PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Derivada: Propuesta didáctica bajo la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en estudiantes del Bachillerato

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Rafael Gabriel Alcántara Domínguez

Asesor:

Carolina Rita Reaño Paredes

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Carolina Rita Reaño Paredes, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada Derivada: propuesta didáctica bajo la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en estudiantes del Bachillerato, del autor Rafael Gabriel Alcántara Domínguez, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 7%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 02/07/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 04 /07/2025

Apellidos y nombres de la asesora: Reaño Paredes, Carolina Rita	
DNI: 06760859	Firma:
ORCID ID: 0000-0003-4581-7017	

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar cómo los estudiantes de un colegio de Bachillerato transitan la noción de la derivada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Los estudiantes tienen edades entre los 16 y 17 años y pertenecen al Colegio de Alto Rendimiento de la región San Martín y están matriculados en el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional. Para llevar a cabo nuestra investigación, contamos con referentes que resaltan la importancia de la enseñanza de la derivada, así como las dificultades que los estudiantes tienen en la comprensión del concepto. Para llevar a cabo nuestra propuesta, utilizamos la Teoría de Registro de Representación Semiótica expuesta por Duval, tomando en cuenta los registros: algebraico, gráfico, lengua natural y numérico; además del registro gráfico dinámico para el desarrollo de la actividad con la calculadora gráfica. Con respecto a la metodología, es de corte cualitativo y hemos utilizado la Ingeniería Didáctica de Artigue. Para la experimentación y análisis, se ha seleccionado cuatro estudiantes, quienes trabajan dos actividades, solo la segunda es con uso de la pantalla gráfica. Estas actividades, tienen como propósito que los estudiantes transiten por los registros movilizando el concepto de la derivada mediante tratamientos y conversiones. Por último, los resultados muestran que los estudiantes logran transitar por los registros algebraico, gráfico dinámico, lengua natural y en menor medida el gráfico y el numérico.

Palabras claves: Derivada, Registros de Representación Semiótica, Tratamientos y Conversiones, Registro Gráfico Dinámico.

Abstract

The present investigation aims to analyze how students from a Baccalaureate School transition through the notion of the derivate based on the Theory of Registers of Semiotic Representation. The age of the students was 15 and 17 years old, and they all belong to the High-Performance School in San Martin region, registered in the International Baccalaureate Diploma Program. In order to achieve our proposal, the Theory of Registers of Semiotic Representation expounded by Duval was used taking into consideration the following registers: algebraic, graphical, natural language and numerical, also the Dynamic Graphical Register allowed the accomplishment of the activity using the graphic calculator. Regarding the methodology, the approach was qualitative using the Artigue's Didactical Engineering. For experimentation and analysis, four students were chosen to perform two activities, only the second one was with the graphic screen. These activities have as the objective to guide students through the registers, engaging with the concept of the derivative through treatments and conversions. In the end, the results have shown that the students were able to navigate well through the algebraic register, dynamic graphical, natural language, and in a lesser extent, the graphical and numerical registers.

Keywords: Derivate, Registers of Semiotic Representation, Treatments and Conversions, Dynamic Graphical Register.

DEDICATORIA

A Dios, por su amor infinito.

A mi querida madre Mirna, su sacrificio, resiliencia y apoyo incondicional hacen que sea un ejemplo de vida y lucha.

A mi amada esposa Valeria, mi compañera de vida, su paciencia confianza y su apoyo inagotable fueron determinantes para concluir con esta etapa.

A mis amados hijos, Tadeo y Emilia, porque son mi motivo para luchar día a día.

A mi querida familia, hermanos y sobrinos.

A mi padre, que nuestro señor lo tenga en su gloria.

Agradecimientos

A Dios, por estar siempre a mi lado y permitirme poder concluir esta ardua etapa de mi vida, en compañía de mi familia.

A mi asesora, Mg. Carolina Reaño Paredes, por su constante apoyo, su paciencia y por las valiosas sugerencias y revisiones brindadas que han hecho mejorar el trabajo hasta esta versión final.

A los miembros del jurado, Mg. Augusta Osorio Gonzales y Mg. Elizabeth Advincula Clemente por su valioso aporte en las sugerencias y recomendaciones brindadas, las cuales fueron de suma importancia para mi trabajo de investigación.

Al Dr. Luis Pino Fan, por sus valiosos consejos y aportes en la sistematización de mi trabajo de investigación.

A mis estudiantes del Bachillerato Internacional del COAR San Martin, promoción 2024, por su participación, predisposición y compromiso en el desarrollo de las actividades. Así como también, al Ministerio de Educación, por permitirme realizar la aplicación de mi trabajo.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Es indiscutible la aplicabilidad del concepto de la derivada en las diversas áreas como en la Física: cinemática, en Biología: propagación de enfermedades, en Arquitectura; optimización de volúmenes y áreas de edificaciones, en la Economía como el análisis marginal, etc. En tal sentido su enseñanza cobra mucha importancia en estudiantes del Bachillerato y de nivel superior; sin embargo, el aprendizaje del concepto derivada evidencia muchas dificultades y obstáculos, como los que se evidencian, ya sea por escasos conocimientos previos o por uso excesivo de procesos algebraicos que no resultan significativos para el estudiante.

Como investigaciones de referencia, tenemos a Gonzales et al. (2018) que afirma, que los errores de los estudiantes al enfrentar actividades referidas al concepto de la derivada son por la incapacidad de analizar funciones cuando se da su representación gráfica; además, tienen menores dificultades cuando trabajan en el ámbito algebraico que en el geométrico, consideramos relevante este trabajo en nuestra investigación; ya que estos errores están contemplados en nuestro análisis a priori en la elaboración de nuestras actividades. Finalmente, según el Bachillerato Internacional, en sus informes generales de las asignaturas (2022), indica que en las pruebas que rindieron los estudiantes detecta errores por mala aplicación de la regla de la cadena, o por mala interpretación de los gráficos que proporciona la calculadora de pantalla gráfica. Este informe, nos brinda una evidencia sobre la dificultad que tienen los estudiantes del bachillerato sobre el concepto de la derivada por lo que consideramos pertinente proponer actividades desde el marco de la Teoría de Registros.

Teniendo en cuenta nuestros referentes, proponemos como objetivo general: Analizar cómo los estudiantes de un colegio de Bachillerato Internacional transitan la noción de la derivada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

A continuación, presentamos la estructura de nuestra investigación:

En nuestro primer capítulo, presentamos las investigaciones de referencia, la justificación, la pregunta y objetivos de nuestra investigación, finalmente nuestro marco metodológico: Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Posteriormente, en el segundo capítulo, presentamos el estudio de nuestro objeto matemático, donde analizamos aspectos de la derivada, desde el ámbito epistemológico, desde la propuesta de los libros de Apóstol (2001) y Larson y Edwards (2011), y en el ámbito didáctico, mediante el análisis del texto de Awada et al. (2019).

Para el tercer capítulo, presentamos nuestro marco teórico: la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), donde hacemos una revisión de los registros de representación semiótica, los tratamientos y conversiones y además revisamos el Registro Gráfico Dinámico (RGD) por medio de la calculadora de pantalla gráfica.

En el cuarto capítulo, presentamos la experimentación y análisis donde incluimos el escenario y sujetos de estudio, descripción y ejecución de las secuencias de las actividades con sus respectivos análisis a priori y a posteriori en donde se especifica el contraste y validación entre ellos.

Por último, se presenta las consideraciones finales de nuestra investigación con relación a nuestro objetivo general y específico; además, incluimos las recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con nuestro estudio.

Capítulo I: Problemática de la investigación

En este primer capítulo presentamos investigaciones de referencia, las cuales, nos permitirán entender las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de nuestro objeto matemático: la derivada; además, incluimos algunos trabajos en las que se proponen diversas actividades didácticas, desde la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), estas producciones nos permitirán dar el sustento científico a nuestra investigación. También incluimos la pregunta y los objetivos, tanto generales como específicos, la justificación y la metodología del estudio.

1.1 Investigaciones de referencia

En esta sección abordaremos investigaciones referidas a nuestro objeto matemático, aquí presentaremos aspectos relacionados a las dificultades que poseen los estudiantes, en diversos ámbitos de estudio, en la asimilación del concepto de derivadas e identificaremos errores comunes en el desarrollo de las actividades propuestas, ya sea enmarcado en la (TRRS) o en otros marcos teóricos. Por otro lado, presentaremos trabajos de investigación en donde las actividades propuestas, requieran el uso de algún Ambiente de Representaciones Dinámicas (ARD), en nuestro caso es la graficadora HP Prime, la cual es la herramienta tecnológica que utilizan los estudiantes, sujetos de estudio en nuestra investigación.

