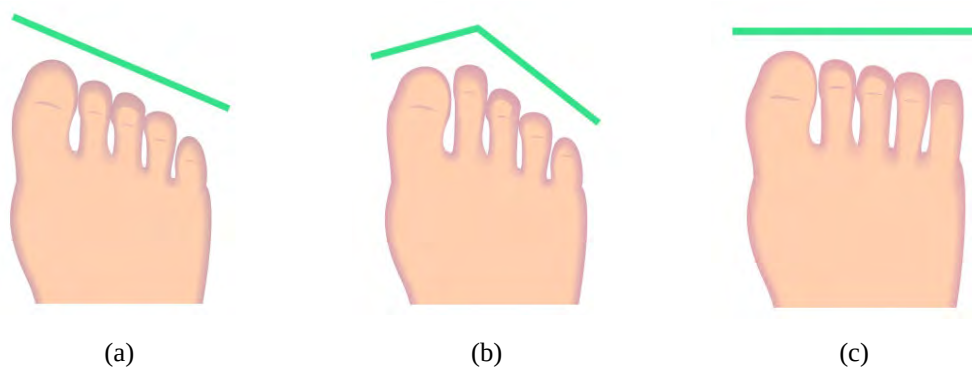


Fig. 1.10 Tipos de pie según longitud del primer y segundo dedo: (a) pie egipcio, (b) pie griego, (c) pie cuadrado<sup>6</sup>.

Además, el pie humano también puede ser clasificado según la forma de su arco plantar, dando lugar a tres categorías principales: pie plano, pie cavo y pie normal, como se muestra en la Figura 1.11.

El pie plano se caracteriza por tener una bóveda plantar baja o inexistente. En este caso, el arco del pie toca o se aproxima al suelo cuando se realiza la carga sobre el pie. Esto puede dar lugar a una distribución desigual de las presiones y puede estar asociado con problemas de estabilidad y pronación excesiva.

Por otro lado, el pie cavo se caracteriza por tener una bóveda plantar alta. En este caso, el arco del pie está más elevado de lo normal, lo que puede resultar en una distribución desigual de las presiones y una menor capacidad de absorción de impactos. Esto puede estar asociado con problemas de estabilidad y supinación excesiva.

Finalmente, el pie normal se encuentra dentro del rango intermedio, con una altura de arco plantar considerada dentro de los límites normales. El arco del pie presenta una curva característica y se mantiene en una posición equilibrada entre el pie plano y el pie cavo.

<sup>6</sup> Tomado de: <https://www.podoactiva.com/blog/huesos-del-pie-nombres-partes-y-funciones-de-esta-anatomia-osea> Fecha de revisión: 11-04-2019

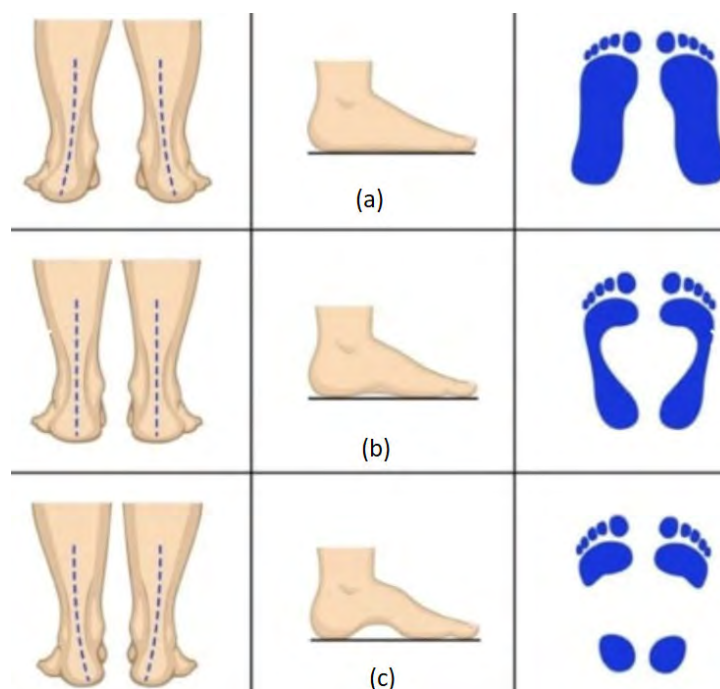


Fig. 1.11 Tipos de pie según bóveda plantar: (a) pie plano, (b) pie normal, (c) pie cavo<sup>7</sup>.

### 1.2.2 Antropometría

El término antropometría proviene del griego *anthropos* (hombre) y *metrikos* (medida) y trata del estudio cuantitativo de las características físicas del hombre. Los datos antropométricos se expresan generalmente en percentiles. Un percentil expresa el porcentaje de individuos de una población dada con una dimensión corporal igual o menor a un determinado valor [Valero, 2014].

Las variables antropométricas son principalmente longitudes, curvas o arcos, y perímetros. También se puede medir el espesor de los pliegues de la piel, o volúmenes por inmersión en agua. Las medidas antropométricas mostradas en la Figura 1.12 y las Tablas 1.1 y 1.2, son las necesarias para la investigación de articulación tobillo-pie. Por lo que se considera las medidas lineales como la estatura y altura del tobillo, longitud del pie, ancho del pie, así mismo, se considera los perímetros del miembro inferior; muslo, rodilla, pantorrilla y pie.

<sup>7</sup> Tomado de: <https://www.meds.cl/pie-cavo/> Fecha de revisión: 11/04/2019.

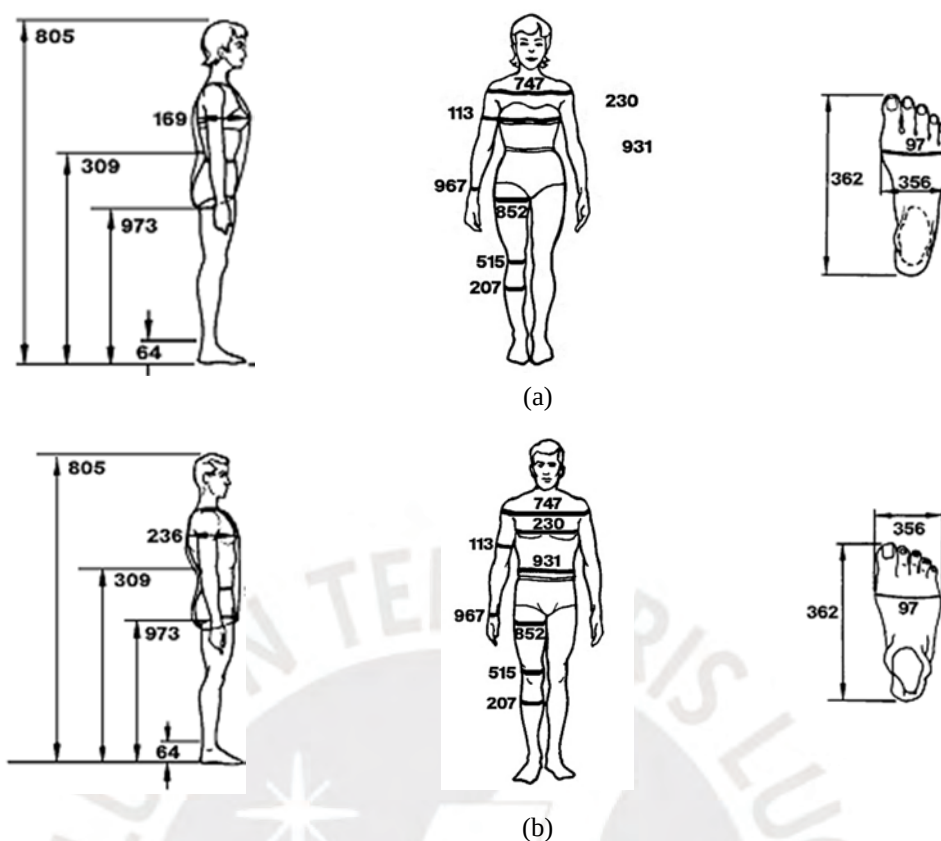


Fig. 1.12 Medidas antropométricas del cuerpo: (a) mujer, (b) hombre<sup>8</sup>.

Tabla 1.1 Medidas antropométricas del cuerpo de la mujer y hombre según percentil<sup>9</sup>.

| Sexo   | Nº  | Medida antropométrica       | Percentil 5 (m) | Percentil 50 (m) | Percentil 95 (m) |
|--------|-----|-----------------------------|-----------------|------------------|------------------|
| Mujer  | 805 | Estatura                    | 1,489           | 1,570            | 1,651            |
|        | 64  | Altura del tobillo          | 0,052           | 0,061            | 0,070            |
|        | 362 | Longitud del pie            | 0,213           | 0,229            | 0,244            |
|        | 356 | Ancho del pie               | 0,086           | 0,093            | 0,100            |
|        | 852 | Perímetro del muslo         | 0,456           | 0,516            | 0,577            |
|        | 515 | Perímetro de rodilla        | 0,310           | 0,346            | 0,382            |
|        | 207 | Perímetro de la pantorrilla | 0,303           | 0,341            | 0,378            |
|        | 97  | Perímetro del pie           | 0,210           | 0,227            | 0,243            |
| Hombre | 805 | Estatura                    | 1,697           | 1,799            | 1,901            |
|        | 64  | Altura del tobillo          | 0,120           | 0,139            | 0,158            |
|        | 362 | Longitud del pie            | 0,254           | 0,273            | 0,293            |
|        | 356 | Ancho del pie               | 0,090           | 0,099            | 0,107            |
|        | 852 | Perímetro del muslo         | 0,525           | 0,600            | 0,674            |
|        | 515 | Perímetro de rodilla        | 0,359           | 0,394            | 0,429            |
|        | 207 | Perímetro de la pantorrilla | 0,339           | 0,376            | 0,414            |
|        | 97  | Perímetro del pie           | 0,231           | 0,251            | 0,272            |

8 Tomado de: <https://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm> Fecha de revisión: 11-04-2019.

9 Tomado de: <https://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm> Fecha de revisión: 11-04-2019.

Otros datos importantes son los datos de masa corporal total y de segmento corporal que se muestra en la Figura 1.13 y Tabla 1.2. Así mismo los momentos de inercia de los segmentos corporales del miembro inferior que se muestra en la Tabla 1.3.

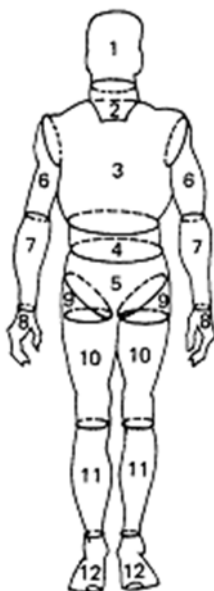


Fig. 1.13 Masas del segmento del cuerpo humano<sup>10</sup>.

Tabla 1.2 Masa de los segmentos corporales según percentil<sup>11</sup>.

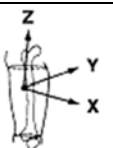
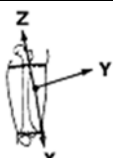
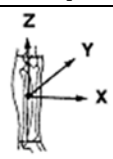
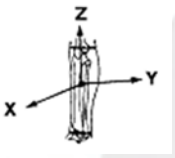
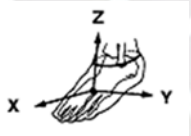
| Nº | Segmento       | Percentil 5 (kg) | Percentil 50 (kg) | Percentil 95 (kg) |
|----|----------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 1  | Cabeza         | 4,26             | 4,40              | 4,55              |
| 2  | Cuello         | 0,93             | 1,10              | 1,27              |
| 3  | Tórax          | 20,42            | 26,11             | 31,76             |
| 4  | Abdomen        | 2,03             | 2,50              | 2,96              |
| 5  | Pelvis         | 9,42             | 12,30             | 15,15             |
| 6  | Brazo superior | 1,60             | 2,50              | 2,50              |
| 7  | Antebrazo      | 1,18             | 1,45              | 1,75              |
| 8  | Manos          | 0,46             | 0,530             | 0,610             |
| 9  | Cadera         | 2,89             | 3,64              | 4,38              |
| 10 | Muslo          | 5,48             | 6,70              | 7,92              |
| 11 | Pierna         | 3,32             | 4,04              | 4,76              |
| 12 | Pie            | 0,84             | 1,01              | 1,18              |

<sup>10</sup> Tomado de: <https://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm> Fecha de revisión: 11-04-2019

<sup>11</sup> Tomado de: <https://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm> Fecha de revisión: 11-04-2019.



Tabla 1.3 Momento de inercia de los segmentos corporales según percentil<sup>12</sup>.

| Segmento                                                                                                    | Eje | Percentil 5<br>(kg m <sup>2</sup> ) x10 <sup>-5</sup> | Percentil 50<br>(kg m <sup>2</sup> ) x10 <sup>-5</sup> | Percentil 95<br>(kg m <sup>2</sup> ) x10 <sup>-5</sup> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| <br>Muslo derecho          | X   | 4,536                                                 | 6,531                                                  | 8,523                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 4,692                                                 | 6,734                                                  | 8,773                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 1,784                                                 | 2,552                                                  | 3,313                                                  |
| <br>Muslo izquierdo        | X   | 4,373                                                 | 6,209                                                  | 8,040                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 4,607                                                 | 6,534                                                  | 8,457                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 1,723                                                 | 2,469                                                  | 3,210                                                  |
| <br>Pantorrilla derecha    | X   | 4,307                                                 | 6,181                                                  | 8,048                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 4,377                                                 | 6,271                                                  | 8,160                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 0,518                                                 | 0,720                                                  | 0,921                                                  |
| <br>Pantorrilla izquierda | X   | 4,341                                                 | 6,296                                                  | 8,247                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 4,414                                                 | 6,397                                                  | 8,377                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 0,507                                                 | 0,728                                                  | 0,947                                                  |
| <br>Pie derecho          | X   | 0,065                                                 | 0,087                                                  | 0,109                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 0,338                                                 | 0,461                                                  | 0,583                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 0,360                                                 | 0,488                                                  | 0,617                                                  |
| <br>Pie izquierdo        | X   | 0,061                                                 | 0,083                                                  | 0,106                                                  |
|                                                                                                             | Y   | 0,324                                                 | 0,447                                                  | 0,570                                                  |
|                                                                                                             | Z   | 0,342                                                 | 0,470                                                  | 0,598                                                  |

### 1.2.3 Planos y ejes anatómicos

Los movimientos humanos se describen en tres dimensiones utilizando un conjunto de planos y ejes, como se muestra en la Figura 1.14. El plano sagital, el plano frontal y el plano transversal son tres planos mutuamente perpendiculares que dividen el cuerpo humano. El plano sagital divide el cuerpo en dos mitades derecha e izquierda. El plano frontal divide el cuerpo en mitades anterior y posterior. Finalmente, el plano transversal divide el cuerpo en superior e inferior. Los ejes frontal o mediolateral, vertical y sagital o anteroposterior cruzan todos perpendicularmente a estos tres planos. La unión de los

<sup>12</sup> Tomado de: <https://msis.jsc.nasa.gov/sections/section03.htm> Fecha de revisión: 11-04-2019.

planos sagital y transversal crea el eje sagital, que se extiende horizontalmente desde las secciones posterior a anterior del cuerpo. La intersección de los planos frontal y transversal produce el eje mediolateral, y se extiende horizontalmente desde las secciones de izquierda a derecha. Los planos sagital y frontal convergen para producir el eje vertical, que se extiende verticalmente desde las regiones inferior a la superior [Taboadela, 2007].

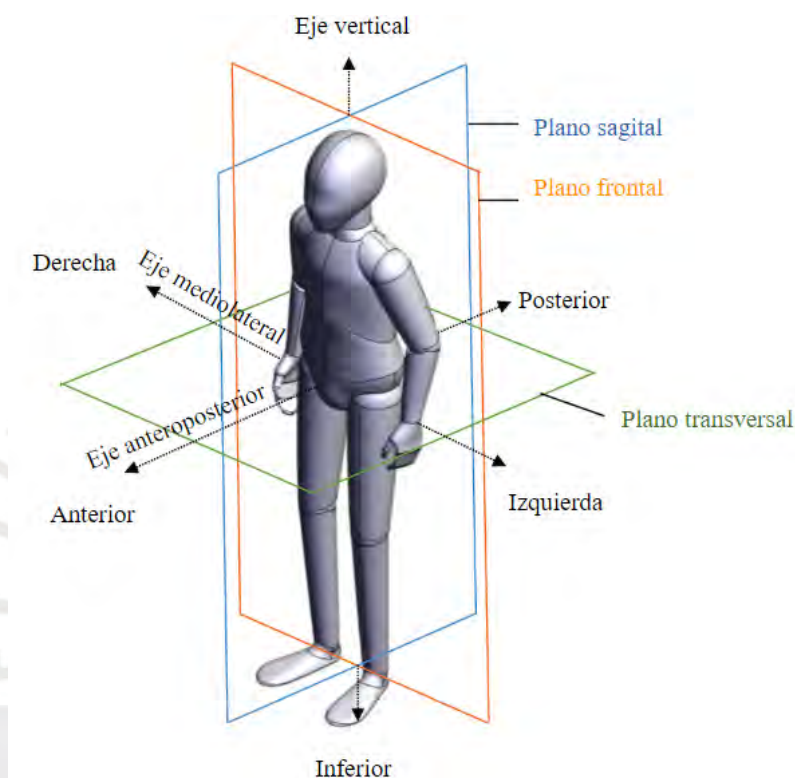


Fig. 1.14 Planos y ejes anatómicos del cuerpo humano [Abarca, 2023].

Así mismo, se considera que el pie está dividido por tres planos: sagital, frontal y transversal. cada uno de estos planos está en ángulo recto con los otros dos planos, como se muestra en la Figura 1.15. El plano sagital se extiende de adelante hacia atrás y divide el pie en medio y lateral. La línea media del pie pasa por la línea del segundo dedo del pie, el plano frontal se extiende de lado a lado y se separa anterior de posterior, y el plano transversal se encuentra paralelo a la superficie del suelo y se divide superior a inferior [Taboadela, 2007].

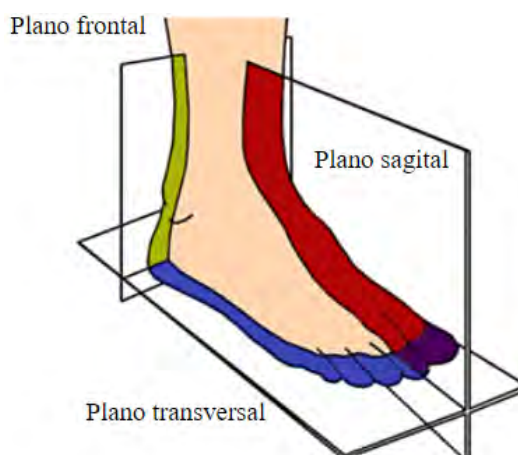


Fig.1.15 Planos anatómico del tobillo-pie<sup>13</sup>.

En la articulación del pie se tiene tres ejes principales. Cuando el pie está en una posición de referencia de la Figura 1.16, estos tres ejes son perpendiculares entre sí.

El eje *X* o eje anteroposterior está contenido en el plano sagital y es paralelo al suelo cuando el pie descansa totalmente sobre el suelo. El eje *Y* o eje mediolateral pasa por los dos maléolos<sup>14</sup> y corresponde al eje de la articulación talocrural. Está incluido en el plano frontal y condiciona a los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión del pie que se realizan en el plano sagital. El eje *Z* o eje longitudinal, es paralelo a la pierna y condiciona los movimientos de abducción-aducción del pie, que se efectúan en el plano transversal. Condiciona la orientación de la planta del pie de forma que permite los movimientos de eversión-inversión.

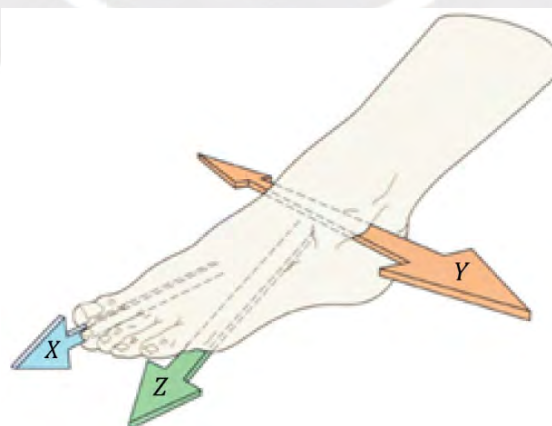


Fig. 1.16 Ejes de movimiento del tobillo-pie [Kapandji, 2012].

<sup>13</sup> Tomado de: <https://www.elearnuk.co.uk/uploads/courses/168.pdf> Fecha de revisión:11-04-2019.

<sup>14</sup> Maléolos: protuberancia de la tibia y del peroné que sobresalen respectivamente en el lado interno y externo del tobillo. Según la Real Academia Española: [https://dle.rae.es/mal%C3%A9olo?m=30\\_2](https://dle.rae.es/mal%C3%A9olo?m=30_2). Fecha de revisión:21-01-2024.

Analizando a detalle la biomecánica de la articulación subastragalina, estudios recientes discuten la mecánica de este complejo articular periastragalino basándose en la aceptación por todos los investigadores de un eje primario responsable de los movimientos de esta articulación. Este eje se denomina “eje de Hencke” y forma un ángulo de aproximadamente  $42^\circ$  con el plano transversal, y de  $16^\circ$  a  $25^\circ$  con el plano sagital, como se muestra en la Figura 1.17. Esta orientación del eje origina un movimiento conjunto de la articulación en los 3 planos del espacio [Nuñez, 2006].

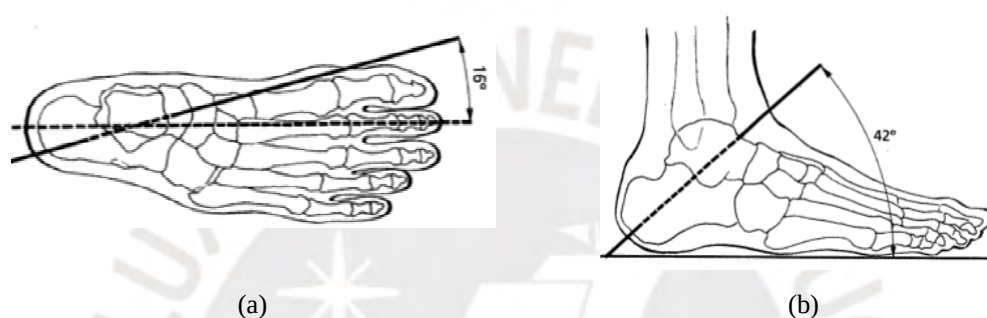


Fig. 1.17 Eje de movimiento de la articulación subastragalina: (a) representación en plano transversal, (b) representación en plano sagital [Nuñez, 2006].

El eje de Hencke que se muestra en la Figura 1.18, es el resultado de la combinación de los ejes horizontal-frontal, horizontal-anteroposterior y vertical-sagital. El eje oblicuo hacia fuera, hacia atrás, y hacia abajo. se describe desde la cara interna del cuello del astrágalo, y cruza el seno del tarso y sale del pie a nivel del tubérculo posterior-exterior del calcáneo.

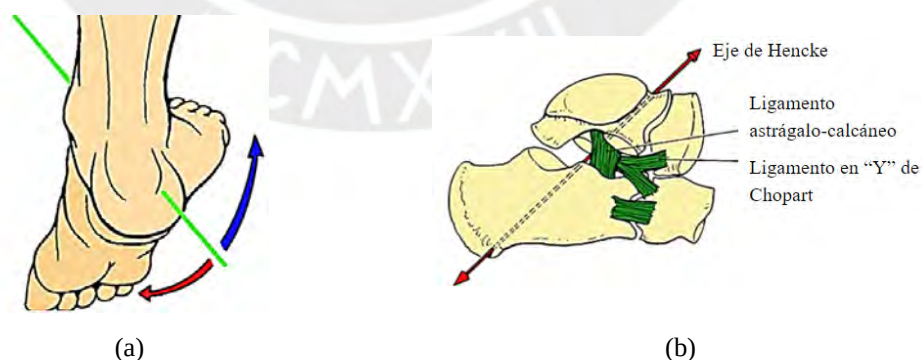


Fig. 1.18 Eje de Hencke: (a) representación isométrica, (b) representación en plano sagital<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Tomado de: <https://docplayer.es/75550931-I-FISIOLOGIA-ARTICULAR-DE-LA-CADERA-1.HTML>. Fecha de revisión: 11-04-2019.

### 1.2.4 Tipos de movimiento

La articulación del pie no realiza movimientos aislados puros sobre los tres planos anatómicos plano sagital, plano frontal y plano transversal. El movimiento que realiza el pie en su conjunto corresponde a movimientos combinados que tiene lugar en los tres planos del espacio. Los movimientos del pie se producen en distintos planos anatómicos y cambian debido a que la pierna y el pie presentan una angulación entre sí de  $90^\circ$  [Nuñez, 2006]. Esta articulación puede realizar un par de movimientos en uno de los tres planos anatómicos. En el plano sagital realiza el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, como se muestra en la Figura 1.19a, en el plano frontal realiza el movimiento de eversión-inversión como se muestra en la Figura 1.19b y en el plano transversal realiza el movimiento de abducción-aducción como se muestra en la Figura 1.19c.

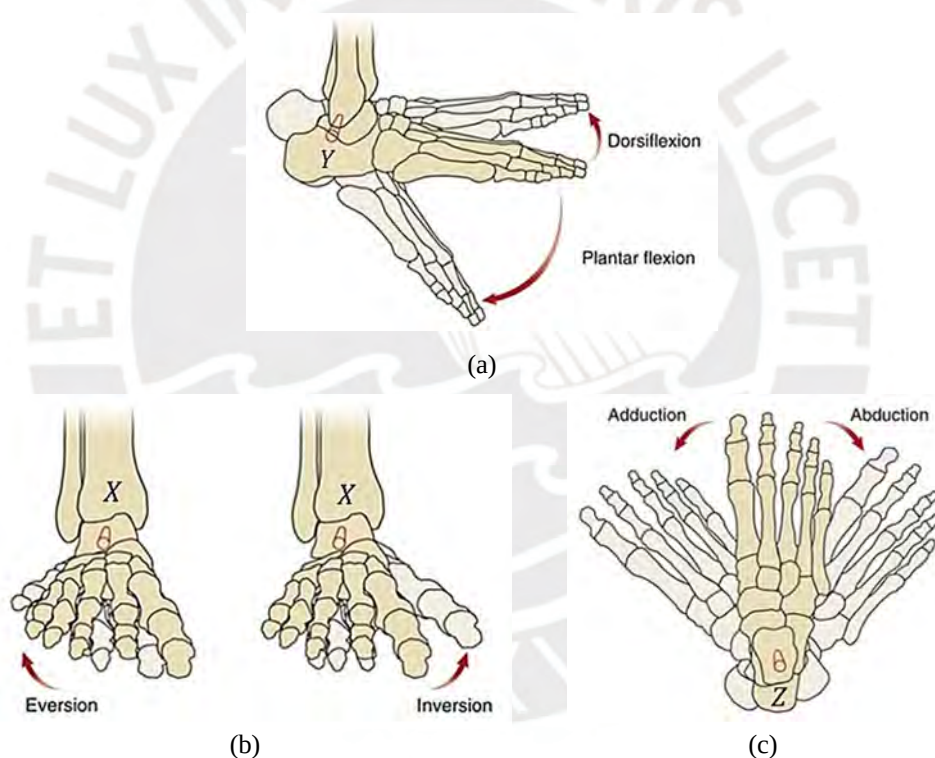


Fig. 1.19 Movimientos del pie: (a) plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital, (b) eversión-inversión en plano frontal, (c) abducción-aducción en plano transversal<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> Tomado de: <https://musculoskeletalkey.com/STRUCTURE-AND-FUNCTION-OF-THE-ANKLE-AND-FOOT/#S0055>. Fecha de revisión: 11-04-2019.



### 1.2.5 Rangos de movimiento

En el plano sagital el pie realiza el movimiento de plantarflexión con un rango de movimiento de  $0^\circ$  a  $45^\circ$ , y el movimiento de dorsiflexión con un rango de movimiento  $0^\circ$  a  $20^\circ$ , como se muestra en la Figura 1.20a [Yonezawa, 2014].

En el plano frontal el pie realiza el movimiento de eversión con un rango de movimiento de  $0^\circ$  a  $20^\circ$ , y el movimiento de inversión con un rango de movimiento de  $0^\circ$  a  $30^\circ$ , como se muestra en la Figura 1.20b.

En el plano transversal el pie realiza dos tipos de movimiento; el de abducción con un rango de movimiento de  $0^\circ$  a  $10^\circ$ , el de aducción con un rango de movimiento de  $0^\circ$  a  $20^\circ$ , como se muestra en la Figura 1.20c.

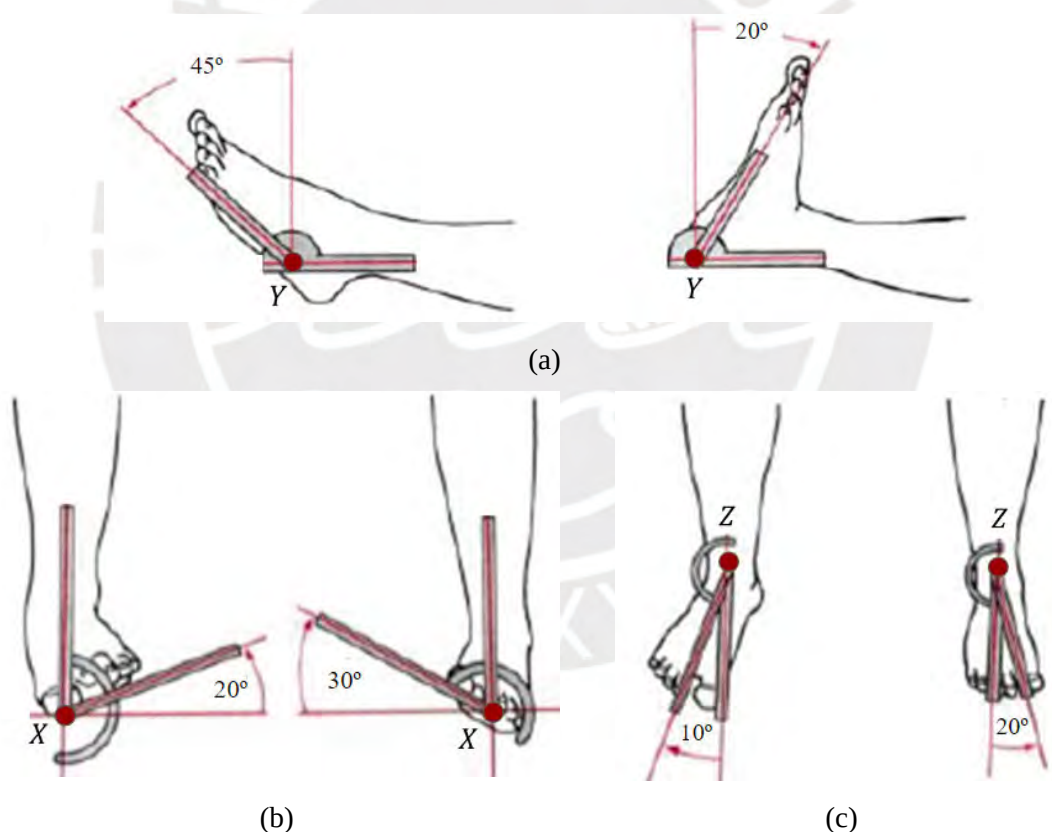


Fig. 1.20 Rango de movimiento del pie: (a) plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital, (b) eversión-inversión en plano frontal, (c) abducción-aducción en plano transversal<sup>17</sup>.

<sup>17</sup> Tomado de: <https://ieeexplore-ieee-org.ezproxybib.pucp.edu.pe/document/6944589> Fecha de revisión: 11-04-2019.

### 1.3 Aspectos funcionales de la biomecánica de la marcha humana

La marcha humana es un proceso de locomoción donde el cuerpo humano se mueve hacia delante en posición erecta, y su peso es soportado alternamente por ambos miembros inferiores. La locomoción humana también se describe como una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento hacia delante del centro de gravedad [Vera, 2006]. Durante la marcha se involucran todos los sistemas del cuerpo; el sistema nervioso central, el sistema nervioso periférico, el sistema muscular, el fluido sinovial, segmentos de unión rígida, el movimiento y fuerzas externas, como se muestra en la Figura 1.21a [Vaughan, 1999].

El sistema nervioso central trabaja como emisor de la señal de activación de los grupos musculares que generan las fuerzas necesarias. El sistema nervioso periférico funciona como sistema de control que enlaza los músculos con cada señal, discriminada en intensidad y ubicación. El sistema muscular aplica las cargas sobre los segmentos para generar el movimiento. El fluido sinovial lubrica y protege los elementos que se desplazan en las articulaciones cuando se genera el movimiento durante la marcha. Los segmentos de unión rígida constituyen el sistema multicuerpo que transmite las cargas a través del cuerpo para generar un cambio en la posición de todo el sistema. El movimiento se genera a raíz de la interacción entre los sistemas corporales, entregando como resultado las fuerzas en el suelo. Las fuerzas externas son el resultado físico medible en la superficie sobre la que se desplaza el individuo como se muestra en la Figura 1.21b [Vaughan, 1999].

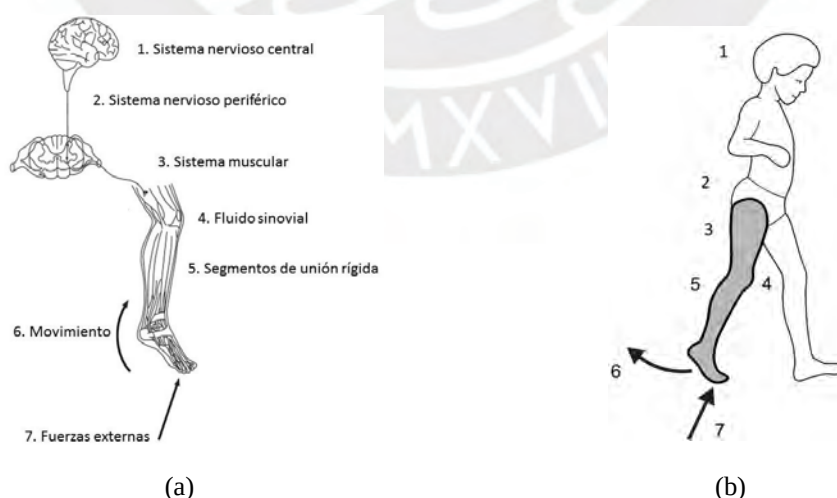


Fig. 1.21 Marcha humana: (a) sistemas involucrados, (b) fuerzas y momentos involucrados [Vaughan, 1999].

La compleja articulación del tobillo está comprendida entre la pierna y el pie y forma un enlace cinético que permite que la extremidad inferior interactúe con el suelo, que es un requisito clave para la marcha y otras actividades de la vida diaria. A pesar de tener altas fuerzas de compresión y corte durante la marcha, la estructura ósea y ligamentosa del tobillo le permite funcionar con un alto grado de estabilidad, en comparación con otras articulaciones como la cadera o la rodilla [Brockett, 2016]. Por lo tanto, es importante conocer las fases del ciclo de marcha humana, parámetros del ciclo de marcha, cinemática del ciclo de marcha, cinética del ciclo de marcha, comportamiento biomecánico en diferentes tipos de terreno, y ciclo de marcha de personas con amputación transtibial.

### 1.3.1 Ciclo de marcha humana

El ciclo de marcha se divide en dos períodos; el de soporte y el de balanceo, como se muestra en la Figura 1.22. El período de soporte constituye cerca del 62% del ciclo total y se refiere al tiempo que transcurre cuando un pie permanece en contacto con el piso, lo que permite que la carga o el peso del cuerpo se transfiera a la otra extremidad y se avance sobre el pie de soporte. El período de balanceo representa el 38% restante del ciclo y es el tiempo durante el cual la extremidad inferior permanece en el aire y avanza hacia adelante, el pie pierde contacto con el piso.

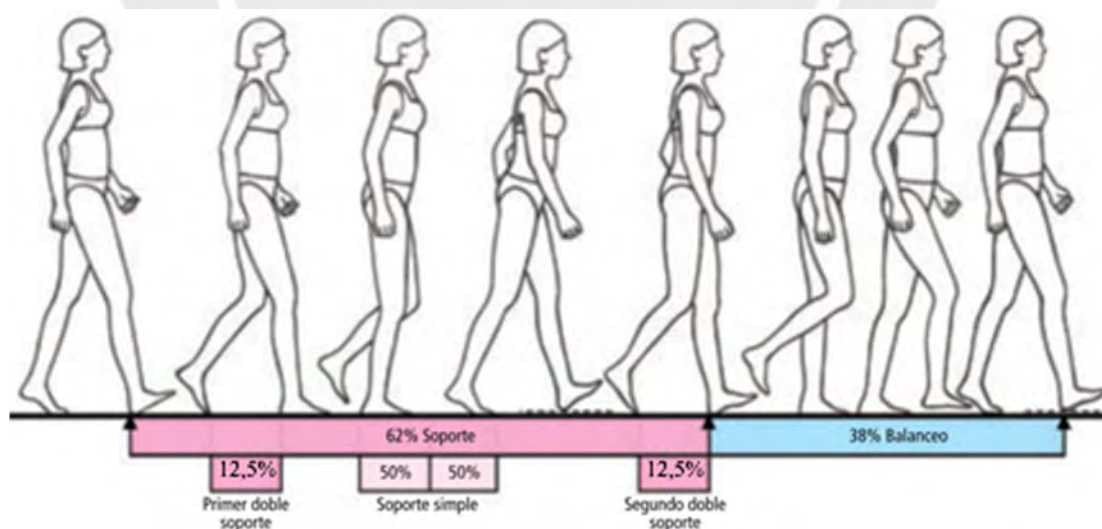


Fig. 1.22 Ciclo de marcha humana compuesto por el período de soporte (62%) y el de balanceo (38%) [Lesmes, 2007].

En el ciclo de marcha por instantes, los dos pies se encuentran en contacto con el piso, este evento se denomina período de doble soporte. Este período se presenta en dos ocasiones

durante el ciclo de la marcha, al iniciar y al culminar el período de soporte. Lo que constituye el 25% del ciclo de marcha, es decir que cada período de doble soporte representa el 12,5% [Lesmes, 2007].

### 1.3.1.1 Período de soporte

El período de soporte en el ciclo de la marcha tiene cinco fases, las cuales son: fase de contacto inicial, fase de respuesta a la carga, fase de soporte medio, fase de soporte terminal y fase de pre-balanceo, como se muestra en la Figura 1.23.

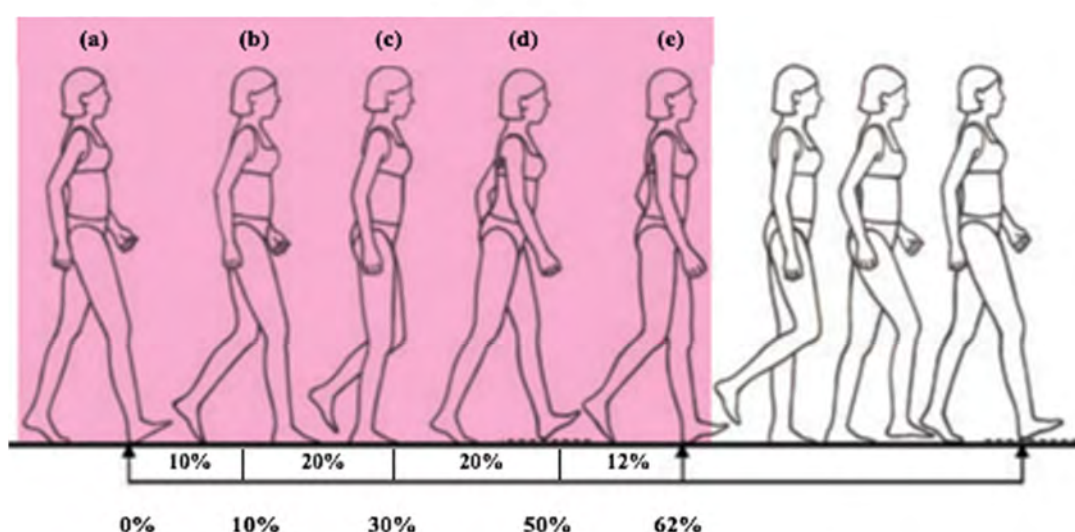


Fig. 1.23 Período de soporte: (a) fase de contacto inicial, (b) fase de respuesta a la carga, (c) fase de soporte medio, (d) fase de soporte terminal, (e) fase de pre-balanceo [Lesmes, 2007].

Fase de contacto inicial: esta fase se prolonga desde 0% hasta el 2% del ciclo de marcha y se considera para registrar el inicio y la culminación de un ciclo de marcha. Consiste en posicionar el pie correctamente al entrar en contacto con el suelo, por lo tanto, tiene lugar el posicionamiento del miembro para iniciar el apoyo en condiciones normales, se produce el apoyo del talón o en terminología antigua como “golpe de talón”. La cadera se encuentra en flexión, la rodilla en extensión y el tobillo en posición neutra.

Fase de respuesta a la carga o apoyo inicial: esta fase coincide con el primer período de doble apoyo o primer doble soporte y representa cerca del 10% inicial del ciclo de la marcha. Es el intervalo en el que el pie hace contacto total con el piso. En esta fase la extremidad absorbe el impacto inicial manteniendo la estabilidad y la progresión del apoyo. Esto se produce mediante la flexión de la rodilla y la plantarflexión del tobillo.

Fase de apoyo intermedio: esta fase inicia con la primera parte del apoyo monopodal, es decir cuando la extremidad contralateral pierde contacto con el piso. Dura entre el 10% al 30% del ciclo de marcha y representa el 50% del soporte simple. En esta fase el peso del cuerpo se trasfiere a lo largo del pie hasta que se alinea con la cabeza de los metatarsianos (antepié). El pie, como punto fijo, permite que el peso corporal se desplace progresivamente hacia adelante gracias a la rotación de la tibia sobre el pie estático. Conforme realiza el movimiento de dorsiflexión, la rodilla acaba de flexionarse para después iniciar la extensión, la cadera se extiende simultáneamente.

Fase de apoyo final: esta fase coincide con la segunda mitad del apoyo monopodal y dura del 30% al 50% del ciclo de marcha y representa el otro 50% del soporte simple. La finalidad de esta fase es proporcionar aceleración y asegurar una longitud de zancada correcta. Una vez que el peso corporal se encuentra alineado con la cabeza de los metatarsianos, el talón se levanta para desplazar el peso hacia los dedos y transferir la carga al pie contralateral, el cual entra en contacto con el piso. La extremidad avanza sobre el antepié, la rodilla termina su extensión y empieza a flexionarse. La cadera continúa en extensión y la fase se acaba cuando la extremidad contralateral contacta con el suelo.

Fase de pre-balanceo: es la fase de transición entre el período de soporte y el período de balanceo. Representa del 50% al 62% del periodo de soporte. Coincide con el inicio del segundo período de doble apoyo. Esta fase coincide en preparar el miembro para la oscilación. Inicia cuando el pie contralateral entra en contacto con el piso y termina cuando el pie ipsilateral (dedos) despega del piso. Durante el pre balanceo, el peso corporal es transferido totalmente de una extremidad a la otra; la ipsilateral se descarga por completo mientras la contralateral recibe la carga.

### **1.3.1.2 Período de balanceo**

El período de balance en el ciclo de la marcha se describe en términos de tres fases, las cuales son: fase inicial de oscilación o balanceo inicial, fase media de oscilación o balanceo intermedio y fase final de oscilación o balanceo final, como se muestra en la Figura 1.24.



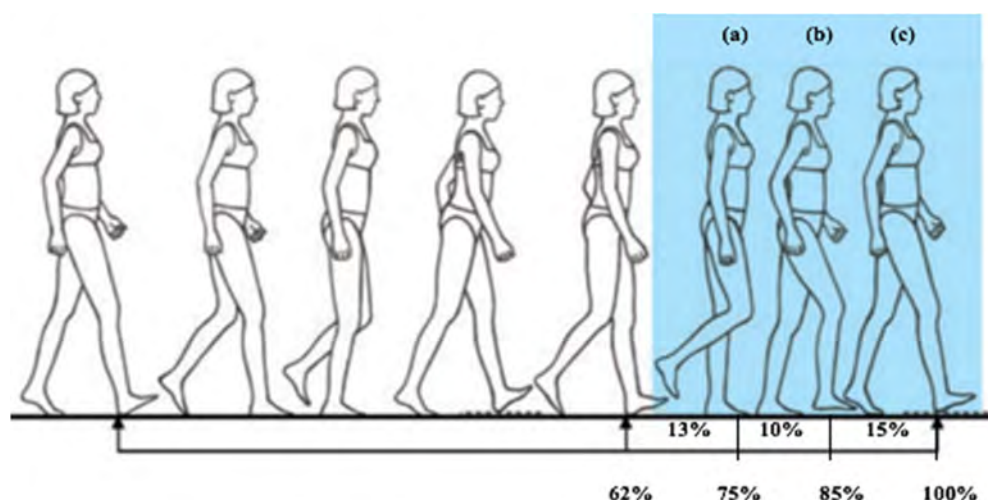


Fig. 1.24 Período de balanceo: (a) fase balanceo inicial, (b) fase de balanceo medio, (c) fase de balanceo terminal [Lesmes, 2007].

Fase balanceo inicial: esta fase coincide con el primer tercio del período de oscilación y ocupa del 62% al 75% del ciclo de la marcha. Esta fase consiste en despegar suficientemente el pie del suelo, así como alcanzar la cadencia deseada. Comienza cuando los dedos del pie abandonan el piso y termina cuando la rodilla alcanza la flexión máxima durante la marcha ( $60^\circ$ ), el muslo se encuentra directamente debajo del cuerpo y paralelo a la extremidad inferior contralateral que, en este instante, soporta el peso corporal.

Fase balanceo intermedio: transcurre del 75% al 85% del ciclo de la marcha. Inicia cuando las dos extremidades se cruzan con la flexión máxima de la rodilla y culmina cuando la tibia se dispone en posición perpendicular con el piso. La función de esta fase es mantener la separación entre el pie y el suelo.

Fase balanceo final: representa el último 15% del ciclo de la marcha (del 85% al 100%). En esta fase desacelera a pierna y antepone correctamente el pie para establecer contacto con el suelo. Inicia en la posición vertical de la tibia, continúa a medida que la rodilla se extiende completamente y termina cuando el talón hace contacto con el piso (contacto inicial).

### 1.3.2 Parámetros del ciclo de marcha

Los parámetros del ciclo de marcha corresponden a las variables críticas y ampliamente estudiadas para evaluar y caracterizar el patrón de marcha de una persona. Estos se

dividen en parámetros espaciales, temporales y espaciotemporales. Los parámetros espaciales y temporales son variables que se pueden ver alteradas por factores como la estatura, la edad, el sexo, la forma, la posición y la función de las estructuras neuromusculares y osteoarticulares, y el dolor, entre otros. Además, el calzado, la indumentaria, los aspectos culturales, la moda, la condición emocional y mental son factores que repercuten en los parámetros espaciotemporales de la marcha.

### 1.3.2.1 Parámetros espaciales

Los parámetros espaciales son la longitud de paso largo o zancada, la longitud de paso, el ancho de paso y el ángulo de paso, como se muestra en las Figuras 1.25.

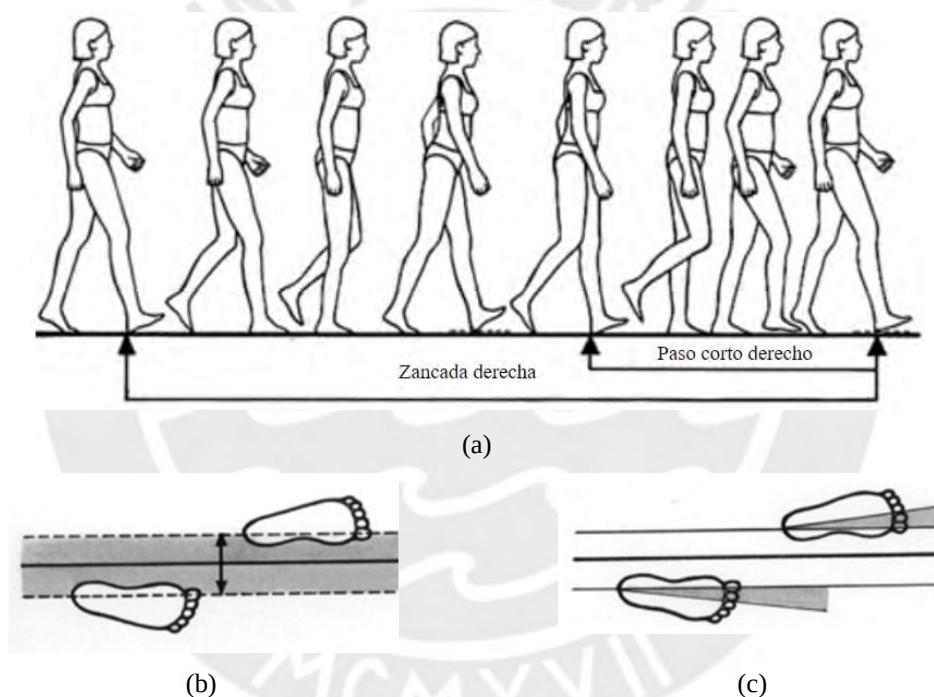


Fig. 1.25 Parámetros espaciales: (a) zancada, paso corto, (b) ancho de paso, (c) ángulo de paso [Lesmes, 2007].

Longitud de paso largo o zancada: es la distancia lineal recorrida en un ciclo de marcha medida en metros entre dos eventos iguales y sucesivos de la misma extremidad, como la longitud entre el punto de contacto del talón de un pie hasta el siguiente contacto del mismo pie. La longitud de paso largo o zancada incluye un paso corto derecho e izquierdo, es decir, dos pasos cortos. Esto no significa que siempre el valor de la longitud de un paso largo sea el doble del valor de un paso corto, debido a la asimetría que pueda existir entre el paso corto derecho e izquierdo.

Longitud de paso o paso corto: es la distancia lineal medida en metros entre dos puntos de contacto sucesivos de los pies opuestos. Inicia desde el contacto inicial de una extremidad hasta el mismo evento de la extremidad opuesta. La comparación de los registros de medición, del paso corto derecho como el izquierdo, proporciona información de la simetría de la marcha.

Ancho de paso: es la distancia medio lateral entre los pies durante la marcha. Es una variable directamente relacionada con la estabilidad y el equilibrio; esto significa que con un ancho amplio de paso la persona incrementa su estabilidad y equilibrio. Usualmente tiene un valor de 5 o 6 cm.

Ángulo de paso: se refiere a la orientación del pie durante el apoyo. El eje longitudinal de cada pie forma un ángulo con la línea de progresión que es la línea de dirección de la marcha. El valor normal de este parámetro está alrededor de los 5° y los 8°. Una deficiencia de torsión de origen pélvico, femoral, tibial o podal de la extremidad inferior puede generar el incremento del ángulo de paso o su inversión (hacia adentro).

### 1.3.2.2 Parámetros temporales

Los parámetros temporales en el ciclo de marcha son la duración de la zancada, duración del paso, la duración del período de apoyo, la duración del período de balanceo, y la duración del apoyo doble.

Duración de la zancada: es el tiempo transcurrido entre dos contactos iniciales consecutivos del mismo pie. En un adulto sin alteraciones en la marcha, una zancada dura aproximadamente un segundo si camina a velocidad normal. Se denota por la Ecuación 1.1.

$$t_{zancada} = t_{contacto\_2} - t_{contacto\_1} \quad (1.1)$$

Duración del paso: es el tiempo transcurrido entre el contacto inicial de un pie y el contacto inicial del pie contralateral. Normalmente, cuando existe debilidad o dolor en

una extremidad, la duración del paso se ve disminuida en el lado afectado y aumentada en la extremidad más fuerte o sin dolor. Se denota por la Ecuación 1.2.

$$t_{paso} = t_{contacto\_pie2} - t_{contacto\_pie1} \quad (1.2)$$

Duración de la fase de apoyo: corresponde al tiempo que dura la fase de apoyo. Está formado por dos tiempos de apoyo simple y uno de apoyo doble. Se denota por la Ecuación 1.3.

$$t_{apoyo} = t_{despegue} - t_{contacto\_1} \quad (1.3)$$

Duración de la fase de balanceo: es el tiempo en el que el pie no está en contacto con el suelo. Coincide en magnitud con el tiempo de apoyo único del pie contrario. Se denota por la Ecuación 1.4.

$$t_{balanceo} = t_{contacto\_2} - t_{despegue} \quad (1.4)$$

Duración del apoyo doble: es el tiempo en que ambos pies están en contacto con el suelo durante un ciclo de marcha. Este tiempo disminuye a medida que aumenta la velocidad de marcha. El porcentaje de tiempo dedicado al apoyo doble puede aumentar en personas de avanzada edad y/o con trastornos de equilibrio. Se denota por la Ecuación 1.5.

$$t_{apoyo\_doble} = t_{despegue\_pie2} - t_{contacto\_pie1} \quad (1.5)$$

### 1.3.2.3 Parámetros espaciotemporales

Los parámetros espaciotemporales son la frecuencia o cadencia, la velocidad de marcha, y la aceleración.

Frecuencia o cadencia: este parámetro hace referencia al número de pasos por unidad de tiempo que, generalmente, se expresa en pasos/min. La frecuencia determina el ritmo y la rapidez de marcha que autoselecciona toda persona cuando camina naturalmente. Varía de acuerdo con la longitud de las extremidades, el peso corporal y la habilidad para caminar y, disminuye con el proceso de envejecimiento. Ante la presencia de deficiencias

neuromusculares y osteoarticulares se altera la frecuencia. Del mismo modo, el incremento de la cadencia conlleva el aumento del ancho de paso y la disminución del ángulo de paso. Normalmente, se encuentra entre los 90 y los 140 pasos por minuto. Se denota por la Ecuación 1.6.

$$cadencia = \frac{60}{t_{paso}} = \frac{2 * 60}{t_{zancada}} \quad (1.6)$$

Velocidad de marcha: es la relación de la distancia recorrida en la dirección de la marcha por unidad de tiempo y se expresa en m/s. Constituye una variable que indica la habilidad para caminar y establece una relación con la cadencia y la longitud del paso largo. La velocidad y la cadencia natural, o libre, son variables autoseleccionadas que toda persona adopta para proveer la máxima eficiencia energética. La velocidad de la marcha en personas saludables se puede incrementar hasta en 44%; sin embargo, las personas con limitaciones en esta actividad al incrementar la velocidad evidencian problemas en los mecanismos de amortiguación. La velocidad de la marcha se denota por la Ecuación 1.7.

$$V_{marcha} = \frac{l_{zancada}}{t_{zancada}} \quad (1.7)$$

Aceleración promedio: es el cambio en la velocidad durante un intervalo de tiempo en el movimiento de la marcha. La aceleración promedio se expresa en metros por segundo al cuadrado ( $\frac{m}{s^2}$ ) y se denota por la Ecuación 1.8. En el contexto del ciclo de la marcha humana, la aceleración promedio se utiliza para entender como una persona acelera o decelera a lo largo de un ciclo de marcha.

$$a_{marcha} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (1.8)$$

### 1.3.3 Cinemática del ciclo de marcha

La cinemática del ciclo de la marcha se centra en el estudio y análisis del movimiento durante la marcha, sin tener en cuenta las fuerzas que lo causan. En este contexto, se destaca la Figura 1.26 y 1.27 que presenta el estudio realizado por el autor Whittle



publicado en su libro, donde analiza el ciclo de marcha de una mujer de 22 años, peso 540N. La recopilación de datos se efectuó en el plano sagital, con la participante descalza, utilizando un sistema de captura Vicon. Este estudio arrojó resultados significativos en cuanto a los parámetros de la marcha, los cuales incluyen un tiempo de ciclo de 0,88 segundos, una cadencia de  $136 \frac{\text{pasos}}{\text{min}}$ , una longitud de zancada de 1,50m y una velocidad de  $1,70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [Whittle, 2015].

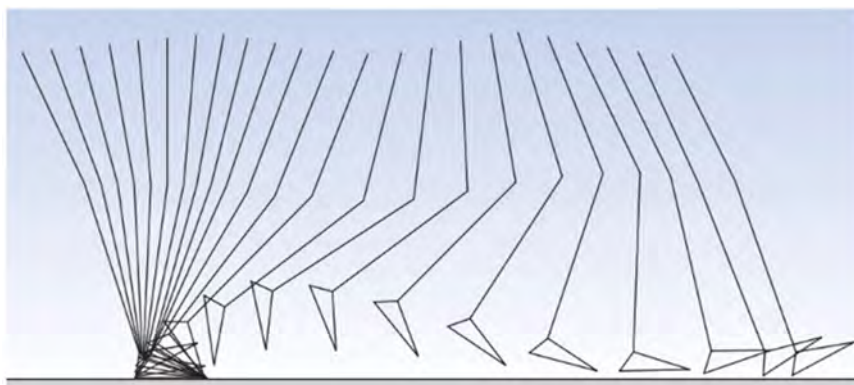


Fig. 1.26 Posición de la pierna derecha en el plano sagital a intervalos de 40ms durante el ciclo de marcha [Whittle, 2015].

Fase de contacto inicial: muestra el momento del contacto del talón con el suelo, en el que la articulación del tobillo está en posición neutra a medio camino entre el movimiento de dorsiflexión.

Fase de respuesta a la carga: simultáneamente con el contacto del talón, en la fase de respuesta a la carga la articulación del tobillo empieza a moverse en dirección a la plantarflexión.

Fase de apoyo intermedio: la articulación del tobillo pasa rápidamente aproximadamente a dorsiflexión.

Fase de apoyo final: el talón se despegó del suelo cuando la articulación del tobillo está en máxima dorsiflexión.

Fase de pre-balanceo: el tobillo rápidamente pasa a una plantarflexión. Esta acción ayuda a preparar el pie para despegar del suelo y facilita la transición de balanceo.

Fase de balanceo inicial: el pie se mueve de su posición inicial de plantarflexión al desprenderse del suelo a una posición esencialmente neutra. Esto permite que los dedos del pie se despeguen del suelo sin arrastrarse.

Fase de balanceo intermedio: a medida que el pie se mueve hacia adelante, el tobillo se mueve hacia una posición neutra.

Fase de balanceo final: el tobillo se prepara para el próximo contacto con el suelo, regresando a una posición neutral o ligeramente dorsiflexionada.

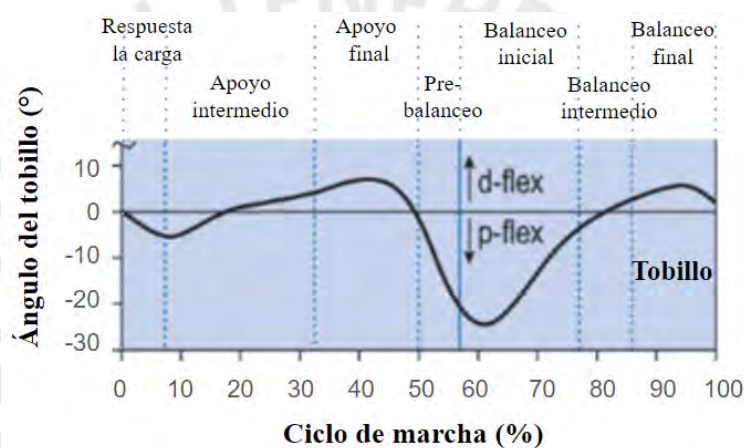


Fig. 1.27 Ángulos de la articulación del tobillo en el plano sagital en las fases de contacto inicial, respuesta a la carga, soporte medio, soporte terminal, pre-balanceo, balanceo inicial, balanceo medio, balanceo terminal [Whittle, 2015].

#### 1.3.4 Cinética del ciclo de marcha

En los movimientos del cuerpo en la marcha normal existen dos tipos de fuerzas involucradas; las fuerzas intrínsecas y extrínsecas. Las fuerzas intrínsecas son el resultado de las contracciones musculares, el roce de músculo-articular y la deformación de tejidos blandos, en cambio las fuerzas extrínsecas son aquellas debidas a la gravedad, y la fuerza de reacción del suelo.

La fuerza de gravedad, definida como la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre los cuerpos, se caracteriza por ser constante, unidireccional y actuar en todas y cada una de las partículas que constituyen la masa de un cuerpo. Como cualquier punto de vector de fuerza, puede ser descrito por el punto de aplicación (centro de gravedad o centro de

masa), la línea de acción y dirección (siempre se dirige hacia el centro de la tierra) y la magnitud ( $9,8 \frac{m}{s^2}$ ) [Lesmes, 2007].

La fuerza de reacción del piso (FRP) que se muestra en la Figura 1.28 es responsable de la tercera ley de Newton: La ley de reacción, la cual afirma que cuando un objeto imprime una fuerza sobre otro objeto, el segundo reacciona sobre el primero con una fuerza de la misma magnitud, pero con dirección opuesta (acción = reacción). El cuerpo humano imprime una fuerza (peso corporal más la fuerza de gravedad) al piso o superficie de apoyo éstos reaccionan con una fuerza igual, pero en dirección contraria [Lesmes, 2007].

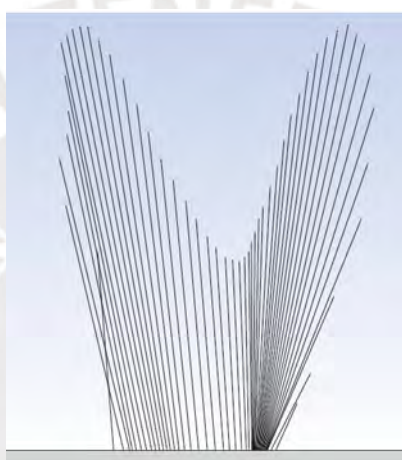


Fig. 1.28 Representación del diagrama de mariposa del vector fuerza de reacción del suelo a 10ms de intervalo propuesto por Pedotti en 1977. La progresión es de izquierda a derecha [Whittle, 2015].

#### a) Fuerzas de reacción del piso en el ciclo de marcha

El estudio realizado por el autor Whittle publicado en su libro, presenta las fuerzas en el ciclo de marcha de una mujer de 22 años, peso 540N, según Figura 1.29. La recopilación de datos se efectuó en el plano sagital, con la participante descalza, utilizando plataformas de fuerza de la marca Bertec, según Figura 1.30. La plataforma de fuerza es un instrumento comúnmente utilizado en la marcha y se obtiene la fuerza total aplicada por el pie al suelo. La fuerza de reacción del suelo es la fuerza compuesta por tres componentes, una vertical y dos laterales. La fuerza de mayor magnitud es la vertical, y las otras dos son conocidas como fuerzas de cizallamiento [Lesmes, 2007], [Schmeltzpfenning, 2013], estas fuerzas de reacción se presentan en la Figura 1.29 y 1.30.

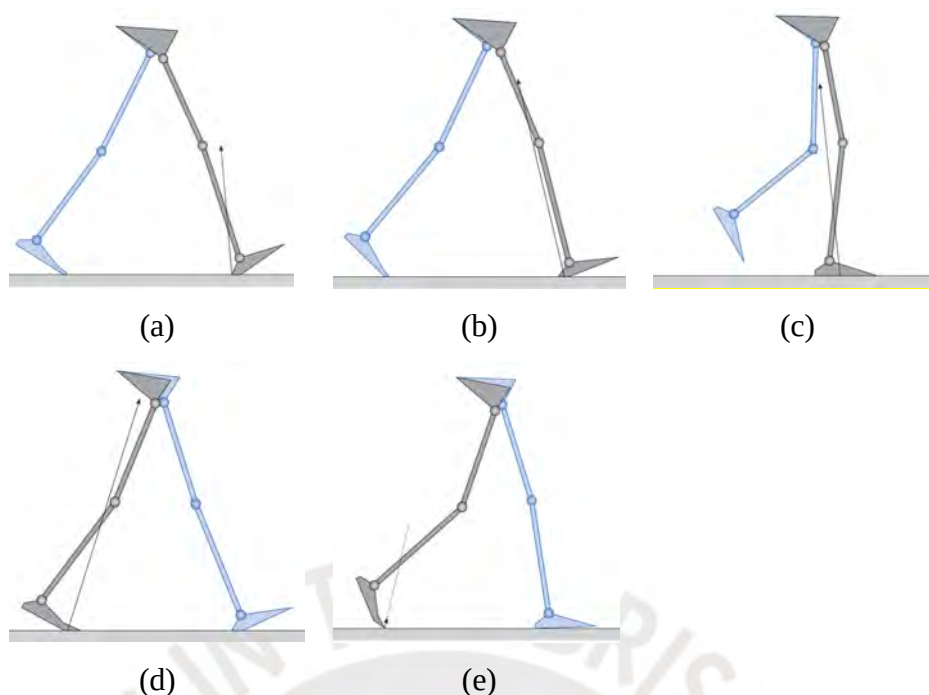


Fig. 1.29 Fuerza vertical del tobillo en las fases: (a) contacto inicial, (b) respuesta a la carga, (c) soporte medio, (d) soporte terminal, (e) pre-balanceo [Whittle, 2015].

Fase de contacto inicial: en el momento del contacto inicial, el tobillo generalmente está cerca de su posición neutral en plantarflexión. Dado que la tibia está inclinada hacia atrás, el pie se inclina hacia arriba y solo el talón contacta con el suelo. El contacto del talón que se muestra en la Figura 1.29a, por un breve período de tiempo la resultante de las fuerzas de reacción del suelo está por delante de la articulación del tobillo, en este instante, una fuerza que tiende a mover la articulación del tobillo en dirección a la dorsiflexión, produciéndose el descenso del talón al suelo.

Fase de respuesta a la carga: ocurre el primer rocker o primer balancín del talón, inmediatamente después del contacto del talón, se transmite un mayor peso del cuerpo a la extremidad, el rápido aumento de la fuerza vertical hace que la resultante pase por detrás de la articulación, como se muestra en la Figura 1.29b, generando una fuerza en dirección a la plantarflexión. Poco después de que la planta del pie esté totalmente en contacto con el suelo, se ha alcanzado el máximo movimiento de plantarflexión.

Fase de apoyo intermedio: ocurre el segundo rocker o segundo balancín del tobillo, caracterizado por la rotación hacia delante de la tibia alrededor de la articulación del tobillo, a medida que el pie permanece plano en el suelo. El vector fuerza de reacción del suelo se

mueve hacia adelante a lo largo del pie, desde que el pie está plano, moviéndose hacia el antepié antes del levantamiento del talón, como se muestra en la Figura 1.29c.

Fase de apoyo final: ocurre el tercer rocker o tercer balancín del antepié, cuando la pierna continúa rotando hacia delante sobre el pie fijo, donde el momento de fuerza actúa en la dirección de dorsiflexión, aumentando considerablemente debido al cambio desde el punto de apoyo entre el pie y el suelo conforme el talón se eleva. Ello aumenta la distancia perpendicular entre la articulación del tobillo y la fuerza resultante de reacción del suelo, como se muestra en la Figura 1.29d.

Fase de pre-balanceo: la elevación del talón y despegue de los dedos y el momento de dorsiflexión cae bruscamente a cero [Vera, 2006], como se muestra en la Figura 1.29e.

Seguidamente, se presentan las Figuras 1.30 y 1.31 las cuales ilustran las fuerzas y momentos involucrados en el ciclo de marcha. En estas figuras se etiquetan las diferentes fases y puntos clave del ciclo: “IC” representa el contacto inicial, “OT” denota el desprendimiento del dedo opuesto, “HR” se refiere al levantamiento del talón, “OI” indica el contacto inicial opuesto, “TO” corresponde al desprendimiento del dedo, “FA” significa pies adyacentes, “TV” como tibia vertical y “IC” es el contacto terminal del pie.

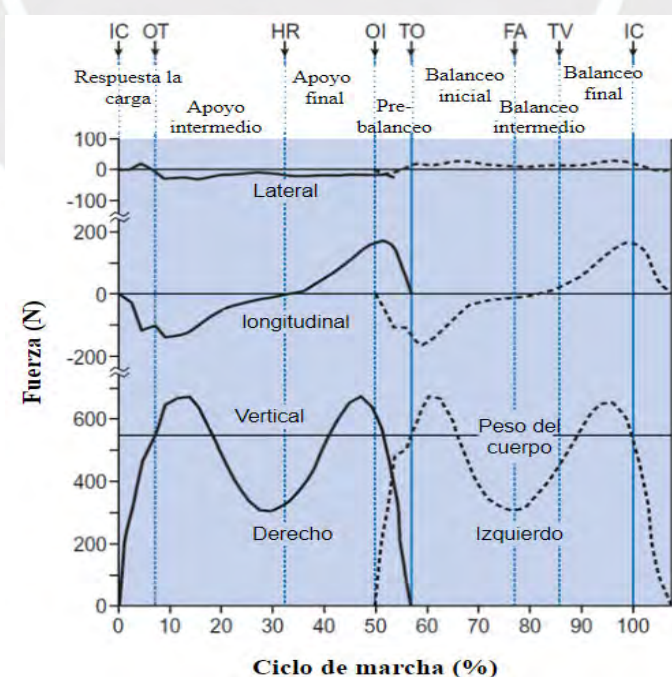


Fig. 1.30 Fuerza en el ciclo de marcha [Whittle, 2015].



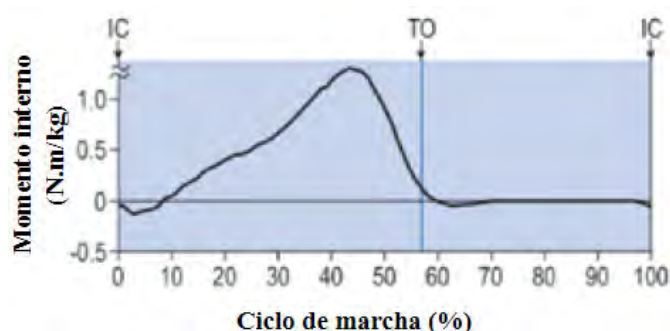


Fig. 1.31 Momento interno del tobillo durante el ciclo de marcha [Whittle, 2015].

### b) Fuerzas de mayor influencia en la posición bipodal

En posición bipodal, el peso del cuerpo es transmitido por la pelvis al suelo a través de las extremidades inferiores. Cada pie soporta, en condiciones normales, la mitad del peso del cuerpo. Al llegar al pie el primer hueso que encuentran las fuerzas es el astrágalo, cuya principal misión cinética es distribuir las fuerzas hacia los diferentes puntos de apoyo, como se muestra en la Figura 1.32a. Según Vidalot, cuando analizó las fuerzas en el plano sagital comprobó por análisis baropodométrico que el 60% de las fuerzas se dirigen al calcáneo y el 40% al antepié. Esta proporción varía considerablemente al levantar el talón del suelo, momento en que aumenta la carga que recibe el antepié [Vidalot, 2003].

Analizando las fuerzas en el plano transversal (Figura 1.32b) se observa que el astrágalo distribuye la carga hacia atrás, transmitiendo la mayor parte de la carga, que llega al suelo a través de la tuberosidad del calcáneo. Hacia delante, una parte de la fuerza se transmite, a través de la cabeza del astrágalo, a las cuñas y a los 3 primeros metatarsianos. En el lado externo, las fuerzas llegan al suelo a través de calcáneo, cuboides y metatarsianos. En el antepié, la carga se distribuye a través de todos los metatarsianos, con la particularidad de que el primero, anatómicamente el más dotado, absorbe como mínimo el doble de fuerza que cada uno de los restantes y la transmite al suelo a través de los sesamoideos [Vidalot, 2003]. El complejo de la articulación del tobillo soporta una fuerza de aproximadamente cinco veces el peso corporal durante la postura en la marcha normal, y hasta trece veces el peso corporal durante actividades como correr [Brockett, 2016].

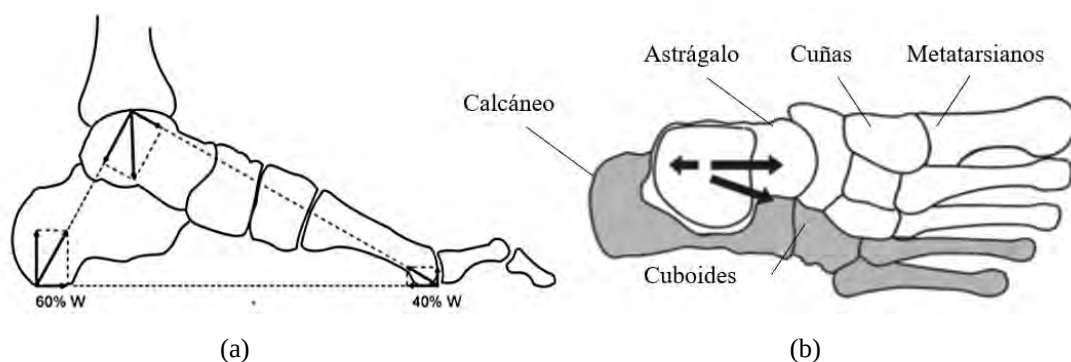
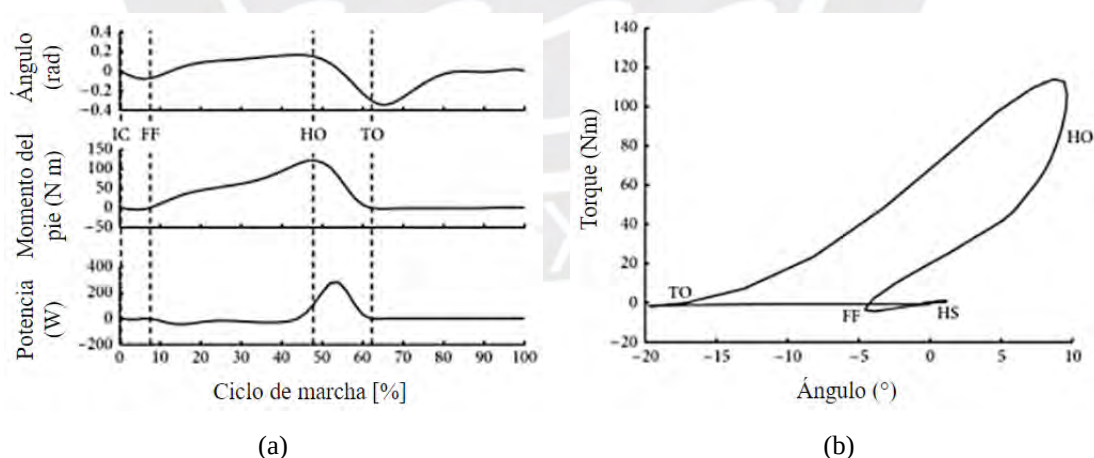


Fig. 1.32 Fuerzas: (a) en plano sagital, (b) en plano transversal [Vidalot, 2003].

### c) Potencia y torque de mayor influencia en el ciclo de marcha

De acuerdo con el análisis sistemático de la marcha humana de Winter de un sujeto de 75 kg que camina a una cadencia normal produce un par máximo en la articulación del tobillo de aproximadamente  $1,6 \frac{\text{Nm}}{\text{kg}}$  en un tiempo muy pequeño ( $\pm 0,2s$ ) para una velocidad de marcha de  $1 \frac{\text{paso}}{s}$ , consumiendo por este medio en promedio  $0,35 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$  de energía mecánica por paso. De acuerdo con la potencia generada en el empuje, se alcanzan valores máximos de aproximadamente  $3,5$  a  $4,5 \frac{\text{W}}{\text{kg}}$ . Considerando una carga de 75 kg, se requiere una salida de par máximo de aproximadamente 120 Nm con una potencia de salida entre 250 y 350W, como se puede ver en la Figura 1.33 [Winter, 1991].



(IC) contacto inicial, (FF) pie plano (HO) despegue del talón y (TO) despeje del dedo del pie

Fig. 1.33. Características de la articulación del tobillo de un sujeto de 75 kg caminando a una cadencia normal en plano sagital: (a) ángulo del tobillo, momento, y potencia vs porcentaje del ciclo de marcha [Winter, 1991], (b) torque vs ángulo [Cherelle, 2014].

### 1.3.5 Comportamiento biomecánico del tobillo-pie en diferentes tipos de terreno

El tobillo es una articulación compleja y fundamental que desempeña varias funciones esenciales en la locomoción humana y en las actividades cotidianas. El tobillo tiene la capacidad de adaptarse a variaciones en las superficies sobre las que caminamos como subir y bajar escaleras, caminar sobre superficies planas, inclinadas, irregulares, y sobre terrenos de roca, arena o césped.

#### a) Superficie plana (subiendo y bajando escaleras)

Cuando se camina sobre un terreno plano, el talón generalmente golpea el suelo antes del dedo del pie, y es el mismo caso al caminar en pendientes. Sin embargo, las cosas son bastante diferentes cuando se camina en las escaleras. Durante el ascenso por escaleras, el talón y la punta del pie golpean el suelo casi al mismo tiempo (menos del 10% del ciclo completo de la marcha), y el dedo del pie golpea el suelo antes del talón durante el descenso de la escalera. En consecuencia, la secuencia de golpe de pie se puede utilizar como una característica para distinguir el nivel del suelo y las escaleras, como se muestra en la Figura 1.34 [Yuan, 2013].

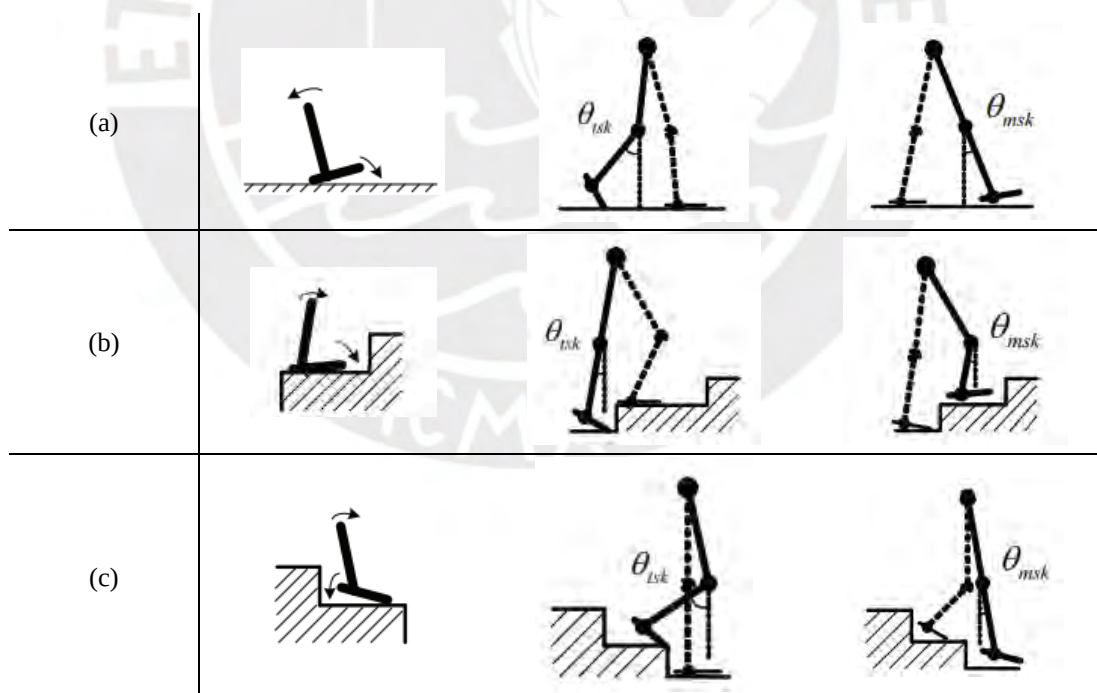


Fig. 1.34 Análisis de movimiento: (a) en superficie plana, (b) subiendo escaleras, (c) bajando escaleras [Yuan, 2013].

## b) Superficies plana-inclinada

Durante la postura, el pie es paralelo a la superficie del terreno, mientras que el ángulo ( $\theta_{pie}$ ) de la inclinación del pie es igual al ángulo de inclinación de la superficie del terreno. El ángulo de inclinación del pie se refiere al ángulo relativo entre pie y la línea horizontal en plano sagital. Eso varía mucho entre el nivel del suelo y las pendientes, como se muestra en la Figura 1.35 [Yuan, 2013].

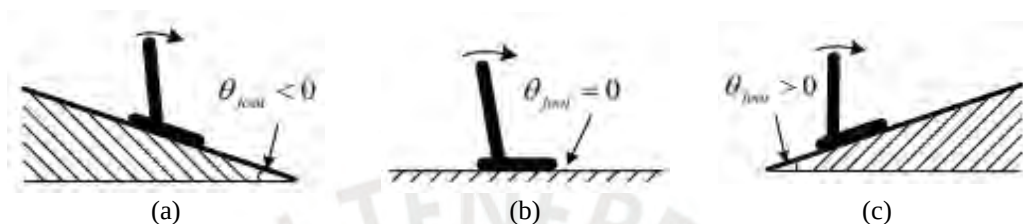


Fig. 1.35. Ángulo de inclinación del pie: (a) terreno con inclinación negativa, (b) terreno plano, (c) terreno con inclinación positiva [Yuan, 2013].

La inclinación de las superficies influye en el funcionamiento muscular cuando se sube o baja una pendiente. Al subir, los músculos funcionan como generan impulso, mientras que, al bajar, los músculos funcionan como frenos o sistemas de control del peso debido a la dirección de las fuerzas reactivas en el suelo. Durante la caminata sobre una pendiente ascendente las personas tienen un ritmo más lento y una longitud de zancada más larga, permaneciendo más tiempo en la fase de apoyo. En cambio, en una pendiente descendente está asociada con una longitud de zancada reducida y un ritmo más rápido. En la Figura 1.36 se presenta la variación de las fuerzas de reacción en el suelo en pendiente descendente, nivelada y pendiente ascendente [Psarras, 2016].

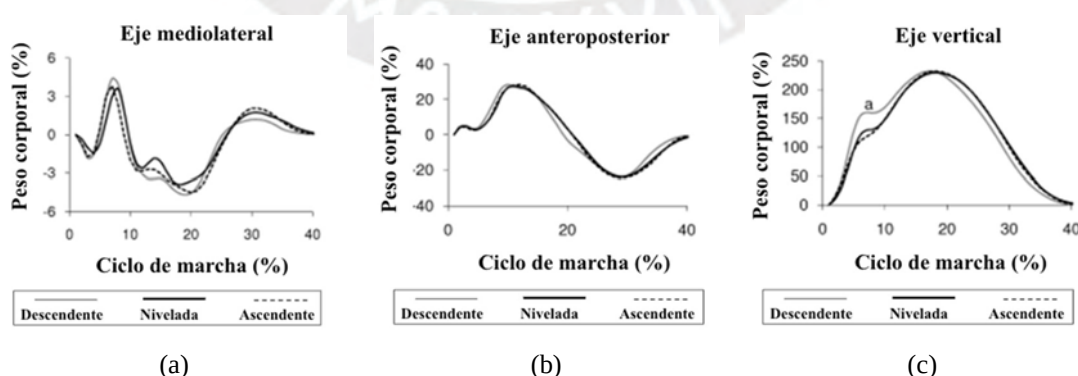


Fig. 1.36. Fuerzas de reacción en el suelo en la fase de soporte del ciclo de marcha en pendiente descendente, superficie nivelada, pendiente ascendente: (a) eje medio lateral, (b) eje anteroposterior, (c) eje vertical [Psarras, 2016].



### c) Superficie irregular

Caminar sobre terreno irregular se asocia con un paso ligeramente más corto y alterado, en este caso el paso promedio disminuye un 4%. En la Figura 1.37 se muestra el ángulo de flexión en el ciclo de marcha sobre un terreno irregular [Psarras, 2016].

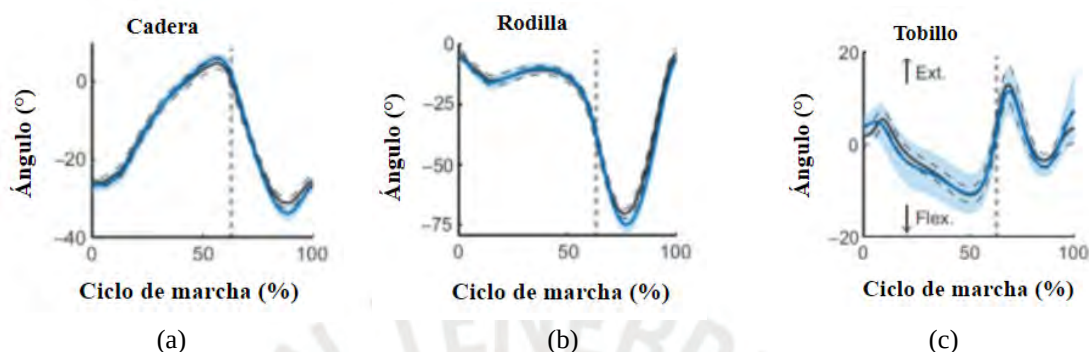


Fig. 1.37. Ángulos vs ciclo de marcha sobre un terreno irregular: (a) cadera, (b) rodilla, (c) tobillo [Psarras, 2016].

### d) Superficie de roca

Durante la caminata en una superficie rocosa, el ancho de la longitud de paso y el tiempo aumentan en comparación con la caminata en un terreno plano, el tiempo de paso disminuye al aumentar la velocidad, como se muestra en la Figura 1.38 [Psarras, 2016].

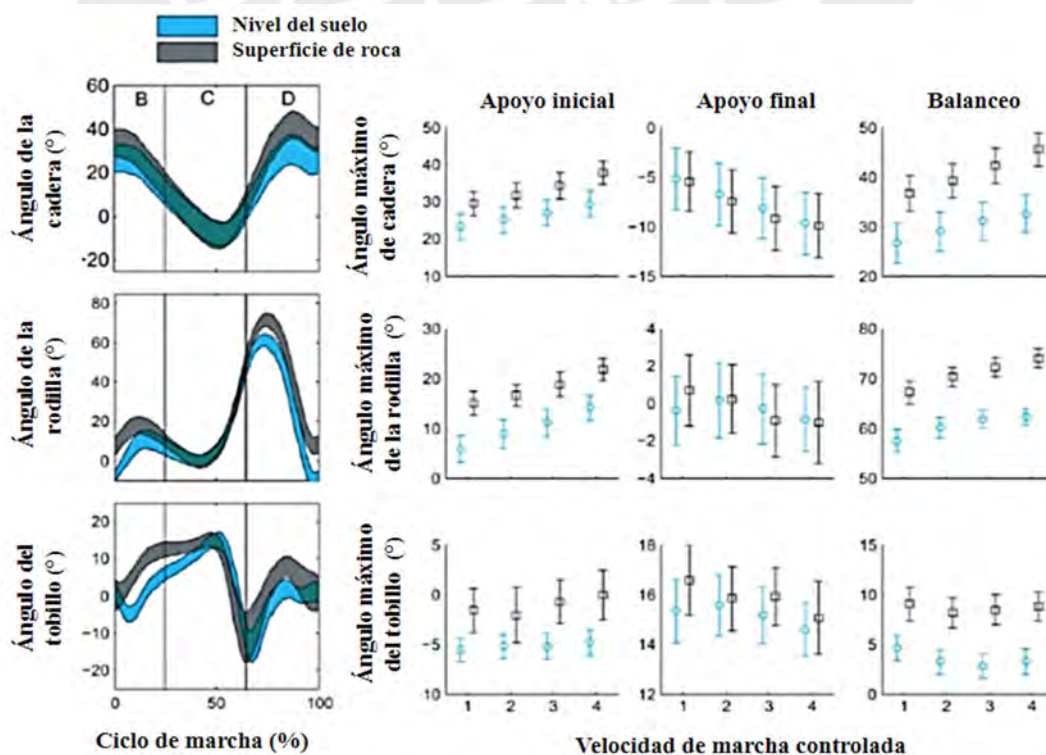


Fig. 1.38 Ángulos de la cadera, rodilla y tobillo sobre un terreno rocoso [Psarras, 2016].



### e) Superficie de arena

Caminar sobre la arena se asocia con la velocidad máxima, aceleración media, longitud promedio de la zancada, y el tiempo de balanceo. El costo energético aumenta en superficies de arena en comparación al nivel de caminata sobre superficies duras. La locomoción hace que el pie mueva la arena, debido a que el pie tiene la tendencia a deslizarse hacia atrás, lo que conduce a una disminución de la aceleración durante la fase previa a la oscilación o pre balanceo. En la Figura 1.39 representa el trabajo mecánico del pie realizado en la arena en el ciclo de marcha [Psarras, 2016].

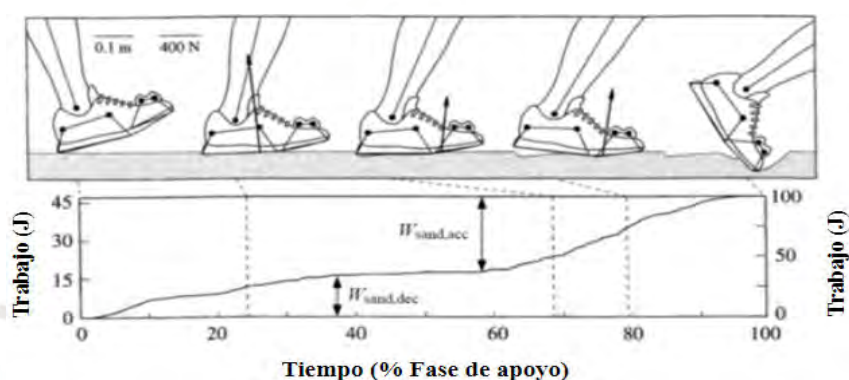


Fig. 1.39 Trabajo ejercido por el pie sobre la arena en el plano sagital [Psarras, 2016].

### f) Superficie de césped

La superficie natural del césped es más rígida que la arena, es una superficie dura e inelástica, pero ambas tienen exactamente las mismas características mecánicas, existe inestabilidad en la superficie. La Tabla 1.4 representa las diferencias entre el concreto, el césped, la arena seca y la arena mojada, mientras que la Tabla 1.5 representa las diferencias entre el césped natural, césped artificial y la arena.

Tabla 1.4 Velocidad y pasos en el ciclo de marcha en concreto, césped, arena seca y arena mojada [Psarras, 2016].

| Variable                    | Sexo   | Superficies   |               |               |               |
|-----------------------------|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|                             |        | Concreto      | Césped        | Arena seca    | Arena mojada  |
| Velocidad al caminar [km/h] | Hombre | $5.6 \pm 0.6$ | $5.6 \pm 0.6$ | $4.9 \pm 0.4$ | $5.4 \pm 0.4$ |
|                             | Mujer  | $5.6 \pm 0.4$ | $5.7 \pm 0.5$ | $5.0 \pm 0.5$ | $5.4 \pm 0.5$ |
| Pasos al caminar            | Hombre | $188 \pm 14$  | $183 \pm 13$  | $204 \pm 12$  | $192 \pm 11$  |
|                             | Mujer  | $192 \pm 11$  | $188 \pm 10$  | $211 \pm 13$  | $197 \pm 11$  |

Tabla 1.5 Parámetros del ciclo de marcha en césped natural, césped artificial y arena [Psarras, 2016].

| Variables                                                                          | Superficies        |                   |                        |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|------------------------|
|                                                                                    | Césped natural     | Césped artificial | Arena                  |
| Duración (s)                                                                       | $1.98 \pm 0.06$    | $1.99 \pm 0.09$   | $2.28 \pm 0.09^{**}$   |
| Velocidad promedio ( $\frac{m}{s}$ )                                               | $6.05 \pm 0.2$     | $6.01 \pm 0.29$   | $5.27 \pm 0.23^{**}$   |
| Velocidad máxima ( $\frac{m}{s}$ )                                                 | $7.04 \pm 0.47$    | $7.12 \pm 0.35$   | $6.22 \pm 0.41^{**}$   |
| Aceleración promedio ( $\frac{m}{s^2}$ )                                           | $2.97 \pm 0.29$    | $2.98 \pm 0.20$   | $2.62 \pm 0.15^{**}$   |
| Aceleración máxima ( $\frac{m}{s^2}$ )                                             | $7.05 \pm 1.95$    | $7.00 \pm 1.70$   | $5.94 \pm 1.18^{**}$   |
| Desaceleración máxima ( $\frac{m}{s^2}$ )                                          | $8.00 \pm 1.26$    | $7.97 \pm 2.09$   | $9.13 \pm 1.57^*$      |
| Costo de energía promedio ( $\frac{J}{kg.m}$ )                                     | $17.13 \pm 1.68$   | $17.17 \pm 1.14$  | $21.97 \pm 1.19^{**}$  |
| Potencia metabólica promedio ( $\frac{W}{kg}$ )                                    | $103.92 \pm 12.17$ | $103.91 \pm 9.59$ | $116.26 \pm 9.14^{**}$ |
| Potencia mecánica promedio ( $\frac{W}{kg}$ )                                      | $17.99 \pm 2.10$   | $18.01 \pm 1.66$  | $13.86 \pm 1.13^{**}$  |
| Numero de pasos                                                                    | $8.92 \pm 0.35$    | $8.90 \pm 0.3$    | $10.05 \pm 0.46^{**}$  |
| Longitud de zancada promedio (m)                                                   | $1.34 \pm 0.06$    | $1.34 \pm 0.05$   | $1.19 \pm 0.05^{**}$   |
| Frecuencia de zancada (Hz)                                                         | $4.46 \pm 0.31$    | $4.46 \pm 0.24$   | $4.41 \pm 0.26$        |
| Tiempo medio de vuelo (s)                                                          | $0.068 \pm 0.008$  | $0.068 \pm 0.009$ | $0.049 \pm 0.006^{**}$ |
| Tiempo promedio de contacto (s)                                                    | $0.151 \pm 0.010$  | $0.153 \pm 0.013$ | $0.180 \pm 0.012^{**}$ |
| Fuerza máxima de reacción del suelo (kN)                                           | $1.62 \pm 0.17$    | $1.61 \pm 0.17$   | $1.42 \pm 0.15^{**}$   |
| *p < 0.05 diferencia significativa con respecto a los valores del césped natural   |                    |                   |                        |
| **p < 0.001 diferencia significativa con respecto a los valores del césped natural |                    |                   |                        |

### 1.3.6 Marcha protésica

La marcha protésica se refiere al patrón de caminar de una persona que utiliza una prótesis de extremidad inferior como una prótesis transtibial. Este tipo de marcha se caracteriza por varios factores, incluyendo el nivel y tipo de amputación, el diseño y ajuste de la prótesis, así como la capacidad física y adaptación del individuo.