Dentro de las investigaciones en las que se involucra nuestro objeto matemático tenemos a Chacón (2020), su trabajo tiene como objetivo analizar el trabajo individual de los estudiantes de ingeniería cuando resuelvan tareas en las que se desarrolle la interpretación geométrica de la derivada. El marco teórico que utilizó es la del Espacio de Trabajo Matemático de Kuzniack.

Con respecto a los aspectos metodológicos, es de corte cualitativo y utiliza la Ingeniería Didáctica de Artigue. El investigador, refiere la importancia de elegir esta metodología ya que contrasta los análisis a priori y posteriori y estos análisis están en relación directa con su objetivo de investigación.

Chacón (2020) propone dos tareas, la primera la denomina *Tarea Exploratoria*, la cual consiste en reunir información sobre las nociones previas que tienen los estudiantes en torno a definiciones de diferenciabilidad como preámbulo a la interpretación geométrica de la derivada, tales como, rectas: secantes y tangentes, pendiente de una curva, existencia y cálculo del límite de una función. Según los resultados, el investigador señala que la representación gráfica es la más utilizada. La segunda tarea, la denomina Tarea 1 y estaba diseñada en tres partes, en todas usaba un (ARD): GeoGebra. La primera parte de la Tarea 1, tiene como propósito que los estudiantes reconozcan elementos de la recta y sus formas de representar, lo que permitirá activar sus génesis para la construcción de nuevos conocimientos. La segunda parte de la tarea tiene como propósito que los estudiantes identifiquen diversas representaciones de la recta y su pendiente; finalmente, la tercera parte de la segunda actividad tiene como propósito que los estudiantes se aproximen a la idea de la interpretación geométrica de la derivada, la actividad está planteada desde el registro gráfico.

Con respecto a las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de la derivada, menciona, que una de las causas está relacionada con la programación curricular en los primeros ciclos universitarios; ya que, se pone mayor énfasis en los procesos algorítmicos, así como el uso excesivo de definiciones formales dejando de lado aspectos geométricos de la derivada.

Un aspecto importante en las conclusiones de Chacón (2020) es que el uso del GeoGebra sirvió como herramienta mediadora de las actividades, la cual permitió que los estudiantes pudieran manipular e interactuar de forma dinámica en la construcción de rectas, pendientes, movilización y aproximación de rectas secantes, esto se sustenta en la investigación que el autor de Ruiz et al. (2014, como se citó en Chacón, 2020), donde consideran que el uso del software GeoGebra resulta beneficioso porque se dinamiza el trabajo en aula y a su vez es una buena herramienta para captar la atención del estudiante, haciéndolo más activo y creativo. Consideramos que este aspecto es de suma importancia en nuestro trabajo; ya que, en nuestra investigación también propondremos actividades donde se haga uso de un (ARD) bajo la perspectiva de la (TRRS).

Otro punto relevante de Chacón (2020), en base a que lo afirma, es que se logró alcanzar el objetivo general y se evidenció el espacio de trabajo matemático desarrollado por los dos estudiantes del grupo, de 15 estudiantes, los cuales, fueron seleccionados para las actividades propuestas con el soporte de GeoGebra lográndose activar las diversas génesis.

Consideramos que este trabajo es importante para nuestra investigación, a pesar de no coincidir con el marco teórico, por aspectos de la metodología utilizada: Ingeniería Didáctica (ID), por la organización de las actividades; ya que el investigador, al inicio, propone una tarea exploratoria para reconocer lo saberes previos; mientras que en nuestro trabajo nosotros planteamos una evaluación diagnóstica para identificar estos aprendizajes.

Por otro lado, tenemos la investigación de Cruzado (2018), en donde el objetivo es analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan los estudiantes de ingeniería al resolver problemas de optimización cuando movilizan el concepto de derivada. El marco teórico elegido es la TRRS y la metodología utilizada es el Estudio de Caso.

Por otro lado, Cruzado (2018) propone dos actividades; en la primera actividad propone un problema de optimización desde el registro natural, el propósito de este problema es que los estudiantes coordinen los diferentes registros de representación semiótica; para lograr dicho objetivo, se presentan una serie de ítems y con ayuda del GeoGebra espera que los estudiantes puedan manipular y dar respuesta a algunos ítems para luego dar solución al problema con sus conocimientos sobre la derivada.

La segunda actividad también es un problema de optimización, en lengua natural, la diferencia con el primero es que no cuenta con sub-ítems, el propósito es similar al primero, también se utiliza el GeoGebra, solo que en esta actividad no lo realiza de forma secuencial. Se hace notar que los estudiantes son del nivel superior, que llevan el curso de Cálculo Integral; por lo que, son estudiantes que ya poseen conocimientos previos del objeto matemático; este aspecto es relevante para nuestra investigación, porque, del mismo modo, los sujetos de estudios ya tienen nociones sobre la derivada; por lo que, creemos que la tesis de Cruzado (2018) es importante para nuestro estudio, ya que el autor plantea actividades del mismo objeto de estudio que nuestra investigación pero referido a problemas de optimización, a diferencia de nuestro trabajo que aborda actividades sobre la función derivada y sus gráficas, así como a la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Con respecto al objeto matemático: derivada, Cruzado (2018) menciona que las dificultades que tienen los estudiantes de los primeros años de las carreras de Ingeniería en resolver problemas de optimización por medio de la derivada se deben a que los estudiantes no comprenden el concepto de la derivada asociado a la gráfica de la función y solo se basan en aprender los procesos algorítmicos. Otra dificultad, menciona, es que muchos problemas de optimización se dan en forma textual, y esto conlleva a que el estudiante determine una función de variable real, que modele la situación; sin embargo, si no logra determinar la función es improbable que pueda resolver un problema de optimización.

Con respecto a sus conclusiones, Cruzado (2018) menciona que los problemas de optimización sí favorecen la coordinación de los registros de representación semiótica en los estudiantes de ingeniería, específicamente el figural, natural, algebraico y gráfico. También se evidencia que los estudiantes cuando trabajan con el GeoGebra logran movilizar el registro natural, figural, algebraico y gráfico; realizan tratamientos y conversiones; sin embargo, tiene dificultades en la coordinación de registros.

Consideramos que el trabajo de Cruzado (2018) es relevante porque el propósito del autor es coordinar los registros semióticos en las actividades que plantea. En la misma línea nuestro objetivo es analizar los transito de los registros semióticos que realizan los estudiantes en sus producciones; en tal sentido, consideramos que los análisis y conclusiones que presenta el investigador nos serán de gran utilidad cuando realicemos el análisis a posteriori.

Por otro lado, identificamos investigaciones referidas a los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas de derivación, así Gonzales et al. (2018) menciona:

> Los errores que comete el alumnado al resolver una tarea matemática suponen una herramienta poderosa para detectar dificultades en el aprendizaje de esta disciplina. Su diagnóstico permite el desarrollo de técnicas de enseñanza que eviten o remedien su cometido. Este artículo presenta los resultados de un estudio exploratorio cuyo objetivo es analizar los errores que comete el alumnado al estudiar el concepto de derivada de una función. (p. 449)

Este estudio se centró en hacer un seguimiento a los errores que comete un grupo de estudiantes durante un periodo de 15 sesiones, los cuales se evaluaban por medio de varias pruebas, sus resultados indicaron que la mayoría de los errores cometidos se debe a un deficiente aprendizaje de conceptos y habilidades previas del objeto matemático. También se encontraron errores referidos al lenguaje matemático, los autores señalan que se ha evidenciado los conflictos semióticos en el trabajo de los estudiantes, esto se refleja porque presentan menos dificultades en el ámbito algebraico; así, por ejemplo, cuando utilizan correctamente las técnicas de derivación; mientras, que lo contrario ocurre en el ámbito geométrico. La idea analítica que tienen los sujetos de estudio sobre el concepto de función hace que tengan dificultades cuando se enfrentan a gráficas de funciones o también cuando estén dadas en forma de tablas.