Considerando la complejidad de la articulación tobillo-pie humana, los componentes protésicos actuales aún no logran replicar por completo todos los movimientos característicos de la marcha humana normal.

#### a) Pie protésico

Los principales tipos de pie que se utilizan en la amputación transtibial son los que se detallan a continuación:

El pie SACH (Solid Ankle Cushion Heel): se caracteriza por ser ligero, duradero, sencillo y de bajo costo. Está compuesto por una estructura de madera y una cuña de látex flexible en el talón, como se muestra en la Figura 1.40a. Aunque carece de articulación en el tobillo, la compresión del talón absorbe el impacto durante la fase apoyo inicial. Este diseño proporciona estabilidad al limitar el efecto de la flexión rápida de la rodilla durante la carga. Sin embargo, no permite movimientos de eversión-inversión, lo que restringe su capacidad de adaptarse a terrenos irregulares.

El pie articulado o uniaxial (single Axis Foot): permite los movimientos de plantarflexión y dorsiflexión del tobillo. Este diseño ofrece la posibilidad de ajustar tanto el grado como la resistencia de los movimientos, lo que resulta útil para proporcionar estabilidad en la rodilla durante la respuesta de carga. Este tipo de pie se muestra en la Figura 1.40b.

El pie multiaxial (multiaxis foot): incorpora la capacidad de moverse en los planos sagital, frontal y transversal, proporciona el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, y eversión-inversión. Permite una facilidad de movimiento, una excelente adaptación al terreno y un gran confort. Requiere bastante control por parte del paciente, por lo que no suele prescribirse. En la Figura 1.40c. se presenta un ejemplo marca Tribute®.

El pie de absorción o de almacenamiento de energía (PAE) o de respuesta dinámica: se caracteriza típicamente por incluir un pie y tobillo de fibra de carbono como una sola unidad, tiene rigidez y flexibilidad. La larga palanca que lo constituye se deforma durante la carga. Algunos ejemplos de pies PAE son Flex-foot®, Vari-Flex®, Sure-Flex®, College Park® o Quantum®. Este pie se muestra en la Figura 1.40d.

El pie biónico: está equipado con microprocesadores que registran cambios en el contacto con el terreno y adaptan el movimiento a la superficie por la que se desplaza el usuario. En la Figura 1.40e se presenta un ejemplo de este tipo de pie Propio Foot®.

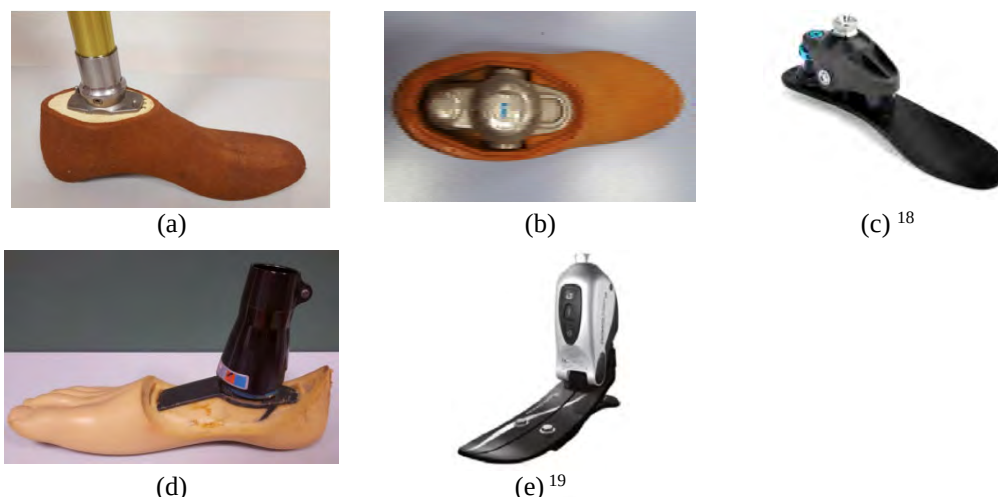


Fig. 1.40 Tipos de pie: (a) pie SACH (Solid Ankle Cushion Heel), (b) pie articulado o uniaxial (single Axis Foot), (c) pie multiaxial (multiaxis foot), (d) pie de absorción o de almacenamiento de energía (PAE) o de respuesta dinámica, (e) pie biónico.

### b) Interfaz entre el cuerpo y la prótesis (encaje protésico)

El encaje aplica fuerzas externas sobre la superficie del muñón. La cantidad, la ubicación de su aplicación y los medios que controlan esas fuerzas contribuyen al impacto que tiene la prótesis en la movilidad, función y aceptación del dispositivo. La distribución de la presión sobre una mayor superficie disminuye la carga y proporciona más comodidad durante el uso de la prótesis.

Según el International Committee of the Red Cross (ICRC) de Ginebra, los diseños de los encajes protésicos deben permitir que las fuerzas se distribuyan sobre un área de superficie residual lo más grande posible y deben aplicarse de la manera más uniforme posible sobre áreas tolerantes a la presión. Estas áreas tolerantes a la presión pueden enrojecerse con la presión, que desaparecerá cuando se retire la prótesis, pero no se producirá una ruptura de la piel, como se muestra en la Figura 1.41a y 1.41b. Las áreas sensibles a la presión tienen una alta probabilidad de ruptura de la piel. En estas áreas no debe ocurrir enrojecimiento como se muestra en la Figura 1.41c y 1.41d [ICRC, 2014].

<sup>18</sup> Tomado de: <https://www.medicalexpo.es/prod/college-park/product-74912-458002.html> Fecha de revisión: 2-05-2019.

<sup>19</sup> Tomado de:

[http://aula.campuspanamericana.com/\\_Cursos/Curso01417/Temario/Curso\\_Ortopedia\\_Productos\\_Apoyo/3.1.%20Curso%20Ortopedia.pdf](http://aula.campuspanamericana.com/_Cursos/Curso01417/Temario/Curso_Ortopedia_Productos_Apoyo/3.1.%20Curso%20Ortopedia.pdf) Fecha de revisión: 2-05-2019.

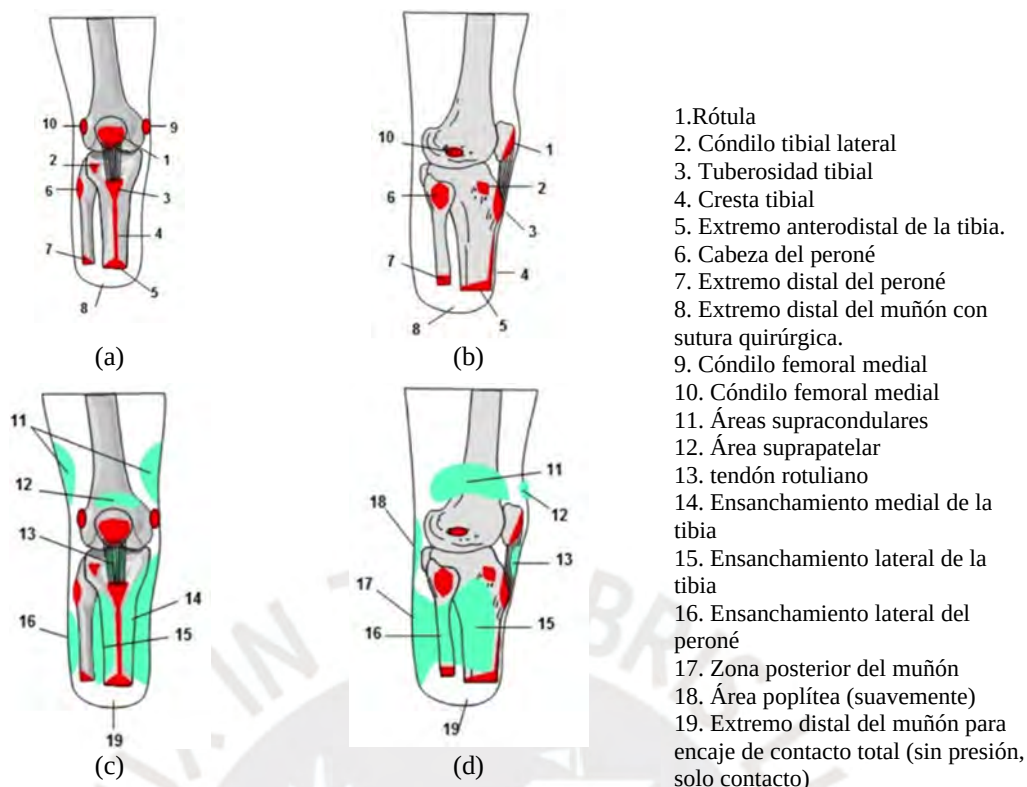


Fig. 1.41 Áreas de presión en encaje protésico: (a) tolerante a la presión en vista anterior, (b) tolerante a la presión en vista lateral, (c) sensible a la presión en vista anterior, (d) sensible a la presión en vista lateral [ICRC, 2014].

Los principales tipos de encaje que se utilizan en la amputación transtibial son los que se detallan a continuación:

El encaje PTB (Patellar Tendon Bearing): hace referencia al apoyo infrapatelar. En este modelo se añade un pequeño brazaletes de suspensión suprapatelar. Este tipo de encaje se muestra en la Figura 1.42a.

El encaje PTS (Prothèse Tibiale Supracondylienne): la diferencia con el encaje PTB en la parte anterior asciende por encima de la rótula, lo que le añade estabilización lateral supracondílea. Este tipo de encaje se muestra en la Figura 1.42b.

El encaje KBM (Kondilem Bettung Münster): tiene un muro que se encuentra ubicado en la parte anterior del encaje protésico, este libera completamente a la rótula, pero los laterales se remontan por encima de los cóndilos. Se han añadido diversos tipos de cuñar mediales para facilitar la suspensión y la retirada de la prótesis. Este tipo de encaje se muestra en la Figura 1.42c.



El encaje TSB (Total Surface Bearing): constituye uno de los encajes más empleados. Están diseñados según el principio de apoyo hidrostático. No hay zonas de presión concentrada en el muñón. Se puede aplicar un sistema de anclaje tipo “pin” o con bomba de vacío. Este tipo de encaje se muestra en la Figura 1.42d.

El encaje HST (Hidrostatic Total Surface): constituye una variante del encaje TSB mantiene sus mismos principios. La diferencia está en la forma del molde, en la que se utiliza una cámara de presión de aire uniforme sobre toda la superficie del muñón. Tiene mayor confort. Este tipo de encaje se muestra en la Figura 1.42e.

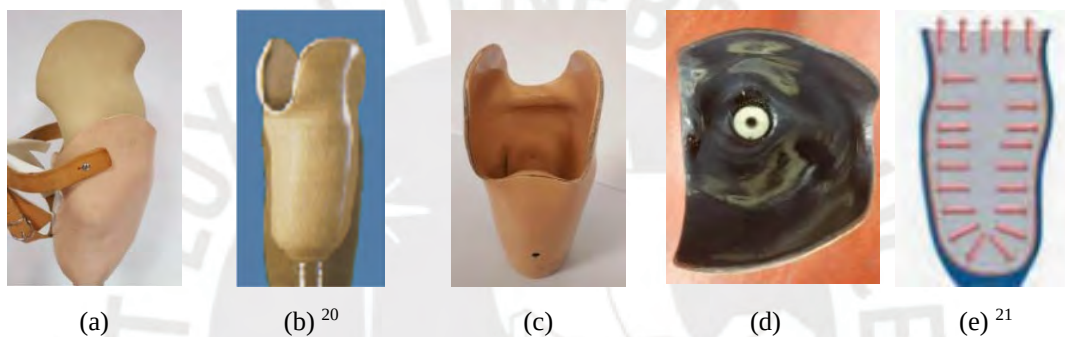


Fig. 1.42 Tipos de encaje protésico en amputación transtibial: (a) encaje PTB (Patellar Tendon Bearing), (b) encaje PTS (Prosthèse Tibiale Supracondylienne), (c) encaje KBM (Kondilem Bettung Münster), (d) encaje HST (Hidrostatic Total Surface)<sup>22</sup>.

### c) Gasto energético en la marcha protésica

La mejor y más sofisticada prótesis nunca podrá compensar perfectamente la parte del cuerpo que le falta a una persona con amputación, es decir el patrón de marcha no es tan bueno como el de una persona sin amputación. La articulación de la rodilla es fundamental en el gasto energético ya que minimiza las variaciones en el desplazamiento del centro de masa tiene una función en la absorción de impactos.

Una persona adulta sin amputación camina entre 70 a 90 pasos por minuto. Sin embargo, una persona con amputación transtibial unilateral por debajo la rodilla tiende a caminar entre 60 a 80 pasos por minuto y una persona con amputación bilateral por debajo la

<sup>20</sup> Tomado de: <http://www.arcesw.com/pmi3.htm> Fecha: 2-05-2019.

<sup>21</sup> Tomado de: <https://es.slideshare.net/danielgarciajurado/nuevas-tecnologias-del-encaje> Fecha: 2-05-2019.

<sup>22</sup> Tomado de:

[http://aula.campuspanamericana.com/\\_Cursos/Curso01417/Temario/Curso\\_Ortopedia\\_Productos\\_Apoyo/3.1.%20Curso%20Ortopedia.pdf](http://aula.campuspanamericana.com/_Cursos/Curso01417/Temario/Curso_Ortopedia_Productos_Apoyo/3.1.%20Curso%20Ortopedia.pdf) Fecha de revisión: 2-05-2019.

rodilla entre 35 a 45 pasos por minuto para mantener su gasto de energía al mínimo [ICRC, 2014]. Mayor detalle se muestra en la Tabla 1.6.

La cantidad de energía requerida por las personas con amputación depende de la causa de la amputación; la amputación traumática es menos costoso en términos de energía que la amputación debido a una enfermedad vascular. En la amputación transtibial vascular se incrementa un 33% de consumo de oxígeno. En la amputación transtibial traumática se incrementa un 7% de consumo de oxígeno [ICRC, 2014].

Tabla 1.6 Gasto energético de personas con amputación por debajo de la rodilla BK [ICRC,2014].

|                  | Persona sin discapacidad | Amputación unilateral por debajo la rodilla (BK) | Amputación bilateral por debajo la rodilla (BK) |
|------------------|--------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Gasto de energía | 100%                     | 110-125%                                         | 180-200%                                        |
| Pasos/minuto     | 70-90                    | 60-80                                            | 35-45                                           |
| Distancia/minuto | 70-80m                   | 60-70m                                           | 23-35m                                          |

#### **d) Desviaciones que afectan el desempeño de la marcha**

Existen variaciones que afectan el desempeño de la marcha en una persona con amputación transtibial, estas variaciones se pueden dividir en dos grupos principales: i) las causas extrínsecas que son debido a un encaje protésico mal ajustado o una prótesis mal alineada, ii) las causas intrínsecas que pueden estar relacionadas con la debilidad muscular, deformidades en el muñón en forma, longitud y tamaño, alteración del control incluyendo la pérdida sensorial, miedo o ansiedad, y dolor. Las variaciones ya sean por causas extrínsecas o intrínsecas pueden ser notorias en diferentes instantes de las fases del ciclo de marcha, las cuales se detallan a continuación y así mismo se presenta mayor detalle del análisis de la marcha protésica transtibial en el Anexo A.

#### *Desviación entre la fase de contacto inicial y fase media de apoyo*

La persona con amputación transtibial tiende a flexionar la rodilla más de los 20°, para que el pie alcance el suelo como se muestra en la Figura 1.43, por las siguientes causas:

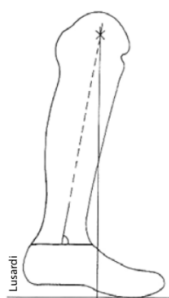


Fig. 1.43 Flexión excesiva de rodilla [ICRC, 2014].

- Sí la inclinación del encaje protésico va más allá de los  $5^\circ$  o tiene excesiva dorsiflexión pie.
- Sí la articulación de tobillo está demasiado dura.
- Sí la suspensión del encaje protésico tiene una mala postura, podría limitar la extensión total de la rodilla.
- Sí el encaje protésico tiene excesivo desplazamiento anterior, esto significa que el pie se encuentra por detrás del eje de acción de la fuerza “A”, que es la fuerza vertical ejercida por el cuerpo de la prótesis. Este posicionamiento inadecuado puede provocar un momento excesivo que obliga a la rodilla del miembro amputado a flexionarse más de lo necesario, causando incomodidad o incluso dolor en la rodilla, particularmente en la región de la patela (rótula), como se muestra en la Figura 1.44c.

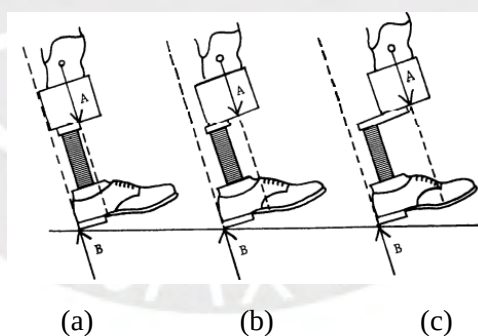


Fig. 1.44 Alineación anterior del encaje protésico con el eje de acción de la fuerza “A”: (a) alineación correcta, (b) alineación con desplazamiento leve, (c) desplazamiento excesivo anterior [Bowker, 2002].

Así mismo, la persona con amputación transtibial puede presentar poca o nula extensión, como se muestra en la Figura 1.45, por las siguientes causas:

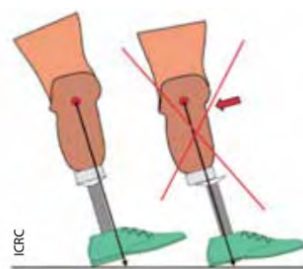


Fig. 1.45 Flexión insuficiente de rodilla [ICRC, 2014].

- Sí el contacto inicial del pie se realiza antes de lo previsto, lo que limita la flexión de la rodilla después de realizar el apoyo con el talón.
- Sí la articulación de tobillo excesivamente blanda. En el instante que el talón toca el suelo, el pie realiza plantarflexión de manera brusca.
- Sí hay molestia anterodistal del muñón. La presión en la zona anterior del muñón aumenta cuando el cuádriceps entra en acción en el momento de frenar la actividad flexora de la rodilla. Si existe alguna molestia en la zona mencionada, la persona con amputación tenderá a extender la rodilla en vez de flexionar.
- Sí no hay suficiente fuerza en el cuádriceps, la persona con amputación tenderá a hacer los mismos movimientos como cuando hay molestia anterodistal.
- Sí el pie se encuentra detrás de la línea de acción de la fuerza “A” que es la fuerza vertical ejercida por el cuerpo de la prótesis. Esto resulta en una extensión forzada de la rodilla en momentos en los que debería estar flexionándose para una marcha natural, se muestra en la Figura 1.46.

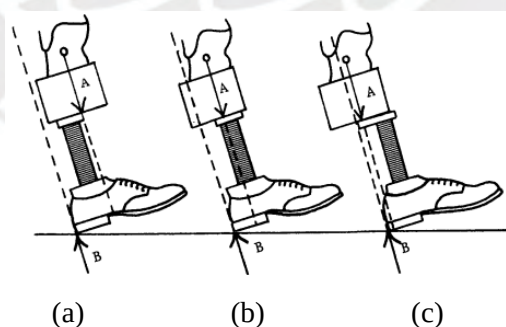


Fig. 1.46 Alineación posterior del encaje protésico con el eje de acción de la fuerza “A”: (a) alineación correcta, (b) alineación con desplazamiento leve, (c) alineación con desplazamiento excesivo [Bowker, 2002].

Por otro lado, la persona con amputación transtibial puede presentar rotación del pie en el “golpe del talón”, como se muestra en la Figura 1.47, por las siguientes causas:



Fig. 1.47 Desplazamiento excesivo posterior [ICRC, 2014].

- Sí el diseño del talón protésico es demasiado duro.
- Sí el encaje protésico mal ajustado.
- Sí existe una mala suspensión.
- Sí existe inestabilidad de la articulación de la rodilla y debilidad muscular.

#### Desviación en la fase media de apoyo

La persona con amputación transtibial puede presentar excesiva inclinación lateral de la prótesis, como se muestra en la Figura 1.48. Por lo que puede ocasionar molestias mediales distales en la rodilla y aumentar el riesgo de daño en los ligamentos de la rodilla. A continuación, se presentan las siguientes causas:



Fig. 1.48 Inclinación lateral del tronco en el lado de la prótesis transtibial [ICRC, 2014].



- Sí el pie está colocado en una posición demasiado medial de la línea de acción de la fuerza vertical, el encaje protésico tenderá a rotar alrededor del muñón cuando el miembro inferior este soportando todo el peso.
- Sí el encaje protésico está en posición excesiva de abducción, la presión en el borde medial del encaje aumentara demasiado, como se muestra en la Figura 1.49.

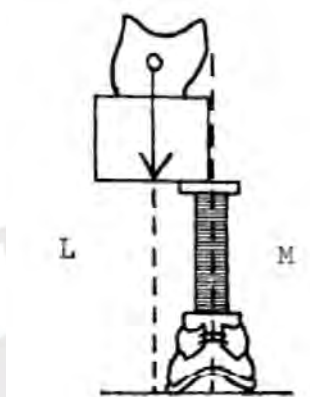


Fig. 1.49 Pie en posición medial excesiva [Bowker, 2002].

Desviación entre la fase final de apoyo y la fase previa a la oscilación o pre balanceo

La persona con amputación transtibial puede presentar una flexión prematura de rodilla, cuando el talón se levanta después de la fase de apoyo medio, la rodilla comenzará a flexionar y el peso del cuerpo se trasladará a los dedos del pie. Si el peso del cuerpo se traslada antes de tiempo sobre las articulaciones metatarsofalángicas, la rodilla flexionara antes de tiempo por la falta de apoyo, como se muestra en la Figura 1.50.

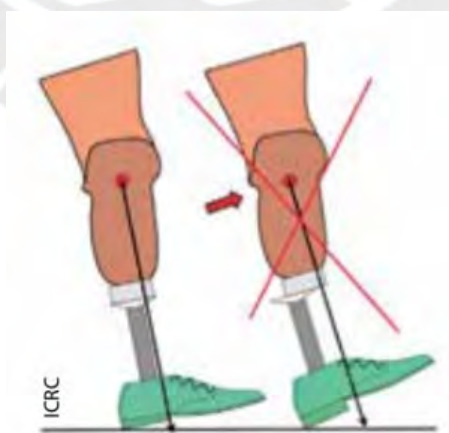


Fig. 1.50 Flexión temprana de la rodilla [ICRC, 2014].

- Sí el encaje protésico está ubicado en una posición demasiado anterior a la línea de fuerza vertical por la parte anterior del pie, esto ocasiona el traslado del peso del cuerpo sobre los dedos y por lo tanto adelanta la flexión de la rodilla.
- Sí la articulación del antepié tiene desplazamiento anterior.
- Sí la dorsiflexión del pie es excesiva.
- Sí la articulación del pie es muy blanda y realiza dorsiflexión.

Así mismo, la persona con amputación transtibial puede presentar flexión retardada de rodilla. Sí la distancia que recorre el peso del cuerpo sobre el pie es más larga, la rodilla permanecerá en extensión durante la fase de pre balanceo como se precisa en la Figura 1.51. Esta situación se puede deber a alguna de las siguientes razones:

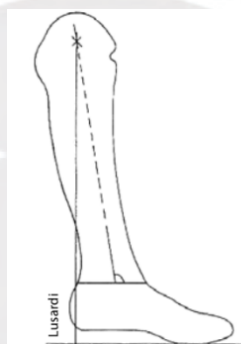


Fig. 1.51 Flexión retardada de la rodilla [ICRC, 2014].

- Excesivo desplazamiento posterior del encaje sobre el pie.
- Desplazamiento anterior de la articulación del antepié o del talón.
- Excesiva plantarflexión del pie o excesiva inclinación hacia atrás del encaje.
- Cojín de dorsiflexión dura.

Por otro lado, en la etapa de balanceo, la prótesis que utiliza una persona con amputación transtibial pueda deslizarse cuando el pie deja el suelo. Puede suceder cuando al mecanismo de suspensión del encaje protésico se encuentre flojo o sea inadecuado, como se muestra en la Figura 1.52.



Fig. 1.52 Flexión retardada de la rodilla [ICRC, 2014].



## CAPÍTULO 2

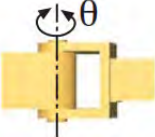
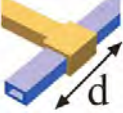
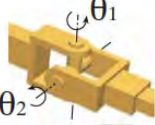
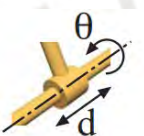
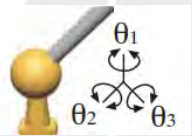
### FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y ANTECEDENTES

En el capítulo se presenta algunas definiciones básicas de la teoría de mecanismos, los mismos que comprenden el concepto de par cinemático, cadena cinemática, mecanismo, máquina. Luego realiza una clasificación de los mecanismos paralelos según las cadenas cinemáticas que lo conforman, los grados de libertad y el espacio de trabajo. Así mismo se detalla la aplicación de los mecanismos paralelos en la asistencia y rehabilitación de las articulaciones de tres grados de libertad en el cuerpo humano; cuello, hombro, muñeca, cadera y tobillo. Posteriormente se detalla las herramientas para la localización espacial, representación de la posición y la orientación. Seguido se describe la cinemática inversa y directa de los mecanismos paralelos y luego la dinámica de Newton Euler, Lagrange y el Principio del Trabajo Virtual en los mecanismos paralelos. Finalmente se presenta la simulación dinámica de los mecanismos paralelos mediante herramientas computacionales.

#### 2.1 Par cinemático

Un par cinemático es el modelo mecánico de conexión que consiste en el acoplamiento de dos cuerpos rígidos o eslabones donde se generan una o varias restricciones físicas de movimiento relativo entre ellos [Tsai, 1999]. Un par cinemático se genera cuando el contacto se da a lo largo de una superficie común entre los dos cuerpos. Es común definir a los pares cinemáticos o juntas, los mismos que detallan en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Pares cinemáticos [Tsai, 1999] [Haijun, 2002].

| Par cinemático o juntas | Representación                                                                     | Notación | Grados de libertad | Características                                                                                                                                   |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Par rotacional          |   | (R)      | 1                  | Permite la rotación alrededor de un eje entre dos elementos. Impone 5 restricciones entre los enlaces de conexión.                                |
| Par prismático          |   | (P)      | 1                  | Permite deslizar a lo largo de un eje entre dos elementos. Impone 5 restricciones entre los enlaces de conexión.                                  |
| Par Universal           |   | (U)      | 2                  | Permite la rotación alrededor de dos ejes independientes. Impone 4 restricciones entre los eslabones de conexión.                                 |
| Par cilíndrico          |   | (C)      | 2                  | Permite rotación y traslación a lo largo de un eje definido por la geometría de la junta. Impone 4 restricciones entre los elementos de conexión. |
| Par esférico            |  | (S)      | 3                  | Permite la rotación libre de un elemento con respecto a otro en tres direcciones. No permite traslación entre los elementos de conexión.          |

## 2.2 Cadena cinemática, mecanismo y máquina

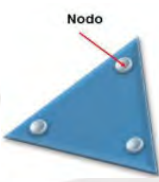
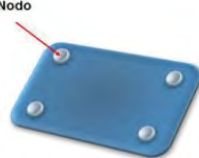
Una cadena cinemática es un conjunto de cuerpos rígidos también llamados eslabones, unidos por pares cinemáticos conocidos comúnmente como juntas. Un mecanismo es un ensamble de cadenas cinemáticas que interactúan entre sí, mediante distintos tipos de pares cinemáticos o juntas, con la finalidad de transmitir energía mecánica. Una máquina es un ensamble de uno o varios mecanismos, junto con otros componentes eléctricos y/o hidráulicos que se usa para transformar algún tipo de energía externa en trabajo o algún otro tipo de energía [Tsai, 1999].

### 2.2.1 Clasificación de los eslabones

Los eslabones son cuerpos rígidos o elementos individuales de un mecanismo. De acuerdo con el número de elementos conectados los eslabones y se clasifican según la Tabla 2.2.



Tabla 2.2 Tipos de eslabones<sup>23</sup>.

| Tipo de eslabón   | Representación                                                                     | Característica                                                                                                                |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Unitario o simple |   | Un elemento se encuentra conectado a otro únicamente mediante un par cinemático.                                              |
| Binario           |   | Un elemento se encuentra conectado a una cadena cinemática por dos pares cinemáticos. Un eslabón conectado a otros eslabones. |
| Ternario          |   | Un elemento se encuentra conectado en una cadena cinemática por más de tres pares cinemáticos.                                |
| Cuaternario       |  | Un elemento se encuentra conectado en una cadena cinemática por más de cuatro pares cinemáticos.                              |

### 2.2.2 Clasificación de las cadenas cinemáticas

Las cadenas cinemáticas se pueden clasificar en cadenas cerradas y cadenas abiertas, como se muestra en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3 Clasificación de las cadenas cinemáticas<sup>24</sup>.

| Tipo de cadena | Representación                                                                      | Característica                                                                                                                                                  |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cadena abierta |  | Posee al menos un eslabón que lleva únicamente un par cinemático. En una cadena abierta únicamente se encuentran conectados los eslabones unitarios y binarios. |
| Cadena cerrada |  | Mecanismo donde cada eslabón está conectado al menos con otros dos eslabones.                                                                                   |

<sup>23</sup> Tomado de: <https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/16868/1/CD-7447.pdf> Fecha de revisión: 24-05-2019.

<sup>24</sup> Tomado de: <https://docplayer.es/15524542-Los-eslabones-tambien-se-pueden-clasificar-de-acuerdo-a-si-empujan-o-jalan-a-otro-eslabon.html> Fecha de revisión: 24-05-2019.

### **2.2.3 Clasificación de actuadores**

Los actuadores generan el movimiento de los elementos del mecanismo paralelo. Los actuadores utilizados en los mecanismos paralelos pueden emplear energía neumática, hidráulica o eléctrica. Cada uno de estos sistemas presentan características diferentes como la potencia, controlabilidad, peso y volumen, precisión, velocidad, mantenimiento y costo [Barrientos, 2007].

#### **a) Actuadores neumáticos**

La fuente de energía es aire a presión entre 5 a 10 bar. Existen dos tipos de actuadores neumáticos; los cilindros y los motores neumáticos [Barrientos, 2007].

Los cilindros neumáticos pueden ser de simple o doble efecto. En el caso del cilindro de simple efecto, el émbolo se desplaza en una dirección debido al empuje ejercido por el aire a presión, mientras que en la otra dirección se desplaza mediante el efecto del muelle que devuelve al émbolo a su posición inicial. En contraste, en el cilindro de doble efecto, el aire a presión es el encargado de empujar el émbolo en ambas direcciones y puede ser introducido de manera selectiva en cualquiera de las dos cámaras del cilindro.

Los motores neumáticos son de aletas rotativas o de pistones axiales. En los motores de aletas rotativas sobre el rotor excéntrico están dispuestas las aletas de longitud variable, al entrar el aire a presión en uno de los compartimentos formados por dos aletas y la carcasa. Las aletas tienden a girar hacia una situación en la que el compartimiento tenga mayor volumen. En cambio, los motores de pistones axiales tienen un eje de giro solidario a un tambor que se ve obligado a girar por las fuerzas que ejercen varios cilindros, que se apoyan sobre un plano inclinado.

Los actuadores neumáticos presentan una limitación en cuanto a la precisión de posicionamiento debido a la compresibilidad del aire. No obstante, son ampliamente utilizados en aplicaciones donde se requiere un control de dos estados distintos, es decir donde la respuesta “todo o nada” es suficiente.

#### **b) Actuadores hidráulicos**

La fuente de energía es aceite mineral a una presión comprendida entre los 50 a 100 bar, llegándose en ocasiones a superar los 300 bar. Los actuadores hidráulicos también se

dividen en actuadores de tipo cilíndrico simple y doble efecto y del tipo de motores de aletas y pistones [Barrientos, 2007].

El grado de compresibilidad del aceite utilizado en los actuadores hidráulicos es inferior al de los actuadores neumáticos, lo que resulta en una mayor precisión en el caso de los primeros. Además, los actuadores hidráulicos pueden trabajar con altas presiones, lo que les permite desarrollar fuerzas y pares considerablemente elevados. Estos actuadores también presentan estabilidad frente a cargas estáticas, una capacidad de carga elevada y una relación potencia-peso favorable. Además, se caracterizan por su capacidad de auto lubricación y su robustez.

Sin embargo, la presión elevada de trabajo propicia la existencia de fugas de aceite, así mismo requiere de equipos de filtrado de partículas, eliminación de aire, sistemas de refrigeración y unidades de control de distribución.

### **c) Actuadores eléctricos**

La fuente de energía es eléctrica. Los actuadores eléctricos se dividen en actuadores lineales y actuadores rotatorios o también llamados motores, estos últimos son de tres tipos diferentes; motores de corriente continua (DC), motores de corriente alterna (AC), y motores paso a paso [Barrientos, 2007].

Los motores de corriente continua (DC) convierten la energía eléctrica en energía mecánica, provocando un movimiento rotatorio, gracias a la acción de un campo magnético. Están conformados por una carcasa, rotor, colector o conmutador y escobillas. El par de giro de arranque es más alto que en los motores de corriente alterna y varía en forma lineal con la velocidad, además este par de giro es proporcional a la intensidad. Estos motores son más eficaces para realizar trabajos que se requieran de una velocidad constante tanto en vacío como en plena carga, y su eficiencia alcanza un 60%.

Los motores de corriente alterna (AC) se clasifican en síncronos y asíncronos. En los motores síncronos, la velocidad de giro depende únicamente de la frecuencia de la tensión que alimenta el inducido. Para poder variar ésta con precisión, el control de velocidad se realiza mediante un convertidor de frecuencia. Para evitar el riesgo de pérdida de sincronismo se utiliza un sensor de posición que detecta la posición del rotor y permite

mantener en todo momento el ángulo que forman los campos del estator y del rotor. En el caso de los motores asíncronos en la actualidad no se ha podido resolver satisfactoriamente problemas de control que presentan por lo que no tienen aplicación en robótica.

En los motores paso a paso tenemos los de tipo de imanes permanentes, de reluctancia variables e híbridos. En los motores paso a paro de imanes permanentes, el rotor posee una polarización magnética constante, gira para orientar sus polos de acuerdo con el campo magnético creado por las fases de estator. En cambio, los motores de reluctancia variables el rotor está conformado por un material ferromagnético que tiende a orientarse de modo que facilite el camino de las líneas de fuerza del campo magnético generado por las bobinas del estator. Y los motores híbridos combinan el modo de funcionamiento de los dos tipos anteriores. En los motores paso a paso la señal de control de pulsos que van actuando rotativamente sobre una serie de electroimanes dispuestos en el estator. Por cada pulso recibido, el rotor del motor gira un determinado número discreto de grados. Su principal ventaja con respecto a los servomotores tradicionales es su capacidad para asegurar un posicionamiento simple y exacto. Pueden girar además de forma continua, con velocidad variable, como motores síncronos, ser sincronizados entre sí, obedecer a secuencias complejas de funcionamiento. Se trata al mismo tiempo de motores muy ligeros, fiables y fáciles de controlar, pues al ser estable cada estado de excitación del estator, el control se realiza en bucle abierto, sin la necesidad de sensores de realimentación.

Por otro lado, un par rotacional puede ser definido como una fuente de energía para el mecanismo, por medio de un actuador de rotación neumático, hidráulico o eléctrico, como se muestra en la Tabla 2.4. De la misma manera un par prismático puede definirse como una fuente de energía por medio de un actuador lineal neumático, hidráulico o eléctrico se muestran en la Tabla 2.5.

Tabla 2.4 Par rotacional como fuente de energía.

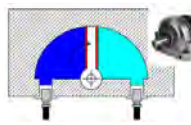
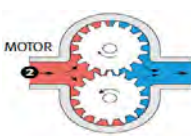
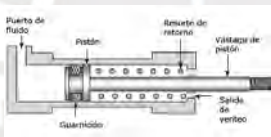
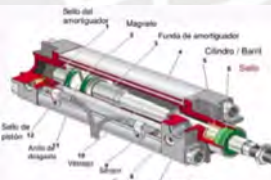
| Tipo de fuente           | Representación                                                                    | Energía                                                                                                | Ventajas                                                                  | Desventajas                                                 |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Neumático <sup>25</sup>  |  | Realiza movimientos de giro hasta 270°, tiene unos topes mecánicos que permite la regulación del giro. | Amortiguación al final del recorrido. Detección magnética de la posición. | Actuadores de giro limitado.                                |
| Hidráulico <sup>26</sup> |  | Convierte energía hidráulica en energía mecánica.                                                      | Proporciona una velocidad determinada relativamente constante.            | Cuando alcanza su máximo par, su velocidad cae rápidamente. |
| Eléctrico <sup>27</sup>  |  | Se requiere una fuente eléctrica.                                                                      | Es preciso, fiable fácil control, sencilla instalación.                   | Potencia por unidad de peso.                                |

Tabla 2.5 Par prismático como fuente de energía [Barrientos, 2007].

| Tipo de fuente | Representación                                                                                               | Energía                                                                                                                                  | Ventajas                                                                                                                                                                                                    | Desventajas                                                                                                                                                                            |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Neumático      | <br>Presión: 5 a 10 bar   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Aire a presión (5-10bar).</li> <li>Se requiere de un compresor y válvulas neumáticas.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Barato.</li> <li>Rápido.</li> <li>Sencillo.</li> <li>Robusto.</li> </ul>                                                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Dificultad de control continuo.</li> <li>Instalación especial (compresor, filtros).</li> <li>Ruidoso.</li> </ul>                                |
| Hidráulico     | <br>Presión: 50 a 100 bar | <ul style="list-style-type: none"> <li>Aceite mineral (50-100 bar).</li> <li>Se requiere de una bomba y válvulas hidráulicas.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Rápido.</li> <li>Alta relación potencia-peso.</li> <li>Auto lubricante.</li> <li>Alta capacidad de carga.</li> <li>Estabilidad frente a cargas estáticas.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Difícil mantenimiento.</li> <li>Instalación especial (filtros, eliminación de aire).</li> <li>Frecuentes fugas.</li> <li>Alto costo.</li> </ul> |
| Eléctrico      | <br>corriente DC          | <ul style="list-style-type: none"> <li>Corriente eléctrica (continua / alterna).</li> <li>Se requiere una fuente eléctrica.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Preciso.</li> <li>Fiable.</li> <li>Fácil control.</li> <li>Sencilla instalación.</li> <li>Silencioso.</li> <li>Menos contaminación.</li> </ul>                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>Potencia limitada.</li> </ul>                                                                                                                   |

25 Tomado de: <https://cursos.aiu.edu/Sistemas%20Hidraulicas%20y%20Neumaticos/PDF/Tema%204.pdf> Fecha de revisión: 24-05-2019.

26 Tomado de: <https://www.xn--mecatrnica-lbb.com.co/2021/12/motor-hidraulico.html> Fecha de revisión: 24-05-2019.

27 Tomado de <https://learn.adafruit.com/all-about-stepper-motors/types-of-steppers> Fecha: 24-05-2019.



## 2.3 Clasificación de los mecanismos paralelos

Los mecanismos paralelos se pueden clasificar utilizando varios criterios como las cadenas cinemáticas que lo conforman, los grados de libertad, y según el espacio de trabajo.

### 2.3.1 Según las cadenas cinemáticas que lo conforman

Mediante este criterio se divide los mecanismos en seriales y paralelos. Un mecanismo serial, está compuesto por varios eslabones conectados en una cadena cinemática<sup>28</sup> abierta, cada uno conectado al siguiente enlace por una única junta. Un extremo del enlace está unido a la base y el otro extremo es libre llamado efector final como se muestra en la Figura 2.1a [Pandilov, 2014].

A diferencia de un mecanismo serial, un mecanismo paralelo que se muestra en la Figura 2.1b, está compuesto por dos o más cadenas cinemáticas cerradas, en el cual la plataforma móvil también llamando efector final, está conectada a una plataforma de base fija por al menos dos cadenas cinemáticas independientes [Arockia, 2014]. Debido a su configuración compacta, los mecanismos paralelos presentan buena precisión, alta rigidez, bajo peso, baja inercia, tiene capacidad de manipular grandes cargas, velocidades y aceleraciones de operación superiores a los mecanismos en serie [Pandilov, 2014]. Una comparación entre los mecanismos paralelos y en serie se detalla en el Anexo B.

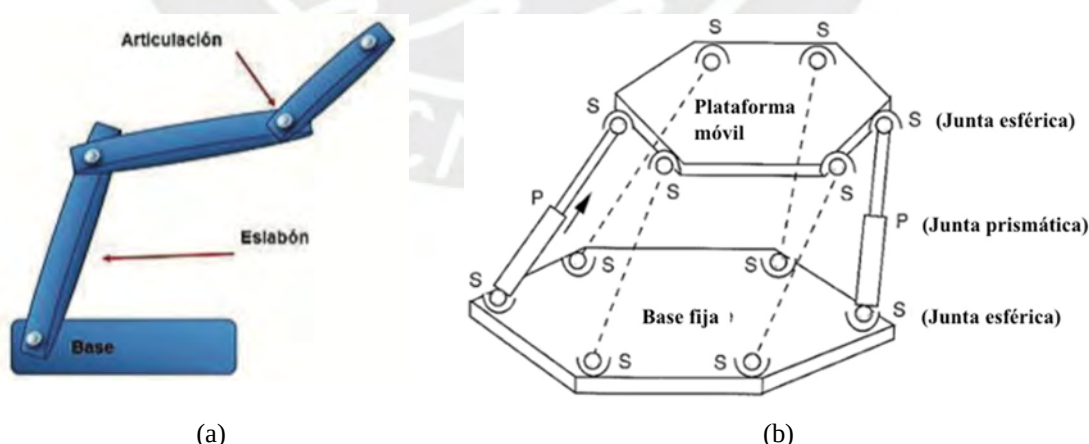


Fig. 2.1. Mecanismos: (a) serial [Fernández, 2016], (b) paralelo [Lung, 1999].

<sup>28</sup> Cadena cinemática: eslabones (barras) interconectados por pares cinemáticos (juntas)

### 2.3.2 Según los grados de libertad

El número de coordenadas independientes necesarias para expresar la posición de todas sus partes se conoce como el número de grados de libertad del sistema. Los grados de libertad ( $m$ ) que posee un mecanismo paralelo se determina utilizando el criterio de Kutzbach [Shigley, 2001], como se muestra en la Ecuación 2.1. Donde el número de elementos a interconectar ( $l$ ), y el número de juntas  $j_n$  con  $n$  grados de libertad es  $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5$ .

$$m = 6(l - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \quad (2.1)$$

### 2.3.3 Según el espacio de trabajo

Los mecanismos paralelos de 3 grados de libertad se clasifican según sus características de movimiento planares y espaciales. Este estudio se enfoca en los mecanismos espaciales de 3 grados de libertad, los cuales pueden operar en un entorno tridimensional. Esto implica que pueden realizar movimientos en todas las direcciones del espacio. Los ejemplos de estos mecanismos se presentan en la Figura 2.2 y 2.3.

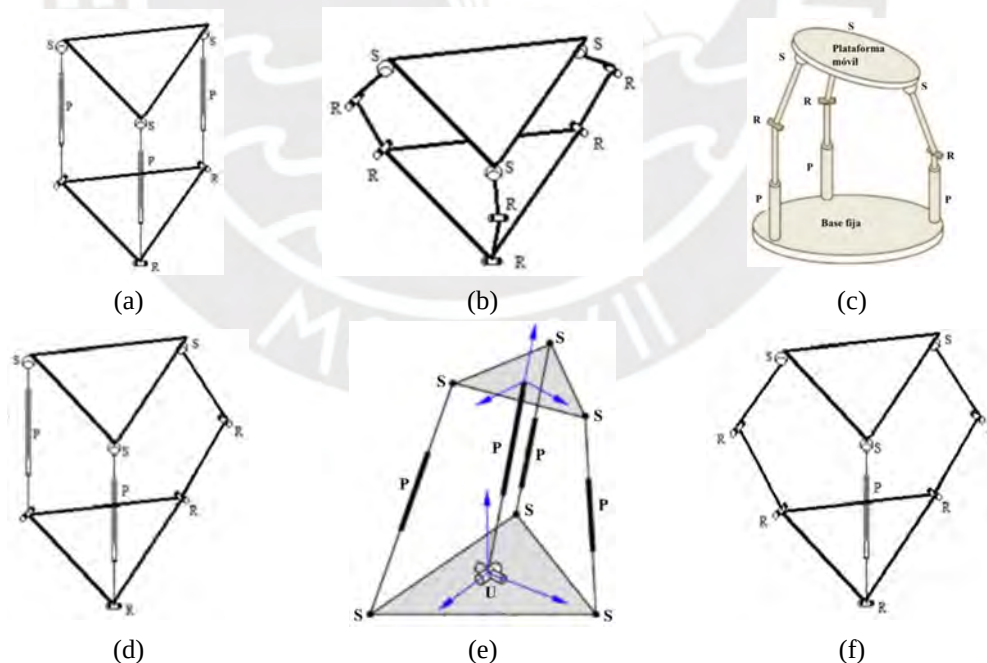


Fig. 2.2 Mecanismos paralelos de 3 grados de libertad (2 rotaciones y 1 traslación): (a) 3RPS [Villaveces, 2012], (b) 3RRS [Villaveces, 2012], (c) 3PRS [Fatehi, 2011], (d) 2RPS-RRS [Villaveces, 2012], (e) 3SPS-PU [Lu, 2007], (f) 2RRS-RPS [Villaveces, 2012].

Los mecanismos paralelos espaciales de 3 grados de libertad son una alternativa viable en el desarrollo del tobillo protésico para proveer tres movimientos al pie: dorsiflexión-plantarflexión, eversión-inversión y abducción-aducción. Estos tres movimientos deben ser de rotación y los mecanismos que satisfacen este requerimiento se presenta en la Figura 2.3.

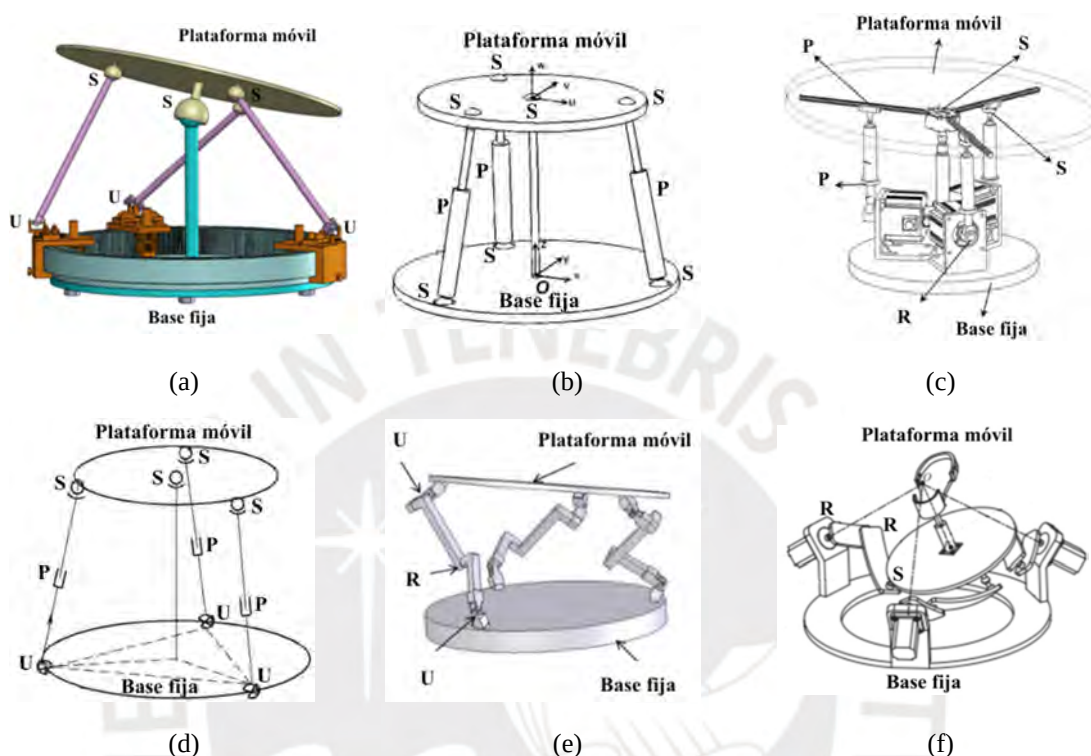


Fig. 2.3 Mecanismos paralelos de 3 grados de libertad (3 rotaciones): (a) 3PUS-1S [Khoshnoodi, 2018], (b) 3SPS-1S [Zavala, 2015], (c) 3RPSP-S [Enferadi, 2016], (d) 3UPS-S [Zhang, 2016], (e) 3URU [Huda, 2006], (f) 3RRS [Du, 2017].

## 2.4 Aplicación de mecanismos paralelos en la asistencia y rehabilitación de las articulaciones de tres grados de libertad en el cuerpo humano

A continuación, se presenta una revisión sistemática del estado del arte de los mecanismos paralelos para asistir o restaurar las articulaciones con tres grados de libertad del cuerpo humano; cuello, hombro, muñeca, cadera y tobillo. Desde una perspectiva de investigación, se realizó una búsqueda bibliográfica de artículos relacionados con mecanismos paralelos en el directorio de revistas PubMed, Taylor & Francis, Red de revistas científicas Redalyc y DOAJ (Directory of Open Access Journals). Usando una sintaxis booleana apropiada para cada base de datos utilizando las palabras clave: paralelo, mecanismo, cuello, hombro, cadera, muñeca y tobillo. Se buscó cada artículo desde el año 2009 hasta el año 2022.

### 2.4.1 Mecanismos paralelos para la articulación del cuello

El mecanismo paralelo 3RXS detallado en la Tabla 2.6a, se aplica en el tratamiento de diversas enfermedades neurológicas tales como la esclerosis lateral amiotrófica (ELA), la enfermedad de Parkinson (EP) y la esclerosis lateral primaria (PLS), las cuales pueden dar lugar al síndrome de cabeza caída (HDS). Este mecanismo se compone de eslabones conectados a una plataforma superior e inmóvil mediante una configuración de juntas que incluye una rotativa (R), una junta flexible en forma de X (X) y una esférica (S), dispuestas secuencialmente como R, X, S. La estructura del collarín es simple y liviana, facilitando los movimientos de flexión-extensión, el lateral izquierdo-lateral derecho y la rotación derecha-rotación izquierda [Liu, 2019].

Otro avance representado en la Tabla. 2.6b es un dispositivo terapéutico portátil para el tratamiento de pacientes con trastornos de la postura de la cabeza y el cuello. Utilizan un mecanismo paralelo de 3RPS compuesto por una plataforma móvil ubicado en la parte superior y una plataforma fija ubicado en los hombros, sus tres cadenas cinemáticas son iguales. Cada eslabón se conecta a la plataforma fija de manera secuencial a través de una junta giratoria (R), una junta prismática (P) y una junta esférica (S). La junta prismática es controlada por un actuador lineal eléctrico [Lingampally, 2019].

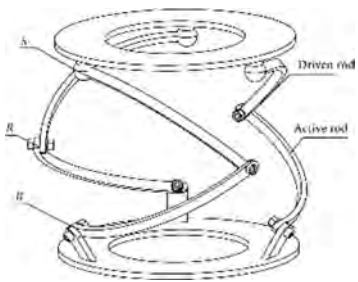
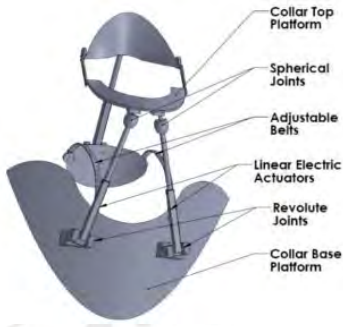
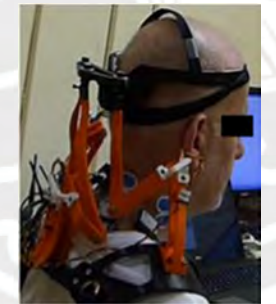
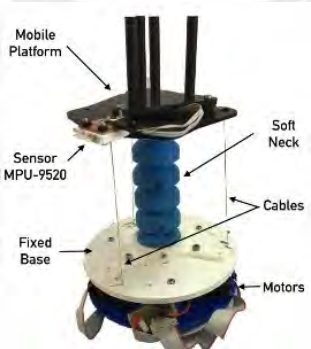
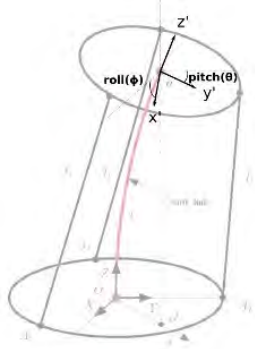
De manera similar, el mecanismo paralelo 3RRR que se muestran en la Tabla 2.6c se usaron en sujetos con esclerosis lateral amiotrófica (ELA) en un collar robótico para caracterizar el movimiento de la cabeza y el cuello con electromiografía muscular. Este mecanismo consiste en una plataforma móvil (superior) y una plataforma fija, así como tres enlaces de soporte estructurados. Cada eslabón está conectado a la plataforma superior y fija por tres juntas giratorias (R). El mecanismo puede realizar tres movimientos de cabeza y cuello en un solo plano: flexión-extensión en el plano sagital, flexión lateral en el plano coronal y rotación axial en el plano transversal [Zhang, 2019].

Por el contrario, el mecanismo paralelo accionado por cable 3CDPM representado en la Tabla 2.6d simula los movimientos de la articulación del cuello. El eslabón suave de la parte central funciona como una columna vertebral, es el mecanismo que permite la operación del cuello suave. Está construido por una plataforma base, una plataforma



móvil, un eslabón blando central, tendones (cables) y motores lo que hace que la plataforma superior se incline [Quevedo, 2021].

Tabla 2.6 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación de cuello.

|   | Topología                   | Prototipo                                                                           | Representación                                                                        |
|---|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| a | 3RXS<br>[Liu, 2019]         |    |     |
| b | 3RPS<br>[Lingampally, 2019] |   |   |
| c | 3RRR<br>[Zhang, 2019]       |  |  |
| d | 3CDPM<br>[Quevedo, 2021]    |  |  |



### 2.4.2 Mecanismos paralelos para la articulación del hombro

El hombro es una de las articulaciones más complejas del cuerpo humano debido a la movilidad que posee, debiendo lograr en el conjunto de sus estructuras, el equilibrio entre su amplitud articular y la estabilidad [Oliveira, 2007].

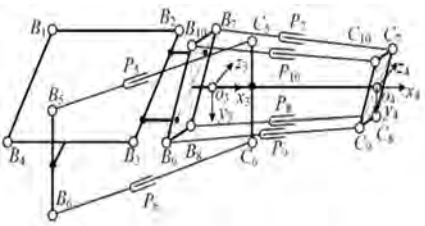
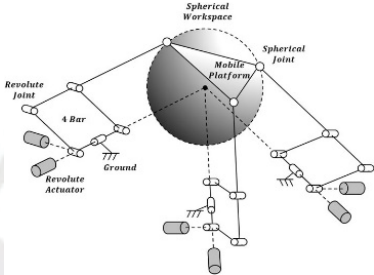
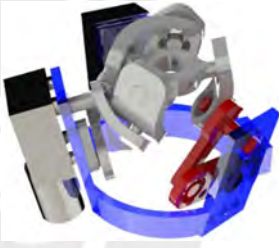
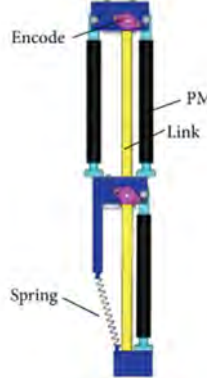
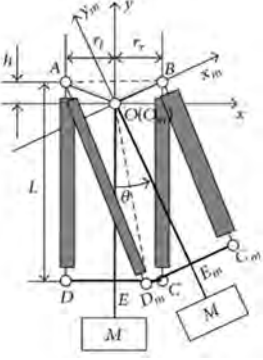
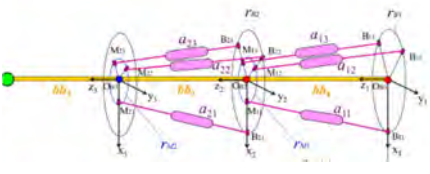
En la literatura se ha encontrado que los mecanismos paralelos han sido aplicados por ejemplo en un brazo humanoide que se muestra en la Tabla 2.7a, el cual emplea un mecanismo 5PMA que se encuentra accionado por el grupo PMA (actuador muscular neumático). El movimiento del hombro humano se divide en dos partes: el movimiento de la parte superior del cuerpo y la escápula, y el movimiento del húmero y la escápula [Liu, 2019].

Así mismo, la Tabla 2.7b se muestra una arquitectura de mecanismo paralelo 4B-SPM diseñado para la aplicación en exoesqueleto. El sistema 4B-SPM de 4 barras (4B), es utilizado para aumentar capacidad en ciertas actividades que requieran una mayor elevación o absorción de impactos [Hunt, 2021].

Por otro lado, en la Tabla 2.7c, se muestra un mecanismo paralelo de hombro de tipo esférico representado como 3RRR. El mecanismo conformado por 3 cadenas cinemáticas idénticas unidas por pares de revolución y accionados por tres motores realiza los tres movimientos de la articulación del hombro [Leal, 2018]. Así mismo, Wang et al. sugirieron la articulación biónica en la Tabla 2.7d, utilizando el mecanismo paralelo de cinco enlaces a través de músculos neumáticos antagonistas [Wang, 2013].

Siguiendo en la misma línea de investigación, un hombro protésico para mejorar las características espaciales y la reactividad a las perturbaciones se muestra en Tabla 2.7e incorpora un mecanismo de enlace paralelo accionado por actuadores neumáticos con un mecanismo antagónico deslizante su diseño está basado en la optimización de un mecanismo accionado por actuador neumático compacto paralelo [Sekine, 2013], [Sekine, 2015].

Tabla 2.7 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación del hombro.

|   | Topología                                         | Prototipo                                                                           | Representación                                                                        |
|---|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| a | 5PMA<br>[Liu, 2019]                               |    |     |
| b | 4B-SPM<br>[Hunt, 2021]                            |    |     |
| c | 3RRR<br>[Leal, 2018]                              |   |  |
| d | 5PM<br>[Wang, 2013]                               |  |  |
| e | 5-Link Bionic<br>[Sekine, 2013]<br>[Sekine, 2015] |  |   |

### 2.4.3 Mecanismos paralelos para la articulación de la muñeca

La muñeca es el conjunto articular más complejo que existe en el cuerpo humano, su área anatómica establece la unión entre el antebrazo y la mano [Medina, 2016].

Los mecanismos paralelos se encuentran presentes en la asistencia y rehabilitación de esta articulación, es así como se presenta en la Tabla 2.8a un mecanismo paralelo biónico flexible de muñeca impulsado por una cuerda y soportado por un resorte de compresión híbrido, modelado a partir de la articulación humana de muñeca. Realiza el movimiento utilizando un mecanismo externo a la muñeca, y por medio de cables replica la acción de los músculos [Pang, 2020]. Así mismo, en la Tabla. 2.8b se muestra una interfaz hombre-máquina basada en un mecanismo paralelo esférico coaxial sobreactuado para la rehabilitación de muñeca. Mecánicamente hablando, la base está unida por dos enlaces que están acoplados coaxialmente, y el eje de rotación está alineado con el eje de movimiento de pronación-supinación de la muñeca, tiendo un rango operativo más amplio de movimiento de la muñeca [Lee, 2018].

En la Tabla. 2.8c se muestra un robot paralelo blando 6SPS-PS para la rehabilitación de la muñeca basado en músculos artificiales neumáticos. Este mecanismo paralelo suave, a diferencia de los mecanismos de rehabilitación convencionales basados en cuerpo rígido, tiene una construcción pequeña que es muy segura, adaptable y versátil y, por lo tanto, una alternativa de bajo costo para la terapia personalizada. Este mecanismo está conformado por seis actuadores lineales igualmente espaciados que emplean músculos artificiales neumáticos y un solo motor eléctrico lineal central [Wang, 2021]. En la Tabla 2.8d se muestra una interfaz de tipo exoesqueleto robótico de muñeca basada en un mecanismo paralelo esférico coaxial (CSPM) completamente accionado. Esta interfaz tiene una baja inercia de las partes móviles debido a la disposición de la base de los actuadores, un alto par de salida de la síntesis de par paralelo y una rotación pura similar a la de la muñeca humana [Lee, 2021].

En la Tabla 2.8e se muestra una herramienta de rehabilitación portátil con un mecanismo de enlace paralelo. Se utiliza para tratar movimientos complejos como la flexión palmar y la dorsiflexión y la desviación radial/cubital. Además de entrenar los tres grados de flexibilidad rotacional de la articulación de la muñeca, un dispositivo de tipo enlace paralelo también puede entrenar sus tres grados de libertad de traslación [Kitano, 2018].

En la Tabla 2.8f se representa la articulación de la muñeca como un mecanismo paralelo accionado por cable (4CDPS), que consta de una plataforma inferior y una plataforma superior en una posición concéntrica para brindar soporte mecánico. Dos ejes concéntricos en el resorte que están unidos por una junta universal brindan soporte adicional para la construcción. Se utilizan cuatro cables para alimentar la estructura, lo que crea cuatro grados de libertad (DOF). Estos grados de libertad incluyen balanceo, cabeceo y guiñada por medio de un mecanismo paralelo y un movimiento de traslación a lo largo del eje superior por medio de un mecanismo en serie para regular la flexibilidad [He, 2019]. En la Tabla. 2.8g se muestra un prototipo de mano híbrida diseñado para agarrar varios artículos. Se compone de tres mecanismos de dedo de 1 grado de libertad y un mecanismo paralelo de muñeca de 5 grados de libertad. Este prototipo es aplicado para la fabricación y el montaje de máquinas herramienta, misiones de rescate, inspección de tuberías industriales, celdas de ensamblaje y operaciones de forja, cirugía guiada por tomografía computarizada, micro operación de biomedicina, recuperación de la salud y entrenamiento [Lu, 2017].

Por el contrario, en la Tabla 2.8h se muestra un prototipo de prótesis de codo transhumeral de 25cm de largo y 7 cm de diámetro, pesa menos de 1 kg y está construido con una topología paralela de 3 grados de libertad, que permite realizar 3 movimientos correspondientes a las acciones de pronación-supinación, flexión-extensión y rotación humeral. En estos movimientos participan simultáneamente dos actuadores lineales. Los actuadores eléctricos lineales comprenden de un motor tipo brushless de 12VCD, y un sistema de tornillo de bolas [Mendoza, 2009]. En la Tabla 2.8i, se presenta una prótesis del miembro superior que usa un mecanismo paralelo 2UPR y SS en el antebrazo, realiza movimientos en dos planos, similar a la articulación del radio carpiano. El mecanismo utiliza dos actuadores lineales y un eslabón de enlace pasivo para su rigidez. Los dos actuadores lineales están conectados por un lado a la placa de la muñeca, a través de dos juntas universales, y por el otro lado están conectados al antebrazo. Cada actuador lineal consiste en un motor Maxon modelo EC22 con un husillo GP22-S. El enlace pasivo conecta la placa móvil de la muñeca con la base del antebrazo utilizando uniones esféricas en ambos extremos, asegurando la rigidez del mecanismo [Bandara, 2014].



Tabla 2.8 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación de la muñeca.

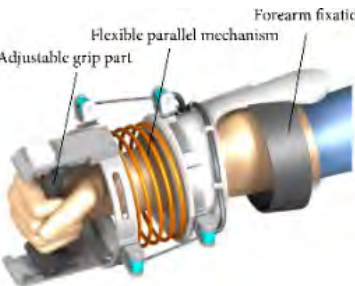
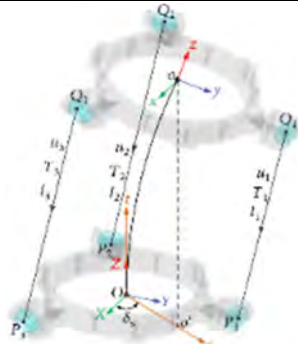
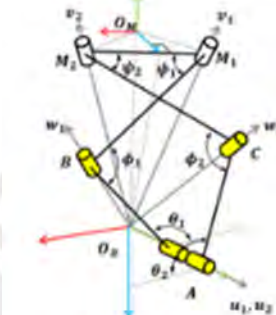
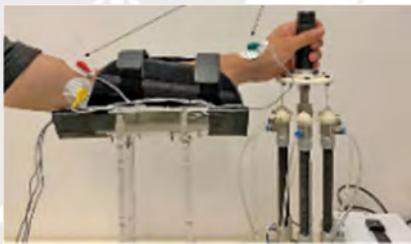
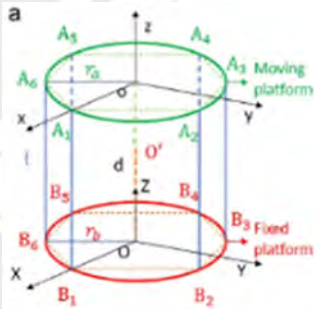
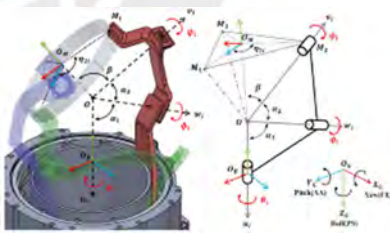
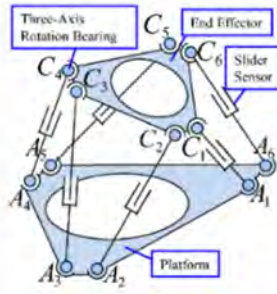
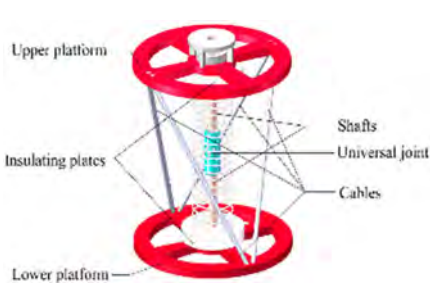
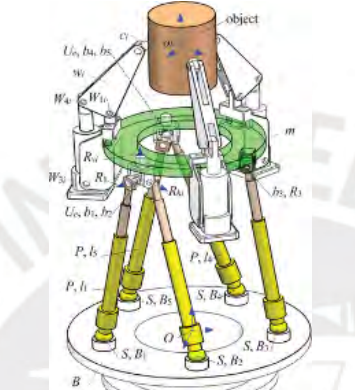
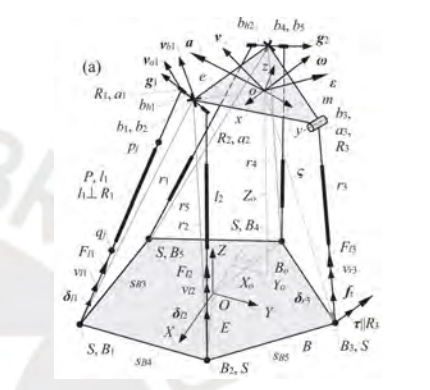
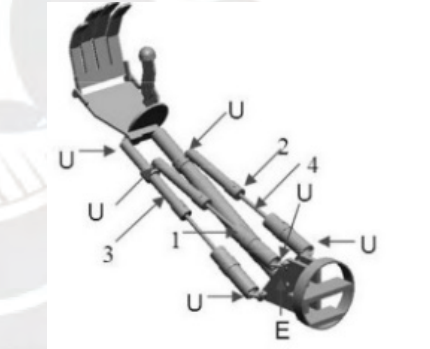
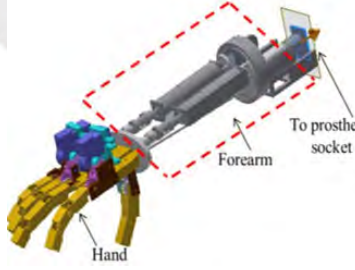
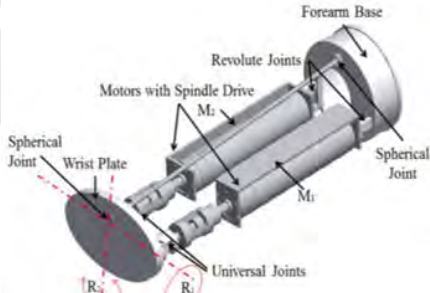
|   | Topología               | Prototipo                                                                           | Representación                                                                        |
|---|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| a | 2CDPM<br>[Pang, 2020]   |    |    |
| b | 3CSPM<br>[Lee, 2018]    |    |    |
| c | 6SPS-PS<br>[Wang, 2021] |  |   |
| d | 2CSPM<br>[Lee, 2021]    |  |   |
| e | 6SPS<br>[Kitano, 2018]  |  |  |



Tabla 2.8 Diferentes configuraciones de mecanismos paralelos para la articulación de la muñeca (continuación).

|   | Topología                    | Prototipo                                                                           | Representación                                                                       |
|---|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| f | 4CDPS<br>[He, 2019]          |    |    |
| g | 5SPM<br>[Lu, 2017]           |   |   |
| h | 3UPU<br>[Mendoza, 2009]      |  |  |
| i | 2UPR y SS<br>[Bandara, 2014] |  |  |

#### **2.4.4 Mecanismos paralelos para la articulación de la cadera**

La cadera es la articulación que une la extremidad superior con la inferior, por lo tanto, su correcto funcionamiento es fundamental para que todo nuestro cuerpo pueda moverse correctamente.

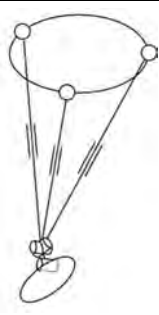
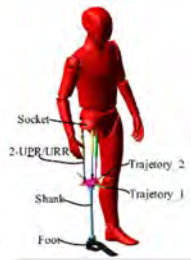
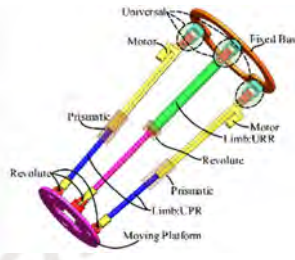
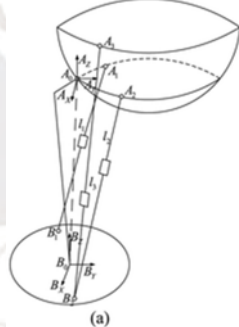
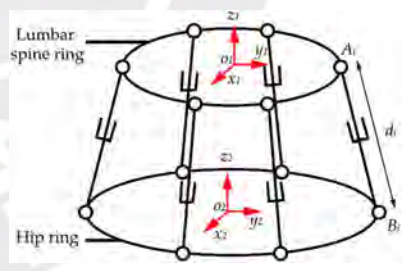
Los mecanismos paralelos se encuentran presentes en las piernas de un robot humanoide como se muestra en la Tabla. 2.9a. La arquitectura paralela 3UPR de cada pierna es lo que la hace única, debido a una construcción híbrida controlada por tres actuadores lineales para la movilidad inferior que conecta la cadera con el tobillo. La plataforma para los pies tiene un grado de libertad adicional debido a la inclusión de un segundo motor giratorio en el tobillo para el movimiento del tobillo [Russo, 2018].

En la Tabla 2.9b se muestra un mecanismo paralelo 2UPR-URR para prótesis de desarticulación de cadera, realiza movimientos de flexión, extensión, abducción y aducción. El cambio de par del mecanismo de la prótesis fue comparable al de la cadera humana, lo que demuestra la viabilidad del mecanismo y su fuerte rendimiento dinámico [Song, 2020].

Basada en un examen del sistema musculo esquelético humano, en la Tabla 2.9c muestra una extremidad inferior paralela con músculos neumáticos artificiales (PAM). En lugar de usar músculos antagonicos, el músculo se dispersa de manera desigual en un proceso paralelo [Jiang, 2017].

En la Tabla 2.9d se muestra un exoesqueleto de miembro inferior que se puede usar para ayudar con la rehabilitación médica usando un mecanismo de serie-paralelo. Se utiliza un mecanismo paralelo 6SPS para la capacidad de movimiento de la pelvis, y este mecanismo puede proporcionar a la articulación de la columna lumbar seis grados de libertad [Ren, 2019].

Tabla 2.9 Diferentes configuraciones de mecanismos para la articulación de la cadera.

|   | Topología                | Prototipo                                                                           | Representación                                                                       |
|---|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| a | 3UPR<br>[Ruso, 2018]     |    |   |
| b | 2UPR-URR<br>[Song, 2020] |    |   |
| c | PAM<br>[Jiang, 2017]     |   |  |
| d | 6SPS<br>[Ren, 2019]      |  |  |

### 2.4.5 Mecanismos para la articulación de rodilla

Las rodillas protésicas se pueden clasificar de diversas maneras, considerando factores como el número de ejes, el tipo de control y el diseño. En cuanto al número de ejes, existen las monocéntricas (de un solo eje) y las policéntricas (con varios ejes). También se pueden categorizar según el tipo de control, que puede ser mecánico, mediante fluidos (neumáticas o hidráulicas) o electrónico.

A continuación, se presenta una propuesta de clasificación que tiene como objetivo agrupar los diversos diseños disponibles en el mercado.

Las rodillas monocéntricas mecánicas: son dispositivos de prótesis simples en su diseño y se presenta en la Figura 2.4a. Estas rodillas pueden estar equipadas con un mecanismo de fricción que permite regular la velocidad de la flexo-extensión o pueden incluir un sistema de bloqueo que proporciona estabilidad durante la fase de apoyo del ciclo de marcha. Dentro de esta categoría, también se encuentran las rodillas de bloqueo manual las cuales se bloquean en posición de extensión y permanecen en esa posición durante todo el ciclo de marcha. Para lograr la flexión nuevamente, es necesario desbloquearlas manualmente. Estas rodillas son una opción de bajo costo y se recomiendan especialmente para personas con amputación que mantienen una cadencia de marcha constante y tienen un nivel de actividad física bajo.

Las rodillas policéntricas mecánicas: son dispositivos protésicos que incorporan múltiples ejes en su diseño, lo que conlleva un aumento en su peso y costo en comparación con las rodillas monocéntricas, se presentan en la Figura 2.4b. Debido a la presencia de más componentes móviles, estas rodillas requieren un mayor nivel de mantenimiento. Las rodillas policéntricas buscan proporcionar al usuario una mayor estabilidad y control, ya que se asemejan más al comportamiento biomecánico de la rodilla humana al ubicar el eje instantáneo de rotación de manera proximal y posterior. En términos de funcionalidad, se considera las rodillas policéntricas mecánicas para pacientes que se encuentren en un nivel moderado de movilidad y capacidad funcional.



(a)



(b)

Fig. 2.4 Prótesis de rodilla: (a) monocéntrica con bloqueo a la carga y asistencia a la extensión, (b) policéntrica mecánica con asistencia a la extensión [Ortiz, 2022].

Rodillas de control por fluido: dentro de esta categoría, se encuentran las rodillas de control por fluido, que pueden ser tanto monocéntricas como policéntricas, como se presenta en la Figura 2.5. Estas rodillas utilizan fluidos, que pueden ser aire (llamadas rodillas neumáticas) o líquido (conocidas como rodillas hidráulicas), para regular la flexo-extensión de la rodilla durante las fases de apoyo y balanceo del ciclo de marcha. Estos mecanismos ofrecen la ventaja de facilitar los ajustes necesarios durante el movimiento de la rodilla, lo que resulta en una mayor estabilidad para el usuario. Sin embargo, es importante tener en cuenta que requieren un mayor grado de control por parte del usuario.

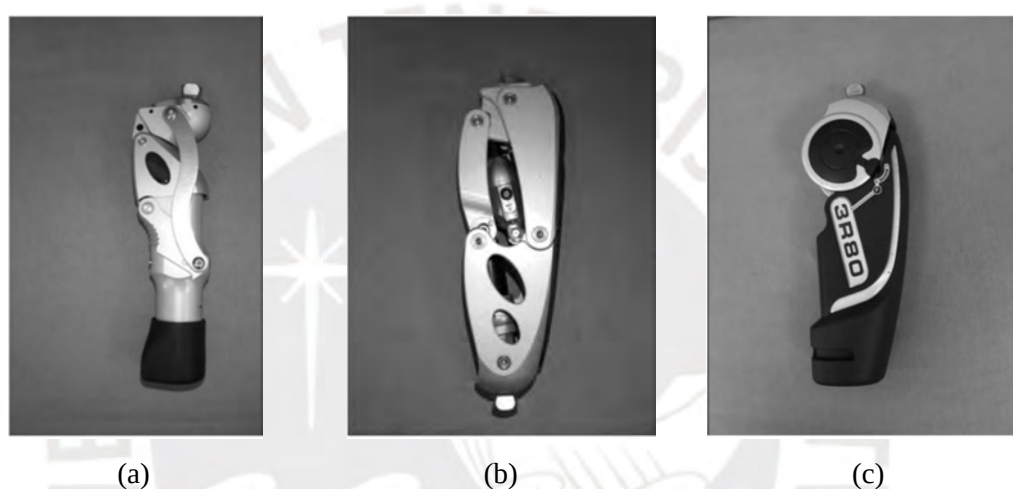


Fig. 2.5 Prótesis de rodilla: (a) policéntrica 3R106 Ottobock, (b) policéntrica hidráulica 3R60 Ottobock, (c) monocéntrica hidráulica con sistema de control hidráulico de balanceo y apoyo (SNS) 3R80 Ottobock [Ortiz, 2022].

Rodillas de control electrónico: son dispositivos que incorporan sistemas electrónicos equipados con microprocesadores. Estos sistemas tienen la capacidad de controlar el flujo de fluido dentro de la rodilla, ajustándolo según los cálculos realizados en tiempo real, que incluyen la cadencia y cambios angulares, como se observa en el caso de la Figura 2.6. Una de las principales ventajas de estas rodillas es que ofrecen una mayor estabilidad y seguridad durante la fase de apoyo del ciclo de marcha. Sin embargo, es importante tener en cuenta que presentan desventajas, como su peso y su costo elevado.





Fig. 2.6 Prótesis con control electrónico rodilla 3E80 Ottobock [Ortiz, 2022].

#### 2.4.6 Mecanismos paralelos para la articulación del tobillo

El tobillo tiene una función indispensable en los miembros inferiores, debido al trabajo que realiza durante el ciclo de marcha, en cada paso los tendones de Aquiles se extienden, y se contraen. Cuando una persona con amputación se coloca una prótesis estándar de tobillo pierde al menos el 50% de esa propulsión, y como resultado, por lo general, no pueden caminar tan rápido o tan lejos, y al final del día se encuentran cansados<sup>29</sup>. Sin embargo, para contrarrestar este inconveniente, nuevas ideas han sido desarrolladas, y es así, que se han encontrado investigaciones de prótesis de tobillo-pie con diseños de mecanismos seriales el cual se detalla en el Anexo C, pero a la fecha son pocas las investigaciones que utilizan mecanismos paralelos en prótesis de miembro inferior, sin embargo, si se ha encontrado mayor estudio en dispositivos de rehabilitación del tobillo.

A continuación, en la Figura 2.7a se presenta la patente N° US 9,949,849 B2, [Maitland, 2015], que es una prótesis de tobillo-pie con estabilizador medio-lateral para caminar sobre el suelo con inclinaciones ásperas. El mecanismo compone de un sistema tipo tijera que permite los movimientos de dorsiflexión y plantarflexión, se encuentra ubicado uno en la planta del pie protésico y uno en la articulación del tobillo. Por otro lado, la patente N° US 7,118,601 B2 que se muestra en la Figura 2.7b, es un dispositivo de articulación artificial con enlaces paralelos, que pueden estar integrados en una prótesis o una extremidad de un robot, y que permite realizar 3 grados de libertad del tobillo. Este mecanismo consiste en una placa

<sup>29</sup> Tomado de: <https://www.bostonmagazine.com/health/2013/11/26/prosthetics-research-boston-biom-ankle-prosthetic/> Fecha de revisión: 16-05-2019.

superior y un pie artificial conectados entre sí mediante un eslabón de longitud fija y cuatro eslabones de longitud variable, todos ellos articulados en sus puntos de anclaje mediante articulaciones esféricas. Estos eslabones pueden ser elementos pasivos o activos, los elementos pasivos son resortes y amortiguadores, mientras que los activos son actuadores lineales eléctricos [Yasui, 2006].

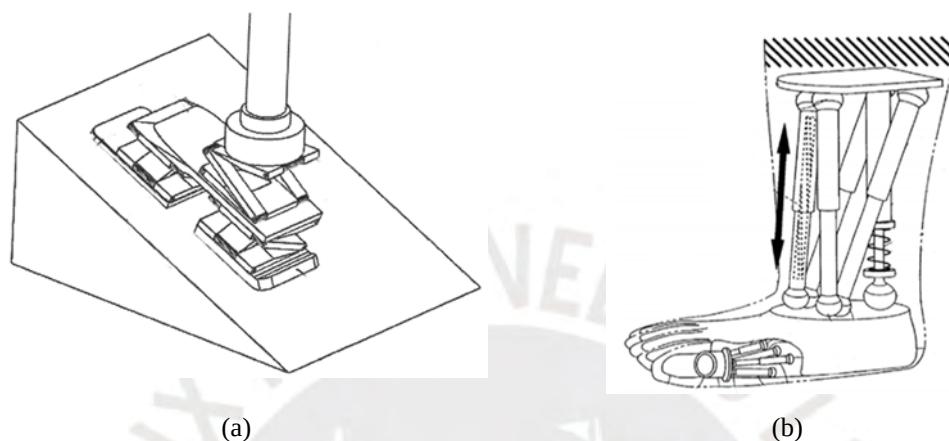


Fig. 2.7 Patentes de mecanismos paralelos, (a) US 9,949,849 B2 [Maitland, 2015], (b) US 7,118,601 B2 [Yasui, 2006].

En personas con problemas en el tobillo, es esencial un tratamiento físico repetitivo y riguroso. En el entorno médico cada vez más se está utilizando tecnología asistida por robots con el fin de aligerar la carga de los terapeutas y ahorrar el gasto de los pacientes. Es por ese motivo que a continuación se detalla una serie de mecanismos paralelos que están siendo usados para la rehabilitación de tobillo.

En la Tabla 2.10a se muestra un mecanismo paralelo portátil 2UPS-RRR con tres grados de libertad que abarca todo el rango de movimiento del tobillo humano, el cual consiste en un sistema controlado por una máquina y un sistema de recopilación de datos de posición-fuerza de varios modelos [Zuo, 2020]. Así mismo, en la Tabla 2.10b se presenta un robot híbrido para la rehabilitación del tobillo, que puede realizar movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, inversión-eversión y abducción-aducción. Este robot es de pequeño volumen, bajo peso y excelente portabilidad [Liao, 2018]. En la Tabla 2.10c se muestra un dispositivo portátil pequeño y liviano para realizar ejercicio, rehabilitación y entrenamiento. Basado en un diseño paralelo 4SPS-S accionado por cable que proporciona asistencia en todo el rango de movimiento del tobillo humano durante la marcha [Russo, 2020]. En la Tabla 2.10d se muestra un robot de rehabilitación de tobillo

basado en un mecanismo paralelo 3RRS, que es consistente con la estructura topológica del tobillo. Realiza los movimientos del tobillo a lo largo de una trayectoria esférica en el espacio [Du, 2017]. En la Tabla 2.10e se presenta un sistema inteligente de rehabilitación de tobillo con dos robots paralelos Stewart de 6 DOF. Este dispositivo permite el modelado de un patrón de marcha humana y proporciona el más alto nivel de seguridad para el paciente [Azar, 2016].

En la Tabla 2.10f se ilustra un robot de rehabilitación de tobillo en paralelo con dos motores lineales y un motor paso a paso. Su sistema de ajuste permite garantizar que el pie de una persona quedará sustancialmente sujeto a la plataforma superior sin producir deslizamiento y sin sufrir ningún tipo de lesión [Li, 2022]. En la Tabla 2.10g [Wang, 2019] se representa un mecanismo paralelo 2SPS que sirve como robot auxiliar de rehabilitación de la articulación del tobillo. En la Tabla 2.10 h se muestra un robot paralelo híbrido 6UPS-3SPR que tiene nueve actuadores lineales y se utiliza como herramienta de rehabilitación para lesiones de tobillo [Rastegarpanah, 2018].

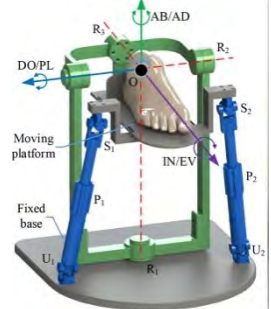
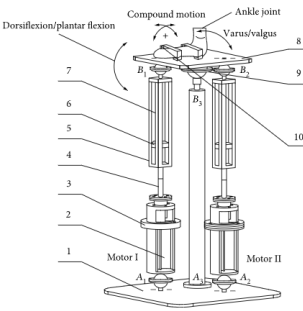
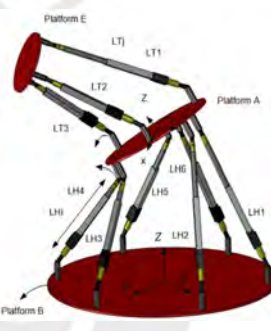
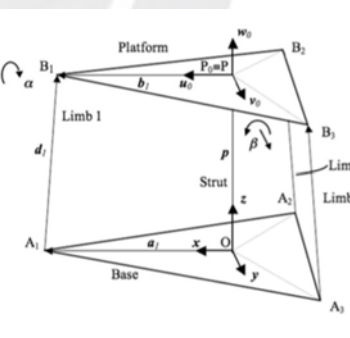
En la Tabla 2.10i se presenta un mecanismo paralelo de dos GDL y consiste en una base, una plataforma móvil, tres cadenas cinemáticas idénticas y un elemento puntal pasivo. El puntal central está unido a la plataforma móvil con una junta universal y cada cadena cinemática está conformada por una junta esférica, prismática y una universal, las mismas que están unidas a la plataforma fija. Los puntos de unión se encuentran a distancias iguales  $r_a$  para la plataforma fija y  $r_b$  para la plataforma móvil [Saglia, 2009].

En la Tabla 2.10j Este mecanismo funciona como articulación de tobillo en un exoesqueleto de rehabilitación. Soporta una fuerza máxima de 350 N, y es capaz de imitar movimientos de un tobillo. El diseño posee tres mecanismos de cuatro barras, donde una barra de un mecanismo se interseca ortogonalmente con su correspondiente en los otros dos mecanismos, formando una cruz en la plataforma móvil. Como actuadores posee tres motores DC acoplados a reductores de marca Harmonic Drive Gear, los cuales poseen un torque nominal de 28 Nm a 300 RPM [Shivesh, 2018].





Tabla 2.10 Diferentes configuraciones de mecanismos en articulación del tobillo (continuación).

|   | Topología                          | Prototipo                                                                           | Representación                                                                       |
|---|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| f | 2UPS-RRR<br>[Li, 2022]             |    |   |
| g | 2SPS<br>[Wang, 2019]               |    |   |
| h | 6UPS-3SPR<br>[Rastegarpanah, 2018] |   |  |
| i | 3SPU-1S<br>[Saglia, 2009]          |  |  |
| j | 4B<br>[Shivesh, 2018]              |  |  |



## 2.5 Herramientas matemáticas para la localización espacial

La posición y orientación espacial de un cuerpo rígido se presentan por separado mediante herramientas matemáticas. Luego se presenta el concepto de matriz de transformación homogénea el cual integra en conjunto la posición y orientación espacial del cuerpo rígido.

### 2.5.1 Representación de la posición

Un cuerpo rígido en el espacio se localiza mediante la posición y orientación en relación de un sistema de referencia definido. En un plano bidimensional, la posición de un cuerpo rígido precisa de dos grados de libertad, y, por lo tanto, la posición del cuerpo quedará definida por dos componentes independientes. En un espacio tridimensional, se requieren tres componentes independientes para definir completamente la posición del cuerpo.

#### a) Sistema de referencia cartesiano

El sistema de referencia cartesiano se establece utilizando ejes que son perpendiculares entre sí, partiendo de un punto de origen definido. En el contexto de dos dimensiones, el sistema de referencia  $OXY$  se conforma por dos vectores coordenados,  $OX$  y  $OY$ , que son perpendiculares entre sí y se intersectan en el punto  $O$ , como se ilustra en la Figura 2.8a. En tres dimensiones, el sistema cartesiano  $OXYZ$  consta de tres vectores unitarios,  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ , formando una terna ortonormal. Este arreglo se puede observar en la Figura 2.8b.

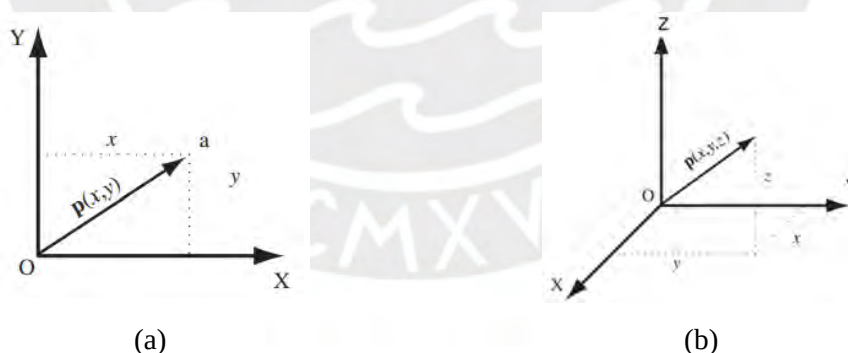


Fig. 2.8 Representación de un vector de posición en coordenadas cartesianas: (a) dos dimensiones, (b) tres dimensiones [Barrientos, 2007].

#### b) Coordenada cartesiana

El vector posición  $\mathbf{p}$  se define con respecto al sistema de referencia  $OXYZ$  mediante las coordenadas correspondientes  $(x,y,z)$  a cada uno de los ejes coordenados como se muestra en la Figura 2.9a.

### c) Coordenada cilíndrica

El vector posición  $\mathbf{p}$  se define con respecto a un sistema  $OXYZ$  como  $(r, \theta, z)$ . Las componentes  $r$  representa la distancia desde el origen  $O$  del sistema hasta el extremo del vector  $\mathbf{p}$ , mientras que  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $\mathbf{p}$  con el eje  $OXY$ , y la componente  $z$  expresa la proyección sobre el eje  $OZ$  del vector  $\mathbf{p}$ , como se muestra en la Figura 2.9b.

### d) Coordenada esférica

El vector posición  $\mathbf{p}$  se define con respecto a un sistema  $OXYZ$  como  $(r, \theta, \phi)$ . La componente  $r$  es la distancia desde el origen  $O$  hasta el extremo del vector  $\mathbf{p}$ ; la componente  $\theta$  es el ángulo formado por la proyección del vector  $\mathbf{p}$  sobre el plano  $OXY$  con el eje  $OX$ , la componente  $\phi$  es el ángulo formado por el vector  $\mathbf{p}$  con el eje  $OZ$ , como se muestra en la Figura 2.9c.

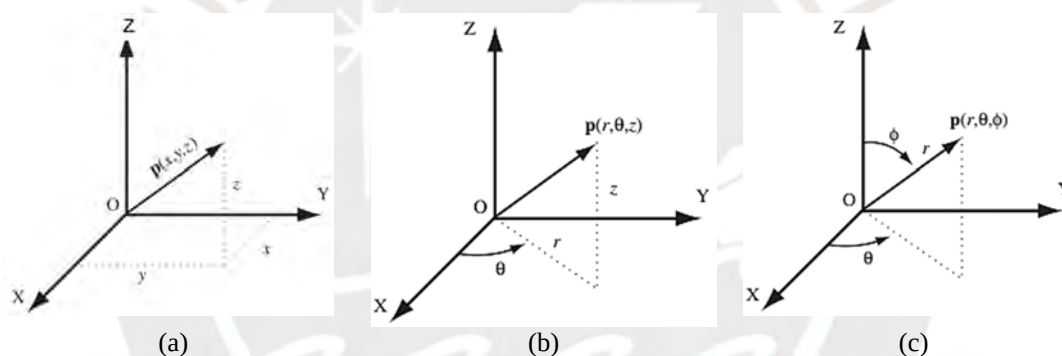


Fig. 2.9 Coordenadas: (a) cartesiana, (b) polar y cilíndrica, (c) esférica [Barrientos, 2007].

## 2.5.2 Representación de la orientación

El sólido rígido además de ser definido por la posición es necesario definir la orientación con respecto al sistema de referencia. Se puede definir por medio de matrices de rotación, ángulos de Euler, ángulos de Yaw-Pitch-Roll, ángulos de Bryant-Cardan.

### a) Matrices de rotación

En un espacio tridimensional las matrices de rotación son el método más extendido para la descripción de orientaciones, debido al uso del álgebra matricial. Se supone dos sistemas coincidentes en el origen, siendo  $OXYZ$  el sistema de referencia fijo, y el  $OUVW$  el solidario al objeto cuya orientación se desea definir, como se muestra en la Figura 2.10.

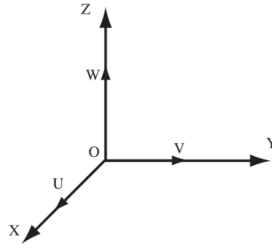


Fig. 2.10 Sistema de referencia *OXYZ* [Barrientos, 2007].

Los vectores unitarios del sistema *OXYZ* serán  $\mathbf{i}_x$ ,  $\mathbf{j}_y$ ,  $\mathbf{k}_z$ , mientras los del *OUVW* serán  $\mathbf{i}_u$ ,  $\mathbf{j}_v$ ,  $\mathbf{k}_w$ . Un vector posición  $\mathbf{p}$  del espacio podrá ser referido a cualquiera de los sistemas con las Ecuaciones 2.2 y 2.3.

$$\mathbf{p}_{uvw} = [p_u, p_v, p_w]^T = p_u \cdot \mathbf{i}_u + p_v \cdot \mathbf{j}_v + p_w \cdot \mathbf{k}_w \quad (2.2)$$

$$\mathbf{p}_{xyz} = [p_x, p_y, p_z]^T = p_x \cdot \mathbf{i}_x + p_y \cdot \mathbf{j}_y + p_z \cdot \mathbf{k}_z \quad (2.3)$$

Sustituyendo la Ecuación 2.2 y 2.3 se obtiene la Ecuación 2.4, donde  $R$  se define con la Ecuación 2.5.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matriz de rotación que define la orientación del sistema *OUVW* con respecto al sistema *OXYZ*, también recibe el nombre de matriz de cosenos directores y se trata de una matriz ortonormal, tal que la inversa de la matriz  $R$  es igual a su traspuesta:  $R^{-1} = R^T$ .

Del sistema de referencia de la Figura 2.10, la orientación del sistema *OUVW*, con el eje *OU* coincidente con el eje *OX* se representa mediante la Ecuación 2.6 y la Figura 2.11a. La orientación del sistema *OUVW*, con el eje *OV* coincidente con el eje *OY*, se representa con la Ecuación 2.7 y la Figura 2.11b. Así mismo la orientación del sistema *OUVW*, con el eje *OW* coincidente con el eje *OZ* se representa con la Ecuación 2.8 y la Figura 2.11c.

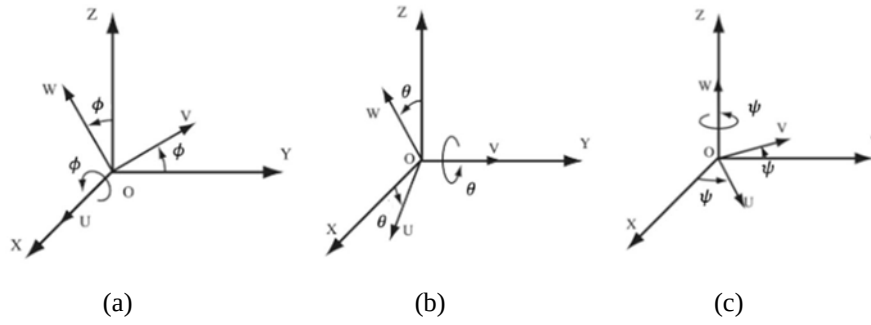


Fig. 2.11 Rotación del sistema  $OUVW$ : (a) con respecto al eje  $OX$ , (b) con respecto a  $OY$ , (c) con respecto a  $OZ$  [Barrientos, 2007].

$$Rot [x, \phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$Rot [y, \theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$Rot [z, \psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones. Por ejemplo, en la Ecuación 2.9 se presenta la rotación de ángulo  $\phi$  sobre  $OX$ , seguido de una rotación del ángulo  $\theta$  sobre  $OY$  y de una rotación del ángulo  $\psi$  sobre  $OZ$ .

$$\begin{aligned} R_{ZYX} &= Rot [z, \psi] Rot [y, \theta] Rot [x, \phi] \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\text{sen } \psi \cos \theta + \cos \psi \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \text{sen } \phi + \cos \psi \text{sen } \theta \cos \phi \\ \text{sen } \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta + \text{sen } \psi \text{sen } \theta \text{sen } \phi & -\cos \psi \text{sen } \theta \text{sen } \phi + \text{sen } \psi \text{sen } \theta \cos \phi \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Es importante considerar que el orden en el que se realizan las rotaciones, debido a que el producto de matrices no es conmutativo, por ejemplo, la Ecuación 2.10.

$$\begin{aligned} R_{XYZ} &= Rot [x, \phi] Rot [y, \theta] Rot [z, \psi] \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \text{sen } \psi & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \phi \text{sen } \theta \cos \psi + \cos \phi \text{sen } \psi & -\text{sen } \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \cos \phi \cos \psi & -\text{sen } \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \text{sen } \theta \cos \psi + \text{sen } \phi \text{sen } \psi & \cos \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi + \text{sen } \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

### b) Ángulos de Euler

Todo sistema  $OUVW$  solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir, puede definirse con respecto al sistema  $OXYZ$  mediante tres ángulos:  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , denominados ángulos de Euler que representan los valores de los giros a realizar sobre tres ejes ortogonales entre sí, de modo que girando sucesivamente el sistema  $OXYZ$  sobre estos ejes octonormales los valores de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , se obtendrán del sistema  $OUVW$ . Es necesario, por tanto, conocer además de los valores de los ángulos, cuáles son los ejes sobre los que se realizan los giros. Existen diversas posibilidades, siendo las más usuales las que se muestran a continuación:

Ángulos de Euler secuencia  $WUW$ : se presenta en la Figura 2.12 y la matriz de rotación en la Ecuación 2.11.

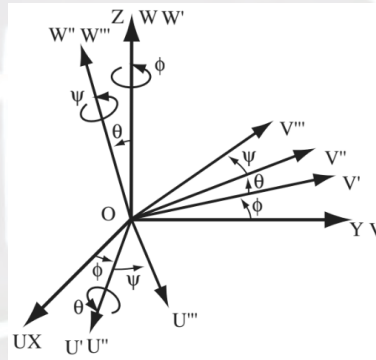


Fig. 2.12 Ángulos de Euler:  $WUW$  [Barrientos, 2007].

$$R_{ZXZ} = Rot [z, \phi] Rot [x, \theta] Rot [z, \psi]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Ángulos de Euler secuencia  $WVW$ : se presentan en la Figura 2.13 y la matriz de rotación en la Ecuación 2.12.



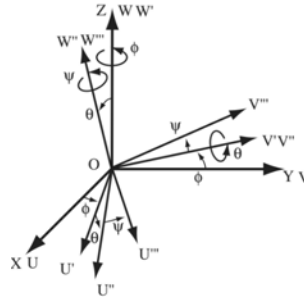


Fig. 2.13 Ángulos de Euler:  $WVV$  [Barrientos, 2007].

$$R_{ZYZ} = Rot [z, \phi] Rot [y, \theta] Rot [z, \psi]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### c) Ángulos de Tait-Bryan

Los ángulos de Tait-Bryan, conocidos como ángulos cardan, representan una rotación alrededor de tres ejes diferentes. Estas denominaciones diferentes tienen sus raíces en los nombres de matemáticos. Tait-Bryan proviene de Peter Guthrie Tait, un matemático escocés del siglo XIX, y Cardan proviene de Gerolamo Cardano, un matemático renacentista italiano. Estos ángulos son conocidos en la ingeniería aeroespacial y en la gráfica computacional, y las secuencias de rotación se clasifican en seis secuencias que representan rotaciones ( $ZYX$ ,  $ZXY$ ,  $YZX$ ,  $YXZ$ ,  $XZY$ ,  $XYZ$ ) [Schüppstuhl, 2018].

Secuencia  $ZYX$ : es ampliamente usada y es conocida como la convención de Roll, Pitch y Yaw (RPY), representan tres ángulos, donde el roll es la rotación alrededor del eje  $Z$ , Pitch la rotación alrededor del eje  $Y$  y Yaw la rotación alrededor del eje  $X$ . Estos movimientos se definen partiendo de los sistemas de coordenadas  $OXYZ$ , y se presenta mediante la matriz de rotación de la Ecuación 2.13.

$$R_{ZYX} = Rot [z, \psi] Rot [y, \theta] Rot [x, \phi]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Secuencia  $ZXY$ : se utiliza el marco de referencia  $OXYZ$  para las rotaciones sucesivas respecto al sistema coordenado que ha girado, iniciando con la rotación del ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $Z$ , seguido de la rotación del ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $X$  y finalmente

la rotación del ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $Y$ . La matriz de transformación se presenta en la Figura 2.14 y Ecuación 2.14.

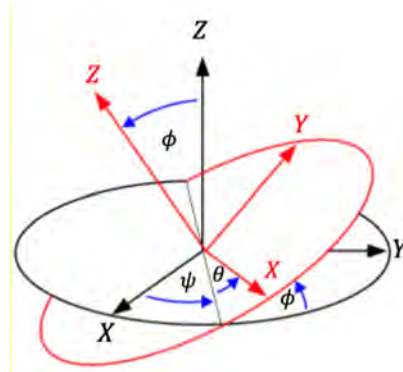


Fig. 2.14 Ángulos de Tai-Bryan secuencia ZYX.

$$R_{ZXY} = Rot [z, \psi] Rot [x, \phi] Rot [y, \theta]$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi \\ -\sin \theta \cos \phi & \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

## 2.6 Cinemática en mecanismos paralelos

La cinemática en mecanismos paralelos estudia el movimiento con respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que intervienen. La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del mecanismo como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones actuadas (motores) y la plataforma móvil (o efector final) [Barrientos, 2007].

En la cinemática existen dos problemas fundamentales para resolver; el problema cinemático directo y el problema cinemático inverso. El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del mecanismo, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del mecanismo. En cambio, el problema cinemático inverso, resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas [Barrientos, 2007], como se muestra en la Figura 2.15.

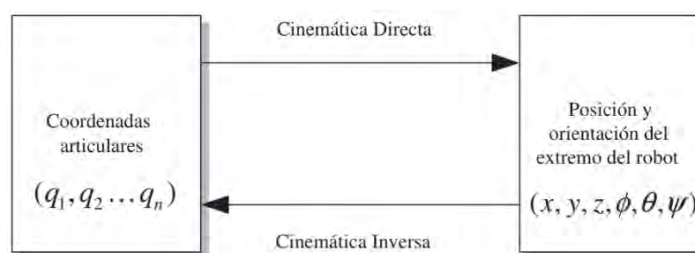


Fig. 2.15 Diagrama en relación entre la cinemática directa e inversa [Barrientos, 2007].

El tipo de coordenadas que se emplean para la descripción del movimiento del sistema mecánico son:

Las coordenadas generalizadas o articulares: representadas por el vector de posiciones  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $n$  representa la dimensión del vector  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  y también significa el número de servomotores o uniones que tiene el sistema mecánico. Cada servomotor contribuye con un grado de libertad, de esta forma  $n$  indica el número de grados de libertad del sistema mecánico. Un servomotor puede tener movimiento rotacional (articulaciones rotacionales) o movimiento lineal (articulaciones lineales o prismáticas). Las coordenadas articuladas  $\mathbf{q}$  se encuentran referidas a un sistema cartesiano fijo con origen generalmente instalado en la base del sistema mecánico [Reyes, 2013].

Las coordenadas operacionales: especifican la posición y orientación de la plataforma móvil (o efector final) con respecto al marco inercial. El vector de coordenadas operacionales se denota por  $\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$ .

### 2.6.1 Cinemática inversa en mecanismos paralelos

En la cinemática inversa de los mecanismos paralelos, se busca calcular las longitudes o ángulos de las articulaciones, como actuadores lineales o rotacionales, necesarios para posicionar y orientar el efector final en una ubicación deseada. Este proceso comienza con la definición de la posición y orientación deseada del efector final, utilizando parámetros espaciales como coordenadas y ángulos de orientación, como se presenta en la Figura 2.16. Luego se formula un modelo matemático que relaciona las posiciones de las articulaciones con la posición y orientación del efector final, típicamente a través de un conjunto de ecuaciones no lineales.

Resolver este modelo para encontrar las configuraciones de las articulaciones que satisfacen la posición y orientación objetivo a menudo requiere métodos numéricos debido a la complejidad del sistema y la rareza de soluciones analíticas. La cinemática inversa en los mecanismos paralelos enfrenta desafíos como múltiples soluciones posibles, posiciones inalcanzables por limitaciones físicas y la complejidad computacional. Para superar estos, se emplean métodos numéricos como el de Newton-Raphson, técnicas de optimización para minimizar funciones de error, y algoritmos genéticos para explorar el espacio de soluciones, abordando así la complejidad y ofreciendo caminos hacia soluciones prácticas.

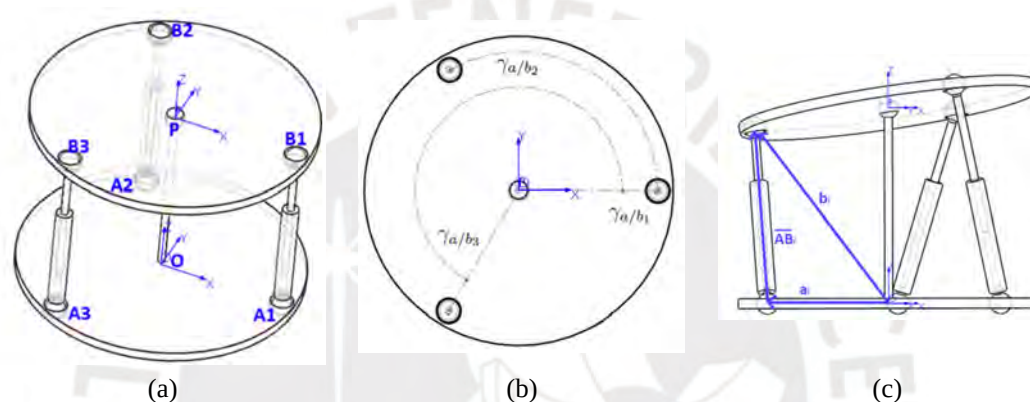


Fig. 2.16 Modelo de mecanismo paralelo: (a) topología 3SPS-1S, (b) ángulos de la base, (c) representación vectorial [Chaparro, 2015].

## 2.6.2 Cinemática directa en mecanismos paralelos

El modelado directo consiste en determinar la posición y orientación de la plataforma móvil o efector final dados los valores de las coordenadas de las juntas y tomando como referencia la plataforma fija. La obtención del modelado directo es más compleja que el modelado inverso y en numerosos casos no tiene una única solución analítica. Existen formas de resolver el problema; método geométrico, y mediante métodos numéricos de Newton-Raphson.

### a) Método Geométrico

El método geométrico de la cinemática directa de los mecanismos paralelos se fundamenta en el análisis geométrico de las restricciones impuestas por sus cadenas cinemáticas. Este proceso inicia con la identificación de parámetros clave como las longitudes de los eslabones y los ángulos de las articulaciones. Luego, se aplica un

análisis geométrico y trigonométrico para establecer las relaciones entre estos parámetros y la posición y orientación del efector final. El paso final implica el desarrollo y solución de un conjunto de ecuaciones que representan estas relaciones. Sin embargo, este método puede ser altamente complejo, y en casos de los mecanismos paralelos con múltiples cadenas cinemáticas o grados de libertad, no siempre es posible llegar a una solución analítica cerrada.

Por ejemplo, en el mecanismo paralelo tipo 3SPS-1S, presentado en la Figura 2.17 al utilizar este método el autor Chaparro obtuvo ocho resultados que resuelven la cinemática directa, sin embargo, alguno de ellos incluyó números complejos, por lo tanto, esos números no son soluciones que se puedan lograr físicamente. Luego utilizó el método Newton-Raphson para encontrar una solución única.

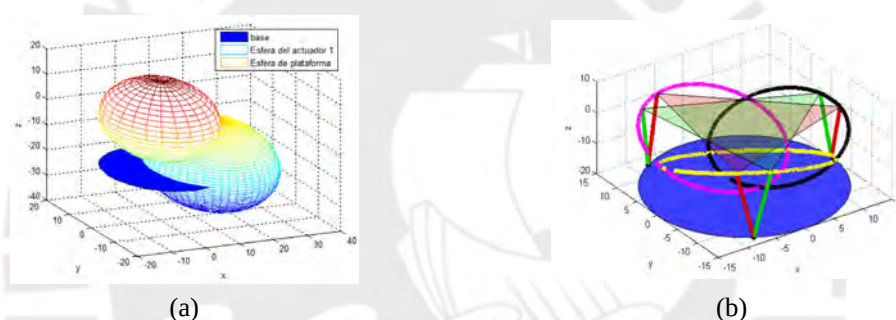


Fig. 2.17 Modelo geométrico: (a) intersección de las esferas del actuador y la plataforma, (b) intersección espacial de los actuadores [Chaparro, 2015].

### b) Método Newton-Raphson y red neuronal artificial

El método numérico Newton-Raphson es capaz de resolver ecuaciones no lineales, para que funcione de manera correcta es necesario dar un valor inicial cercano al valor real, el cual no se conoce ya que es lo que se desea calcular. Para encontrar el valor aproximado de la cinemática directa y utilizarlo como valor inicial para el método de Newton-Raphson, es posible utilizar una red neuronal artificial (RNA), la cual reciba como entradas las longitudes de los actuadores y la posición de la plataforma y de salidas los ángulos de Euler [Chaparro, 2015].

Una neurona artificial imita el comportamiento de una neurona biológica, recibe una o varias señales que son multiplicadas por un peso. La neurona suma todos los valores de



sus entradas y evalúa el resultado en una función de activación. La salida de la neurona es el valor entregado por esa función de activación como se muestra en la Figura 2.18.

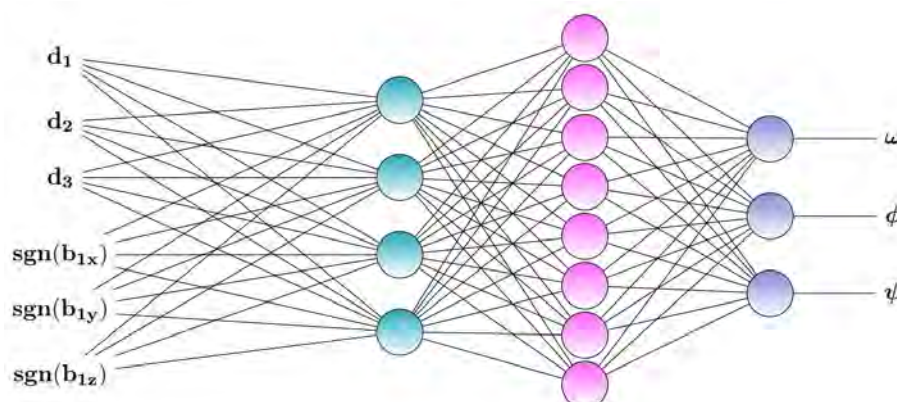


Fig. 2.18 Red neuronal artificial [Chaparro, 2015].

### 2.6.3 Matriz Jacobiana

En general la matriz Jacobiana de un robot, relaciona el vector de velocidades articulares ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ ) con otro vector de velocidades expresado en un espacio distinto. Existen diferentes posibilidades a la hora de seleccionar este espacio. Una primera elección es la de considerar la relación con las velocidades de la localización del extremo del robot, siendo ésta la posición y orientación expresada en base a sus coordenadas cartesianas y a sus ángulos de Euler ( $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ ) (otras representaciones de la orientación pueden ser consideradas). Esta relación viene dada por la denominada Jacobiana analítica del robot.

Una segunda elección es relacionar las velocidades articulares, con los vectores de velocidad lineal y angular ( $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) con que se mueve el extremo del robot, expresados en un sistema de referencia determinado, por ejemplo el del origen. La relación entre ambas velocidades (articulares y lineal-angular del extremo) se obtiene a través de la denominada matriz Jacobiana geométrica o simplemente Jacobiana del robot.

En ambos casos, la matriz Jacobiana directa permite conocer una expresión de las velocidades del extremo del robot a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. Por su parte, la matriz Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias para obtener un vector concreto de velocidades del extremo.

**a) Jacobiana analítica:**

Una vez determinada la posición  $(x, y, z)$  del extremo del robot, así como su orientación, que puede ser especificada mediante los ángulos de Euler WVW  $(\phi, \theta, \psi)$ , la Jacobiana analítica establece la relación entre las velocidades articulares  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$  y las velocidades de localización (tanto de posición como de orientación) en el extremo del robot, representadas como  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ .



Fig. 2.19 Jacobiana analítica directa e inversa [Barrientos, 2007].

El método más directo para obtener la relación entre velocidades articulares y del extremo del robot consiste en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo. Entonces, conocidas las Ecuaciones 2.15, se resuelve el problema cinemático directo de un robot de  $n$  GDL:

$$\begin{aligned} x &= f_x(q_1, \dots, q_n); y = f_y(q_1, \dots, q_n); z = f_z(q_1, \dots, q_n) \\ \phi &= f_\phi(q_1, \dots, q_n); \theta = f_\theta(q_1, \dots, q_n); \psi = f_\psi(q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si se derivan las Ecuaciones 2.15 con respecto al tiempo ambos miembros, se obtiene las Ecuaciones 2.16. Esta ecuación también se puede expresar de forma matricial, como se muestra en la Ecuación 2.17, donde  $\mathbf{J}_a$  se denomina matriz Jacobiana analítica, la que se denota con la Ecuación 2.18.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i ; \dot{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i ; \dot{z} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\phi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\phi}{\partial q_i} \dot{q}_i ; \dot{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\theta}{\partial q_i} \dot{q}_i ; \dot{\psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\psi}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_a \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$J_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### b) Jacobiana geométrica:

Una relación relevante a considerar es la que se establece entre las velocidades articulares y la velocidad lineal ( $v$ ) y angular ( $\omega$ ) del extremo del robot expresadas comúnmente en el sistema de referencia de la base del robot, como se presenta en la Figura 2.20 y Ecuación 2.19.

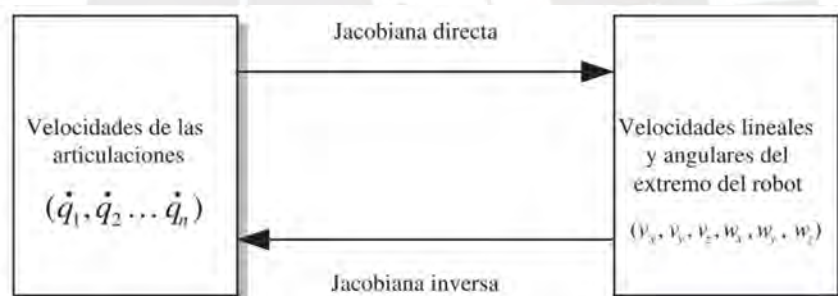


Fig. 2.20 Jacobiana geométrica [Barrientos, 2007].

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### c) Jacobiana inversa

Del mismo modo que se ha obtenido la relación directa, que permite obtener las velocidades del extremo a partir de las velocidades articulares, puede obtenerse la relación

inversa que permite calcular las velocidades articulares partiendo de las del extremo. En la obtención de la relación inversa pueden emplearse diferentes procedimientos.

En primer lugar, asumiendo que se conoce la relación directa expresada por la matriz Jacobiana (según se detalla en la Ecuación 2.17 o 2.19), es posible deducir la relación inversa mediante la inversión simbólica de esta matriz, tal como se describe en la Ecuación 2.20. Aunque este enfoque inicial parece sencillo, su aplicación práctica resulta complicada. En el caso de que la matriz Jacobiana sea cuadrada, la tarea de invertir simbólicamente una matriz de 6x6, cuyos elementos son funciones trigonométricas, presenta una complejidad considerable haciendo que este procedimiento sea inviable.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J_a^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Como segunda opción, se propone la evaluación numérica de la matriz Jacobiana para una configuración específica del robot ( $q_1$ ), seguida de su inversión numérica para hallar la relación inversa aplicable a esa configuración. Esta aproximación requiere considerar que el valor de la matriz Jacobiana varía con el movimiento del robot, necesitando volver a calcular continuamente la Jacobiana inversa. Además, pueden existir configuraciones ( $q_1, \dots, q_n$ ) donde la matriz Jacobiana no sea invertible debido a un determinante nulo, conocidas como configuraciones singulares. Otro desafío surge cuando la matriz Jacobiana no es cuadrada, lo cual ocurre si el número de grados de libertad del robot no coincide con las dimensiones del espacio de tarea. Si hay menos grados de libertad que dimensiones de tarea, el movimiento del robot estará restringido. En cambio, en robots redundantes (con más grados de libertad de los necesarios o más columnas que filas en la matriz Jacobiana), algunos movimientos articulares no son esenciales para alcanzar ciertas posiciones y orientaciones, permitiendo que sus velocidades se consideren nulas o constantes.

La tercera opción para obtener la Jacobiana inversa, específicamente para la Jacobiana analítica inversa, implica replicar el método utilizado en la derivación de la Jacobiana

analítica directa, pero iniciando desde el modelo cinemático inverso, es decir, partiendo de la relación conocida en la Ecuación 2.21, luego la Ecuación 2.22 y 2.23.

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = J_a^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Donde:

$$J_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \psi} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

#### 2.6.4 Singularidades

Las singularidades son todas las posiciones en las cuales el determinante de la matriz Jacobiana del mecanismo paralelo es igual a cero. Causan distintos problemas las singularidades como el aumento de grados de libertad en ese punto, cambio del tipo de movimiento, (adquirir movimientos de traslación) y pérdida de la controlabilidad.

Un mecanismo paralelo, pierde movilidad en las fronteras del espacio de trabajo en donde por más que aumente la rapidez de cambio en las variables el elemento terminal no puede moverse en cierta dirección. Sin embargo, también es posible perder movilidad dentro del propio espacio de trabajo, debido a configuraciones especiales que dependen de la estructura geométrica y mecánica del mecanismo. Pero puede ganar movilidad dentro del espacio de trabajo y se manifiesta cuando el elemento terminal puede moverse en cierta dirección aún si las variables de las juntas activas se mantienen sin cambio alguno.



## 2.7 Dinámica en los mecanismos paralelos

El modelado dinámico consiste en determinar la relación que existe entre el movimiento de la plataforma móvil y la fuerza requerida en los actuadores. Existen distintos métodos para calcular la dinámica de un mecanismo paralelo, algunos métodos son de Newton-Euler y formulación de Lagrange, y el Principio de Trabajo Virtual [Zubizarreta, 2008].

### 2.7.1 Formulación Newton-Euler

La formulación de Newton-Euler se deriva de la interpretación directa de la Segunda Ley de Movimiento de Newton, que describe los sistemas dinámicos en términos de fuerza y momento. Las ecuaciones incorporan todas las fuerzas y momentos actuando sobre los eslabones individuales, incluyendo las fuerzas de acoplamiento y los momentos entre los eslabones.

Las ecuaciones obtenidas del método Newton-Euler incluyen las fuerzas de restricción actuando entre eslabones adyacentes. Por lo tanto, se requieren operaciones aritméticas adicionales para eliminar estos términos y obtener relaciones explícitas entre los torques de las articulaciones y el movimiento resultante en términos de desplazamientos de las articulaciones. Es computacionalmente más eficiente ya que aprovecha la estructura típicamente abierta de la cadena cinemática robot serial. Por lo tanto, es mejor para la implementación de esquemas de control (dinámica inversa en tiempo real).

Este método encuentra su aplicación generalmente en el análisis de mecanismos seriales, ya que para el caso de mecanismos paralelos el método es poco eficiente. Las fuerzas y momentos en cada uno son determinadas a partir de las ecuaciones de Newton para movimiento de traslación y de Euler para el movimiento de rotación.

La formulación dinámica de Newton-Euler se basa en la aplicación directa de la segunda Ley de Newton (Ecuación 2.24) donde la suma de fuerzas es igual a la variación del momento lineal y la ecuación de Euler (Ecuación 2.25) donde la suma de torques es igual a la variación del momento angular [Barrientos, 2007].

$$\sum \mathbf{f}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_{ci}) = m_i \dot{\mathbf{v}}_{ci} \quad (2.24)$$

Donde:

$\mathbf{f}_i$ : son las fuerzas ejercidas sobre el eslabón  $i$ .

$m_i$ : es la masa del eslabón  $i$ .

$\mathbf{v}_{ci}, \dot{\mathbf{v}}_{ci}$ : son la velocidad y aceleración lineal del centro de masas de la articulación  $i$ .

$$\sum \mathbf{N}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (2.25)$$

Donde:

$\mathbf{N}_i$ : son los torques ejercidos sobre el eslabón  $i$ .

$\mathbf{I}_i$ : es el tensor de inercia del eslabón  $i$  en torno a su centro de masas, expresado en el sistema de referencia.

$\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ : son la velocidad y aceleración angular de la articulación  $i$ .

Un adecuado desarrollo de estas ecuaciones conduce a una formulación en la que se obtienen la posición, velocidad y aceleración del eslabón  $i$  referidos a la base del robot a partir de los correspondientes del eslabón  $i - 1$  y del movimiento relativo de la articulación  $i$ . De este modo, partiendo del eslabón 1 se llega al eslabón  $n$ . Con estos datos se procede a obtener las fuerzas y pares actuantes sobre el eslabón  $i$  referidos a la base del robot a partir de los correspondientes al eslabón  $i + 1$ , recorriéndose de esta forma todos los eslabones desde el eslabón  $n$  al eslabón 1.

Sí se considera un diagrama del cuerpo libre de un eslabón individual que presenta todas las fuerzas y momentos que actúan sobre él en la Figura 2.21.

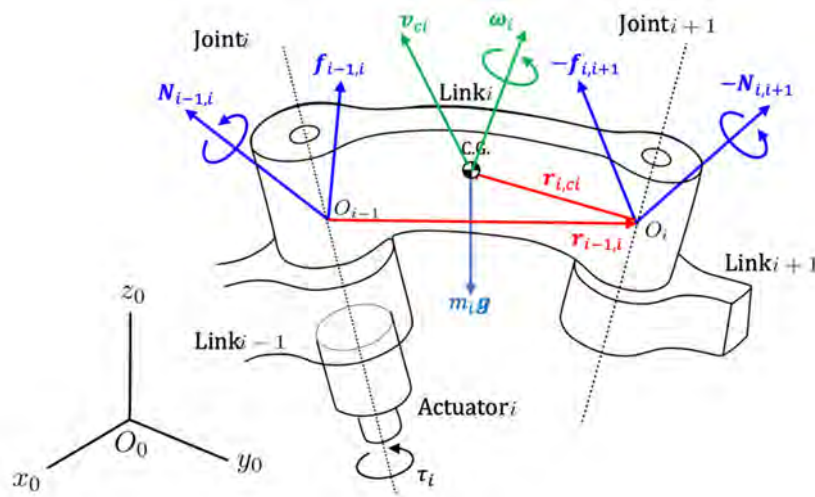


Fig. 2.21 Diagrama del cuerpo libre de un eslabón [Cuellar, 2022].

Las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido también pueden representarse por dos ecuaciones: una describe el movimiento traslacional del centroide o centro de masa (Ecuación 2.26), mientras que la otra describe el movimiento rotacional alrededor del centroide (Ecuación 2.27).

$$\mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + m_i \mathbf{g} - m_i \dot{\mathbf{v}}_{ci} = 0 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N}_{i-1,i} - \mathbf{N}_{i,i+1} - \mathbf{r}_{i-1,ci} \times \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,ci} \times \mathbf{f}_{i,i+1} - \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = 0 \quad (2.27)$$

Donde:

Todos los vectores están definidos con referencia al marco de coordenadas base  $O_0$ .

$\mathbf{f}_{i-1,i}$  y  $\mathbf{N}_{i-1,i}$ : es la fuerza y el momento aplicado al eslabón  $i$  por el eslabón  $i - 1$ .

$-\mathbf{f}_{i,i+1}$  y  $-\mathbf{N}_{i,i+1}$ : es la fuerza y el momento aplicado al eslabón  $i + 1$  por el eslabón  $i$ .

$\mathbf{I}_i$ : es el tensor de inercia, varía con la orientación del eslabón  $i$ .

$\mathbf{r}_{i-1,ci}$ : es el vector de posición 3x1 desde el  $O_{i-1}$ .

$\mathbf{r}_{i,ci}$ : es el vector de posición 3x1 desde el  $O_i$ .

$\mathbf{v}_{ci}$ : es el vector de velocidad lineal del centroide del eslabón  $i$ .

$\boldsymbol{\omega}_i$ : es el vector de velocidad angular del centroide del eslabón  $i$ .

### 2.7.2 Formulación de Euler-Lagrange

El modelo dinámico proporciona una descripción de la relación entre los torques de los actuadores de las articulaciones y el movimiento de la estructura. Con la formulación de Lagrange, las ecuaciones de movimiento pueden derivarse de manera sistemática independiente del marco de referencia coordinado.

La formulación Lagrangiana, describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos de trabajo y la energía almacenados en el sistema, en lugar de las fuerzas y momentos de los miembros individuales involucrados. En este caso, las fuerzas de restricción involucradas en el sistema se eliminan automáticamente en la formulación de las ecuaciones dinámicas de Lagrange. Las ecuaciones dinámicas en forma cerrada se pueden derivar sistemáticamente en cualquier sistema de coordenadas.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de un sistema mecánico de  $n$  grados de libertad está dado por la Ecuación 2.28 [Reyes, 2013].

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.28)$$

Donde:

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ : representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas.

$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ : es el vector de velocidades articulares.

$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ : es el vector de pares aplicados, donde el  $i$ -ésimo par  $\tau_i$  se encuentra asociado con la  $i$ -ésima coordenada articular o generalizada  $q_i$ .

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  del sistema mecánico de  $n$  grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la energía potencial  $P(\mathbf{q})$ , presentada en la Ecuación 2.29.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q}) \quad (2.29)$$

La energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : incluye el movimiento de traslación y rotación, por ejemplo para el i-ésimo eslabón (Ecuación 2.30).

$$K_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} I_i \left[ \sum_i^n \dot{q}_i \right]^2 \quad (2.30)$$

Donde:

$m_i$ : es la masa del i-ésimo eslabón del sistema o robot.

$v_i$ : es la rapidez lineal del centro de masa del i-ésimo eslabón.

$I_i$ : es el i-ésimo momento de inercia.

La energía potencial  $P(\mathbf{q})$ : no tiene forma específica como en el caso de la energía cinética, depende de la geometría del robot en general (Ecuación 2.31).

$$P_i(\mathbf{q}) = m_i g l_{ci} h_i(\mathbf{q}) \quad (2.31)$$

Donde:

$g$ : es la aceleración debido a la gravedad en la superficie de la Tierra.

$h_i(\mathbf{q})$ : es una función que indica la altura del centro de masa  $l_{ci}$  del eslabón con respecto al origen del sistema de referencia del robot.

### 2.7.3 Principio del Trabajo Virtual

El principio de Trabajo virtual es un método de análisis que combina el concepto del trabajo virtual y el principio de d'Alembert, permitiendo formular conjuntamente las ecuaciones dinámicas del sistema.

#### a) Principio de d'Alembert

El principio de d'Alembert se basa en la necesidad de equilibrar la suma de fuerzas externas y torques aplicados a un cuerpo rígido con los términos inerciales resultantes de aceleraciones lineales o angulares del cuerpo rígido. Es necesario derivar las aceleraciones con respecto a un marco fijo para aplicar correctamente el balance de fuerza y torque. Cuando el movimiento del cuerpo rígido se observa desde un marco en movimiento adjunto al centro de masa del cuerpo rígido, este parece estar en reposo o en equilibrio. Por lo tanto, el observador que está



acelerando con el marco en movimiento puede concluir que una fuerza inercial ficticia y el momento actúa sobre el cuerpo rígido para balancear las fuerzas externas reales y los momentos. Este enfoque está enfocado en reescribir las leyes de Newton y Euler como la sumatoria de todas las fuerzas externas reales y momentos más las correspondientes fuerzas inerciales ficticias y momentos igual a cero, como se presentan en la Ecuación 2.32 y 2.33.

$$\sum \mathbf{f}_{ext} - m\mathbf{a}_c = 0 \quad (2.32)$$

$$\sum {}^c\mathbf{n}_{ext} = -({}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^c\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) = 0 \quad (2.33)$$

Donde:

$\mathbf{a}_c$ : es la aceleración lineal del centro de masa.

$\boldsymbol{\omega}$  y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ : son la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo rígido.

$\mathbf{I}$ : es el momento de inercia del cuerpo rígido con respecto al marco de movimiento adjunto al centro de masa.

En este marco, el término inercial  $-m\mathbf{a}_c$  puede ser considerado como una fuerza ficticia  $\mathbf{f}^* = -m\mathbf{a}_c$ , y los otros términos inerciales  ${}^c\mathbf{n}^* = -({}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^c\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}))$  pueden ser considerados como un torque ficticio. Por lo tanto, la sumatoria de fuerzas y momentos puede denotarse con las Ecuaciones 2.34 y 2.35.

$$\sum \hat{\mathbf{f}}_{ext} = 0 \quad (2.34)$$

$$\sum {}^c\hat{\mathbf{n}}_{ext} = 0 \quad (2.35)$$

Por lo antes expuesto, se presenta las Ecuaciones 2.36 y 2.37.

$$\hat{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}^* \quad (2.36)$$

$${}^c\hat{\mathbf{n}}_{ext} = {}^c\mathbf{n}_{ext} + {}^c\mathbf{n}^* \quad (2.37)$$

La transformación de un problema dinámico a uno en estático es conocida como el principio de d'Alembert. Las definiciones básicas previamente mencionadas pueden parecer una simplificación básica de una ecuación dinámica para convertirla en su versión estática, lo cual podría sugerir que esta formulación no ofrece una gran contribución en la simplificación de la ecuación de movimiento. Sin embargo, en la práctica, considerar las fuerzas y momentos inerciales ficticios como fuerzas y momentos reales facilita significativamente la derivación de una formulación dinámica, especialmente en situaciones donde se aplica el principio del trabajo virtual [Taghirad, 2013].

### **b) Principio del Trabajo Virtual**

Uno de los enfoques más convenientes para derivar la formulación dinámica de un robot paralelo se basa en el principio de trabajo virtual. En este método, las fuerzas inerciales y los momentos se calculan utilizando las aceleraciones lineales y angulares de cada cuerpo rígido. Luego, se considera que todo el robot está en equilibrio estático y se aplica el principio de trabajo virtual para derivar las fuerzas del actuador. Dado que no es necesario calcular las fuerzas y momentos de restricción, este enfoque produce algoritmos computacionales más rápidos en comparación con el enfoque de Newton-Euler.

En esta sección, se presenta cómo se puede aplicar el principio de trabajo virtual para derivar la ecuación dinámica de movimiento de un robot paralelo. Se implementa el principio de d'Alembert para representar el sistema dinámico como un sistema estáticamente equilibrado. Siguiendo el principio de d'Alembert, la fuerza inercial y el momento aplicados sobre un cuerpo rígido se definen como la fuerza y el momento ejercidos en el centro de masa, dados por la Ecuación 2.38 y 2.39.

$$\mathbf{f}^* = -m\mathbf{a}_c \quad (2.38)$$

$${}^c\mathbf{n}^* = -({}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^c\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) \quad (2.39)$$

Esta fuerza y momento se aplican en una dirección opuesta a la dirección de las aceleraciones lineales y angulares. Por lo tanto, al introducir estas fuerzas y momentos ficticios en el sistema, se puede considerar que el cuerpo rígido está en equilibrio estático. Si en equilibrio estático, se considera un desplazamiento virtual  $\delta(\cdot)$  para el sistema, mediante la aplicación del principio de trabajo virtual tiene sus raíces en la relación

trabajo-energía, es decir, para un sistema con pérdida de energía despreciable debido a la fricción, la relación entre el trabajo y la energía del sistema se puede expresar con la Ecuación 2.40.

$$dW = dK + dP \quad (2.40)$$

Donde:

$dW$ : representa el trabajo total realizado por todas las fuerzas activas que actúan sobre el sistema durante el cambio infinitesimal en el desplazamiento.

$dK, dP$ : denotan el cambio en las energías cinéticas y potencial del sistema, respectivamente.

Además, se puede demostrar que el cambio infinitesimal en las energía cinética y potencial para un sistema general de cuerpos múltiples interconectados puede ser representado por las Ecuaciones 2.41 y 2.42.

$$dK = \sum_i m_i \mathbf{a}_{ci} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i {}^{ci}\dot{\mathbf{H}}_i \cdot d\theta_i \quad (2.41)$$

$$dP = \sum_i W_i dh_i + \sum_i k_i x_i dx_i \quad (2.42)$$

Donde:

$m_i$ : masa de los cuerpos que contiene el sistema.

${}^{ci}H_i$ : momento angular.

$d\mathbf{r}_i$  y  $d\theta_i$ : representan el desplazamiento lineal y angular infinitesimal de cada cuerpo.

$W_i$ : peso de los cuerpos representados en su centro de masa.

$x_i$ : representa la deformación elástico representativo del sistema (resorte).

$k_i$ : rigidez del sistema (resorte).

Cuando se aplica la Ecuación 2.40 en sistemas mecánicos cuya configuración es una función conocida de un movimiento prescrito, y en sistemas donde hay más de un grado de libertad, a menudo es conveniente usar el trabajo virtual. El concepto de desplazamiento virtual y el trabajo virtual resultante han sido usados para la solución de configuraciones de equilibrio en

sistemas estáticos de cuerpos interconectados, luego extendidos a sistemas dinámicos a través de uso de principio de d'Alembert [Taghirad, 2013].

El desplazamiento virtual  $\delta(\cdot)$  es cualquier desplazamiento asumido y arbitrario, lineal o angular, alejado de la posición natural o actual del sistema. Para un sistema de cuerpos conectados, los desplazamientos virtuales deben ser consistentes con sus restricciones cinemáticas. Si se aplica un conjunto de desplazamientos virtuales que satisfacen las restricciones cinemáticas a un sistema mecánico, se establece la relación adecuada entre coordenadas que especifican la configuración del sistema al aplicar la relación trabajo–energía. Es habitual usar el símbolo diferencial “d” para referirse a cambios diferenciales en los desplazamientos reales, mientras que el símbolo “ $\delta$ ” se utiliza para significar cambios diferenciales que se asumen o se llaman cambios virtuales. Al aplicar el principio de trabajo y energía a un sistema interconectado de cuerpos rígidos, se debe dibujar un diagrama de fuerzas activas de todo el sistema para aislar el sistema y revelar todas las fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema.

Primero, se considera un sistema estático de cuerpos interconectados. Dado que el sistema está en equilibrio estático y las fuerzas y momentos resultantes aplicados al sistema son iguales a cero, el trabajo virtual resultante para el sistema total también es igual a cero, como se presenta en la Ecuación 2.43.

Las fuerzas y momentos que actúan sobre todos los cuerpos consisten en las fuerzas y momentos externos, y las fuerzas y momentos de restricción que actúan sobre cada cuerpo. Sin embargo, ya que el desplazamiento virtual debe ser consistente con las restricciones cinemáticas del sistema, las fuerzas y momentos de restricción no contribuyen en ningún trabajo, ya que son ortogonales a las direcciones del desplazamiento virtual.

$$\delta W = \sum_i f_i \cdot \delta r_i + \sum_i n_i \cdot \delta \theta_i = 0 \quad (2.43)$$

Donde:

$f_i$ : fuerzas externas que actúan sobre el sistema, incluyendo la gravedad, el resorte, el amortiguamiento o cualquier fuerza de perturbación.

$n_i$ : momentos externos aplicados al sistema.

En la notación abreviada se usa las definiciones de fuerzas y momentos generalizados en un vector de  $6 \times 1$ ,  $\mathcal{F}_i = [f_i \ n_i]^T$ , y los desplazamientos lineales y angulares  $\mathbf{x}_i = [r_i \ \theta_i]^T$ , y se reescribe la Ecuación 2.43 en la Ecuación 2.44.

$$\delta W = \sum_i \mathcal{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.44)$$

El equilibrio dinámico de un sistema de cuerpos rígidos se define mediante el principio de trabajo virtual, el cual establece que el trabajo virtual de la suma de las fuerzas aplicadas y de inercia es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual del sistema. Esto significa que el sistema se mantiene en equilibrio dinámico cuando las fuerzas aplicadas y las fuerzas inerciales se compensan mutuamente a lo largo de cualquier desplazamiento virtual del sistema, como se muestra en la Figura 2.44. Luego se usa el principio de d'Alembert considerando las fuerzas y momentos aplicados en el sistema y se obtiene la Ecuación 2.45. Entonces, se aplica el principio de trabajo virtual al sistema, y se presenta las fuerzas del actuador con la Ecuación 2.46. Luego se aísla las fuerzas del actuador denotadas por  $\tau$  de las fuerzas externas e inerciales.

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e + m\mathbf{g} \\ \mathbf{n}_e - {}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathcal{F}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^* \\ {}^c\mathbf{n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\mathbf{a}_c \\ -({}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^c\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Las fuerzas y momentos resultantes sobre el sólido rígido resulta la suma de  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{F}^*$  donde  $\mathcal{F}$  son las fuerzas externas y momentos que actúan sobre el sistema, incluyendo la gravedad, y  $\mathcal{F}^*$  son las fuerzas y momentos inerciales en el centro de masas de la plataforma móvil.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_c \\ \mathbf{n}_e - {}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} - ({}^c\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times ({}^c\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$



$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.48)$$

Posteriormente, se reformula el principio de trabajo virtual utilizando la Ecuación 2.49, considerando las fuerzas de los actuadores.

$$\delta W = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{q} + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.49)$$

Ahora se aplica la formulación resultante del principio del trabajo virtual dada en la Ecuación 2.49 para un robot paralelo que consiste en un número de miembros y una plataforma móvil, y se aísla las fuerzas y momentos externos e inerciales de los cuerpos y la plataforma móvil, con lo que se obtiene la Ecuación 2.50.

$$\delta W = \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_p \cdot \delta \mathbf{x}_p + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (2.50)$$

Donde:

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  denota el vector de variables articulares.

$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$  las fuerzas de los actuadores.

$\mathbf{F}_p$  representan las fuerzas y momentos resultantes aplicadas al centro de masas de la plataforma móvil.

$\mathbf{F}_i$  representan las fuerzas y momentos resultantes aplicados a cada centro de masas de los cuerpos del mecanismo paralelo.

$\mathbf{x}_p$  y  $\mathbf{x}_i$  denotan el desplazamiento virtual del centro de masas de la plataforma móvil y de los cuerpos.

Los desplazamientos virtuales de la Ecuación 2.50, deben satisfacer las restricciones cinemáticas impuestas por las cadenas cerradas. Por lo tanto, es necesario relacionar estos desplazamientos virtuales con un conjunto de desplazamientos virtuales generalizados independientes, donde en los robots paralelos la coordenada de la plataforma móvil  $\delta \mathbf{x}_p$  puede ser elegida como coordenada generalizada. Esto se debe a que el desplazamiento virtual de los miembros  $\delta \mathbf{q}$  está relacionado con el desplazamiento virtual de la plataforma móvil  $\delta \mathbf{x}_p$  por el Jacobiano del robot, como se presenta mediante la Ecuación 2.51. Además,

el desplazamiento virtual del centro de masa de cada miembro,  $\delta \mathbf{x}_i$  puede estar relacionado con  $\mathbf{x}_p$  por una matrix Jacobiana similar definida para cada miembro y denotada por  $\mathbf{J}_i$ , como se puede observar en la Ecuación 2.52.

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{J} \delta \mathbf{x}_p \quad (2.51)$$

$$\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{J}_i \delta \mathbf{x}_p \quad (2.52)$$

Se sustituye las Ecuaciones 2.51 y 2.52 en la Ecuación 2.50 y se obtiene la Ecuación 2.53. Dado que esto es válido para cualquier desplazamiento virtual arbitrario  $\delta \mathbf{x}_p$ , se obtiene la Ecuación 2.54.

$$\delta \mathbf{x}_p^T \left( \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{F}_i \right) = 0 \quad (2.53)$$

$$\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{F}_i = 0 \quad (2.54)$$

La Ecuación 2.53 representa la formulación dinámica de un robot paralelo por el principio del trabajo virtual. Toda esta formulación se considera alrededor del centro de masa de cada eslabón y de la plataforma móvil. Por lo tanto, si una fuerza o momento externo se aplica en un punto distinto al centro de masa, debería transformarse al marco de coordenadas del centro de masa antes de que se sustituya en esta ecuación. Además, esta ecuación está escrita en una coordenada de espacio de tarea, en la que las fuerzas del actuador aparecen en estas ecuaciones por mapeo transpuesto del Jacobiano. En general,  $\mathcal{F} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}$  es la proyección de las fuerzas del actuador en la plataforma móvil, y puedes ser determinada de manera única a partir de la Ecuación 2.53. Además, si el manipulador es completamente paralelo y no tiene redundancia en la actuación, la matrix Jacobiana  $\mathbf{J}$  es cuadrada, y las fuerzas del actuador puede determinarse de manera única por  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{-1} \mathcal{F}$ , siempre que no sea singular. Sin embargo para robots que son redundantes, hay infinitas de soluciones para que  $\boldsymbol{\tau}$  sea proyectado en  $\mathcal{F}$ . La solución más simple sería una solución de norma mínima, encontrada a partir del pseudoinverso de  $\mathbf{J}^T$ , por  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathcal{F}$ .

### 2.7.4 Resumen de los métodos dinámicos inversos

En los mecanismos paralelos no existe un modelo dinámico de tipo general como los que existen en los mecanismos seriales. En la Tabla 2.11 se muestran las propuestas basadas en la formulación de Newton-Euler, Euler-Lagrange y Principio de trabajo virtual.

Todos los modelos consideran algún tipo de simplificaciones en su planteamiento y conducen a soluciones en forma de algoritmo computacional con mayor o menor eficiencia. El método Newton Euler al tener mayor complejidad al generar más ecuaciones, no es el método más adecuado para ser utilizado en el mecanismo paralelo. En cambio, el método de Lagrange y de trabajos virtuales la aplicación es similar por lo conducirían a la obtención general del movimiento, por lo que es factible usar uno de ellos. Según la comparación de los tres métodos de Tabla 2.11 se propone emplear el método de Principio de Trabajo Virtual para la modelación dinámica.

Tabla 2.11 Métodos dinámicos inversos.

| Método dinámico              | Ventajas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Desventajas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Newton-Euler                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Entrega una solución para todas las fuerzas y variables cinemáticas.</li> <li>Ecuaciones vectoriales.</li> <li>Cálculo de cargas externas e internas.</li> <li>Uso de magnitudes físicas.</li> <li>Descomposición en diagramas de cuerpo libre de cada elemento.</li> </ul>                                                                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ineficiente cuando se desea resolver unas pocas variables del sistema, debido a que requiere definir el balance de fuerzas y momentos de todos los cuerpos en el sistema, teniendo en cuenta todas las interacciones y restricciones.</li> <li>Presenta mayor complejidad de sus ecuaciones.</li> <li>En 3D se generan 6 ecuaciones en cada unión de elemento.</li> <li>En 2D se generan 3 ecuaciones en cada unión de elemento.</li> </ul> |
| Euler-Lagrange               | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ignoran todas las interacciones y fuerzas restrictivas del sistema que no hacen trabajo.</li> <li>Ecuaciones escalares.</li> <li>Cálculo de cargas externas.</li> <li>Uso de coordenadas generalizadas.</li> <li>No se modifica el sistema mecánico funcional.</li> <li>Se generan tantas ecuaciones como grados de libertad.</li> <li>Obtención de las ecuaciones de movimiento a partir de una única función.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Necesidad de diferenciar todas las funciones de energía cinética y potencial del sistema, lo cual resulta ineficiente en sistemas multicuerpo lo suficientemente grandes.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Principio de Trabajo Virtual | <ul style="list-style-type: none"> <li>Uso de fuerzas generalizadas.</li> <li>No hace uso de funciones de energía.</li> <li>Las fuerzas inerciales pueden ser calculadas utilizando las ecuaciones que describen la cinemática del mecanismo.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>No existen desventajas en la dinámica inversa.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

## **2.8 Herramientas de simulación dinámica de mecanismos paralelos**

Las herramientas de simulación dinámica de mecanismos paralelos más utilizadas son Virtual Reality Modelling Language (VRBUILD2), SimMechanics de MATLAB, MSC ADAMS y Simulink de MATLAB. El software de simulación permite analizar la dinámica de sistemas mecánicos completos, incluyendo mecanismos paralelos, ya que simulan el comportamiento del sistema ante diferentes cargas y condiciones de operación y así optimizar el diseño para mejorar su rendimiento.

### **2.8.1 Simulación de la cinemática y dinámica en Virtual Reality Modelling Language (VRBUILD2)**

El Lenguaje de Modelado de Realidad Virtual, recrea la idea de un entorno 3D que simula el mundo real. La herramienta VRBUILD2 de MATLAB es utilizada para diseñar y crear modelos virtuales en 3D para simulación. El modelado se realiza utilizando una configuración jerárquica, relación padre-hijo, entre los objetos. Esta relación permite que, si el padre sufre alguna modificación respecto a su movimiento de traslación o de rotación, el hijo o hijos se muevan junto con él, de tal manera que la simulación es cercana a la realidad.

Por ejemplo, el modelado de un robot paralelo 3UPE-RPU que se muestra en la Figura 2.22. En el robot paralelo el objeto padre es la plataforma fija del robot, a la cual se relacionan como hijos las cuatro cadenas cinemáticas. Asimismo, cada cadena cinemática consta de varios elementos en la relación padre hijo siendo los más importantes y en orden de jerarquía: la junta universal U, el cilindro prismático P y la junta esférica E, para los brazos UPE; para el RPU las relaciones son la junta de revolución R, el cilindro prismático P y la junta universal U, siendo esta última, padre de la plataforma móvil [Fernández, 2016].



Fig. 2.22. Modelado en 3D del robot paralelo [Fernández, 2016].

GUIDE: es una interfaz gráfica de usuario, es una pantalla para que el usuario interactúe con el programa, contiene diferentes elementos gráficos que ayudan a esta interacción como: botones, campos de texto, menús, gráficos, entradas analógicas, dando respaldo al diseño y presentación de los elementos de control de la interfaz. El lenguaje de programación es el BASIC como se muestra en la Figura 2.23 y 2.24.



Fig. 2.23. GUIDE: interfaz gráfica de usuario del mecanismo paralelo [Fernández, 2016].





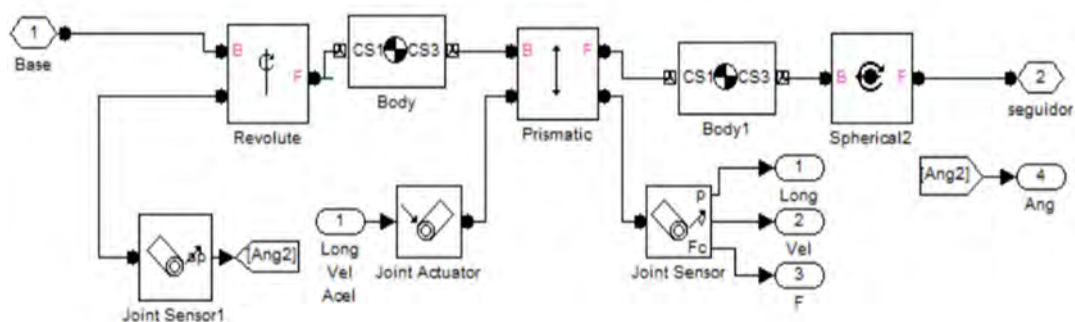


Fig. 2.26 Esquema bloque cadena cinemática RPS en SimMechanics [Villaveces, 2012].

### 2.8.3 Simulación en MSC ADAMS

Es un software de análisis de movimiento, que ayuda a estudiar la dinámica de piezas móviles, cómo se distribuyen las cargas y fuerzas a través de los sistemas mecánicos. MSC ADAMS permite crear y probar prototipos virtuales de sistemas mecánicos incorporando la física real al resolver simultáneamente las ecuaciones de cinemática, estática, cuasi estática y dinámica. Mediante el software MSC ADAMS se construye un modelo de estructura real de un robot paralelo-rehabilitador de tobillo 3RSS-S, como se muestra en la Figura 2.27, y una simulación cinemática mediante pruebas de rotación de  $-40^\circ$  a  $+40^\circ$  en los ejes x, y, z respectivamente con una duración de 5 segundos por cada eje, determina los ángulos de movimiento del mecanismo como se muestra en la Figura 2.28 [Liu, 2006].

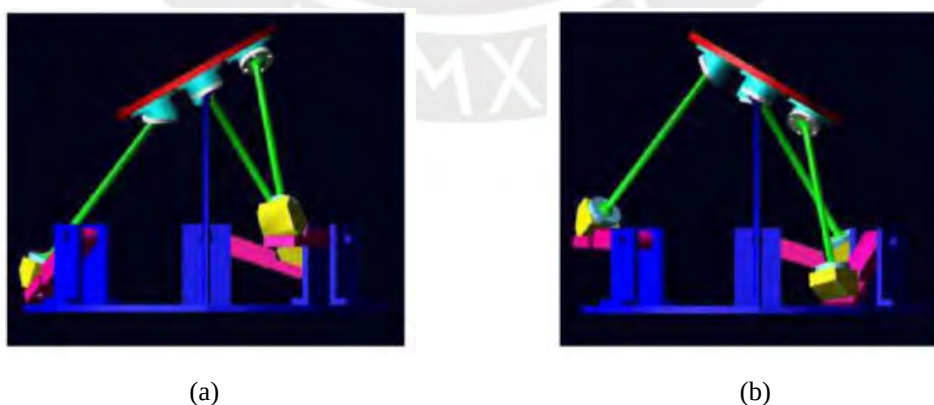


Fig. 2.27 Simulación de los movimientos del mecanismo paralelo: (a) dorsiflexión, (b) plantarflexión [Liu, 2006].

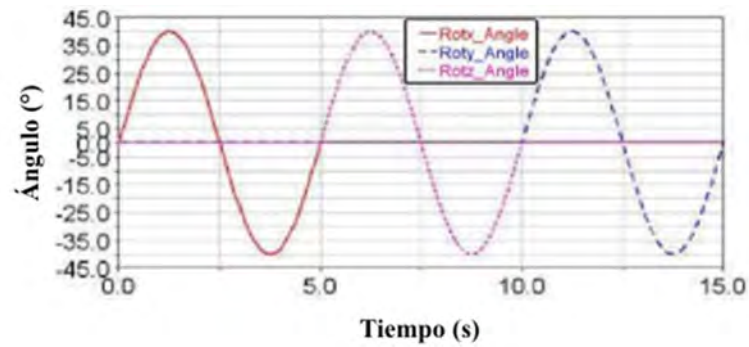


Fig. 2.28 Gráfica de los ángulos de rotación vs tiempo [Liu, 2006].

Un manipulador paralelo (3PRS) se diseñó en ADAMS en la configuración Tripod y Tri-Glide como se muestra en la Figura 2.29 para así modelar precisamente el posicionamiento de los manipuladores, obteniendo un ángulo de inclinación y rotación de la plataforma móvil sobre los ejes  $X$  e  $Y$ . El método físico para obtener el ángulo de inclinación fue posicionar un puntero láser sobre la plataforma móvil y apuntar a una pared obteniendo así la altura vertical de desplazamiento, calculando el ángulo de inclinación y comparándolo con el obtenido en la simulación [Arockia, 2014].

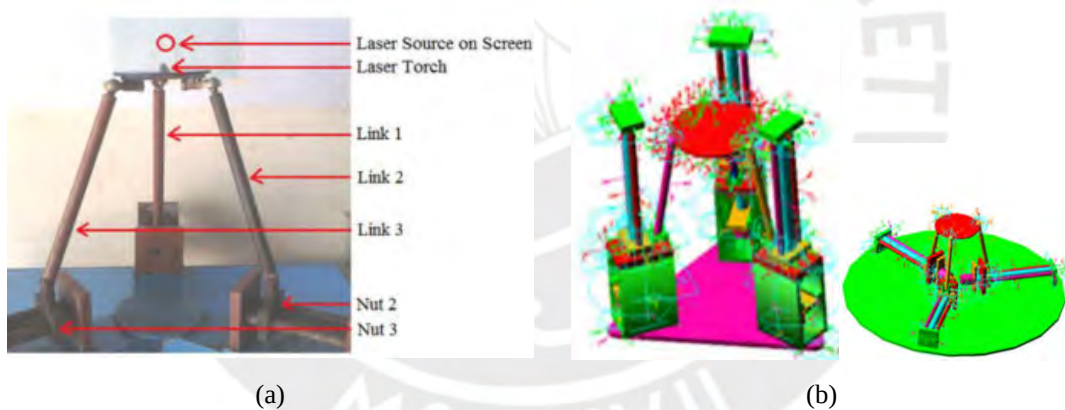
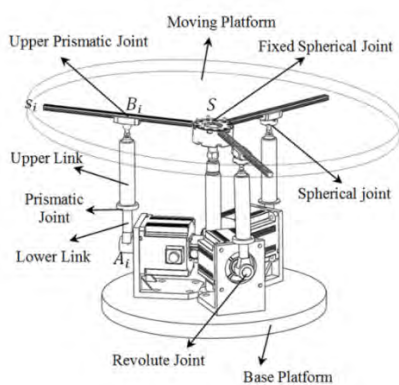
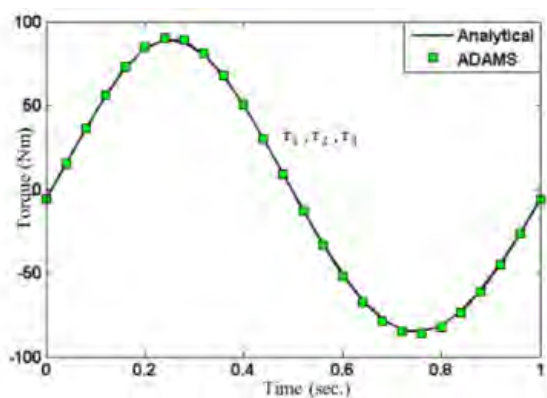


Fig. 2.29 Mecanismo paralelo 3PRS: (a) prototipo, (b) simulación en ADAMS [Arockia, 2014].

En la Figura 2.30a se presenta el diseño del mecanismo paralelo (3RPSP-S) y la simulación del Torque vs Tiempo se encuentra realizada mediante el software MSC ADAMS que se muestra en la Figura 2.30b, la validación del modelo en ADAMS con el modelo analítico. Los resultados de la simulación de los dos modelos fueron similares [Enferadi, 2016].



(a)



(b)

Fig. 2.30 Mecanismo paralelo 3RPPS-S: (a) diseño, (b) trayectoria del torque vs tiempo en MSC ADAMS [Enferadi, 2016].

#### 2.8.4 Simulación en Simulink de MATLAB

Es un sistema de cómputo numérico que ofrece un entorno de desarrollo integrado IDE con un lenguaje de programación propio. Se utiliza principalmente para manipulación de matrices, datos y funciones, implementación de algoritmos, creación de interfaces de usuario (GUI) y la comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware. Adicionalmente MATLAB dispone de dos herramientas adicionales que expanden sus prestaciones, Simulink (plataforma de simulación) y GUIDE (editor de interfaces de usuario). Además, se puede ampliar las capacidades de MATLAB con los *toolboxes* y las de Simulink con los *blocksets*.

En la investigación de Kazem, se utilizó MATLAB empleando un sistema robótico paralelo (SPS) de 3GDL que se muestra en la Figura 2.31 para terapia física del “pie caído” debido a un accidente cerebro vascular (ACV), este sistema está pensado en ser utilizado en cualquier momento y lugar sin necesidad de asistir al hospital. Para esto se realizó la simulación por bloques mostrado en la Figura 2.32 para que realice los movimientos de dorsiflexión-plantarflexión e inversión-eversión como han sido programados en su rehabilitación.



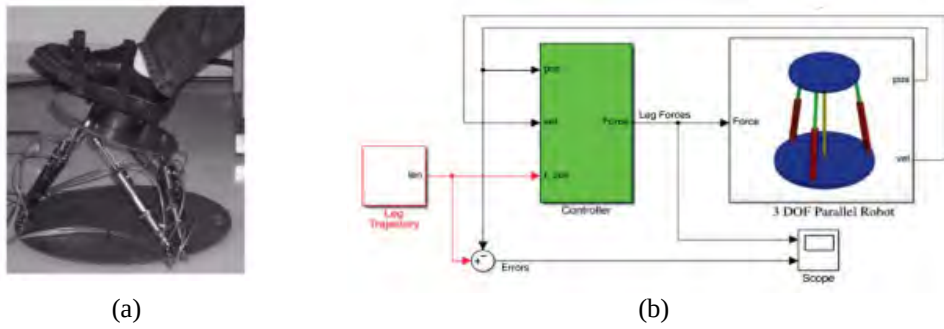


Fig. 2.31 Mecanismo paralelo SPS: (a) prototipo rehabilitador de tobillo, (b) modelo de simulación [Kazem, 2015].

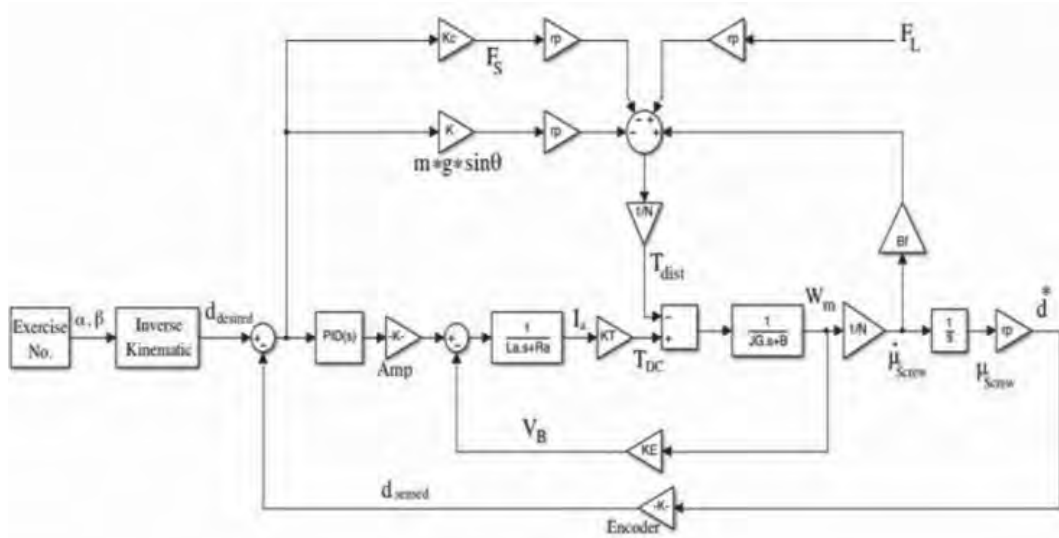


Fig. 2.32 Diagrama de bloques de los actuadores [Kazem, 2015].



### **CAPÍTULO 3**

#### **DISEÑO CONCEPTAL DEL MECANISMO PARALELO**

En el presente capítulo, se detalla el procedimiento para llegar al diseño conceptual que soluciona la problemática presentada, en los que se describen los siguientes elementos: requerimientos para el diseño del mecanismo paralelo, caja negra del sistema, la estructura de funciones, la cual incorpora las funcionalidades de los dominios electrónico, mecánico y de control; se presenta la matriz morfológica, de la cual se pueden plantear los conceptos de solución y finalmente, le evaluación técnica y económica de cada solución y la elección del concepto de solución óptimo, siguiendo la metodología VDI 2225.

##### **3.1 Requerimientos para el diseño**

Los requerimientos se plantean en base a la información obtenida en los antecedentes y estado del arte, se identifican las condiciones básicas previas a plantear el concepto de solución.

###### **a) Función principal**

El sistema utilizará un mecanismo paralelo de tres grados de libertad para simular el movimiento rotacional de la articulación del tobillo durante el ciclo de marcha. Estos movimientos son plantarflexión-dorsiflexión, eversion-inversion y abducción-aducción.

## b) Geometría

El diseño del mecanismo paralelo replicará las dimensiones antropométricas de un miembro inferior, emulando el largo, ancho y profundidad del miembro amputado. Como referencia para estas dimensiones se utilizan las medidas antropométricas correspondientes a una persona de 34 años, sexo femenino de peso 50 kg y estatura de 1.51 m, como se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Dimensiones antropométricas.

| N° | Dimensión                                                       | Unidad (mm) |
|----|-----------------------------------------------------------------|-------------|
|    |                                                                 |             |
| a  | Perímetro de la Pantorrilla <sup>30</sup>                       | 380         |
| b  | Perímetro del Tobillo <sup>31</sup>                             | 260         |
| c  | Ancho del pie                                                   | 100         |
| d  | Longitud del pie                                                | 220         |
| e  | Longitud de amputación transtibial desde la rodilla hacia abajo | 150         |
| f  | Longitud del tobillo al piso                                    | 80          |
| g  | Longitud de la rodilla al piso                                  | 430         |

La longitud de una amputación transtibial varía según cada individuo y depende de la razón de la amputación y de la preservación óptima de la función y la estética. La longitud específica del muñón puede variar. El nivel ideal de amputación se sitúa a nivel del tercio medio de la pierna, a 10-15 cm de las mesetas tibiales [Salinas, 2008].

Tomando en cuenta las dimensiones antropométricas de la Tabla 3.1 se define la altura del mecanismo de 200 mm, con la resta de la longitud de la amputación transtibial y la altura del tobillo al piso de la longitud de la rodilla al piso. En cambio, el ancho y la profundidad del mecanismo se definen con la circunferencia de la pantorrilla y la circunferencia del tobillo siendo estos 120 mm y 82.76 mm respectivamente.

## c) Cinemática

Condiciones de movimiento: las fases del ciclo de marcha y los movimientos del tobillo durante estas fases son criterios importantes que el mecanismo paralelo debe satisfacer. Estas fases están detalladas en la Figura 3.1. Para capturar y analizar estos movimientos en tres dimensiones, se utilizaron sensores inerciales de la marca iSen (Inertial Motion Capture), cuyos datos biomecánicos recopilados se encuentran disponibles en el Anexo D.

<sup>30</sup> Fuente: <https://dismovel.com/producto/tobillera-estabilizadora-ajustable-con-cordon/> Fecha: 17/05/2019

<sup>31</sup> Fuente: <https://www.bostonmagazine.com/health/2013/11/26/prosthetics-research-boston-biom-ankle-prosthetic/> Fecha: 17/05/2019

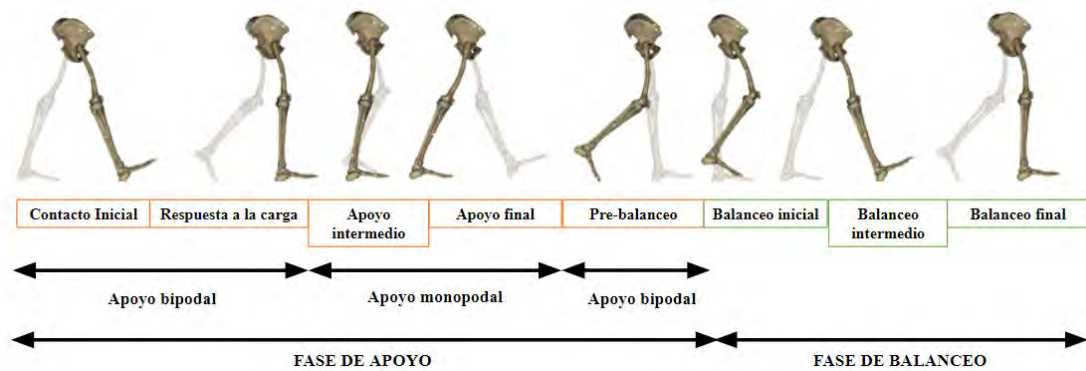
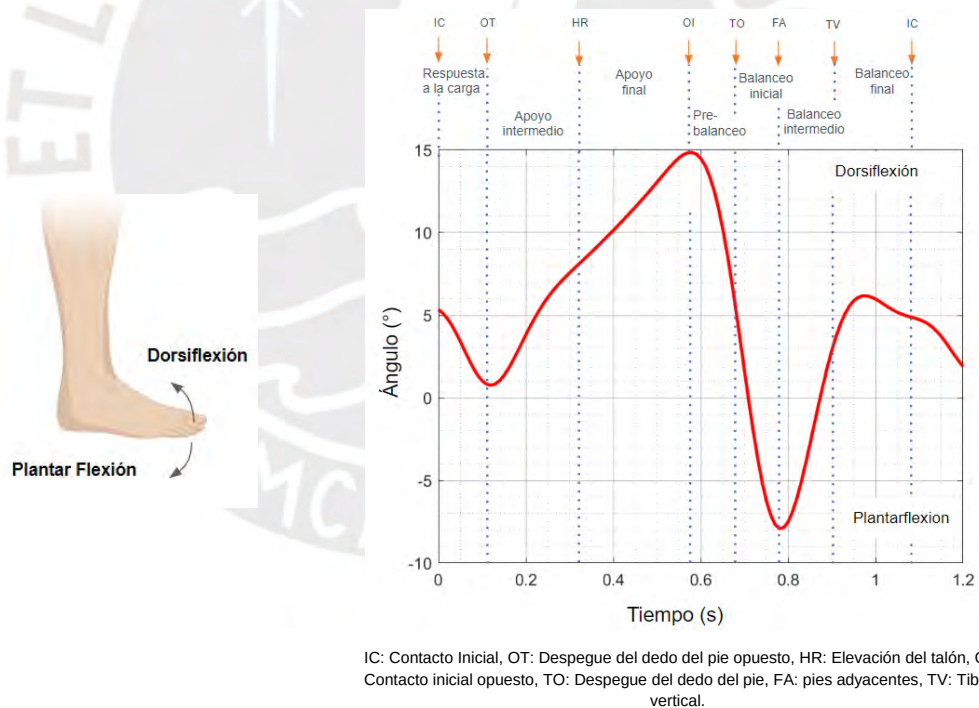


Fig. 3.1 Ciclo de marcha de una persona de 50 kg de sexo femenino.

- Movimiento plantarflexión-dorsiflexión: el movimiento de plantarflexión es la flexión del tobillo hacia abajo y el movimiento de dorsiflexión es el movimiento de flexión hacia arriba. Estos movimientos se muestran en la Figura 3.2 y las fases del ciclo de marcha en el plano sagital se presentan en la Tabla 3.2.



(a)

(b)

Fig. 3.2 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo.

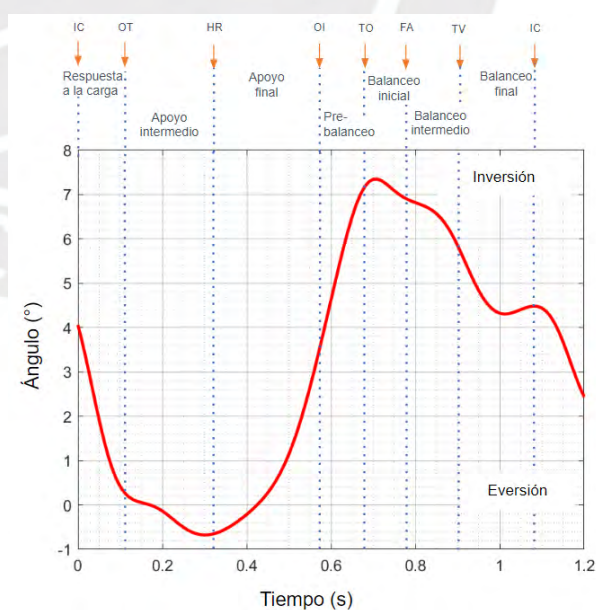
Tabla 3.2 Fases del ciclo de marcha en el plano sagital.

| N° | Fases del ciclo de marcha                         | Detalle                                                                                                                                               | Tiempo [s] | Ángulo [°] |
|----|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| 1  | Contacto inicial (0% del ciclo de marcha).        | Fase donde el pie toca el suelo. El tobillo se encuentra en una posición neutra o ligeramente en dorsiflexión, preparándose para absorber el impacto. | 0          | 5.34       |
| 2  | Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha). | El tobillo experimenta una plantarflexión, lo que permite absorber el choque y adaptarse a la superficie.                                             | 0-0.11     | 0.83       |
| 3  | Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha).    | El tobillo se mueve hacia la dorsiflexión. El pie se vuelve estacionario y la tibia se mueve sobre la articulación del tobillo.                       | 0.11-0.32  | 8.07       |
| 4  | Apoyo final (30-55% ciclo de marcha).             | El tobillo alcanza su máxima dorsiflexión, preparándose para impulsar el cuerpo hacia adelante. (Inicio de movimiento del otro pie).                  | 0.32-0.58  | 14.85      |
| 5  | Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha).        | El tobillo rápidamente pasa a una plantarflexión. Esta acción ayuda a preparar el pie para despegar del suelo y facilita la transición de balanceo.   | 0.58-0.68  | 5.40       |
| 6  | Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha).    | El tobillo sigue una ligera plantarflexión. Esto permite que los dedos del pie se despeguen del suelo sin arrastrarse.                                | 0.68-0.78  | -7.90      |
| 7  | Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha). | A medida que el pie se mueve hacia adelante, el tobillo se mueve hacia una posición neutra.                                                           | 0.78-0.9   | 2.88       |
| 8  | Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha).     | El tobillo se prepara para el próximo contacto con el suelo, regresando a una posición neutral o ligeramente dorsiflexionada.                         | 0.90-1.05  | 5.31       |

- **Movimiento eversión-inversión:** el movimiento de eversión que es la inclinación lateral hacia el interior del pie y el movimiento de inversión que es la inclinación lateral hacia el exterior del pie. Estos movimientos se muestran en la Figura 3.3 y las fases del ciclo de marcha en el plano frontal se presentan en la Tabla 3.3.



(a)



IC: Contacto Inicial, OT: Despegue del dedo del pie opuesto, HR: Elevación del talón, OI Contacto inicial opuesto, TO: Despegue del dedo del pie, FA: pies adyacentes, TV: Tibia vertical

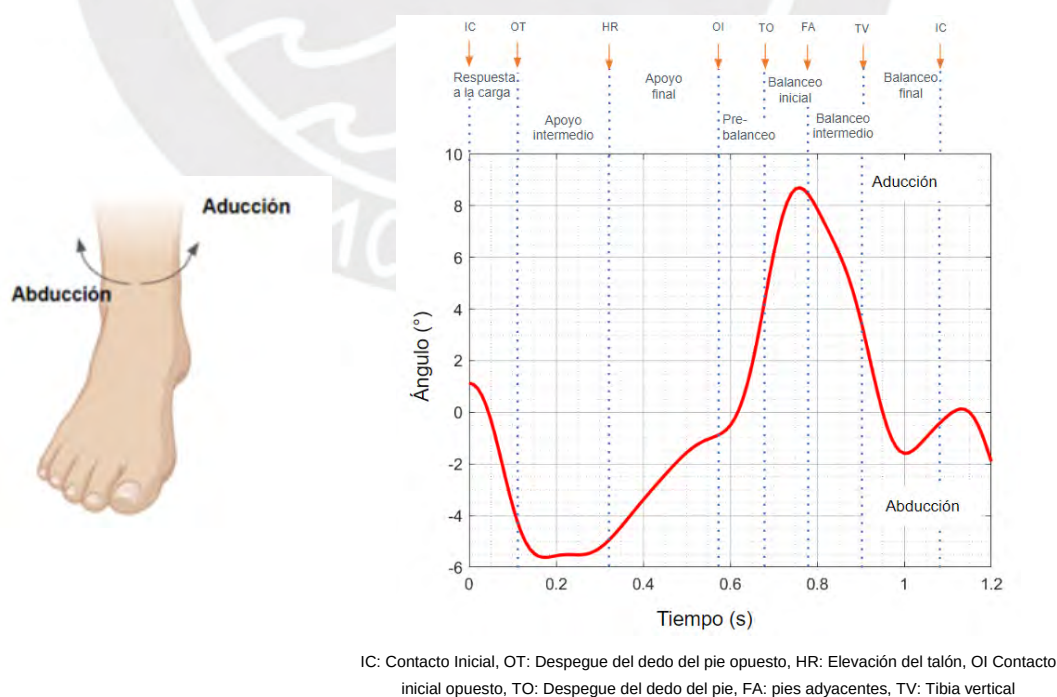
(b)

Fig. 3.3 Movimiento de eversión-inversión: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo.

Tabla 3.3 Fases del ciclo de marcha en el plano frontal.

| N° | Fases del ciclo de marcha                         | Detalle                                                                                                                                       | Tiempo [s] | Ángulo [°] |
|----|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| 1  | Contacto inicial (0% del ciclo de marcha).        | Fase donde el pie toca el suelo. El tobillo se encuentra en una posición ligeramente en inversión.                                            | 0          | 4.06       |
| 2  | Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha). | El tobillo experimenta una eversión lo que permite absorber el choque y adaptarse a la superficie.                                            | 0-0.11     | 0.28       |
| 3  | Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha).    | El tobillo se mueve hacia la inversión.                                                                                                       | 0.11-0.32  | -0.65      |
| 4  | Apoyo final (30-55% ciclo de marcha).             | El tobillo alcanza su máxima inversión, preparándose para impulsar el cuerpo hacia adelante. (inicio de movimiento del otro pie).             | 0.32-0.58  | 3.8        |
| 5  | Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha).        | El tobillo rápidamente pasa a una eversión. Esta acción ayuda a preparar el pie para despegar del suelo y facilita la transición de balanceo. | 0.58-0.68  | 7.18       |
| 6  | Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha).    | El tobillo sigue una ligera eversión para prepararse para el siguiente paso.                                                                  | 0.68-0.78  | 6.89       |
| 7  | Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha). | A medida que el pie se mueve hacia adelante, el tobillo se mueve hacia una posición neutra.                                                   | 0.78-0.9   | 5.85       |
| 8  | Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha).     | El tobillo se prepara para el próximo contacto con el suelo, regresando a una posición ligeramente inversión.                                 | 0.90-1.05  | 4.40       |

- Movimiento abducción-aducción: el movimiento de abducción es el desplazamiento hacia afuera del cuerpo y el movimiento de aducción es el desplazamiento hacia el centro del cuerpo. Estos movimientos se presentan en la Figura 3.4 y las fases del ciclo de marcha se presentan en la Tabla 3.4.



(a) (b)  
Fig. 3.4 Movimiento de abducción-aducción: (a) representación, (b) ángulo vs. tiempo.



Tabla 3.4 Fases del ciclo de marcha en el plano transversal.

| N° | Fases del ciclo de marcha                            | Detalle                                                                                                                            | Tiempo [s] | Ángulo [°] |
|----|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| 1  | Contacto inicial<br>(0% del ciclo de marcha).        | Fase donde el pie toca el suelo. El tobillo se encuentra en una ligera aducción preparándose para absorber el impacto.             | 0          | 1.13       |
| 2  | Respuesta a la carga<br>(0-10% del ciclo de marcha). | El tobillo experimenta abducción que permite absorber el choque y adaptarse a la superficie.                                       | 0-0.11     | -4.18      |
| 3  | Apoyo intermedio<br>(10-30% del ciclo de marcha).    | El tobillo se mueve hacia la aducción.                                                                                             | 0.11-0.32  | -4.97      |
| 4  | Apoyo final<br>(30-55% ciclo de marcha).             | El tobillo continúa en aducción, preparándose para impulsar el cuerpo hacia adelante. (Inicio de movimiento del otro pie).         | 0.32-0.58  | -0.81      |
| 5  | Pre-balanceo<br>(55-65% del ciclo de marcha).        | El tobillo continúa en aducción. Esta acción ayuda a preparar el pie para despegar del suelo y facilita la transición de balanceo. | 0.58-0.68  | 4.38       |
| 6  | Balanceo inicial<br>(65-75% del ciclo de marcha).    | El tobillo sigue una ligera abducción. Esto permite que los dedos del pie se despeguen del suelo sin arrastrarse.                  | 0.68-0.78  | 8.43       |
| 7  | Balanceo intermedio<br>(75-85% del ciclo de marcha). | A medida que el pie se mueve hacia adelante, el tobillo se mueve hacia una posición neutra.                                        | 0.78-0.9   | 3.57       |
| 8  | Balanceo final<br>(85-100% del ciclo de marcha).     | El tobillo se prepara para el próximo contacto con el suelo, regresando a una ligera aducción.                                     | 0.90-1.05  | -0.98      |

**Relevancia para las necesidades del tobillo:** En la anatomía humana, el punto de giro se refiere al centro de rotación alrededor del cual se realiza un movimiento articular. Para los movimientos de la articulación del tobillo, los puntos de giro pueden variar ligeramente dependiendo del movimiento específico:

- **Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión:** El punto de giro se encuentra en la articulación talocrural, donde el astrágalo se encuentra con la tibia y el peroné, que se presenta en la Figura 3.5. Este eje de rotación pasa a través del astrágalo y es horizontal con una ligera inclinación hacia adelante y hacia abajo desde el lado medial (cerca de la tibia) hacia el lado lateral (cerca del peroné).



Fig. 3.5 Articulación talocrural en el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión.

- **Movimiento de eversión-inversión:** Estos movimientos ocurren principalmente en la articulación subtalar que se encuentra debajo de la articulación tibiotalar. que se presenta en la Figura 3.6. El eje de rotación para la inversión y eversión se inclina oblicuamente desde el lado anterior y medial del pie hacia el lado posterior y lateral, pasando a través del astrágalo y el calcáneo.



Fig. 3.6 Articulación subtalar en el movimiento de eversión-inversión.

- **Movimiento de abducción-aducción:** Aunque estos términos no se aplican comúnmente a los movimientos primarios del tobillo, en el contexto del pie pueden referirse a los movimientos del antepié, que se presenta en la Figura 3.7. El punto de giro para estos movimientos sería en la articulación tarsal transversal, donde los huesos del tarso se unen con los metatarsianos. El eje de rotación es perpendicular al eje utilizado para la inversión y eversión.



Fig. 3.7 Articulación tarsal transversal en el movimiento de abducción-aducción.

Es importante señalar que el punto de giro es un concepto idealizado, y en la realidad, las superficies articulares no son perfectamente simples ni siempre tienen un punto fijo de rotación. La complejidad de las superficies articulares y la presencia de múltiples ligamentos y tendones hacen que el movimiento real del tobillo sea bastante complejo y no se limite a una simple rotación alrededor de un único punto fijo, como se muestra en

la Figura 3.8. El investigador Sanmarco ha demostrado en 1973, que el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión tiene lugar alrededor de múltiples centros instantáneos de rotación situados todos ellos en el interior del astrágalo. Se constituye un sistema de 4 barras, similar al existente en la rodilla, en el que se combina rotación y deslizamiento en la superficie articular. Cuando el tobillo se encuentra en plantarflexión, hay una distracción de la articulación, en posición intermedia tiene lugar el deslizamiento y, al final de la dorsiflexión, hay una compresión articular [Viladot, 2022].

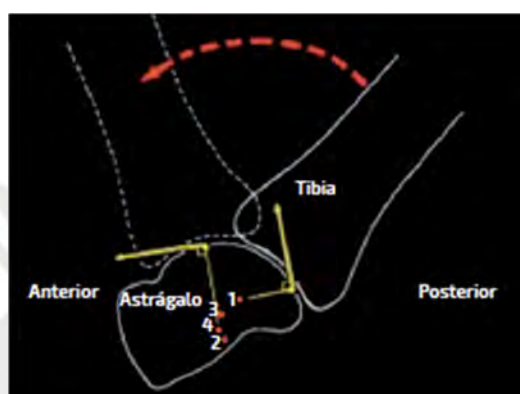


Fig. 3.8 Situación de los centros de rotación en el astrágalo, en 4 se produce el deslizamiento [Viladot, 2022].

Los movimientos de desplazamiento en el tobillo son sutiles y suelen ser de menor magnitud que las rotaciones, y estos desplazamientos pueden ocurrir en el orden de los milímetros dependiendo de la flexibilidad de los tejidos blandos, incluidos los ligamentos y de la congruencia de las superficies articulares (cómo encajan los huesos entre sí). La forma del alojamiento de los huesos en la articulación afecta el rango y la naturaleza de los movimientos posibles, incluidos los desplazamientos.

Por lo antes expuesto, en el diseño del mecanismo paralelo para prótesis de tobillo, una primera aproximación comúnmente se centra en modelar únicamente las rotaciones y no los desplazamientos por varias razones:

Simplicidad del modelo: modelar únicamente las rotaciones permite un enfoque en los movimientos más críticos y funcionales que debe replicar una prótesis. Dado que el movimiento primario del tobillo es la plantarflexión-dorsiflexión, seguido de una eversion-inversión y abducción-aducción.

Relevancia biomecánica: las rotaciones del tobillo son los movimientos más significativos durante actividades como la marcha. Los desplazamientos, aunque existen, son de menor magnitud y tienen un impacto menos directo en la funcionalidad general de la prótesis. Los desplazamientos del tobillo son tan pequeños que a menudo se puede despreciar en el contexto de la marcha normal.

#### d) Cinética

Los datos biomecánicos obtenidos del contacto pie sobre la plataforma de fuerza AMTY de una persona de sexo femenino y de peso de 50 kg se encuentran en la Figura 3.9 y el detalle se presenta en el Anexo D.

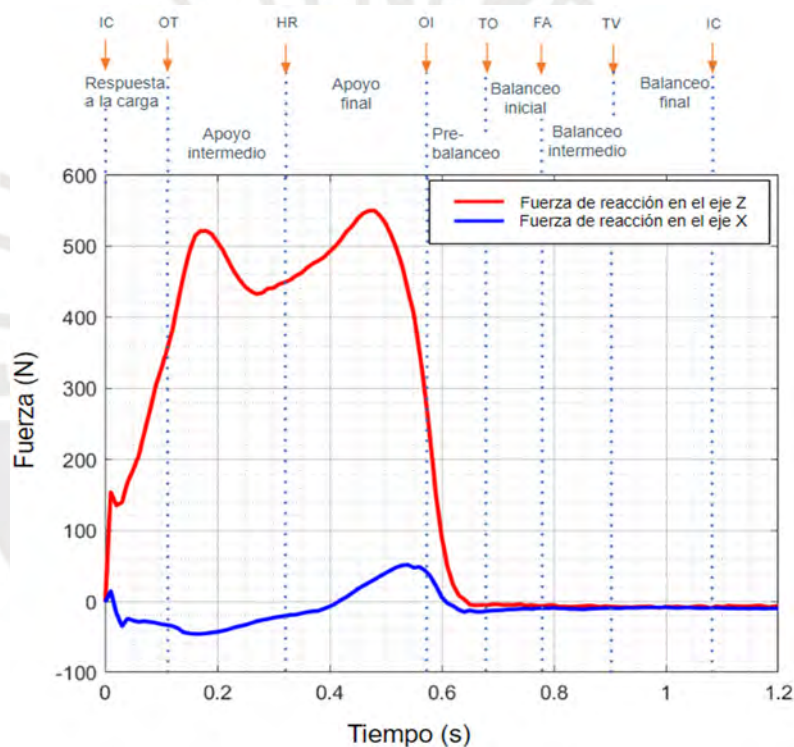


Fig. 3.9 Datos de las fuerzas de reacción pie-plataforma de fuerza AMTY.

Capacidad de carga: el mecanismo paralelo debe ser capaz de soportar una carga de hasta 50 kg, adecuado para el peso corporal de un usuario durante la caminata. No está sujeto para saltar o correr.

#### e) Topología

El uso de mecanismos paralelos en lugar de mecanismos seriales para una prótesis de tobillo está motivados por varias razones:

Estabilidad: Los mecanismos paralelos pueden ofrecer mayor estabilidad que los mecanismos seriales debido a que la carga se distribuye entre múltiples elementos de soporte.

Rigidez y control de movimiento: un mecanismo paralelo puede proporcionar una rigidez inherente mayor y un control de movimiento más preciso. Esto se debe a que, en los mecanismos paralelos, los esfuerzos y deformaciones se comparten entre los múltiples enlaces, lo que resulta en menores desviaciones y movimiento no deseados.

Distribución de fuerzas: los mecanismos paralelos permiten una mejor distribución de las fuerzas al largo de sus múltiples enlaces.