Otros errores observados refieren a las dificultades de cambiar la estrategia en la resolución de problemas, si no es la adecuada, como, por ejemplo, en el manejo correcto de la regla de la cadena y simplificaciones con funciones logarítmicas y exponenciales, las cuales facilitarían su aplicación. También menciona que hay una incapacidad en resolver aspectos relacionados con la interpretación geométrica de la derivad, de forma específica, el valor de la función y el valor de la pendiente en un punto.

Finalmente, Gonzales et al. (2018), a partir de lo trabajado, consideran tener en cuenta los siguientes aspectos cuando se trabaje la derivada con estudiantes: Se debe asegurar que manejen correctamente el concepto de límite de una función en un punto y las indeterminaciones.

Como segundo aspecto, se aborda la noción de función, la cual tiene predominancia el aspecto analítico, tal como mencionamos líneas arriba; por lo cual proponen fomentar tratamientos de la función, con el fin de que conceptos y propiedades relacionados con la geometría o la idea de variación como la derivada sea visto desde un enfoque más global. Otro aspecto es el lenguaje matemático, los autores consideran que es necesario utilizar un lenguaje matemático no equívoco, es decir, claro, por lo cual requiere un estudio y preparación profunda de los materiales utilizados en el aula. Y por último consideran que se debe fomentar un análisis lógico y coherente de los conceptos matemáticos y especialmente de las soluciones que presentan para corroborar su coherencia con el problema que se resuelve.

Consideramos que el trabajo de Gonzales et al. (2018) es importante para nuestro trabajo, porque nos brinda un abanico de varios errores que poseen los estudiantes cuando se trabaja el concepto de derivadas; los cuales tendremos en cuenta cuando diseñemos nuestras actividades y realicemos el análisis a priori de las mismas.

Otro trabajo relevante para nuestra investigación es el de Sánchez-Matamoros et al. (2008), dicho trabajo realiza una revisión de diversas investigaciones referidas a como los estudiantes están aprendiendo el concepto de la derivada, esto implica los errores y dificultades que cometen; en tal sentido, los autores organizan su trabajo considerando aspectos como: comprensión de la derivada de una función en un punto; el papel que desempeñan los sistemas de representación y características del desarrollo del esquema de la derivada.

Con respecto a la comprensión de la derivada, los autores realizan una revisión exhaustiva del trabajo de Orton (1983), quien identificó tres tipos de errores de los estudiantes en tareas sobre las derivadas: estructurales, referidos a los conceptos implicados; arbitrarios, cuando el estudiante no considera los datos del problema; y de manipulación, si bien comprenden los conceptos, se equivocan en la respuesta final. El trabajo de Orton (1983), citado en Sánchez-Matamoros et al. (2008), estaba centrado en la aplicación de dos entrevistas, la primera abordaba preguntas sobre límites, áreas e integración; y la segunda, estaba referida a la diferenciación, al significado del cociente incremental y sus aplicaciones. Los resultados arrojaron que los estudiantes poseen menos dificultades en las aplicaciones de la derivada, que los referidos a la comprensión de la derivada y a la gráfica asociada a la razón de cambio; tal como manifestaba Gonzales et al. (2018), acerca de las dificultades que tenían los estudiantes cuando vinculaban la derivada de una función con el aspecto gráfico. Así en la investigación de Orton, en una tarea, por ejemplo, se menciona que la comprensión de la razón de cambio está sujeta al tipo de función; así la mayoría de los estudiantes contestaron correctamente preguntas sobre razón de cambio de funciones lineales y más bien tuvieron dificultades en hallar la razón de cambio de funciones no lineales.

El estudio de Sánchez-Matamoros et al. (2008), muestra las conclusiones de Orton (1983), donde afirma que las dificultades sobre la razón de cambio y su vinculación con el tipo de función lineal o no lineal se puede deber a problemas de comprensión del concepto de función. Con respecto a los sistemas de representación, los investigadores hacen revisiones de diversos trabajos, donde se planteaban actividades, en las cuales, el propósito era describir la comprensión que tenían los estudiantes sobre conceptos referidos a funciones, límite y continuidad, derivada e integral; además de explorar la interrelación entre la comprensión del concepto y el rol que cumplen los sistemas de representación.

En otro estudio se le presentaba problemas referidos a derivada a través de múltiples representaciones de registros; en estas actividades se evidenciaba, según el autor, que los estudiantes tenían menos dificultades en la comprensión de la derivada en su forma analítica que la gráfica; esto se debía a que varios estudiante fallaron en actividades que involucraban la interpretación geométrica de la derivada; por lo que, los autores concluyeron que el registro algebraico tuvo mayor preponderancia en la forma de pensar de los estudiantes.

En relación, con el trabajo de Gonzales et al. (2018), observamos que poseen algunas similitudes las cuales tiene que ver con el componente geométrico y mejor manejo en el registro algebraico. Además, en el trabajo de Orton 2003 como se citó en Sánchez -Matamoros et al. (2008) manifiesta errores estructurales en la comprensión de conceptos referidos a la derivada; del mismo modo que en el trabajo de Gonzales et al (2018), el cual refiere que las dificultades de los estudiantes se deben a un deficiente aprendizaje de conceptos y habilidades previas.

Por otro lado, incluimos el trabajo de García y Flores (2016) donde se diseña una situación de aprendizaje para la enseñanza de la derivada en estudiantes universitarios principiantes en una universidad de México, este trabajo surge a raíz de la problemática de la escasez de comprensión del concepto de derivada de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial; por tal motivo su trabajo tiene como objetivo ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión del concepto de la derivada.

En el diseño de la situación de aprendizaje considera aspectos de la TRRS usando diversos registros como el numérico, el algebraico, el verbal y el geométrico. En la elaboración de la situación de aprendizaje se incluyó una evaluación diagnóstica, luego se continuó con la fase de consideraciones y ejercicios, los cuales tienen como propósito preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno de cambio y luego vincularlo con el concepto de la derivada.

Posteriormente se aplicó la fase ejecución - formación del concepto, en esta fase se hace énfasis en la idea de rapidez y velocidad, estas nociones luego se van vinculando con la idea de velocidad instantánea. Para lograr este propósito las actividades estaban planteadas para la utilización de medios numéricos y algebraicos; posteriormente continúa con la fase de la asimilación del concepto donde se trabajan 10 actividades que tienen como objetivo que el estudiante desarrolle ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, así como los repasos del concepto: derivada. Una vez concluidos los resultados, afirma que no hubo una mejoría considerable, pero sí una comprensión aceptable en dos estudiantes.

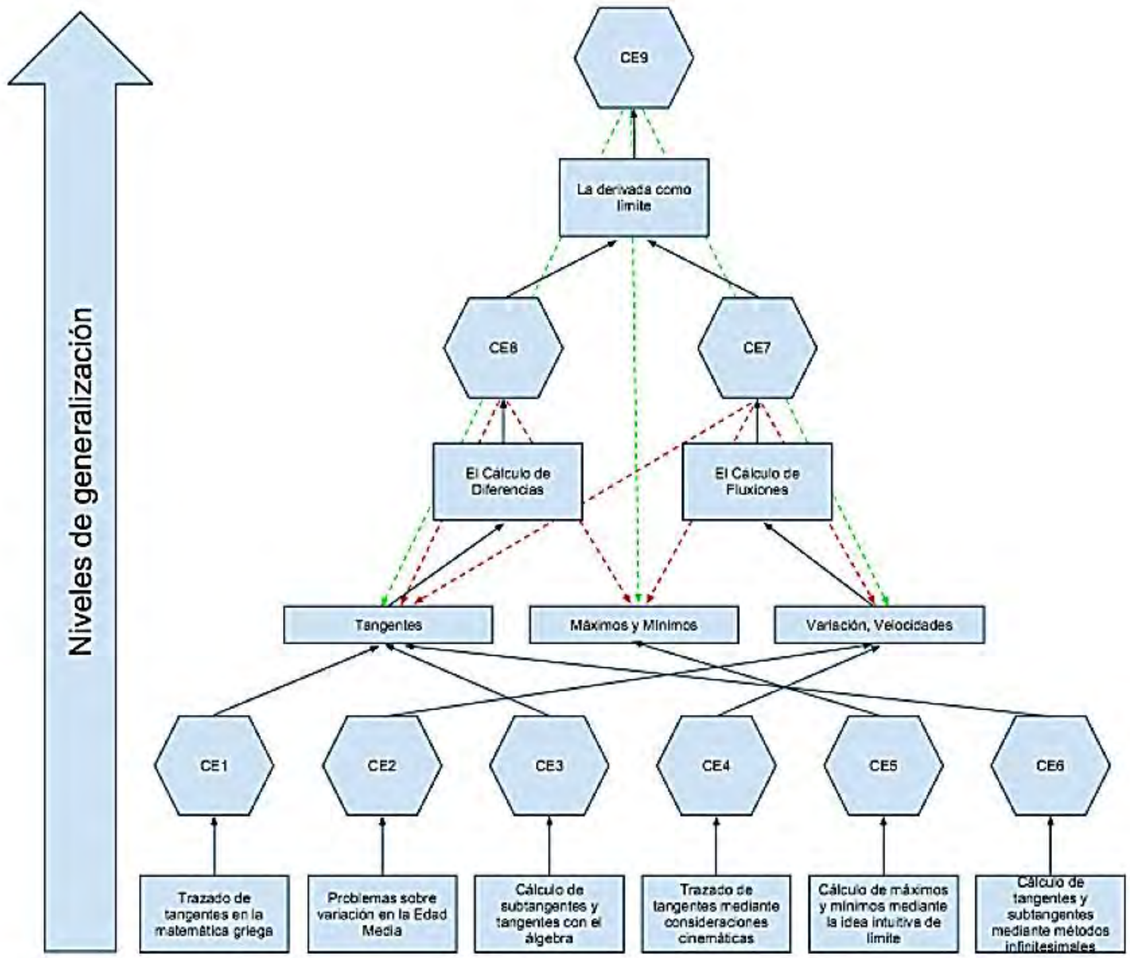
En general, manifiesta que hubo un ligero cambio con respecto a la evaluación diagnóstica; por lo que se concluye que la puesta en escena de la situación de aprendizaje ha permitido confirmar que es una alternativa ante las diversas dificultades en el aula; además, resaltan la labor importante del profesor, no solo en la elaboración y diseño de la herramientas con las que los estudiantes puedan construir su aprendizaje, sino, que se les debe involucrar, a los estudiantes, para que sean ellos los que interactúen con sus pares y el profesor haciéndose responsable de su propio conocimiento.

Incluimos este estudio como referente, porque consideramos que nos da algunas pautas sobre el abordaje de las secuencias, relacionándolas con la (TRRS) y, además, porque expone las diversas dificultades del objeto matemático referidas a la comprensión de la derivada, la cual se evidencia cuando solo dos estudiantes lograron resultados favorables.

Por otro lado, consideramos el trabajo de Pino-Fan, Godino y Font (2011) donde presentan una síntesis de conocimientos sobre la derivada, relativos al componente epistémico del conocimiento didáctico - matemático. El trabajo de investigación de los autores utiliza aspectos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) para la reconstrucción del concepto de la derivada desde un significado holístico e histórico. Para ello identifica nueve configuraciones epistémicas a lo largo de la evolución histórica de la derivada y las organiza en tres problemáticas generales: 1) problemas de las tangentes, 2) problemas de máximos y mínimos y 3) problemas sobre velocidades. Así en la figura 1, organiza las nueve configuraciones.

Figura 1

Significado epistémico global de la derivada



Nota. La figura muestra las 9 configuraciones y su evolución histórica. Tomado Faceta Epistémica del conocimiento Didáctico-Matemático sobre la derivada (p.174.), por Pino-Fan, Godino y Font, 2014, https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Pino-Fan_Mat_Pesquisa%202011.pdf

Como se observa, los autores distribuyen las 6 primeras configuraciones (en la base) por su concepción cronológica, las denominan "primarias", estas tienen carácter extensivo, es decir utilizan métodos propios; aunque sí hay algunas similares entre sí, como CE_1, CE_3 y CE_6, y les llamaron tangentes; y CE_2 y CE_4 se agrupan dando paso a un nuevo sistema "variación, velocidades", la configuración CE_5 les llamaron máximos y mínimos. Luego el cálculo de Fluxiones que se enfoca en el trabajo de Newton, configuración CE_7, tiene como base el sistema de "variación, velocidades" CE_5; mientras que el trabajo de Leibniz tiene como base las configuraciones relativas a las "tangentes", dando paso a la configuración CE_8; finalmente las configuraciones CE_7 y CE_8 dan paso a un sistema de prácticas de carácter formal de la derivada como límite de cociente de incrementos.

Los investigadores resaltan la importancia del trabajo, ya que pueden servir como punto de partida para el diseño de instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos sobre la derivada.

Los autores señalan que el estudio debe aportar criterios para seleccionar problemas y prácticas matemáticas según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirige. En nuestra investigación, el Pino-Fan, Godino y Font (2011), consideramos importante porque para nuestro análisis a posteriori utilizaremos campos de problemas la cual se organizará según los conceptos que se proponen en la secuencia didáctica.

En la misma línea, Pino-Fan (2013) en su tesis doctoral realiza una investigación orientada a diseñar instrumentos que permitan explorar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre el concepto de la derivada. Para cumplir su propósito, en el estudio se realizó cuatro fases, 1) un estudio sistemático de tipo histórico- epistemológico y didáctico donde se elabora una conceptualización de la derivada; 2) diseño de un cuestionario de la derivada, teniendo en cuenta los significados de la derivada y la formación de profesores de matemáticas; 3) Aplicación piloto de un cuestionario a una muestra de 53 futuros profesores; y 4) aplicación del cuestionario definitivo de 49 futuros profesores, la cual incluye entrevistas a una muestra de 15 estudiantes para profundizar en la caracterización de las configuraciones cognitivas de la derivada.

Este estudio se apoya en el Enfoque Onto-Semiótico, y con respecto a su idoneidad epistémica el autor realiza una exhaustiva revisión a textos y planes de estudio, esto debido a la importancia que adquieren los textos y guías para los profesores en la elaboración de sus clases. El análisis que estructuró permitió estudiar tanto el tratamiento que se le da a la derivada como los significados pretendidos en el currículo de matemáticas en un colegio del bachillerato. Para analizar la idoneidad epistémica de la derivada propone cuatro criterios genéricos de los cuales se desprenden subcriterios relacionados con la derivada: 1) Representatividad de los campos de problemas propuestos, hace referencia a la variedad de situaciones que favorecen la discusión de los conceptos matemáticos. Para el caso de la derivada los campos de problemas que se identificó a partir del estudio de Pino-Fan, Godino y Font (2011) se resume en:

- Problemas que involucran el cálculo de tangentes.
- Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de cambio.
- Problemas que involucran el cálculo de tasas instantáneas de variación.

- Problemas que involucra la aplicación de la derivada, para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.
- Cálculo de derivadas a partir de las reglas de derivación.

Luego para el criterio 2) tipos de representaciones actividades en el planteamiento y solución de tareas. Se analiza el tipo de representaciones que se utiliza en los libros y planes de estudio; así de acuerdo con Font (1999), citado en Pino-Fan (2013), señala tres subprocesos que intervienen en el cálculo de la función derivada: traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; el paso de una función $f(x)$ a una forma de representación $f'(x)$; y traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Así considera diversos tipos de representaciones activadas a estos tres subprocesos, como son, descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular, tanto para la función como para su derivada. Como vemos, esta parte está muy vinculado a nuestro estudio, ya que aborda elementos de la Teoría de Registros. Para el criterio 3) aborda, conocimientos previos a la introducción de la derivada, para el análisis de este criterio, enumera los conocimientos centrales previos, tal como aparece en los textos y en los planes de estudio del cálculo diferencial. La valoración de la pertinencia se hace teniendo como base el análisis epistémico-histórico del objeto de estudio y el uso posterior que los autores de los textos dan a estos conocimientos previos.

Finalmente, en el criterio 4) se refiere a la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia, esto trata al conjunto de temas matemáticos que se proponen en el plan de estudios y en los textos, corresponde a una elección por parte de la institución: el currículo pretendido. Estos temas matemáticos y los significados conferidos a los significados institucionales de referencia. Así, para que la instrucción sea epistémicamente idónea, este conjunto de objetos matemáticos y significados institucionales de referencia deben representar al conjunto de significados globales. La no implicancia de esto, como el hacer énfasis en determinados significados y objetos matemáticos y desconocimiento de otros puede resultar que la idoneidad epistémica sea parcializada.