Compactibilidad y ergonomía: pueden ser diseñados para ser más compactos que los mecanismos seriales, lo cual es una ventaja en términos de ergonomía.

Simplicidad en la transmisión de fuerza: en comparación con los mecanismos seriales, los mecanismos paralelos pueden requerir menos componentes para la transmisión de fuerza, lo cual puede simplificar el diseño y el mantenimiento.

Por lo antes expuesto, un mecanismo paralelo permitirá obtener tres grados de libertad que permitan realizar los movimientos rotacionales de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción necesarios para el movimiento del tobillo-pie.

#### **f) Estructura**

La estructura tipo paralelo seleccionada debe ser capaz de simular de manera efectiva y precisa el movimiento del tobillo durante el ciclo de marcha. Sebe garantizar que pueda proporcionar los grados de libertad necesarios y replicar los movimientos requeridos para lograr una funcionalidad óptima del mecanismo paralelo.

#### **g) Eslabones**

Los eslabones del mecanismo paralelo deben ser diseñados con materiales y dimensiones adecuadas para soportar las cargas y fuerzas a las que estarán expuestos durante el uso diario. Los eslabones deben tener dimensiones y formas que se adapten de manera óptima a la anatomía y las restricciones espaciales del miembro inferior.

#### **h) Par cinemático o junta**

El par cinemático o junta del mecanismo paralelo deben permitir los grados de libertad



necesarios para simular el movimiento del tobillo durante el ciclo de marcha. Deben proporcionar los rangos de movimiento adecuados, incluyendo plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción.

#### **i) Actuadores**

Los actuadores deben tener la capacidad de generar la fuerza y el torque requeridos para simular el movimiento del tobillo. Deben ser capaces de aplicar las fuerzas necesarias para permitir el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción de manera adecuada.

#### **j) Sistema sensorial**

El sistema sensorial debe ser capaz de detectar con precisión la posición y el movimiento del tobillo protésico en tiempo real. Esto implica la medición de parámetros como el ángulo de flexión, velocidad angular y la aceleración del tobillo.

#### **k) Efecto Final**

En la presente investigación, el efecto final será la plataforma móvil, que a su vez se convertiría en el pie protésico.

#### **l) Masa**

El mecanismo paralelo debe estar diseñado de tal manera que su masa total sea reducida al mínimo necesario. Esta reducción de masa tiene como objetivo reemplazar la carga del miembro remanente del usuario, optimizando el rendimiento del mecanismo paralelo. Se deben considerar técnicas y materiales adecuados para lograr una construcción liviana, evitando cualquier peso que no contribuya directamente a la mejora del mecanismo.

#### **m) Usuario**

Eficiencia de uso: el sistema robótico se diseñará garantizando que sea fácil uso y accesible para el usuario.

Facilidad de aprendizaje: el sistema robótico debe ser intuitivo de fácil manejo para el usuario, permitiendo una rápida adaptación y dominio.

Satisfacción subjetiva: el diseño debe estar basado en principios de ergonomía y priorizar la comodidad del usuario.

### **n) Seguridad**

Es fundamental desarrollar un mecanismo que garantice la seguridad y protección física del usuario. Para lograrlo, se buscará alcanzar un punto de equilibrio que combine la fiabilidad del diseño, componentes intrínsecamente seguros y la redundancia de sensores.

Fiabilidad del diseño: se implementará medidas de seguridad desde la etapa cinemática del sistema. Se tendrán en cuenta aspectos como las dimensiones, el tipo de cada eslabón y el número de juntas o pares cinemáticos.

Componentes intrínsecamente seguros: Se buscará utilizar limitadores mecánicos siempre que sea posible, para asegurar que el sistema no exceda los límites requeridos durante los movimientos del tobillo.

Redundancia de sensores: Se evaluará la necesidad de incorporar redundancia en los componentes del sistema, considerando que su implementación disminuye la probabilidad de fallos.

### **o) Espacio de trabajo útil y efectivo**

Se tomará en cuenta el espacio de trabajo útil y efectivo del mecanismo considerando las posiciones y rangos de movimiento que el mecanismo debe alcanzar de manera adecuada para su funcionamiento.

El espacio de trabajo útil: es el conjunto de posiciones y orientaciones que el mecanismo puede lograr, permitiendo un funcionamiento adecuado del tobillo protésico en términos de plantarflexión-dorsiflexión, evasión-inversión y abducción-aducción.

El espacio de trabajo efectivo: se refiere a las posiciones y orientaciones específicas dentro del espacio de trabajo útil donde el mecanismo puede operar de manera óptima y eficiente, asegurando un buen rendimiento y funcionalidad para el usuario de la prótesis de tobillo.

### **p) Velocidad**

El mecanismo paralelo del tobillo protésico debe ser capaz de alcanzar velocidades adecuadas para permitir un movimiento natural durante la marcha. A partir del estado del arte, una persona con amputación unilateral transtibial en la marcha tiene entre 60-80  $\frac{\text{pasos}}{\text{min}}$ . Una

persona sin amputación en la marcha tiene 70-90  $\frac{\text{pasos}}{\text{min}}$  [ICRC, 2014]. De acuerdo con un estudio realizado en una persona sin amputación, se ha determinado que la velocidad de la marcha es de  $1.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , como se detalla en el Anexo D.

#### **q) Precisión**

El mecanismo paralelo del tobillo protésico debe tener la capacidad de realizar movimientos del ciclo de marcha de manera consistente. Esto implica que, al realizar una secuencia de movimientos idénticos, el mecanismo debe reproducir los mismos resultados con precisión.

#### **r) Confiabilidad**

Los materiales, y componentes empleados serán seleccionados garantizando la calidad y tolerancias necesarias para ser usado en un mecanismo paralelo para tobillo protésico.

#### **s) Eficiencia energética y sostenibilidad**

El mecanismo paralelo deberá ser diseñado para ser eficiente en términos de consumo de energía. Debe minimizar la cantidad de energía requerida para su correcto funcionamiento, optimizando la eficiencia de los actuadores, sensores y otros componentes electrónicos.

#### **t) Montaje**

Los componentes del prototipo de mecanismo paralelo deben diseñarse y fabricarse para ser compatibles entre sí, facilitando su ensamblaje y garantizando un ajuste adecuado. Los componentes deberán ser estándar y permitir el montaje sin problemas.

### **3.2 Estructura de funciones**

En la metodología del diseño de sistemas adoptado en este estudio, el propósito de la estructura de funciones tiene como objetivo descomponer la función principal del sistema en bloques de funcionalidades asociadas con dominios o subsistemas, de esta manera, se identifican las funciones específicas que requieren soluciones tecnológicas particulares.

El proceso comienza con la elaboración de una caja negra del sistema para luego proceder a la construcción del diagrama de estructura de funciones, en el cual se visualizan los bloques, dominios, subsistemas, entradas y salidas del sistema.

### 3.2.1 Caja negra

La caja negra (Black Box) es útil para identificar la función principal del sistema y las entradas y salidas con las que interactúa. En la Figura 3.10, se presenta la caja negra relacionada con las entradas y salidas del mecanismo paralelo para un tobillo protésico.

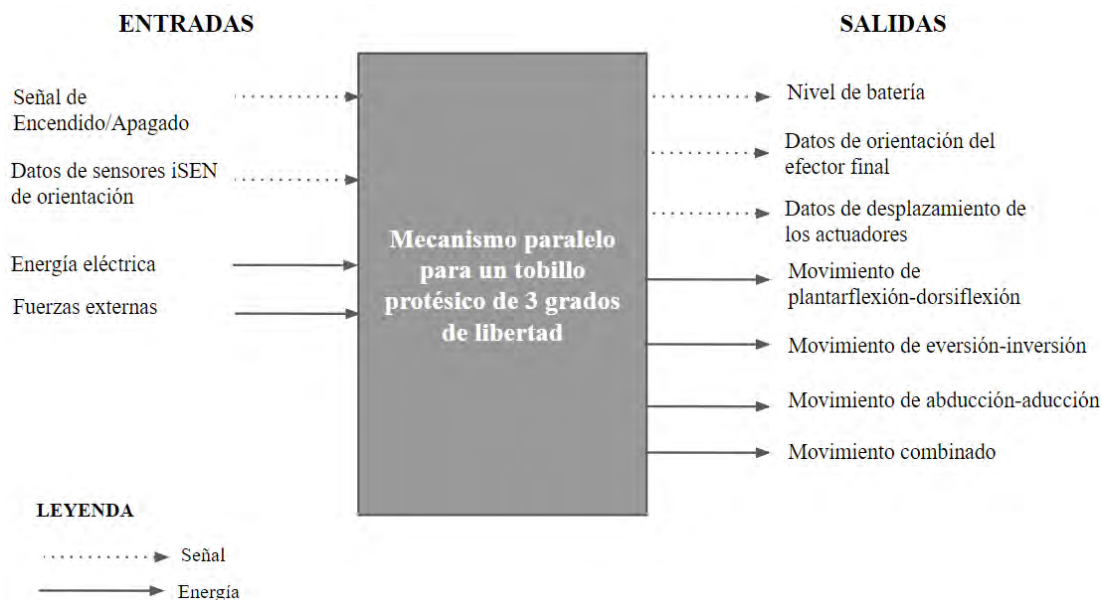


Fig. 3.10 Caja negra del mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad.

#### Entradas:

- Señal de encendido/apagado: señal introducida por el usuario para encender o apagar el mecanismo paralelo, esto permite dar el inicio eléctrico en general.
- Energía eléctrica: es la energía suministrada por la batería.
- Fuerzas externas: las fuerzas de contacto que se genera a partir del peso del usuario.

#### Salidas:

- Nivel de batería: Es la señal indicadora del nivel de carga de la batería.
- Datos de orientación del efector final: información sobre la posición y orientación de la plataforma móvil (efector final).
- Datos de desplazamientos de los actuadores: información sobre la extensión o contracción de los actuadores.
- Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión: movimiento de la plataforma móvil hacia arriba y hacia abajo).

- Movimiento de eversión-inversión: movimiento de la plataforma móvil con rotación hacia afuera y hacia adentro.
- Movimiento de abducción-aducción: movimiento de la plataforma móvil que se desplaza lateralmente.
- Movimiento combinado: movimiento integrado en tres planos; plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción.

### 3.2.2 Diagrama de funciones

Una vez definida la caja negra, se presenta el diagrama de funciones mediante la Figura 3.11. Este diagrama especifica las funciones necesarias y las relaciones que la solución debe establecer para cumplir con su función principal. Es importante destacar que este diagrama se organiza en seis dominios: mecánico, eléctrico, de control, de interfaz, sensores y actuadores. Cada uno agrupa funciones relacionadas con su respectivo ámbito.

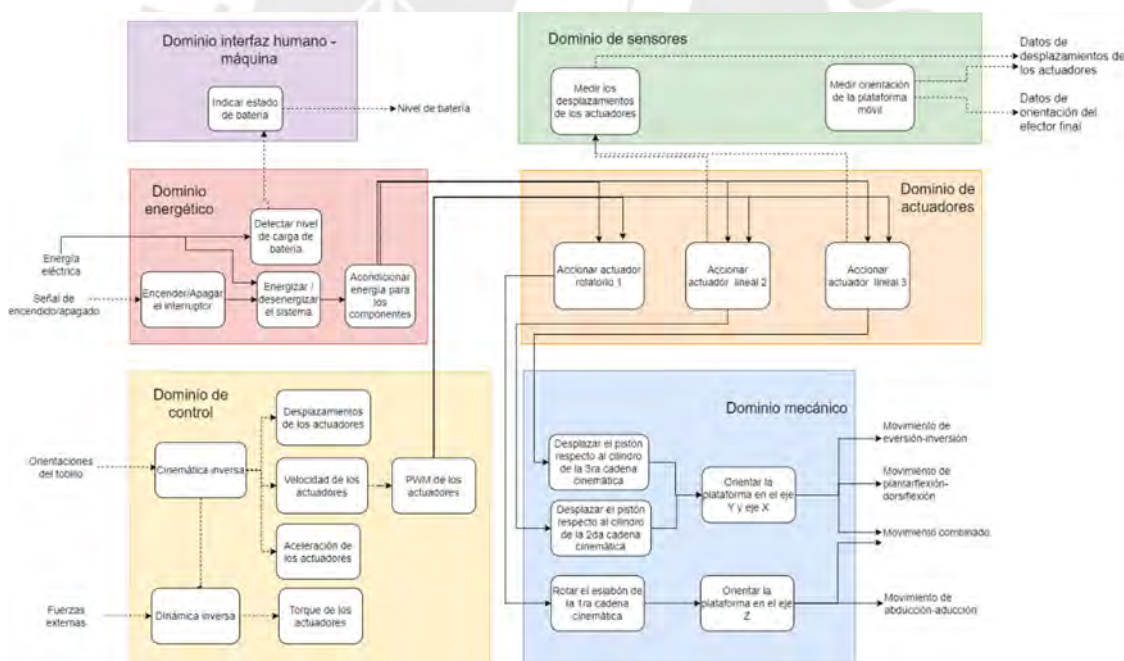


Fig. 3.11 Estructura de funciones de mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad

#### a) Dominio mecánico:

- Desplazamientos de los actuadores: es la ejecución física del movimiento por parte de los actuadores a la plataforma móvil.



- Orientar la plataforma móvil: consiste en ubicar la plataforma con el movimiento de actuadores y articulaciones.

b) Dominio de los actuadores:

- Accionar actuadores: poner en funcionamiento los actuadores para generar movimiento en la plataforma móvil.

c) Dominio de sensores:

- Medir los desplazamientos de los actuadores: monitorear cuánto y cómo se han movido los actuadores.
- Medir orientación de la plataforma móvil: detectar en qué orientación se encuentra la plataforma móvil del mecanismo.

d) Dominio energético:

- Encender/Apagar el interruptor: acción de activar o desactivar el flujo de energía al sistema.
- Energizar/desenergizar el sistema: proceso de suministrar o cortar energía al mecanismo paralelo.
- Detectar el nivel de carga de batería: función que mide la carga actual.
- Acondicionar energía para los componentes: adaptación de la energía eléctrica a los requerimientos específicos de cada componente.

e) Dominio de control:

- Cinemática inversa: cálculo de la posición, velocidad, y aceleración a partir de datos de la orientación de la plataforma móvil.
- Dinámica inversa: cálculo del torque y fuerza de los actuadores a partir de la cinemática inversa y datos de fuerzas externas.

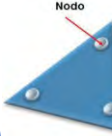
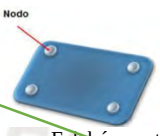
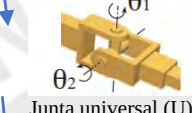
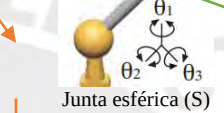
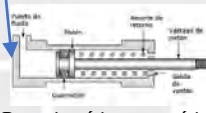
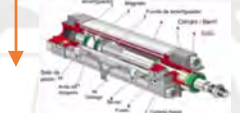
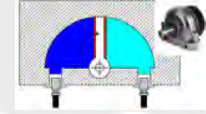
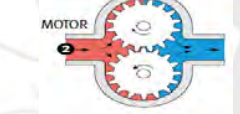
f) Dominio de interfaz:

- Indicar estado de la batería: esta función se encarga en mostrar al usuario el nivel actual de carga de la batería.

### 3.2.3 Concepto de solución

Las funciones con sus portadores, es decir los bloques que representan y ejecutan la función deseada. Las siguientes propuestas conceptuales se parten de la matriz morfológica de Zwicky, que se muestra en la Tabla 3.5. Realizando diferentes combinaciones en la matriz se determinó cuatro conceptos de solución.

Tabla 3.5 Matriz morfológica

| Dominio               | Funciones parciales                         | Portadores de funciones                                                                                               |                                                                                                                                 |                                                                                                                         |
|-----------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                       |                                             | Alternativa 1                                                                                                         | Alternativa 2                                                                                                                   | Alternativa 3                                                                                                           |
| Dominio mecánico      | Desplazamientos de los actuadores           | <br>Ternario                         | <br>Eslabón cuaternario                       | <br>Eslabón binario                  |
|                       | Orientar la plataforma móvil                | <br>Junta universal (U)              | <br>Junta esférica (S)                        | <br>Junta rotacional (R)             |
| Dominio de actuadores | Accionar actuadores lineales                | <br>Par prismático neumático        | <br>Par prismático hidráulico                | <br>Par prismático eléctrico        |
|                       | Accionar actuadores rotatorios              | <br>Par rotacional neumático       | <br>Par prismático hidráulico               | <br>Par rotacional eléctrico       |
| Dominio de sensores   | Medir los desplazamientos de los actuadores | <br>Encoders lineales              | <br>Potenciómetros lineales                 |                                                                                                                         |
|                       | Medir orientación de la plataforma móvil:   | <br>Sensor Inercial                | <br>Sensor Inercial con giroscopio          |                                                                                                                         |
| Dominio de energía    | Encender/Apagar el sistema                  | <br>Interruptor                    | <br>Palanca                                  |                                                                                                                         |
|                       | Energizar el sistema                        | <br>Batería de Lipo                | <br>Batería Ion-Litio                       |                                                                                                                         |
| Dominio de control    | Cinemática                                  | Cinemática inversa                                                                                                    | Cinemática directa                                                                                                              |                                                                                                                         |
|                       | Dinámica                                    | Dinámica inversa                                                                                                      | Dinámica directa                                                                                                                |                                                                                                                         |
| Dominio de interfaz   | Indicar el estado de la batería             | <br>Medidor de voltaje con display | <br>Medidor de voltaje con microcontrolador | <br>Medidor de corriente y voltaje |

| LEYENDA         |                                                                                    |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Solución 1 (S1) |  |
| Solución 2 (S2) |  |
| Solución 3 (S3) |  |
| Solución 4 (S4) |  |

### Concepto de solución 1 (S1)

El primer concepto de solución consiste en un mecanismo con una topología 3UPS-1S, que se presenta en la Figura 3.12, es dotado de tres grados de libertad (DoF). Los movimientos tridimensionales del espacio son realizados por los actuadores situados en las articulaciones prismáticas (P), mientras que la posición y orientación de la plataforma móvil son dirigidas por tres uniones universales (U). La unión esférica (S) adicional permite de manera pasiva el manejo de los grados de libertad restantes. La amplitud de los movimientos posibles está condicionada por la configuración específica de las juntas universales y esféricas. Para su operación, el mecanismo requiere de tres actuadores lineales, tres uniones universales y cuatro uniones esféricas. En este mecanismo se podrá medir los desplazamientos lineales mediante encoders lineales y las rotaciones de la plataforma móvil mediante sensores de inercia. Habrá un interruptor para el encendido del mecanismo, y para energizar se utilizará una batería Lipo y también tendrá un medidor de voltaje para conocer el estado de la batería.

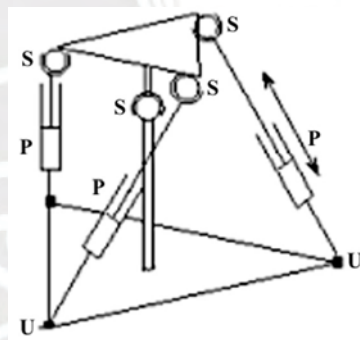


Fig. 3.12 Concepto de solución 1.

### Concepto de solución 2 (S2)

La configuración mecánica del mecanismo paralelo denominada 3SPS-1S que se muestra en la Figura 3.13, tiene un total de tres grados de libertad, debido a los pares prismáticos (actuadores lineales hidráulicos). Este diseño, aunque proporciona una amplia gama de movilidad, puede resultar más complejo tanto en su fabricación como en su mantenimiento debido al número de juntas esféricas implicadas. Para su funcionamiento, este sistema necesita tres actuadores lineales y siete juntas esféricas. Para medir el desplazamiento de los actuadores lineales se utiliza potenciómetros, y la orientación de la plataforma móvil

mediante un sensor inercial con giroscopio. Se enciende el mecanismo mediante un interruptor y se energiza con una batería de Lipo, se mide el voltaje de la batería mediante un microcontrolador.

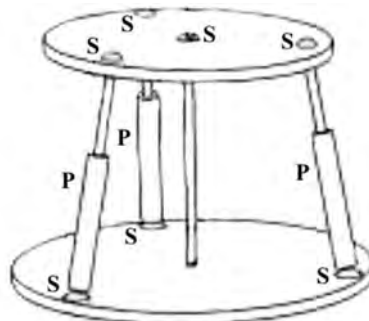


Fig. 3.13 Concepto de solución 2.

### Concepto de solución 3 (S3)

El mecanismo 3RRS-1S de la Figura 3.14 se caracteriza por tener un total de tres grados de libertad. Las tres articulaciones rotacionales (R) ubicadas cerca de la base son ajustables activamente, y la plataforma se encuentra vinculada a través de articulaciones rotativas adicionales junto con una unión esférica (S). Según la configuración y el funcionamiento específico del mecanismo, es posible que algunas de estas articulaciones rotativas funcionen de manera pasiva, sin añadir grados de libertad activos al sistema. Para su ensamblaje y operación, se requieren tres actuadores de rotación, tres juntas de revolución y cuatro juntas esféricas. Se mide el desplazamiento de los actuadores lineales mediante potenciómetros lineales, y los desplazamientos rotatorios mediante un sensor inercial con giroscopio. Se enciende el sistema con una palanca y se energiza con una batería Ion-Litio. Se utiliza un medidor de corriente para indicar el estado de la batería.

Además, las articulaciones rotativas presentan menor rigidez, lo que potencialmente afectaría la precisión del mecanismo cuando opera bajo cargas pesadas. Esta disminución en la rigidez también inferir en una disminución de la estabilidad cuando se manejan cargas altas, limitando así la capacidad de carga del mecanismo en comparación con otros diseños que ofrezcan una mayor firmeza estructural.

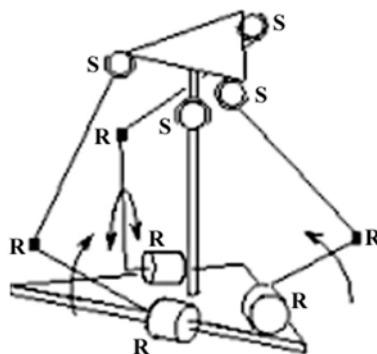


Fig. 3.14 Concepto de solución 3.

#### Concepto de solución 4 (S4)

El mecanismo 3PRS-1S de la Figura 3.15 posee tres grados de libertad a través de las uniones prismáticas (P) ubicadas en la base, controlables para facilitar el posicionamiento. Las uniones rotaciones (R) y esféricas (S) contribuyen a la orientación y alineación de la plataforma, aunque su papel puede ser pasivo en ciertos diseños, permitiendo que la plataforma responda a movimientos inducidos por las uniones prismáticas sin contribuir activamente al control de posición. En términos de componentes, se necesitan tres actuadores lineales, tres juntas universales y cuatro juntas esféricas. Se mide el desplazamiento de los actuadores lineales mediante potenciómetros lineales, y los desplazamientos rotatorios mediante un sensor inercial. El sistema se activa con un interruptor y se energiza con una batería Ion-Litio; se utiliza un medidor de corriente para conocer el estado de la batería.

Las uniones prismáticas dependen de mecanismos de deslizamiento que pueden introducir imprecisiones a lo largo del tiempo debido a la holgura y al desgaste inherentes a su funcionamiento. Además, la fabricación de este mecanismo puede implicar mayores costos y complejidad, dada la necesidad de integrar distintos tipos de juntas.

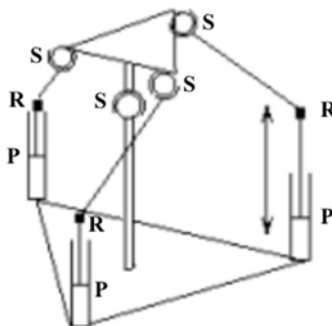


Fig. 3.15 Concepto de solución 4.



### 3.2.4 Concepto de solución preliminar

Los conceptos de solución previamente presentados se someterán a una evaluación rigurosa basada en criterios técnicos y económicos, conforme a la metodología de diseño establecida por la VDI 2221. Los resultados detallados de esta evaluación se encuentran en la Tabla 3.6, donde: 0: No aceptable, 1: Poco satisfactorio, 2: Suficiente, 3: Satisfactorio, 4: Muy satisfactorio.

Tabla 3.6 Evaluación de criterios técnicos y económicos del concepto de solución

| Nº         | Criterios técnicos y económicos                    | S1 | S2 | S3 | S4 |
|------------|----------------------------------------------------|----|----|----|----|
| 1          | Función                                            | 3  | 2  | 2  | 2  |
| 2          | Buen uso de la energía                             | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 3          | Seguridad                                          | 3  | 2  | 2  | 2  |
| 4          | Estabilidad                                        | 3  | 2  | 2  | 2  |
| 5          | Fabricación                                        | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 6          | Montaje                                            | 2  | 1  | 1  | 2  |
| 7          | Confiabilidad                                      | 3  | 2  | 2  | 2  |
| 8          | Facilidad de manejo                                | 3  | 3  | 2  | 2  |
| 9          | Mantenimiento                                      | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 10         | Número de piezas                                   | 2  | 2  | 2  | 1  |
| 11         | Fácil adquisición de los materiales de fabricación | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 12         | Costos de la tecnología                            | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 13         | Pocos desperdicios                                 | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 14         | Facilidad de montaje                               | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 15         | Fácil mantenimiento                                | 2  | 2  | 2  | 2  |
| SUMA TOTAL |                                                    | 34 | 29 | 28 | 28 |

Se toma como concepto de solución que obtuvo el mayor puntaje, en este caso S1. Luego, se parte de esta solución para obtener alternativas que se deriven de esta solución, y obtener así soluciones preliminares para que evaluadas mediante una análisis técnico-económico.

### 3.2.5 Proyecto preliminar

En esta fase, se implementa una matriz de soluciones para cada función específica, con el objetivo de derivar soluciones más detalladas. Este proceso nos permite identificar los componentes mecánicos esenciales para el diseño. A continuación, presentamos las soluciones preliminares resultantes de la etapa anterior.

### Solución Preliminar 1 (SP1):

El primer concepto de solución se describe como un mecanismo de topología 3UPS, ilustrado en la Figura 3.16, equipado con tres grados de libertad (DoF). Este sistema permite movimientos tridimensionales mediante actuadores en articulaciones prismáticas (P), con la posición y orientación de la plataforma móvil gestionadas por tres uniones universales (U). La capacidad de movimiento del mecanismo está determinada por la configuración de las uniones. Se requieren tres actuadores lineales, tres uniones universales y tres uniones esféricas para su funcionamiento. La medición de desplazamientos lineales se realiza a través de encoders lineales, mientras que las rotaciones de la plataforma se monitorean con un sensor de inercia. El sistema se activa mediante un interruptor, se alimenta con una batería Lipo y cuenta con un medidor de voltaje para supervisar el estado de la batería.

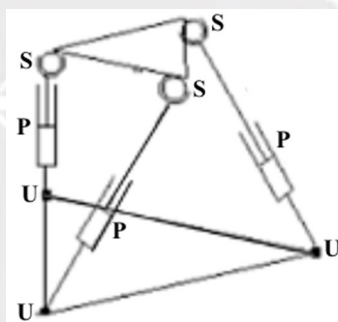


Fig. 3.16 Solución preliminar 1.

### Solución Preliminar 2 (SP2):

El mecanismo 2UPS-RU ofrece un total de seis grados de libertad (3 DoF), gracias a dos pares prismáticos (actuadores lineales) y un par rotacional (actuador rotacional). Este diseño se destaca por su compactibilidad, optimizando el espacio y la eficiencia. Para su funcionamiento, se necesitan dos actuadores lineales, tres juntas universales, dos juntas esféricas, y una junta de revolución, lo que subraya la eficacia de su estructura en términos de componentes requeridos. La medición de desplazamientos lineales se realiza a través de potenciómetros lineales, mientras que las rotaciones de la plataforma se monitorean con un sensor de inercia. El sistema se activa mediante un interruptor, se alimenta con una batería Lipo y cuenta con un medidor de voltaje para supervisar el estado de la batería.

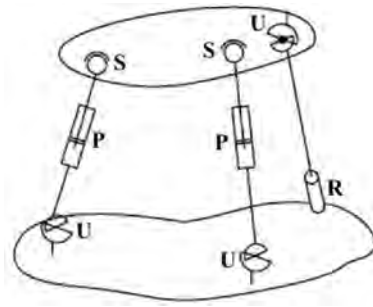


Fig. 3.17 Solución preliminar 2.

### Solución Preliminar 3 (SP3):

El diseño 2SPU-1RU que se muestra en la Figura 3.18 se caracteriza por contar tres grados de libertad, lo que refleja un diseño eficiente y compacto. Este sistema precisa de dos actuadores lineales y un actuador rotacional para el control directo de sus movimientos. Además, la estructura se completa con una junta universal, dos juntas esféricas y tres juntas rotacionales, lo que subraya la integración y versatilidad del mecanismo en aplicaciones que demandan precisión y adaptabilidad. La medición de desplazamientos lineales se realiza a través de potenciómetros lineales, mientras que las rotaciones de la plataforma se monitorean con un sensor de inercia. El sistema se activa mediante un interruptor, se alimenta con una batería Lipo y cuenta con un medidor de voltaje para supervisar el estado de la batería.

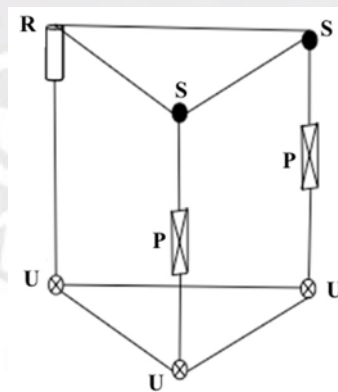


Fig. 3.18 Solución preliminar 3.

La evaluación y calificación de las alternativas se detalla en la Tabla 3.7, se muestra sus valores relativos comparados con la solución óptima. Se considerarán únicamente aquellas alternativas que obtengan un valor superior a 0.6.



Tabla 3.9 Valor económico  $y_i$ 

| Variantes de concepto               |                                                    |    | Solución preliminar 1 |     | Solución preliminar 2 |     | Solución preliminar 3 |     | Solución ideal |     |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------|----|-----------------------|-----|-----------------------|-----|-----------------------|-----|----------------|-----|
| Nº                                  | Criterios de evaluación                            | g  | p                     | gp  | p                     | gp  | p                     | gp  | p              | gp  |
| 1                                   | Número de piezas                                   | 9  | 2                     | 18  | 2                     | 18  | 3                     | 27  | 4              | 36  |
| 2                                   | Fácil adquisición de los materiales de fabricación | 8  | 2                     | 16  | 2                     | 16  | 3                     | 24  | 4              | 32  |
| 3                                   | Costos de la tecnología                            | 9  | 2                     | 18  | 3                     | 27  | 3                     | 27  | 4              | 36  |
| 4                                   | Pocos desperdicios                                 | 8  | 2                     | 16  | 3                     | 24  | 3                     | 24  | 4              | 32  |
| 5                                   | Facilidad de montaje                               | 7  | 2                     | 14  | 2                     | 14  | 3                     | 21  | 4              | 28  |
| 6                                   | Fácil mantenimiento                                | 8  | 2                     | 16  | 2                     | 16  | 2                     | 16  | 4              | 32  |
| Puntaje máximo $\sum p$ ó $\sum gp$ |                                                    | 57 | 13                    | 106 | 16                    | 131 | 20                    | 163 | 28             | 228 |
| Valor económico $y_i$               |                                                    |    | 0,46                  |     | 0,57                  |     | 0,71                  |     | 1              |     |

p: puntaje de 0 a 4 (escala de valores según VDI 2225).  
0= no satisface, 1= aceptable a las justas, 2= suficiente, 3= bien, 4= muy bien (ideal).  
g: es el peso ponderado y se da en función de la importancia de los criterios de evaluación.

A continuación, en la Tabla 3.10, se muestra un cuadro comparativo de los valores  $x_i$  y  $y_i$  para cada solución. De acuerdo con el procedimiento y consideraciones seguidas, el concepto de solución preliminar 3 califica como buena solución de acuerdo con el balance técnico-económico de la Tabla 3.10 y la Figura 3.19.

Tabla 3.10 Valor técnico-económico

| Soluciones                  | Valor técnico $x_i$ | Valor económico $y_i$ |
|-----------------------------|---------------------|-----------------------|
| Solución preliminar 1 (SP1) | 0,60                | 0,46                  |
| Solución preliminar 2 (SP2) | 0,65                | 0,57                  |
| Solución preliminar 3 (SP3) | 0,70                | 0,71                  |

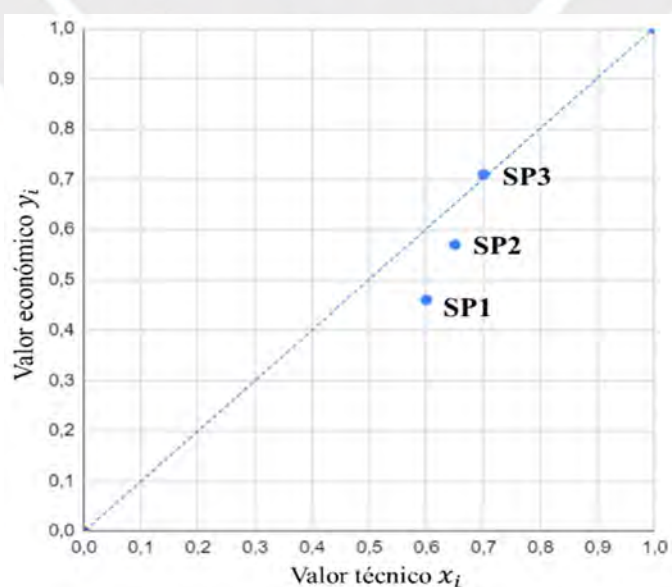


Fig. 3.19. Diagrama de evaluación según la norma VDI 2225.



### 3.3 Detalle del concepto preliminar optimo

En la Figura 3.20 se presenta la síntesis estructural del mecanismo seleccionado, que cumple con los siguientes criterios:

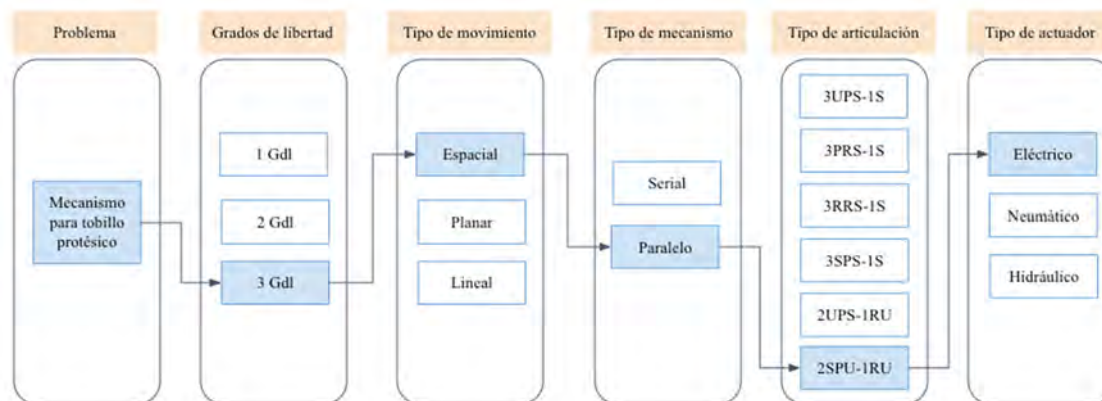


Fig. 3.20 Síntesis estructural de la topología del mecanismo paralelo.

- Grados de libertad: tres grados de libertad según los objetivos de la investigación.
- Tipo de movimiento: se trata de un movimiento espacial que permite realizar los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción.
- Tipo de mecanismo: se elige un mecanismo de tipo paralelo según los objetivos de la investigación.
- Tipo de juntas o pares cinemáticos: se utilizarán juntas esféricas, prismáticas, universales y revolutas.
- Tipo de actuadores: se emplearán actuadores eléctricos tipo rotatorio y lineal para controlar el movimiento del mecanismo.

La creación de un mecanismo paralelo implica considerar varios elementos clave como:

- i) Plataformas que conforman el mecanismo paralelo; la plataforma fija o también llamada la base fija y la plataforma móvil o también llamado efector final.
- ii) Fuente de energía utilizada para el accionamiento del movimiento del mecanismo paralelo.
- iii) Las juntas o pares cinemáticos que son elementos que conectan las plataformas con los actuadores.

En el mecanismo paralelo 2SPU-1RU que se encuentra en la Figura 3.21, las juntas se

denotan comúnmente utilizando un sistema de notación específico. En esta investigación se denota las coordenadas de la plataforma fija con puntos  $A_1, A_2, A_3$  y las coordenadas de la plataforma móvil con los puntos  $B_1, B_2, B_3$ .

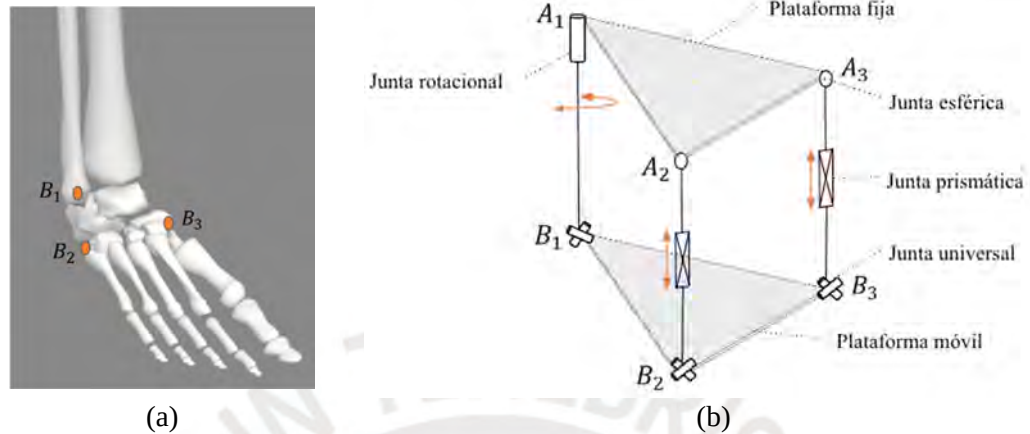


Fig. 3.21 Mecanismo paralelo 2SPU-1RU con aplicabilidad directa al tobillo humano, (a) tobillo humano, (b) diseño del mecanismo paralelo.

Es importante señalar que el mecanismo 2SPU-1RU seleccionado, es identificado como asimétrico, porque no satisface las siguientes condiciones:

- i) El tipo y número de uniones en todas las cadenas cinemáticas son iguales,
- ii) El número y localización de actuadores en las cadenas cinemáticas son los mismos.

A continuación, se detalla cada uno de los elementos que conforman el mecanismo paralelo.

#### a) Cadenas cinemáticas

El mecanismo paralelo se compone de tres cadenas cinemáticas: dos de ellas son idénticas y la tercera es diferente. Las dos cadenas idénticas están conectadas mediante juntas o pares cinemáticos ubicados en los puntos  $A_2, A_3, B_2, B_3$ . Las juntas esféricas se encuentran en los puntos  $A_2, A_3$ , mientras que las juntas universales se encuentran en los puntos  $B_2, B_3$ . Entre estas dos juntas se colocan las juntas prismáticas. Además, hay una cadena cinemática diferente que consta de un actuador de rotación ubicado en  $A_1$  y una junta universal ubicado en  $B_1$ .

## **b) Plataformas**

Las plataformas desempeñan una función importante en la cadena cinemática del mecanismo paralelo del tobillo protésico. La plataforma móvil es responsable de transmitir los diversos movimientos del tobillo humano. Por otro lado, el mecanismo también cuenta con una plataforma fija o también llamado base fija responsable en mantenerse en una posición determinada sin movimiento.

En el marco de esta investigación, se ha optado por utilizar un eslabón del tipo ternario tantos en la plataforma fija como en la plataforma móvil. Esta elección se basa en la necesidad de lograr estabilidad en el movimiento del mecanismo y en la cantidad mínima requerida de acoplamientos en las cadenas cinemáticas cerradas necesarias para los tres movimientos de rotación.

## **c) Fuente de energía para accionar el mecanismo paralelo**

Es necesario contar con una fuente de energía adecuada para accionar el mecanismo paralelo. Existen diferentes opciones de fuentes de energía disponibles como neumática, hidráulica y eléctrica. En este caso, se ha decidido utilizar una fuente de energía eléctrica debido a sus ventajas en términos de precisión, confiabilidad, facilidad de control y baja emisión del ruido.

### **3.3.1 Diseño eléctrico-electrónico**

El mecanismo propuesto conlleva la selección de componentes electrónicos necesarios para la adquisición de datos y el movimiento de los actuadores correspondientes para generar los movimientos del mecanismo paralelo.

#### Selección de componentes:

A continuación, se realizará la selección de componentes electrónicos acorde a las necesidades a cumplir.

#### **Sensor inercial - IMU**

Es requisito monitorear la velocidad angular y las aceleraciones lineales y angulares del mecanismo paralelo. Por ende, se requiere un sensor inercial o IMU que realice esta tarea. A continuación, se presenta la Tabla 3.11 de comparación de los sensores inerciales. De los sensores mostrados en la Tabla 3.11, el sensor a utilizar es el módulo MPU6050. Esto

debido a que cumple con los requisitos de voltaje, por su bajo precio y también porque no se requiere de un magnetómetro para esta investigación.

Tabla 3.11 Comparativa de sensores inerciales.

| Especificaciones | Requisitos    | Módulo MPU9250 <sup>32</sup>                                                      | Módulo MPU6050 <sup>33</sup>                                                       | Módulo GY-91 MPU9250 + BMP280 <sup>34</sup>                                         |
|------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                  |               |  |  |  |
| Voltaje          | 3.3 VDC       | 3.3V a 5V                                                                         | 3.3V a 5V                                                                          | 3.3V a 5V                                                                           |
| Acelerómetro     | 2g a 16g      | ±2g, ±4g, ±8g, ±16g                                                               | 2g, 4g, 8g, 16g                                                                    | 2g, 4g, 8g, 16g                                                                     |
| Giroscopio       | 250 a 2000°/s | ±250, ±500, ±1000, ±2000°/s                                                       | 250, 500, 1000, 2000°/s                                                            | 250, 500, 1000, 2000°/s                                                             |
| Magnetómetro     | -             | ±4800μT                                                                           | -                                                                                  | ±4800μT                                                                             |
| Interfaz         | I2C           | I2C y SPI                                                                         | I2C                                                                                | I2C y SPI                                                                           |
| Precio           | <S/ 25.00     | S/ 40.00                                                                          | S/ 18.00                                                                           | S/ 50.00                                                                            |

### Motor de pasos y driver

Asimismo, se requiere de un motor Stepper (motor de pasos) que responda a las solicitudes de carga, y que sea de tamaño reducido como los motores de la Figura 3.22. El motor seleccionado, mostrado en la Figura 3.23, es el Motor Paso a Paso 28BYJ-48, el cual requiere el uso del driver ULN2003.

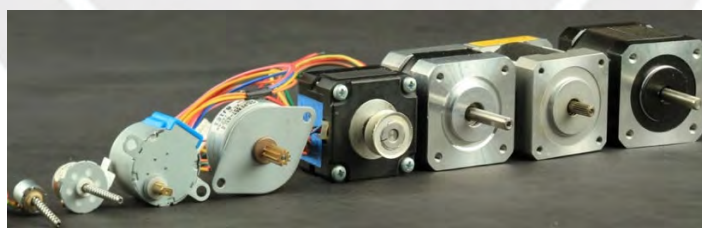


Fig. 3.22 Gama de motores de pasos<sup>35</sup>.

32 Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/sensores-posicion-inerciales-gps/214-modulo-mpu9250-acelerometro-giroscopio-magnetometro-i2c.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

33 Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/sensores-posicion-inerciales-gps/33-modulo-mpu6050-acelerometro-giroscopio-i2c.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

34 Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/sensores-posicion-inerciales-gps/356-modulo-gy-91-mpu9250-bmp280-acelerometro-giroscopio-magnetometro-altimetro-i2c.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

35 Tomado de: <https://learn.adafruit.com/all-about-stepper-motors/types-of-steppers> Fecha de revisión: 24-05-2020.

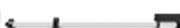
Fig. 3.23 Motor de pasos y driver<sup>36</sup>.

### Actuadores lineales

Se requiere seleccionar actuadores lineales con el fin de generar el movimiento del efector final del mecanismo paralelo. Para ello, se necesita de un micro actuador lineal que pueda ser alimentado con 12V DC y que tenga realimentación. A continuación, se presenta la Tabla 3.12 que es una comparación de actuadores lineales.

El actuador Actuonix P16 será usado ya que cumple con los requerimientos de voltaje, corriente y trazo necesarios para la prótesis. Asimismo, el control de estos actuadores se debe llevar a cabo mediante un driver. Por lo tanto, se usará el driver Puente H BTS7960 para los actuadores lineales (Figura 3.24). Este drive proporciona hasta 43A con una tensión de 6 a 27 V. Funcionan con lógica de 3.3V a 5V, permitiendo control PWM hasta 25kHz, incorpora una protección contra cortocircuito.

Tabla 3.12 Comparativa de actuadores lineales.

| Especificaciones     | Requisitos | Actuador Lineal Actuonix P16 <sup>37</sup> .                                        | Actuador Lineal Mini Actuonix T16 <sup>38</sup>                                      | Actuador Lineal Actuonix L16 <sup>39</sup>                                            |
|----------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|                      |            |  |  |  |
| Voltaje              | 12 VDC     | 12 VDC                                                                              | 12 VDC                                                                               | 12 VDC                                                                                |
| Relación transmisión | 256:1      | 256:1                                                                               | 256:1                                                                                | 35:1                                                                                  |
| Trazo                | 50 mm      | 50 mm                                                                               | 300 mm                                                                               | 140 mm                                                                                |
| Velocidad máxima     | 4.8 mm/s   | 4.8 mm/s                                                                            | 4.8 mm/s                                                                             | 32 mm/s                                                                               |
| Corriente            | 1 A        | 1 A                                                                                 | 1 A                                                                                  | 0.65 A                                                                                |
| Realimentación       | Sí         | Sí                                                                                  | Sí                                                                                   | Sí                                                                                    |

36 Tomado de: <https://solectroshop.com/es/motores-y-accesorios-mecanicos/424-12v-motor-paso-a-paso-28byj-48-uln2003-conductor.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

37 Tomado de: <https://www.robotshop.com/us/es/actuador-lineal-actuonix-p16-50-mm-2561-12-v-con-potenciometro-con-feedback.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

38 Tomado de: <https://www.robotshop.com/us/es/actuador-lineal-mini-actuonix-t16-300-mm-2561-12-v-con-retroalimentacion-potenciometro.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

39 Tomado de: <https://www.actuonix.com/LAC-Board-p/lac.htm> Fecha de revisión: 24-05-2020.



Fig. 3.24 Driver Puente H BTS7960<sup>40</sup>

### Microcontrolador

Por último, se requiere de un microcontrolador que facilite el procesamiento, adquisición y envío de datos de los sensores y actuadores ya descritos. La Tabla 3.13 muestra una comparativa de estos componentes. El microcontrolador que cumple los requisitos de voltaje (5V DC), de entradas analógicas y GPIO es el ESP devkit v1. Este componente posee una ventaja única con respecto a los otros microcontroladores al ser mucho más pequeño y poseer tanto la comunicación Bluetooth como Wi-Fi.

Tabla 3.13 Comparativa de microcontroladores.

| Especificaciones     | Requisitos | Arduino Uno R3 <sup>41</sup>                                                        | Raspberry Pi 3B <sup>42</sup>                                                        | ESP32 devkit v1 <sup>43</sup>                                                         |
|----------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|                      |            |  |  |  |
| Voltaje de operación | 5 VDC      | 5 VDC                                                                               | 5 VDC                                                                                | 5 VDC                                                                                 |
| Procesador           | -          | ATmega328P                                                                          | Quad-core ARM Cortex-A53                                                             | Dual core Tensilica Xtensa LX6                                                        |
| Entradas analógicas  | 6 ADC      | 6 ADC 10-bit                                                                        | 0 ADC                                                                                | 15 ADC 12-bit                                                                         |
| Pines I/O            | 14 GPIO    | 14 (6 PWM)                                                                          | 26 (4 PWM)                                                                           | 34 (16 PWM)                                                                           |
| Comunicación         | Wifi       | -                                                                                   | Wi-Fi y Bluetooth                                                                    | Wi-Fi y Bluetooth                                                                     |
| Precio               | < S/ 75.00 | S/ 40.00                                                                            | S/ 450.00                                                                            | S/ 60.00                                                                              |

### Cálculos de demanda energética

En la Tabla 3.14 se muestra el cálculo de la demanda energética del sistema para poder seleccionar posteriormente las baterías necesarias para el energizar el sistema, mientras que en la Tabla 3.15 se muestran dos opciones de baterías.

<sup>40</sup> Tomado de: <https://www.luisllamas.es/controla-motores-de-gran-potencia-con-arduino-y-bts7960/> Fecha de revisión: 24-05-2020.

<sup>41</sup> Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/ardusystem-tarjetas/8-uno-r3.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

<sup>42</sup> Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/raspberry-pi/255-raspberry-pi-3-b.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

<sup>43</sup> Tomado de: <https://naylampmechatronics.com/espressif-esp/384-nodemcu-32-30-pin-esp32-wifi.html> Fecha de revisión: 24-05-2020.

Tabla 3.14 Cálculo de demanda energética.

| Componente              | Voltaje (V) | Corriente (mA) | Potencia (mW) |
|-------------------------|-------------|----------------|---------------|
| Esp32 devkit v1         | 5           | 0.005          | 0.025         |
| Actuador P16            | 12          | 1000           | 12000         |
| Motor de pasos 28byj-48 | 12          | 400            | 4800          |
| Total (mW)              |             |                | 16800.025     |

Tabla 3.15 Capacidad de baterías seleccionadas.

| Componente      | Capacidad (mAh) | Voltaje de salida (V) |
|-----------------|-----------------|-----------------------|
| Power Bank      | 4800            | 5                     |
| Batería de LiPo | 2700            | 12                    |

### Arquitectura del mecanismo paralelo 2SPU-1RU

La Figura 3.25 ilustra detalladamente la arquitectura del diseño mecánico-electrónico implementado en el prototipo del mecanismo paralelo 2SPU-1UR. El núcleo de control del sistema es un microcontrolador ESP32 modelo devkit v1, encargado de procesar la información adquirida por el sensor IMU y las interfaces de entrada, así como de emitir comandos hacia los actuadores e interfaces de salida.

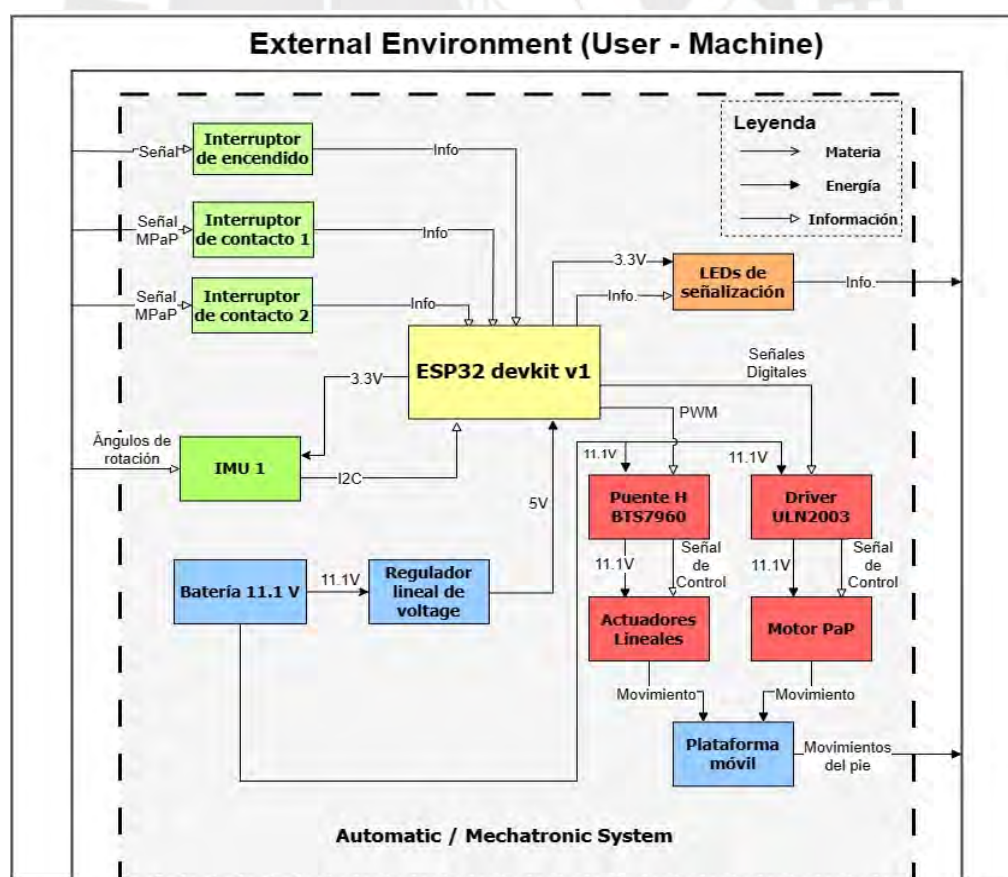


Fig. 3.25 Arquitectura del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

El conjunto sensorial integra un módulo inercial IMU MPU6050, que combina un acelerómetro triaxial con un giroscopio de igual número de ejes. Esta configuración permite calcular los ángulos de rotación en los tres ejes cartesianos de la plataforma móvil del prototipo. La comunicación entre el microcontrolador y el sensor se realiza mediante el protocolo I2C, y la alimentación del sensor, a 3.3V, es suministrada directamente por el ESP32.

En cuanto al sistema de actuación, este comprende actuadores lineales y un motor paso a paso, ambos gestionados por sus respectivos controladores de motor. El driver Puente H BTS7960, asignado a cada actuador lineal, recibe señales PWM del ESP32 y opera con una alimentación de 11.1V provista por la batería principal. Este controlador dirige y alimenta los actuadores lineales, responsables del movimiento de la plataforma móvil. Por otra parte, el driver ULN2003, asignado al motor paso a paso, procesa señales digitales del ESP32 y también se alimenta de la batería de 11.1V. Este último controla los movimientos rotacionales de la plataforma.

La interfaz de entrada incluye un interruptor ON/OFF, que regula la operatividad del mecanismo, y dos interruptores de contacto situados a ambos lados del motor paso a paso. Estos últimos son importantes para determinar la posición inicial del motor, dado que, en ausencia de un sistema de retroalimentación de posición, el ESP32 no puede determinar la orientación del motor de forma autónoma. Al inicio, el motor gira hasta activar uno de los interruptores, lo que le permite, tras girar un ángulo predefinido en sentido contrario, alcanzar su posición inicial.

Finalmente, el sistema de energía consta de una batería de 11.1V y un regulador de voltaje para obtener una salida de 5V necesaria para el sistema de control. La batería es la fuente primaria de alimentación para todo el mecanismo, y la plataforma móvil representa la sección donde se manifiestan los movimientos generados por los actuadores, emulando así la funcionalidad del mecanismo paralelo.

### 3.3.2 Diseño del mecanismo paralelo 2SPU-1RU

El diseño del mecanismo paralelo implicó la selección de los componentes, materiales y tecnologías adecuadas. Se utilizó una herramienta de modelado y simulación Autodesk Inventor Professional 2021 para evaluar y optimizar el diseño antes de la construcción. Las dimensiones del mecanismo paralelo son ancho 92 mm, profundidad 110 mm y alto 190 mm, como se muestra en la Figura 3.26.

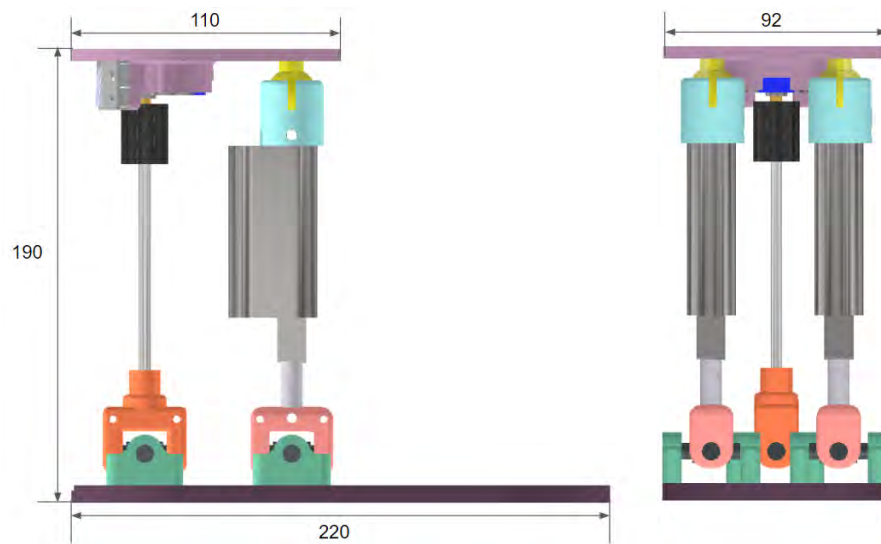


Fig. 3.26 Dimensiones generales del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

Además, la distancia entre los actuadores que se presenta en la Figura 3.27 se calculó con el objetivo que el mecanismo pueda alcanzar los rangos máximos de plantarflexión-dorsiflexión, eversion-inversion y abducción-aducción, que se presentan en la Tabla 3.16.

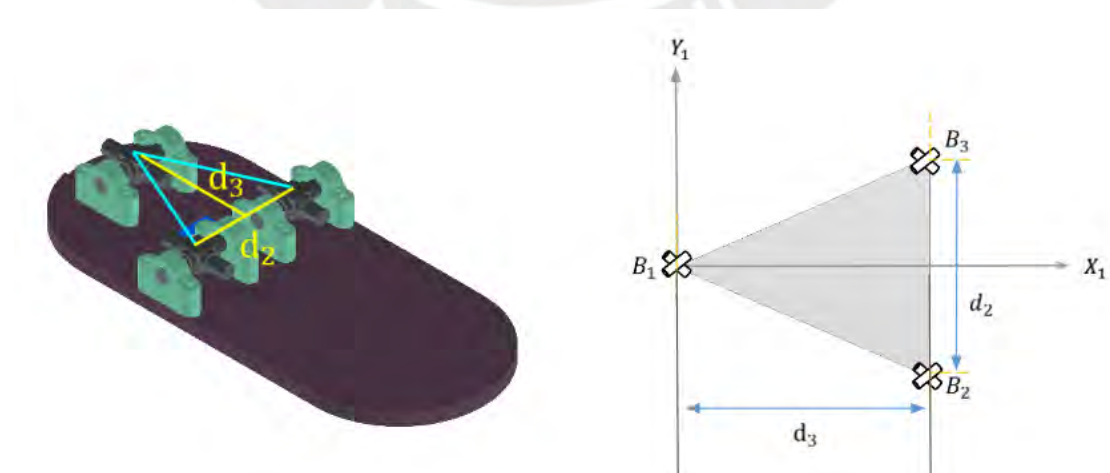


Fig. 3.27 Dimensiones de la distancia entre actuadores.

Tabla 3.16 Plano, movimientos y ángulos.

| Planos            | Movimientos    | Ángulos (°)        |
|-------------------|----------------|--------------------|
| Plano sagital     | Plantarflexión | $\theta_1 = -7.90$ |
|                   | Dorsiflexión   | $\theta_2 = 14.85$ |
| Plano frontal     | Eversión       | $\phi_1 = -0.68$   |
|                   | Inversión      | $\phi_2 = 7.35$    |
| Plano transversal | Abducción      | $\psi_1 = 8.70$    |
|                   | Aducción       | $\psi_2 = -5.61$   |

i. Análisis del movimiento rotacional de plantarflexión-dorsiflexión

Considerando que el actuador lineal parte de su posición inicial de 23 mm, y se extiende y se contrae 20 mm, se necesita como máximo 75 mm, entre la cruceta 1 y la cruceta 2 en el plano sagital, para que alcance el ángulo aproximado de  $15^\circ$  en plantarflexión-dorsiflexión.

ii. Análisis del movimiento rotacional de eversión-inversión

Considerando que el actuador lineal parte de su posición inicial de 23 mm, y se extiende y se contrae 10 mm, se necesita al como máximo 70 mm, entre la cruceta 2 y la cruceta 3 en el plano frontal, para que alcance el ángulo aproximado de  $8^\circ$  en eversión-inversión.

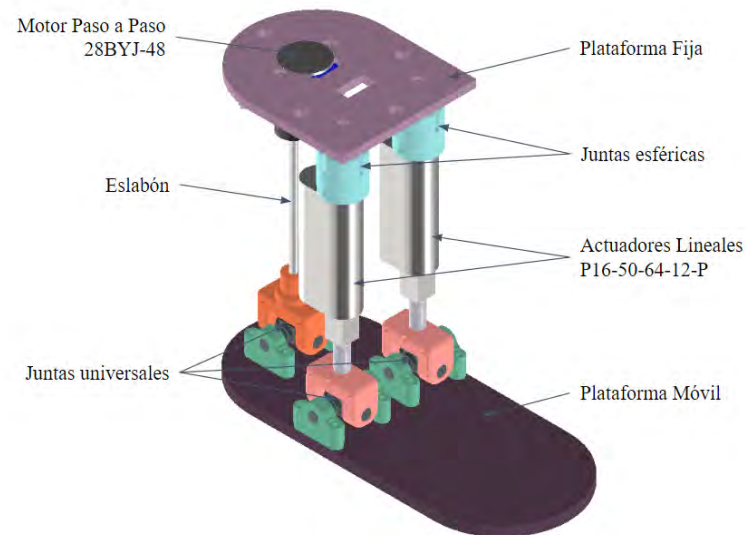
iii. Análisis del movimiento rotacional de abducción-aducción

En el movimiento rotacional, no interviene la distancia entre los actuadores, pero interviene en las dimensiones del diseño conceptual.

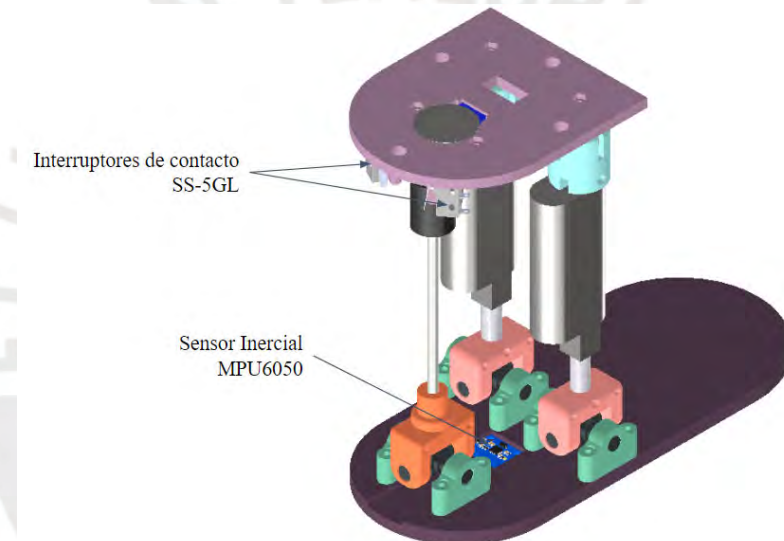
Por lo tanto, considerando otras dimensiones como el largo de las crucetas el ancho de los soportes de las crucetas, se determinó que las medidas del diseño son  $d_2 = 53,14$  mm,  $d_3 = 60$  mm. Lo cual cumple con el requerimiento de que  $d_2 < 75$ mm,  $d_3 < 70$ mm, presentado en la Figura 3.27.

En la Figura 3.28 se muestra el diseño CAD del mecanismo paralelo 2UPS-1RU y los elementos que lo conforman.





(a)



(b)

Fig. 3.28 Diseño CAD del mecanismo paralelo 2SPU-1RU: (a) elementos principales, (b) sensor e interruptor.

### a) Cadenas cinemáticas

El mecanismo paralelo 2SPU-1RU, está compuesto de tres cadenas cinemáticas:

Primera cadena cinemática tipo 1RU: compuesta por un motor paso a paso modelo 28BYJ-48, un eslabón rígido y una junta universal, como se muestra en la Figura 3.29a. El motor paso a paso se une al eslabón mediante un acople y el eslabón se une a la junta universal por medio de otro acople.

Segunda y tercera cadena cinemática tipo SPU: compuesta una junta esférica, una universal y un actuador lineal marca Actuonix modelo P16-50-64-12-P, como se muestra en la Figura 3.29b.

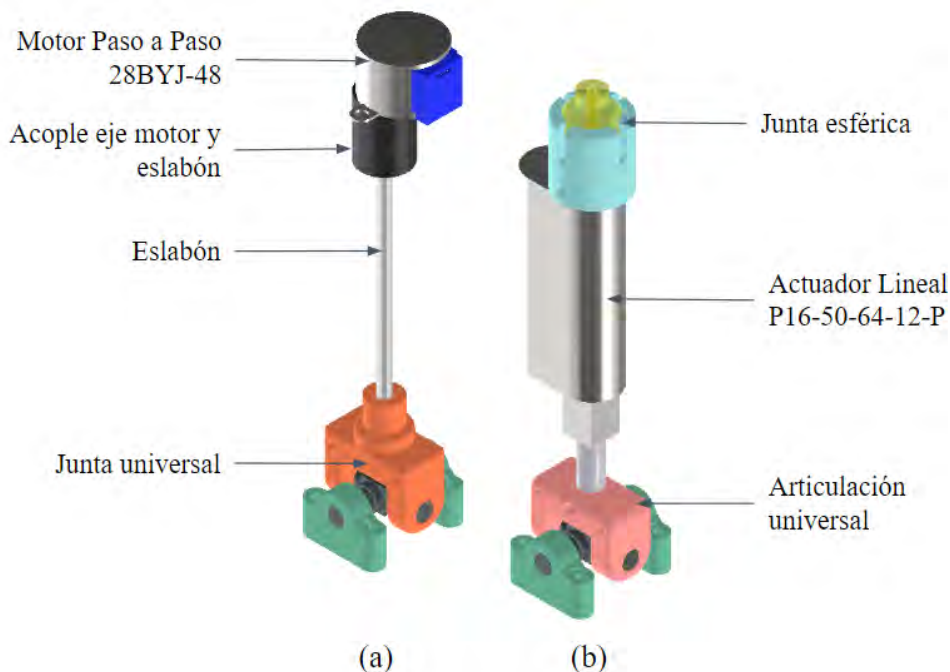


Fig. 3.29 Cadena cinemáticas: (a) primera cadena tipo 1RU, (b) segunda y tercera cadena tipo SPU.

### b) Plataformas

La plataforma móvil: es un elemento importante de la cadena cinemática encargada de transmitir los distintos movimientos del tobillo humano. En la plataforma móvil se acoplan las juntas universales, y sobre la plataforma móvil se coloca el sensor inercial IMU MPU6050, que permitirá conocer la posición y orientación, como se muestra en la Figura 3.30a.

La plataforma fija: es un elemento inmóvil donde se colocan dos juntas esféricas y un motor paso a paso 28BYJ-48. A ambos lados del motor paso a paso se han colocado interruptores de contacto para tener un límite del movimiento.

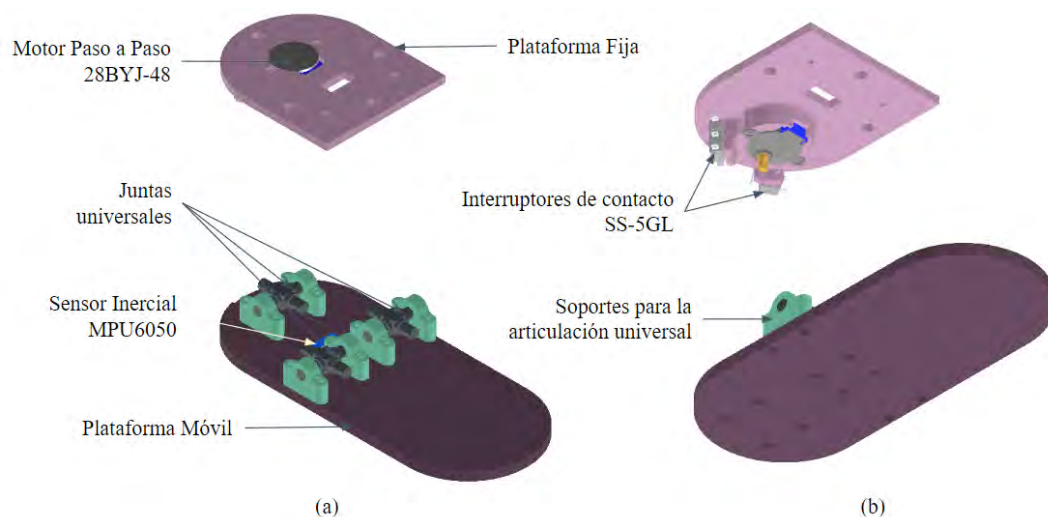


Fig. 3.30 Plataformas fija y móvil: (a) vista superior, (b) vista inferior.

### c) Sensores

La Unidad de Medición Inercial (IMU por sus siglas en inglés): modelo MPU6050 está ubicado en la zona central de la parte superior de la plataforma móvil del mecanismo. Su principal función medir los ángulos de rotación de la prótesis, para esto se utiliza los valores de los acelerómetros y giroscopios.

### d) Actuadores

Los actuadores lineales: modelo P16-50-64-12-P desarrollados por Actuonix y son parte de las cadenas cinemáticas ubicadas en la parte anterior del mecanismo. La principal función de los actuadores lineales es replicar los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión y abducción-aducción del tobillo.

El actuador rotatorio: El motor paso a paso modelo 28BYJ-48 forma parte de la otra cadena cinemática que está ubicada en la parte posterior del mecanismo. La principal función del motor paso a paso es replicar los movimientos de abducción-aducción. Este motor trabaja en conjunto con un driver modelo ULN2003.

## 3.4 Movimientos rotacionales máximos del mecanismo paralelo 2SPU-1RU en Autodesk Inventor Professional 2021.

Se utilizó el software Autodesk Inventor Professional 2021 para verificar que el mecanismo paralelo alcanza las rotaciones máximas de los movimientos del ciclo de marcha en plano sagital,

plano frontal y plano transversal detallados en la Tabla 3.16. En la Figura 3.31 se presenta los movimientos rotacionales requeridos en la articulación de tobillo.

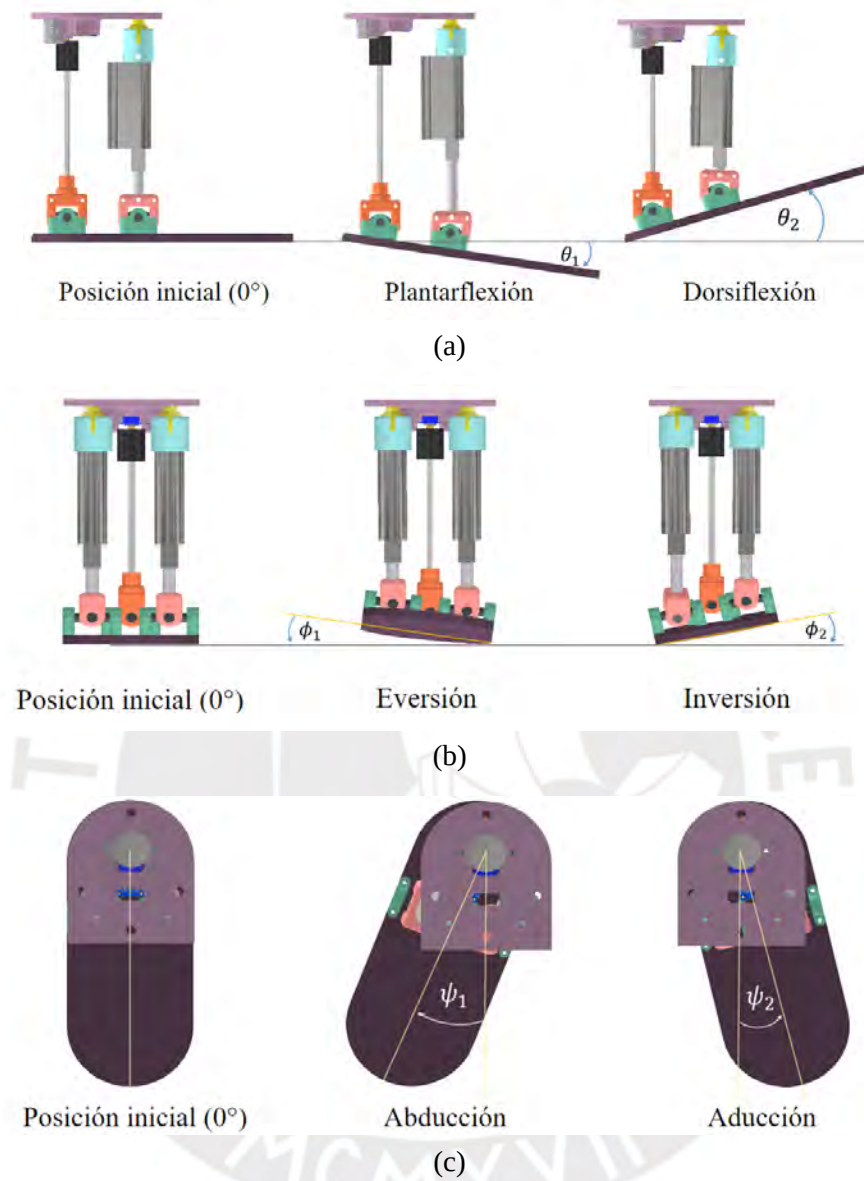


Fig. 3.31 Movimientos del mecanismo paralelo: (a) en plano sagital, (b) en plano frontal, (c) en el plano transversal.

## **CAPÍTULO 4**

### **MODELACIÓN CINEMÁTICA Y DINÁMICA INVERSA DEL MECANISMO PARALELO 2SPU-1RU**

El presente capítulo se centra en la modelación cinemática y dinámica inversa del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. En primer lugar, se abordará la modelación cinemática inversa, enfocándose en la descripción del movimiento del mecanismo sin considerar las fuerzas involucradas. Se presentará la nomenclatura, marco de referencia global y local, parámetros geométricos y angulares. Así mismo se detallan las ecuaciones y técnicas utilizadas para determinar las relaciones geométricas entre las juntas y las trayectorias. Finalmente, se abordará la modelación dinámica del mecanismo paralelo, centrándose en el análisis de las fuerzas y torques que afectan el comportamiento del mecanismo utilizando el principio de trabajo virtual.

#### **4.1 Modelación cinemática inversa del mecanismo 2SPU-1RU**

En la cinemática, se estudian las relaciones geométricas y cinemáticas de los componentes de un mecanismo y se busca determinar cómo se mueven los diferentes elementos del sistema sin tener en cuenta las fuerzas o momentos que los afectan. Es decir, la cinemática se enfoca en el análisis del movimiento, las velocidades y las aceleraciones del mecanismo. Por lo tanto, en esta sección de cinemática, se describirán y explicarán los elementos necesarios para la modelación cinemática. Entre ellos se encuentran: la nomenclatura, el marco de referencia global y local, los parámetros geométricos, y



angulares. En esta sección se aplica el método geométrico para plantear el modelo de la cinemática inversa, con la finalidad de conocer la posición de los actuadores dada la orientación de la plataforma móvil.

#### 4.1.1 Nomenclatura, marco de referencia global y de referencia local

A continuación, se explica la nomenclatura, el marco de referencia global, el marco de referencia local y los parámetros geométricos, para el mecanismo 2SPU-1RU.

##### a) Nomenclatura del mecanismo 2SPU-1RU

El nombre “2SPU-1RU” se refiere a la configuración y tipos de juntas presentes en el mecanismo. Se detalla lo que significa cada configuración con una Figura 4.1.

2SPU: Significa que el mecanismo tiene dos cadenas cinemáticas tipo SPU (Esférica-Prismática-Universal). La junta (S) permite un movimiento esférico en un punto específico, la junta (P) un desplazamiento lineal y la junta (U) permite un movimiento rotacional de dos grados de libertad alrededor de un punto fijo.

1RU: Indica que el mecanismo tiene una cadena cinemática tipo RU (Revoluta-Universal). La junta (R) permite una rotación alrededor de un eje, y la junta (U) permite un movimiento rotacional de dos grados de libertad alrededor de un punto fijo.

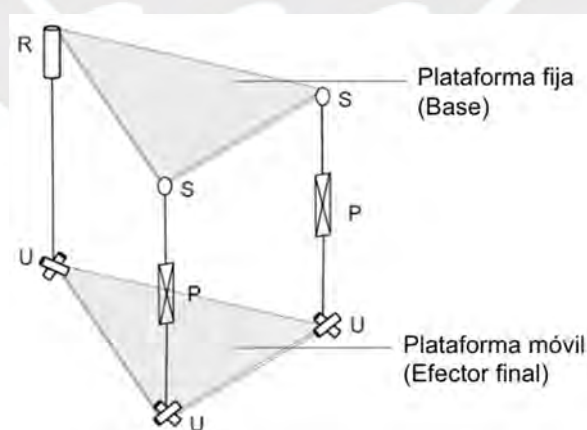


Fig. 4.1 Nomenclatura del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

### b) Marco de referencia global y local

El marco de referencia global  $O(X_o, Y_o, Z_o)$  que se muestra en la Figura 4.2a es un sistema de coordenadas tridimensionales que se mantiene fijo y sirve como marco de referencia absoluto para describir la posición y orientación del mecanismo paralelo en su entorno. Se encuentra ubicado en el centro geométrico de la plataforma fija o también llamada base fija del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

- El origen está ubicado en el centro geométrico de la plataforma fija.
- El eje  $X_o$  en dirección anteroposterior (del talón hacia la punta del pie). Es la dirección principal de avance al caminar.
- El eje  $Y_o$  en dirección medio lateral, es decir, perpendicular al plano sagital del cuerpo y horizontal respecto del suelo, de manera que apunta hacia el lado exterior del pie.
- El eje  $Z_o$  en dirección vertical, hacia arriba. Este eje se alinearán principalmente con el peso del cuerpo y la fuerza reactiva del suelo.

El marco de referencia local  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ , que se muestra en la Figura 4.2b, se encuentra unido rígidamente a la plataforma móvil (efector final) en el punto  $B_1$  y se utiliza para describir la rotación y posición de la misma respecto al marco de referencia global  $O(X_o, Y_o, Z_o)$ .

Los marcos de referencia locales  $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$  y  $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , que se muestra en la Figura 4.2c, se encuentran unidos rígidamente a la cadena cinemática 1 en el punto  $A_1$ , a la cadena cinemática 2 en el punto  $A_2$ , y a la cadena cinemática 3 en el punto  $A_3$ , respectivamente. Se utilizan para describir la rotación y posición de los cuerpos que pertenecen a las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3 respecto al marco de referencia global  $O(X_o, Y_o, Z_o)$ , así como describir los desplazamientos del actuador rotatorio 1 y de los actuadores lineales 2 y 3.

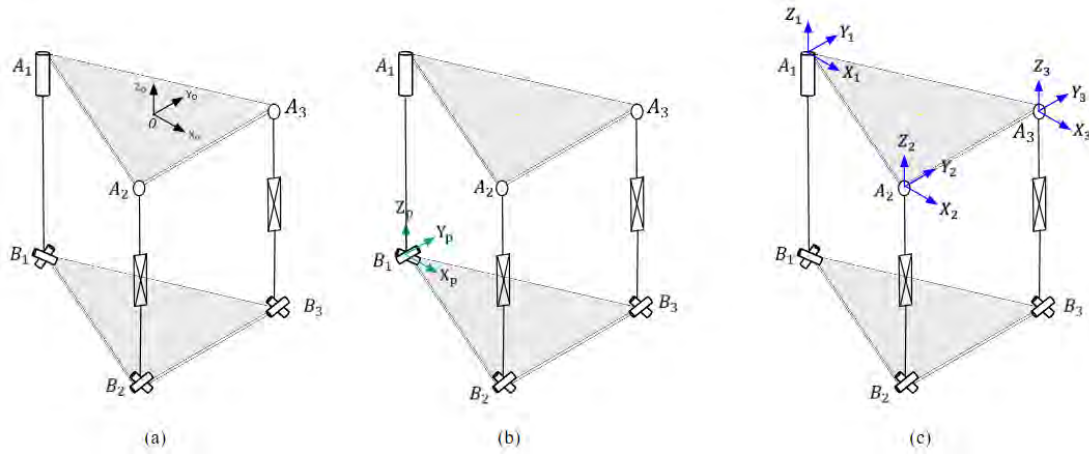


Fig. 4.2 Marco de referencia del mecanismo paralelo 2SPU-1RU: (a) plataforma fija  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ , (b) plataforma móvil  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ , (c) cadenas cinemáticas  $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$  y  $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$ .

#### 4.1.2 Parámetros geométricos

Los parámetros geométricos son las características y medidas que definen la estructura y la cinemática del mecanismo 2SPU-1RU. Estos parámetros determinan cómo se mueven y se posicionan las partes móviles del mecanismo. A continuación, se describen los parámetros geométricos utilizados en el mecanismo:

##### a) Distancias entre las juntas

Las distancias entre las juntas que se muestran en la Figura 4.3 y en la Tabla 4.1 son las medidas lineales que indican la separación o distancia entre diferentes juntas de conexión del mecanismo paralelo. Estas distancias determinan la configuración geométrica del mecanismo y el rango de movimiento.

Las plataformas  $A_1A_2A_3$  y  $B_1B_2B_3$  son elementos rígidos y con igual geometría de un triángulo isósceles. Los triángulos  $\Delta A_1A_2A_3$  y  $\Delta B_1B_2B_3$  son idénticos y se encuentran dispuestos en paralelos entre sí. Las distancias de los lados  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ , o  $B_1B_2$ ,  $B_1B_3$ , son respectivamente iguales entre sí.

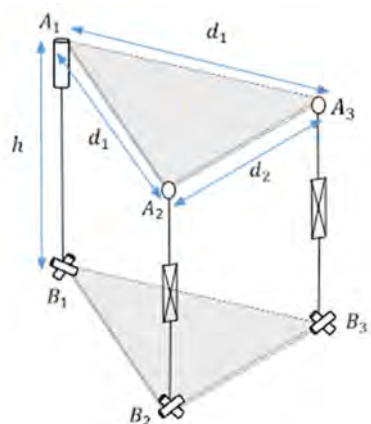


Fig. 4.3 Distancias de los elementos que conforman el mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

Tabla 4.1 Relación entre la simbología y la descripción del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

| Distancias          | Simbología | Descripción                                 |
|---------------------|------------|---------------------------------------------|
| $A_1A_2$ o $B_1B_2$ | $d_1$      | Lado 1 de la plataforma fija/móvil.         |
| $A_1A_3$ o $B_1B_3$ | $d_1$      | Lado 2 de la plataforma fija/móvil.         |
| $A_2A_3$ o $B_2B_3$ | $d_2$      | Lado 3 de la plataforma fija/móvil.         |
| $A_1B_1$            | $h$        | Altura entre la plataforma fija y la móvil. |

### b) Coordenadas de las juntas

Las coordenadas de las juntas en el mecanismo paralelo representan las posiciones espaciales de los pares cinemáticos de la plataforma fija y la plataforma móvil. Estas coordenadas están definidas dentro de un marco de referencia global  $O(X_o, Y_o, Z_o)$  y se utilizan para describir la posición y la orientación relativa de cada junta en el espacio. En la Figura 4.4 y en la Tabla 4.2 se detallan las coordenadas de los puntos  $O$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , que conforman el mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

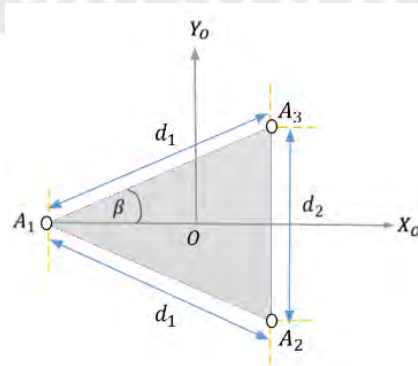


Fig. 4.4 Coordenadas cartesianas de los puntos de las juntas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , que conforman el mecanismo paralelo 2SPU-1RU con respecto al marco global  $O(X_o, Y_o, Z_o)$ .

Tabla 4.2 Coordenadas Cartesianas.

| Puntos | Descripción                                            | Coordenadas Cartesianas                              |
|--------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $O$    | Coordenada fija del marco de referencia global.        | $O(0,0,0)$                                           |
| $A_1$  | Coordenadas de la posición de la junta rotacional (R). | $A_1(-\frac{2}{3}d_1 \cos \beta, 0,0)$               |
| $A_2$  | Coordenadas de la posición de la junta esférica (S).   | $A_2(\frac{d_1}{3} \cos \beta, -2d_1 \sin \beta, 0)$ |
| $A_3$  | Coordenadas de la posición de la junta esférica (S).   | $A_3(\frac{d_1}{3} \cos \beta, 2d_1 \sin \beta, 0)$  |

#### 4.1.3 Parámetros angulares de la plataforma móvil

En el mecanismo paralelo, la orientación de la plataforma móvil se define utilizando la secuencia de ángulos de Bryant-Cardan ZXY. Este método comienza con una rotación alrededor del eje  $Z$  por un ángulo  $\psi$ , seguida por una rotación alrededor del eje  $X$  por un ángulo  $\phi$  y culmina con una rotación alrededor del eje  $Y$  por un del ángulo  $\theta$ , tal como se detalla en la sección 2.5.2 del capítulo 2 (Ecuación 2.14). La elección de la secuencia ZXY está respaldada por recomendaciones de la Sociedad Internacional de Biomecánica, que propone esta secuencia de ZXY específica para calcular las rotaciones del tobillo. En términos anatómicos, esta secuencia corresponde a los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, inversión-eversión y aducción-abducción.

De la Ecuación 2.14 se deduce la velocidad angular y la aceleración angular presentados en las Ecuaciones 4.1 y 4.2 respectivamente.

##### Deducción de la velocidad angular $\omega$

El vector velocidad angular depende del sistema coordenado al cual se proyecten las magnitudes de  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ , si se proyecta en el marco de referencia global  $O(X_o Y_o Z_o)$  se obtiene la velocidad  $\omega_p$  mediante la Ecuación 4.1.

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \\ 1 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



#### Deducción de la aceleración angular $\alpha$

La aceleración angular de la plataforma móvil se obtiene derivando la velocidad angular respecto al tiempo, como se muestra en la Ecuación 4.2.

$$\alpha_p = \frac{d\omega_p}{dt} = \dot{\omega}_p$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{px} \\ \dot{\omega}_{py} \\ \dot{\omega}_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \cos \psi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi - \ddot{\phi} \cos \theta \sin \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \\ \ddot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi + \ddot{\phi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta \sin \psi - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \\ \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

#### **4.1.4 Análisis de posición, velocidad y aceleración**

Se resuelve la cinemática inversa del mecanismo paralelo para realizar el análisis de posición de la plataforma móvil. Para ello, se parte de la orientación de la plataforma móvil en el tiempo. Con los ángulos de rotación como datos de entrada, se deriva con respecto al tiempo para obtener la velocidad angular de la plataforma móvil. Luego al derivar la velocidad angular con respecto al tiempo, se obtiene la aceleración angular de la plataforma móvil. Finalmente, con los valores de orientación, velocidad angular y aceleración angular, se puede determinar la rotación, velocidad y aceleración angular del actuador rotatorio, así como los desplazamientos, velocidades y aceleraciones lineales de los actuadores lineales.

#### **Primera cadena cinemática 1RU**

En este apartado se presenta el análisis de posiciones de la primera cadena cinemática 1RU en el mecanismo paralelo. Luego el análisis de la velocidad lineal y angular de la primera cadena cinemática 1RU. Finalmente, el análisis de aceleración angular de la primera cadena cinemática 1RU.

##### a) Análisis de posiciones

Los vectores posición de la cadena cinemática 1RU, se define con respecto al marco de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$  según la Figura 4.5 y Tabla 4.3.

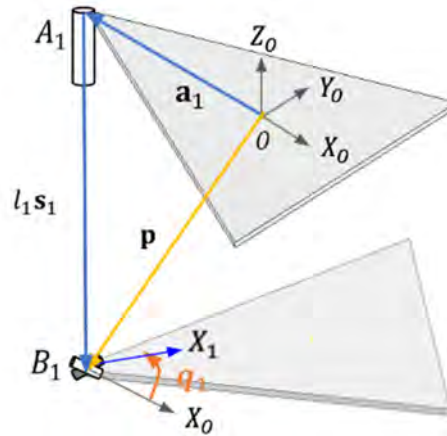


Fig. 4.5 Vectores de la cadena cinemática 1RU del mecanismo paralelo.

Tabla 4.3 Parámetros geométricos de la Figura 4.5.

| Simbología         | Descripción                                                                                         |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{a}_1$     | Vector que representa la posición del actuador rotatorio $A_1$ respecto al origen $O$ .             |
| $l_1 \mathbf{s}_1$ | Vector que representa la posición del actuador rotatorio respecto de $A_1$ .                        |
| $\mathbf{p}$       | Vector que representa la posición de $P$ ubicado en la junta universal $U$ respecto al origen $O$ . |
| $q_1$              | Ángulo de rotación del eslabón de la primera cadena cinemática $\psi$ (1RU)                         |

La Ecuación vectorial 4.3 se denota con los vectores de posición ilustrados en la Figura 4.5. Es importante destacar que los vectores  $\mathbf{a}_1$ ,  $l_1 \mathbf{s}_1$  y  $\mathbf{p}$  se mantienen constantes, lo que implica que sus componentes no cambian con respecto al tiempo o cualquier otra variable.

$$\mathbf{a}_1 + l_1 \mathbf{s}_1 = \mathbf{p} \quad (4.3)$$

$q_1$  es el ángulo de rotación del tobillo, es decir la rotación en el eje  $Z$  global de la plataforma móvil.

#### b) Análisis de velocidad lineal y angular de la primera cadena cinemática 1RU

A continuación, se realiza el análisis de la velocidad lineal y angular de la cadena cinemática 1RU. Es importante observar que todos los cuerpos de cada cadena cinemática  $i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) se mueven con la misma velocidad angular.

El actuador rotatorio pertenece a la cadena cinemática 1RU, y está ubicado en el punto  $A_1$ . Esto implica que el vector que conecta  $A_1$  con  $B_1$  mantiene una magnitud y dirección

constante. Por lo que se establece que la derivada del vector posición  $\mathbf{l}_1 = l_1 \mathbf{s}_1$  es igual a cero ( $\dot{\mathbf{l}}_1 = 0$ ).

Además, debido a la conexión con la junta universal (U) de dos grados de libertad ubicada en  $B_1$ , se establece que la rotación en el eje  $Z_1$  del actuador rotatorio coincide con la rotación de la plataforma móvil respecto al eje  $Z_0$ . Es decir, corresponde a la primera rotación de las tres rotaciones sucesivas intrínsecas que definen la matriz de rotación de la plataforma móvil mediante la Ecuación 2.8 De este modo, la velocidad angular del actuador  $\omega_1$  es igual a la derivada del ángulo de rotación  $\psi$  respecto al eje  $Z_0$  ( $\omega_1 = \dot{\psi}$ ), como se muestra en la Figura 4.6.

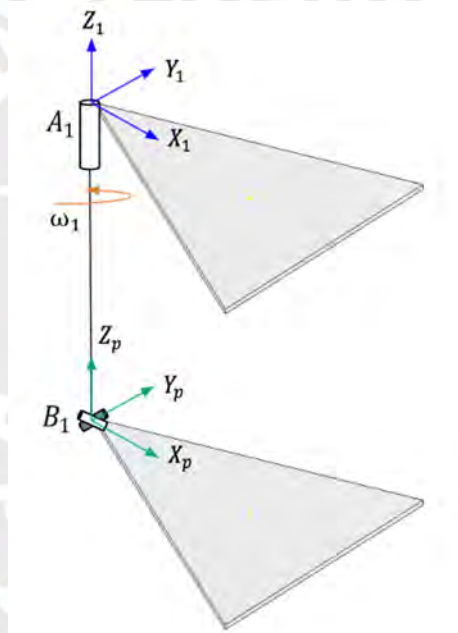


Fig. 4.6 Vectores de la cadena cinemática 1RU del mecanismo paralelo.

### c) Análisis de aceleración angular de la primera cadena cinemática 1RU

Derivando la Ecuación que relaciona la velocidad angular de la cadena cinemática 1 con la velocidad de la plataforma móvil proyectado sobre el eje  $Z_1$  ( $\omega_1 = \dot{\psi}$ ), se obtiene  $\alpha_1 = \frac{d(\omega_1)}{dt} = \dot{\omega}_1 = \ddot{\psi}$ . Es decir, la aceleración angular de la cadena cinemática 1 es igual a la aceleración angular a la segunda derivada del ángulo de rotación  $\psi$  respecto al eje  $Z_0$ .