Estos cuatro criterios se operativizan para describir las configuraciones de objetos y procesos subyacentes a los sistemas de prácticas de los planes de estudios y los libros. Para esto, el autor presenta una tabla, que se muestra en la figura 2, a modo de ejemplo, sobre el análisis de idoneidad que realiza a los libros teniendo en cuenta los criterios de idoneidad expuestos líneas arriba.

Figura 2

Campos de problemas y representaciones activadas en los textos sobre la derivada

Campo de Problemas (CP)	Previas		Representaciones para $f(x)$ y $f'(x)$							
		Emergentes	$f(x)$				$f'(x)$			
			Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
CP1: Sobre Tangentes	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica	1,7				1			
		Simbólica	7						1,7	
		Tabular	7							
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP2: Razón instantánea de cambio	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica							1	
		Tabular								
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP3: Tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos).	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica					1			
		Simbólica		1			1	1	1	
		Tabular								
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								

Nota. Pino-Fan, distribuye los cinco campos de problemas y los diversos registros de representación de forma previa a emergente. Tomado de Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada (p.57.), por Pino-Fan, 2013, file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Los análisis de idoneidad que se realiza a los textos y planes de estudio son organizados y estructurados en la tabla, teniendo como criterios los campos de problemas, el tipo de representación en que se plantean y la conversión que realizan; así para comprender mejor la aplicación de la tabla propuesta en el trabajo de Pino-Fan, tenemos como ejemplo la celda sombreada con numeración “1,7”, que consiste en que en la revisión de los libros 1 y 7 se contemplan problemas sobre cálculo de tangentes, en la que se requiere que a partir de una expresión simbólica de una función, el estudiante obtenga, una representación simbólica para la derivada de dicha función; esto en nuestro trabajo y vinculado con nuestro marco teórico se ajustaría a tratamientos en el registro simbólico-algebraico. Estos códigos numéricos, aparecen en algunas celdas, la mayoría de las celdas se encuentran vacías; esto tiene que ver con el hecho, que, si bien los textos proponen diversas representaciones en sus problemas, así como el vínculo entre ellas, ya cuando se trabaja la función y su derivada se evidencia una escasez en la aplicación en los textos. Se reconoce la dificultad de diseñar actividades matemáticas que en su conjunto combinen todas las posibles relaciones mostradas en las tablas.

Consideramos que esta tabla es de mucha utilidad para nuestros análisis a priori y posteriori en la estructuración y aplicación de nuestra secuencia de actividades. También creemos que este estudio es muy relevante para nosotros, ya que nos muestra diversos problemas que se presentan en los textos y planes de estudio. El trabajo de Pino-Fan, Godino y Font (2011), también lo consideramos importante por su abordaje epistémico del concepto de la derivada en diversas etapas históricas, creemos que es muy oportuno a la hora de estructurar secuencias y cuando abordemos sobre el estudio de nuestro objeto matemático.

Finalmente, con respecto a la derivada, consideramos el trabajo de Vrancken y Engler (2014), los autores realizan una investigación con estudiantes de primer año de una universidad, quienes llevan el curso de Matemática II, sobre una introducción a la derivada desde la variación y el cambio. El propósito de la secuencia de actividades de su investigación es que permitirá analizar diversos escenarios de variación, caracterizar variaciones entre las magnitudes a través de la razón de cambio y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio.

Como marco referencial aborda la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional, también se apoya de la Ingeniería Didáctica para el diseño de las actividades. Previo a la ejecución de las secuencias de actividades se realizó un cuestionario sobre nociones del cálculo, los resultados revelaron deficiencias con respecto a nociones variacionales básicas las cuales son necesarios para la comprensión de conceptos como la derivada, los problemas identificados para el tratamiento y conversión están en alusión al registro gráfico, lo que dificulta que los estudiantes visualicen diversos aspectos involucrados con el concepto.

La secuencia se organiza en tres sesiones, la primera actividad se planteó desde el registro gráfico y se propone que los estudiantes den sus respuestas en el registro numérico, el concepto que se aborda es de velocidad media; en la actividad siguiente, se presentó una función definida algebraicamente y su propósito es que los estudiantes trabajen con la velocidad media a partir de sus diferencias y los cocientes de estas diferencias, estas actividades requieren la conversión del registro algebraico al numérico y gráfico y las interpretaciones en el registro verbal. Los resultados de estas actividades reflejan que los estudiantes dieron un significado de la razón de cambio media y caracterización de una situación de razón de cambio constante. En la tercera actividad se incluyó, además de los conceptos vistos anteriormente, la noción de velocidad instantánea; se evidenció que surgieron muchas complicaciones por parte de los estudiantes, esto se refleja en la imposibilidad de calcular la velocidad instantánea como lo hicieron con la velocidad media, lo que originó que reflexionaran sobre la diferencia entre velocidad media e instantánea. Desde el punto de vista geométrico la actividad exploró la relación de la velocidad media con la recta secante y la velocidad instantánea con la recta tangente; finalmente la última actividad fue integradora recopilando aspectos de las actividades anteriores.

Con respecto a sus conclusiones, Vrancken y Engler (2014) afirman que las actividades permitieron trabajar distintos aspectos variacionales tal como la identificación de las funciones como relaciones entre variables en fenómenos de cambio, el análisis y cuantificación del comportamiento de estos cambios, el cálculo de la razón de cambio, la necesidad de describir y cuantificar los cambios que se dan en cada instante en una situación. La definición de la derivada se dio de manera natural al final de la secuencia a partir de la necesidad de cuantificar los cambios en un instante. Las evidencias de los estudiantes muestran que han podido utilizar en diversos grados la información visual, logrando plasmar en el papel el conocimiento matemático.

Las producciones escritas y la interacción grupal favorecieron el tratamiento y la conversión entre representaciones de los registros numérico, gráfico, algebraico y verbal, lo cual es imprescindible para la comprensión.

Finalmente refieren que las mayores limitaciones en su investigación están relacionadas con la escasez de conocimientos previos que poseen los estudiantes, tanto de forma conceptual como algorítmica. Otra dificultad fue el tiempo, que fue escaso para la cantidad de nociones involucradas.

Consideramos que este trabajo es importante, porque el diseño de la secuencia de actividades es muy gradual, es decir, la realiza desde aspectos previos hasta el concepto de la misma derivada pasando por diversos registros de representación. Creemos que esta secuencia estructurada nos puede dar pautas en el diseño y elaboración de nuestras actividades.

1.2 Justificación

A continuación, procederemos a explicar la relevancia que tiene nuestro objeto matemático de estudio en diversos ámbitos, como el aspecto curricular, desde los documentos oficiales del Bachillerato Internacional BI, desde la importancia de enseñar la derivada en el BI, desde las dificultades que suelen tener los estudiantes cuando se enfrentan a actividades que involucran la derivada; desde el uso de las herramientas tecnológicas, específicamente la calculadoras de pantallas gráficas, en el desarrollo de actividades y desde la movilización de diversos registros en el desarrollo del concepto de la derivada.

En el ámbito curricular, los estudiantes, sujetos de estudio pertenecen al BI y de manera específica a los Colegios de Alto Rendimiento (COAR), cursan el Programa del Diploma, el cual, cuenta con una malla curricular propia que rige en diversos países del mundo; así, según la página del Bachillerato Internacional (BI, 2024), en el Perú existen 77 colegios inscritos en el Programa del Diploma, que tiene como objetivo desarrollar jóvenes entre 16 y 19 años, conocedores y solidarios que ayuden a crear un mundo mejor y más pacífico.

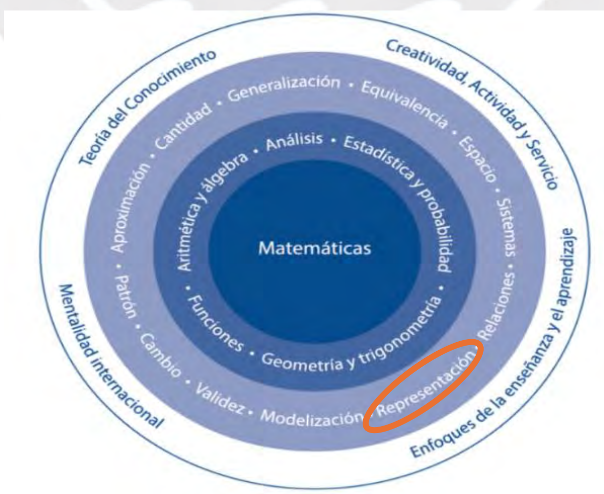
En Matemáticas, el Programa del Diploma imparte dos cursos, tanto en categoría nivel medio y nivel superior, los cursos son: Análisis y Enfoques, y Aplicaciones e interpretación.

El COAR San Martín es el centro educativo donde se realizará nuestra investigación. En este colegio los estudiantes llevan el curso de Análisis y Enfoques de nivel medio; según la Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques (2019) la matemática que se imparte es para aquellos estudiantes que disfrutan ampliando sus conocimientos matemáticos y así poder comunicar, elaborar y justificar razonamientos matemáticos con fluidez y adquirir fuertes habilidades del pensamiento matemático; este curso enfatiza en explorar aplicaciones reales y abstractas de conceptos sea con herramientas tecnológicas o no; también hace énfasis en la indagación, la formulación de conjeturas y demostraciones sencillas.

A continuación, se muestra en la figura 3 la estructura del curso de Análisis y Enfoques dentro del Programa del Diploma.

Figura 3

Estructura de la Matemática del curso Análisis y Enfoques en el Nivel Medio



Nota. La figura muestra varios círculos separados por niveles que en conjunto forman la estructura de la asignatura. Tomado de la Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques (p.7), por Organización del Bachillerato Internacional 2019.

El primer círculo exterior se refiere a los tres componentes troncales, que todos los estudiantes inscritos en el Programa del Diploma (PD) deben llevar, estos componentes son transversales a todas las asignaturas; además hay un cuarto elemento, la Mentalidad Internacional, que es un atributo que todo estudiante del mundo, como lo llama el IB, debe tener. En el siguiente círculo se evidencian los doce conceptos que están presentes en los temas que propone el PD; al respecto, el IB define el término “conceptos” de la siguiente manera:

> Los conceptos favorecen el desarrollo de un currículo amplio, equilibrado, conceptual y cohesivo. Representan ideas importantes que tienen pertinencia y facilitan el establecimiento de conexiones dentro de cada unidad, entre las distintas unidades y también con otras asignaturas del PD.
>
> Los doce conceptos que se enumeran a continuación favorecen la comprensión conceptual y pueden servir para organizar las unidades de trabajo, así como la enseñanza y el aprendizaje. (Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques, 2019, p.14)

Con respecto a la presencia de nuestro objeto matemático en el BI podemos comentar que se encuentra incluido en el tema 5, llamado Análisis, en el que se ven aspectos del cálculo diferencial e integral. Así, en la tabla 1, podemos apreciar los temas que se trabajan en la asignatura Análisis y Enfoques del Programa del Diploma.

Tabla 1

Resumen del programa de estudio en Análisis y Enfoque NM

Componente del programa de estudios	**Horas lectivas recomendadas**
	NM
Tema 1: Aritmética y álgebra	19
Tema 2: Funciones	21
Tema 3: Geometría y Trigonometría	25
Tema 4: Estadística y probabilidad	27
Tema 5: **Análisis**	**28**

Nota. Las horas lectivas se refiere a horas cronológicas durante los dos años del PD. Adaptado de la Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques (p.24), por Organización del Bachillerato Internacional 2019.

Como ya mencionamos, nuestro objeto matemático se encuentra dentro del tema de Análisis y tiene 28 horas de dictado sugeridas por el programa; estas horas se imparten a lo largo de los dos años que dura el programa; en nuestro caso para los estudiantes de 4to y 5to año, estudiantes con edades entre 15 y 17 años.

Con respecto a los contenidos del tema 5, en el cual está incluido nuestro objeto matemático, el BI lo organiza tal como se muestra en la tabla 2, hemos obviado puntos relacionados a Límites e Integración.

Tabla 2

Contendidos del objeto matemático derivada en el PD

Secciones	Contenidos	Orientaciones
5.1	La derivada interpretada como función pendiente y como razón de cambio.	Forma de notación: $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ para la primera derivada. Comprensión de la pendiente de una curva como límite.
5.2	Funciones crecientes e interpretación gráfica de; $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$	Identificar en que intervalos la función es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente $f'(x) < 0$)
5.3	Derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$; $n\epsilon\mathbb{Z}$ Derivada de funciones de la forma: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ donde todos los exponentes son números enteros	
5.4	Recta tangente y recta normal a la curva en un punto dado; ecuación de dichas rectas.	Empleo de enfoques analíticos y de medios tecnológicos.
5.6	Derivada de x^n, $n \in \mathbb{Q}$; $senx$, $cosx$; e^x, lnx. Derivada de una suma y un múltiplo de funciones. Regla de la cadena para funciones compuestas. Regla del producto y cociente.	Ejemplo: $f(x) = e^{x^2+2}$, $f(x) = sen(3x - 1)$.
5.7	La derivada segunda. Comportamiento gráfico de funciones, incluida la relación que existe entre los gráficos de f, f' y f''.	Uso de ambas formas de notación, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $f''(x)$. Los medios tecnológicos se pueden utilizar para explorar gráficos y para calcular la derivada de funciones.

Secciones	Contenidos	Orientaciones
5.8	Puntos máximos y mínimos locales. Comprobación para saber si se trata de un máximo o un mínimo.	Utilizar el cambio de signo de la derivada primera o el signo de la derivada segunda, cuando $f''(x) > 0$ indica que se trata de un mínimo y $f''(x) < 0$ implica que hay un máximo.
	Optimización	Ejemplos de problemas de optimización: beneficios económicos, área y volumen.
	Puntos de inflexión con pendiente cero y con pendiente distinta de cero.	En un punto de inflexión, $f''(x) = 0$ y hay un cambio de signo (cambio de concavidad); por ejemplo, $f''(x) = 0$ no es una condición suficiente para que haya un punto de inflexión en la curva $y = x^4$ en el punto $(0,0)$. Uso de las expresiones "cóncava hacia arriba" para el caso $f''(x) > 0$ y "cóncava hacia abajo" para $f''(x) < 0$.
5.9	Problemas de cinemática donde interviene el desplazamiento s, velocidad v, aceleración a.	$v = \frac{ds}{dt}; a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Nota. Adaptado de la Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques, por Organización del Bachillerato Internacional 2019.

Se hace notar que dicho tema y los subtemas que se desprenden se imparten a finales del primer año del Programa del Diploma, por un periodo de dos a tres semanas, retomándose en el segundo año del Programa del Diploma por un periodo de 5 semanas. Como se evidencia en la tabla 2, la derivada es un tema muy complejo, con varios subtemas, que se requiere que los estudiantes movilicen conceptos previos como funciones, funciones trigonométricas, etc.

Así mismo, el Bachillerato Internacional (2021) en su documento Descriptores de Calificaciones finales del PD presenta un conjunto de descripciones de las calificaciones de cada asignatura. Los evaluadores del BI utilizan estos descriptores para determinar los límites de calificación, esto se debe, que al haber muchos trabajos y evaluaciones no sería posible insertarlos en un solo descriptor; por tal motivo utilizan estos límites de calificación con el propósito de ayudar a los evaluadores y profesores a explicar los requisitos académicos de la asignatura. Los límites de calificación van desde el nivel mínimo, calificación 1, hasta el máximo nivel, calificación 7. En ese sentido mostramos la calificación 7 según documento del BI.

> El alumno demuestra un conocimiento profundo y una comprensión exhaustiva del programa de estudios; construye y aplica argumentos matemáticos de alta complejidad de manera satisfactoria en una gran diversidad de contextos; utiliza técnicas de resolución de problemas de manera satisfactoria en situaciones que suponen un reto; reconoce patrones y estructuras, hace generalizaciones y justifica conclusiones; comprende y explica la significación y validez de los resultados y extrae conclusiones acabadas y pertinentes; comunica las matemáticas de forma clara, concisa y eficaz, utilizando técnicas, notación y terminología correctas; demuestra la capacidad de integrar el conocimiento, la comprensión y las habilidades relacionados con distintas áreas del curso; utiliza la tecnología correctamente en situaciones que suponen un reto – hace un uso eficaz de las funciones de la calculadora cuando es necesario. (Descriptores de Calificaciones finales del Programa del Diploma, 2021, p.17)

Consideramos que los contenidos referidos a la derivada son de alta complejidad para nuestros estudiantes de 5to secundaria del bachillerato, ya que los estudiantes deben resolver problemas retadores utilizando diversas estrategias; así como a la comprensión de diversos problemas que conllevan a modelar, analizar e interpretar situaciones cotidianas; además también, porque les permite comprender el comportamiento de las funciones y de sus gráficos. Por lo expuesto, creemos que nuestra investigación es relevante desde el ámbito curricular que propone el BI.