### Segunda cadena cinemática SPU

En este apartado se presenta el análisis de las posiciones de la segunda cadena cinemática en el mecanismo paralelo, el análisis de la velocidad lineal y velocidad angular de la

cadena cinemática SPU, el análisis de la velocidad lineal del cilindro y el pistón del actuador lineal, el análisis de la aceleración lineal y angular de la segunda cadena cinemática SPU. Finalmente se detalla la aceleración lineal del cilindro y el pistón del actuador lineal.

a) Análisis de posiciones

Los vectores posición de la cadena cinemática SPU, se define respecto al marco de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$  según la Figura 4.7 y Tabla 4.4.

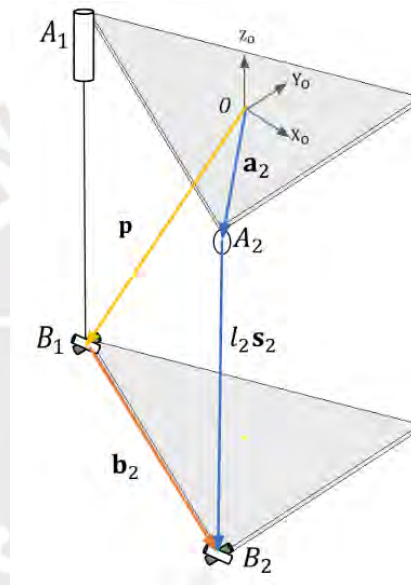


Fig. 4.7 Vectores de la cadena cinemática SPU del mecanismo paralelo.

Tabla 4.4 Parámetros geométricos de la Figura 4.7.

| Simbología         | Descripción                                                                            |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{a}_2$     | Vector que representa la posición de la junta esférica $A_2$ respecto al origen $O$ .  |
| $l_2 \mathbf{s}_2$ | Vector que representa la posición de la junta universal $B_2$ respecto de $A_2$ .      |
| $\mathbf{p}$       | Vector que representa la posición de la junta universal $B_1$ respecto al origen $O$ . |
| $\mathbf{b}_2$     | Vector que representa la posición de la junta universal $B_2$ respecto de $B_1$ .      |

De la Figura 4.8, se obtiene la Ecuación vectorial 4.4, la misma que es igual a la suma de los vectores  $\mathbf{a}_2$ ,  $l_2 \mathbf{s}_2$  y los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{b}_2$ .

$$\mathbf{a}_2 + l_2 \mathbf{s}_2 = \mathbf{p} + \mathbf{b}_2 \quad (4.4)$$

De la Ecuación 4.4 se despeja el vector  $l_2 \mathbf{s}_2$ , el cual tiene una magnitud presentada en la Ecuación 4.5 y una dirección presentada en la Ecuación 4.6:

$$l_2 = |\mathbf{p} + \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2| \quad (4.5)$$

$$\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2}{l_2} \quad (4.6)$$

En la Figura 4.8, se ilustra un actuador lineal compuesto por un cilindro y un pistón, donde este último se desplaza a lo largo del eje  $Z_2$ , el cual se define a lo largo del vector unitario  $\mathbf{s}_2$ . El eje  $X_2$  se define a lo largo del segundo eje de rotación de la junta universal, el cual permite la rotación relativa entre la segunda cadena cinemática y la junta universal.

A partir del marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$  de la plataforma fija, se definen los vectores posición del centro de masa del cilindro y el pistón, los cuales son denominados  $\mathbf{r}_{12}$  y  $\mathbf{r}_{22}$  y son definidos mediante las Ecuaciones 4.7 y 4.8 respectivamente. La distancia entre  $A_2$  y el centro de masa del cilindro es representada por  $e$ , mientras que la distancia entre  $B_2$  y el centro de masa del pistón se designa como  $f$ .

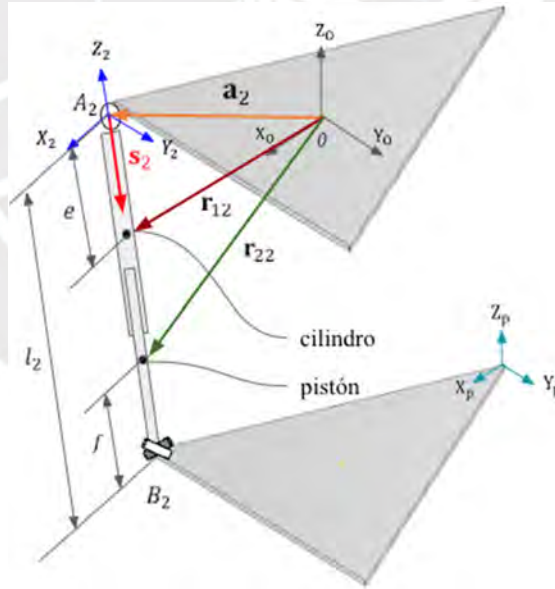


Fig. 4.8 Vectores posición cilindro y pistón del actuador.

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{a}_2 + e \mathbf{s}_2 \quad (4.7)$$

$$\mathbf{r}_{22} = \mathbf{a}_2 + (l_2 - f) \mathbf{s}_2 \quad (4.8)$$



b) Análisis de velocidad lineal de la segunda cadena cinemática SPU

El objetivo del análisis de velocidad es determinar las velocidades lineales de un elemento mecánico. Partiendo de la Ecuación 4.4, se deriva los términos que se encuentran en el lado izquierdo de la igualdad y se obtiene la Ecuación 4.9.

$$\mathbf{V}_{B_2} = \mathbf{V}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_2 \quad (4.9)$$

Donde:

$\mathbf{V}_{B_2}$  es el vector velocidad de la junta universal  $B_2$ ,  $\mathbf{V}_p$  es la velocidad de la junta universal  $B_1$  (la cual es siempre nula), el término  $\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_2$  es el producto cruz entre la velocidad angular de la plataforma móvil y el vector  $\mathbf{b}_2$ .

Se transforma la velocidad  $\mathbf{V}_{B_2}$  al marco de referencia local de la segunda cadena cinemática  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , lo cual se expresa con un superíndice a la izquierda, y se obtiene la Ecuación 4.10.

$${}^2\mathbf{V}_{B_2} = {}^2R_0 \mathbf{V}_{B_2} \quad (4.10)$$

Donde:

${}^2R_0$ : es la matriz de rotación del marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$  hacia el marco de referencia local de la cadena cinemática  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ . Esta matriz de rotación puede ser expresada con una matriz de rotación transpuesta  ${}^0R_2^T$ .

Por otro lado,  ${}^PR_2$  es la matriz de rotación del marco de referencia local de la cadena cinemática  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$  hacia el marco de referencia local de la plataforma móvil  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ .  ${}^PR_2$  queda determinado por dos rotaciones:  $\psi_{p,2}$  es la rotación alrededor del eje  $Z_2$ , y seguida de la rotación  $\theta_{p,2}$  alrededor de  $Y_2$ . La Ecuación 4.12 muestra cómo se usa la matriz de rotación  ${}^PR_2$ .

$${}^0R_2(\psi_2, \phi_2, \theta_2) = {}^0R_p {}^PR_2 \quad (4.11)$$

Donde:

$${}^pR_2(\psi_{p,2}, \theta_{p,2}) = \begin{bmatrix} \cos\psi_{p,2} & \text{sen}\psi_{p,2} \text{sen}\theta_{p,2} & \text{sen}\psi_{p,2} \cos\theta_{p,2} \\ 0 & \cos\theta_{p,2} & -\text{sen}\theta_{p,2} \\ -\text{sen}\psi_{p,2} & \cos\psi_{p,2} \text{sen}\theta_{p,2} & \cos\psi_{p,2} \cos\theta_{p,2} \end{bmatrix}$$

Se observa que la tercera columna de la matriz  ${}^pR_2(\psi_{p,2}, \theta_{p,2})$  es igual al negativo del vector  $\mathbf{s}_2$  expresado en el marco de referencia de la base móvil  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ . Por ello, se multiplica el primer y segundo término de la igualdad por  ${}^0R_p$  y se igualan las terceras columnas de las matrices resultantes obteniéndose la Ecuación 4.12.

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\psi_{p,2} \cos\theta_{p,2} \\ -\text{sen}\theta_{p,2} \\ \cos\psi_{p,2} \cos\theta_{p,2} \end{bmatrix} = -{}^pR_0 \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}'_2 \quad (4.12)$$

Donde:

$\mathbf{s}'_2$  es el vector negativo del vector  $\mathbf{s}_2$  expresado en el marco de referencia de la base móvil  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ .

En las Ecuaciones 4.13 a la 4.16 se calculan las razones trigonométricas de los ángulos  $\theta_{p,2}$ ,  $\psi_{p,2}$ , para con ello calcular la matriz de rotación  ${}^pR_2$ .

$$\text{sen}\theta_{p,2} = -s'_{2,y} \quad (4.13)$$

$$\cos\theta_{p,2} = \sqrt{s'^2_{2,x} + s'^2_{2,z}} \quad \text{con } 0 \leq \theta_{p,2} \leq \pi \quad (4.14)$$

$$\text{sen}\psi_{p,2} = \frac{s'_{2,x}}{\cos\theta_{p,2}} \quad (4.15)$$

$$\cos\psi_{p,2} = \frac{s'_{2,z}}{\cos\theta_{p,2}} \quad (4.16)$$

Usando la Ecuación 4.4, se deriva los términos que se encuentran en el lado izquierdo de la igualdad y se obtiene la Ecuación 4.17. Esta ecuación relaciona la velocidad de la cruceta (junta universal)  $B_2$  con la velocidad angular  $\omega_2$  y la velocidad lineal  $\dot{l}_2$  de la

cadena cinemática  $A_2 B_2$ . La Ecuación 4.17 es válida en el sistema de coordenada global. Entonces, expresado en el marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , permite obtener una expresión directa de la velocidad angular de la segunda cadena cinemática.

$${}^2\mathbf{V}_{B_2} = l_2({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + \dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \quad (4.17)$$

Multiplicando escalarmente (producto punto) en ambos lados de la Ecuación 4.17 con el vector unitario  ${}^2\mathbf{s}_2$ , se obtiene la Ecuación 4.18. Esta ecuación proporciona una relación directa entre la velocidad lineal de la cadena cinemática y su componente en el eje  $Z_2$ .

$$\dot{l}_2 = -{}^2v_{B_2,Z} \quad (4.18)$$

c) Análisis de velocidad angular de la cadena cinemática SPU

Se calcula la velocidad angular de la segunda cadena cinemática respecto al marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , multiplicando por el producto vectorial de  ${}^2\mathbf{s}_2$  ambos términos de la Ecuación 4.19.

$${}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\mathbf{V}_{B_2} = {}^2\mathbf{s}_2 \times (l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + {}^2\mathbf{s}_2 \times (\dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2) \quad (4.19)$$

El último término de la Ecuación 4.19 se elimina debido a que los vectores unitarios  ${}^2\mathbf{s}_2$  son paralelos entre sí, lo que resulta en un producto cruz igual a cero. Así mismo en la Ecuación 4.19 se aplica la propiedad del producto vectorial  $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  y se obtiene la Ecuación 4.20.

$${}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\mathbf{V}_{B_2} = l_2({}^2\boldsymbol{\omega}_2({}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2) - {}^2\mathbf{s}_2({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2)) \quad (4.20)$$

En el término  ${}^2\boldsymbol{\omega}_2({}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2)$  de la Ecuación 4.20, se aplica el producto punto entre los vectores unitarios que es igual a 1.

Así mismo, el producto punto resulta  $\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{s}_2$  (Ecuación 4.21), debido a que la velocidad angular de la segunda cadena cinemática respecto a la velocidad angular de la plataforma móvil gira solidariamente alrededor de eje  $Z_2$ , quedando la Ecuación 4.20 reducida a la Ecuación 4.22.

$${}^2\omega_2 \cdot {}^2s_2 = {}^2\omega_{2,z} = {}^2\omega_{p,z} = {}^2\omega_p \cdot {}^2s_2 \quad (4.21)$$

$${}^2s_2 \times {}^2V_{B_2} = l_2({}^2\omega_2 + {}^2\omega_{p,z} {}^2s_2) \quad (4.22)$$

De la Ecuación 4.22 se despeja la velocidad angular  ${}^2\omega_2$ , obteniendo la Ecuación 4.23.

$$\begin{aligned} {}^2\omega_2 &= \frac{{}^2s_2 \times {}^2V_{B_2}}{l_2} - {}^2\omega_{p,z} {}^2s_2 \\ &= \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,y} \\ -{}^2v_{B_2,x} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -{}^2\omega_{p,z} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,y} \\ -{}^2v_{B_2,x} \\ l_2 {}^2\omega_{p,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

d) Análisis de velocidad lineal del cilindro y pistón del actuador lineal

Una vez que se tiene la velocidad lineal de la junta universal  $B_2$  y la velocidad angular de la segunda cadena cinemática con respecto al marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , es posible calcular la velocidad de cada cuerpo de la segunda cadena cinemática con respecto al marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ . Siendo la velocidad del cilindro denotada por  $V_{12}$  y la velocidad del pistón por  $V_{22}$ .

Partiendo de la derivada de la Ecuación 4.7, se obtiene la Ecuación 4.24.

$${}^2V_{12} = e({}^2\omega_2 \times {}^2s_2) = \frac{e}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,x} \\ {}^2v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

De la misma manera, se deriva la Ecuación 4.14 y se obtiene la Ecuación 4.25.

$${}^2V_{22} = (\dot{l}_2) {}^2s_2 + (l_2 - f)({}^2\omega_2 \times {}^2s_2) \quad (4.25)$$

Se reemplaza el termino  ${}^2\omega_2 \times {}^2s_2$  en la Ecuación 4.25 y se obtiene la Ecuación 4.26.

$${}^2\mathbf{V}_{22} = \dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 + (l_2 - f) \cdot \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,x} \\ {}^2v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

De la Ecuación 4.26 se reemplaza el termino  $\dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2$ , y se obtiene la Ecuación 4.27.

$${}^2\mathbf{V}_{22} = {}^2V_{B_2,z} {}^2\mathbf{s}_2 + (l_2 - f) \cdot \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,x} \\ {}^2v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Se factoriza  $\frac{1}{l_2}$  en la Ecuación 4.27 y se obtiene la Ecuación 4.28.

$${}^2\mathbf{V}_{22} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} (l_2 - f)^2 v_{B_2,x} \\ (l_2 - f)^2 v_{B_2,y} \\ l_2^2 v_{B_2,z} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

e) Análisis de aceleración lineal de la segunda cadena cinemática SPU

Se deriva la Ecuación 4.9 respecto al tiempo y se encuentra la aceleración del punto  $B_2$  mediante la Ecuación 4.29.

$$\dot{\mathbf{V}}_{B_2} = \dot{\mathbf{V}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_2) \quad (4.29)$$

Se expresa  $\dot{\mathbf{V}}_{B_2}$  en el marco de referencia de la cadena cinemática  $A_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ , se obtiene la Ecuación 4.30.

$${}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2} = {}^2R_0 \dot{\mathbf{V}}_{B_2} \quad (4.30)$$

La aceleración del punto  $B_2$  (Ecuación 4.31) se expresa en términos de la aceleración de la cadena cinemática con la derivada de la Ecuación 4.17.

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2} = & \ddot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 + l_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \\ & + 2\dot{l}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$



Se multiplica producto punto a los dos lados de la Ecuación 4.31 con  ${}^2\mathbf{s}_2$  y se obtiene la Ecuación 4.32.

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2} \cdot {}^2\mathbf{s}_2 &= \ddot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2 + l_2 ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 + l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \\ &\quad \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 + 2\dot{l}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Los términos segundo y cuarto  $l_2 ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2$  y  $2\dot{l}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2$  de la Ecuación 4.32 son cero debido a que el producto punto de dos vectores perpendiculares es cero. Así mismo en el tercer término  $l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2$  de la Ecuación 4.32 se aplica la propiedad  $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  y se obtiene la Ecuación 4.33.

$$\begin{aligned} l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 \\ = l_2 [{}^2\boldsymbol{\omega}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 - {}^2\mathbf{s}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2] \end{aligned} \quad (4.33)$$

El término  ${}^2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2 = {}^2\boldsymbol{\omega}_p \cdot {}^2\mathbf{s}_2$  según lo explicado en la Ecuación 4.21. Por lo que se reduce la Ecuación 4.33 a la Ecuación 4.34.

$$l_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \cdot {}^2\mathbf{s}_2 = l_2 ({}^2\omega_{p,z}^2 - {}^2\omega_2^2) \quad (4.34)$$

Por lo tanto, de la Ecuación 4.32 se despeja el término  $\ddot{l}_2$ , lo que resulta la Ecuación 4.35.

$$\ddot{l}_2 = -{}^2\dot{v}_{B_2,z} - l_2 ({}^2\omega_{p,z}^2 - {}^2\omega_2^2) = -{}^2\dot{v}_{B_2,z} + \frac{({}^2v_{B_2,x}^2 + {}^2v_{B_2,y}^2)}{l_2} \quad (4.35)$$

*f) Análisis de aceleración angular de la segunda cadena cinemática SPU*

Se multiplica vectorialmente ambos lados de la Ecuación 4.31 por  ${}^2\mathbf{s}_2$  y se obtiene la Ecuación 4.36.

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2} &= \ddot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \\ &\quad \times {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + 2\dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

El primer término de la derecha  $\ddot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2$  de la Ecuación 4.36 es cero, debido al producto vectorial de dos vectores paralelos.

En el segundo término de la derecha  $l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + l_2$  de la Ecuación 4.36 se aplican las propiedades del producto vectorial y la propiedad de la Ecuación 4.21 (derivando la Ecuación 4.21, se llega a que:  ${}^2\dot{\omega}_{2,z} = {}^2\dot{\omega}_{p,z}$ ), lo que resulta  $l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) = l_2 ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 ({}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2) - {}^2\mathbf{s}_2 ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2)) = l_2 ({}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\dot{\omega}_{p,z} {}^2\mathbf{s}_2)$ .

En el tercer término de la derecha  $l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2)$  de la Ecuación 4.36 se aplican las propiedades del producto vectorial y la propiedad de la Ecuación 4.21, reduciéndose a  $l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) = l_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times (-{}^2\omega_{p,z} {}^2\boldsymbol{\omega}_2 - {}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2) =$

$$-l_2 {}^2\omega_{p,z} {}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\omega_{p,z} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,x} \\ {}^2v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En el cuarto término de la derecha  $2\dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2)$  de la Ecuación 4.36 se aplican las propiedades del producto vectorial y la propiedad de la Ecuación 4.22, lo que resulta  $2\dot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) = 2\dot{l}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 ({}^2\mathbf{s}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2) - {}^2\mathbf{s}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \cdot {}^2\mathbf{s}_2)) = 2\dot{l}_2 ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 + {}^2\omega_{p,z} {}^2\mathbf{s}_2)$ .

Por lo antes expuesto, de la Ecuación 4.36 se despeja el término  ${}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$  y se obtiene la Ecuación 4.37.

$$\begin{aligned} {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 &= \frac{1}{l_2} ({}^2\mathbf{s}_2 \times {}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2}) + {}^2\dot{\omega}_{p,z} - \frac{2\dot{l}_2}{l_2} ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 + {}^2\omega_{p,z} {}^2\mathbf{s}_2) - \frac{{}^2\omega_{p,z}}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,x} \\ {}^2v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2 {}^2\dot{v}_{B_2,y} + 2{}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,y} - l_2 {}^2\omega_{p,z} {}^2v_{B_2,x} \\ -l_2 {}^2\dot{v}_{B_2,x} - 2{}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,x} - l_2 {}^2\omega_{p,z} {}^2v_{B_2,y} \\ l_2 {}^2\dot{\omega}_{p,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

g) Análisis de aceleración lineal del cilindro y pistón del actuador lineal

Conociendo la velocidad y la aceleración angular de la cadena cinemática SPU, se derivan las Ecuaciones 4.24 y 4.25, para hallar la aceleración lineal del cilindro denotada por  ${}^2\dot{\mathbf{V}}_{12}$  con la Ecuación 4.38 y la aceleración lineal del pistón  ${}^2\dot{\mathbf{V}}_{22}$  con la Ecuación 4.39.

$${}^2\dot{\mathbf{V}}_{12} = e {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + e {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2^2 \dot{v}_{B_2,x} + 2^2 v_{B_2,z}^2 v_{B_2,x} \\ l_2^2 \dot{v}_{B_2,y} + 2^2 v_{B_2,z}^2 v_{B_2,y} \\ 2^2 v_{B_2,x}^2 + 2^2 v_{B_2,y}^2 \end{bmatrix} \\
&{}^2\dot{\mathbf{V}}_{22} = \ddot{l}_2 {}^2\mathbf{s}_2 + (l_2 - f) {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + (l_2 - f) {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \\
&\quad \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2) + 2\dot{l}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 \\
&= \frac{1}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2 (l_2 - f) {}^2\dot{v}_{B_2,x} - 2f {}^2v_{B_2,z}^2 v_{B_2,x} \\ l_2 (l_2 - f) {}^2\dot{v}_{B_2,y} - 2f {}^2v_{B_2,z}^2 v_{B_2,y} \\ l_2^2 {}^2\dot{v}_{B_2,z} - f(2^2 v_{B_2,x}^2 + 2^2 v_{B_2,y}^2) \end{bmatrix} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

### Tercera cadena cinemática SPU

En este apartado se presenta el análisis de las posiciones de la tercera cadena cinemática en el mecanismo paralelo, el análisis de la velocidad lineal y velocidad angular de la cadena cinemática SPU, el análisis de la velocidad lineal del cilindro y el pistón del actuador lineal, el análisis de la aceleración lineal y angular de la tercera cadena cinemática SPU. Finalmente se detalla la aceleración lineal del cilindro y el pistón del actuador lineal.

#### a) Análisis de las posiciones

El vectores posición de la cadena cinemática SPU, se define respecto al marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$  según la Figura 4.9 y Tabla 4.5.

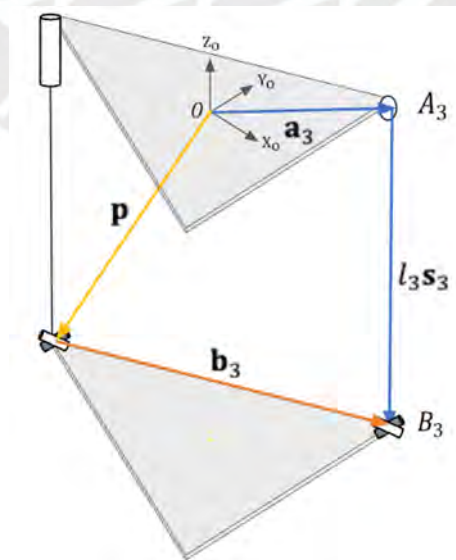


Fig. 4.9 Vectores de la cadena cinemática SPU del mecanismo paralelo.

Tabla 4.5 Parámetros geométricos de la Figura 4.9.

| Simbología         | Descripción                                                                         |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{a}_3$     | Vector que representa la posición de la junta esférica $A_3$ respecto al origen O.  |
| $l_3 \mathbf{s}_3$ | Vector que representa la posición de la junta universal $B_3$ respecto de $A_3$ .   |
| $\mathbf{p}$       | Vector que representa la posición de la junta universal $B_1$ respecto al origen O. |
| $\mathbf{b}_3$     | Vector que representa la posición de la junta universal $B_3$ respecto de $B_1$ .   |

De la Figura 4.9, se obtiene la Ecuación vectorial 4.40, la misma que es igual a la suma de los vectores  $\mathbf{a}_3$ ,  $l_3 \mathbf{s}_3$  y los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{b}_3$ .

$$\mathbf{a}_3 + l_3 \mathbf{s}_3 = \mathbf{p} + \mathbf{b}_3 \quad (4.40)$$

De la Ecuación 4.40 se despeja el vector  $l_3 \mathbf{s}_3$ , el cual tiene una magnitud presentada en la Ecuación 4.41.

$$l_3 = |\mathbf{p} + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3| \quad (4.41)$$

y una dirección presentada en la Ecuación 4.42.

$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3}{l_3} \quad (4.42)$$

En la Figura 4.10, se ilustra un actuador lineal compuesto por un cilindro y un pistón, donde este último se desplaza a lo largo del eje  $Z_3$ , el cual se define a lo largo del vector unitario  $\mathbf{s}_3$ . El eje  $X_3$  se define a lo largo del segundo eje de rotación de la junta universal, el cual permite la rotación relativa entre la segunda cadena cinemática y la junta universal.

A partir del marco de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$  de la plataforma fija, se definen los vectores posición del centro de masa del cilindro y el pistón, los cuales son denominados  $\mathbf{r}_{13}$ , y  $\mathbf{r}_{23}$  y son definidos mediante las Ecuaciones 4.43 y 4.44 respectivamente. La distancia entre  $A_2$  y el centro de masa del cilindro es representada por  $e$ , mientras que la distancia entre  $B_3$  y el centro de masa del pistón se designa como  $f$ .

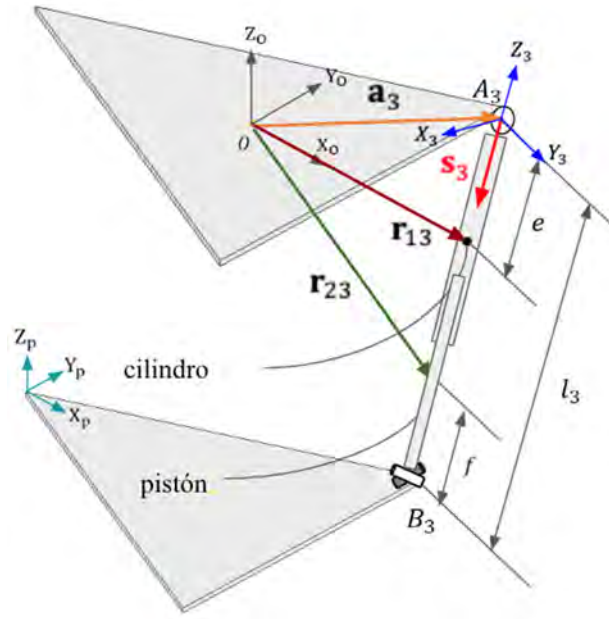


Fig. 4.10 Vectores posición cilindro y pistón del actuador.

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{a}_3 + e \mathbf{s}_3 \quad (4.43)$$

$$\mathbf{r}_{23} = \mathbf{a}_3 + (l_3 - f) \mathbf{s}_3 \quad (4.44)$$

*b) Análisis de velocidad lineal de la tercera cadena cinemática SPU*

Se realiza el mismo análisis de la cadena cinemática 2, obteniendo la velocidad lineal de la tercera cadena cinemática SPU, la cual se expresa por la Ecuación 4.45.

$$\dot{l}_3 = -v_{B_3,z} \quad (4.45)$$

*c) Análisis de velocidad angular de la tercera cadena cinemática SPU*

La velocidad angular de la tercera cadena cinemática SPU es denotada por la Ecuación 4.46.

$$\begin{aligned} {}^3\boldsymbol{\omega}_3 &= \frac{{}^3\mathbf{s}_3 \times {}^3\mathbf{V}_{B_3}}{l_3} - {}^3\omega_{p,z} {}^3\mathbf{s}_3 \\ &= \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^3v_{B_3,y} \\ -{}^3v_{B_3,x} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -{}^3\omega_{p,z} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3v_{B_3,y} \\ -{}^3v_{B_3,x} \\ l_3 {}^3\omega_{p,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$



d) Análisis de velocidad lineal del cilindro y pistón del actuador lineal

La velocidad lineal del cilindro es denotada por la Ecuación 4.47.

$${}^3\mathbf{V}_{13} = e ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3) = \frac{e}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3v_{B_3,x} \\ {}^3v_{B_3,y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

La velocidad lineal del pistón es denotada por la Ecuación 4.48.

$${}^3\mathbf{V}_{23} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} (l_3 - f) {}^3v_{B_3,x} \\ (l_3 - f) {}^3v_{B_3,y} \\ l_3 {}^3v_{B_3,z} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

e) Análisis de aceleración lineal de la tercera cadena cinemática SPU

La aceleración lineal de la tercera cadena cinemática se denota por la Ecuación 4.49.

$$\ddot{l}_3 = -{}^3\dot{v}_{B_3,z} - l_3 ({}^3\omega_{p,z}^2 - {}^3\omega_3^2) = -{}^3\dot{v}_{B_3,z} + \frac{({}^3v_{B_2,x}^2 + {}^3v_{B_2,y}^2)}{l_3} \quad (4.49)$$

f) Análisis de aceleración angular de la tercera cadena cinemática SPU

La aceleración angular de la tercera cadena cinemática SPU se denota por la Ecuación 4.50.

$$\begin{aligned} {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 &= \frac{1}{l_3} ({}^3\mathbf{s}_3 \times {}^3\dot{\mathbf{V}}_{B_3}) + {}^3\dot{\omega}_{p,z} - \frac{2\dot{l}_3}{l_3} ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 + {}^3\omega_{p,z} {}^3\mathbf{s}_3) - \frac{{}^3\omega_{p,z}}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3v_{B_3,x} \\ {}^3v_{B_3,y} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,y} + 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,y} - l_3 {}^3\omega_{p,z} {}^3v_{B_3,x} \\ -l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,x} - 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,x} - l_3 {}^3\omega_{p,z} {}^3v_{B_3,y} \\ l_3^2 {}^3\dot{\omega}_{p,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$

g) Análisis de aceleración lineal del cilindro y pistón del actuador lineal

La aceleración lineal del cilindro es denotada por la Ecuación 4.51.

$${}^3\dot{\mathbf{V}}_{13} = e {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3 + e {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3) \quad (4.51)$$

$$= \frac{e}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,x} + 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,x} \\ l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,y} + 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,y} \\ {}^3v_{B_3,x}^2 + {}^3v_{B_3,y}^2 \end{bmatrix}$$

La aceleración lineal del pistón es denotada por la Ecuación 4.52.

$$\begin{aligned} {}^3\dot{\mathbf{V}}_{23} &= \ddot{l}_3 {}^3\mathbf{s}_3 + (l_3 - f) {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3 + (l_3 - f) {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \\ &\quad \times ({}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3) + 2\dot{l}_3 {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times {}^3\mathbf{s}_3 \\ &= \frac{1}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3 (l_3 - f) {}^3\dot{v}_{B_3,x} - 2f {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,x} \\ l_3 (l_3 - f) {}^3\dot{v}_{B_3,y} - 2f {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,y} \\ l_3^2 {}^3\dot{v}_{B_3,z} - f({}^3v_{B_3,x}^2 + {}^3v_{B_3,y}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

## 4.2 Matrices Jacobianas de las cadenas cinemáticas

Una vez que se conocen las posiciones, velocidades y aceleraciones se procede a calcular las matrices Jacobianas de las cadenas cinemáticas. El objetivo es expresar la velocidad de cada cuerpo  $\dot{\mathbf{x}}_i$  del mecanismo en función de  $\dot{\mathbf{x}}_p$ .

Donde:

$\dot{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix}$  es el vector de seis filas que representa las velocidades lineales y angulares de la plataforma móvil expresadas en el marco de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$ .

### Primera cadena cinemática 1RU

Del análisis de la velocidad lineal de la primera cadena cinemática se tiene que  $\dot{l}_1 = 0$  y que solo cuenta con la velocidad angular en el eje  $Z_1$  ( ${}^1\omega_{1,z} = \dot{\psi}$ ). Por ello, la velocidad lineal y de rotación del eslabón de la primera cadena cinemática 1RU se puede expresar según la Ecuación 4.53.

$${}^1\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tan(\varphi)\sin(\psi) & -\tan(\varphi)\cos(\psi) & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p = {}^1J_1 \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.53)$$

Donde:

${}^1\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{V}_1 \\ {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \end{bmatrix}$ : es el vector de seis filas que representa las velocidades lineales y angulares del eslabón de la primera cadena cinemática expresadas en el marco de referencia local  $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$ .

${}^1J_1$ : es la matriz Jacobiana de 6x6 del eslabón de la primera cadena cinemática tal que

$${}^1J_1 = \begin{bmatrix} {}^1J_{B_1} \\ {}^1J_{\omega_1} \end{bmatrix}.$$

${}^1J_{B_1}$ : es la matriz Jacobiana de 3x6 tal que  ${}^1\mathbf{V}_1 = {}^1J_{B_1} \dot{\mathbf{x}}_p$ .

${}^1J_{\omega_1}$ : es la matriz Jacobiana de 3x6 tal que  ${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1J_{\omega_1} \dot{\mathbf{x}}_p$ .

Además, se sabe que la velocidad angular del actuador 1 es la componente en el eje  $Z_1$  de la velocidad angular de la cadena cinemática 1 ( $\dot{\psi} = {}^1\omega_{1,z}$ ). De este análisis, se obtiene la matriz Jacobiana del actuador 1 según la Ecuación 4.54.

$$\dot{\psi} = {}^1J_{\omega_{1,z}} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.54)$$

Donde:

${}^1J_{\omega_{1,z}}$ : es la tercera fila de la matriz Jacobiana  ${}^1J_{\omega_1}$ .

### Plataforma móvil (end efector) del mecanismo paralelo

Se expresa la velocidad angular de la plataforma móvil en función del vector  $\dot{\mathbf{x}}_p$  según la Ecuación 4.55.

$$\boldsymbol{\omega}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p = J_{\omega_p} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.55)$$

Se expresa la Ecuación 4.55 en los marcos de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$  según la Ecuación 5.56.

$${}^2\omega_p = {}^2R_0 J_{\omega_p} \dot{x}_p = \begin{bmatrix} {}^2J_{\omega_p,x} \\ {}^2J_{\omega_p,y} \\ {}^2J_{\omega_p,z} \end{bmatrix} \dot{x}_p = {}^2J_{\omega_p} \dot{x}_p \quad (4.56)$$

De forma similar, Se expresa la Ecuación 4.55 en los marcos de referencia local  $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$  según la Ecuación 4.57.

$${}^3\omega_p = {}^3R_0 J_{\omega_p} \dot{x}_p = \begin{bmatrix} {}^3J_{\omega_p,x} \\ {}^3J_{\omega_p,y} \\ {}^3J_{\omega_p,z} \end{bmatrix} \dot{x}_p = {}^3J_{\omega_p} \dot{x}_p \quad (4.57)$$

Se observa que la velocidad lineal de la base móvil está en función de su velocidad angular, por lo que el Jacobiano  $J_{x_p}$  relaciona el vector de seis velocidades  $\dot{x}_p$  con la velocidad angular de la plataforma móvil se da según la Ecuación 4.58.

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & b_{G,z} & -b_{G,y} \\ -b_{G,z} & 0 & b_{G,x} \\ b_{G,y} & -b_{G,x} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega_p = J_{x_p} \omega_p \quad (4.58)$$

### Segunda y tercera cadena cinemática SPU

Partiendo de la Ecuación 4.9, se expresa la velocidad lineal de la cruceta  $B_2$  de la segunda cadena cinemática según la Ecuación 4.59, donde  $J_{B_2}$  es la matriz Jacobiana de la segunda cadena cinemática, presentada en la Ecuación 4.60.

$$V_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{2,z} & -b_{2,y} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{2,z} & 0 & b_{2,x} \\ 0 & 0 & 1 & b_{2,y} & -b_{2,x} & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_p = J_{B_2} \dot{x}_p \quad (4.59)$$

$$J_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{2,z} & -b_{2,y} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{2,z} & 0 & b_{2,x} \\ 0 & 0 & 1 & b_{2,y} & -b_{2,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Se expresa la Ecuación 4.59 en el marco de referencia de la segunda cadena cinemática  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , lo que resulta la Ecuación 4.61, donde  ${}^2J_{B_2}$  es la matriz Jacobiana de la segunda cadena cinemática expresada en su marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , presentadas en la Ecuación 4.62.

$${}^2\mathbf{V}_{B_2} = {}^2J_{B_2} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.61)$$

$${}^2J_{B_2} = {}^2R_0 J_{B_2} = \begin{bmatrix} {}^2J_{B_2,x} \\ {}^2J_{B_2,y} \\ {}^2J_{B_2,z} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Por lo tanto, igualando la componente Z de ambos lados de la Ecuación 4.61 se obtiene la Ecuación 4.63, donde  $-{}^2J_{B_2,z}$  es la matriz Jacobiana del actuador 2.

$$\dot{l}_2 = -{}^2V_{B_2,z} = -{}^2J_{B_2,z} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.63)$$

De forma similar se obtiene la Ecuación 4.64 para la tercera cadena cinemática, donde  $-{}^3J_{B_3,z}$  es la matriz Jacobiana del actuador 3.

$$\dot{l}_3 = -{}^3V_{B_3,z} = -{}^3J_{B_3,z} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.64)$$

Luego, se calculan las velocidades angulares de la segunda y tercera cadena cinemática con las Ecuaciones 4.65 y 4.66.

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2J_{B_2,y} \\ -{}^2J_{B_2,x} \\ l_2 {}^2J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.65)$$



$${}^3\omega_3 = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3J_{B_3,y} \\ -{}^3J_{B_3,x} \\ l_3 {}^3J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.66)$$

Se calculan las velocidades lineales del cilindro y pistón de la segunda cadena cinemática, expresado con las Ecuaciones 4.67 y 4.68.

$${}^2\mathbf{V}_{12} = \frac{e}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2J_{B_2,x} \\ {}^2J_{B_2,y} \\ 0_{1 \times 6} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.67)$$

$${}^2\mathbf{V}_{22} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} (l_2 - f) {}^2J_{B_2,x} \\ (l_2 - f) {}^2J_{B_2,y} \\ l_2 {}^2J_{B_2,z} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.68)$$

Se calculan las velocidades lineales del cilindro y pistón de la tercera cadena cinemática, expresado con las Ecuaciones 4.69 y 4.70.

$${}^3\mathbf{V}_{13} = \frac{e}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3J_{B_3,x} \\ {}^3J_{B_3,y} \\ 0_{1 \times 6} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.69)$$

$${}^3\mathbf{V}_{23} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} (l_3 - f) {}^3J_{B_3,x} \\ (l_3 - f) {}^3J_{B_3,y} \\ l_3 {}^3J_{B_3,z} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.70)$$

Combinando las Ecuaciones 4.65, 4.67 y 4.68, se obtienen las Ecuaciones 4.71 y 4.72.

$${}^2\dot{\mathbf{x}}_{12} = {}^2J_{12} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.71)$$

$${}^2\dot{\mathbf{x}}_{22} = {}^2J_{22} \dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.72)$$

Donde  ${}^2J_{12}$  y  ${}^2J_{22}$ , Ecuaciones 4.73 y 4.74, son las matrices Jacobianas del cilindro y el pistón de la segunda cadena cinemática.

$${}^2J_{12} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} e^2 J_{B_2,x} \\ e^2 J_{B_2,y} \\ 0_{1 \times 6} \\ {}^2J_{B_2,y} \\ -{}^2J_{B_2,x} \\ l_2 {}^2J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$${}^2J_{22} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} (l_2 - f)^2 J_{B_2,x} \\ (l_2 - f)^2 J_{B_2,y} \\ l_2 {}^2J_{B_2,z} \\ {}^2J_{B_2,y} \\ -{}^2J_{B_2,x} \\ l_2 {}^2J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

De la misma manera, combinando las Ecuaciones 4.66, 4.69 y 4.70, se obtienen las Ecuaciones 4.75 y 4.76.

$${}^3\dot{\mathbf{x}}_{13} = {}^3J_{13}\dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.75)$$

$${}^3\dot{\mathbf{x}}_{23} = {}^3J_{23}\dot{\mathbf{x}}_p \quad (4.76)$$

Donde:  ${}^3J_{13}$  y  ${}^3J_{23}$ , Ecuaciones 4.77 y 4.78, son las matrices Jacobianas del cilindro y el pistón de la tercera cadena cinemática.

$${}^3J_{13} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} e^3 J_{B_3,x} \\ e^3 J_{B_3,y} \\ 0_{1 \times 6} \\ {}^3J_{B_3,y} \\ -{}^3J_{B_3,x} \\ l_3 {}^3J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$${}^3J_{23} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} (l_3 - f)^2 J_{B_3,x} \\ (l_3 - f)^2 J_{B_3,y} \\ l_3^3 J_{B_3,z} \\ {}^3J_{B_3,y} \\ -{}^3J_{B_3,x} \\ l_3^3 J_{\omega p,z} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Finalmente, se obtiene la matriz Jacobiana del mecanismo paralelo según la Ecuación 4.79.

$$J_p = \begin{bmatrix} {}^1J_{B_1,z} \\ -{}^2J_{B_2,z} \\ -{}^3J_{B_3,z} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

### 4.3 Dinámica inversa del mecanismo paralelo

La dinámica inversa implica encontrar las fuerzas y torques requeridos en los actuadores del mecanismo para lograr un movimiento específico del mismo. Las ecuaciones dinámicas del movimiento se emplea el principio del trabajo virtual.

#### 4.3.1 Fuerzas y momentos externos sobre la plataforma móvil

La resultante de las fuerzas y momentos aplicados en el centro de masa de la plataforma móvil se denota con la Ecuación 4.80.

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_p \\ \hat{\mathbf{n}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e + m_p \mathbf{g} - m_p \dot{\mathbf{V}}_g \\ \mathbf{n}_e - {}^0I_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_p - \boldsymbol{\omega}_p \times ({}^0I_p \boldsymbol{\omega}_p) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Donde:

$\mathbf{F}_p$ : es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre la plataforma móvil.

$\mathbf{f}_e$ : es la fuerza externa ejercida en el centro de masa de la plataforma móvil, (N). Siendo esta fuerza externa considerada como el peso del usuario de 50 kg como la fuerza predominante ejercida sobre la plataforma. Dicha fuerza alcanza su máxima intensidad durante la fase de contacto inicial en el ciclo de marcha, momento en el cual el mecanismo debe soportar la mayor carga.

$\mathbf{n}_e$ : es el momento externo ejercido en el punto de articulación entre la plataforma móvil y la cadena cinemática 1, (N. m)

$m_p$ : es la masa de la plataforma móvil, (kg).

$\mathbf{g}$ : es el vector gravedad  $[0 \ 0 \ -9,81]$ ,  $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ .

${}^0\mathbf{I}_p = {}^0R_p {}^pI_p {}^pR_0$  es la matriz de inercia de la plataforma móvil tomada sobre el centro de masa y expresada en el marco fijo O ( $X_0, Y_0, Z_0$ ), (kg. m<sup>2</sup>).

$\dot{\mathbf{V}}_p$ : es la aceleración lineal del centro de gravedad de la plataforma móvil,  $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ .

#### Fuerzas e Inercia sobre la primera cadena cinemática (1RU)

Asumiendo que la fuerza gravitacional es la única fuerza externa, las resultantes de las fuerzas aplicadas y de inercia ejercidas en el centro de masa del eslabón de la primera cadena cinemática (1RU) se pueden expresar en el marco local de la primera cadena cinemática con la Ecuación 4.81.

$${}^1\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \hat{\mathbf{n}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 {}^1R_0 \mathbf{g} - m_1 {}^1\dot{\mathbf{V}}_1 \\ -{}^1I_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1I_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1) \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Donde:

${}^1\mathbf{F}_1$ : es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre el eslabón de la primera cadena cinemática expresado desde el marco de referencia local  $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$ .

$m_1$ : es la masa del eslabón de la primera cadena cinemática, (kg).

${}^1I_1$ : es el momento de inercia del eslabón de la primera cadena cinemática respecto al marco de referencia local  $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$ , (kg. m<sup>2</sup>).

#### Fuerzas e Inercia sobre la segunda cadena cinemática (SPU)

Del mismo modo, asumiendo que la fuerza gravitacional es la única fuerza externa, las resultantes de las fuerzas aplicadas y de inercia ejercidas en los centros de masa del cilindro y del pistón se pueden expresar en el marco local de la segunda cadena cinemática con la Ecuación 4.82 y 4.83.

$${}^2\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{12} \\ \hat{\mathbf{n}}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12} {}^2R_0 \mathbf{g} - m_{12} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{12} \\ -{}^2I_{12} {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2I_{12} {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$${}^2\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{22} \\ \hat{\mathbf{n}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} {}^2R_0\mathbf{g} - m_{22} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{22} \\ -{}^2I_{22} {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2I_{22} {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

${}^2\mathbf{F}_{12}$ : es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre el cilindro de la segunda cadena cinemática (SPU) expresado desde el marco de referencia local  $B_2(X_2, Y_2, Z_2)$ .

${}^2\mathbf{F}_{22}$ : es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre el pistón de la segunda cadena cinemática expresado desde el marco de referencia local  $B_2(X_2, Y_2, Z_2)$ .

$m_{12}$ : es la masa del cilindro de la segunda cadena cinemática (SPU), (kg).

$m_{22}$ : es la masa del pistón de la segunda cadena cinemática (SPU), (kg).

${}^2I_{12}$ : es el momento de inercia del cilindro de la segunda cadena cinemática (SPU) respecto al marco de referencia local  $B_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , (kg. m<sup>2</sup>).

${}^2I_{22}$ : es el momento de inercia del pistón de la segunda cadena cinemática (SPU) respecto al marco de referencia local  $B_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , (kg. m<sup>2</sup>).

#### Fuerzas e Inercia sobre la tercera cadena cinemática (SPU)

De la misma manera, se puede denotar las Ecuaciones 4.84 y 4.85.

$${}^3\mathbf{F}_{13} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{13} \\ \hat{\mathbf{n}}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{13} {}^3R_0\mathbf{g} - m_{13} {}^3\dot{\mathbf{V}}_{13} \\ -{}^3I_{13} {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^3I_{13} {}^3\boldsymbol{\omega}_3) \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$${}^3\mathbf{F}_{23} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{23} \\ \hat{\mathbf{n}}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{23} {}^3R_0\mathbf{g} - m_{23} {}^3\dot{\mathbf{V}}_{23} \\ -{}^3I_{23} {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^3I_{23} {}^3\boldsymbol{\omega}_3) \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

${}^3\mathbf{F}_{13}$  es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre el cilindro de la tercera cadena cinemática (SPU) expresado desde el marco de referencia local  $B_3(X_3, Y_3, Z_3)$ .

${}^3\mathbf{F}_{23}$  es el vector de fuerzas y momentos resultantes sobre el pistón de la tercera cadena cinemática expresado desde el marco de referencia local  $B_3(X_3, Y_3, Z_3)$ .

$m_{13}$  es la masa del cilindro de la tercera cadena cinemática (SPU), (kg).

$m_{23}$  es la masa del pistón de la tercera cadena cinemática (SPU), (kg).

${}^3I_{13}$  es el momento de inercia del cilindro de la tercera cadena cinemática (SPU) respecto al marco de referencia local  $B_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , (kg. m<sup>2</sup>).

${}^3I_{23}$  es el momento de inercia del pistón de la tercera cadena cinemática (SPU) respecto al marco de referencia local  $B_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , (kg. m<sup>2</sup>).



Debido a la simetría de los marcos locales  $B_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $B_2(X_2, Y_2, Z_3)$  y  $B_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , las matrices de inercia de los cuerpos de las 3 cadenas cinemáticas son diagonales. Sin embargo no se cumple para el marco local  $X_p$  ( $X_p, Y_p, Z_p$ ) ya que su ubicación se encuentra en un extremo del cuerpo y no en su centro.

#### 4.3.2 Ecuaciones de movimiento

El modelo dinámico del mecanismo paralelo se obtiene mediante el principio de trabajo virtual, que permite encontrar los torques de cada junta a partir de las fuerzas y momentos externos aplicados en los cuerpos del mecanismo. En este caso los cuerpos son: una plataforma móvil, un cilindro y un pistón por cada uno de los dos actuadores lineales, y eslabón de la primera cadena cinemática (1RU).

Según este método se debe cumplir la Ecuación 4.86, la cual relaciona la fuerza resultante sobre cada cuerpo, el desplazamiento diferencial que este genera en cada cuerpo, los desplazamientos virtuales de las juntas y el torque sobre cada junta.

$$\delta \mathbf{q}^T \boldsymbol{\tau} + \delta \mathbf{x}_p^T \mathbf{F}_p + \delta \mathbf{x}_1^T \mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^3 \delta {}^i \mathbf{x}_{1i} {}^i \mathbf{F}_{1i} + \delta {}^i \mathbf{x}_{2i} {}^i \mathbf{F}_{2i} = 0 \quad (4.86)$$

Donde:

$\mathbf{q} = [q_1, l_2, l_3]^T$ ,  $\mathbf{q}$  es el vector del ángulo de rotación del eslabón de la primera cadena cinemática  $q_1$  y las longitudes de la segunda y la tercera cinemáticas  $l_2, l_3$  respectivamente.

$\boldsymbol{\tau}$ : es el vector de los torques aplicados a las juntas de revolución y dos juntas prismáticas.

$\mathbf{x}_p$ : es el vector posición de la plataforma móvil.

$\mathbf{x}_1$ : es el vector posición del eslabón de la primera cadena cinemática (1RU).

$\mathbf{x}_{1i}$ : es el vector posición del cilindro de la cadena cinemática  $i$  (2 o 3).

$\mathbf{x}_{2i}$ : es el vector posición del pistón de la cadena cinemática  $i$  (2 o 3).

Las resultantes de las fuerzas aplicadas y de inercia  ${}^1 \mathbf{F}_1$ ,  ${}^i \mathbf{F}_{1i}$  y  ${}^i \mathbf{F}_{2i}$  y sus correspondientes desplazamientos virtuales,  $\delta {}^1 \mathbf{x}_1$ ,  $\delta ({}^i \mathbf{x}_{1i})$  y  $\delta ({}^i \mathbf{x}_{2i})$ , se expresan en sus respectivos

marcos de referencia. Las fuerzas de entrada están intencionalmente aisladas de las otras fuerzas para facilitar la derivación.

Los desplazamientos virtuales en la Ecuación 4.86 deben ser compatibles con las restricciones cinemáticas impuestas por las juntas. Por lo tanto, es necesario relacionar los desplazamientos virtuales anteriores con un conjunto de desplazamientos virtuales generalizados independientes. Por lo que se tiene las Ecuaciones 4.87 a la 4.90.

$$\delta \mathbf{q} = J_p \delta \mathbf{x}_p = J_p J_{x_p} \boldsymbol{\omega}_p \quad (4.87)$$

$$\delta^1 \mathbf{x}_1 = {}^1 J_1 \delta \mathbf{x}_p = {}^1 J_1 J_{x_p} \boldsymbol{\omega}_p \quad (4.88)$$

$$\delta^2 \mathbf{x}_{12} = {}^i J_{1i} \delta \mathbf{x}_p = {}^i J_{1i} J_{x_p} \boldsymbol{\omega}_p \quad (4.89)$$

$$\delta^2 \mathbf{x}_{2i} = {}^i J_{2i} \delta \mathbf{x}_p = {}^i J_{2i} J_{x_p} \boldsymbol{\omega}_p \quad (4.90)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 4.87 a la 4.90 en la Ecuación 4.86 se obtiene la Ecuación 4.91. Es importante mencionar que los torques se escriben con respecto al centro de masa de cada eslabón. Sin embargo, si se aplica un torque externo en un punto distinto al centro de masa debe transformarse a uno tomando sobre el centro de masa antes de sustituirlo en las ecuaciones de movimiento.

$$\boldsymbol{\omega}_p^T \left[ J_{x_p}^T J_p^T \boldsymbol{\tau} + J_{x_p}^T \mathbf{F}_p + J_{x_p}^T {}^1 J_1^T \mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^3 (J_{x_p}^T {}^1 J_{1i}^T {}^i \mathbf{F}_{1i} + J_{x_p}^T {}^1 J_{2i}^T {}^i \mathbf{F}_{2i}) \right] = 0 \quad (4.91)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 4.80 y 4.81 en 4.91 se obtiene la Ecuación 4.92.

$$J_{x_p}^T J_p^T \boldsymbol{\tau} + J_{x_p}^T \mathbf{F}_p + J_{x_p}^T {}^1 J_1^T \mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^3 (J_{x_p}^T {}^1 J_{1i}^T {}^i \mathbf{F}_{1i} + J_{x_p}^T {}^1 J_{2i}^T {}^i \mathbf{F}_{2i}) = 0 \quad (4.92)$$

Se despeja  $\boldsymbol{\tau}$  de la Ecuación 4.92 y se obtiene la Ecuación 4.93.

$$\boldsymbol{\tau} = -(J_{x_p}^T J_p^T)^{-1} (J_{x_p}^T \mathbf{F}_p + J_{x_p}^T {}^1 J_1^T \mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^3 (J_{x_p}^T {}^1 J_{1i}^T {}^i \mathbf{F}_{1i} + J_{x_p}^T {}^1 J_{2i}^T {}^i \mathbf{F}_{2i})) \quad (4.93)$$

## CAPÍTULO 5

### ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA RESOLVER LA CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL MECANISMO PARALELO 2SPU-1RU

En el capítulo se presenta un algoritmo computacional para resolver la dinámica del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. A partir de este algoritmo se desarrolla un programa informático utilizando el Software MATLAB R2022b, definiendo las condiciones de simulación. Finalmente se presenta los resultados obtenidos mediante gráficas.

#### 5.1 Pasos del algoritmo

Antes de plantear los pasos que se debe seguir para crear un algoritmo que permita resolver las ecuaciones cinemáticas y dinámicas. Se recuerda que el mecanismo paralelo 2SPU-1RU presentado en la Figura 5.1 se compone de tres cadenas cinemáticas distintas. La primera cadena, denominada 1RU, incluye un actuador rotatorio (R), seguido de un eslabón y finaliza con una junta universal (U). Las otras dos cadenas, conocidas como SPU, se caracterizan por una junta esférica (S), un actuador lineal o junta prismática (P), y una junta universal (U) cada una. La plataforma fija se encuentra en la parte superior con su sistema de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$ , mientras que la plataforma móvil se encuentra en la parte inferior con su marco de referencia  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ .

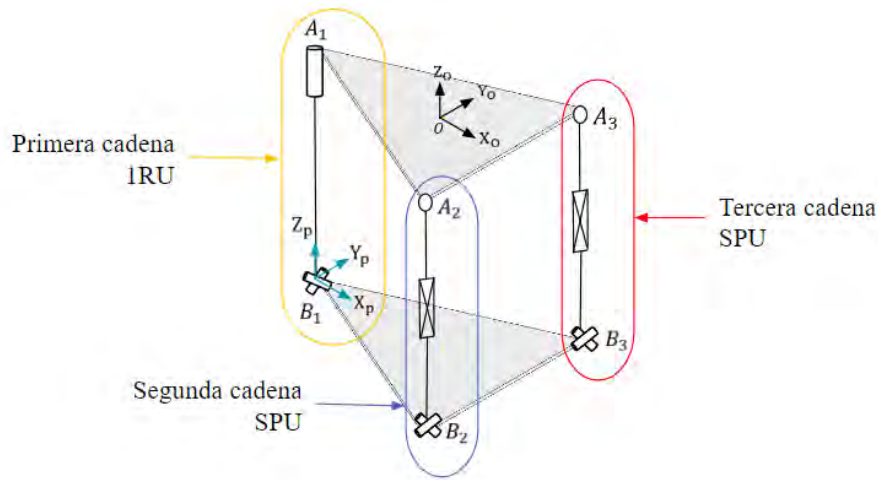


Fig. 5.1 Representación de las cadenas cinemáticas del mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

### Paso 1: Análisis cinemático inverso

Se determina las variables de las juntas del mecanismo paralelo basado en la posición y la orientación deseadas de la plataforma móvil.

- a) Calcular la matriz de rotación  ${}^0R_p(\psi, \phi, \theta)$  según la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Matriz de Rotación ZXY.

| Matriz de rotación del marco de referencia de la plataforma móvil al marco de referencia global |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ${}^0R_p(\psi, \phi, \theta) =$                                                                 | $\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \theta + \cos \theta \sin \psi \sin \phi \\ \cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$ |

- b) Transformar el vector posición y matriz de inercia en el marco de referencia global

$${}^0\mathbf{b}_2 = {}^0R_p {}^P\mathbf{b}_2, {}^0\mathbf{b}_3 = {}^0R_p {}^P\mathbf{b}_3, {}^0\mathbf{I}_p = {}^0R_p {}^P\mathbf{I}_p {}^P R_0.$$

Donde:

${}^0\mathbf{b}_2$  es el vector posición de la cruceta 2 respecto a la cruceta 1 en el marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ .

${}^0\mathbf{b}_3$  es el vector posición de la cruceta 3 respecto a la cruceta 1 en el marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ .

${}^0R_p$  es la matriz de rotación del marco de referencia local  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$  al marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ .

${}^0\mathbf{I}_p$  es la matriz de inercia de la plataforma móvil tomada sobre el centro de masa y expresada en el marco de referencia global  $O(X_O, Y_O, Z_O)$ .

- c) Determinar los parámetros relacionados con las distancias y los vectores unitarios de las cadenas cinemáticas que se presenta en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Distancias y vectores unitarios de las cadenas cinemáticas.

| Cadena cinemática  | Distancias                                         | Vectores unitarios                                                    |
|--------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | $l_1 =  \mathbf{p} - \mathbf{a}_1 $                | $\mathbf{s}_1 = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}_1)}{l_1}$              |
| Segunda cadena SPU | $l_2 =  \mathbf{p} + \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 $ | $\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2}{l_2}$ |
| Tercera cadena SPU | $l_3 =  \mathbf{p} + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 $ | $\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3}{l_3}$ |

- d) Determinar los vectores unitarios  $\mathbf{s}'_2$  y  $\mathbf{s}'_3$ .

Tabla 5.3 Vectores unitarios.

| Vector unitario | Matriz de Rotación                      |
|-----------------|-----------------------------------------|
| $\mathbf{s}'_2$ | $\mathbf{s}'_2 = -{}^pR_0 \mathbf{s}_2$ |
| $\mathbf{s}'_3$ | $\mathbf{s}'_3 = -{}^pR_0 \mathbf{s}_3$ |

- e) Calcular los ángulos de las matrices de rotación  ${}^pR_2(\psi_{p,2}, \theta_{p,2})$  y  ${}^pR_3(\psi_{p,3}, \theta_{p,3})$  según la Tabla 5.4.

Tabla 5.4 Vectores unitarios y ángulos.

| Cadena cinemática  | Vector unitario                                                                                                                                                     | Coseno y seno de $\theta$                                                                                                                                         | Coseno y seno de $\psi$                                                                                                                                            |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | $\mathbf{s}_1 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                                                                                                         | $\begin{aligned} \text{sen}\theta_1 &= 0 \\ \text{cos}\theta_1 &= 1 \end{aligned}$                                                                                | $\begin{aligned} \text{cos}\psi_1 &= \text{cos}\psi_p \\ \text{sen}\psi_1 &= \text{sen}\psi_p \end{aligned}$                                                       |
| Segunda cadena SPU | $\mathbf{s}'_2 = \begin{bmatrix} \text{sen}\psi_{p,2}\text{cos}\theta_{p,2} \\ -\text{sen}\theta_{p,2} \\ \text{cos}\psi_{p,2}\text{cos}\theta_{p,2} \end{bmatrix}$ | $\begin{aligned} \text{sen}\theta_{p,2} &= -s'_{2,y} \\ \text{cos}\theta_{p,2} &= \sqrt{s'^2_{2,x} + s'^2_{2,z}} \\ (0 \leq \theta_{p,2} \leq \pi) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \text{sen}\psi_{p,2} &= \frac{s'_{2,x}}{\text{cos}\theta_{p,2}} \\ \text{cos}\psi_{p,2} &= \frac{s'_{2,z}}{\text{cos}\theta_{p,2}} \end{aligned}$ |
| Tercera cadena SPU | $\mathbf{s}'_3 = \begin{bmatrix} \text{sen}\psi_{p,3}\text{cos}\theta_{p,3} \\ -\text{sen}\theta_{p,3} \\ \text{cos}\psi_{p,3}\text{cos}\theta_{p,3} \end{bmatrix}$ | $\begin{aligned} \text{sen}\theta_{p,3} &= -s'_{3,y} \\ \text{cos}\theta_{p,3} &= \sqrt{s'^2_{3,x} + s'^2_{3,z}} \\ (0 \leq \theta_{p,3} \leq \pi) \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \text{sen}\psi_{p,3} &= \frac{s'_{3,x}}{\text{cos}\theta_{p,3}} \\ \text{cos}\psi_{p,3} &= \frac{s'_{3,z}}{\text{cos}\theta_{p,3}} \end{aligned}$ |



- f) Determinar las matrices de rotación de las cadenas cinemáticas con respecto al marco de referencia de la plataforma fija  ${}^pR_2(\psi_{p,2}, \theta_{p,2})$  y  ${}^pR_3(\psi_{p,3}, \theta_{p,3})$ , según Tabla 5.5.

Tabla 5.5 Matriz de Rotación.

| Cadena cinemática  | Matriz de Rotación                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | ${}^0R_1(\psi_1) = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 & 0 \\ \sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                           |
| Segunda cadena SPU | ${}^pR_2(\psi_{p,2}, \theta_{p,2}) = \begin{bmatrix} \cos\psi_{p,2} & \sin\psi_{p,2}\sin\theta_{p,2} & \sin\psi_{p,2}\cos\theta_{p,2} \\ 0 & \cos\theta_{p,2} & -\sin\theta_{p,2} \\ -\sin\psi_{p,2} & \cos\psi_{p,2}\sin\theta_{p,2} & \cos\psi_{p,2}\cos\theta_{p,2} \end{bmatrix}$<br>${}^0R_2 = {}^0R_p {}^pR_2$ |
| Tercera cadena SPU | ${}^pR_3(\psi_{p,3}, \theta_{p,3}) = \begin{bmatrix} \cos\psi_{p,3} & \sin\psi_{p,3}\sin\theta_{p,3} & \sin\psi_{p,3}\cos\theta_{p,3} \\ 0 & \cos\theta_{p,3} & -\sin\theta_{p,3} \\ -\sin\psi_{p,3} & \cos\psi_{p,3}\sin\theta_{p,3} & \cos\psi_{p,3}\cos\theta_{p,3} \end{bmatrix}$<br>${}^0R_3 = {}^0R_p {}^pR_3$ |

- g) Determinar la velocidad lineal del centro de la junta y la velocidad en el marco de referencia de las cadenas cinemáticas, mediante las Ecuaciones mostradas en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6 Velocidades lineales.

| Cadena cinemática  | Velocidad en el centro de la junta                                            | Velocidad en el marco de referencia de la cadena cinemática |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | $\mathbf{V}_{B_1} = \mathbf{0}$                                               | ${}^1\mathbf{V}_{B_1} = 0$                                  |
| Segunda cadena SPU | $\mathbf{V}_{B_2} = \mathbf{V}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_2$ | ${}^2\mathbf{V}_{B_2} = {}^2R_0 \mathbf{V}_{B_2}$           |
| Tercera cadena SPU | $\mathbf{V}_{B_3} = \mathbf{V}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_3$ | ${}^3\mathbf{V}_{B_3} = {}^3R_0 \mathbf{V}_{B_3}$           |

- h) Determinar la velocidad angular con las Ecuaciones mostradas en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7 Velocidades angulares.

| Cadena cinemática  | Velocidad angular                                                                                                                 |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}$                                                                                              |
| Segunda cadena SPU | ${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} {}^2v_{B_2,y} \\ -{}^2v_{B_2,x} \\ l_2 {}^2\omega_{p,z} \end{bmatrix}$ |
| Tercera cadena SPU | ${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} {}^3v_{B_3,y} \\ -{}^3v_{B_3,x} \\ l_3 {}^3\omega_{p,z} \end{bmatrix}$ |

- i) Determinar las aceleraciones lineales de las crucetas  $B_1, B_2, B_3$ . utilizando la Tabla 5.8 y las aceleraciones lineales expresadas en el marco de referencia de las cadenas cinemáticas utilizando la Tabla 5.9.

Tabla 5.8 Aceleraciones lineales en crucetas  $B_1, B_2, B_3$  expresados en el marco de referencia global.

| Cadena cinemática  | Aceleraciones lineales                                                                                                                                                     |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | $\dot{\mathbf{V}}_{B_1} = 0$                                                                                                                                               |
| Segunda cadena SPU | $\dot{\mathbf{V}}_{B_2} = \dot{\mathbf{V}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_2)$ |
| Tercera cadena SPU | $\dot{\mathbf{V}}_{B_3} = \dot{\mathbf{V}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{b}_3 + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_3)$ |

Tabla 5.9 Aceleraciones lineales en crucetas  $B_1, B_2, B_3$  en los marcos de referencias de las cadenas cinemáticas.

| Cadena cinemática  | Aceleraciones lineales                                        |
|--------------------|---------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | ${}^1\dot{\mathbf{V}}_{B_1} = 0$                              |
| Segunda cadena SPU | ${}^2\dot{\mathbf{V}}_{B_2} = {}^2R_0 \dot{\mathbf{V}}_{B_2}$ |
| Tercera cadena SPU | ${}^3\dot{\mathbf{V}}_{B_3} = {}^3R_0 \dot{\mathbf{V}}_{B_3}$ |

- j) Determinar la aceleración angular de la cadena cinemática mediante las ecuaciones presentadas en la Tabla 5.10.

Tabla 5.10 Aceleración angular de las cadenas cinemáticas.

| Cadena cinemática  | Aceleraciones angulares                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Primera cadena 1RU | ${}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \ddot{\boldsymbol{\psi}}$                                                                                                                                                                                                     |
| Segunda cadena SPU | ${}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \frac{1}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2^2 \dot{v}_{B_2,y} + 2^2 v_{B_2,z}^2 v_{B_2,y} - l_2^2 \omega_{p,z}^2 v_{B_2,x} \\ -l_2^2 \dot{v}_{B_2,x} - 2^2 v_{B_2,z}^2 v_{B_2,x} - l_2^2 \omega_{p,z}^2 v_{B_2,y} \\ 0 \end{bmatrix}$ |
| Tercera cadena SPU | ${}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \frac{1}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3^3 \dot{v}_{B_3,y} + 2^3 v_{B_3,z}^3 v_{B_3,y} - l_3^3 \omega_{p,z}^3 v_{B_3,x} \\ -l_3^3 \dot{v}_{B_3,x} - 2^3 v_{B_3,z}^3 v_{B_3,x} - l_3^3 \omega_{p,z}^3 v_{B_3,y} \\ 0 \end{bmatrix}$ |

- k) Determinar la aceleración lineal del cilindro y pistón de los actuadores lineales, utilizando la Tabla 5.11.

Tabla 5.11 Aceleración lineal del cilindro y pistón de los actuadores lineales.

| Partes del actuador lineal                            | Aceleraciones lineales                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cilindro del actuador lineal de la segunda cadena SPU | ${}^2\dot{\mathbf{V}}_{12} = \frac{e}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2 {}^2\dot{v}_{B_2,x} + 2 {}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,x} \\ l_2 {}^2\dot{v}_{B_2,y} + 2 {}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,y} \\ {}^2v_{B_2,x}^2 + {}^2v_{B_2,y}^2 \end{bmatrix}$                                                    |
| Pistón del actuador lineal de la segunda cadena SPU   | ${}^2\dot{\mathbf{V}}_{22} = \frac{1}{l_2^2} \begin{bmatrix} l_2 (l_2 - f) {}^2\dot{v}_{B_2,x} - 2f {}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,x} \\ l_2 (l_2 - f) {}^2\dot{v}_{B_2,y} - 2f {}^2v_{B_2,z} {}^2v_{B_2,y} \\ l_2 {}^2\dot{v}_{B_2,z} - f({}^2v_{B_2,x}^2 + {}^2v_{B_2,y}^2) \end{bmatrix}$ |
| Cilindro del actuador lineal de la tercera cadena SPU | ${}^3\dot{\mathbf{V}}_{13} = \frac{e}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,x} + 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,x} \\ l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,y} + 2 {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,y} \\ -({}^3v_{B_3,x}^2 + {}^3v_{B_3,y}^2) \end{bmatrix}$                                                 |
| Pistón del actuador lineal de la tercera cadena SPU   | ${}^3\dot{\mathbf{V}}_{23} = \frac{1}{l_3^2} \begin{bmatrix} l_3 (l_3 - f) {}^3\dot{v}_{B_3,x} - 2f {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,x} \\ l_3 (l_3 - f) {}^3\dot{v}_{B_3,y} - 2f {}^3v_{B_3,z} {}^3v_{B_3,y} \\ l_3 {}^3\dot{v}_{B_3,z} - f({}^3v_{B_3,x}^2 + {}^3v_{B_3,y}^2) \end{bmatrix}$ |

### Paso 2: Formulación de las matrices Jacobianas

- a) Determinar la matriz Jacobiana que relaciona el vector de seis velocidades de la plataforma móvil con su respectiva velocidad angular, según Tabla 5.12.

Tabla 5.12 Matriz Jacobiana.

| Matriz Jacobiana |                                                                                                                                                   |  |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $J_{x_p} =$      | $\begin{bmatrix} 0 & b_{G,z} & -b_{G,y} \\ -b_{G,z} & 0 & b_{G,x} \\ b_{G,y} & -b_{G,x} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |  |

- b) Determinar las matrices Jacobianas de la velocidad angular de la plataforma móvil y los Jacobianos de las velocidades lineales de las cadenas cinemáticas, mediante las Ecuaciones expresadas en la Tabla 5.13.

Tabla 5.13 Matrices Jacobianas de la plataforma móvil, y la segunda y tercera cadenas cinemáticas.

| Cadena cinemática                         | Matrices Jacobianas                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Velocidad angular de la plataforma móvil  | $J_{\omega_p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$                                   |
| Velocidad lineal de la segunda cadena SPU | $J_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{2,z} & -b_{2,y} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{2,z} & 0 & b_{2,x} \\ 0 & 0 & 1 & b_{2,y} & -b_{2,x} & 0 \end{bmatrix}$ |
| Velocidad lineal de la tercera cadena SPU | $J_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{3,z} & -b_{3,y} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{3,z} & 0 & b_{3,x} \\ 0 & 0 & 1 & b_{3,y} & -b_{3,x} & 0 \end{bmatrix}$ |

- c) Determinar las matrices Jacobianas de la velocidad angular de la plataforma móvil expresadas en el marco de referencia local  $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ ,  $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$ , y las matrices Jacobianas de las velocidades lineales de las cadenas cinemáticas en sus respectivos marcos locales mediante las Ecuaciones expresadas en la Tabla 5.14.

Tabla 5.14 Matrices Jacobianas expresadas en el marco de referencia local.

| Cadena cinemática                                                                                    | Matrices Jacobianas en el marco de referencia local                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Velocidad angular de plataforma móvil expresada en el marco de referencia local $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$ | ${}^2J_{\omega_p} = {}^2R_0 J_{\omega_p} = \begin{bmatrix} {}^2J_{\omega_p,x} \\ {}^2J_{\omega_p,y} \\ {}^2J_{\omega_p,z} \end{bmatrix}$ |
| Velocidad angular de plataforma móvil expresada en el marco de referencia local $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$ | ${}^3J_{\omega_p} = {}^3R_0 J_{\omega_p} = \begin{bmatrix} {}^3J_{\omega_p,x} \\ {}^3J_{\omega_p,y} \\ {}^3J_{\omega_p,z} \end{bmatrix}$ |
| Velocidad lineal de la segunda cadena SPU                                                            | ${}^2J_{B_2} = {}^2R_0 J_{B_2} = \begin{bmatrix} {}^2J_{B_2,x} \\ {}^2J_{B_2,y} \\ {}^2J_{B_2,z} \end{bmatrix}$                          |
| Velocidad lineal de la tercera cadena SPU                                                            | ${}^3J_{B_3} = {}^3R_0 J_{B_3} = \begin{bmatrix} {}^3J_{B_3,x} \\ {}^3J_{B_3,y} \\ {}^3J_{B_3,z} \end{bmatrix}$                          |

- d) Determinar las matrices Jacobianas de los cuerpos de cada una de las cadenas cinemáticas expresadas en sus respectivos marcos de referencia local, mediante las Ecuaciones expresadas en la Tabla 5.15.

Tabla 5.15 Matrices Jacobianas expresadas en el marco de referencia local del eslabón, cilindro y pistón de las cadenas cinemáticas.

| Cuerpos                                  | Matrices Jacobianas en el marco de referencia local                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Eslabón de la primera cadena cinemática  | ${}^1J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tan(\phi)\sin(\psi) & -\tan(\phi)\cos(\psi) & 1 \end{bmatrix}$ |
| Cilindro de la segunda cadena cinemática | ${}^2J_{12} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} e^2 J_{B_2,x} \\ e^2 J_{B_2,y} \\ 0_{1 \times 6} \\ {}^2 J_{B_2,y} \\ -{}^2 J_{B_2,x} \\ l_2 {}^2 J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix}$                                                       |
| Pistón de la segunda cadena cinemática   | ${}^2J_{22} = \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} (l_2 - f)^2 J_{B_2,x} \\ (l_2 - f)^2 J_{B_2,y} \\ l_2 {}^2 J_{B_2,z} \\ {}^2 J_{B_2,y} \\ -{}^2 J_{B_2,x} \\ l_2 {}^2 J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix}$                                   |
| Cilindro de la tercera cadena cinemática | ${}^3J_{13} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} e^3 J_{B_3,x} \\ e^3 J_{B_3,y} \\ 0_{1 \times 6} \\ {}^3 J_{B_3,y} \\ -{}^3 J_{B_3,x} \\ l_3 {}^3 J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix}$                                                       |
| Pistón de la tercera cadena cinemática   | ${}^2J_{23} = \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} (l_3 - f)^2 J_{B_3,x} \\ (l_3 - f)^2 J_{B_3,y} \\ l_3 {}^2 J_{B_3,z} \\ {}^3 J_{B_3,y} \\ -{}^3 J_{B_3,x} \\ l_3 {}^3 J_{\omega_{p,z}} \end{bmatrix}$                                   |

- e) Calcular de la matriz Jacobiana del mecanismo paralelo, mediante la Ecuación expresada en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16 Matriz Jacobiana del mecanismo.

| Mecanismo paralelo | Matriz Jacobiana del mecanismo                                                          |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 2SPU-1RU           | $J_p = \begin{bmatrix} {}^1J_{B_1,z} \\ -{}^2J_{B_2,z} \\ -{}^3J_{B_3,z} \end{bmatrix}$ |



### Paso 3: Formulación de las ecuaciones dinámicas

- a) Determinar la fuerza aplicada en el centro de masa de la plataforma mediante la Ecuación expresada en la Tabla 5.17.

Tabla 5.17 Fuerza en la plataforma móvil.

| Mecanismo paralelo                      | Fuerza                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Plataforma móvil del mecanismo 2SPU-1RU | $\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_p \\ \hat{\mathbf{n}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e + m_p \mathbf{g} - m_p \dot{\mathbf{V}}_p \\ \mathbf{n}_e - {}^0I_p \dot{\boldsymbol{\omega}}_p - \boldsymbol{\omega}_p \times ({}^0I_p \boldsymbol{\omega}_p) \end{bmatrix}$ |

- b) Determinar las fuerzas aplicadas y de inercia ejercidas en los centros de masa del cilindro y del pistón expresados en el marco local, expresadas en las Ecuaciones de la Tabla 5.18.

Tabla 5.18 Fuerzas aplicadas y de inercia en los actuadores.

| Parte de los actuadores                               | Fuerzas aplicadas                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Actuador rotatorio de la primera cadena 1RU           | ${}^1\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \hat{\mathbf{n}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 {}^1R_0 \mathbf{g} - m_1 {}^1\dot{\mathbf{V}}_1 \\ -{}^1I_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1I_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1) \end{bmatrix}$                         |
| Cilindro del actuador lineal de la segunda cadena SPU | ${}^2\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{12} \\ \hat{\mathbf{n}}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12} {}^2R_0 \mathbf{g} - m_{12} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{12} \\ -{}^2I_{12} {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2I_{12} {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \end{bmatrix}$ |
| Pistón del actuador lineal de la segunda cadena SPU   | ${}^2\mathbf{F}_{22} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{22} \\ \hat{\mathbf{n}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} {}^2R_0 \mathbf{g} - m_{22} {}^2\dot{\mathbf{V}}_{22} \\ -{}^2I_{22} {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2I_{22} {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \end{bmatrix}$ |
| Cilindro del actuador lineal de la tercera cadena SPU | ${}^3\mathbf{F}_{13} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{13} \\ \hat{\mathbf{n}}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{13} {}^3R_0 \mathbf{g} - m_{13} {}^3\dot{\mathbf{V}}_{13} \\ -{}^3I_{13} {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^3I_{13} {}^3\boldsymbol{\omega}_3) \end{bmatrix}$ |
| Pistón del actuador lineal de la tercera cadena SPU   | ${}^3\mathbf{F}_{23} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{23} \\ \hat{\mathbf{n}}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{23} {}^3R_0 \mathbf{g} - m_{23} {}^3\dot{\mathbf{V}}_{23} \\ -{}^3I_{23} {}^3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^3I_{23} {}^3\boldsymbol{\omega}_3) \end{bmatrix}$ |

### Paso 4: Resolución de ecuaciones dinámicas

Finalmente, se resuelven las ecuaciones dinámicas utilizando la Ecuación de la Tabla 5.19.

Tabla 5.19 Torque en la plataforma móvil.

| Nombre | Ecuación de la dinámica                                                                                                                                                                   |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Torque | $\tau = -(J_{x_p}^T J_p^T)^{-1} (J_{x_p}^T \mathbf{F}_p + J_{x_p}^T J_1^T \mathbf{F}_1 + \sum_{i=2}^3 (J_{x_p}^T J_{1i}^T {}^i\mathbf{F}_{1i} + J_{x_p}^T J_{2i}^T {}^i\mathbf{F}_{2i}))$ |

## 5.2 Programación del algoritmo

Basándose en los pasos para el algoritmo previamente detallado, se programa un código en MATLAB R2022b para resolver las ecuaciones de movimiento. Primero se define los parámetros de la simulación, luego se plantea las condiciones de movimiento y finalmente se presentan los resultados de la simulación.

### 5.2.1 Definición de los parámetros de simulación

Se diseñó un modelo CAD del mecanismo paralelo SPU-1RU en el software Autodesk Inventor Professional 2021 para determinar correctamente los parámetros de simulación. El mismo que permitió obtener las coordenadas de las juntas, condiciones inerciales y másicas, además de las condiciones de movimiento del tobillo. En la Figura 5.2 se muestra la representación del modelo CAD del mecanismo.

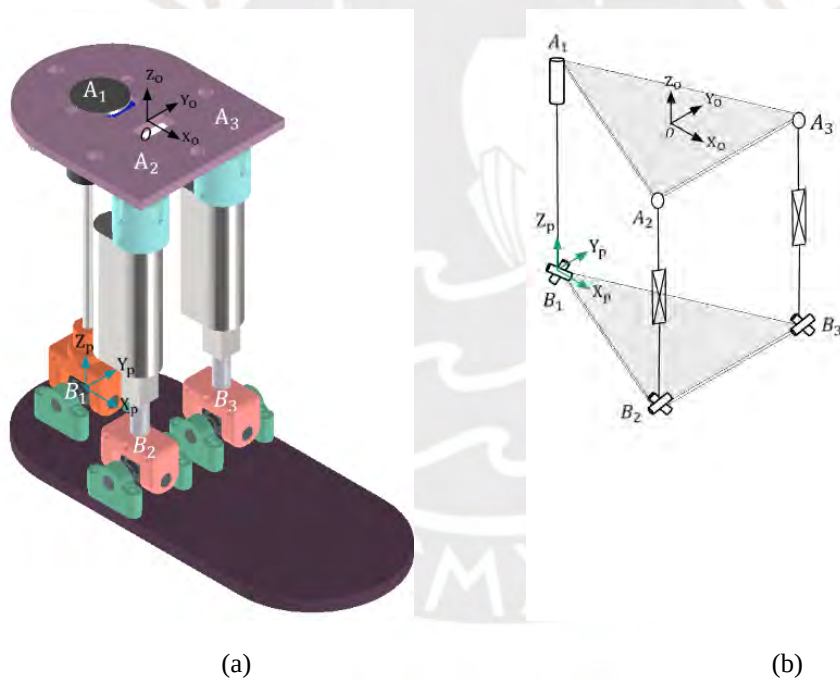


Fig. 5.2 Mecanismo paralelo: (a) modelo realizado en Autodesk Inventor Profesional 2021, (b) representación gráfica.

Coordenadas de las juntas: en la Tabla 5.20 se presentan las coordenadas de la plataforma fija, que fue obtenida desde el marco de referencia global  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ , y las coordenadas de la plataforma móvil que fue obtenida desde el marco de referencia de la plataforma móvil  $B_1(X_p, Y_p, Z_p)$ .

Tabla 5.20 Coordenadas de las juntas de la plataforma fija y móvil.

| Coordenadas de juntas en la plataforma fija                    | Coordenadas de juntas en la plataforma móvil                   |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| ${}^0A_1 = \begin{bmatrix} -36.74 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$     | ${}^pB_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$          |
| ${}^0A_2 = \begin{bmatrix} 23.26 \\ -26.57 \\ 0 \end{bmatrix}$ | ${}^pB_2 = \begin{bmatrix} 63.31 \\ -23.26 \\ 0 \end{bmatrix}$ |
| ${}^0A_3 = \begin{bmatrix} 23.26 \\ 26.57 \\ 0 \end{bmatrix}$  | ${}^pB_3 = \begin{bmatrix} 63.31 \\ 23.26 \\ 0 \end{bmatrix}$  |

Propiedades másicas: en la Tabla 5.21 se muestran las propiedades másicas de la plataforma móvil, los cilindros y los pistones de los actuadores lineales de la segunda y tercera cadena cinemática.

Tabla 5.21 Masa de la plataforma móvil, cilindro, pistón de las cadenas cinemáticas.

| Descripción                                       | Simbología | Valor | Unidades |
|---------------------------------------------------|------------|-------|----------|
| Masa de la plataforma móvil                       | $m_p$      | 0,22  | kg       |
| Masa del cilindro de la segunda cadena cinemática | $m_{12}$   | 0,085 | kg       |
| Masa del pistón de la segunda cadena cinemática   | $m_{22}$   | 0,010 | kg       |
| Masa del cilindro de la tercera cadena cinemática | $m_{13}$   | 0,085 | kg       |
| Masa del pistón de la tercera cadena cinemática   | $m_{23}$   | 0,010 | kg       |
| Masa del eslabón de la primera cadena cinemática  | $m_{11}$   | 0.21  | kg       |

Centro del cilindro a su respectiva junta esférica (e): son las distancias entre  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  al centro de masa del cilindro y pistón respectivamente, como se presenta en la Tabla 5.22.

Tabla 5.22 Distancias entre las juntas  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  y el centro de la masa del cilindro y pistón.

| Descripción                                              | Simbología | Valor | Unidades |
|----------------------------------------------------------|------------|-------|----------|
| Distancia entre $A_2$ y el centro de masa del cilindro 2 | e          | 55    | mm       |
| Distancia entre $B_2$ y el centro de masa del pistón 2   | f          | 27    | mm       |
| Distancia entre $A_3$ y el centro de masa del cilindro 3 | e          | 55    | mm       |
| Distancia entre $B_3$ y el centro de masa del pistón 3   | f          | 27    | mm       |

Propiedades inerciales: en la Tabla 5.23 se muestran las propiedades inerciales de la plataforma móvil, los cilindros y los pistones de los actuadores lineales de la segunda y tercera cadena cinemática.

Tabla 5.23 Momento de inercia de la plataforma móvil, cilindro y pistón de las cadenas cinemáticas.

| Descripción                                                      | Momento de Inercia                                                                      | Unidades            |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Momento de inercial de la plataforma móvil.                      | $I_p = \begin{bmatrix} 146.4 & 0 & 0 \\ 0 & 750.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1777.1 \end{bmatrix}$  | kg. mm <sup>2</sup> |
| Momento de inercia del cilindro de la segunda cadena cinemática. | $I_{12} = \begin{bmatrix} 33.48 & 0 & 0 \\ 0 & 33.48 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$ | kg. mm <sup>2</sup> |
| Momento de inercia del pistón de la segunda cadena cinemática.   | $I_{22} = \begin{bmatrix} 2.23 & 0 & 0 \\ 0 & 2.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$   | kg. mm <sup>2</sup> |
| Momento de inercia del cilindro de la tercera cadena cinemática. | $I_{13} = \begin{bmatrix} 33.48 & 0 & 0 \\ 0 & 33.48 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$ | kg. mm <sup>2</sup> |
| Momento de inercia del pistón de la tercera cadena cinemática.   | $I_{23} = \begin{bmatrix} 2.23 & 0 & 0 \\ 0 & 2.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}$   | kg. mm <sup>2</sup> |
| Momento de inercia del eslabón de la primera cadena cinemática.  | $I_{11} = \begin{bmatrix} 31.73 & 0 & 0 \\ 0 & 31.73 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$ | kg. mm <sup>2</sup> |

Vector de la gravedad: la gravedad se considera como  $\mathbf{g} = [0, 0, -9.81]^T \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ .

Fuerza externa: peso de una persona de 50 kg.

### 5.2.2 Condiciones de movimiento

Las condiciones de movimiento se encuentran detalladas en los requerimientos, en la sección de cinemática del capítulo 3. En el cual se detalla los ángulos de rotación de la articulación del tobillo durante un ciclo de marcha.

### 5.2.3 Código de la programación

El modelo desarrollado fue implementado en MATLAB R2022b y el código de la programación realizada se detalla en el Anexo F.

## 5.3 Resultados de la cinemática inversa de la plataforma móvil en MATLAB R2022b

Los resultados obtenidos mediante el modelo desarrollado e implementado en Matlab R2022b, se realizaron de la siguiente forma. Se utilizaron los datos biomecánicos de una persona de sexo femenino, de peso de 50 kg. y talla 1.52 m. Estos datos fueron los ángulos

de rotación  $(\psi, \phi, \theta)$  de la articulación del tobillo-pie durante el ciclo de marcha a  $1.3 \frac{m}{s}$ . Siendo el ángulo  $\psi$  perteneciente al movimiento de abducción-aducción el ángulo  $\phi$  el movimiento de eversión-inversión y el ángulo  $\theta$  el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión.

En la Figura 5.3 se presenta los datos de entrada que es la orientación de la plataforma móvil para luego pasar un proceso de cinemática inversa y posteriormente obtener los desplazamientos angular y lineal de los actuadores y las velocidades angular y lineal de los actuadores y finalmente las aceleraciones angulares y lineal de los actuadores.

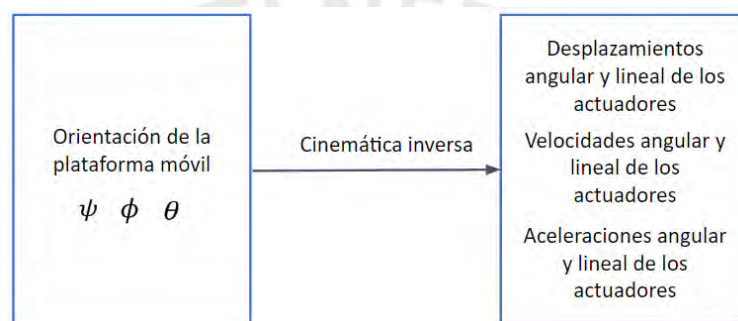


Fig. 5.3 Resultados de la cinemática inversa del mecanismo paralelo.

En esta sección se presentan los resultados de la cinemática inversa los desplazamientos angulares y lineales, las velocidades angulares y lineales, las aceleraciones angulares y lineales de los actuadores para los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital, eversión-inversión en el plano frontal, y abducción-aducción en el plano transversal y la combinación de todos los movimientos. Así como también la interpretación de estos resultados entorno a las fases del ciclo de marcha.

El ciclo de marcha se describe en dos períodos, el período de apoyo y el período de balanceo cada una caracterizada por diferentes patrones de movimiento. El período de apoyo es representado por las fases: contacto inicial, la respuesta a la carga, apoyo intermedio, apoyo final, pre-balanceo. El período de balanceo es presentado por las fases: balanceo inicial, balanceo intermedio, y balanceo final.

Así mismo, hay tiempos establecidos como el contacto inicial (IC), despegue del dedo del pie opuesto (OT), elevación del talón (HR), contacto inicial opuesto (OI), despegue



del dedo del pie (TO), despegue del dedo del pie (TO), pies adyacentes (FA), tibia vertical (TV).

### **5.3.1 Resultados del movimiento de plantar flexión-dorsiflexión (plano sagital).**

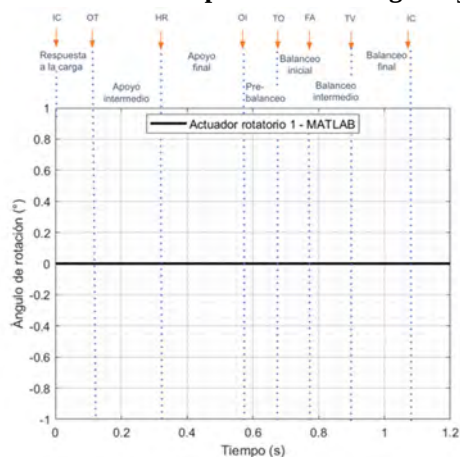
Los resultados del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión en el plano sagital del ciclo de marcha se presentan con las gráficas de la relación del desplazamiento angular y lineal, la velocidad angular y lineal y la aceleración angular y lineal de los actuadores con el tiempo.

El desplazamiento angular y lineal de los actuadores vs tiempo se presentan en las Figura 5.4a, 5.4b, donde en el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular, medido en grados para del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

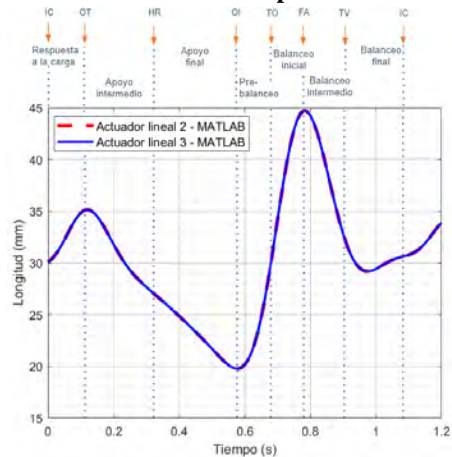
La velocidad angular y lineal vs tiempo se presentan en las Figuras 5.4c, y 5.4d, donde el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical indica la velocidad angular medido en grados sobre segundo para el actuador rotatorio 1 y en milímetros sobre segundos para los actuadores lineales 2 y 3.

La aceleración angular y lineal vs tiempo se presenta en las Figuras 5.4e, 5.4f, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical indica la aceleración angular, medido en grados por segundo al cuadrado para el actuador rotatorio 1 y la aceleración lineal, expresada en milímetros por segundo al cuadrado para los actuadores lineales 2 y 3.

### Desplazamientos angular y lineal de los actuadores vs tiempo

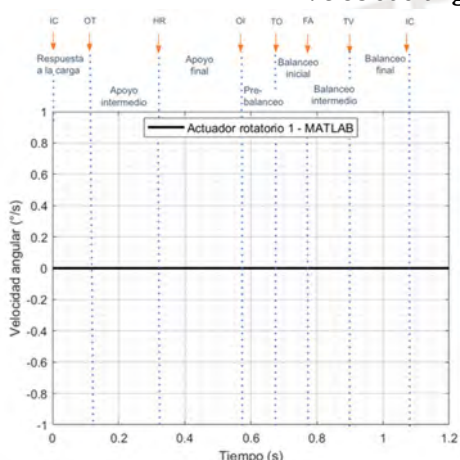


(a)

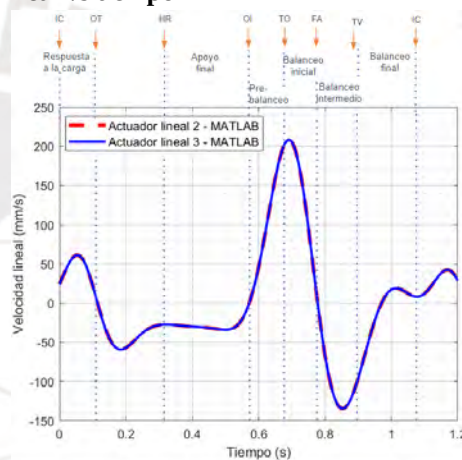


(b)

### Velocidad angular y lineal vs tiempo

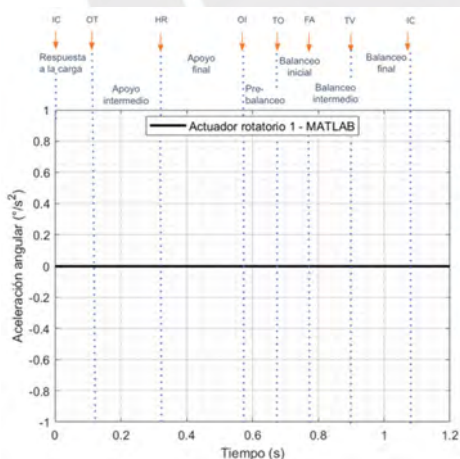


(c)

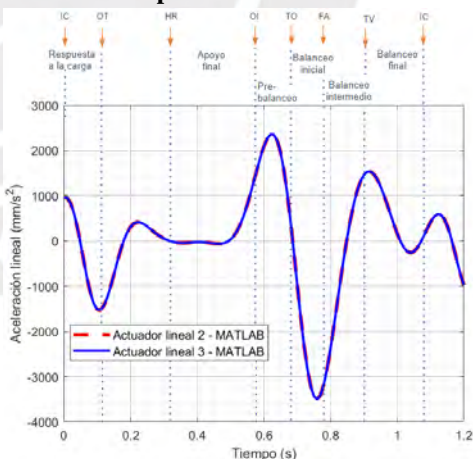


(d)

### Aceleración angular y lineal vs tiempo



(e)



(f)

Fig. 5.4 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular del actuador rotatorio, (d) velocidad lineal de los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

Análisis del actuador rotatorio: el actuador rotatorio de las Figuras 5.4a, 5.4c y 5.4e muestran distintas características de un actuador rotatorio durante un intervalo de tiempo en un ciclo de marcha: posición, velocidad y aceleración angulares, respectivamente. En todas las figuras, la representación gráfica es una línea horizontal constante en el valor de cero, lo que indica que no hay variación ni movimiento del actuador rotatorio. La posición angular no cambia, lo que sugiere que no hay rotación; la velocidad angular se mantiene en cero, indicando que no hay movimiento rotacional; y la aceleración angular también es cero, lo que confirma que no hay cambio en la velocidad angular.

Análisis de los actuadores lineales: Los actuadores lineales en las Figuras 5.4b, 5.4d y 5.4f reflejan una sincronización en el desplazamiento, velocidad y aceleración a lo largo del tiempo durante un ciclo de marcha. La superposición de las curvas en la Figura 5.4b muestra un desplazamiento lineal coordinado, característico de mecanismos paralelos que ejecutan movimientos de plantarflexión-dorsiflexión. Esta coordinación se mantiene en las variaciones de velocidad, como se observa en la Figura 5.3d, donde las líneas siguen una misma trayectoria a lo largo del tiempo, indicando una velocidad sincronizada entre los actuadores. Además, cuando la velocidad pasa por cero, se observa que el desplazamiento del actuador alcanza su máximo o mínimo relativo. Similarmente, las aceleraciones de los actuadores, representadas en la Figura 5.3f, exhiben fluctuaciones que reflejan cambios en la velocidad, manteniendo la sincronización en sus trayectorias a lo largo del tiempo. Además, cuando la aceleración pasa por cero, se observa que la velocidad del actuador alcanza su máximo o mínimo relativo.

Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha: durante un ciclo de marcha completo, la Figura 5.4 muestra los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los actuadores en las fases del ciclo de marcha en el plano sagital.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): en el contacto inicial, las curvas comienzan en un punto que representa el contacto del pie (plataforma móvil) con el suelo. Es decir, los actuadores se encuentran en su posición más contraída.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): las curvas muestran un cambio del desplazamiento como de una desaceleración en los

actuadores lineales. Es decir que los pistones de los actuadores lineales comienzan a extenderse, experimentando el movimiento de plantarflexión.

3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): las curvas presentan un descenso en desplazamiento, y hay menores cambios de velocidad, en este caso los pistones de los actuadores lineales comienzan a contraerse experimentando el movimiento de dorsiflexión.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): las curvas continúan descendiendo aún más y la velocidad aumenta, en este caso los pistones de los actuadores lineales continúan contrayéndose, alcanzando la plataforma móvil la máxima dorsiflexión.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): la curva cambia de dirección iniciando el ascenso, y los pistones de los actuadores lineales comienzan a extenderse, se observa una aceleración de los actuadores, en este caso la plataforma móvil pasa a plantarflexión.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la curva continua en ascenso y los pistones de los actuadores lineales continúan extendiéndose. La plataforma móvil continua con el movimiento de plantarflexión con una desaceleración gradual y aceleraciones menores.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): La curva desciende, lo que indica que los actuadores se contraen haciendo que la plataforma móvil se mueva hacia adelante.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): finalmente, la curva asciende nuevamente, y la aceleración incrementa otra vez, preparándose para el siguiente contacto inicial. Es decir que los pistones de los actuadores lineal se extienden.

### **5.3.2 Resultados del movimiento de eversión-inversión (plano frontal)**

Los resultados del movimiento de eversión-inversión en el plano frontal en el ciclo de marcha se presentan con las gráficas de la relación del desplazamiento angular y lineal de los actuadores contra el tiempo, luego la relación de la velocidad angular y lineal de los actuadores con el tiempo. Finalmente, se presenta la relación de la aceleración angular y lineal de los actuadores con el tiempo.



Desplazamiento angular y lineal de los actuadores vs tiempo: En las Figuras 5.5a y 5.5b, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular, medido en grados para el actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

Velocidad angular y lineal vs tiempo: En las Figuras 5.5c, y 5.5d, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical indica la velocidad angular medido en grados sobre segundo para el actuador rotatorio 1 y en milímetros sobre segundos para los actuadores lineales 2 y 3.

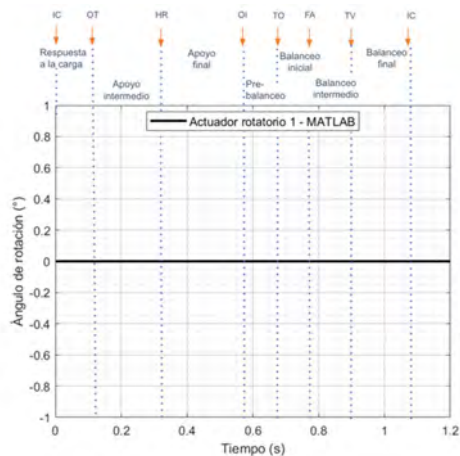
Aceleración angular y lineal vs tiempo: En las Figuras 5.5e y 5.5f, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical indica la aceleración angular, medido en grados por segundo al cuadrado para el actuador rotatorio 1 y la aceleración lineal, expresada en milímetros por segundo al cuadrado para los actuadores lineales 2 y 3.

Análisis de los actuadores: las Figuras 5.5a, 5.5c y 5.5e presentan un comportamiento estacionario del actuador rotatorio durante un intervalo de tiempo en un ciclo de marcha. La línea horizontal constante en todas las gráficas indica que no hay movimiento rotacional, velocidad ni aceleración angular; el actuador permanece en una posición fija con un ángulo, velocidad y aceleración que se mantienen en cero a lo largo del tiempo.

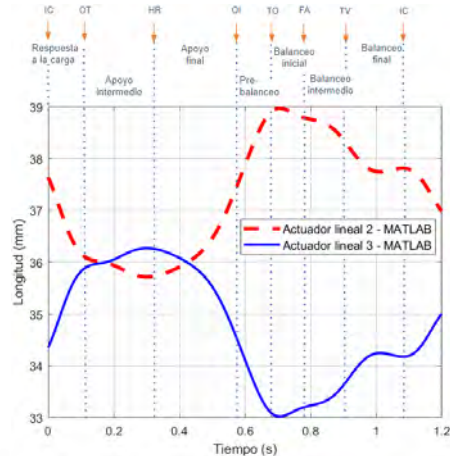
En las Figuras 5.5b, 5.5d y 5.5f, los actuadores lineales muestran un patrón de movimiento y velocidad complementario y coordinado a lo largo de un ciclo de marcha en el mecanismo paralelo. Los desplazamientos de los actuadores lineales 2 y 3 son simétricos respecto a una línea paralela al eje horizontal, alternando entre contracción y extensión para facilitar los movimientos de eversión e inversión del pie. Este movimiento se refleja también en las velocidades y aceleraciones, cuando uno de los actuadores aumenta su velocidad o acelera, el otro desacelera o disminuye su velocidad, y viceversa, mostrando una simetría en el eje horizontal de la gráfica.



### Desplazamientos angular y lineal de los actuadores vs tiempo

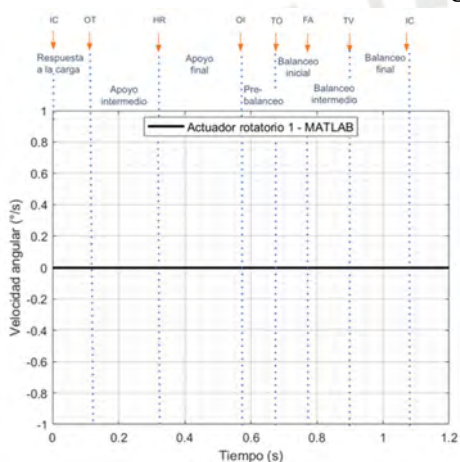


(a)

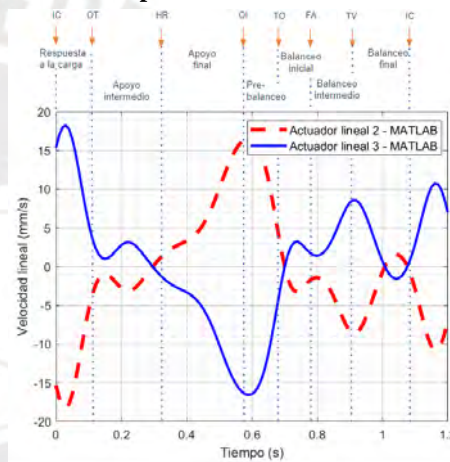


(b)

### Velocidad angular y lineal vs tiempo

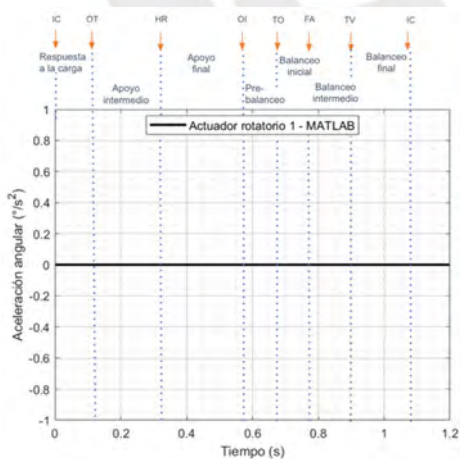


(c)

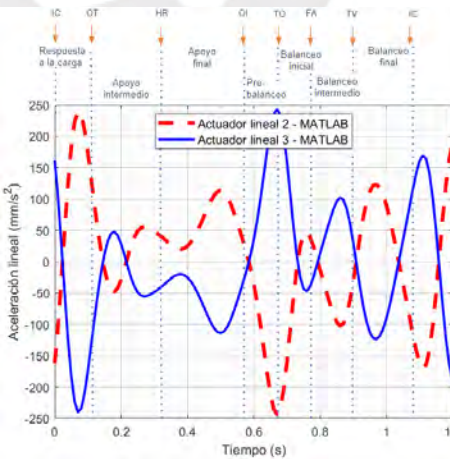


(d)

### Aceleración angular y lineal vs tiempo



(e)



(f)

Fig. 5.5 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha: en la Figura 5.5 se presenta de los desplazamientos angular y lineal, velocidades y aceleraciones de los actuadores en las fases del ciclo de marcha en el plano frontal, los mismos que se interpretan de la siguiente manera:

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): en el contacto inicial, las curvas comienzan en un punto que representa el contacto del pie con el suelo. Es decir, el pistón del actuador lineal 2 se extendido más con respecto al pistón del actuador lineal 3. La plataforma móvil, se encuentra ligeramente en inversión.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): las curvas muestran un cambio del desplazamiento en los actuadores lineales. El pistón del actuador lineal 2 se contrae, y el pistón del actuador lineal 3 se extiende, por lo tanto, la plataforma móvil se encuentra en eversión. Los actuadores muestran un cambio de velocidad y aceleración.
3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): El pistón del actuador lineal 2 continúa contrayéndose, y el pistón del actuador lineal 3 continúa extendiéndose, por lo tanto, la plataforma móvil llega a su máxima eversión. Las curvas de velocidad y aceleración muestran variaciones menores.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): el pistón del actuador lineal 2 se extiende, mientras el pistón del actuador lineal 3 se contrae. En este caso la plataforma móvil alcanza su máxima inversión, la velocidad y aceleración aumenta durante la transición al balanceo.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): el pistón del actuador lineal 2 continúa extendiéndose y el pistón del actuador lineal 3 contrayéndose. La plataforma pasa a una eversión. La velocidad alcanza un pico mientras los actuadores aceleran para levantar la plataforma móvil.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): el pistón del actuador lineal 2 se contrae y el pistón del actuador lineal 3 extiende. La plataforma continua en eversión. La velocidad disminuye a medida que los actuadores pasan por una fase de desaceleración al comienzo del balanceo.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): el pistón del actuador lineal 2 continúa contrayéndose y el pistón del actuador lineal 3

continúa en extensión. La velocidad y aceleración son bajas ya que el pie no necesita moverse rápidamente en el aire y no está soportando peso.

8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): el pistón del actuador 2 se contrae y el pistón del actuador 3 se extiende. La plataforma móvil regresa a la posición de inversión. La velocidad y la aceleración aumenta nuevamente mientras los actuadores se preparan para la próxima fase del ciclo de marcha.

### **5.3.3 Resultados del movimiento de abducción-aducción (plano transversal)**

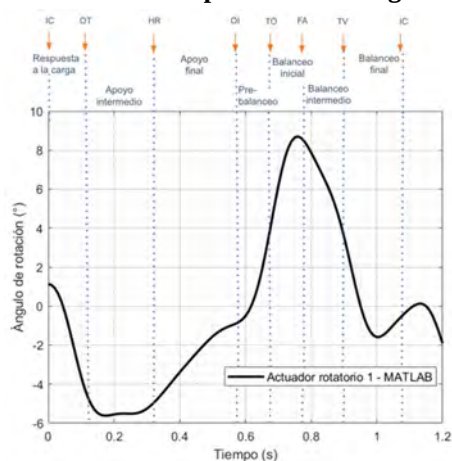
Los resultados del movimiento de abducción-aducción en el plano transversal se presentan con las gráficas de la relación del desplazamiento angular y lineal de los actuadores contra el tiempo, luego la relación de la velocidad angular y lineal de los actuadores con el tiempo. Finalmente se presenta la relación de la aceleración angular y lineal de los actuadores con el tiempo.

Desplazamiento angular y lineal de los actuadores vs tiempo: En Figuras 5.6a y 5.6b, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular, medido en grados para el actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

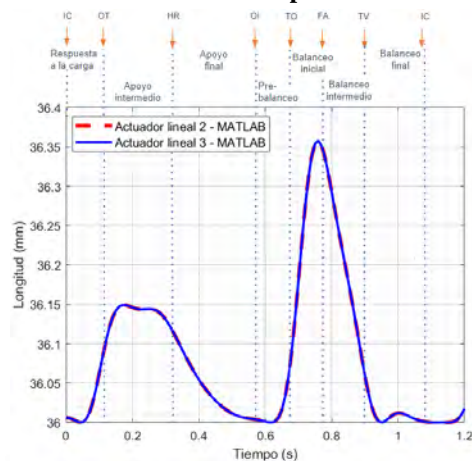
Velocidad angular y lineal vs tiempo en el movimiento: En Figuras 5.6c y 5.6d, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica la velocidad angular, medido en grados por segundo para el actuador rotatorio 1 y la velocidad lineal expresado en milímetros por segundo para los actuadores lineales 2 y 3.



### Desplazamientos angular y lineal de los actuadores vs tiempo

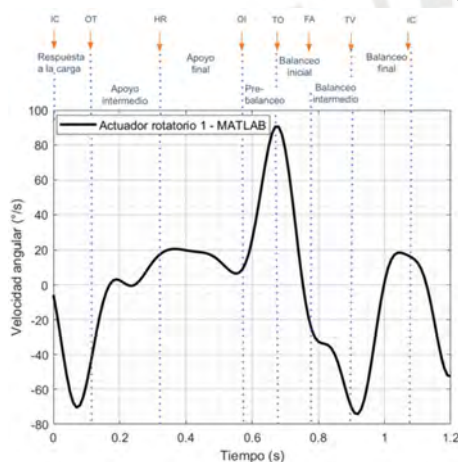


(a)

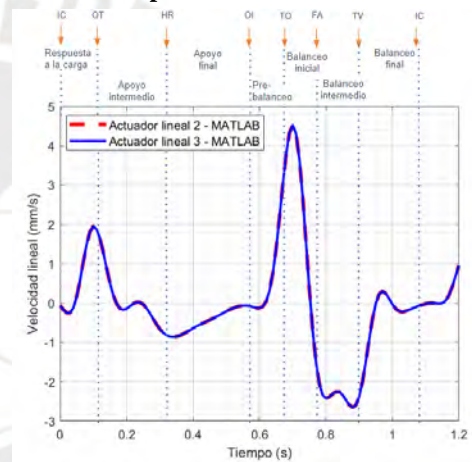


(b)

### Velocidad angular y lineal vs tiempo

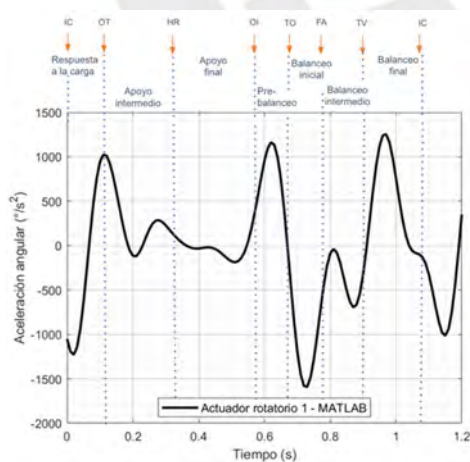


(c)

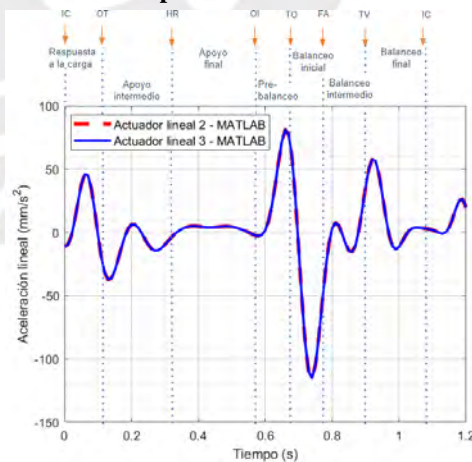


(d)

### Aceleración angular y lineal vs tiempo



(e)



(f)

Fig. 5.6 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3.

Análisis de los actuadores: el análisis de los actuadores rotatorios muestra un patrón consistente en la variación del desplazamiento, la velocidad y la aceleración angulares a lo largo del ciclo de marcha, representados en las Figuras 5.6a, 5.6c y 5.6d respectivamente, mediante líneas continuas. Todos comienzan desde un punto de referencia y muestran un movimiento inicial en sentido antihorario (abducción), seguido de un cambio hacia el sentido horario (aducción), destacando un ciclo repetitivo de inversión de dirección que culmina con el retorno a la posición inicial. Durante el tiempo, cada parámetro atraviesa variaciones desde valores iniciales hacia valores negativos o positivos, reflejando la aceleración y deceleración asociadas al ciclo de marcha del mecanismo paralelo, con picos que marcan los límites de cada movimiento.

Los actuadores lineales 2 y 3 presentan un comportamiento coordinado en tres aspectos diferentes: desplazamiento, velocidad y aceleración, según se observa en las Figuras 5.6b, 5.6d y 5.6f. En cada uno de estos aspectos, las curvas representativas de ambos actuadores muestran trayectorias superpuestas, indicando una sincronización en su funcionamiento a lo largo del tiempo. En el caso del desplazamiento lineal, se evidencia que ambos actuadores siguen una trayectoria similar. Respecto a la velocidad, se observan diferentes variaciones de aumentos y decremento lo cual corresponde con las variaciones de los desplazamientos, por lo que cuando la velocidad es positiva, el desplazamiento aumenta. Finalmente, en la aceleración, se observaron variaciones significativas con picos positivos y negativos (en el intervalo 0.6-0.8), indicando los puntos de máxima aceleración en direcciones alternas, correspondiente con la rápida variación de la velocidad.

#### Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

A continuación, se presenta un análisis de los desplazamientos, velocidad y aceleración (angular y lineal) de los actuadores en las fases del ciclo de marcha en el plano transversal.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): en el contacto inicial, tanto para el desplazamiento, velocidad como aceleración de los actuadores marcan el comienzo del ciclo de marcha.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): el actuador rotario empieza a moverse en sentido antihorario. Los pistones de los actuadores



lineales empiezan a extenderse. Los actuadores ajustan rápidamente su posición y velocidad.

3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): el actuador rotatorio continúa moviéndose en sentido antihorario y luego cambia de sentido horario. En cambio, los pistones de los actuadores lineales continúan extendiéndose hasta llegar al primer pico, y cambian de sentido, es decir los pistones comienzan a contraerse. La velocidad presenta cambios leves, lo que indica un soporte consistente durante esta fase.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): el actuador rotatorio gira en sentido horario, mientras que los actuadores lineales se contraen. Las curvas de velocidad presentan un incremento en la velocidad y un cambio de aceleración a medida que los actuadores se preparan para terminar el apoyo y la transicional a la fase de balanceo.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): el actuador rotatorio continúa girando en sentido horario y los actuadores lineales continúan extendiéndose hasta alcanzar un valor máximo. La velocidad de los actuadores aumenta, y existe un pico de aceleración.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): el actuador rotatorio continúa moviéndose en sentido horario, y los pistones de los actuadores lineales continúan extendiéndose. La velocidad y la aceleración disminuyen.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): el actuador rotatorio cambia de dirección en sentido antihorario, y los pistones de los actuadores comienzan a contraerse. La velocidad disminuye y aceleración aumenta.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): el actuador rotatorio gira en sentido horario y los actuadores lineales se estabilizan hasta llegar a su posición inicial. La velocidad se incrementa mientras que la aceleración disminuye.

#### **5.3.4 Resultados del movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal).**

Los resultados del movimiento combinado en el plano sagital, frontal y transversal se presentan con las gráficas de la relación del desplazamiento angular y lineal de los actuadores contra el tiempo, luego la relación de la velocidad angular y lineal de los

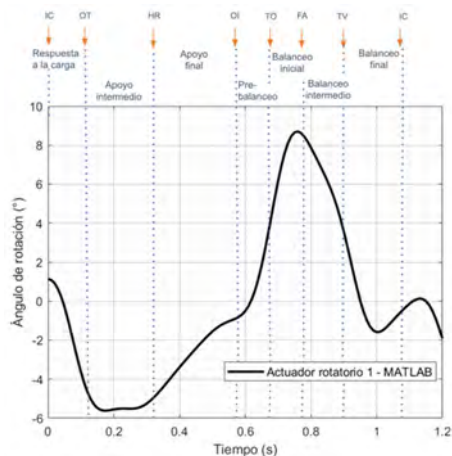
actuadores con el tiempo. Finalmente se presenta la relación de la aceleración angular y lineal de los actuadores con el tiempo.

Desplazamiento angular y lineal de los actuadores vs tiempo: Las Figuras 5.7a y 5.7b muestran el desplazamiento angular del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal de dos actuadores lineales 2 y 3, todos pertenecientes al mecanismo paralelo durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular, medido en grados para el actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

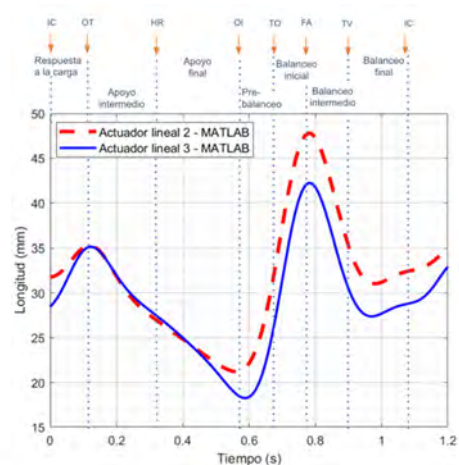
Velocidad angular y lineal vs tiempo: Las Figuras 5.7c y 5.7d muestran la velocidad angular del actuador rotatorio 1 y la velocidad lineal de dos actuadores lineales 2 y 3, todos pertenecientes al mecanismo paralelo durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica la velocidad angular, medido en grados por segundo para el actuador rotatorio 1 y la velocidad lineal expresado en milímetros por segundo para los actuadores lineales 2 y 3.

Aceleración angular y lineal vs tiempo: Las Figuras 5.7e y 5.7f muestran la aceleración angular del actuador rotatorio 1 y la aceleración lineal de dos actuadores lineales 2 y 3, todos pertenecientes al mecanismo paralelo durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica la aceleración angular, medido en grados por segundos al cuadrado para el actuador rotatorio 1 y la aceleración lineal expresado en milímetros por segundos al cuadrado para los actuadores lineales 2 y 3.

### Desplazamientos angular y lineal de los actuadores vs tiempo

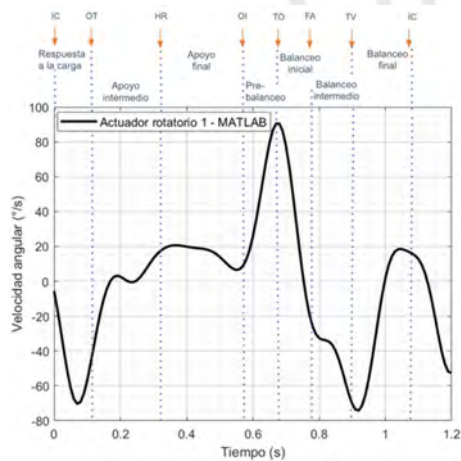


(a)

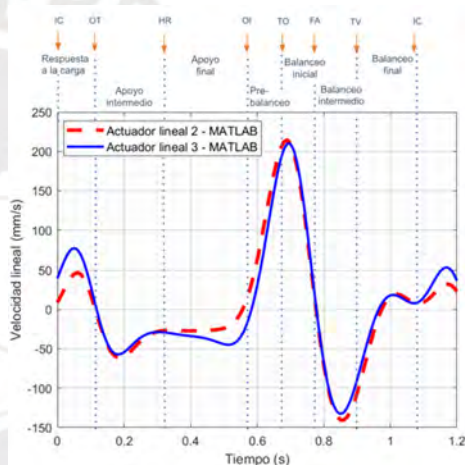


(b)

### Velocidad angular y lineal vs tiempo

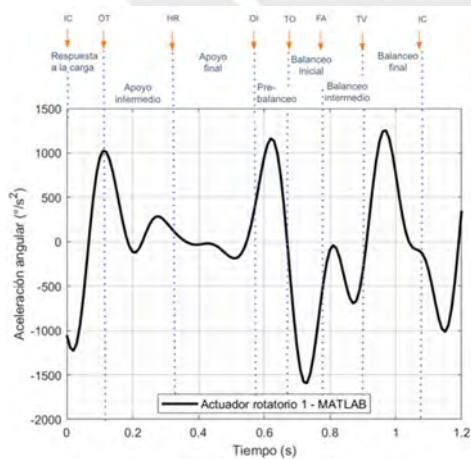


(c)

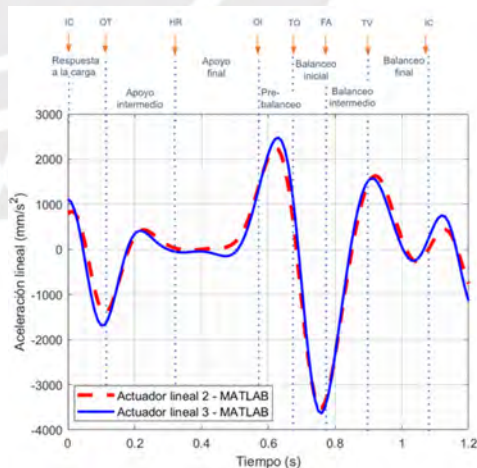


(d)

### Aceleración angular y lineal vs tiempo



(e)



(f)

Fig. 5.7 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b: (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio, (b) longitud de los actuadores lineales 2 y 3, (c) velocidad angular en el actuador rotatorio, (d) velocidad lineal en los actuadores lineales 2 y 3, (e) aceleración angular en el actuador rotatorio, (f) aceleración lineal en los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

Análisis de los actuadores: El análisis de las Figuras 5.6a, 5.6c, y 5.6e sobre el desplazamiento, velocidad y aceleración angular del actuador rotatorio 1 durante el ciclo de marcha muestra un patrón de movimiento correspondiente a los ángulos de entrada de rotación. Inicialmente, el actuador parte de una posición inicial, experimentando una rotación antihoraria que se refleja en la disminución hacia valores negativos tanto en desplazamiento como en velocidad. Este movimiento se invierte después de alcanzar un pico, lo que indica el límite máximo de rotación antes de revertir la dirección hacia la posición inicial. La aceleración angular muestra un patrón ondulado con picos positivos y negativos, evidenciando alternancia entre aceleración y desaceleración en el movimiento de abducción-aducción. Estos patrones consistentes en las tres métricas demuestran cómo el actuador ajusta su comportamiento a lo largo del ciclo de marcha para cumplir con los requisitos de movimiento de rotación durante el ciclo de marcha.

Las Figuras 5.6b, 5.6d, y 5.6f ilustran el comportamiento de los actuadores lineales a lo largo del ciclo de marcha, mostrando no una total sincronización en términos de desplazamiento, velocidad, y aceleración, debido a que se combina 3 movimientos rotacionales (plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción). A pesar de que las curvas presentan patrones similares, pero no idénticos, todas reflejan un ciclo de descenso y ascenso que corresponde a las fases del ciclo de marcha. Este comportamiento coordinado indica que los actuadores lineales ajustan su operación de manera precisa para seguir el patrón de movimiento rotacional requerido, evidenciando una integración y respuesta adaptativa al ciclo de marcha.

#### Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

Se presenta un análisis de los desplazamientos, velocidades, y aceleraciones angular y lineal de los actuadores en las fases del ciclo de marcha.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): En este punto de partida, los actuadores están en una longitud inicial que corresponde a la posición inicial de la plataforma móvil.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): las curvas presentan un cambio de ángulo de rotación del actuador rotatorio y un cambio en la



longitud de los actuadores lineales. Las velocidades y aceleraciones presentan un cambio, mientras la velocidad se incrementa, la aceleración decrece.

3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): las curvas presentan un cambio, lo que indica que los actuadores están sosteniendo la plataforma móvil de manera estable.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): las curvas continúan descendiendo en este caso los pistones de los actuadores lineales continúan contrayéndose.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): la curva cambia de dirección iniciando el ascenso, y los pistones de los actuadores lineales comienzan a extenderse. Se observa un pico de velocidad y aceleración.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la curva continua en ascenso y los pistones de los actuadores lineales continúan extendiéndose.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): La curva de desplazamiento y velocidad desciende, lo que indica que los actuadores se contraen haciendo que la plataforma móvil se mueva.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): la curva de desplazamiento y velocidad asciende nuevamente, mientras que la curva de aceleración disminuye.

#### **5.4 Resultados de la dinámica inversa de la plataforma móvil en MATLAB R2022b y Simscape con datos Biomecánicos usando Plataforma AMTI**

Los resultados del estudio se basan en el uso del modelo dinámico inverso elaborado con MATLAB R2022b y Simscape (Ver Anexo G), enfocado en analizar el comportamiento de actuadores en el mecanismo paralelo. Este análisis incluye movimientos específicos como plantarflexión-dorsiflexión en el plano sagital, eversión-inversión en el plano frontal, y la abducción-aducción en el plano transversal, así como la combinación de todos estos movimientos. La dinámica de los actuadores se analiza a través de un diagrama detallado en la Figura 5.8, donde se introducen variables como:

- a) El peso de usuario, específicamente 50 kg, correspondiente a una persona de sexo femenino con una estatura de 1.52 m. En la Figura 5.9a se presenta los datos de la



variación del peso durante el ciclo de marcha obtenidos por medio de una plataforma de fuerza AMTI.

- b) El torque del tobillo (Figura 5.9b).
- c) El peso y momentos de inercia de los cuerpos del mecanismo.
- d) Los desplazamientos (tanto angular como lineal) de los actuadores.
- e) Las velocidades (tanto angular como lineal)
- f) Las aceleraciones (también tanto angular como lineal).

A partir de estos datos de entrada y mediante la aplicación de dinámica inversa, se calculan el torque necesario para el actuador rotatorio y las fuerzas requeridas por los actuadores lineales para realizar los movimientos descritos.

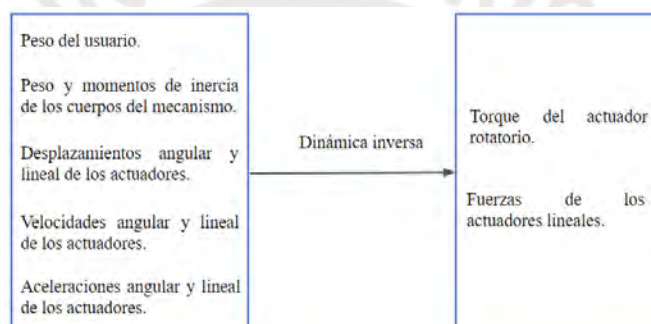


Fig. 5.8 Dinámica inversa del mecanismo paralelo.

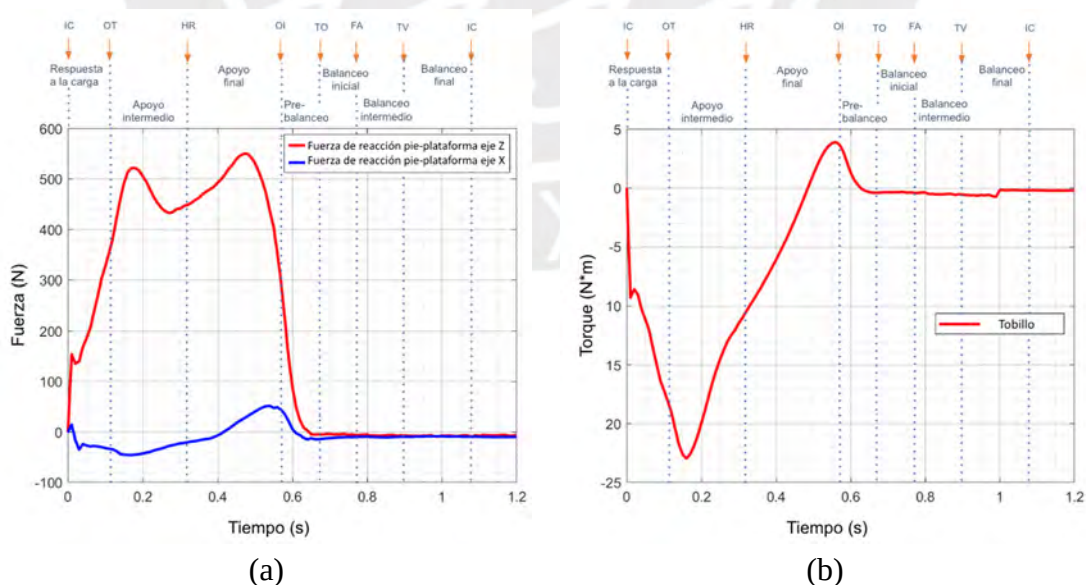


Fig. 5.9 Biomecánica del tobillo: (a) fuerzas de reacción pie-plataforma de fuerza, (b) torque del tobillo.

### 5.4.1 Resultados del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital)

Se detallan los resultados del torque del actuador rotatorio y fuerza de dos actuadores lineales durante el movimiento plantarflexión-dorsiflexión en plano sagital del ciclo de marcha. En la Figura 5.10, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, el torque, medido en Newton por metro para del actuador rotatorio 1 y las fuerzas expresadas en Newton para los actuadores lineales 2 y 3.

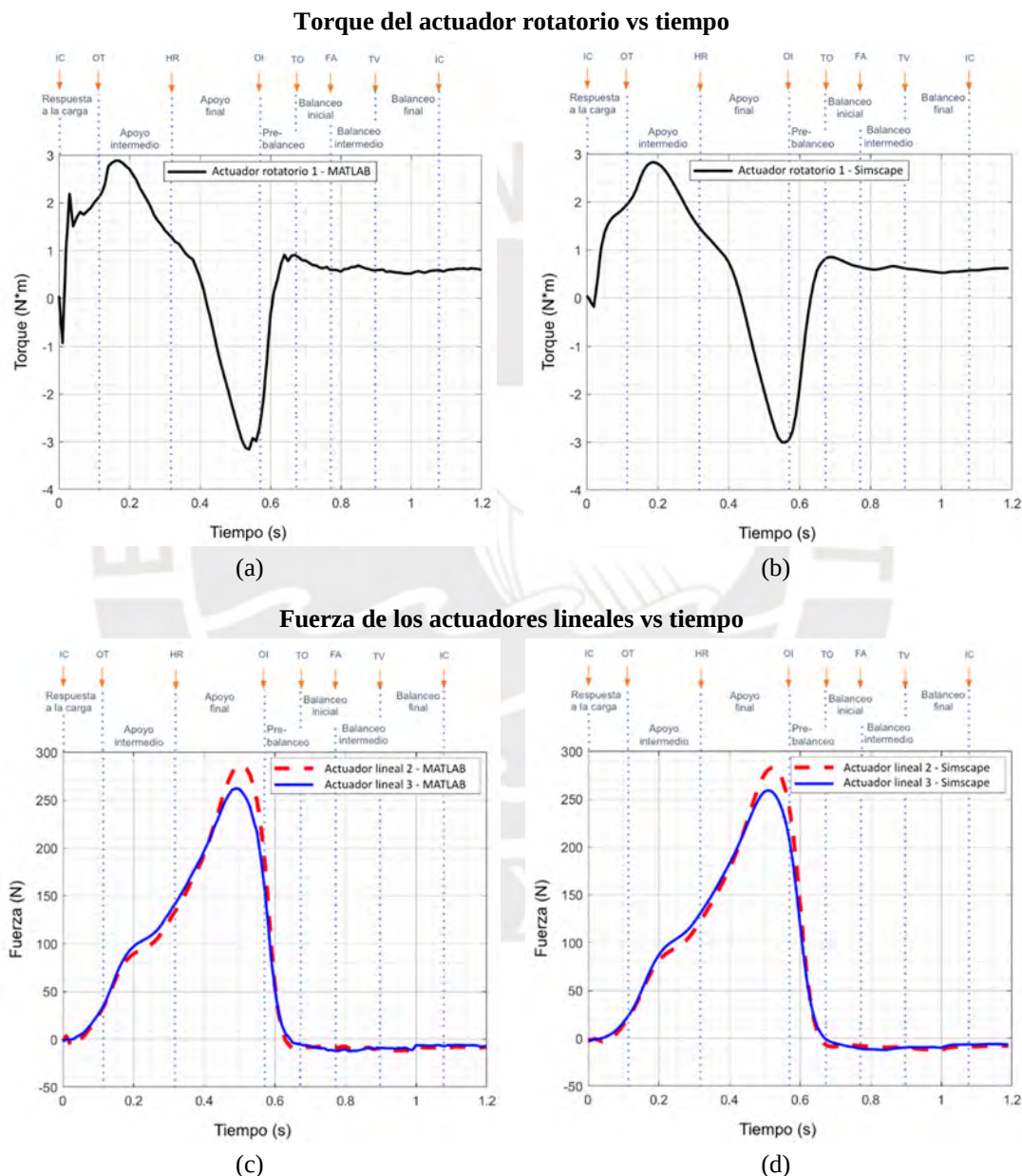


Fig. 5.10 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

El actuador rotatorio: Se puede observar que tanto la gráfica obtenida del modelo realizado en MATLAB R2022b (Figura 5.10a) y la gráfica obtenida en el modelo Simscape (Figura 5.10b) son similares en forma. En ambas figuras se muestra un pico de torque inicial positivo alrededor de 0.2 segundos. Luego del pico inicial ambas curvas muestran una caída significativa, alcanzando valores negativos. Posteriormente el torque se mantiene en 0.5 Nm aproximadamente. En ambas simulaciones el torque comienza a aumentar justo después del contacto inicial esto es debido a la preparación del actuador para soportar el peso del cuerpo al inicio del contacto con el suelo. Este torque positivo del torque es una respuesta del actuador al impacto del pie contra el suelo donde se requiere un torque significativo para estabilizar la pierna. Luego en la fase de apoyo intermedio el torque empieza a disminuir pasando a valores negativos. Este valor negativo máximo del torque indica un esfuerzo del actuador para preparar la pierna para el despegue, transfiriendo la carga al otro pie.

En la fase de pre-balanceo el torque comienza a aumentar nuevamente hacia valores positivos. Este torque indica la preparación del actuador para el balanceo de la pierna, empezando a levantar el pie del suelo. Durante las siguientes fases del balance el actuador mantiene un torque relativamente bajo de 0.5 Nm aproximadamente, ya que la pierna está en el aire y no requiere un gran esfuerzo para mantener su posición.

Los actuadores lineales: Se puede observar que tanto la gráfica obtenida del modelo realizado en MATLAB R2022b (Figura 5.10c) y la gráfica obtenida en el modelo Simscape (Figura 5.10d) son similares en su forma. Ambas simulaciones muestran un patrón similar en el comportamiento de la fuerza, con un aumento significativo al inicio y una disminución gradual después del pico máximo.

#### Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

Se muestra un análisis de los desplazamientos angular y lineal de los actuadores en las subfases del ciclo de marcha en el plano sagital.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): En el momento en que la plataforma móvil se ubica en su contacto inicial, los actuadores generan una fuerza para estabilizar la plataforma móvil. Por lo que existe un aumento de fuerza y torque.

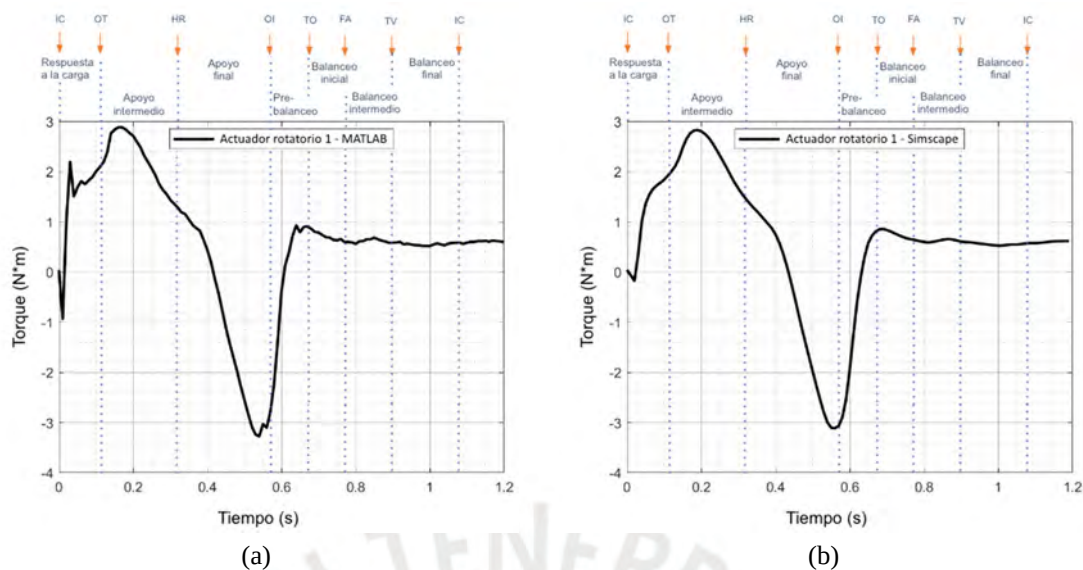
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): se observa un aumento en la fuerza justo después del contacto inicial. El aumento de la fuerza es en respuesta del actuador a la carga aplicada por el peso del cuerpo.
3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): durante esta fase, los actuadores aumentan la fuerza y torque para proporcionar un apoyo estable.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): los actuadores aumentan su fuerza y el torque disminuye a medida que la plataforma móvil se prepara para levantarse del suelo.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): hay una disminución de la fuerza de los actuadores lineales mientras que el torque aumenta el actuador rotatorio.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la fuerza y torque disminuye significativamente ya que los actuadores ya no necesitan soportar el peso del usuario.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): durante esta fase los actuadores aplican un torque mínimo, ya que el pie está en el aire y se mueve hacia adelante.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): la fuerza permanece baja en preparación para la siguiente fase (contacto inicial).

#### **5.4.2 Resultados del movimiento de eversión-inversión (plano frontal)**

Se detallan los resultados del torque y fuerza del movimiento eversión-inversión en el plano frontal a través de la Figura 5.11. Estas gráficas muestran el torque del actuador rotatorio y las fuerzas de dos actuadores lineales durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, el torque, medido en Newton por metro para el actuador rotatorio 1 y las fuerzas expresadas en Newton para los actuadores lineales 2 y 3.



### Torque del actuador rotatorio vs tiempo



### Fuerza de los actuadores lineales vs tiempo

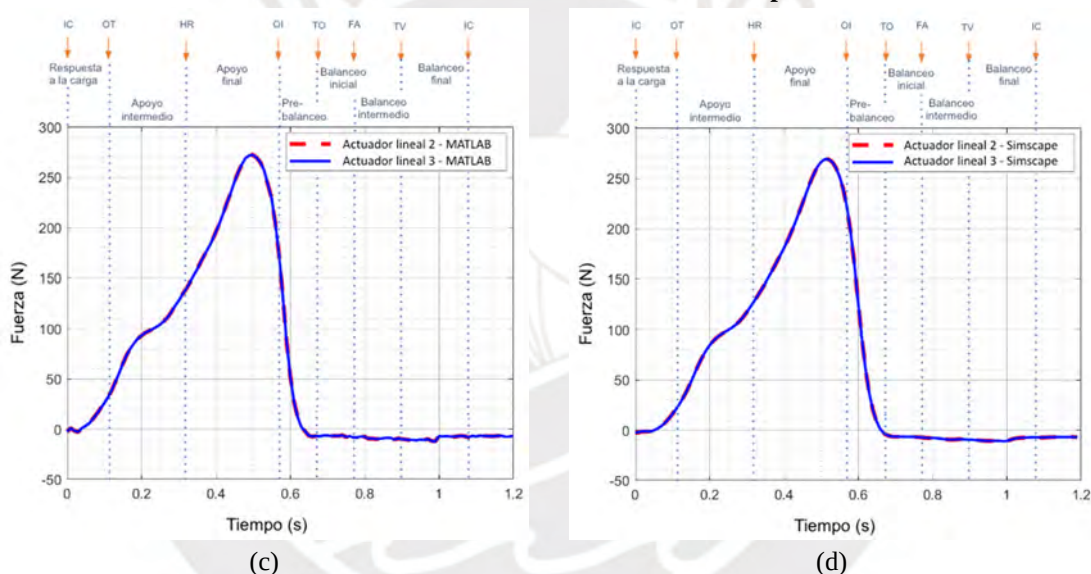


Fig. 5.11 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo respectivamente.

El actuador rotatorio: el torque del actuador rotatorio es representado en la Figura 5.11a y 5.11b. Se observa que ambas figuras son similares en forma. El incremento inicial está relacionado con la preparación del tobillo para eversión, ya que el pie (plataforma móvil) se posiciona para hacer contacto con el suelo. Luego existe una disminución del torque por el movimiento de inversión, donde el pie (plataforma móvil) se mueve hacia una posición para estabilizar el cuerpo. Luego el torque comienza a aumentar nuevamente hacia un pico de valores positivos. El torque permanece cercano a 0.5Nm y se preparándose para el próximo contacto inicial.



Los actuadores lineales: representados por dos curvas que muestran el comportamiento de los actuadores lineales en términos de fuerza a lo largo del tiempo, como se muestra en la Figura 5.11c y 5.11d. Las fuerzas de los actuadores muestran un comportamiento similar debido a la naturaleza del movimiento de eversión-inversión, que implica desplazamientos simétricos de los actuadores lineales.

Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

Se muestra un análisis del torque y la fuerza de los actuadores en las subfases del ciclo de marcha en el plano frontal.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): la fuerza y el torque generados por los actuadores permite estabilizar la plataforma móvil al hacer contacto con el suelo.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): Se observa un aumento de fuerza, ya que los actuadores deben adaptarse al peso del cuerpo del usuario que se transfiere al pie (plataforma móvil).
3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): La fuerza va aumentando y el torque alcanza su pico máximo ya que el pie sostiene el peso del cuerpo y los actuadores mantienen la estabilidad.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): la fuerza alcanza su pico máximo, a medida que el pie se prepara para el despegue.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): hay un decremento en la fuerza para impulsar el pie fuera del suelo.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la fuerza disminuye nuevamente ya que el pie se encuentra en el aire y no hay necesidad de soporte.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): la fuerza aplicada es mínima, ya que el pie se mueve hacia adelante sin soportar carga.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): la fuerza permanece baja en preparación para el siguiente contacto inicial, completando el ciclo de marcha.

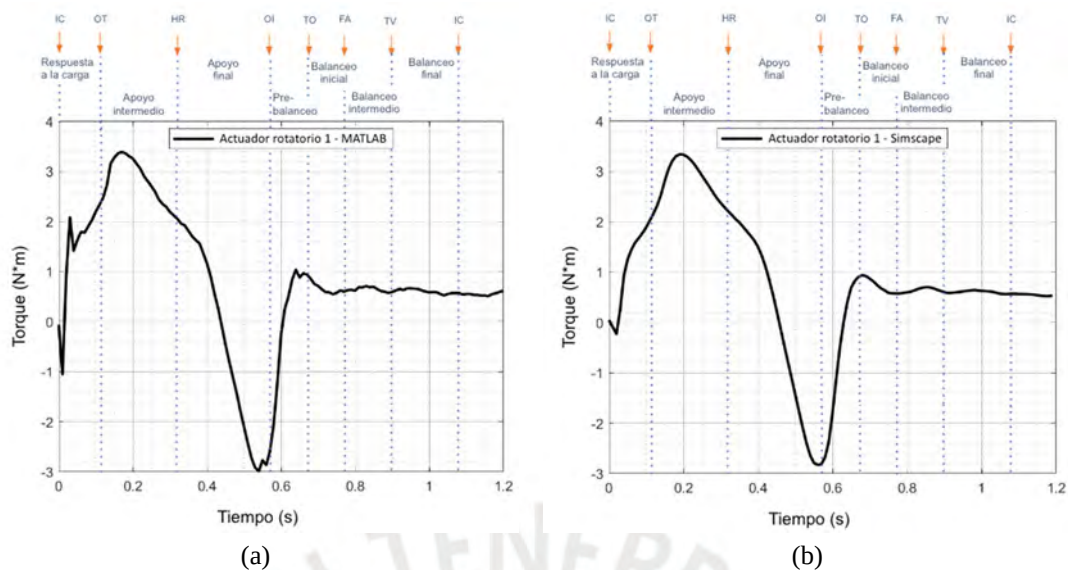
### 5.4.3 Resultados del movimiento de abducción-aducción (plano transversal)

Se detallan los resultados del torque y fuerza del movimiento abducción-aducción en el plano transversal a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el torque del actuador rotatorio y las fuerzas de dos actuadores lineales durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, el torque, medido en Newton por metro para del actuador rotatorio 1 y las fuerzas expresadas en Newton para los actuadores lineales 2 y 3.

El actuador rotatorio: en ambas simulaciones (Figuras 5.12a y 5.12b), realizadas en MATLAB R2022b y Simscape, se observa un pico de torque positivo alrededor de 0.2 segundos. Después del pico inicial, ambas curvas muestran una caída significativa a valores negativos, estabilizándose en aproximadamente 0.5 Nm. El aumento del torque justo después del contacto inicial se debe a la preparación del actuador para soportar el peso del cuerpo. Durante el apoyo intermedio, el torque disminuye a valores negativos, preparando la pierna para el despegue y transfiriendo la carga al otro pie. En la fase de pre-balanceo, el torque aumenta nuevamente hacia valores positivos para preparar el balanceo de la pierna. Durante las fases de balanceo, el torque se mantiene bajo, alrededor de 0.5 Nm, ya que la pierna está en el aire y no requiere gran esfuerzo.

Los actuadores lineales: representados por dos curvas similares en su forma que muestran el comportamiento de los actuadores lineales en términos de fuerza a lo largo del tiempo, como se muestra en la Figura 5.12c y 5.12d. Ambas simulaciones muestran un patrón similar en el comportamiento de la fuerza, con un aumento significativo al inicio y una disminución gradual después del pico máximo.

### Torque del actuador rotatorio vs tiempo



### Fuerza de los actuadores lineales vs tiempo

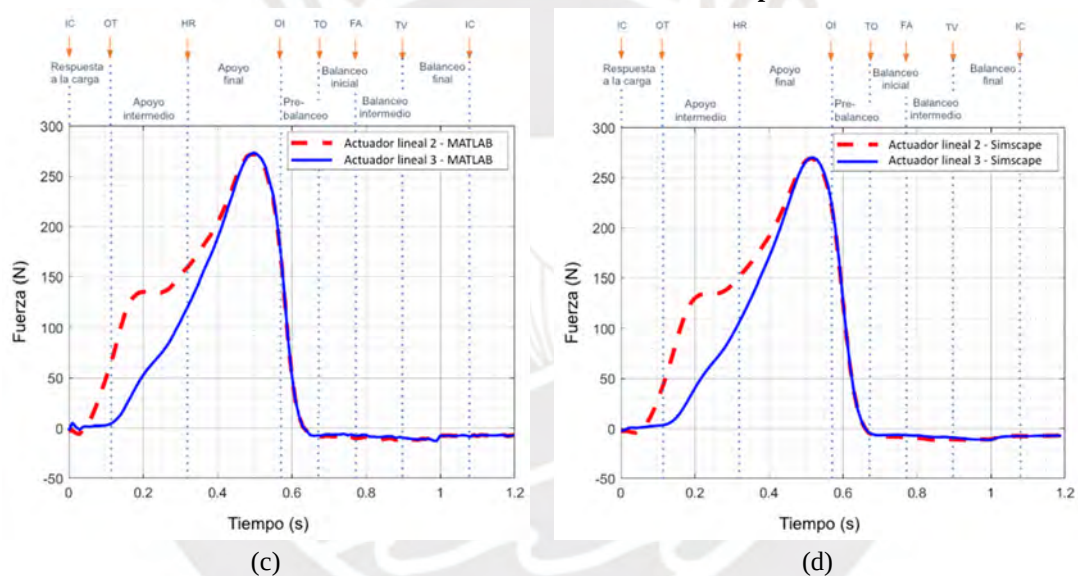


Fig. 5.12 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque del actuador rotatorio vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

### Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

Se muestra un análisis del torque y la fuerza de los actuadores en las subfases del ciclo de marcha en el plano transversal.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): la fuerza y el torque generados por los actuadores permite estabilizar el pie al hacer contacto con el suelo.

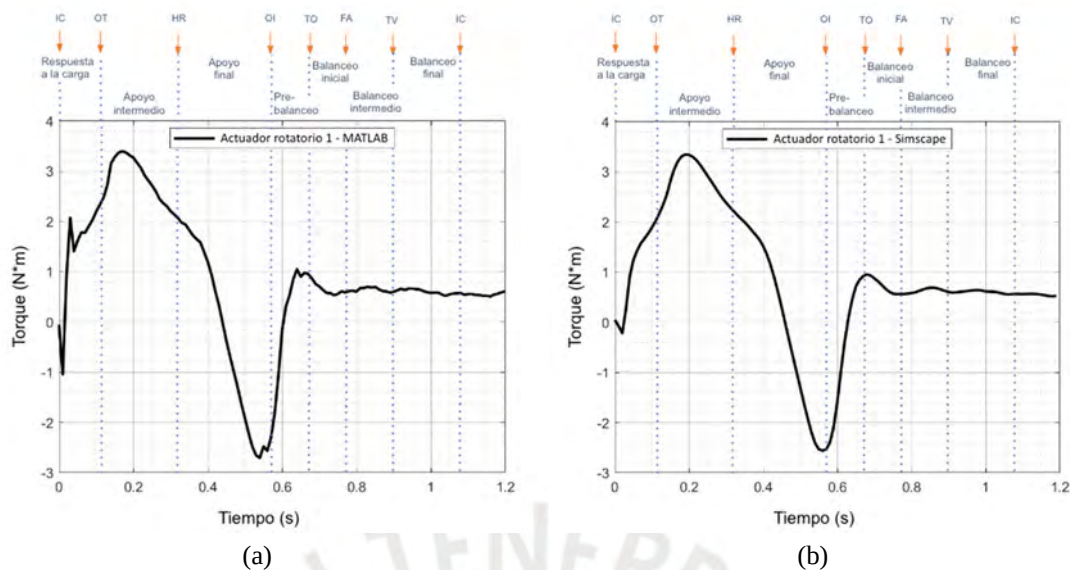
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): Se observa un aumento de fuerza y torque, ya que los actuadores deben adaptarse al peso del cuerpo que se transfiere al pie.
3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): La fuerza continúa aumentando ya que el pie sostiene el peso del cuerpo y los actuadores mantienen la estabilidad.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): la fuerza aumenta hasta llegar a un pico, a medida que el pie se prepara para el despegue.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): hay una disminución en la fuerza y un aumento de torque para impulsar el pie fuera del suelo.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la fuerza se mantiene disminuida y el torque se mantiene en aproximadamente 0.5Nm ya que el pie se encuentra en el aire y no hay necesidad de soporte.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): la fuerza y torque aplicados son mínimos, ya que el pie se mueve hacia adelante sin soportar carga.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): la fuerza y torque se mantienen disminuidos en preparación para el siguiente contacto del pie con el suelo, completando el ciclo de marcha.

#### **5.4.4 Resultados del movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal).**

Se detallan los resultados del modelo implementado en MATLAB R2022b; el torque y fuerza del movimiento combinado (en el plano sagital, frontal y transversal) a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el toque del actuador rotatorio y las fuerzas de dos actuadores lineales durante un ciclo de marcha. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, el torque, medido en Newton por metro para del actuador rotatorio 1 y las fuerzas expresadas en Newton para los actuadores lineales 2 y 3.



### Torque del actuador rotatorio vs tiempo



### Fuerza de los actuadores lineales vs tiempo

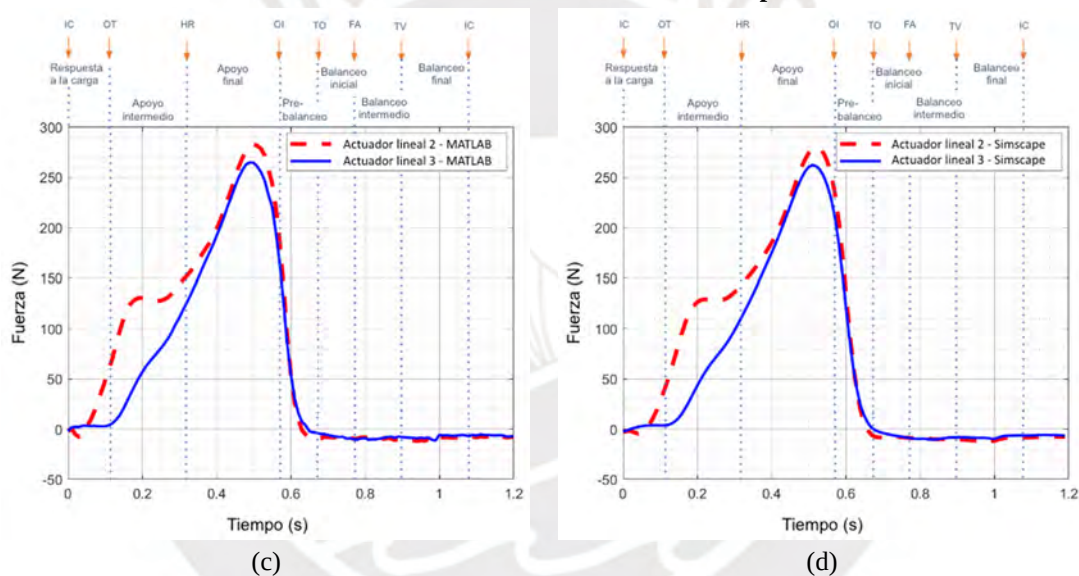


Fig. 5.13 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal) usando el modelo desarrollado en MATLAB R2022b y el modelo en Simscape: (a) y (b) torque vs tiempo, (c) y (d) fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3 vs tiempo.

El actuador rotatorio: el torque del actuador rotatorio es representado en la Figura 5.13a y 5.13b son similares en forma. El torque comienza a aumentar desde el inicio del contacto inicial, continúa aumentando hasta el apoyo intermedio. Luego el torque desciende en el apoyo final. El torque se incrementa en el pre-balanceo y se mantiene en aproximadamente 0,5Nm hasta el siguiente contacto inicial.

Los actuadores lineales: representados por dos curvas que muestran el comportamiento de los actuadores lineales en términos de fuerza a lo largo del tiempo, como se muestra



en la Figura 5.13c y 5.13d. Las fuerzas de los actuadores lineales presentan un pico de pico máximo, debido a la combinación de los movimientos de abducción-aducción, eversión-inversión y plantarflexión-dorsiflexión.

#### Interpretación de los resultados en un ciclo de marcha:

Se presenta un análisis del torque y la fuerza de los actuadores en las subfases del ciclo de marcha.

1. Contacto inicial (0% del ciclo de marcha en 0 segundos): la fuerza y el torque generados por los actuadores permite estabilizar el pie (plataforma móvil) al hacer contacto con el suelo.
2. Respuesta a la carga (0-10% del ciclo de marcha desde 0-0.11 segundos): se observa un aumento de fuerza y torque, ya que los actuadores deben adaptarse al peso del cuerpo que se transfiere al pie.
3. Apoyo intermedio (10-30% del ciclo de marcha desde 0.11-0.32 segundos): la fuerza aumenta y torque alcanza su pico máximo, ya que el pie sostiene el peso del cuerpo y los actuadores mantienen la estabilidad.
4. Apoyo final (30-55% del ciclo de marcha desde 0.32-0.58 segundos): la fuerza aumenta y el torque disminuye a medida que el pie se prepara para el despegue.
5. Pre-balanceo (55-65% del ciclo de marcha desde 0.58-0.68 segundos): hay un decremento en la fuerza y el torque aumentó para impulsar el pie fuera del suelo.
6. Balanceo inicial (65-75% del ciclo de marcha desde 0.68-0.78 segundos): la fuerza y el torque se mantienen ya que el pie se encuentra en el aire y no hay necesidad de soporte.
7. Balanceo intermedio (75-85% del ciclo de marcha desde 0.78-0.90 segundos): la fuerza y el torque aplicados son mínimos, ya que el pie se mueve hacia adelante sin soportar carga.
8. Balanceo final (85-100% del ciclo de marcha desde 0.90-1.05 segundos): la fuerza y el torque se mantienen disminuidos en preparación para el siguiente contacto del pie con el suelo, completando el ciclo de marcha.

## 5.5 Discusión de resultados cinemáticos y dinámicos inversos

Se realiza una discusión acerca de los resultados obtenidos de la cinemática y la dinámica inversa de los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción y combinación de los movimientos anteriores.

### 5.5.1 Discusión del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión

La dorsiflexión se refiere al movimiento que disminuye el ángulo entre el dorso del pie y la tibia, es decir, elevando el dorso del pie hacia la pierna. Por otro lado, el movimiento de plantarflexión es el movimiento opuesto, aumentando el ángulo entre el pie y la tibia. Los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión del mecanismo paralelo, se centra en cómo estos movimientos se muestran en términos de desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza y torque del actuador rotatorio y actuadores lineales durante el ciclo de marcha.

#### a) Resultados cinemáticos:

En la Figura 5.4b que representan el desplazamiento de los actuadores lineales muestran cómo varía la extensión de los pistones durante el ciclo de marcha. En la fase de contacto inicial y respuesta a la carga, el desplazamiento de los pistones de los actuadores se incrementa ligeramente durante el movimiento de plantarflexión. Luego, durante la fase de apoyo y pre-balanceo, el desplazamiento lineal de los pistones disminuye para permitir la dorsiflexión. Además, cuando la curva de la velocidad cruza por cero, se observa que el desplazamiento del actuador alcanza su máximo o mínimo relativo. Por ejemplo, cuando inicia la fase de pre-balanceo aproximadamente 0.58 segundos la velocidad pasa por cero, mientras que los desplazamientos lineales de los actuadores alcanzan su mínimo relativo.

En las Figuras 5.4c, a la 5.4f la velocidad y la aceleración de los actuadores cambian a lo largo del tiempo. El movimiento de dorsiflexión durante el apoyo final, y el pre-balanceo se caracteriza por una disminución de la velocidad y la aceleración, ya que los actuadores desaceleran para cambiar la dirección del movimiento.

#### b) Resultados dinámicos:

Las fuerzas y los torques de la Figura 5.10 indican la actuación de los actuadores necesaria para realizar los movimientos de plantarflexión y de dorsiflexión. Durante el movimiento

de plantarflexión, especialmente en el contacto inicial, los actuadores aumentan la fuerza y el torque para estabilizar el pie es decir la plataforma móvil. Durante la dorsiflexión, en el apoyo final la fuerza alcanza su pico máximo y el torque alcanza su pico mínimo. Los picos corresponden a los momentos de transición entre el movimiento de dorsiflexión y plantarflexión.

### 5.5.2 Discusión del movimiento de eversión-inversión

La eversión implica la rotación del pie hacia afuera, alejando la planta del pie del plano medio del cuerpo, mientras que la inversión es el movimiento opuesto, rotando el pie hacia adentro, acercando la planta del pie hacia el plano medio. El análisis de movimiento de eversión e inversión del mecanismo paralelo durante el ciclo de marcha considera las gráficas de los desplazamientos, velocidad y aceleración, la interacción de fuerzas y torques que se producen en los actuadores lineales y rotatorios.

#### a) Resultados cinemáticos:

Las gráficas de la Figura 5.5a y 5.5b muestran los desplazamientos de los actuadores lineales que varían según las fases de ciclo de marcha permitiendo realizar el movimiento de eversión-inversión. En este análisis, los cambios de los desplazamientos lineales muestran la coordinación que tiene el actuador lineal 2 y el actuador lineal 3, debido a que el movimiento que realiza cada uno es complementario uno del otro para realizar eversión-inversión.

Las velocidades y aceleraciones se presentan en las Figuras 5.5d, a la 5.5f. Las velocidades y aceleraciones máxima corresponden cerca a la fase de pre-balanceo (aproximadamente 0.58 segundos) a cambios rápidos de dirección, así como también en la transición de inversión a eversión durante el contacto inicial.

#### b) Resultados dinámicos:

Las gráficas de fuerza y torque mostradas en la Figura 5.11 se interpretan como la cantidad de fuerza aplicada a los actuadores para resistir los movimientos de eversión e inversión. El pico de fuerza está implicado durante la eversión, especialmente en el apoyo final (aproximadamente en 0.5 segundos). Por otro lado, el torque máximo del actuador

rotatorio se observa en el apoyo intermedio y el torque mínimo se da en el apoyo final. La fuerza de los actuadores lineales es el factor más importante durante la eversión-inversión durante el ciclo marcha. En la Figura 5.11c tanto la fuerza del actuador lineal 2 y 3 son iguales, esto es debido a la sincronización que tienen los actuales en el movimiento de eversión-inversión.

### 5.5.3 Discusión del movimiento de abducción-aducción

La abducción implica mover la parte del pie del plano medio del cuerpo hacia afuera, mientras que la aducción es el movimiento hacia dentro a partir del plano medio. La discusión del movimiento de abducción y aducción durante el ciclo de marcha toma en cuenta los desplazamientos, la velocidad, la aceleración, las fuerzas y torques de los actuadores rotatorio y lineales.

#### a) Resultados cinemáticos:

Los gráficos de desplazamiento de las Figura 5.6a y 5.6b muestran la extensión de los actuadores lineales, que corresponden al movimiento de abducción y aducción del pie.

La longitud de los actuadores permanece casi constante debido a que solo existe movimiento de abducción-aducción, y el que rota mayoritariamente es el actuador rotatorio 1.

Las velocidades y aceleraciones de la Figura 5.6c a la 5.6f muestra cuán rápidamente los actuadores varían su longitud para realizar el movimiento. Durante las fases de pre-balanceo y balanceo inicial se dan las mayores variaciones de velocidad y aceleración. Lo cual se refleja en una máxima rotación posteriormente en la fase de balanceo inicial (aproximadamente en 0.68 segundos).

#### b) Resultados dinámicos:

La abducción y aducción ocurren en el plano transversal y son importantes para la estabilización y la locomoción eficiente. En la Figura 5.12 presenta la fuerza y torque ejercidos por los actuadores durante el movimiento de abducción y aducción en el ciclo de marcha. Así mismo, el torque del actuador rotatorio es directamente responsable de controlar la rotación de la plataforma móvil en abducción o aducción, por lo que se observan sus variaciones durante el ciclo de marcha, correspondientes a las rotaciones del

tobillo. El mayor torque se da en el apoyo intermedio del ciclo de marcha, en un rango de tiempo aproximado de 0.1-0.2 segundos. Las fuerzas de los actuadores lineales sirven para compensar el peso del usuario. La fuerza máxima se encuentra en el apoyo final del ciclo de marcha, en 0.5 segundos.

#### 5.5.4 Discusión del movimiento combinado

La discusión del movimiento combinado en el ciclo de marcha, es decir la unión del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción, abarca una interpretación integrada de los datos de las gráficas que incluyen desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza y torque de actuadores lineales y rotatorios (Figuras 5.7 y 5.13). Estos movimientos ocurren simultáneamente y son fundamentales en el ciclo de marcha. En el ciclo de marcha, la dorsiflexión se combina con una ligera eversión y abducción para preparar el pie para el contacto con el suelo y proporcionar una base estable. Esto se observa como un aumento en la longitud de los actuadores lineales, un pico en el torque y la fuerza en la fase de apoyo intermedio del ciclo de marcha. Durante la fase de apoyo final y el pre-balanceo, la plantarflexión se combina con la inversión y aducción para propulsar el cuerpo hacia adelante y preparar el pie (plataforma móvil) para el despegue.

##### a) Resultados cinemáticos:

El desplazamiento, velocidad y aceleración angular del actuador rotatorio durante el ciclo de marcha, muestra un patrón de movimiento correspondiente a los ángulos de entrada de rotación del movimiento de abducción-aducción. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración de los actuadores lineales a lo largo del ciclo de marcha presenta patrones similares, pero no idénticos, este comportamiento indica que los actuadores lineales ajustan su operación de manera precisa para seguir el patrón de movimiento rotacional requerido en el ciclo de marcha. Al inicio del ciclo de marcha (fase de respuesta a la carga) y en la fase de pre-balanceo se muestra un aumento en el desplazamiento y velocidad de los actuadores lineales, mientras que se presenta una disminución de la aceleración.



b) Resultados dinámicos:

Al analizar los gráficos de fuerza y torque de los actuadores (Figura 5.13), se aprecia que el máximo torque y fuerza se alcanzan durante la fase de apoyo intermedio y apoyo final y pre-balanceo. Finalmente, la coordinación entre los actuadores lineales y rotatorio es importante para sincronizar estos movimientos. Los actuadores lineales ajustan la posición mientras que el actuador rotatorio controla la orientación de la plataforma móvil.



## **CAPÍTULO 6**

### **VALIDACIÓN DEL MODELO DEL MECANISMO PARALELO 2SPU-1RU MEDIANTE UN PROTOTIPO**

En el capítulo se presenta la implementación de un prototipo del mecanismo paralelo 2SPU-1RU para la validación del modelo. Primero se detalla la fabricación del mecanismo paralelo con los componentes y elementos necesarios para su funcionamiento. Finalmente se valida el modelo con el prototipo.

#### **6.1 Fabricación de prototipo para experimentación**

En las Figuras 6.1 a la 6.2 presentan un prototipo ensamblado con elementos mecánicos que conforma el mecanismo paralelo, mientras que en la Figura 6.3 se presentan los componentes electrónicos para controlar el mecanismo paralelo.

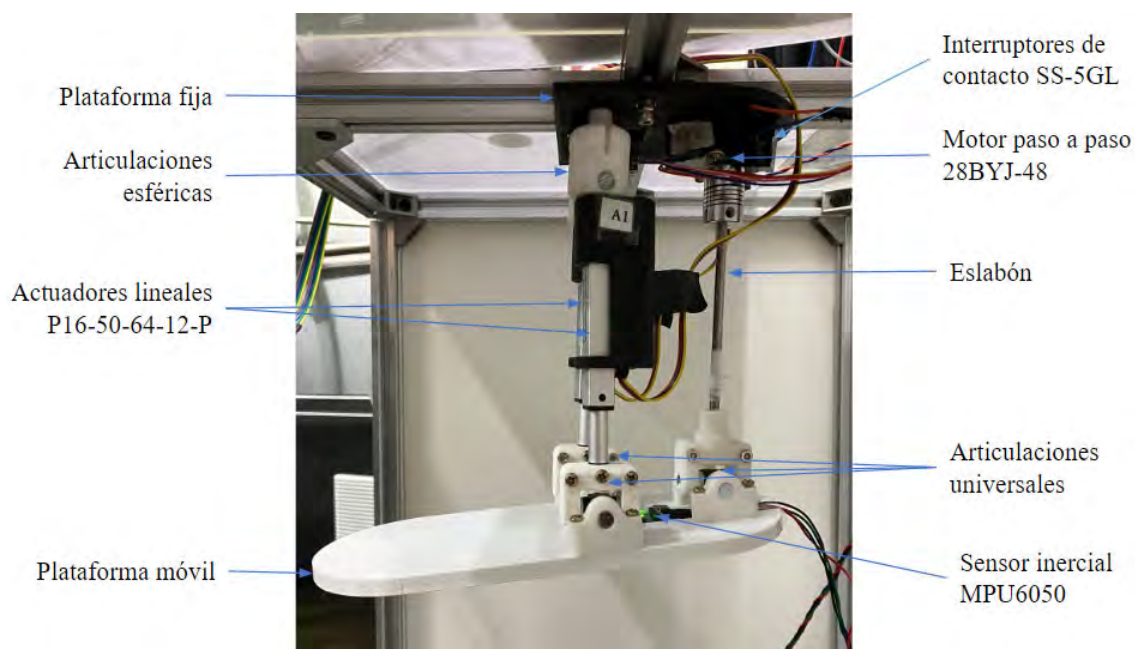


Fig. 6.1 Mecanismo paralelo 2SPU-1RU fabricado (vista en plano sagital).

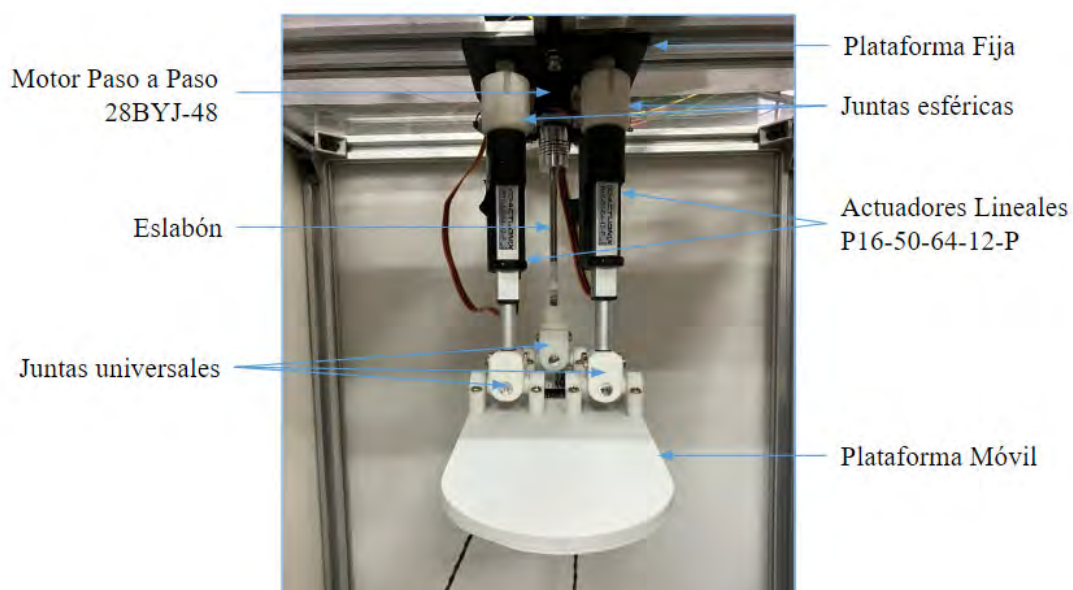


Fig. 6.2 Mecanismo paralelo 2SPU-1RU fabricado (vista en plano frontal).

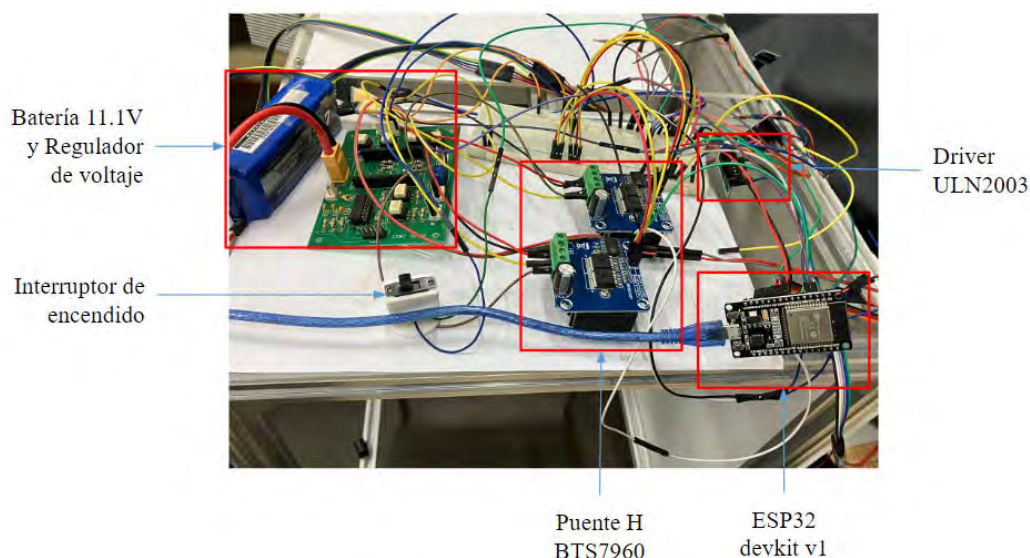


Fig. 6.3 Componentes electrónicos implementados en el mecanismo paralelo 2SPU-1RU.

## 6.2 Validación del modelo cinemático mediante el prototipo

En la validación del modelo cinemático se realiza comparaciones entre simulaciones teóricas y pruebas experimentales. En este contexto, se describe el procedimiento de validación para un mecanismo paralelo, utilizando como referencia tanto los resultados numéricos generados por el modelo desarrollado e implementado en MATLAB R2022b, como aquellos obtenidos de forma experimental con un prototipo físico del mecanismo.

Proceso experimental: Se define las variables de entrada del esquema de control como los ángulos de rotación que realiza el tobillo humano durante un ciclo de marcha. Estas variables de entrada fueron obtenidas mediante los sensores iSen al medir los ángulos de rotación del tobillo de una persona durante un ciclo de marcha (ver Anexo D). Además, las variables controladas son las velocidades de los actuadores lineales y rotatorio.

El siguiente paso consiste en resolver la cinemática inversa del mecanismo paralelo, a partir de los ángulos de rotación del tobillo de datos biomecánicos, como se presenta en la Figura 6.4. El objetivo es determinar las velocidades y desplazamientos de los actuadores para lograr la orientación deseada de la plataforma móvil. A través de un script en MATLAB R2022b, se resuelve la cinemática inversa a partir de los datos capturados sobre las orientaciones del tobillo durante el ciclo de marcha con los sensores iSen (ángulos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión y abducción-aducción). De este modo, se calculan la velocidad del actuador rotatorio 1, y las velocidades de los

actuadores lineales 2 y 3 en cada instante de tiempo. Estas velocidades se denotan con las variables  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{d}l_2$ ,  $\dot{d}l_3$ , con las cuales se controla el mecanismo, y corresponden a la derivada del ángulo de rotación del actuador 1 ( $\dot{\psi}$ ), a la derivada del desplazamiento actuador lineal 2 ( $\dot{d}l_2$ ) y a la derivada del desplazamiento actuador lineal 3 ( $\dot{d}l_3$ ).

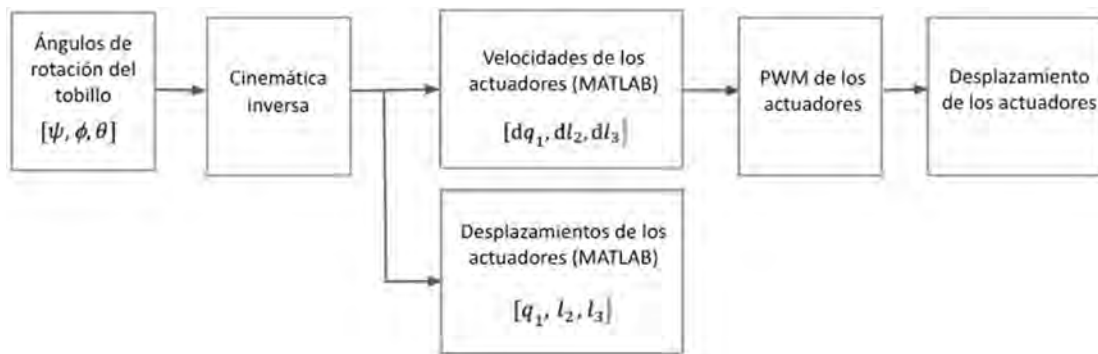


Fig. 6.4 Proceso experimental.

Control en lazo abierto mediante Arduino: El segundo paso, se utilizan los valores de la velocidad obtenidos para cada instante de tiempo para ejercer un control de lazo abierto del prototipo, utilizando la plataforma de programación Arduino. Se escalan las velocidades de los actuadores lineales para ajustarse a un rango operativo del ESP32. Es decir, la velocidad máxima de  $214 \frac{mm}{s}$  de los actuadores lineales según MATLAB, R2022b se escala a la velocidad máxima de  $18 \frac{mm}{s}$  del actuador lineal según datasheet. Asimismo, se asignan secuencias de valores de modulación de ancho de pulso (PWM) a cada actuador. En paralelo, se controla el actuador rotatorio ajustando la velocidad del motor y la cantidad de pasos necesarios para alcanzar la orientación deseada.

Registro de datos y análisis: Durante la ejecución del control de lazo abierto, se recopilan datos sobre el desplazamiento de los actuadores y los ángulos de rotación de la plataforma móvil. Para ello, se establece una comunicación serial entre el Arduino y un script en Python, permitiendo el almacenamiento de los datos en un archivo CSV.

Validación de resultados: Finalmente, se establece un intervalo de tiempo óptimo que permita capturar las posiciones de la plataforma de manera precisa. Debido a que el factor de escalamiento es de 100:1 (velocidad máxima del actuador obtenida de MATLAB R2022b en comparación con la velocidad máxima que puede alcanzar el actuador según



datasheet), el intervalo de tiempo entre cada valor de PWM con el que se controlan los actuadores se obtiene al multiplicar por 120 el intervalo tiempo entre cada instante del script de MATLAB R2022b, resultando en un intervalo de 120ms para el control lazo abierto. Además, los experimentos se repitieron 5 veces por movimiento para garantizar que los resultados sean similares entre sí, ya que la sensibilidad del feedback de posición de los actuadores influye en las mediciones. La validación se lleva a cabo mediante la representación gráfica de las posiciones de los actuadores y las orientaciones de la plataforma en los cuatro movimientos que realiza el mecanismo paralelo (plantar flexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción, y un movimiento combinado). También se usa una función de costo para cuantificar las diferencias (errores) entre los resultados del modelo implementado en MATLAB R2022b y los obtenidos experimentalmente con el prototipo. Adicionalmente, se calcula los errores porcentuales de los actuadores rotacional y lineal.

#### **6.2.1 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital)**

En la Figura 6.5 se detalla los resultados del movimiento plantarflexión-dorsiflexión en el plano sagital a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el desplazamiento angular del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal de dos actuadores lineales 2 y 3 durante un ciclo de marcha. En estas gráficas se presentan los resultados numéricos generados por el modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo de mecanismo paralelo. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular, medido en grados para el actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

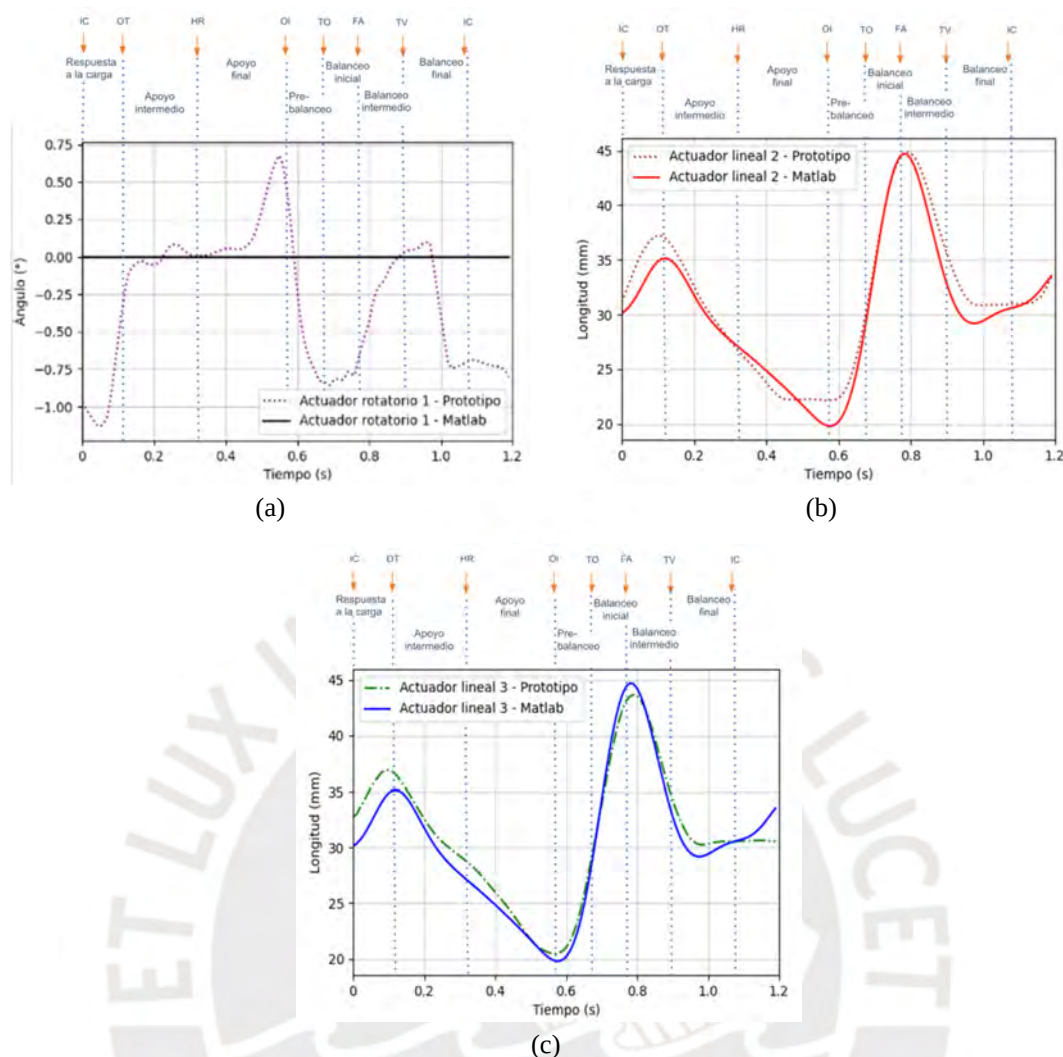


Fig. 6.5 Movimiento de plantarflexión-dorsiflexión (plano sagital): (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (b) longitud del actuador lineal 2 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (c) longitud del actuador lineal 3 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo.

Actuador rotatorio 1: El desplazamiento del actuador rotatorio del modelo implementado en MATLAB R2022b es representado por una única línea continua que mantiene un ángulo constante a lo largo del tiempo, como se muestra en la Figura 6.5a. La ausencia de la variabilidad en la curva indica que no hay movimiento rotacional. Es decir, que durante el intervalo de tiempo el ángulo de rotación del actuador se mantiene constante en 0. No hay variaciones, desde el inicio hasta el final del intervalo de tiempo, permaneciendo el actuador en la misma posición. Sin embargo, el resultado numérico implementado en un prototipo tiene una variación, tiene un pico positivo seguido de un pico negativo, lo que indica un movimiento de rotación en una dirección y luego en la dirección opuesta. La curva del prototipo tiene una forma irregular, es posible a la

influencia de factores como los errores o tolerancias en la fabricación, o también el montaje. El rango de diferencia va desde  $-1^\circ$  a  $0.75^\circ$ , siendo esta una variación pequeña.

Actuador lineal 2: Las curvas de la Figura 6.5b, representan la variación del desplazamiento del actuador a lo largo del tiempo. Se observa que ambas curvas siguen una tendencia similar, con incrementos y disminuciones en el desplazamiento que corresponden a los valores obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b y los datos experimentales del prototipo. Las curvas comienzan con un desplazamiento inicial, ascienden a un pico, luego descienden a un valle, y nuevamente ascienden a un segundo pico antes de disminuir hacia el final del ciclo de marcha. Las diferencias que existen entre el actuador lineal del prototipo y la modelación en MATLAB R2022b se debe a la resolución mecánica (mechanical backlash o juego mecánico) de 0.3mm del actuador. Otra diferencia es debido al control de lazo abierto que se ha realizado.

Actuador lineal 3: Las dos curvas de desplazamiento de la Figura 6.10c, representan la variación del desplazamiento del actuador a lo largo del tiempo. Se observa que ambas curvas siguen una tendencia similar, con incrementos y disminuciones en el desplazamiento que corresponden a los valores obtenidos de MATLAB R2022b y los datos experimentales del prototipo. Comienzan con un desplazamiento inicial, ascienden a un pico, luego descienden a un valle, y nuevamente ascienden a un segundo pico antes de disminuir hacia el final del ciclo de marcha. La alineación cercana de las dos curvas representa coincidencia en el comportamiento del prototipo físico con los datos obtenidos del MATLAB R2022b.

### **6.2.2 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal)**

En la Figura 6.6 se detalla los resultados del movimiento eversión-inversión en el plano sagital a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el desplazamiento angular del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal de dos actuadores lineales 2 y 3 durante un ciclo de marcha. En estas gráficas se presentan los resultados numéricos generados por el modelo implementado en MATLAB R2022b, así como aquellos obtenidos de forma experimental con un prototipo de mecanismo. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento

angular, medido en grados para del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

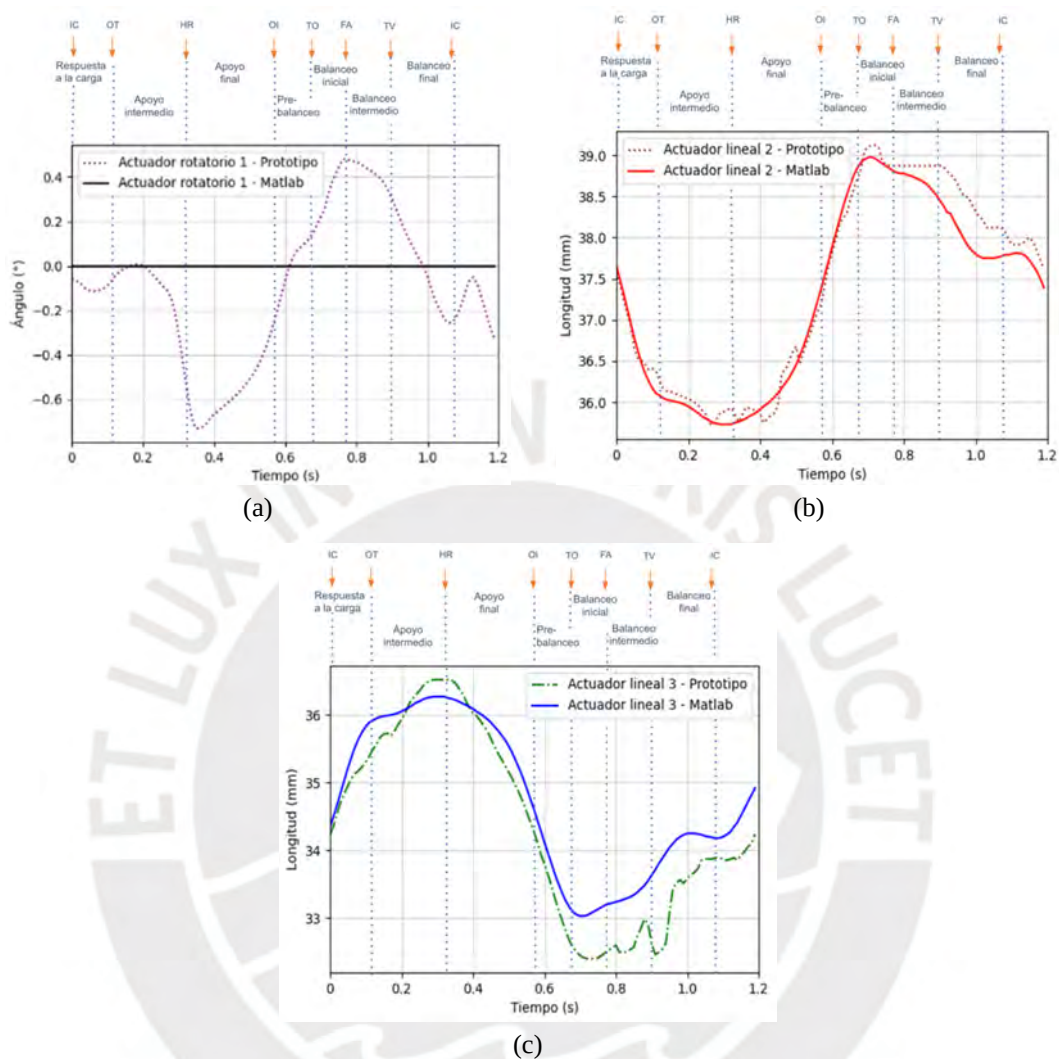


Fig. 6.6 Movimiento de eversión-inversión (plano frontal): (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (b) longitud del actuador lineal 2 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (c) longitud del actuador lineal 2 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo.