Otro aspecto a justificar nuestra investigación es desde las dificultades y errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a problemas referidos a la derivada, los cuales fueron presentados en nuestros antecedentes; así los estudios de Gonzales et al. (2018) y Orton (1983, como se citó en Matamoros et al., 2008) manifiestan las dificultades que poseen los estudiantes cuando abordan la derivada desde el ámbito geométrico y gráfico. Además, Orton (1983), también afirma dificultades de los estudiantes sobre la razón de cambio para funciones no lineales.

Por otro lado, Londoño, Villa y Morales (2012), manifiestan en su investigación que los estudiantes aún no han evolucionado en la comprensión el concepto de la derivada como un objeto matemático con propiedades geométricas, donde se les dificulta la comprensión de la imagen; pues, aunque hay dominio del algoritmo, tienen problemas en caracterizar y realizar distinciones de acuerdo con el comportamiento gráfico de la derivada y su función original.

El BI también identifica errores que lo estudiantes cometen al desarrollar problemas referidos a la derivada cuando realizan la examinación. Presentamos, en la figura 4, una pregunta de la prueba 1, de la convocatoria noviembre 2022 (Nov 2022), que rindieron nuestros estudiantes en aquel entonces.

Figura 4

Pregunta de la Prueba 1 de la asignatura Análisis y Enfoques de la convocatoria nov 2022

9. [Puntuación máxima: 15]

La función f se define así: $f(x) = \cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x$, $0 \le x \le \pi$.

(a) Halle las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. [5]

(b) (i) Halle $f'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle las coordenadas de los puntos del gráfico de $y = f(x)$ en los que $f'(x) = 0$. [7]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, mostrando claramente las coordenadas de todos los puntos en los que $f'(x) = 0$ y de todos los puntos donde el gráfico toque los ejes de coordenadas. [3]

Nota: Pregunta que está relacionada con dos temas de la asignatura, Geometría y Trigonometría, funciones trigonométricas; y Análisis, puntualmente la primera derivada. Tomado de los Informes generales de las asignaturas (p.11).

Posterior a la evaluación, el BI, realiza un informe muy detallado, en el que sus especialistas realizan análisis sobre los aciertos y dificultades que cometen los estudiantes en dicha examinación. En tal sentido, incluimos las apreciaciones de los Informes Generales de las asignaturas (2022) con respecto a esta pregunta.

Pregunta 9

En el subapartado (b)(i), hubo un número sorprendentemente alto de alumnos que obtuvieron una derivada incorrecta por no aplicar bien la regla de la cadena. Un error habitual fue usar la regla de la potencia sin la regla de la cadena, lo que conducía a respuestas incorrectas como $2cosx - 6sen$. Otro error habitual fue limitarse a cambiar sen por cos y cos por sen (o $-sen$) en la función dada en el enunciado. En el subapartado (b)(ii), hubo muchos alumnos que hallaron las coordenadas x, lo que a menudo les permitió obtener algunos puntos por arrastre de error por sus derivadas incorrectas, pero muchos se detuvieron ahí, sin calcular luego las coordenadas y correspondientes. Aunque sí que hubo algunos alumnos que esbozaron un gráfico correcto en el apartado (c), muchos dejaron en blanco este ejercicio, porque los errores cometidos en subapartados anteriores de la pregunta les impidieron avanzar aquí. (p.11)

Así pues, evidenciamos, según este informe, las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a conceptos referidos a la derivada; otro de los aspectos donde los estudiantes tuvieron dificultades fue derivar haciendo uso de la regla de la cadena, tal como menciona el informe, los estudiantes derivaron de forma directa la función exterior de la compuesta pero no derivaron la función interna. Del mismo modo las dificultades también se evidencian en la Prueba 2, con uso de la calculadora gráfica, la pregunta 6 de la convocatoria mayo 2022 (May 2022). A continuación, presentamos en la figura 5 un extracto de la prueba.

Figura 5

Pregunta n°6 de la Prueba 2 de la asignatura Análisis y Enfoques de la convocatoria May 2022

6. [Puntuación máxima: 7]

Una partícula se mueve en línea recta de modo tal que su velocidad ($v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) en el instante t segundos viene dada por $v = \dfrac{(t^2+1)\cos t}{4}$, $0 \le t \le 3$.

(a) Determine cuándo cambia el sentido del movimiento de la partícula. [2]

(b) Halle en qué instantes la aceleración de la partícula es igual a $-1{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. [3]

(c) Halle la aceleración de la partícula cuando su rapidez es máxima. [2]

Nota. pregunta que está relacionada con aplicaciones de la derivada: cinemática. Tomado de los Informes Generales de las asignaturas (p.11).

Como se mencionó líneas arriba, esta pregunta corresponde a la sección A de la prueba 2, con uso de calculadora gráfica, observamos que es una pregunta que se centra en un solo tema, en esta caso es Análisis, su puntaje es diferente al anterior, de menor alcance y se aborda aspectos de la derivada como aplicación de la derivada: cinemática, valores extremos y regla de derivación; Al igual que en la pregunta anterior, presentamos el análisis que realizan los evaluadores del IB en los Informes Generales de las asignaturas (mayo, 2022):

Pregunta 6. En el apartado (a) hubo muchos alumnos que no se dieron cuenta de que el cambio de sentido del movimiento se producía cuando $v = 0$. Un error habitual fue hallar $v(0)$ o pensar que ese cambio sucedía cuando v era máxima. En el apartado (b), la mayoría de los alumnos supieron cómo derivar, pero luego algunos trataron de sustituir el -1,9 en t (cuando no era el valor del tiempo, sino el de la aceleración), mientras que otros se afanaron por derivar la función a mano en vez de utilizar la calculadora de pantalla gráfica. Hubo muchos alumnos que trataron de resolver la ecuación de manera analítica y que no utilizaron los medios tecnológicos. De entre aquellos que sí que los utilizaron,

> muchos tenían la calculadora configurada en modo grados. Casi todos los alumnos que acometieron el apartado (c) pensaron que la rapidez máxima era lo mismo que el máximo de v. (p.12-13.)

Del mismo modo que en la pregunta anterior, evidenciamos las dificultades que tiene los estudiantes en la comprensión del concepto derivada, tal como, que no relacionan la derivada de la función velocidad es la función aceleración, en interpretar los gráficos que proporciona la calculadora gráfica, así como errores en el manejo de la calculadora gráfica, también en analizar la función cuando debían analizar la derivada en los cambios de sentido (signos).

Por lo expuesto en el ámbito de los errores que cometen los estudiantes al desarrollar problemas sobre la derivada, consideramos la importancia y relevancia de generar actividades desde la TRRS y de tipo BI que favorezcan a reducir la brecha de estos obstáculos.

Con respecto a la evolución histórica de la derivada y su aplicabilidad a las programas de estudio, Pino, Godino y Font (2011) en su trabajo del desarrollo epistémico y significado holístico de la derivada sostienen que su propuesta relativa a la reconstrucción del concepto en distintos momentos históricos resulta muy importante, ya que en la elaboración e implementaciones de los diseños, programaciones y evaluaciones en el proceso de la formación matemática, requieren un estudio a profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Además, con respecto a la enseñanza de la derivada, Nieves (2011), manifiesta:

> La enseñanza tradicional de la derivada en el cálculo diferencial suele caracterizarse por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos que involucra (conceptos, proposiciones, etc.). Sin embargo, el interés habrá que ponerlo en la comprensión de los procesos matemáticos, más que en la ejecución de ciertas rutinas. (p.18)

Consideramos, que, por lo expuesto, es relevante nuestro estudio cuando se aborda la importancia de la derivada tanto desde su evolución epistémica e histórica, para la elaboración de la programación y evaluación; así como en la forma de enseñanza, la cual debe hacer énfasis en los procesos matemático más que en los aspectos rutinarios y mecánicos.