Actuador rotatorio 1: En la Figura 6.6a el desplazamiento del actuador rotatorio del modelo implementado en MATLAB R2022b es representado por una única línea continua que mantiene un ángulo constante a lo largo del tiempo, como se muestra en la Figura 6.6a. La ausencia de la variabilidad en la curva indica que no hay movimiento rotacional. Es decir, que durante el intervalo de tiempo el ángulo de rotación del actuador se mantiene constante en 0. No hay variaciones, desde el inicio hasta el final del intervalo de tiempo, permaneciendo el actuador en la misma posición. Sin embargo, el resultado numérico



implementado en un prototipo tiene una variación, tiene un pico negativo seguido de un pico positivo, lo que indica un movimiento de rotación en una dirección y luego en la opuesta. La curva del prototipo tiene una forma irregular, es posible a la influencia de factores como los errores o tolerancias en la fabricación, o también el montaje. El rango de diferencia va desde  $-0.8^\circ$  a  $0.5^\circ$ , siendo esta una variación pequeña.

Actuador lineal 2: En la Figura 6.6b, ambas curvas siguen un patrón similar, comienzan alrededor de los 37.6 mm, desciende hasta 35.5 mm en 0.3 segundos, luego se elevan gradualmente hasta alcanzar un pico justo por encima de los 39 mm alrededor de 0.7 segundos y luego descienden. Las curvas presentan una ligera discrepancia en sus picos y valles, pero la tendencia general es la misma, lo que observa una buena correspondencia entre el modelo implementado en MATLAB R2022b y el comportamiento del prototipo.

Actuador lineal 3: En la Figura 6.6c las curvas muestran un patrón de desplazamiento que inicia en un valor aproximado de 34.4 mm, asciende rápidamente a un pico cercano a los 37 mm alrededor de los 0.3 segundos, y luego desciende hacia un valle alrededor hasta 32mm en 0.7 segundos. Posteriormente, ambas curvas vuelven a ascender, aunque la del prototipo muestra ciertas fluctuaciones que podría deberse a la resolución mecánica (Mechanical backlash o juego mecánico) de 0.3mm del actuador o al control de lazo abierto que se ha realizado. De estos resultados, se puede observar que el mecanismo paralelo para articulación de tobillo podría estar experimentando un comportamiento diferente al previsto por el modelo desarrollado en MATLAB R2022b, lo que indica que hay factores en el prototipo de mecanismo paralelo se han subestimado, como el ensamble entre componentes.

### **6.2.3 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal)**

En la Figura 6.7 se detalla los resultados de la longitud de los actuadores durante el movimiento abducción-aducción en el plano sagital a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el desplazamiento angular del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal de dos actuadores lineales 2 y 3 durante un ciclo de marcha. En estas gráficas se presentan los resultados numéricos generados por el modelo implementado en MATLAB R2022b, así como aquellos obtenidos de forma experimental con un prototipo de mecanismo.



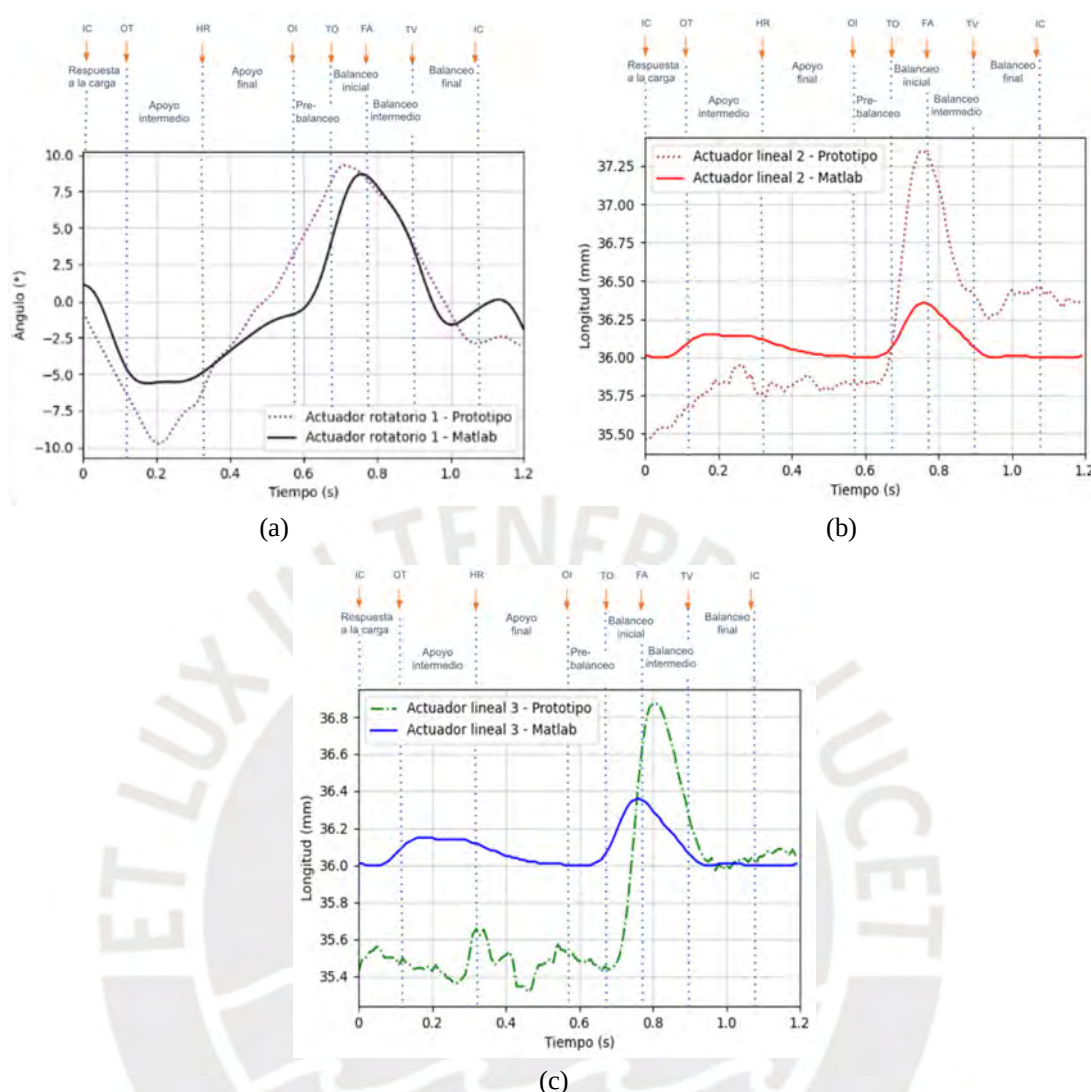


Fig. 6.7 Movimiento de abducción-aducción (plano transversal): (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (b) longitud del actuador lineal 2 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (c) longitud del actuador lineal 3 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo.

Actuador rotatorio 1: La Figura 6.7a muestra dos curvas de desplazamiento angular para el actuador rotatorio. Una de las curvas, la mostrada en línea sólida, corresponde a los resultados obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b, mientras que la otra curva, representada por una línea punteada, muestra los datos experimentales del prototipo. Ambas curvas inician cerca de cero y muestran un patrón de desplazamiento angular positivo y negativo. En la fase de apoyo intermedio ambas curvas alcanzan su ángulo máximo aproximado de -10 grados seguido de un ascenso cercano a los 7.5 grados. Las curvas muestran una tendencia general similar, aunque hay variaciones en la magnitud y el tiempo exacto de los picos y valles. Esto es común cuando se comparan datos del modelo

implementado en MATLAB R2022b con los datos experimentales de un prototipo, ya que el modelo no puede capturar todas las complejidades del mecanismo físico.

Actuador lineal 2: La Figura 6.7b, presenta dos curvas de desplazamiento lineal del actuador lineal 2, una curva es proveniente de los resultados obtenidos a través de MATLAB R2022b y la otra es obtenida de datos experimentales de un prototipo. Ambas curvas siguen un patrón ondulante, a lo largo del tiempo, con picos y valles que presentan los cambios en el desplazamiento del actuador. Sin embargo, la curva del prototipo muestra una variabilidad significativa en comparación con la curva del modelo implementado en MATLAB R2022b, especialmente notable en el pico que ocurre alrededor de 0.75 segundos, donde la curva del prototipo alcanza un valor mucho más alto que la curva del modelo implementado en MATLAB R2022b. La diferencia en las magnitudes de los picos y en la suavidad de las curvas entre los datos del modelo implementado en MATLAB R2022b y los datos experimentales del prototipo puede ser indicativo errores de fabricación, o tolerancias entre las articulaciones o juntas esféricas y universales.

Actuador lineal 3: La Figura 6.7c presenta dos curvas de desplazamiento del actuador lineal 3, una curva es proveniente de los resultados obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b y la otra es obtenida de datos experimentales de un prototipo. La curva del prototipo presenta fluctuaciones significativas a lo largo del tiempo, mostrando un comportamiento más irregular en comparación con la curva del modelo implementado en MATLAB R2022b. Esta curva es más suave y muestra una secuencia clara de ascenso y descenso, alcanzando un pico cerca de los 0.75 segundos y disminuyendo después de eso.

#### **6.2.4 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal).**

Se detalla los resultados del movimiento eversión-inversión en el plano sagital a través de gráficas temporales. Estas gráficas muestran el desplazamiento angular del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal de dos actuadores lineales 2 y 3 durante un ciclo de marcha. En estas gráficas se presentan los resultados numéricos generados por el modelo implementado en MATLAB R2022b, así como aquellos obtenidos de forma experimental con un prototipo de mecanismo. En las gráficas, el eje horizontal representa el tiempo, expresado en segundos. Por su parte, el eje vertical, indica el desplazamiento angular,

medido en grados para del actuador rotatorio 1 y el desplazamiento lineal expresado en milímetros para los actuadores lineales 2 y 3.

Actuador rotatorio 1: En la Figura 6.8a, ambas curvas demuestran una variación del comportamiento del desplazamiento angular a lo largo del tiempo, con picos y valles que indican cambio del desplazamiento a lo largo de un ciclo de marcha. Las curvas indican cerca del cero y se observa un ángulo máximo de  $-15^\circ$  en la fase de apoyo intermedio, seguido de un ángulo máximo de  $8^\circ$  en la fase de balanceo inicial. Posteriormente, ambas curvas en la fase de balanceo final vuelven a descender y luego ascender, aunque con diferencias en la magnitud del desplazamiento entre los resultados del prototipo y los resultados del modelo implementado en MATLAB R2022b.

Actuador lineal 2: En la Figura 6.8b, la curva del modelo implementado en MATLAB R2022b muestra una forma más suave y consistente, mientras que la curva del prototipo tiene una variabilidad más notable, especialmente en las longitudes máximas entre las fases de respuesta a la carga y el apoyo intermedio, donde los valores de desplazamiento difieren ligeramente en magnitud. Estas diferencias entre las curvas pueden deberse a la influencia de factores no presentes en el modelo implementado en MATLAB R2022b, como la respuesta del material y las tolerancias de fabricación.

Actuador lineal 3: En la Figura 6.8c, ambas curvas siguen un patrón similar a lo largo del tiempo. La curva del modelo implementado en MATLAB R2022b y los datos del prototipo presentan una longitud máxima del actuador de aproximadamente 36mm en la fase entre la respuesta a la carga y el apoyo intermedio. Luego se observa en la fase del pre-balanceo que existe una longitud máxima de 23mm aproximadamente. Y en la fase de balanceo intermedio se observa una longitud máxima de 44mm aproximadamente. Las curvas casi se superponen, lo que indica una buena correlación entre el modelo de simulación y el comportamiento del prototipo.

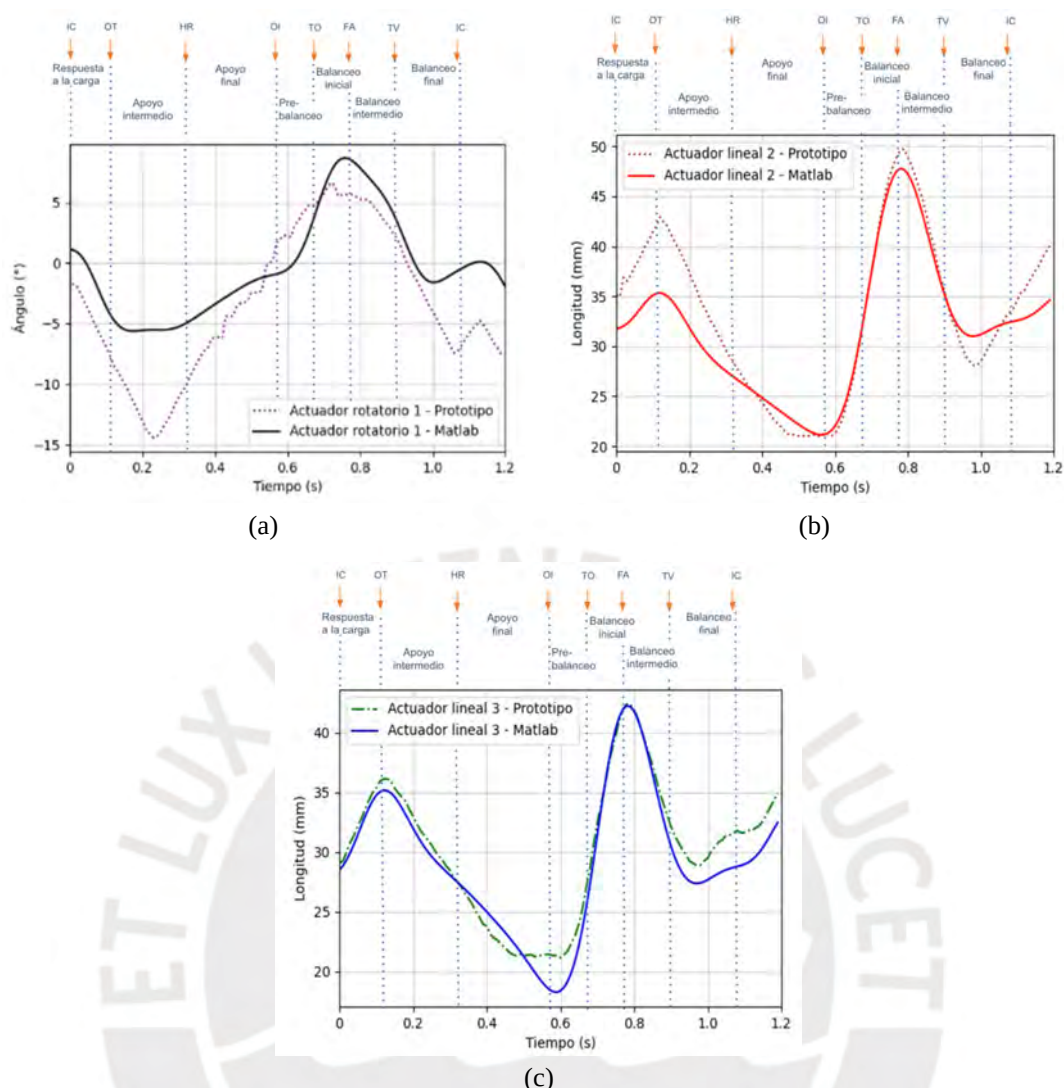


Fig. 6.8 Movimiento combinado (plano sagital, frontal y transversal): (a) ángulo de rotación del actuador rotatorio vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (b) longitud del actuador lineal 2 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo, (c) longitud del actuador lineal 3 vs tiempo en MATLAB R2022b y prototipo.

### 6.2.5 Comparación de resultados experimentales de la caminata (iSen) con su equivalente en el prototipo

Las tres gráficas de la Figura 6.9 representan diferentes ángulos de movimiento de un prototipo en comparación con resultados experimentales de caminata iSen (ver Anexo D). Las gráficas se muestran sobre un intervalo de tiempo de 1.2 segundos y están marcadas con eventos claves que corresponden a fases específicas del movimiento. A continuación, se compara las curvas en los ángulos de movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, luego el movimiento de eversión-inversión, y finalmente los ángulos de abducción-aducción.



#### Ángulo de plantarflexión-dorsiflexión:

Las curvas del prototipo y los ángulos experimentales durante la caminata, representados en la Figura 6.9a, muestran trayectorias similares, aunque desplazados hacia la izquierda. Durante la transición entre las fases de respuesta a la carga y la fase del apoyo intermedio ambas curvas se solapan en un tiempo de 0.11 segundos. Se destaca que el prototipo presenta un ángulo de plantarflexión superior al observado en los datos experimentales de la caminata, registrando  $-10^\circ$  en comparación con los  $8^\circ$  del iSen. Asimismo, cerca del final del ciclo de marcha, en la fase final del balanceo, se nota que el ángulo de dorsiflexión del prototipo es menor al ángulo experimental, aproximadamente  $6^\circ$ .

#### Ángulo de eversión-inversión:

El ángulo de eversión en el prototipo es de aproximadamente  $-1^\circ$ , alcanza este valor entre las fases del apoyo intermedio y el apoyo final del ciclo de marcha. Luego pasa a una inversión en la fase de pre-balanceo con un ángulo aproximado de  $7.5^\circ$ . Se observa en esta fase que el ángulo de inversión del prototipo es menor en comparación al ángulo obtenido de la caminata experimental de iSen. Siendo este valor de  $6^\circ$  aproximadamente.

#### Ángulo de abducción-aducción:

Los ángulos del prototipo en esta gráfica muestra una mayor variabilidad en comparación con los datos experimentales de la caminata de iSen. Se observa en el apoyo intermedio que los ángulos en el prototipo superan a los ángulos experimentales de la caminata de iSen, siendo este aproximadamente  $-15^\circ$ . En cambio, en la fase de balanceo inicial el ángulo del prototipo es menor siendo este aproximadamente  $6^\circ$ . Al igual que en las otras gráficas, el prototipo tiende a exceder los valores de los datos experimentales de caminata de iSen, indicando una mayor amplitud de movimiento.

En general, las tres gráficas muestran que el prototipo tiene una respuesta exagerada en comparación con los datos experimentales de la caminata de iSen, lo cual podría ser el resultado de diferencias en las tolerancias de fabricación del prototipo, sensibilidad de actuadores y sensores.



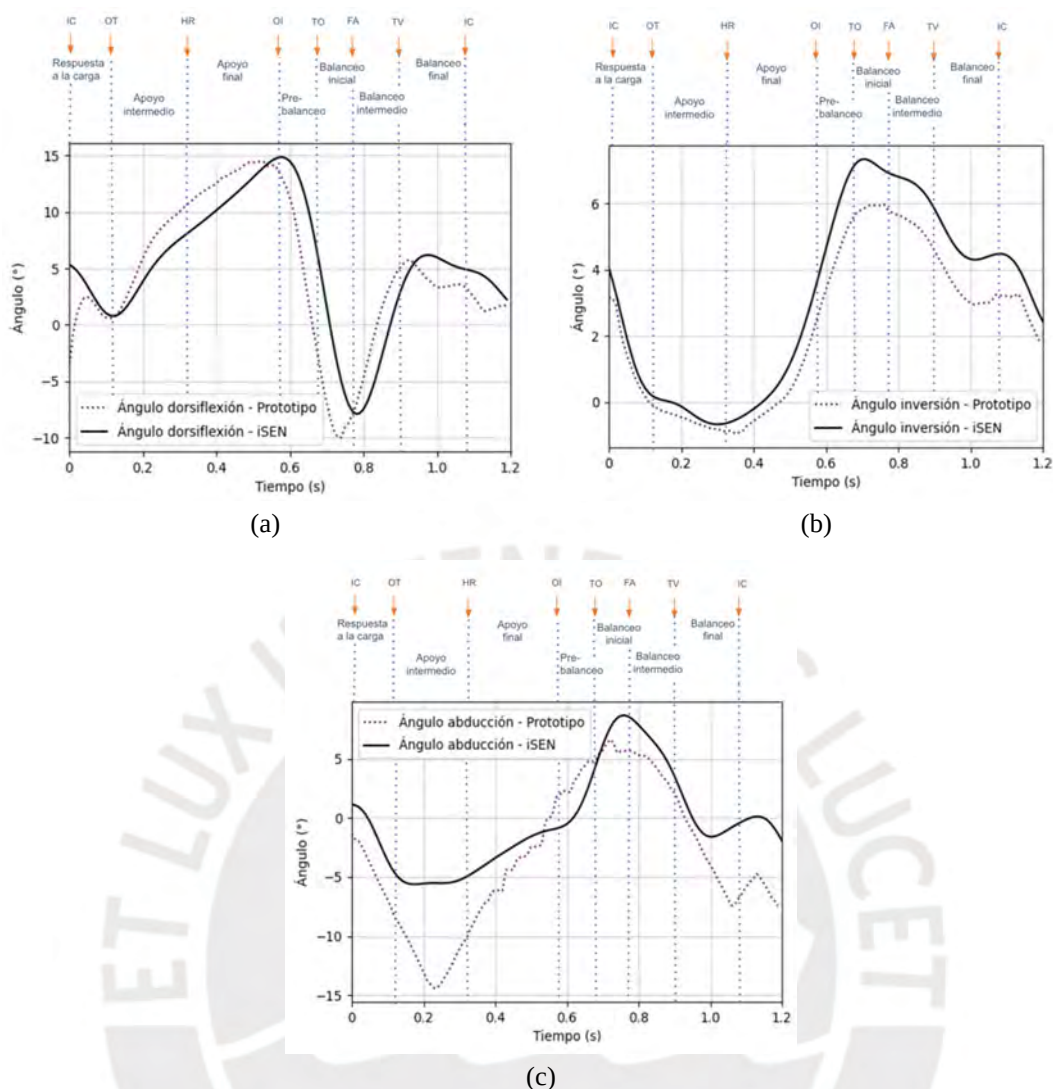


Fig. 6.9 Comparación de los resultados experimentales de la caminata (iSen) con el prototipo: (a) ángulo de plantarflexión-dorsiflexión vs tiempo, (b) ángulo de eversion-inversión vs tiempo, (c) ángulo de abducción-aducción vs tiempo.

### 6.3 Error de trayectoria en MATLAB R2022b y experimentos con prototipo.

La Ecuación 6.1 se define como el promedio de la suma de los errores absolutos de las trayectorias de cada muestra. Para cada muestra  $i$ , se calcula el error de trayectoria  $e_i$ , como la diferencia entre los resultados experimentales y los resultados del modelo implementado en MATLAB R2022b. Esto se hace para cada componente de la trayectoria. Se suma los valores absolutos de los errores de cada componente de la trayectoria para obtener el error total de la muestra  $i$ . Finalmente, para calcular el promedio de los errores de todas las muestras se divide el resultado por  $N$  para obtener el promedio. En la Tabla 6.1 se muestra el Error de las trayectorias por movimiento del mecanismo paralelo.

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_1(i)| \quad (6.1)$$

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_2(i)| \quad (6.2)$$

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_3(i)| \quad (6.3)$$

Donde:

$E$ : es el error absoluto de la trayectoria de las muestras, (mm).

$N$ : es el número de muestras.

$e_1$ : es el error de trayectoria del actuador rotatorio 1, (mm).

$e_2$ : es el error de trayectoria del actuador lineal 2, (mm).

$e_3$ : es el error de trayectoria del actuador lineal 3, (mm).

Los errores porcentuales de los actuadores lineales y rotatorio se definen mediante las Ecuaciones 6.4 y 6.5 respectivamente.

$$E_l = \frac{|l_p - l_M|}{\Delta l_{al}} \times 100\% \quad (6.4)$$

Donde:

$E_l$ : es el error porcentual para el actuador lineal, (%).

$l_p$ : es la longitud que se desplaza el actuador lineal del prototipo, (mm).

$l_M$ : es la longitud que se desplaza el actuador lineal del modelo implementado en MATLAB R2022b, (mm).

$\Delta l_{al}$ : es la variación de la longitud máxima y longitud mínima que se desplaza el actuador lineal del modelo implementado en MATLAB R2022b, (mm).

$$E_r = \frac{|a_p - a_M|}{\Delta a_{ar}} \times 100\% \quad (6.5)$$

Donde:

$E_r$ : es el error porcentual para el actuador rotatorio, (%).

$a_p$ : es el ángulo que se desplaza el actuador rotatorio del prototipo, (°).

$a_M$ : es el ángulo que se desplaza el actuador rotatorio del modelo implementado en MATLAB R2022b, (°).

$\Delta a_{ar}$ : es la variación del ángulo máximo y ángulo mínimo que se desplaza el actuador rotatorio, del modelo implementado en MATLAB R2022b (°).

Tabla 6.1 Error de trayectoria del modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo.

| N | Experimento                 | Actuador    | Error entre el modelo implementado en MATLAB R2022b y prototipo (mm) | Error porcentual (%) |
|---|-----------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1 | Plantarflexión-dorsiflexión | Rotatorio 1 | 0.40                                                                 | -                    |
|   |                             | Lineal 2    | 1.19                                                                 | 4.79                 |
|   |                             | Lineal 3    | 1.09                                                                 | 4.41                 |
| 2 | Eversión-inversión          | Rotatorio 1 | 0.26                                                                 | -                    |
|   |                             | Lineal 2    | 0.18                                                                 | 5.57                 |
|   |                             | Lineal 3    | 0.43                                                                 | 13.51                |
| 3 | Abducción-aducción          | Rotatorio 1 | 1.96                                                                 | 13.74                |
|   |                             | Lineal 2    | 0.36                                                                 | -                    |
|   |                             | Lineal 3    | 0.43                                                                 | -                    |
| 4 | Movimiento combinado        | Rotatorio 1 | 3.46                                                                 | 24.24                |
|   |                             | Lineal 2    | 1.31                                                                 | 8.47                 |
|   |                             | Lineal 3    | 2.25                                                                 | 8.47                 |

#### 6.4 Discusión de resultados cinemáticos inversos del modelo implementado en MATLAB R2022b y prototipo

Se realiza una discusión acerca de la cinemática inversa de los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción y combinación de los movimientos anteriores. Esta discusión se realiza con el modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo de mecanismo paralelo.

#### **6.4.1 Discusión de la cinemática inversa del movimiento de plantarflexión-dorsiflexión**

En la Figura 6.5a se muestra el ángulo de rotación del actuador rotatorio, la curva del prototipo muestra una mayor fluctuación del modelo implementado en MATLAB R2022b, lo que podría deberse a los actuadores lineales que no se encuentran sincronizados en todo el ciclo de marcha, esta pequeña variación hace que el sensor inercial IMU 6050 mida esa rotación.

En la Figura 6.5b, el desplazamiento lineal de los actuadores se relaciona directamente con el movimiento de plantarflexión y dorsiflexión, que es la extensión y contracción de los pistones de los actuadores. La diferencia entre la modelación implementada en MATLAB R2022b y el prototipo se sugiere un refinamiento y ajustes en el diseño del prototipo.

En la Figura 6.5c, también se muestra el desplazamiento de longitud del actuador lineal a lo largo del tiempo. La congruencia entre los datos del modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo indica que existen diferencias en el primer tramo de la curva, es decir, entre las fases de contacto inicial y respuesta a la carga.

#### **6.4.2 Discusión de la cinemática inversa del movimiento de eversión-inversión**

En la Figura 6.6a se muestra el ángulo de rotación en grados a lo largo del tiempo. El movimiento de eversión-inversión implica la rotación del tobillo hacia afuera e interior del plano medio del cuerpo, respectivamente. La curva obtenida del modelo implementado en MATLAB R2022b muestra un patrón más suave y consistente comparado con el prototipo, lo que puede reflejar las diferencias del modelo implementado con la respuesta mecánica del prototipo.

En la Figura 6.6b se compara la compresión y la extensión del pistón del actuador lineal a lo largo del tiempo entre el modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo. El desplazamiento lineal del actuador puede influir en el grado de eversión-inversión, con un mayor desplazamiento lineal que podría apoyar la eversión y un menor desplazamiento correspondiente a la inversión.

En la Figura 6.6c se compara la extensión y compresión del actuador lineal a lo largo del tiempo entre la simulación y el prototipo. La longitud del actuador que se ha desplazado puede influir en el grado de eversión-inversión, con una mayor longitud que podría apoyar la eversión y una menor longitud correspondiente a la inversión. Las diferencias entre el modelo desarrollado e implementado en MATLAB R2022b con el prototipo tiene ciertas variaciones en fases del ciclo de marcha como en la fase de apoyo intermedio, balanceo inicial.

#### **6.4.3 Discusión de la cinemática inversa del movimiento de abducción-aducción**

En la Figura 6.7a se muestran las curvas del ángulo de rotación entre los datos del modelamiento implementado en MATLAB R2022b y los obtenidos de un prototipo. El ángulo de rotación cambia a lo largo del tiempo, reflejando la rotación del pie hacia adentro y hacia afuera del cuerpo. Durante el ciclo de marcha, la aducción (movimiento hacia el centro del cuerpo) se observa típicamente después del contacto inicial, mientras que la abducción (movimiento hacia afuera del centro del cuerpo) ocurre durante la fase de balanceo inicial.

En la Figura 6.7b se muestra una diferencia entre los datos obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b y los datos del prototipo, se observa que la respuesta del actuador en el entorno real puede tener diferencias respecto a los resultados del modelo matemático.

En la Figura 6.7c se muestra el desplazamiento lineal del segundo actuador, que también contribuye al movimiento de abducción y aducción. En estas curvas también se observan diferencias significativas tanto en la fase del apoyo intermedio y la fase de balanceo inicial. Esta diferencia es debido a que el pistón del actuador lineal debe extenderse y contraerse distancias muy pequeñas (desde 36mm a 36,2mm en la fase de apoyo intermedio y de 36mm a 36.3mm en la fase de balanceo inicial) en un menor tiempo.

Los datos del modelo implementado en MATLAB R2022b y los datos del prototipo deben concordar para que el mecanismo paralelo funcione de manera efectiva. Las diferencias indica la necesidad de ajustes en el diseño del prototipo, la posibilidad de errores o tolerancias en la fabricación, o montaje.



#### **6.4.4 Discusión de la cinemática inversa del movimiento combinado**

En la Figura 6.8a se muestra el ángulo de rotación a lo largo del tiempo. Las diferencias entre la modelación implementada en MATLAB R2022b y el prototipo se deben a imperfecciones mecánicas, retardos en la respuesta del sensor IMU 6050, así como también simplificaciones en el modelo. La curva muestra los movimientos que corresponden a los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión y abducción-aducción en el ciclo de marcha.

En la Figura 6.8b se muestra que entre la fase de respuesta a la carga y la fase de apoyo intermedio existe una diferencia significativa entre la modelación implementada en MATLAB R2022b y el prototipo, siendo 8mm de longitud de carrera. Esta diferencia se debe principalmente en el inicio del movimiento, donde se tienen velocidades elevadas y también a la precisión del actuador lineal  $\pm 0.30\text{mm}$ .

En la Figura 6.8c se muestra la longitud a lo largo del tiempo para un segundo actuador lineal. Las diferencias entre el modelo implementado en MATLAB R2022b y el prototipo pueden ser causadas por los mismos factores mencionados anteriormente.

#### **6.5 Discusión sobre las consideraciones del diseño para realizar experimentos con usuarios humanos**

El trabajo futuro previsto se centra en utilizar el modelo dinámico del mecanismo paralelo para un tobillo protésico de 3 grados de libertad, el mismo que requerirá de la optimización del diseño para realizar pruebas funcionales en entorno de laboratorio con usuarios sin amputación y con amputación. A continuación, se describen las consideraciones a tomar en cuenta.

##### **a) Optimización del diseño para pruebas funcionales en el entorno de laboratorio con usuario sin amputación**

El diseño de un tobillo protésico de tres grados de libertad basado en un mecanismo paralelo 2SPU-1RU puede ser optimizado para ser usado en usuarios humanos y validar su efectividad mediante pruebas en laboratorio. Es importante abordar varios aspectos

fundamentales como la optimización del diseño para la creación de un simulador protésico para una evaluación funcional.

Mecanismo paralelo: Ajuste de la configuración geométrica según la selección de nuevos actuadores más compactos y ligeros, para no añadir peso innecesario a la prótesis. Se deben considerar actuadores eléctricos capaces de mantener una velocidad constante. Así mismo el mantenimiento se deberá tomar en cuenta para reducir costos a largo plazo y asegurar un funcionamiento continuo. Se pueden considerar las siguientes opciones:

Opción 1: empresa JIECANG<sup>44</sup>, tiene microactuadores lineales de 12 V, diseñados para alta precisión y confiabilidad, ideales para dispositivos médicos y automatización industrial.

Opción 2: empresa Thomson<sup>45</sup>, modelo Electrak HD, capaz de soportar cargas dinámicas de hasta 16 kN (1600 kg-f), longitudes de carrera de 25 a 1000 mm.

Opción 3: empresa Progressive Automations<sup>46</sup>, modelo PA-HD1, voltaje de 12 VDC o 24 VDC, capacidad de carga de hasta 1574 lb (714 kg-f), carrera entre 10 cm a 101 cm.

Simulador de prótesis: es necesario diseñar y fabricar un simulador de prótesis que permita a una persona sin amputación caminar. Este simulador debe restringir el movimiento del tobillo humano, el cual sería sustituido por el prototipo del mecanismo en la prótesis. En la Figura 6.10 se presentan antecedentes, que servirán como referencia para el desarrollo conceptual del simulador de prótesis, necesario para evaluar la funcionalidad del mecanismo paralelo en personas sin amputación.

---

44 Tomado de: <https://es.jiecang.com/linear-actuators.html> Fecha de revisión: 15-07-2024.

45 Tomado de: <https://www.thomsonlinear.com/en/index> Fecha de revisión: 15-07-2024.

46 Tomado de: <https://www.progressiveautomations.com/es> Fecha de revisión: 15-07-2024.

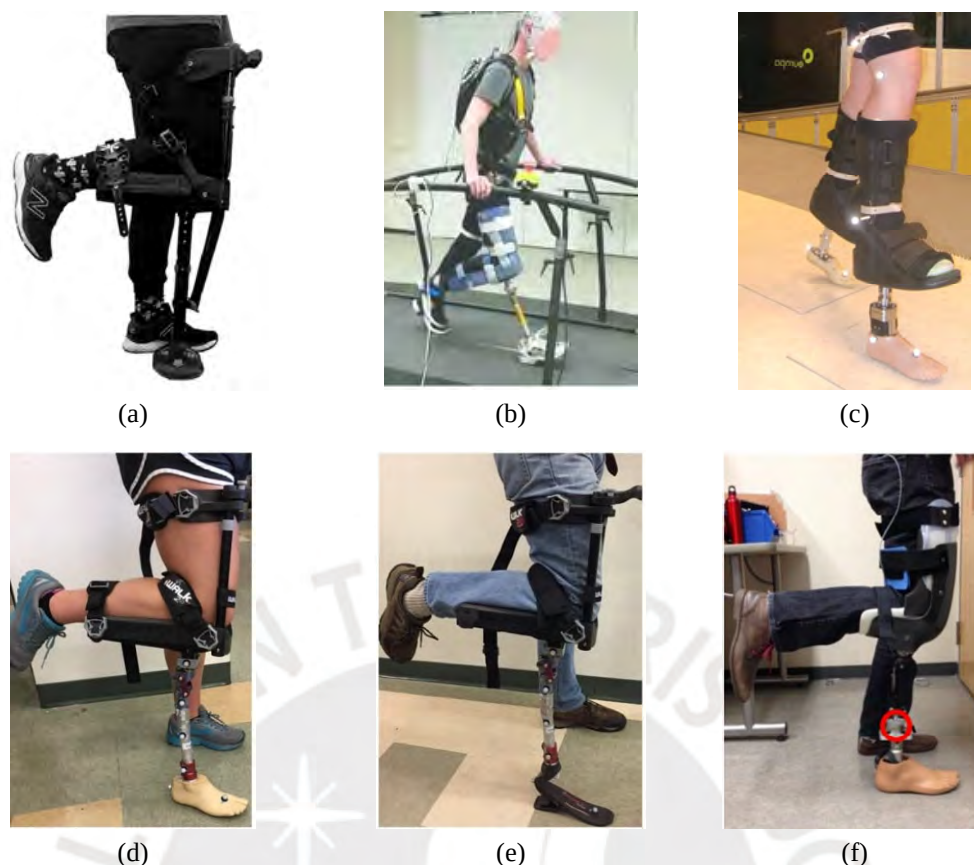


Fig. 6.10 Simuladores de prótesis: (a) iWalk 2.0-USA [Senatore, 2023], (b) University of Groningen, Países Bajos [Kooiman, 2020], (c) compañía Orthocare, Mountlake Terrace, USA<sup>47</sup>, (d) simulador con pie SACH University of South Florida, USA [Schlafly, 2019], (e) simulador con pie Renegade® AT University of South Florida, USA [Schlafly, 2019], (f) simulador de la Universidad de Toronto [Andrysek, 2019].

Con los antecedentes identificados, se concluye que el simulador debe incluir varios componentes que se detallan en la Figura 6.11.

- i) Soporte para el muslo, rodilla, pantorrilla y pie humano.
- ii) Correas de ajuste para el muslo y pantorrilla de la pierna.
- iii) Un componente de longitud regulable.
- iv) Mecanismo desarrollado.
- v) Pie protésico diseñado o comercial.

<sup>47</sup> Tomado de: <https://www.medicaldesignbriefs.com/component/content/article/21829-microprocessor-controlled-prostheses-are-a-step-in-the-right-direction> Fecha de revisión: 15-07-2024.

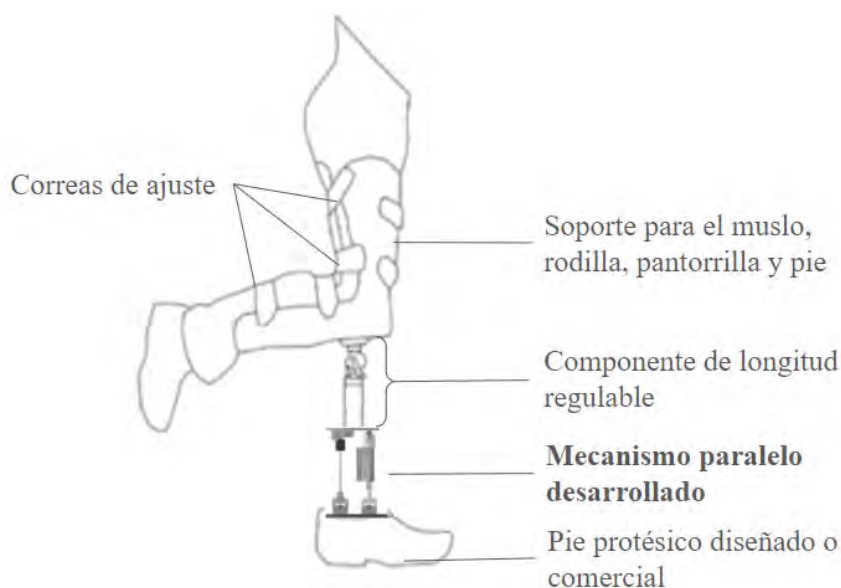


Fig. 6.11 Concepto de diseño del simulador de prótesis.

También se considerará la estatura del participante para ajustar la posición vertical del mecanismo. La estatura promedio de las personas en Perú varía según el género: para los hombres es aproximadamente 1.66 metros, mientras que para las mujeres es alrededor de 1.54 metros. Estas medidas pueden variar ligeramente según la región y el grupo demográfico dentro del país<sup>48</sup>. Para determinar la longitud desde la rodilla hasta la planta del pie, y otras variaciones en las longitudes corporales, se puede utilizar el Anexo H y la Figura 6.12, donde se expresan estas longitudes como una fracción de la estatura.

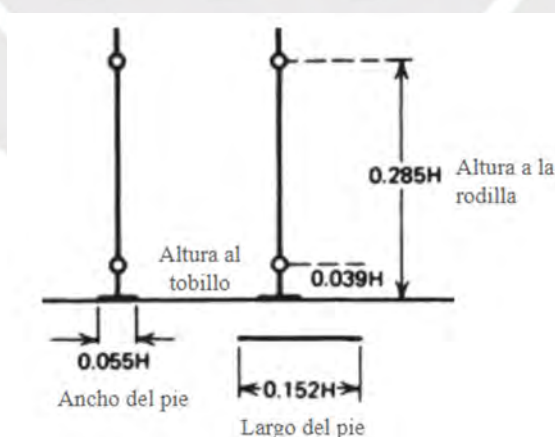


Fig. 6.12 Segmento de la rodilla-pie en función de la estatura [Winter, 2008].

48 Tomado de: <https://increaseheightblog.com/the-average-height-of-people-in-peru/> Fecha de revisión: 15-07-2024.

Tabla 6.2 Dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura.

| Segmento corporal    | Ecuación | Segmento calculado con la estatura peruana |                     |
|----------------------|----------|--------------------------------------------|---------------------|
|                      |          | 1660 mm de estatura                        | 1540 mm de estatura |
| Altura de la rodilla | $0,285H$ | 473,1 mm                                   | 438,9 mm            |
| Altura al tobillo    | $0,039H$ | 64,7 mm                                    | 60,0 mm             |
| Ancho del pie        | $0,055H$ | 91,6 mm                                    | 84,7 mm             |
| Largo del pie        | $0,152H$ | 252,3 mm                                   | 234,1 mm            |

Por lo tanto, el diseño del simulador se basa en los detalles presentados en la Figura 6.12. Utilizando la Ecuación 6.6, se puede determinar el rango de medidas aproximadas para el componente regulable (Ver Tabla 6.3).

$$L_{regulable} = A_{rodilla} - A_{mecanismo} - A_{tobillo} \quad (6.6)$$

Donde:

$L_{regulable}$ : longitud del componente regulable que permite ajustar la variación en la longitud en el eje vertical, (mm).

$A_{rodilla}$ : altura medida desde la rodilla hasta el piso, (mm).

$A_{mecanismo}$ : altura del mecanismo paralelo, (mm).

$A_{tobillo}$ : altura medida desde el tobillo hasta el piso, (mm).

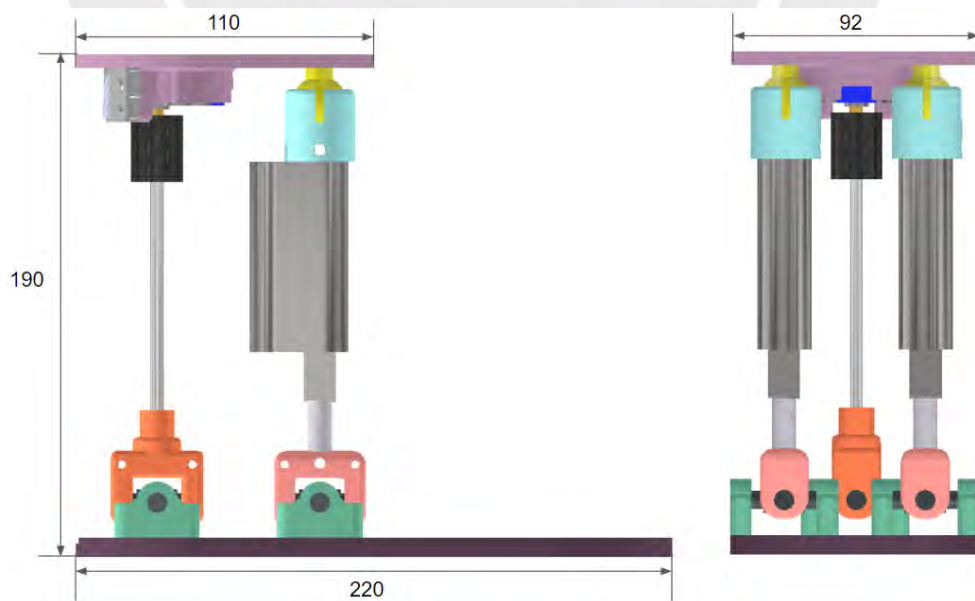


Fig. 6.13 Ancho, largo y altura del mecanismo paralelo.



Tabla 6.3 Cálculo de la longitud regulable considerando las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura.

| Segmento             | Segmento calculado con la estatura peruana |                     |
|----------------------|--------------------------------------------|---------------------|
|                      | 1660 mm de estatura                        | 1540 mm de estatura |
| Altura de la rodilla | 473,1 mm                                   | 438,9 mm            |
| Altura al tobillo    | 64,7 mm                                    | 60,0 mm             |
| Altura del mecanismo | 190,0 mm                                   | 190,0 mm            |
| Longitud regulable   | 218,4 mm                                   | 188,9 mm            |

Siguiendo con el análisis, la Tabla 6.4 presenta los resultados del cálculo para determinar el ancho y largo del pie protésico, ya sea para su diseño personalizado o para la selección de un modelo de catálogo.

Tabla 6.4 Cálculo del ancho y largo del pie protésico, teniendo en cuenta las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura.

| Segmento            | Segmento calculado con la estatura peruana |                     |
|---------------------|--------------------------------------------|---------------------|
|                     | 1660 mm de estatura                        | 1540 0m de estatura |
| Ancho del pie       | 91,6 mm                                    | 84,7 mm             |
| Ancho del mecanismo | 92,0 mm                                    | 92,0 mm             |
| Largo del pie       | 252,3 mm                                   | 234,1 mm            |
| Largo del mecanismo | 220,0 mm                                   | 220,0 mm            |

Con base en lo expuesto, se concluye que el diseño del simulador deberá tener en cuenta la variación de las medidas antropométricas, como se muestra en la Figura 6.14.

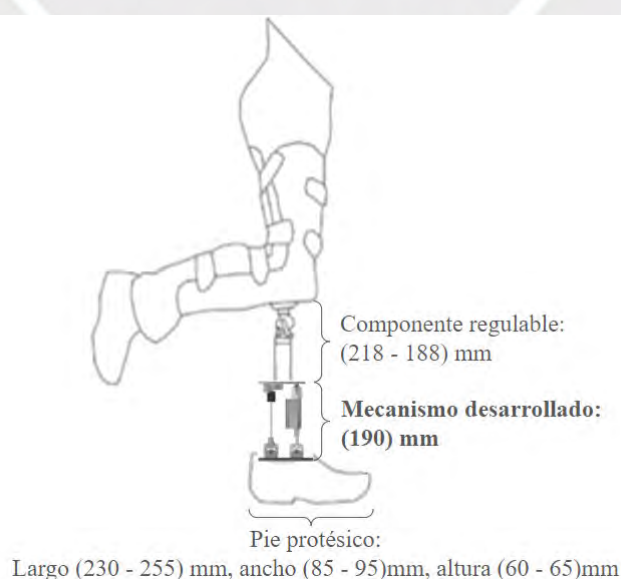


Fig. 6.14 Diseño del simulador de prótesis para pruebas funcionales con el mecanismo paralelo.

**b) Optimización del diseño para pruebas funcionales en el entorno de laboratorio con usuario con amputación.**

El diseño de un tobillo protésico de tres grados de libertad basado en un mecanismo paralelo 2SPU-1RU puede ajustarse para su uso en usuarios con amputación y validar su efectividad mediante pruebas en laboratorio. Es importante considerar diversos aspectos fundamentales del diseño para la evaluación funcional con usuarios con amputación.

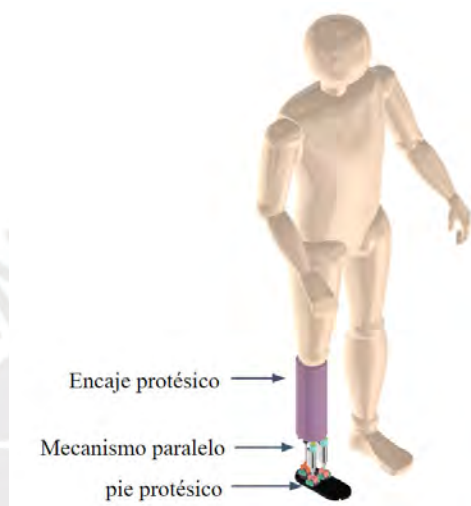


Fig. 6.15 Pruebas funcionales con usuario con amputación.

El ajuste en el diseño del tobillo protésico considera las medidas antropométricas del usuario, incluyendo la longitud del muñón, la distancia desde la rodilla hasta la planta del pie, la altura del tobillo, el diámetro del tobillo, así como el ancho y longitud del pie. Para determinar estas medidas antropométricas, se comienza con la estatura promedio de las personas en Perú, que varían según el género. Para los hombres, la estatura promedio es de aproximadamente 1.66 metros, mientras que para las mujeres es alrededor de 1.54 metros. Estas medidas pueden variar ligeramente según la región y el grupo demográfico dentro del país <sup>49</sup>. El Anexo H, proporciona información necesaria para estimar las longitudes de los segmentos corporales en función de la estatura, ayudando a ajustar el diseño a estas variaciones.

A continuación, se aborda la amputación transtibial, que implica la amputación de la extremidad inferior por debajo de la rodilla, es decir, a través de la tibia. Esta amputación se clasifica según el nivel específico del corte en la tibia.

49 Tomado de: <https://increaseheightblog.com/the-average-height-of-people-in-peru/> Fecha de revisión: 15-07-2024.

Amputación transtibial distal: el corte se realiza cerca del tobillo, resultando en un muñón más largo, generalmente de 15 a 20 cm desde el nivel de la articulación de la rodilla.

Amputación transtibial media: este es el tipo más común. El corte se efectúa a una distancia intermedia de la articulación de la rodilla, dejando un muñón de aproximadamente 10 a 15 cm de longitud.

Amputación transtibial proximal: el corte se realiza más cerca de la rodilla, dejando un muñón más corto, típicamente de 5 a 10 cm desde la articulación de la rodilla.

La longitud del muñón transtibial influye en diversos aspectos del uso de la prótesis, como la superficie de contacto para el encaje, el apalancamiento y la eficiencia en la marcha. Un muñón más largo suele proporcionar mejor control y comodidad en el uso de la prótesis, mientras que un muñón más corto puede presentar desafíos adicionales en términos de estabilidad y ajuste.

Por lo tanto, se debe considerar el ensamble del mecanismo con el encaje protésico, y su conexión con el pie protésico. Para determinar la dimensión disponible entre el muñón y el mecanismo paralelo, se puede utilizar la Ecuación 6.7.

$$L_{disponible} = A_{rodilla} - A_{muñón} - A_{mecanismo} - A_{tobillo} \quad (6.7)$$

Donde:

$L_{disponible}$ : longitud disponible después de restar la altura desde la rodilla hasta el piso, la altura del muñón, la altura del mecanismo, y la altura del pie protésico, (mm).

$A_{rodilla}$ : altura medida desde la rodilla hasta el piso, (mm).

$A_{mecanismo}$ : altura del mecanismo paralelo, (mm).

$A_{tobillo}$ : altura medida desde el tobillo hasta el piso, (mm).

Las Tablas 6.5 y 6.6 presentan un análisis detallado de la longitud disponible en relación con las dimensiones de los segmentos corporales, tomando en cuenta la estatura y la longitud del muñón. La Tabla 6.5 presenta los cálculos para una estatura promedio de

1660 mm, mientras que la Tabla 6.6 los presenta para una estatura de 1540 mm. En ambas tablas, se detallan las alturas de la rodilla, del muñón, del mecanismo y del tobillo para diferentes tipos de muñón (distal, medio y proximal). Asimismo, se calcula la longitud disponible en cada caso. La comparación entre estas tablas permite determinar las variaciones en las dimensiones y la longitud disponible según la estatura y el tipo de muñón, lo cual es importante para el diseño óptimo de una prótesis transtibial.

Tabla 6.5 Cálculo de la longitud disponible considerando las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura y la longitud del muñón.

| Segmento             | Segmento calculado con la estatura peruana 1660 mm de estatura |             |                |
|----------------------|----------------------------------------------------------------|-------------|----------------|
|                      | Muñón distal                                                   | Muñón medio | Muñón proximal |
| Altura de la rodilla | 473,1 mm                                                       | 473,1 mm    | 473,1 mm       |
| Altura del muñón     | 200,0 mm                                                       | 150,0 mm    | 100,0 mm       |
| Altura del mecanismo | 190,0 mm                                                       | 190,0 mm    | 190,0 mm       |
| Altura al tobillo    | 64,7 mm                                                        | 64,7 mm     | 64,7 mm        |
| Longitud disponible  | 18,4 mm                                                        | 68,4 mm     | 118,4 mm       |

Tabla 6.6 Cálculo de la longitud disponible teniendo en cuenta las dimensiones de los segmentos corporales en función de la estatura y la longitud del muñón.

| Segmento             | Segmento calculado con la estatura peruana 1540 mm de estatura |             |                |
|----------------------|----------------------------------------------------------------|-------------|----------------|
|                      | Muñón distal                                                   | Muñón medio | Muñón proximal |
| Altura de la rodilla | 438,9 mm                                                       | 438,9 mm    | 438,9 mm       |
| Altura del muñón     | 200,0 mm                                                       | 150,0 mm    | 100,0 mm       |
| Altura del mecanismo | 190,0 mm                                                       | 190,0 mm    | 190,0 mm       |
| Altura al tobillo    | 60,0 mm                                                        | 60,0 mm     | 60,0 mm        |
| Longitud disponible  | -11,1 mm                                                       | 38,9 mm     | 88,9 mm        |

Las dimensiones del accesorio de acople entre el encaje protésico y la prótesis transtibial puede variar según del diseño específico y las necesidades del usuario. Por lo general, estas dimensiones son:

Diámetro del conector: el diámetro estándar del conector es de aproximadamente 34 a 38 mm.

Longitud del conector: la longitud varía entre 60-100 mm dependiendo del diseño específico y la funcionalidad requerida.

De acuerdo con las Tabla 6.5 y 6.6, se concluye que el espacio disponible para el mecanismo paralelo y el pie protésico dependerá de la talla del usuario. Este espacio puede no ser adecuado para las amputaciones distales, pero resulta factible para amputaciones proximales o medias.

En el Anexo I se detallan las consideraciones clave para la elaboración de la funcionalidad del mecanismo paralelo en personas sin amputación. La implementación de estas consideraciones garantizará que el protocolo de pruebas proporcione información valiosa sobre la funcionalidad del mecanismo paralelo y su desempeño en condiciones de laboratorio.





## OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES

El estudio detallado de la biomecánica del tobillo permitió entender profundamente el tobillo humano, esto incluye el análisis de los movimientos rotacionales necesarios para replicar la funcionalidad del tobillo, siendo estos el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, y abducción-aducción.

El enfoque primordial de la investigación se concentra en modelar específicamente las rotaciones, dejando de lado, en esta etapa inicial, los desplazamientos del tobillo (desplazamiento relativo entre el pie respecto a la pantorrilla). Esta aproximación permite una simplificación válida del modelo que facilita la comprensión precisa de la dinámica de las rotaciones del tobillo, estableciendo así una base sólida para futuras investigaciones que podrían incorporar de manera integral ambos tipos de movimiento (rotaciones y desplazamiento del tobillo).

El diseño conceptual del mecanismo paralelo 2SPU-1RU consta de tres grados de libertad permitiendo los movimientos rotacionales del tobillo. Se utilizó el software Autodesk Inventor 2021 para verificar que el mecanismo paralelo alcance las rotaciones máximas de los movimientos en el plano sagital, plano frontal y plano transversal, es decir los rangos máximos de movimiento rotacional en un ciclo de marcha.

El modelo cinemático inverso describe la relación entre las posiciones, velocidades y aceleraciones en la plataforma móvil. El modelo dinámico inverso permitió calcular los torques y fuerzas de los actuadores rotacional y lineales respectivamente. El algoritmo computacional que permite calcular las respuestas cinemáticas y dinámicas inversa del mecanismo paralelo 2SPU-1RU fue programado en el software MATLAB R2022b.

Comparar los resultados del MATLAB R2022B con los datos experimentales reales permitió validar el modelo cinemático, así como también el diseño conceptual de una configuración específica del mecanismo paralelo 2SPU-1RU. Los resultados de la dinámica inversa del diseño conceptual del mecanismo paralelo fueron obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b y validados con la simulación del software Simscape.

Se recomienda mejorar el diseño mecánico y del sistema de control del mecanismo paralelo para incorporar las fuerzas dinámicas y de impacto, particularmente en el contexto de movimientos reales y diferentes escenarios del ciclo de marcha. Estas mejoras incluyen considerar que la futura prótesis se desplazaría en el espacio mientras el tobillo realiza las rotaciones, por lo que la posición, velocidad y aceleraciones de la plataforma móvil (efector final) calculadas mediante el modelo planteado variarían, pero esto se solucionaría realizando las transformaciones hacia un marco de referencia no inercial.

Se recomienda que futuras investigaciones incorporen análisis de impacto en el modelo del mecanismo paralelo, especialmente considerando escenarios de marcha real con todas sus fuerzas dinámicas (impulso, la inercia del movimiento del usuario, fuerza variable de contacto pie-piso). Esta integración será importante para asegurar que el mecanismo no solo demuestre ser funcional en un entorno controlado, sino que también garantice seguridad y fiabilidad bajo condiciones de uso real.

Por otro lado, sería necesario realizar simulaciones numéricas utilizando ANSYS para verificar el impacto de las fuerzas dinámicas que soporta el mecanismo, con el fin de mejorar el diseño conceptual del mecanismo para una futura prótesis que considere efectos de impacto. De esta manera el mecanismo paralelo podría adaptarse a variaciones en el terreno y en la intensidad del uso, lo que a su vez sugiere que el mecanismo debe tener la durabilidad necesaria para resistir esfuerzos de fatiga sin comprometer la funcionalidad.

## CONCLUSIONES

En este estudio se ha desarrollado un modelo del mecanismo paralelo 2SPU-1RU aplicado a un tobillo protésico con tres grados de libertad. Mediante la aplicación del Principio del Trabajo Virtual se resolvió la cinemática y dinámica inversa del mecanismo paralelo y posteriormente se desarrolló un algoritmo computacional.

Los resultados de la cinemática inversa fueron obtenidos del modelo implementado en MATLAB R2022b y contrastados con el prototipo en 4 experimentos prácticos; en el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción, y combinación de los movimientos anteriormente detallados.

La comparación entre los resultados experimentales con el prototipo y el modelo desarrollado e implementado en MATLAB R2022b ha sido satisfactoria. Estos resultados mostraron errores mínimos respecto en comparación al modelo matemático. En el movimiento de plantarflexión-dorsiflexión se obtiene un error máximo en el actuador lineal 2 siendo este 4.79%. En el movimiento de eversión-inversión se obtiene un error máximo en el actuador lineal 3 siendo este 13.51%. En el movimiento de abducción-aducción se obtiene un error máximo de 13.74% en el actuador rotatorio. En el movimiento combinado se obtiene un error máximo de 24.24% en el actuador rotatorio.

La comparación entre el prototipo y la modelación implementada en MATLAB R2022b muestra que, aunque hay una similitud general en el patrón de movimiento, hay diferencias en la amplitud y la respuesta temporal. Esto es común al comparar datos obtenidos del prototipo con datos obtenidos de un modelo implementado en una herramienta de software, ya que los modelos matemáticos son una base y por lo tanto se diferencian del comportamiento real que incluye las complejidades (errores de montaje, tolerancias, entre otros) de un sistema físico.

La coordinación entre los actuadores lineales y rotatorios es importante para realizar los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión, eversión-inversión, abducción-aducción de manera combinada. Los actuadores lineales ajustan la rotación de eversión-inversión, y plantarflexión-dorsiflexión mediante sus fuerzas generadas, mientras que el actuador rotatorio controla la orientación en abducción-aducción generando su torque. En un

trabajo futuro, para el prototipo fabricado, es necesario utilizar actuadores con velocidades más altas y que puedan soportar mayores cargas para así mejorar el rendimiento y la respuesta temporal del mecanismo paralelo e imitar de manera más precisa y eficiente el movimiento tobillo.

El modelo cinemático y dinámico inverso del mecanismo paralelo, se validaron mediante la simulación Simscape. Al comparar las fuerzas y torques generados tanto por la programación realizada en MATLAB R2022b y la programación por bloques realizada en Simscape, las gráficas coinciden en forma y mientras que la magnitud de manera aproximada (con desplazamiento en el eje vertical) que se deben a las articulaciones rígidas del modelo de la simulación.

Se concluye que el modelo de la cinemática inversa verificado por el prototipo de mecanismo paralelo 2UPS-1RU es una herramienta para el diseño y control de un mecanismo paralelo para tobillo protésico. Por otro lado, el modelo de la dinámica inversa fue validado mediante la simulación realizada en Simscape. Estos modelos desarrollados son especialmente útiles para el desarrollo de controladores de hasta medio nivel (controladores basados en la cinemática y dinámica del mecanismo).

Este trabajo contribuye en la creación de un modelo cinemático y dinámico inverso de un mecanismo paralelo para el movimiento del tobillo. A través del modelo y prototipo, se ha establecido una base para la aplicación de prótesis de tobillo usando mecanismos paralelos. Sin embargo, es importante reconocer que en la modelación (cinemática y dinámica inversa) no se han incluido explícitamente las fuerzas dinámicas y de impacto que se generan durante la marcha, así como las diferentes condiciones de marcha, cambios en el peso o la velocidad de marcha. Esto representa una oportunidad para la refinación del modelo para un trabajo futuro. Para abordar esta limitación, futuras investigaciones deberían enfocarse en la integración de las fuerzas dinámicas y de impacto en el esquema de control con el que contará la prótesis a ser desarrollada. Además, una revisión del diseño mecánico y electrónico del mecanismo paralelo y simulaciones numéricas de esfuerzos, para asegurar que pueda adaptarse y responder adecuadamente a las variadas condiciones encontradas durante la marcha. La consideración de estos factores dinámicos permitiría garantizar el funcionamiento de la prótesis en un entorno real.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Abarca, 2023] Abarca, V. E., & Elias, D. A. (2023). A review of parallel robots: Rehabilitation, assistance, and humanoid applications for neck, shoulder, wrist, hip, and ankle joints. *Robotics*, 12, 131. <https://doi.org/10.3390/robotics12050131>.
- [Arockia, 2014] Arockia, A., & Kumar, M. A. (2014). Experimental investigation on position analysis of 3 – DOF parallel manipulators. *Procedia Engineering*, 97, 1748-1756. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.391>.
- [Andrysek, 2019] Andrysek, J., Tomasi, J., Leineweber, M., & Eshraghi, A. (2019). A new modeling method to characterize the stance control function of prosthetic knee joints. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 66(4), 1184-1192. <https://doi.org/10.1109/TBME.2018.2869985>.
- [Au, 2007] Au, S. K., Weber, J., & Herr, H. (2007). Powered ankle-foot prosthesis for the improvement of amputee ambulation. *Proceedings of the 29th Annual International Conference of the IEEE EMBS*. <https://biomech.media.mit.edu/wp-content/uploads/sites/9/2013/04/Powered-Ankle-Foot-Prosthesis-for-the-Improvement-of-Amputee-Ambulation.pdf>.
- [Azar, 2016] Azar, W. A., Akbarimajd, A., & Parvari, E. (2016). Intelligent control method of a 6-DOF parallel robot used for rehabilitation treatment in lower limbs. *Automatika*, 57(2), 466-476. <https://doi.org/10.7305/automatika.2016.10.934>
- [Barrientos, 2007] Barrientos, A., Peñin, L., Blaguer, C., & Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica*. España: Mc Graw Hill.
- [Bandara, 2014] Bandara, D., & Hemapala, K. A. (2014). Multi-DoF anthropomorphic transradial prosthetic arm. In *Proceedings of the 5th IEEE RAS & EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics* (pp. 1-6), Sao Paulo, Brazil, August 12-15.
- [Bergelin, 2012] Bergelin, B., & Voglewede, P. (2012). Design of an active ankle-foot prosthesis utilizing a four-bar mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design*, 134(6), 061004. <https://doi.org/10.1115/1.4006715>
- [Bellmam, 2008] Bellman, R., Holgate, M., & Sugar, T. (2008). SPARKy 3: Design of an active robotic ankle prosthesis with two actuated degrees of freedom using regenerative kinetics. In *Proceedings of the 2nd IEEE RAS & EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics* (pp. 511-516). <https://doi.org/10.1109/BIOROB.2008.4762887>
- [Bowker, 2002] Bowker, H. K., & Michael, J. W. (2002). *Atlas of limb prosthetics: Surgical, prosthetic, and rehabilitation principles*. Retrieved from <http://www.oandplibrary.org/alp/chap14-01.asp>
- [Brockett, 2016] Brockett, C. L., & Chapman, G. J. (2016). Biomechanics of the ankle. *Orthopaedics and Trauma*, 30(3), 232-238. <https://doi.org/10.1016/j.mporth.2016.04.015>
- [Chaparro, 2015] Chaparro, D. (2015). *Análisis, diseño y control de un manipulador paralelo 3-SPS-1S utilizado en aplicaciones de seguridad [Tesis de maestría]*. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
- [Cherelle, 2014] Cherelle, P., Mathijssen, G., Wang, Q., Vanderborght, B., & Lefeber, D. (2014). Advances in propulsive bionic feet and their actuation principles. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, Article ID 984046. <https://doi.org/10.1155/2014/984046>



- [Cuellar, 2022] Cuellar, N. (2022). Advanced Dynamics: Dynamic [Diapositivas de PowerPoint]. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- [Drake, 2015] Drake, R. L., Vogl, A. W., & Mitchell, A. W. M. (2015). *Gray's Anatomy for Students* (3rd ed.). Churchill Livingstone.
- [Du, 2017] Du, Y., Li, R., Li, D., & Bai, S. (2017). An ankle rehabilitation robot based on 3-RRS spherical parallel mechanism. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(8), 1-8. <https://doi.org/10.1177/1687814017718112>
- [Enferadi, 2016] Enferadi, J., & Shahi, A. (2016). A closed-form dynamics of a novel fully wrist driven by revolute motors. *Journal of Mechanics*, 32(4). <https://doi.org/10.1017/jmech.2016.36>
- [Fatehi, 2011] Fatehi, M. H., Vali, A. R., Eghtesad, M., & Fatehi, A. A. (2011). Modeling and control of 3-PRS parallel robot and simulation based on SimMechanics in Matlab. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA)*.
- [Fernández, 2016] Fernández, L., & Sotomayor, L. (2016). Análisis cinemático inverso y directo del robot paralelo [Tesis de magíster, Diseño, Producción y Automatización Industrial]. Quito.
- [Fite, 2008] Fite, K., Withrow, T., Shen, X., Wait, K., Mitchell, J., & Goldfarb, M. (2008). A gas-actuated anthropomorphic prosthesis for transhumeral amputees. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(1), 159-169.
- [Haijun, 2002] Haijun, S., Dietmeyer, P., & McCarthy, J. (2002). Trajectory planning for constrained parallel manipulators. University of California, Irvine. Retrieved from <http://synthetica.eng.uci.edu/~michaelmccarthy/Papers/J44CRSAnalysis.pdf>
- [Hamill, 2015] Hamill, J., Knutzen, K., & Derrick, T. (2015). *Biomechanical basis of human movement* (4th ed.). Wolters Kluwer.
- [He, 2019] He, J., Xu, W., & Gao, B. (2019). Self-insulating joint design for live-line operation based on the cable-driven parallel-series mechanism. *Applied Sciences*, 10(1), 22. <https://doi.org/10.3390/app10010022>
- [Holgate, 2016] Holgate, M. (2016). Robotic device and method of using a parallel mechanism. Patente N° US 2017/0095355 A1.
- [Huda, 2006] Huda, S., & Takeda, Y. (2006). Kinematic analysis and synthesis of a 3-URU pure rotational parallel mechanism with respect to singularity and workspace. *Journal of Advanced Mechanical Design Systems and Manufacturing*, 1(1), 81-92. <https://doi.org/10.1299/jamdsm.1.81>
- [Hunt, 2021] Hunt, J., & Lee, H. (2021). Optimizing the rigid or compliant behavior of a novel parallel-actuated architecture for exoskeleton robot applications. *Frontiers in Robotics and AI*, 8. <https://doi.org/10.3389/frobt.2021.596958>
- [ICRC, 2014] International Committee of the Red Cross (ICRC). (2014). Prosthetic gait analysis for physiotherapists. Retrieved from <https://shop.icrc.org/prosthetic-gait-analysis-for-physiotherapists-pdf-en.html>
- [Jiang, 2017] Jiang, F., Tao, G., & Li, Q. (2017). Analysis and control of a parallel lower limb based on pneumatic artificial muscles. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(1). <https://doi.org/10.1177/1687814016685002>

- [Kapandji, 2012] Kapandji, I. A. (2012). El pie. En I. A. Kapandji (6ª ed.), Cuadernos de fisiología articular: Miembro inferior (Vol. 2, Cap. 4, pp. 178-231). Editorial Médica Panamericana.
- [Kazem, 2015] Kazem, B.I., Morad, A.H., & Hasan, K.M. (2015). 3-DOF Parallel Robotics System for Foot Drop therapy using Arduino. *Innovative Systems Design and Engineering*, 6, 1-6.
- [Kennedy, 2016] Kennedy, L., Umberger, B., & Sup, F. (2016). A robotic ankle-foot prosthesis with active alignment. *ASME Journal of Medical Devices*, 10(2), 025001. <https://doi.org/10.1115/1.4033195>
- [Kitano, 2018] Kitano, Y., Tanzawa, T., & Yokota, K. (2018). Development of wearable rehabilitation device using parallel link mechanism: Rehabilitation of compound motion combining palmar/dorsi flexion and radial/ulnar deviation. *Robomech Journal*, 5(13). <https://doi.org/10.1186/s40648-018-0109-7>.
- [Khoshnoodi, 2018] Khoshnoodi, H., Rahmani, H., & Talebi, H. (2018). Kinematics, singularity study and optimization of an innovative spherical parallel manipulator with large workspace. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 02, 309-321. <https://doi.org/10.1007/s10846-017-0752-x>.
- [Kooiman, 2020] Kooiman, V., van Keeken, H., Maurits, N., Weerdesteyn, V., & Solis-Escalante, T. (2020). Rhythmic neural activity is comodulated with short-term gait modifications during first-time use of a dummy prosthesis: A pilot study. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. <https://doi.org/10.1186/s12984-020-00761-8>
- Lesmes, 2007 Lesmes, J. (2007). Evaluación clínico-funcional del movimiento corporal humano. Editorial Médica Internacional Ltda., Panamericana.
- [Liu, 2006] Liu, G., Gao, J., Yue, H., Zhang, X., & Lu, G. (2006). Design and kinematics analysis of parallel robots for ankle rehabilitation. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (pp. 253-258). Beijing, China.
- [Liu, 2019] Liu, K., Chen, Y., Xu, J., Wu, Y., Lu, Y., & Zhao, D. (2019). Fuzzy torque control of the bionic flexible manipulator actuated by pneumatic muscle actuators. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 32, 79. <https://doi.org/10.1186/s10033-019-0394-y>.
- [Liu, 2019] Liu, J., Cheng, Y., Zhang, S., Lu, Z., & Gao, G. (2019). Design and analysis of a rigid-flexible parallel mechanism for a neck brace. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 1-20. <https://doi.org/10.1155/2019/9014653>.
- [Lingampally, 2019] Lingampally, P., & Selvakumar, A. (2019). A kinematic and workspace analysis of a parallel rehabilitation device for head-neck injured patients. *FME Transactions*, 47(3), 405-411. <https://doi.org/10.5937/fmet19034051>.
- [Leal, 2018] Leal-Naranjo, J.-A., T.-S. Miguel, C.-R., Ceccarelli, M., & Rostro-Gonzalez, H. (2018). Mechanical design and assessment of a low-cost 7-DOF prosthetic arm for shoulder disarticulation. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/4357602>.
- [Lee, 2018] Lee, J., Song, B.-W., & Yang, W. (2018). Design of exoskeleton-type wrist human-machine interface based on over-actuated coaxial spherical parallel mechanism. *Advances in Mechanical Engineering*, 10. <https://doi.org/10.1177/1687814017753896>.

- [Lee, 2021] Lee, J., Kim, H., & Yang, W. (2021). Development of wrist interface based on fully actuated coaxial spherical parallel mechanism for force interaction. *Sensors*, 21(23), 8073. <https://doi.org/10.3390/s21238073>.
- [Li, 2022] Li, J., Fan, W., Dong, M., & Rong, X. (2020). Research on control strategies for ankle rehabilitation using parallel mechanism. *Cognitive Computation and Systems*, 2(3), 105-111. <https://doi.org/10.1049/ccs.2020.0012>.
- [Liao, 2018] Liao, Z., Yao, L., Lu, Z., & Zhang, J. (2018). Screw theory based mathematical modeling and kinematic analysis of a novel ankle rehabilitation robot with a constrained 3-PSP mechanism topology. *International Journal of Intelligent Robotics and Applications*, 2(3), 351-360. <https://doi.org/10.1007/s41315-018-0063-9>.
- [Lu, 2007] Lu, Y., Hu, B., & Liu, P. L. (2007). Kinematics and dynamics analyses of a parallel manipulator with three active legs and one passive leg by a virtual serial mechanism. *Multibody System Dynamics*, 17, 229-241. <https://doi.org/10.1007/s11044-006-9032-4>.
- [Lu, 2017] Lu, Y., Zhang, C., Cao, C., & Liu, Y. (2017). Analysis of coordinated grasping kinematics and optimization of grasping force of a parallel hybrid hand. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, May 2017. <https://doi.org/10.1177/1729881417716816>.
- [Maitland, 2015] Maitland, M. (2015). Medial-lateral stabilizing prosthetic ankle/foot for angled and rough ground gait. Patente N° US 9,949,849 B2. University of Washington through its center for commercialization.
- [Martínez, 2012] Martínez, J., & Sabater, J. (2012). Guía docente para el diseño de robots de servicio. Retrieved from <https://sites.google.com/a/goumh.umh.es/hidma/>
- [Madusanka, 2014] Madusanka, D., Wijayasingha, L., Sanjeevan, K., Ahamed, M., Edirisooriya, J., & Gopura, R. (2014). A 3DOF transtibial robotic prosthetic limb. In *Proceedings of the 7th International Conference on Information and Automation for Sustainability (ICIAfS)*, Colombo, Sri Lanka.
- [Mattes, 2000] Mattes, S. J., Martin, P. E., & Royer, T. D. (2000). Walking symmetry and energy cost in persons with unilateral transtibial amputations: Matching prosthetic and intact limb inertial properties. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation*, 81(5), 561-568.
- [Mendoza, 2009] Mendoza-Vázquez, J. R., Tlelo-Cuautle, E., Vázquez-Gonzalez, J. L., & Escudero-Urbe, A. Z. (2009). Simulation of a parallel mechanical elbow with 3 DOF. *Journal of Applied Research and Technology*, 7(2), 113-123. <https://doi.org/10.22201/icat.16656423.2009.7.02.494>
- [Medina, 2016] Medina González, C., Benet Rodríguez, M., & Marco Martínez, F. (2016). El complejo articular de la muñeca: aspectos anatófisiológicos y biomecánicos, características, clasificación y tratamiento de la fractura distal del radio. *MediSur*, 14(4), 430-446. Retrieved from [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1727-897X2016000400011&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-897X2016000400011&lng=es&tlng=es).
- [Núñez, 2006] Núñez-Samper, M. (2006). *Biomecánica, medicina y cirugía del pie* (2a ed.). Retrieved from <https://books.google.com.pe/books?id=DQ22QAtba3YC>.
- [Oliveira, 2007] Oliveira, C., Navarro García, R., Navarro, R., Ruiz Caballero, J. A., Jiménez Díaz, J. T., & Brito Ojeda, E. (2007). *Biomecánica del hombro y sus lesiones. Canarias Médica y Quirúrgica*. Retrieved from [https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/5977/1/0514198\\_00012\\_0002.pdf](https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/5977/1/0514198_00012_0002.pdf)

- [Ortiz, 2022] Ortiz Corredor, F., Rincón Roncancio, M., Mendoza Pulido, J. C. (2022). Texto de medicina física y rehabilitación. Colombia: Editorial El Manual Moderno Colombia.
- [Pandilov, 2014] Pandilov, Z., & Dukovski, V. (2014). Comparison of the characteristics between serial and parallel robots. *Acta Technica Corviniensis – Bulletin of Engineering*, 7(1). ISSN: 2067-3809.
- [Pang, 2020] Pang, Z., Wang, T., Yu, J., Liu, S., Zhang, X., & Jiang, D. (2020). Design and analysis of a flexible, elastic, and rope-driven parallel mechanism for wrist rehabilitation. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2020, 1-13. <https://doi.org/10.1155/2020/8841400>.
- [Psarras, 2016] Psarras, A., Mertyri, D., & Tsaklis, P. (2016). Biomechanical analysis of ankle during the stance phase of gait on various surfaces: A literature review. *Human Movement*, 17(3), 140-147. <https://doi.org/10.1515/humo-2016-0026>
- [Quevedo, 2021] Quevedo, F., Muñoz, J., Castano Pena, J. A., & Monje, C. A. (2021). 3D model identification of a soft robotic neck. *Mathematics*, 9(14), 1652. <https://doi.org/10.3390/math9141652>.
- [Rastegarpanah, 2018] Rastegarpanah, A. et al. (2018). Path-planning of a hybrid parallel robot using stiffness and workspace for foot rehabilitation. *Advances in Mechanical Engineering*, 10. <https://doi.org/10.1177/1687814017754159>.
- [Ramos, 2018] Ramos Alvarado, R., & Castillo Castañeda, E. (2018). Análisis Jacobiano de un robot paralelo de 6 grados de libertad tipo 6-RPR2U cinemáticamente redundante. México: Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Querétaro. ISBN: 978-607-9394-14-1.
- [Ren, 2019] Ren, B., Liu, J., Luo, X., & Chen, J. (2019). On the kinematic design of anthropomorphic lower limb exoskeletons and their matching movement. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16. <https://doi.org/10.1177/1729881419875908>.
- [Reyes, 2013] Reyes Cortés, F., Cid Monjaraz, J., & Vargas Soto, E. (2013). *Mecatrónica: Control y Automatización* (1ra ed.). México: Alfaomega Grupo Editor.
- [Russo, 2018] Russo, M., Cafolla, D., & Ceccarelli, M. (2018). Design and experiments of a novel humanoid robot with parallel architectures. *Robotics*, 7(4), 79. <https://doi.org/10.3390/robotics7040079>.
- [Russo, 2020] Russo, M., & Ceccarelli, M. (2020). Analysis of a wearable robotic system for ankle rehabilitation. *Machines*, 8(3), 48. <https://doi.org/10.3390/machines8030048>.
- [Saglia, 2009] Saglia, N., Tsagarakis, N. G., Dai, J. S., & Caldwell, D. G. (2009). A high-performance redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation. *The International Journal of Robotics Research*, 28(9), 1216–1227. <https://doi.org/10.1177/0278364909104221>.
- [Salinas, 2008] Salinas Durán, F., Lugo Agudelo, L. H., & Restrepo Arbeláez, R. (2008). *Rehabilitación en salud* (Primera edición). Universidad de Antioquia. ISBN: 978-958-714-165-8.
- [Sekine, 2013] Sekine, M., Sugimori, K., Gonzalez, J., & Yu, W. (2013). Optimization-based design of a small pneumatic-actuator-driven parallel mechanism for a shoulder prosthetic arm with statics and spatial accessibility evaluation. *International*



- Journal of Advanced Robotic Systems, July 2013. <https://doi.org/10.5772/56638>.
- [Sekine, 2015] Sekine, M., Xie, L., Kawamura, K., & Yu, W. (2015). Improvement and quantification of spatial accessibility and disturbance responsiveness of shoulder prosthesis. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, February 2015. <https://doi.org/10.5772/60031>.
- [Senatore, 2023] Senatore, S. C., Takahashi, K. Z., & Malcolm, P. (2023). Using human-in-the-loop optimization for guiding manual prosthesis adjustments: A proof-of-concept study. *Frontiers in Robotics and AI*, 10, 1183170. <https://doi.org/10.3389/frobt.2023.1183170>
- [Shivesh, 2018] Shivesh, K., Berstold, B., Marc, S., & Frank, K. (2018). Design and kinematic analysis of the novel almost spherical parallel mechanism active ankle. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, March. <https://doi.org/10.1007/s10846-018-0792-x>.
- [Shigley, 2001] Shigley, J. E., & Uicker, J. J. (2001). *Teoría de máquinas y mecanismos*. Mc Graw Hill Interamericana de México.
- [Schlafly, 2019] Schlafly, M., & Reed, K. B. (2019). Novel passive ankle-foot prosthesis mimics able-bodied ankle angles and ground reaction forces. *Clinical Biomechanics*. <https://doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2019.12.016>
- [Schimmels, 2014] Schimmels, J., & Huang, S. (2014). Passive ankle prosthesis with energy return simulating that of a natural ankle. United States Patent 8,721,737 B2.
- [Schmeltzpfenning, 2013] Schmeltzpfenning, T., & Brauner, T. (2013). Foot biomechanics and gait. In *Handbook of Footwear Design and Manufacture* (pp. 27–48). <https://doi.org/10.1533/9780857098795.1.27>.
- [Song, 2020] Song, M., Guo, S., Wang, X., & Qu, H. (2020). Dynamic analysis and performance verification of a novel hip prosthetic mechanism. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 33(17). <https://doi.org/10.1186/s10033-020-0436-5>.
- [Soldovieri, 2020] Soldovieri, T. (2020). *Introducción a la Mecánica Clásica* (1ra ed.). [Preprint]. República de Venezuela.
- [Schüppstuhl, 2018] Schüppstuhl, T., Tracht, K., & Franke, J. (Eds.). (2018). *Tagungsband des 3. Kongresses Montage Handhabung Industrieroboter*. [Actas del 3er Congreso de Montaje, Manipulación y Robots Industriales], Springer Vieweg, Berlin, Alemania. ISBN: 978-3-662-56713-5. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56714-2>.
- [Taboadela, 2007] Taboadela, C. H. (2007). Parte III: Goniometría de los miembros superiores. En *Goniometría: Una herramienta para la evaluación de las incapacidades laborales*. Asociart ART.
- [Taghirad, 2013] Taghirad, H.D. (2013). *Parallel Robot: Mechanics and Control*. CRC Press. ISBN:978-1-4665-5577-8.
- [Tsai,1999] Tsai, L.-W. (1999). *Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons, Canada.
- [Valero, 2014] Valero, E. (2014). *Antropometría*. Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo, Ministerio de Trabajo e Inmigración de España.



- [Vaughan, 1999] Vaughan, C. L., Davis, B. L., & O'Connor, J. C. (1999). Dynamics of human gait. Kiboho Publishers.
- [Versluys, 2008] Versluys, R., Desomer, A., & Lenaerts, G. (2008). A biomechatronical transtibial prosthesis powered by pleated pneumatic artificial muscles. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(4), 394-405.
- [Vera, 2006] Vera, P. (2006). Biomecánica de la marcha humana normal y patológica. Instituto de Biomecánica de Valencia (IBV). ISBN 8492397462, 9788492397464.
- [Vidalot, 2003] Viladot Voegeli, A. (2003). Anatomía funcional y biomecánica del tobillo y el pie, el pie en reumatología. Barcelona, España: Artículo 62.497, 30(9), 469-477.
- [Vidalot, 2022] Viladot Voegeli, A. (2022). Biomecánica del tobillo y de la subastragalina. *Mon Act Soc Esp Med Cir Pie Tobillo*, 14, 9-15. <https://doi.org/10.24129/j.mact.1401.fs2205002>.
- [Villaveces, 2012] Villaveces, A. (2012). Metodología de comparación estructural de robots paralelos [Tesis de maestría, Ingeniería Mecánica]. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería Mecánica.
- [Wang, 2013] Wang, B., Jin, Y., Yan, T., & Cheng, M. (2013). Mechanism simulation and optimal design of five-link bionic joint driven by two antagonistic pneumatic muscles. *Advances in Mechanical Engineering*, Jan. 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/824085>.
- [Wang, 2019] Wang, C., et al. (2019). Research on an ankle joint auxiliary rehabilitation robot with a rigid-flexible hybrid drive based on a 2-S'PS' mechanism. *Applied Bionics and Biomechanics*, 2019, 1-20. <https://doi.org/10.1155/2019/7071064>.
- [Wang, 2021] Wang, Y., & Xu, Q. (2021). Design and testing of a soft parallel robot based on pneumatic artificial muscles for wrist rehabilitation. *Scientific Reports*, 11, 1273. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-80411-0>.
- [Winter, 1991] Winter, D. (1991). The biomechanics and motor control of human gait: Normal, elderly and pathological (Vol. 2). Waterloo Biomechanics.
- [Yasui, 2006] Yasui, Y., et al. (2006). Patente N° 7,118,601. United States Patent and Trademark Office.
- [Yonozawa, 2014] Yonezawa, T., Onodera, T., Ding, M., Mizoguchi, H., Takemura, H., & Ogitsu, T. (2014). Desarrollo de un dispositivo de medición del movimiento tridimensional para la articulación del tobillo humano mediante el uso de un mecanismo de enlace paralelo. En 36ª Conferencia Internacional Anual de la Sociedad de Ingeniería en Medicina y Biología del IEEE (pp. 4358-4361). Chicago, IL, EE. UU. <https://doi.org/10.1109/EMBC.2014.6944589>.
- [Yuan, 2013] Yuan, K., Sun, S., Wang, Z., Wang, Q., & Wang, L. (2013). A fuzzy logic-based terrain identification approach to prosthesis control using multi-sensor fusion. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* (pp. 1-6), Alemania, May 6-10.
- [Zavala, 2015] Zavala, R., Ramírez, R., & Chaparro, D. (2015). Kinematic and dynamical modelling for control of a parallel robot-based surveillance/sentry device. *Advances in Military Technology*, 10(1), 1-10.
- [Zubizarreta, 2008] Zubizarreta, A., Cabanes, I., Portillo, E., Orive, D., & Marcos, M. (2008). Modelado dinámico de robots paralelos considerando sensórica redundante. In

Actas de las XXVIII Jornadas de Automática (pp. 1-8). Tarragona, España. ISBN 978-84-691-6883-7.

- [Zhang, 2016] Zhang, L., Guo, F., Li, Y., & Lu, W. (2016). Global dynamic modeling of electro-hydraulic 3-UPS/S parallel stabilized platform by bond graph. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. <https://doi.org/10.3901/CJME.2016.0623.078>.
- [Zhang, 2019] Zhang, H., Chang, B., Andrews, J., Mitsumoto, H., & Agrawal, S. (2019). A robotic neck brace to characterize head-neck motion and muscle electromyography in subjects with amyotrophic lateral sclerosis. *Annals of Clinical and Translational Neurology*, 6(9), 1671–1680. <https://doi.org/10.1002/acn3.50864>.
- [Zheng, 2013] Zheng, H., & Shen, W. (2013). Sleeve muscle actuator and its application in transtibial prostheses. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics* (pp. 1-5). Seattle, WA, USA, April.
- [Zuo, 2020] Zuo, S., Li, J., Dong, M., Zhou, X., Fan, W., & Kong, Y. (2020). Design and performance evaluation of a novel wearable parallel mechanism for ankle rehabilitation. *Frontiers in Neurorobotics*, 14(9). <https://doi.org/10.3389/fnbot.2020.00009>.



## ANEXO A

## ANÁLISIS DE LA MARCHA PROTÉSICA TRANSTIBIAL

Tabla A.1 Marcha protésica transtibial. Excesiva flexión de rodilla [ICRC, 2014].

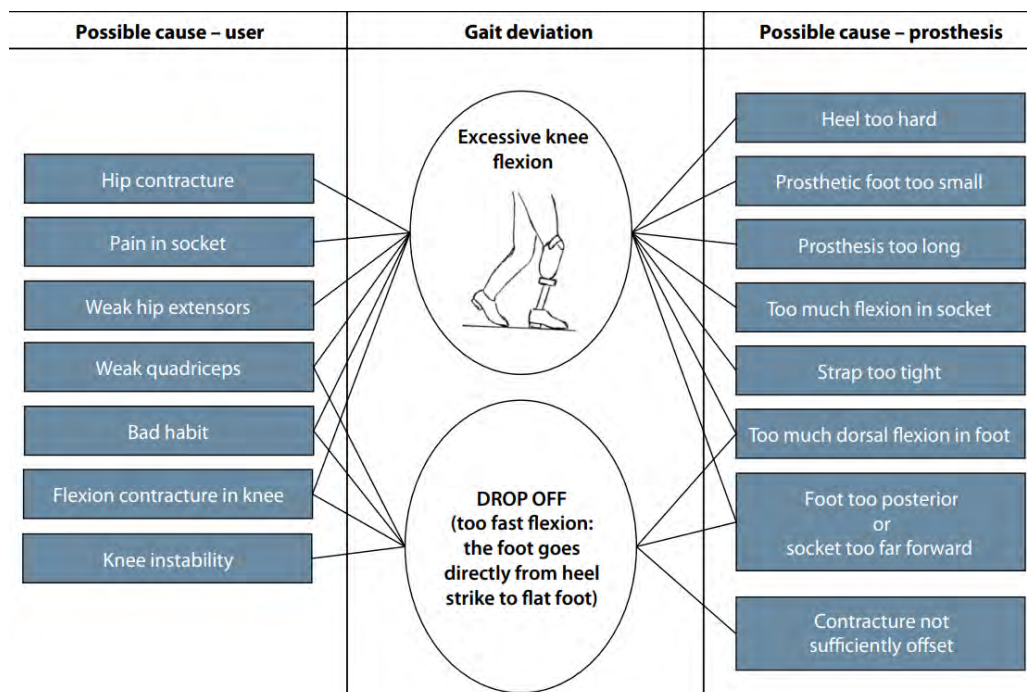


Tabla A.2 Marcha protésica transtibial, hiperextensión de rodilla [ICRC, 2014].

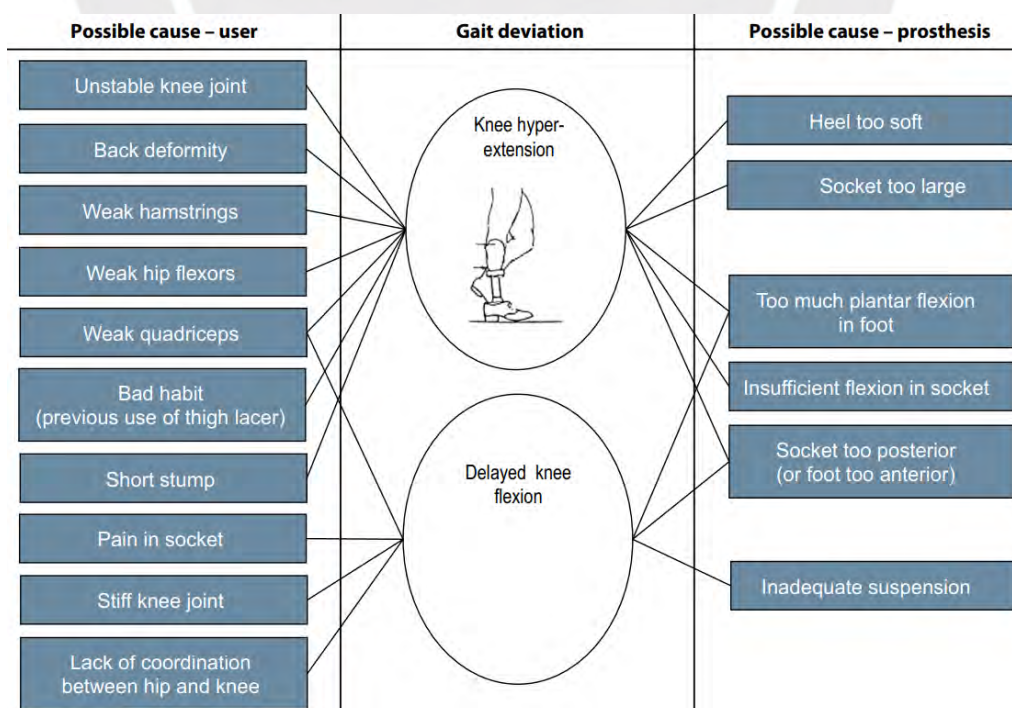


Tabla A.3 Marcha protésica transtibial, empuje lateral del encaje durante la fase de apoyo [ICRC, 2014].

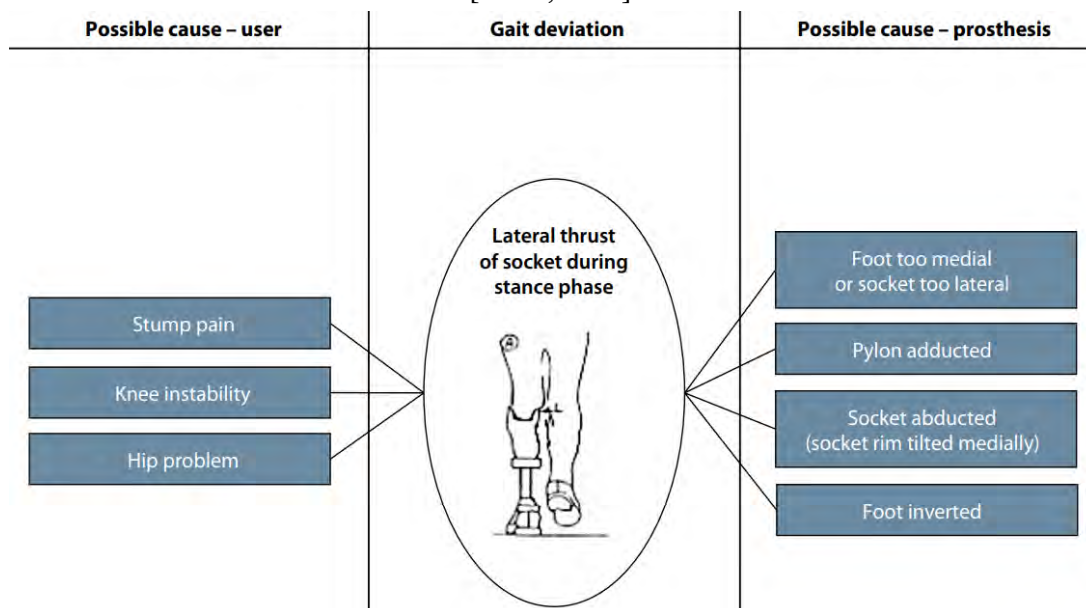


Tabla A.4 Marcha protésica transtibial, tiempo desigual y balanceo desigual del brazo [ICRC, 2014].

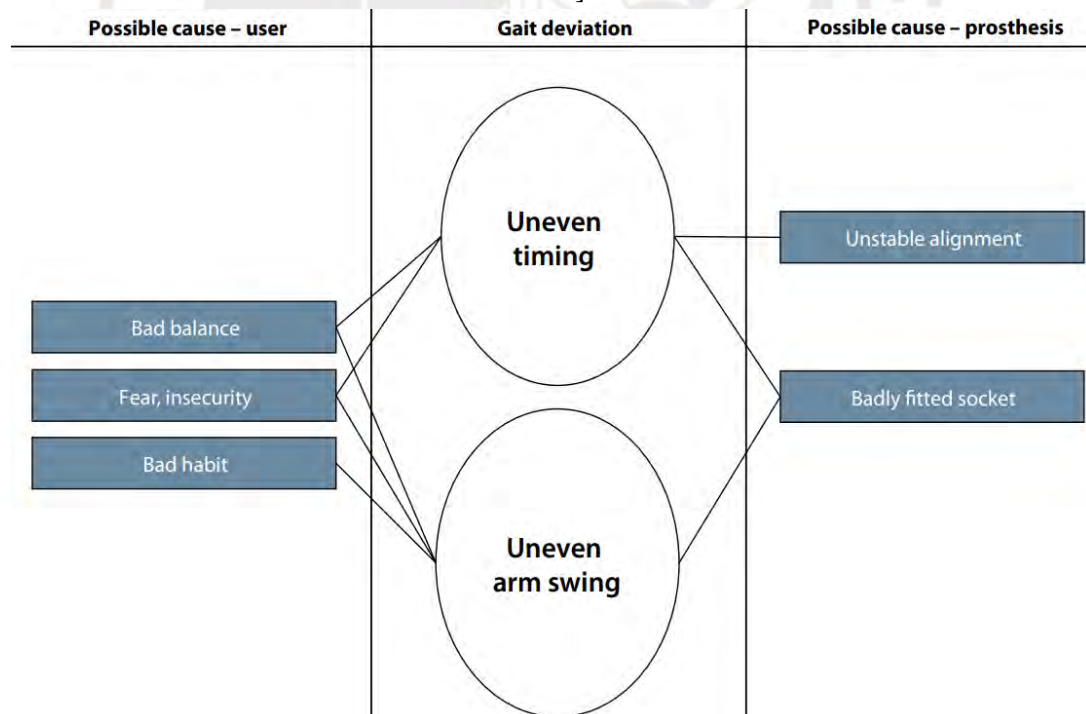




Tabla A.5 Marcha protésica transtibial, paso protésico demasiado corto y largo [ICRC, 2014].

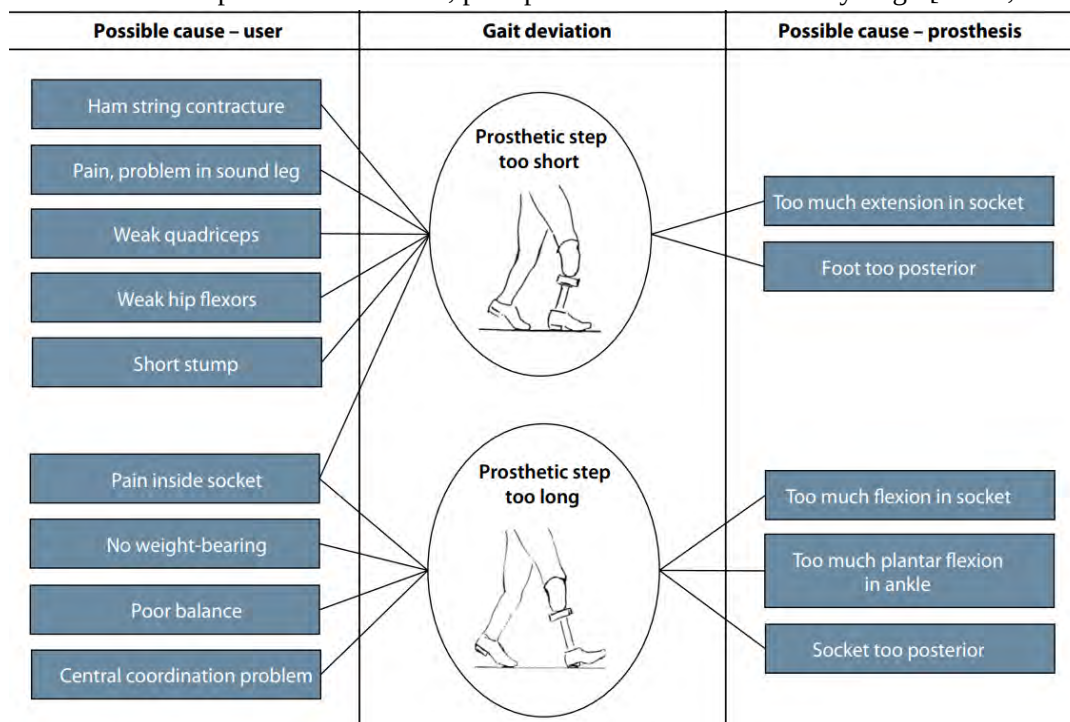


Tabla A.6 Marcha protésica transtibial, flexión lateral del tronco sobre el lado protésico [ICRC, 2014].

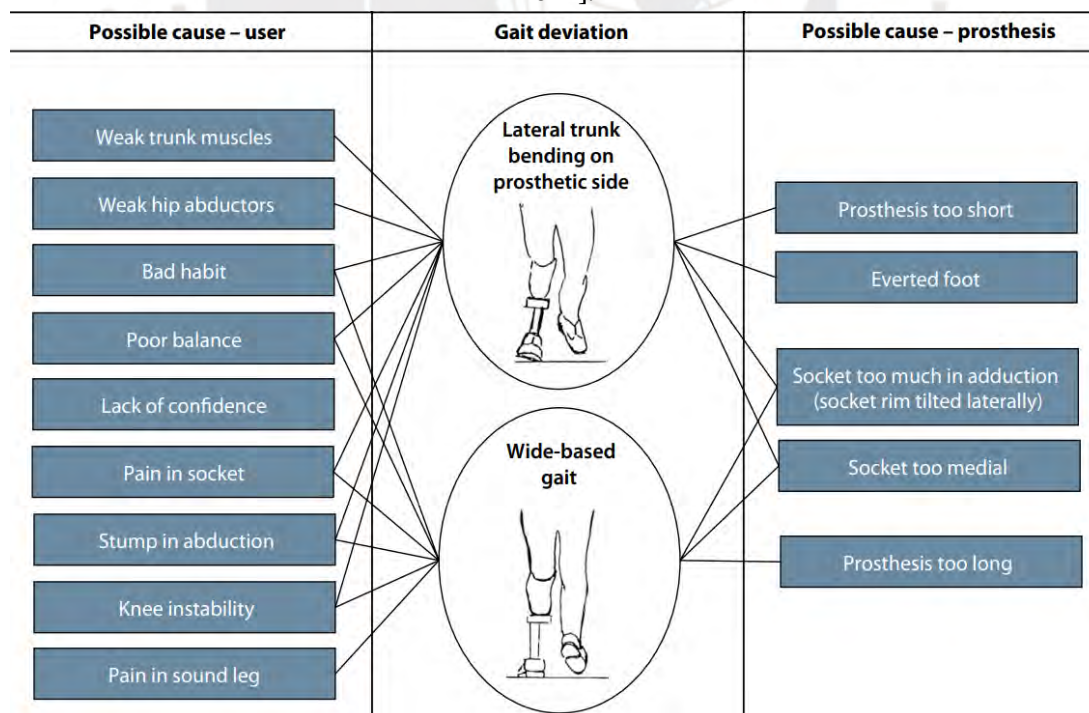




Tabla A.7 Marcha protésica transtibial, flexión lateral del tronco del lado sano [ICRC, 2014].

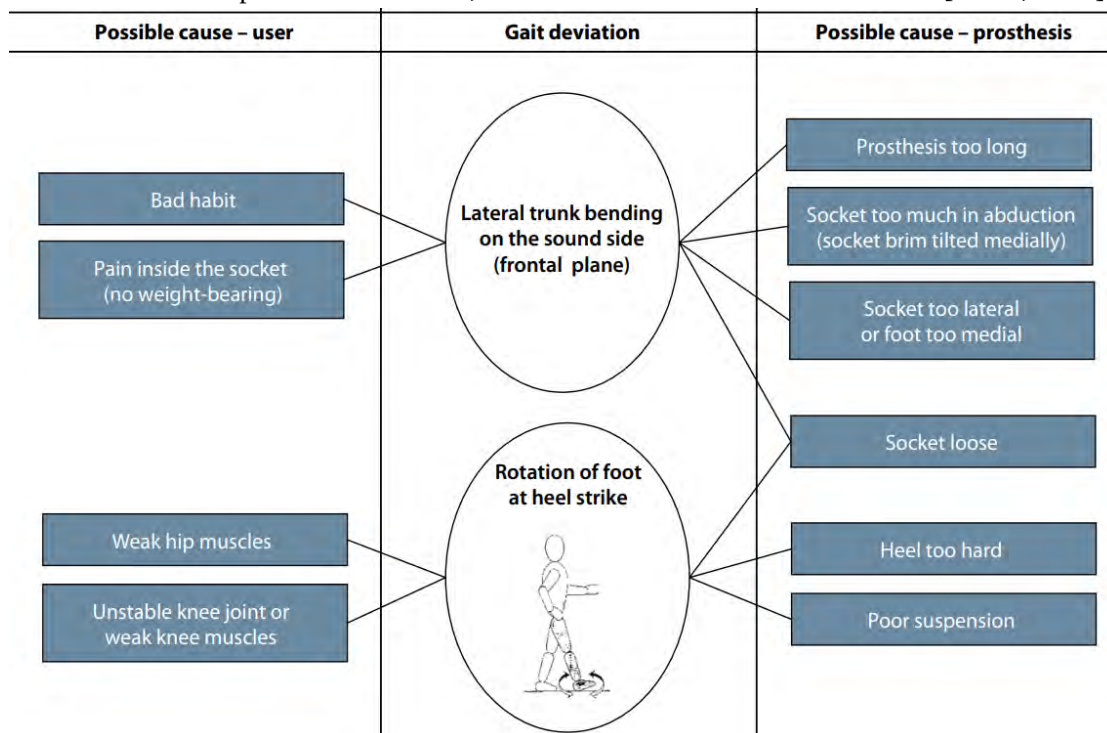
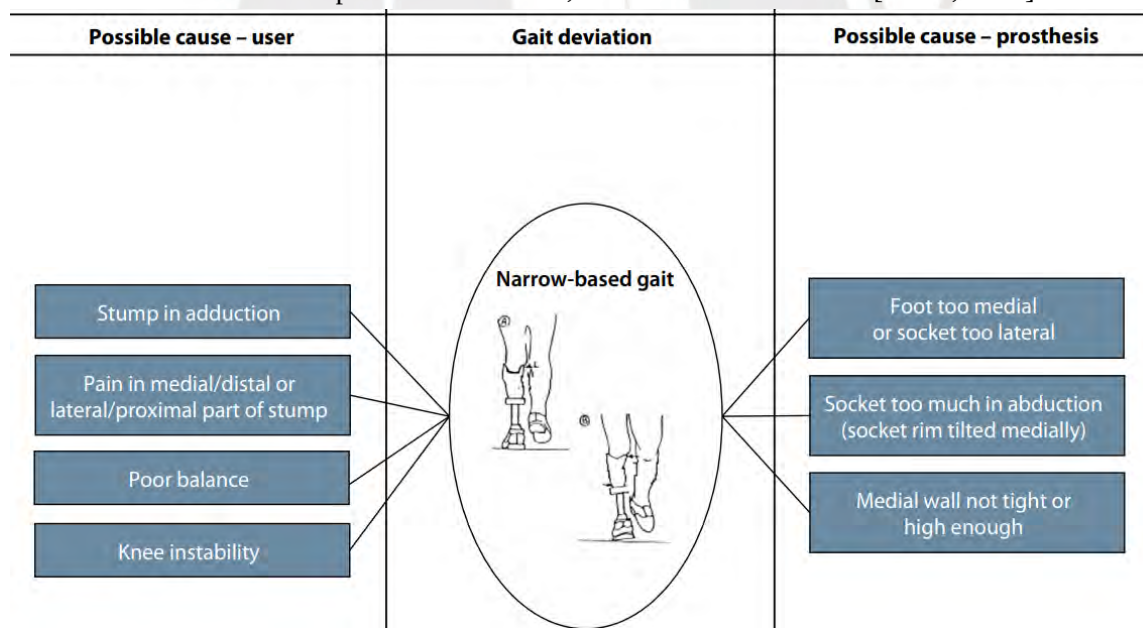


Tabla A.8 Marcha protésica transtibial, marcha de base estrecha [ICRC, 2014].



## ANEXO B

### COMPARACIÓN DE MECANISMO PARALELOS Y EN SERIE

Tabla B.1 Comparación de mecanismos paralelos y en serie [Pandilov, 2014].

| <b>Característica</b>                  | <b>Mecanismo en serie</b>                                         | <b>Mecanismo paralelo</b>                              |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Espacio de trabajo                     | Grande                                                            | Pequeño y complejo                                     |
| Resolviendo cinemática directa         | Fácil                                                             | Muy difícil                                            |
| Resolviendo cinemática inversa         | Difícil                                                           | Fácil                                                  |
| Error de posición                      | Acumulativo                                                       | promedio                                               |
| Error de fuerza                        | Promedio                                                          | Acumulativo                                            |
| Fuerza máxima                          | Limitado por la fuerza mínima en el actuador                      | La suma de todas las fuerzas del actuador              |
| Rigidez                                | Baja                                                              | Alta                                                   |
| Características dinámicas              | Pobre, sobre todo cuando aumenta de tamaño                        | Muy alta                                               |
| Modelamiento y solución dinámica       | Relativamente simple                                              | Muy compleja                                           |
| Inercia                                | Grande                                                            | Pequeña                                                |
| Áreas de Aplicación                    | Un gran número en diferentes áreas, especialmente en la industria | En la actualidad limitado, actualmente en la industria |
| Carga útil/ peso                       | Baja                                                              | Alta                                                   |
| Velocidad y aceleración                | Baja                                                              | Alta                                                   |
| Exactitud                              | Baja                                                              | Alta                                                   |
| Uniformidad de componentes             | Baja                                                              | Alta                                                   |
| Calibración                            | Relativamente simple                                              | complicada                                             |
| Espacio de trabajo/ relación de tamaño | Alta                                                              | Baja                                                   |

## ANEXO C

### MECANISMOS SERIALES EN PRÓTESIS DE MIEMBROS INFERIORES

Los mecanismos seriales han sido estudiados a lo largo de los años, y se identifican diferentes tipos de transmisiones mecánicas en prótesis transtibiales comerciales, en investigación y patentes, las cuales permiten que una persona con amputación pueda caminar.

#### C1. Prótesis comerciales con mecanismos seriales

A continuación, se detallan los avances tecnológicos a nivel mundial en prótesis transtibiales comerciales usando mecanismos seriales.

##### a) Propio Foot-Ossur

Este dispositivo protésico adaptativo es activo e imita el movimiento natural del pie. El movimiento del tobillo es motorizado, y está diseñado para un paciente de peso máximo de 125 kg. Esta prótesis reduce el riesgo de tropiezos, permite trasladarse en cualquier tipo de terreno, reduce la tensión en rodillas, caderas y espalda, mejora la estabilidad, la eficiencia y el confort en pendientes (ascensos y descensos) y escaleras. La prótesis transtibial la conforma un pie protésico, una parte motorizada, una válvula de aire y un pie de silicona protésico.



Fig. C1 Prótesis Propio Foot- Ossur<sup>50</sup>.

<sup>50</sup> Tomado de: <http://thelondonprosthetics.com/uploads/files/Proprio-Foot1.pdf> Fecha de revisión: 16-05-2019.

### b) BioM- MIT

La prótesis transtibial activa BioM que se muestra en la Figura C2a fue diseñada en el Laboratorio del MIT supera los 50,000 dólares, y fue diseñada para una persona de 80 kg. Tiene un peso de 2.5 kg, un rango de movimiento de dorsiflexión de  $15^\circ$ , plantarflexión de  $25^\circ$ , un torque de 140Nm, y tiene un sistema de control que imita la postura. La prótesis es 67% eficiente, y aproximadamente 30J de energía eléctrica producen 20J de trabajo neto durante la fase de postura. Los estudios señalan que esta prótesis mejora la marcha disminuyendo el costo metabólico de la persona con amputación. Tiene un diseño de un grado de libertad, con resortes lineales y poleas, para el movimiento de pronación del tobillo, como se muestra en la Figura C2b, y emplea un potenciómetro lineal para medir la deformación de los resortes en serie. La prótesis se compone de cinco elementos: motor DC Maxon de 200W, transmisión de husillo de bolas, resortes en paralelo unidireccionales, un pie protésico de material de carbono compuesto y una batería recargable de litio de 0,22kg que proporciona energía al motor que se muestra en la Figura C2c. La batería cargada produce 4000-5000 pasos, suficientes para caminar 4-5 km a 1,75m/s.

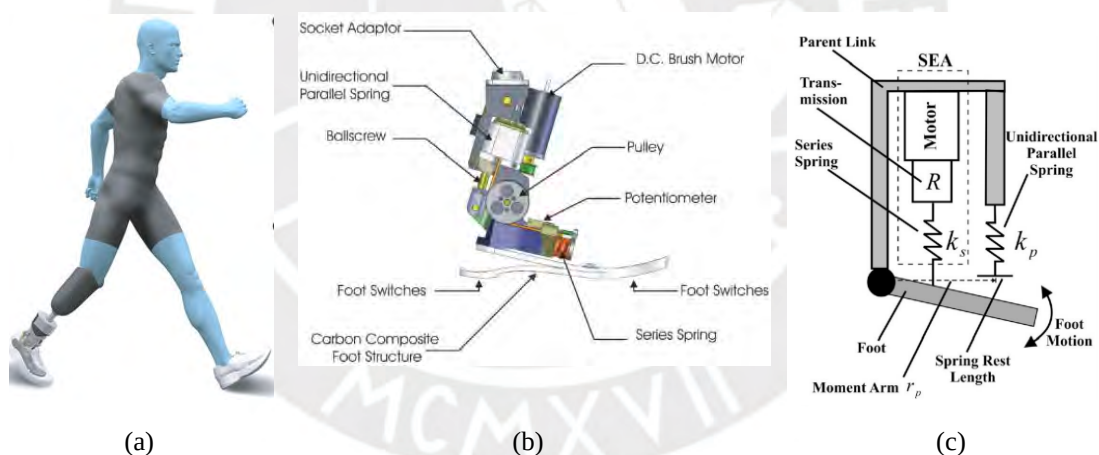


Fig. C2 BioM- MIT: (a) prótesis-usuario (b), partes de la prótesis, (c) diagrama [Au, 2007].

### c) Prótesis Ottobock

Las prótesis transtibiales modelo pie Tritón de la empresa Ottobock están hechas de un material flexible de fibra de carbono y polyester, tiene la capacidad de amortiguar impactos, caminar y estar de pie de manera equilibrada, así como también dar pasos de longitud variable, realizar cambios rápidos de dirección y adaptarse a superficies irregulares. El diseño del pie protésico es de forma triangular arqueada, característica de Tritón que se muestra en la Figura C3. El resorte tipo muelle del antepié de carbono, y el

muelle del talón de carbono, forman una estructura de soporte del peso. A su vez, el muelle base de polímero de alto rendimiento une estos elementos para formar un sistema cerrado. Como resultado, esta prótesis permite flexionar la planta del pie de forma fluida. La transición a la fase de balanceo es muy firme, donde se puede variar la longitud de los pasos individualmente. Este tipo de prótesis puede ser usado por personas de hasta 125 kg.



Fig. C3 Prótesis Ottobock: (a) isométrico, (b) vista frontal (c) partes integradas<sup>51</sup>.

## C2. Prótesis en investigación con mecanismos seriales

A continuación, se detalla los avances tecnológicos a nivel mundial en las prótesis transtibiales en investigación usando mecanismos seriales.

### a) Sparky 3-USA

Esta prótesis robótica tiene dos grados de libertad, y pesa 2,7 kg sin incluir el socket. Sparky utiliza un diseño tipo tendón robótico que incluye dos actuadores lineales en serie que comprimen o extienden dos resortes en paralelo. Estos dos actuadores controlan cada grado de libertad, y posee una unión U que crea dos ejes de movimiento, lo que permiten realizar los movimientos de plantarflexión-dorsiflexión y de inversión-eversión, como se muestra en la Figura C4. El diseño del tendón robótico fue desarrollado para imitar la naturaleza elástica del sistema muscular humano [Bellman, 2008].

<sup>51</sup> Tomado de: <https://www.ottobock.com.ar/prosthetics/lower-limb/solution-overview/triton-family-of-products/> Fecha de revisión: 16-05-2019.



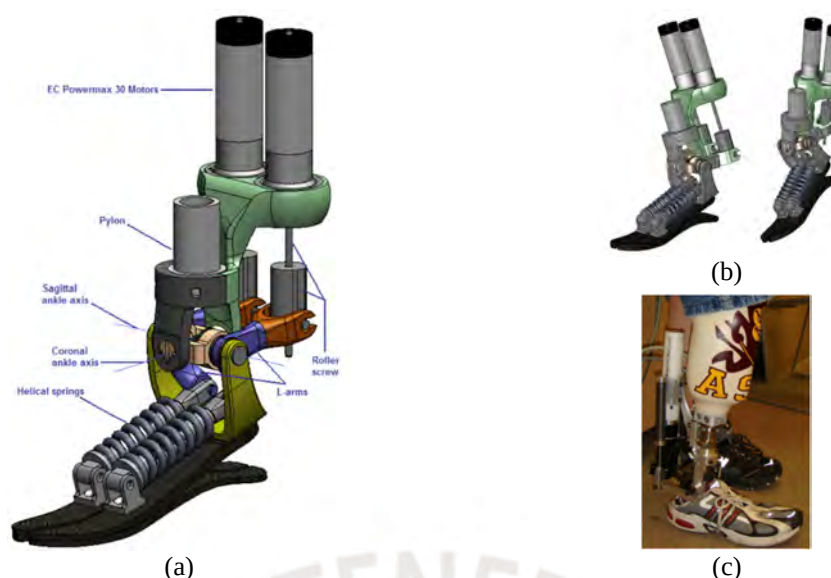


Fig. C4. Sparky 3-USA: (a) partes de la prótesis, (b) movimiento de inversión/eversión, (c) prototipo [Bellman, 2008].

#### b) Prótesis Robótica activa-University of Massachusetts Amherst

La prótesis que se muestra en la Figura C5 tiene un mecanismo de 4 eslabones de aluminio, un motor Maxon de 200W y 5A, y una transmisión por fajas 2:1. Además, tiene limitador neutral, conector piramidal, sensor de momentos y de PCB, limitador de extensión de Nylon, tornillo de bolas de 8mm de diámetro y pie protésico Ossur.

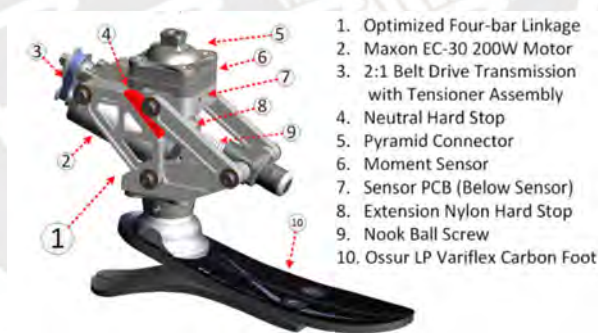


Fig. C5. Diseño de prótesis activa de la Universidad de Massachusetts Amherst [Kennedy, 2016].

Durante la fase de apoyo medio en el ciclo de marcha, el tornillo de bolas del actuador desarrolla una fuerza de tracción entre los eslabones conectados a la articulación trasera ( $l_1$  y  $l_2$ ) y a los eslabones conectados a la articulación delantera ( $l_3$  y  $l_4$ ). Los ángulos  $\Theta_{l_1}$  y  $\Theta_{l_3}$  no varían respecto al sistema de referencia XY. El eslabón  $l_3$  está unido a un pie protésico ESAR de marca Ossur, como se muestra en la Figura C6a. Se moldearon topes hechos de goma de uretano para proveer soporte durante la fase de apoyo, absorber cargas

durante el golpe de talón y limitar la dorsiflexión del pie. Además, se usó impresión 3D para fabricar los cobertores protectores, como es muestra en la Figura C6b. Todos los demás materiales del hardware fueron hechos de acero inoxidable [Kennedy, 2016].



Fig. C6. Prótesis de University of Massachusetts Amherst: (a) mecanismo, (b) prototipo [Kennedy, 2016].

### c) Prótesis con mecanismo de 4 barras - Marquette University

La prótesis cuenta con un mecanismo de 4 barras que brinda ventaja mecánica y rigidez en el tobillo. El mecanismo que se presenta en la Figura C7a está conformado por eslabones de aluminio 7075-T6. Además, un motor y un resorte de torsión se ubican en el punto C para entregar un momento en el tobillo (punto A en la Figura C7b). Esta prótesis incluye pequeños rodamientos 698-2RS de doble ranura profunda sellada, los cuales son resistentes a actividades de alto impacto [Bergelin, 2012].

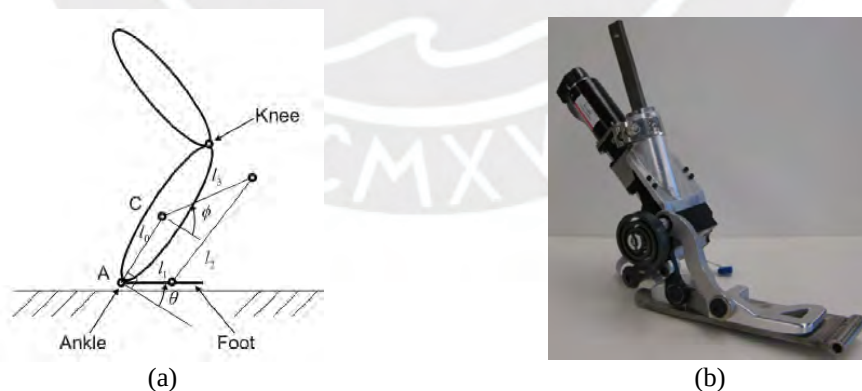


Fig. C7. Prótesis (a) diagrama del cuerpo libre DCL, (b) prototipo de prótesis transtibial [Bergelin, 2012].

#### d) Prótesis de 3 grados de libertad - Universidad de Moratuwa

La prótesis tiene 2 grados de libertad activos y un grado de libertad pasivo. En los grados activos utiliza dos motores DC, como se muestra en la Figura C8, uno para controlar la dorsiflexión-plantarflexión del tobillo mediante un tornillo, y otro para controlar la adducción y abducción mediante una transmisión por faja. El movimiento de inversión y eversión es un grado de libertad pasivo, y solo posee dos resortes en la parte del talón [Madusanka, 2014].

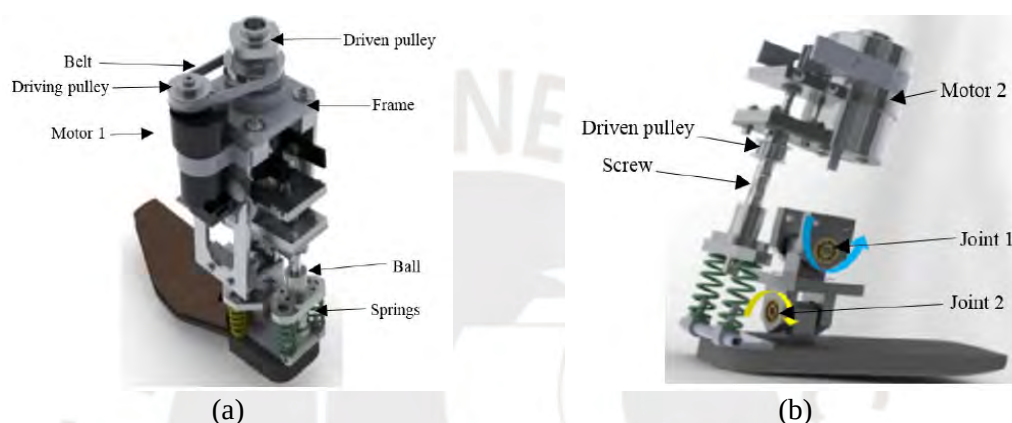


Fig. C8. Mecanismo de prótesis transtibial de 3 GDL [Madusanka, 2014].

#### e) Mecanismos actuados neumáticamente

Existen varias universidades que han diseñado prototipos de prótesis con accionamiento neumático, como se muestra en la Figura C9.

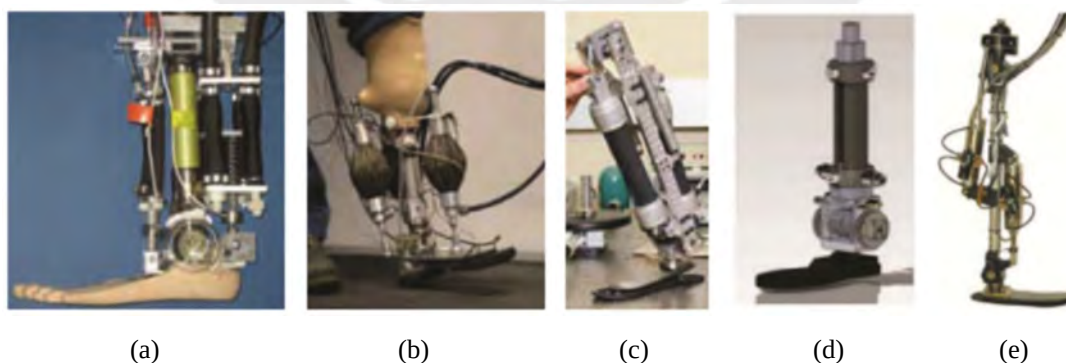


Fig. C9. Prótesis con accionamiento neumático: (a) prótesis con actuador artificial de Estados Unidos, (b) prótesis con músculo artificial de Bélgica, (c) prótesis de tobillo neumático de Estados Unidos, (d) prótesis transtibial, (e) prótesis transhumeral de Estados Unidos [Cherelle, 2014].

En la Universidad de Washington (Estados Unidos) se ha diseñado un actuador artificial de tendón muscular, para impulsar una prótesis debajo de la rodilla, con requisitos de rendimiento de un tríceps artificial y un tendón de Aquiles como se muestra en la Figura C9a. El músculo artificial está formado por dos actuadores neumáticos flexibles en paralelo con una implementación bilineal de dos tendones artificiales en la prótesis de tobillo y pie. según los resultados de la simulación, la prótesis de tobillo y pie proporciona un torque de salida de 110 Nm con un rango de movimiento de 30 grados en el tobillo [Cherelle, 2014].

El Vrije Universiteit Brussel (Bélgica) desarrolló un músculo artificial neumático plisado, como se muestra en la Figura C9b, es un actuador liviano parecido a un músculo, funciona con aire, consiste en una membrana hermética plisada. Su ventaja en comparación con otros músculos artificiales proviene del despliegue de la membrana plisada. Debido a esto, prácticamente no hay presión de umbral, la histéresis se reduce cuando se compara con otros tipos de músculos y son posibles las contracciones de más del 40% de la longitud inicial. El actuador produce una salida de par de 200 Nm con una presión muscular de solo 3 bar. Además, dos músculos posteriores en paralelo permiten establecer el movimiento en el plano frontal. Versluys, en el 2008 realizó experimentos exitosos de caminata con un paciente con amputación transtibial que llevaba puesto el prototipo de prótesis en su miembro remanente.

Investigadores de la Universidad de Alabama (Estados Unidos), de la Universidad de Vanderbilt (Estados Unidos) y el Instituto de Tecnología de Georgia (Estados Unidos) desarrollaron una prótesis de tobillo neumática que funciona con propulsores similares a cohetes y consiste en un sistema de motor de cohete monopropelente miniaturizado utilizado por las naves espaciales para maniobrar en órbita, como se muestra en la Figura C9c. El monopropelente funciona como un medio de almacenamiento de energía y se descompone al entrar en contacto con ciertos catalizadores. Según Fite et al, el uso de este combustible permite una prótesis ligera que almacena suficiente energía para operar para el uso diario [Fite, 2008].

Zheng et al. desarrollaron un concepto de un nuevo actuador muscular de manga para usar en una prótesis transtibial. El llamado activador de músculo de la manga incorpora una inserción cilíndrica en el centro del músculo neumático, que elimina la parte central



del volumen interno, como se muestra en la Figura C9d. Se puede observar que, dado que la prótesis solo se alimenta con un componente activo, que es un músculo artificial, la rigidez de la articulación no se puede adaptar en comparación con otros diseños con músculos neumáticos colocados de forma antagónica [Zheng, 2013].

La Universidad de Vanderbilt de Estados Unidos desarrolló una prótesis transfemoral mecánica que utiliza una actuación neumática en rodilla y tobillo que sirve como banco de pruebas de laboratorio, como se muestra en la Figura C9e. El dispositivo está propulsado por dos cilindros neumáticos [Cherelle, 2014].

### C3. Patentes de prótesis con mecanismos seriales

La patente N° US8,721,737 B2, que se muestra en la Figura C10, es una prótesis pasiva de tobillo con energía de retorno que simula un tobillo natural. Comprende un mecanismo de dos grados de libertad con un conjunto de resortes [Schimmels, 2012].

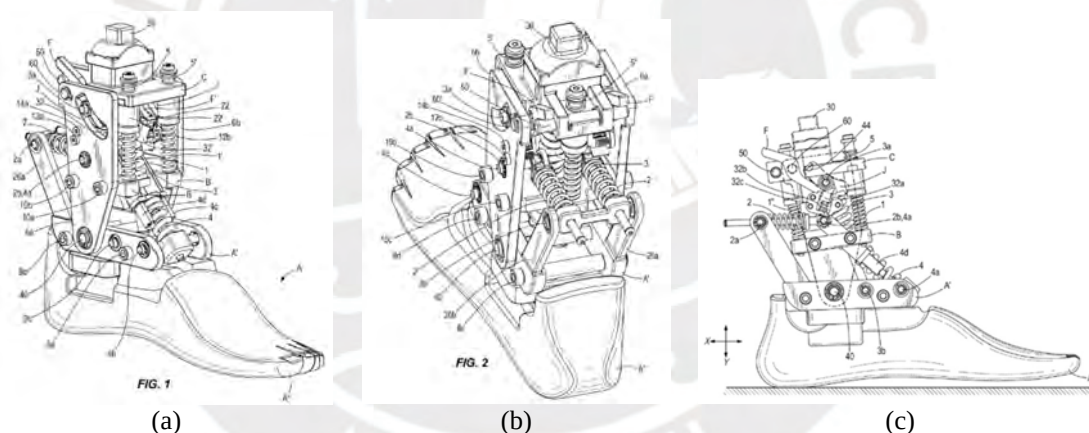
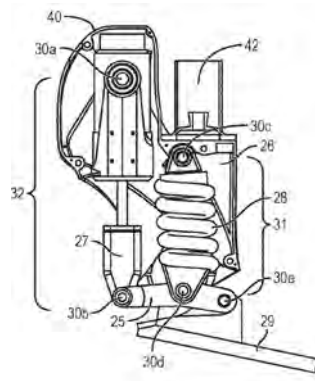


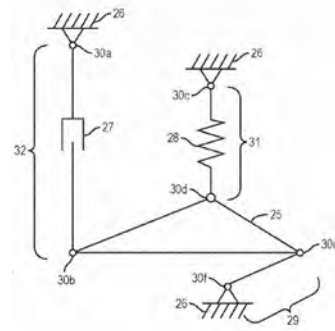
Fig. C10. Patente de prótesis N° US8,721,737 B2: (a) vista isométrica, (b) vista posterior, (c) vista Frontal [Schimmels, 2012].

La patente N° US 2017/0095355 A1, que se muestra en la Figura C11, tiene un grado de libertad y su mecanismo es por medio de un resorte y un componente amortiguador [Holgate, 2016].





(a)



(b)

Fig. C11. Patente N° US 2017/0095355 [Holgate, 2016].



## ANEXO D

## ANÁLISIS DE MARCHA TREN INFERIOR A 5km/h o 1.3m/s

|                                                                                       |                                 |                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NOMBRE<br><b>Victoria Abarca</b>                                                      | FECHA DEL INFORME<br>2022-09-16 | ESTUDIO REALIZADO POR:<br> |
| DETALLES DE LA ORGANIZACIÓN:<br><b>PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU, PUCP</b> |                                 |                                                                                                               |

## Información del protocolo

|                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| Protocolo biomecánico usado | Tren inferior (absoluto) |
| Fecha de la prueba          | 2022-09-16               |
| Fecha del informe           | 2022-09-16               |
| Frecuencia de adquisición   | 100 Hz                   |
| Tiempo total de grabación   | 164 s                    |
| Intervalo seleccionado      | 59 s                     |

## Configuración de sensores



## Descripción

Este protocolo mide los ángulos de la pelvis, muslos, pantorrillas y pies en tres planos anatómicos, dando como resultado los ángulos de las extremidades inferiores en el ciclo de marcha y a lo largo del tiempo de captura.

## Propósito del estudio

Encontrar los ángulos de las articulaciones de la extremidad inferior, con enfoque a la articulación del tobillo.

Fig. D1. Protocolo aplicado para la adquisición de datos cinemáticos con sensores inerciales [Elaboración propia].

## Parámetros de marcha

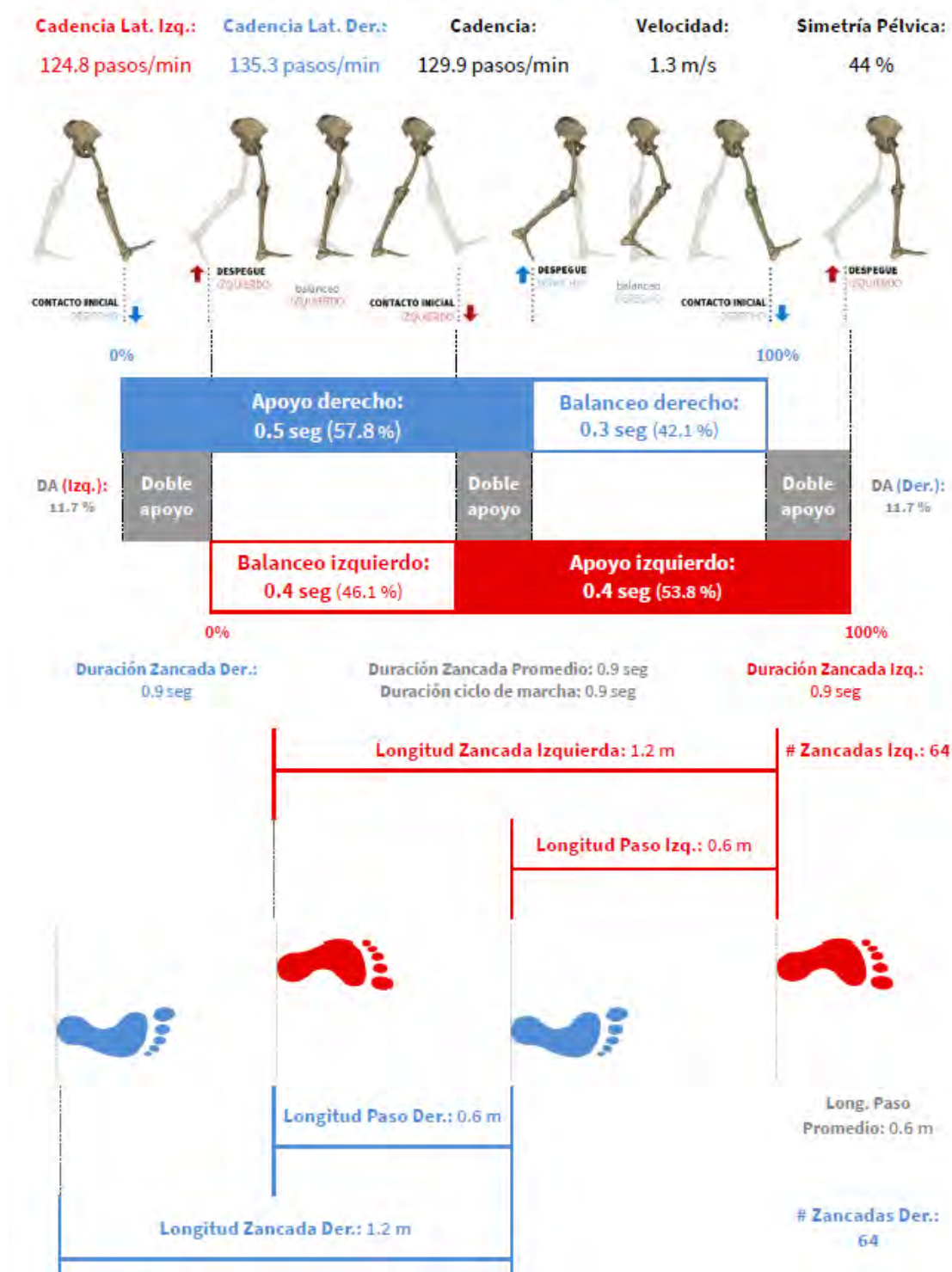


Fig. D2. Parámetros de marcha obtenidos del protocolo tren inferior aplicado [Elaboración propia].

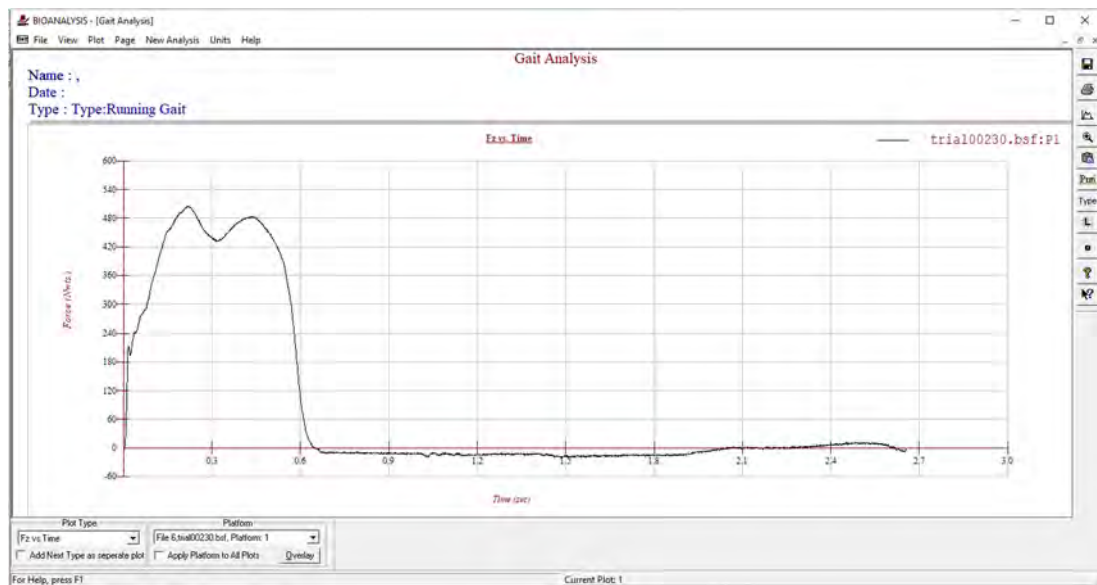
Tabla D.1 Ángulos de dorsiflexión-plantarflexión, inversión-eversión y abducción-aducción del tobillo en el ciclo de marcha [Elaboración propia].

| Tiempo | Plantarflexión-dorsiflexión | Eversión-inversión | Abducción-aducción |
|--------|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| 0      | 5.35                        | 4.06               | 1.13913            |
| 0.01   | 5.12                        | 3.68               | 1.08215            |
| 0.02   | 4.81                        | 3.26               | 0.919896           |
| 0.03   | 4.42                        | 2.82               | 0.638581           |
| 0.04   | 3.95                        | 2.37               | 0.234334           |
| 0.05   | 3.42                        | 1.93               | -0.284695          |
| 0.06   | 2.86                        | 1.52               | -0.898145          |
| 0.07   | 2.31                        | 1.16               | -1.57536           |
| 0.08   | 1.80                        | 0.86               | -2.27917           |
| 0.09   | 1.36                        | 0.61               | -2.97076           |
| 0.1    | 1.04                        | 0.42               | -3.61464           |
| 0.11   | 0.83                        | 0.28               | -4.18268           |
| 0.12   | 0.77                        | 0.19               | -4.65646           |
| 0.13   | 0.84                        | 0.13               | -5.02781           |
| 0.14   | 1.04                        | 0.08               | -5.29791           |
| 0.15   | 1.35                        | 0.06               | -5.47554           |
| 0.16   | 1.76                        | 0.03               | -5.57497           |
| 0.17   | 2.23                        | 0.01               | -5.61392           |
| 0.18   | 2.75                        | -0.03              | -5.61155           |
| 0.19   | 3.28                        | -0.08              | -5.58646           |
| 0.2    | 3.81                        | -0.13              | -5.55474           |
| 0.21   | 4.33                        | -0.20              | -5.52816           |
| 0.22   | 4.82                        | -0.28              | -5.51306           |
| 0.23   | 5.27                        | -0.36              | -5.51              |
| 0.24   | 5.69                        | -0.43              | -5.51451           |
| 0.25   | 6.07                        | -0.50              | -5.51867           |
| 0.26   | 6.42                        | -0.56              | -5.51316           |
| 0.27   | 6.73                        | -0.61              | -5.48933           |
| 0.28   | 7.03                        | -0.65              | -5.44076           |
| 0.29   | 7.30                        | -0.67              | -5.36404           |
| 0.3    | 7.56                        | -0.68              | -5.25882           |
| 0.31   | 7.82                        | -0.67              | -5.12719           |
| 0.32   | 8.07                        | -0.65              | -4.97282           |
| 0.33   | 8.32                        | -0.63              | -4.80005           |
| 0.34   | 8.56                        | -0.59              | -4.61328           |
| 0.35   | 8.82                        | -0.54              | -4.41659           |
| 0.36   | 9.07                        | -0.49              | -4.21364           |
| 0.37   | 9.33                        | -0.43              | -4.00758           |
| 0.38   | 9.59                        | -0.36              | -3.80101           |
| 0.39   | 9.86                        | -0.29              | -3.59594           |
| 0.4    | 10.13                       | -0.21              | -3.39366           |
| 0.41   | 10.41                       | -0.13              | -3.19473           |
| 0.42   | 10.68                       | -0.04              | -2.99906           |
| 0.43   | 10.96                       | 0.05               | -2.80616           |
| 0.44   | 11.25                       | 0.16               | -2.61545           |
| 0.45   | 11.53                       | 0.28               | -2.42672           |
| 0.46   | 11.83                       | 0.41               | -2.24041           |
| 0.47   | 12.12                       | 0.56               | -2.05786           |
| 0.48   | 12.43                       | 0.73               | -1.88129           |
| 0.49   | 12.73                       | 0.92               | -1.71366           |
| 0.5    | 13.05                       | 1.14               | -1.55828           |
| 0.51   | 13.37                       | 1.39               | -1.41829           |
| 0.52   | 13.68                       | 1.67               | -1.29609           |
| 0.53   | 13.98                       | 1.97               | -1.19264           |
| 0.54   | 14.27                       | 2.30               | -1.10684           |
| 0.55   | 14.52                       | 2.65               | -1.03488           |
| 0.56   | 14.71                       | 3.02               | -0.969701          |
| 0.57   | 14.83                       | 3.41               | -0.900606          |
| 0.58   | 14.85                       | 3.81               | -0.813195          |
| 0.59   | 14.75                       | 4.22               | -0.689752          |
| 0.6    | 14.49                       | 4.63               | -0.51028           |
| 0.61   | 14.06                       | 5.03               | -0.254237          |
| 0.62   | 13.44                       | 5.43               | 0.0971061          |
| 0.63   | 12.60                       | 5.81               | 0.557902           |
| 0.64   | 11.55                       | 6.17               | 1.13496            |

| Tiempo | Plantarflexión-dorsiflexión | Eversión-inversión | Abducción-aducción |
|--------|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| 0.65   | 10.28                       | 6.50               | 1.82546            |
| 0.66   | 8.82                        | 6.78               | 2.61557            |
| 0.67   | 7.18                        | 7.01               | 3.48047            |
| 0.68   | 5.41                        | 7.18               | 4.38586            |
| 0.69   | 3.55                        | 7.29               | 5.29097            |
| 0.7    | 1.66                        | 7.35               | 6.15261            |
| 0.71   | -0.21                       | 7.35               | 6.9297             |
| 0.72   | -1.99                       | 7.31               | 7.58743            |
| 0.73   | -3.62                       | 7.25               | 8.10067            |
| 0.74   | -5.04                       | 7.17               | 8.45595            |
| 0.75   | -6.21                       | 7.09               | 8.65211            |
| 0.76   | -7.09                       | 7.01               | 8.69958            |
| 0.77   | -7.66                       | 6.95               | 8.61834            |
| 0.78   | -7.91                       | 6.90               | 8.43486            |
| 0.79   | -7.85                       | 6.86               | 8.17817            |
| 0.8    | -7.50                       | 6.82               | 7.87583            |
| 0.81   | -6.90                       | 6.78               | 7.55015            |
| 0.82   | -6.08                       | 6.75               | 7.2155             |
| 0.83   | -5.09                       | 6.70               | 6.87695            |
| 0.84   | -3.98                       | 6.64               | 6.5306             |
| 0.85   | -2.79                       | 6.57               | 6.16525            |
| 0.86   | -1.57                       | 6.47               | 5.76547            |
| 0.87   | -0.36                       | 6.35               | 5.31522            |
| 0.88   | 0.81                        | 6.21               | 4.8017             |
| 0.89   | 1.90                        | 6.04               | 4.21873            |
| 0.9    | 2.88                        | 5.85               | 3.56897            |
| 0.91   | 3.75                        | 5.65               | 2.86489            |
| 0.92   | 4.49                        | 5.43               | 2.12811            |
| 0.93   | 5.09                        | 5.22               | 1.38736            |
| 0.94   | 5.55                        | 5.02               | 0.675293           |
| 0.95   | 5.88                        | 4.84               | 0.0246873          |
| 0.96   | 6.08                        | 4.68               | -0.535488          |
| 0.97   | 6.17                        | 4.54               | -0.983516          |
| 0.98   | 6.17                        | 4.44               | -1.30739           |
| 0.99   | 6.10                        | 4.37               | -1.5059            |
| 1      | 5.97                        | 4.32               | -1.58817           |
| 1.01   | 5.82                        | 4.31               | -1.57169           |
| 1.02   | 5.64                        | 4.31               | -1.4792            |
| 1.03   | 5.47                        | 4.33               | -1.33506           |
| 1.04   | 5.31                        | 4.37               | -1.16167           |
| 1.05   | 5.18                        | 4.41               | -0.976711          |
| 1.06   | 5.06                        | 4.44               | -0.791894          |
| 1.07   | 4.97                        | 4.47               | -0.613276          |
| 1.08   | 4.89                        | 4.49               | -0.443127          |
| 1.09   | 4.82                        | 4.48               | -0.282712          |
| 1.1    | 4.73                        | 4.44               | -0.135214          |
| 1.11   | 4.62                        | 4.37               | -0.00793943        |
| 1.12   | 4.47                        | 4.26               | 0.0867783          |
| 1.13   | 4.28                        | 4.10               | 0.132287           |
| 1.14   | 4.03                        | 3.91               | 0.109834           |
| 1.15   | 3.72                        | 3.68               | 0.00191953         |
| 1.16   | 3.37                        | 3.43               | -0.20385           |
| 1.17   | 2.99                        | 3.16               | -0.511142          |
| 1.18   | 2.61                        | 2.90               | -0.912348          |
| 1.19   | 2.23                        | 2.65               | -1.38778           |
| 1.2    | 1.90                        | 2.44               | -1.90697           |



Datos cinéticos del ciclo de marcha (Fase de Apoyo) en la plataforma de fuerza AMTI:



Link de enlace:

[https://drive.google.com/drive/folders/1HuoY8CdI0-GBTQLk-nUy8qbNgFbMczHq?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1HuoY8CdI0-GBTQLk-nUy8qbNgFbMczHq?usp=drive_link)

## ANEXO E

### PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

**Plataforma móvil:** En la Figura E1 se muestra las propiedades físicas de la plataforma móvil de material plástico ABS.

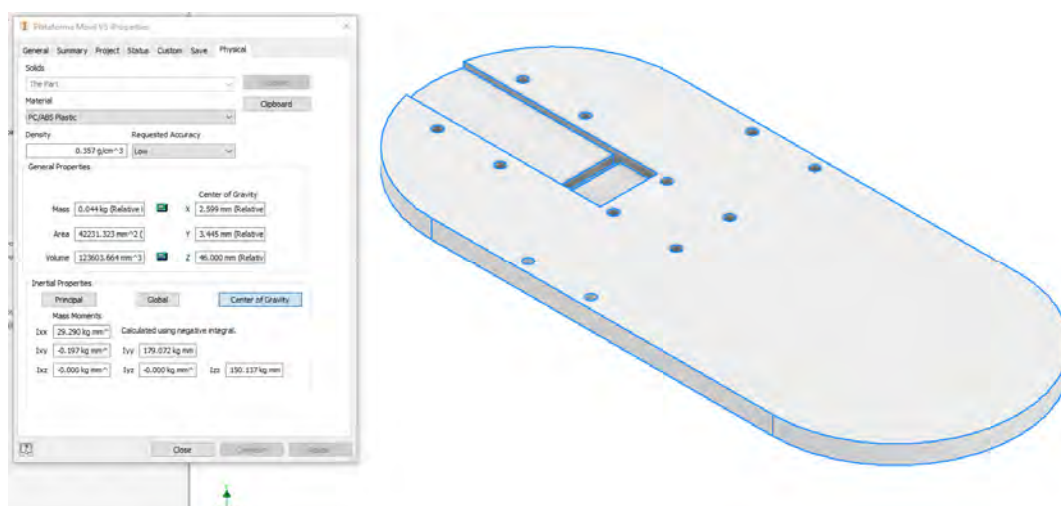


Fig. E1. Inercia de la plataforma móvil.

**Cilindros:** En la Figura E2 se muestra las propiedades físicas del cilindro del actuador lineal de material de aluminio 6061.

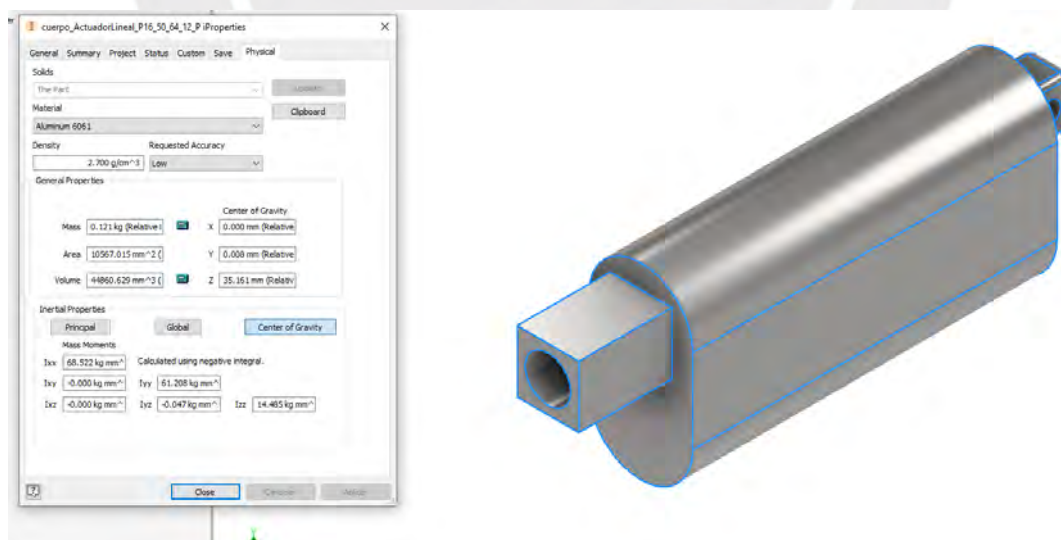


Fig. E2. Inercia del cilindro

**Vástagos:** En la Figura E3 se muestra las propiedades físicas del vástago del actuador lineal de material de aluminio 6061

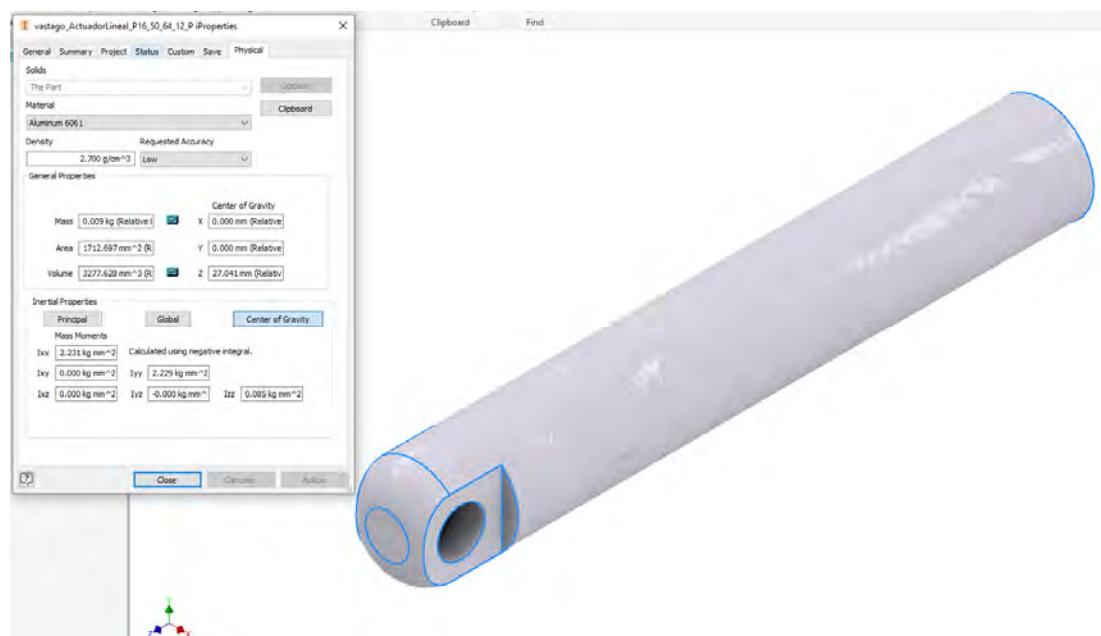


Fig. E3. Inercia del vástago

**Eslabón:** En la Figura E4 se muestra las propiedades físicas del eslabón de la primera cadena cinemática de material de acero inoxidable.

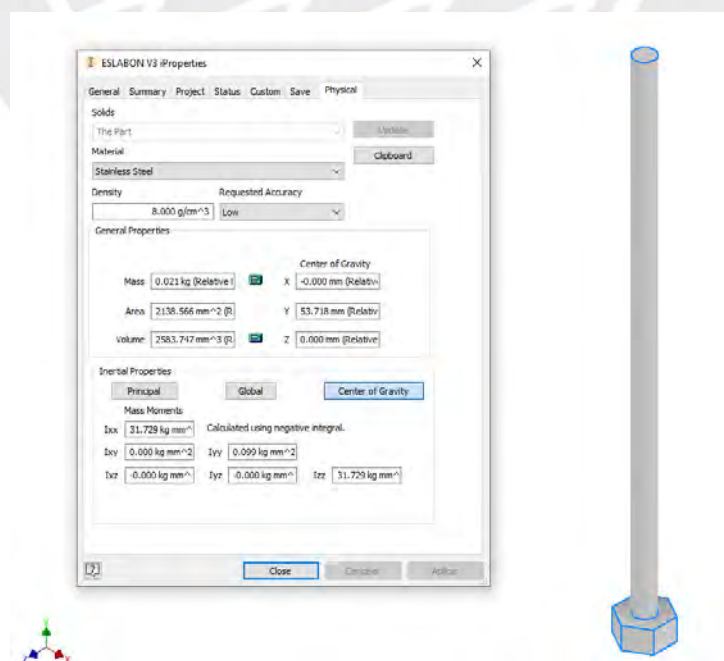


Fig. E4. Inercia del eslabón.

**ANEXO F****PROGRAMACIÓN EN MATLAB R2022b**

Link de drive donde se encuentra el modelo implementado en MATLAB R2022b y Simscape

[https://drive.google.com/drive/folders/114zxZWenU7GOe6iCyK8MtTEaXyNg5Pv6?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/114zxZWenU7GOe6iCyK8MtTEaXyNg5Pv6?usp=drive_link)



## ANEXO G

### MODELAMIENTO DEL MECANISMO PARALELO EN SIMSCAPE

A continuación, en la Figura G1, se presenta el modelamiento del mecanismo paralelo mediante Simscape. El mismo que está confirmado de su base fija y su base móvil. Entre la base fija y la base móvil se encuentran sus tres cadenas cinemáticas:

- 1) La primera cadena cinemática: conformada por el actuador rotatorio 1, un eslabón 1, y una cruceta 1.
- 2) La segunda cadena cinemática: conformada por una junta esférica, un actuador lineal 2 (cilindro 2 y un pistón 2) y una universal 2 (cruceta).
- 3) La tercera cadena cinemática: conformada por una junta esférica, un actuador lineal 3 (cilindro 3 y un pistón 3) y una universal 3 (cruceta).

Debido a que el software Simscape no puede simular la cinemática y dinámica inversa para este mecanismo paralelo debido a las juntas esféricas. Por lo tanto, se simula la cinemática y dinámica directa. Para ello se ingresan los valores de desplazamiento en el tiempo del actuador rotatorio 1 (simZ), luego el desplazamiento en el tiempo del actuador lineal 2 (siml2) y el desplazamiento en el tiempo del actuador lineal 3 (siml3). Con estos valores ingresados el software simula el mecanismo y se obtiene las gráficas de los torques del actuador 1 y las fuerzas de los actuadores lineales 2 y 3.



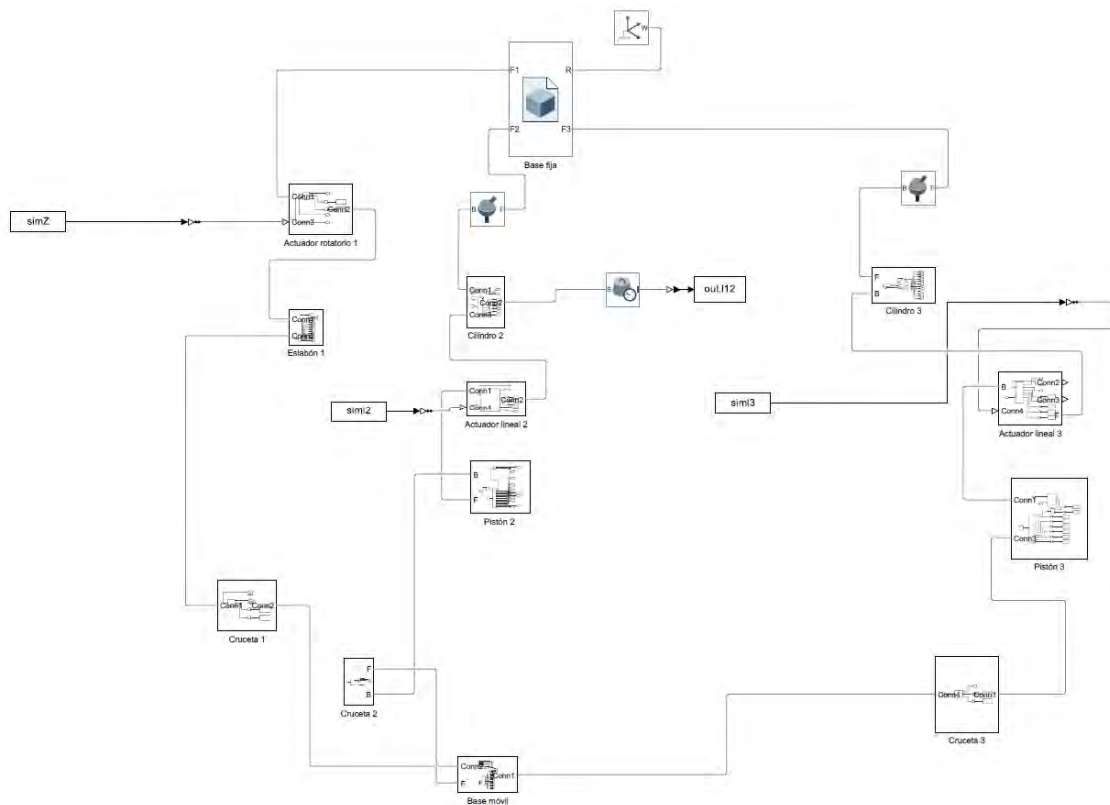


Fig. G1. Modelamiento del mecanismo paralelo mediante Simscape

#### a) Primera cadena cinemática

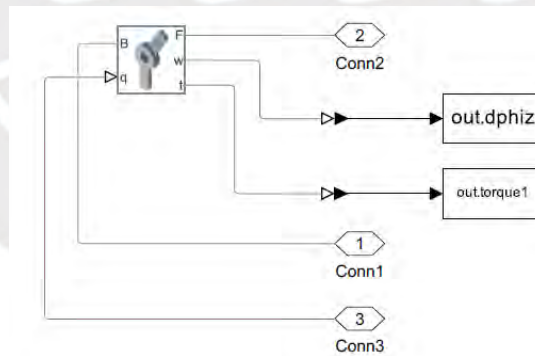


Fig. G2. Modelamiento del actuador rotatorio 1 mediante Simscape

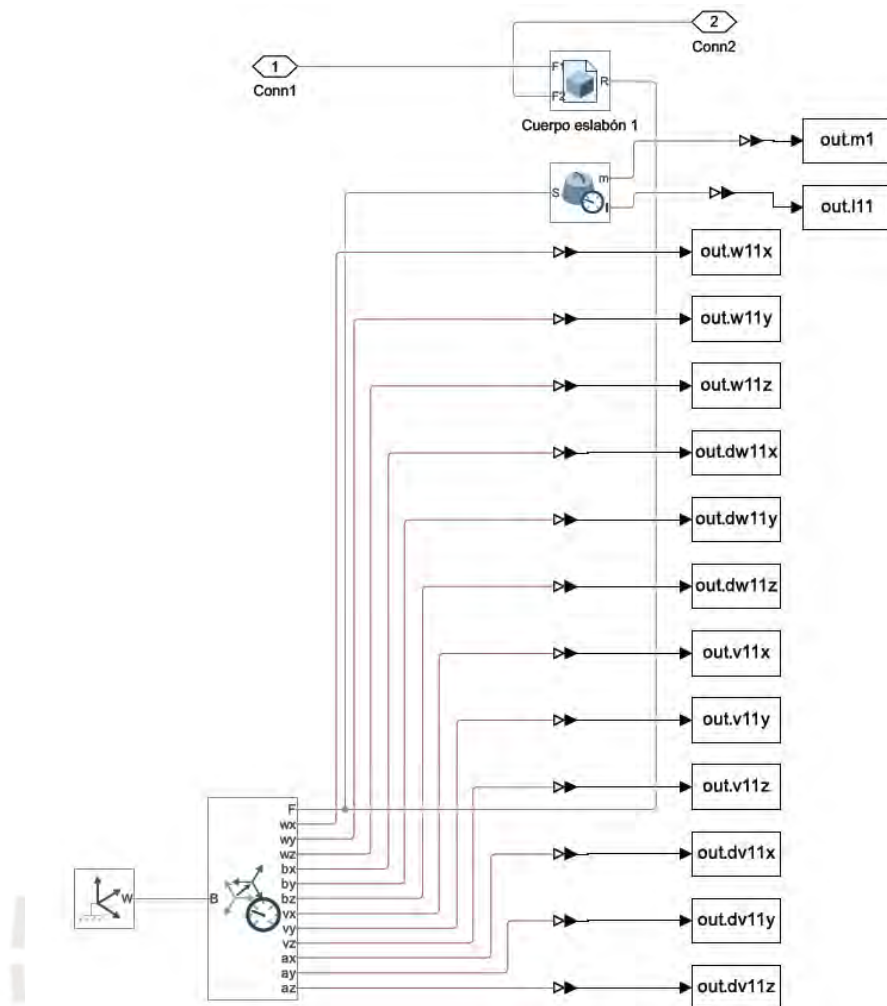


Fig. G3. Modelamiento del eslabón 1 mediante Simscape

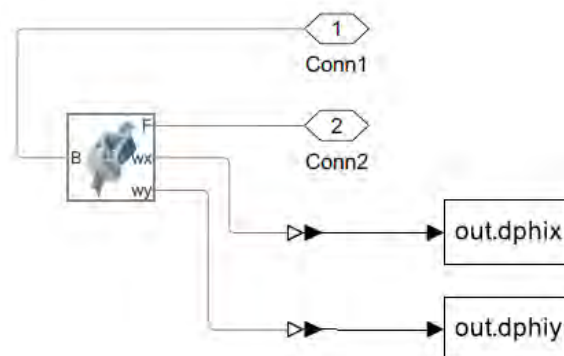


Fig. G4. Modelamiento de la cruceta 1 mediante Simscape

## b) Segunda cadena cinemática

### Modelamiento del actuador lineal 2

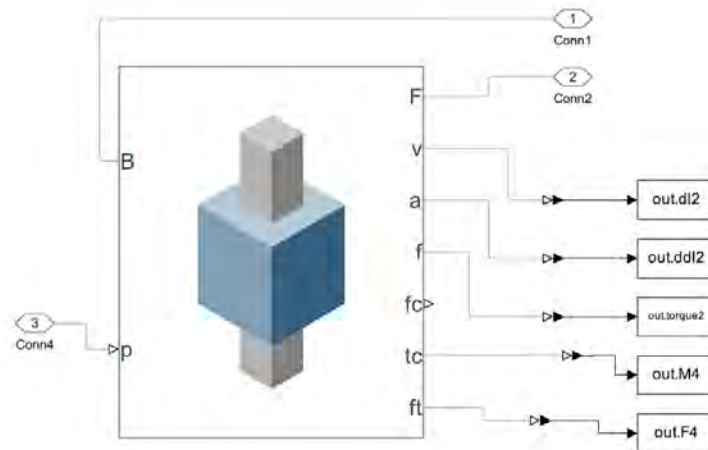


Fig. G5. Modelamiento del actuador lineal 2 mediante Simscape.

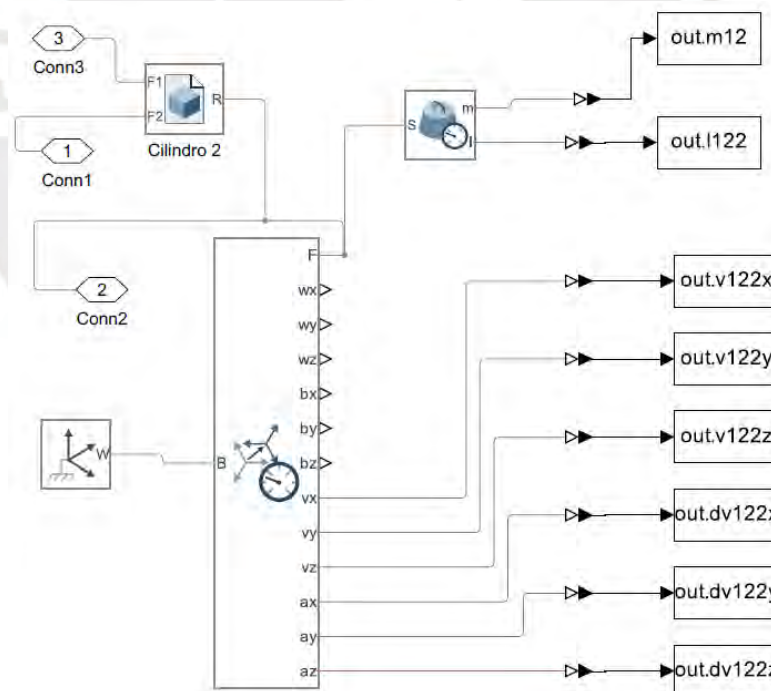


Fig. G6. Modelamiento de cilindro2 mediante Simscape

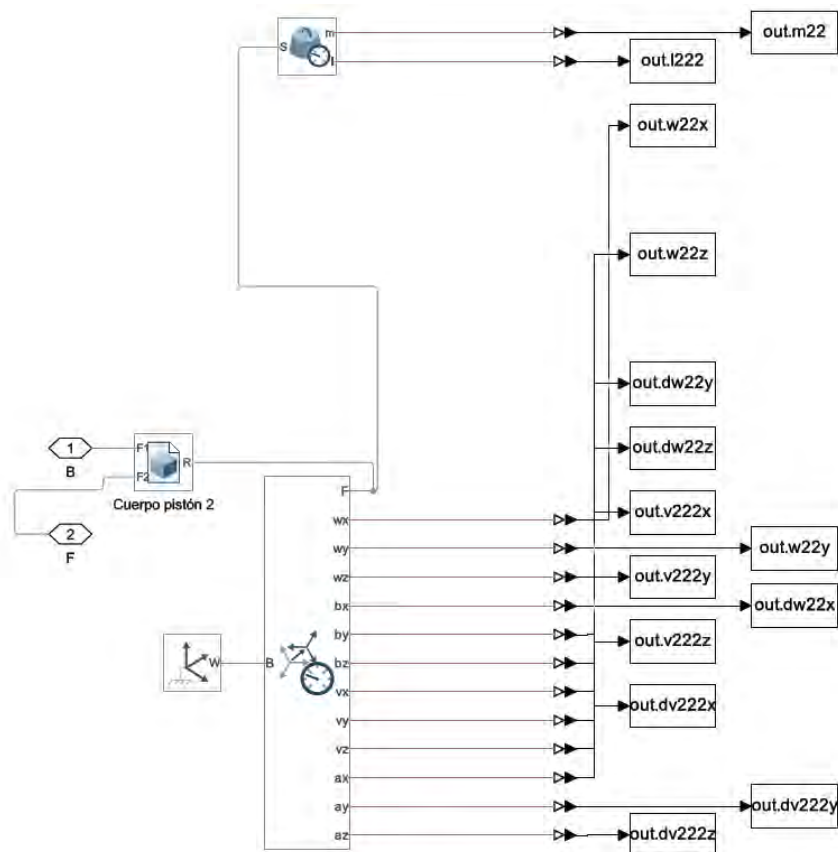


Fig. G7. Modelamiento del cuerpo del pistón 2 mediante Simscape

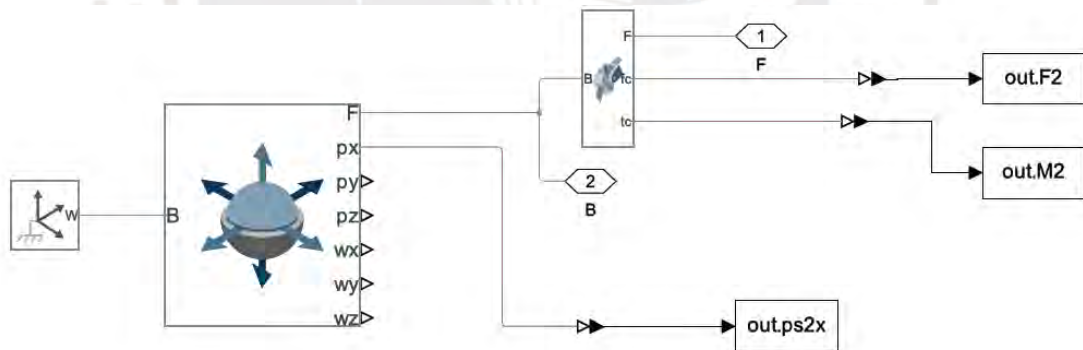


Fig. G8. Modelamiento de la cruceta 2 mediante Simscape





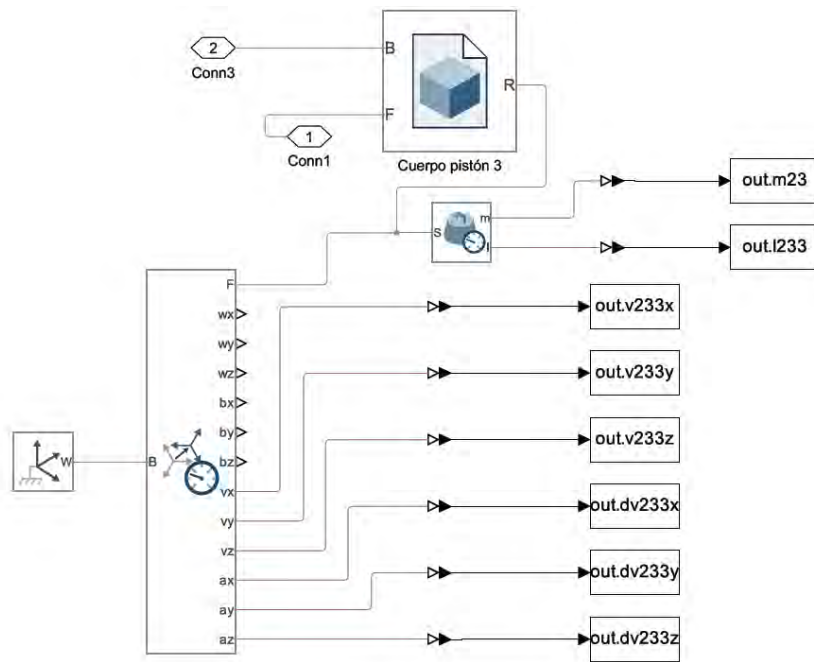


Fig. G11. Modelamiento del cuerpo del pistón 3 mediante Simscape

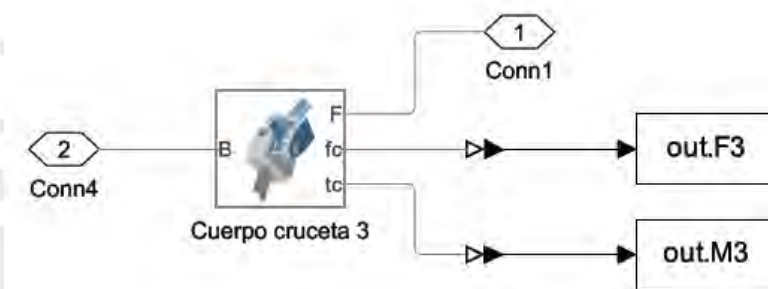


Fig. G12. Modelamiento de la cruceta 3 mediante Simscape

#### d) Base móvil

En la Figura G13 se observa el modelamiento de la base móvil. Se consideran las fuerzas externas que afectan sobre este cuerpo en su centro de gravedad. Se representan con las variables: *simfex* es la fuerza externa que actúa en el eje x, *simfey* es la fuerza externa que actúa en el eje y, *simfez* es la fuerza externa que actúa en el eje z, *simnex* es el momento que actúa en el eje x, *simney* es el momento que actúa en el eje y, *simnez* es el momento que actúa en el eje z. De esta manera se pudo ingresar los valores de fuerza y momentos externos obtenidos por la plataforma AMTY.

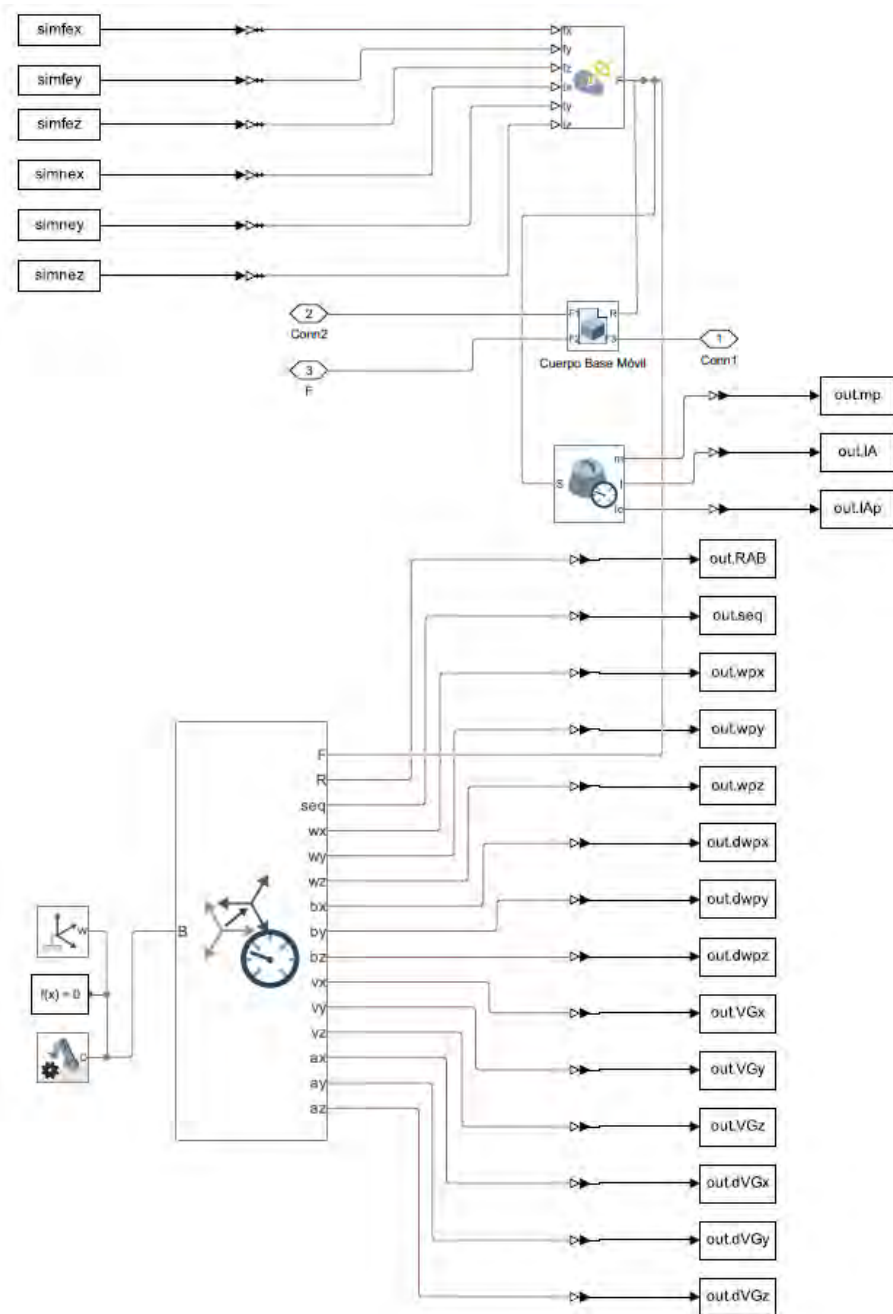


Fig. G13. Modelamiento de la base móvil mediante Simscape

## ANEXO H

### ANTROPOMETRÍA DEL CUERPO HUMANO

La dimensión corporal más básica es la longitud de los segmentos entre cada articulación. Estos varían según la constitución corporal, el sexo y el origen racial. Dempster (1955, 1959) ha resumido estimaciones de longitudes de segmentos y ubicaciones de los centros articulares en relación con puntos de referencia anatómicos. Un conjunto promedio de las longitudes de los segmentos expresados como porcentajes de la altura del cuerpo fueron preparadas por Drillis y Contini (1966) y se muestra en la Figura H1 [Winter, 2009].

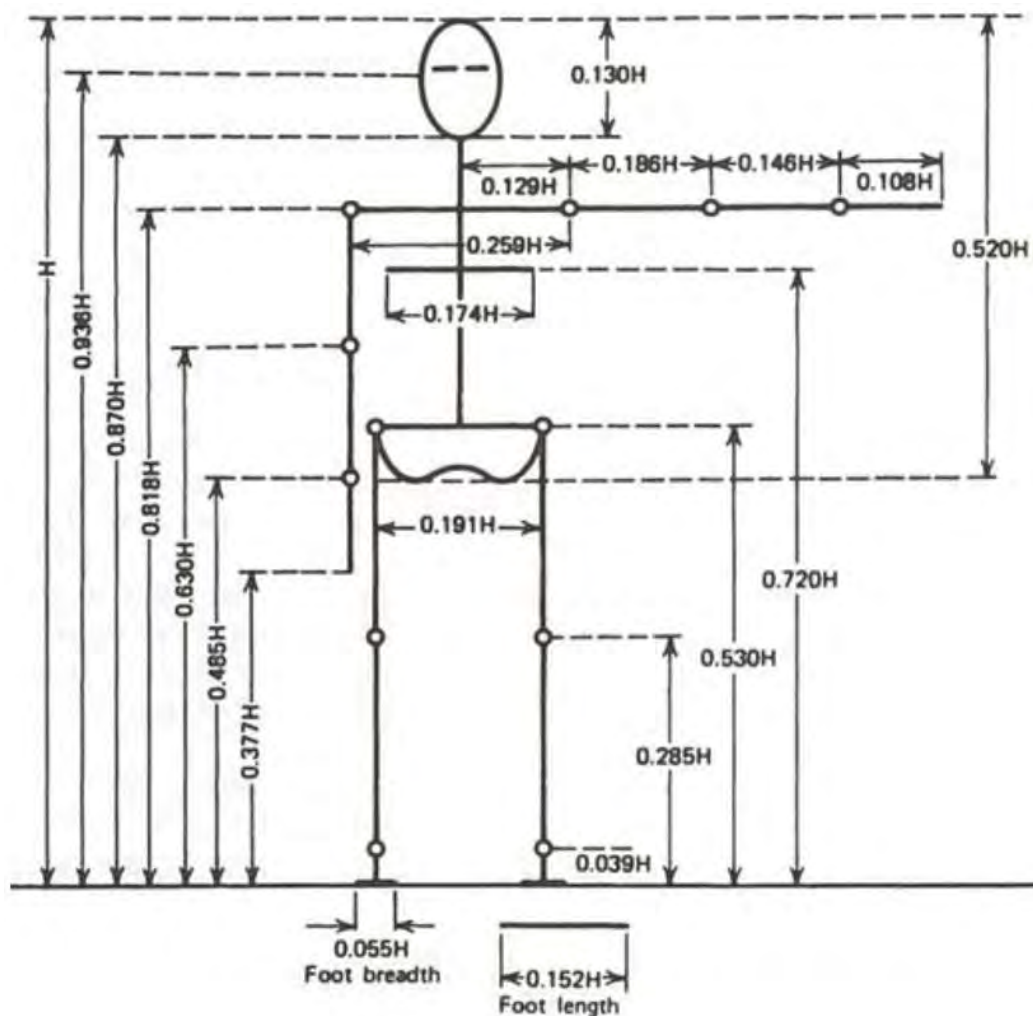


Fig. H1. Longitudes de los segmentos corporales expresados como fracción de la altura corporal  $H$ .

## ANEXO I

### CONSIDERACIONES PARA LA ELABORACIÓN DEL PROTOCOLO DE PRUEBAS DE FUNCIONALIDAD DEL MECANISMO PARALELO EN PERSONAS SIN AMPUTACIÓN

Es importante elaborar un protocolo de pruebas detallado que permita obtener datos precisos para evaluar la funcionalidad del mecanismo paralelo en personas sin amputación. A continuación, se presentan las consideraciones clave para la elaboración del protocolo:

Objetivo: determinar variables cinemáticas y cinéticas del ciclo de marcha utilizando un simulador protésico

Participantes: personas con residencia en Perú de un rango de edad de 18 a 50 años, que camina de manera independiente, sin limitaciones motrices o alguna patología que afecte la marcha.

Método de reclutamiento: el reclutamiento de participantes se realizará mediante una convocatoria abierta. Se publicará un flyer en redes sociales para captar la atención de los posibles participantes. Este flyer contendrá información como el motivo de la convocatoria, los criterios de selección, el lugar donde se realizarán las pruebas, la información de contacto.

Equipos requeridos:

2 plataformas de fuerza AMTI y amplificadores de señal OPTIMA-AMTI:

2 video cámaras digital SONY/ FDR AX700 con luminaria incluida.

1 equipo informático - Laptop marca DELL: Procesador: Intel Core i7 (11va Gen), Disco: 500 GB SSD M.2, Memoria: 16 GB, tarjeta de video: NVIDIA GeForce MX450 2GB, SO: Windows 10 Pro 64bits.

Software requerido:

Kinovea versión 2023.1: software que permite analizar los ángulos de la articulación del tobillo en plano sagital y frontal.

AMTI System configuration: Software que permite configurar y calibrar las plataformas de fuerza antes de la adquisición de los datos cinéticos.

AMTI System Netforce: Software que permite adquirir los datos cinéticos durante el ciclo de marcha del participante.

BioAnalysis: Software que permite graficar y guardar los datos cinéticos adquiridos.

Materiales requeridos:

6 marcadores reflectantes: se posicionan en los segmentos corporales del participante.

2 luminaria para la video cámara digital SONY/ FDR AX700.

2 trípodes: se utilizará para posicionar las 2 video cámaras con luminaria incluida.

1 cinta doble contacto: se utilizará para el posicionamiento de los marcadores reflectantes.

1 tijera: se utilizará para cortar la cinta doble contacto.

Ambiente de adquisición de datos: se utilizará un ambiente para la adquisición de datos.

El ambiente se encuentra ubicado dentro del laboratorio de Investigación en Biomecánica y Robótica Aplicada, según Figura I1. El Laboratorio cuenta con un espacio disponible de 5 metros por 5 metros para el posicionamiento de las cámaras en plano sagital y frontal, según Figura I2.



Fig. I1. Ambiente para las pruebas de laboratorio.



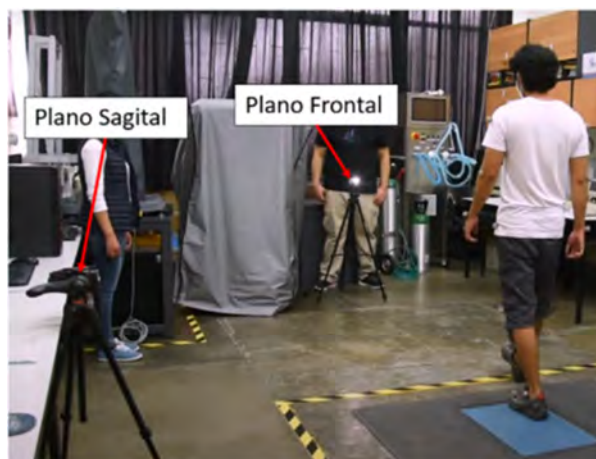


Fig. I2. Posicionamiento de video cámaras en plano sagital y frontal.

#### Preparación del participante:

Antes de la adquisición de los datos, se proporcionará al participante un consentimiento informado, donde se detalla la actividad a realizar. El participante deberá firmar el documento para iniciar las pruebas. Posteriormente se le colocarán los marcadores en los segmentos corporales, como se detalla en la Figura 6.17.



Fig. I3. Posicionamiento de marcadores en los segmentos importantes analizar.

Procedimiento experimental para personas sin amputación a nivel transtibial: el participante caminará sobre una superficie plana de 5 metros de largo a un ritmo natural. Se realizarán 10 repeticiones de esta actividad, con un tiempo de descanso intermedio de

1 minuto entre cada repetición. El tiempo aproximado para la adquisición de datos será de 10 minutos.

Este experimento permitirá obtener valores cinemáticos, específicamente los ángulos articulares del tobillo y valores cinéticos proporcionados por la plataforma de fuerza. Con estos datos, se podrá analizar si el mecanismo paralelo se comporta correctamente durante las fases del ciclo de marcha. Así mismo se validarán los rangos de movimiento, y se compararán con antecedentes que generalmente son validados con mecanismos en serie y no paralelos. Las diferencias encontradas pueden ser útiles para determinar las ventajas y desventajas del mecanismo paralelo en comparación con un mecanismo serial.