Otro aspecto relevante para nuestra investigación es la utilización de un Ambiente de Registro Dinámico (ARD) en las actividades propuestas; así el National Council of Teachers of Mathematics (2023), destaca la importancia de aprovechar los recursos tecnológicos tanto por los estudiantes como por los profesores, ya que la tecnología es un catalizador del cambio y la innovación en la sociedad; además, menciona, que debe usarse para profundizar la comprensión de los alumnos y generar interés por la matemática.

En la misma línea, Manrique (2020) señala la importancia de trabajar en clase actividades mediadas por la tecnología; de manera específica, la calculadora de pantalla gráfica, ya que, permite que los estudiantes interpreten y articulen diversas representaciones del objeto matemático en cuestión y lo relacionen con sus esquemas de uso para emitir una conjetura; tal que, puede que sea válida o no. También, resalta que la interacción docente – estudiante se torna más dinámica y activa.

En la misma línea, Ruiz y Elena (2013) manifiestan con respecto al uso de las calculadoras gráficas.

> La introducción de la calculadora gráfica en el aula permite hacer énfasis en el significado geométrico espacial de la circunstancia problemática y amplía las posibilidades de comprensión de los procedimientos. El hecho de que las calculadoras graficadoras puedan ser utilizadas ampliamente, permite el uso efectivo de conceptos, procedimientos y representaciones en la presentación de diferentes objetos matemáticos. Esto representa importantes posibilidades de enriquecimiento de variedad de actividades que son esenciales para obtener las metas comúnmente presentes en los programas de las matemáticas del bachillerato y de la universidad. (p.10)

Según lo manifestado por las investigadoras, se infiere la importancia del uso de las graficadoras o herramientas tecnológicas en la comprensión del objeto matemático, para nuestro caso las derivadas, ya que, incide en el registro geométrico, el cual permite movilizar conceptos y relacionar elementos de diversos objetos matemáticos; así la investigación de Vigo y Ferreira (2019) señala como el software Mathematica favorece en la visualización, por medio de aprehensiones, tanto perceptivas operatorias y discursivas, haciendo que el estudiante movilice y realice conexiones con los elementos del objeto matemático que emergen de la representación gráfica.

Del mismo modo, en el BI resulta muy importante el aspecto tecnológico; ya que una de sus examinaciones, la prueba 2, se realiza con la calculadora de pantalla gráfica, en nuestro caso la HP Prime, por lo que es imprescindible que los estudiantes dominen el uso de esta herramienta. Así, la Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques del BI (2019) señala con respecto al componente tecnológico:

> El uso de medios tecnológicos es una parte fundamental de los cursos de Matemáticas del PD. Apreciar cómo los avances tecnológicos han influido en los avances en matemáticas, y viceversa, es uno de los objetivos generales de los cursos. Asimismo,

utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas es uno de los objetivos de evaluación. Aprender a usar diferentes medios tecnológicos es una habilidad importante en matemáticas. (p.17)

El BI dentro de sus enfoques de enseñanza y aprendizaje contempla el uso de la tecnología como aspecto importante en la motivación para los estudiantes y para mejorar la comprensión; además de facilitar la visualización, ayudar a los estudiantes a formular conjeturas y comprobar generalizaciones.

En la misma línea, el componente tecnológico queda bien marcado en el sistema de evaluación del BI de la asignatura Análisis y Enfoques, el cual consta tres componentes: una evaluación interna, llamada "Exploración Matemática"; que es un informe de 12 a 20 páginas y donde en uno de sus propósitos refiere que "motivar a los alumnos, cuando proceda, a descubrir, utilizar y apreciar el poder de la tecnología como herramienta matemática". (Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques, 2019, p. 89)

El segundo y tercer componente son pruebas escritas, denominado Prueba 1 y 2, donde la diferencia entre ambas está en el uso de la tecnología; así pues, la Prueba 2, requiere el uso de una calculadora gráfica, la cual, para nuestra investigación será, la HP Prime, dicho graficador está avalada por el IB en un documento oficial llamado: *Uso de las calculadoras en los exámenes del PD (2024)*. En la siguiente figura 6 presentamos la sistematización de los componentes de evaluación de la asignatura Análisis y Enfoques: Matemáticas NM.

Figura 6

Síntesis de la evaluación IB en la asignatura Análisis y Enfoques: Matemáticas NM

Componente de evaluación	Porcentaje del total de la evaluación
Evaluación externa (3 horas) **Prueba 1 (90 minutos)** No está permitido usar medios tecnológicos. (80 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**80 %** **40 %**
Prueba 2 (90 minutos) Es necesario usar medios tecnológicos. (80 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**40 %**
Evaluación interna Este componente lo evalúa internamente el profesor y lo modera externamente el IB al final del curso. **Exploración matemática** En Matemáticas, la evaluación interna es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. (20 puntos)	**20 %**

*Nota. E*l peso de la evaluación externa (prueba 1 y 2) es 80%. Tomado de Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques NM (p.76)

Como se evidencia, la Prueba 2, que incluye el componente tecnológico, tiene un 40% de la evaluación final del estudiante para aprobar la asignatura, por lo que es crucial que los estudiantes utilicen correctamente la calculadora gráfica para tener aspiraciones de aprobar el curso y ostentar el Programa del Diploma.

En tal sentido, consideramos la importancia y pertinencia de abordar nuestras actividades con el uso de ARD, en este caso la Calculadora gráfica HP Prime.

Finalmente, abordaremos la relevancia de nuestra investigación desde el ámbito de la TRRS, los cuales se han presentado en nuestros antecedentes y destacan la pertinencia de realizar actividades referidas al concepto de la derivada que involucren utilizar diversos registros. Así, estudios revisados de Cruzado (2018), Gonzales et al. (2018), Vrancken y Engler (2014), revelan la importancia de plantear actividades desde los distintos registros de representación y que estas actividades fomenten las conversiones y tratamientos que favorecen la coordinación entre ellos; además concuerdan que se debe incidir en actividades en el registro gráfico, específicamente en aspectos geométricos como la interpretación geométrica de la derivada, disminuyendo el uso excesivo de los procesos algorítmicos y definiciones formales de la derivada.

En tal sentido, se resalta la importancia de implementar actividades que busquen indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes; además sostiene que dichas actividades no deben ser extensas y deben ser graduales, esto mediante la utilización de los diferentes registros de representación que permitan evolucionar en la comprensión del concepto derivada y sus aplicaciones.

Con respecto a la importancia de las representaciones de la derivada, Sánchez-Matamoros et al. (2008) menciona:

> Estos trabajos, vistos en forma global, subrayan la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado y las transformaciones entre diferentes representaciones. (p.9)

Además, se destaca el papel que cumplen los sistemas de representación en la construcción del concepto derivada; así mencionan que los significados que van desarrollando los estudiantes están vinculados a diferentes modos de representación; aunque, dichos significados, por lo general, no están relacionados; por lo que se destaca la importancia de **coordinar** los diferentes sistemas de representación como un mecanismo para que los estudiantes puedan comprender la derivada.

Una de las terminologías que utilizamos en nuestra investigación es el tránsito entre registros, los cuales deberían darse entre diversos registros para coordinar estos registros. Así, Cantoral y Farfán (1998) manifiestan

> … lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, será posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones. (p.6)

Así pues, en nuestro trabajo proponemos transitar por el registro algebraico, gráfico, gráfico dinámico y numérico.

Con respecto al BI y su la relación con la TRRS, también aborda terminologías que son propias de TRRS, aunque sin nombrarla de manera específica. Así en la figura 3, cuando se detalló la estructura del curso Análisis y Enfoques en el Programa del Diploma, uno de los doce conceptos es la “representación”, el cual el BI lo define “Este concepto se refiere a la utilización de palabras, fórmulas, diagramas, tablas, gráficos, grafos y modelos para representar información matemática” (Guía de Matemáticas de Análisis y Enfoques, 2019, p.14). Por lo cual, podemos inferir, que, de forma implícita, se proponen actividades desde los diferentes registros de representación.

Por todo lo presentado, consideramos la importancia de plantear situaciones que conlleven a coordinar los diferentes de registros de representación semiótica, con el apoyo de la calculadora gráfica.

1.3 Preguntas y Objetivos de Investigación

A partir de nuestros antecedentes y la justificación hemos formulado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo transitan los estudiantes del Bachillerato Internacional la noción de derivada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica?

Para dar respuesta a la pregunta se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Analizar cómo estudiantes de un colegio de Bachillerato Internacional transitan la noción de la derivada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Objetivos Específicos

› Identificar los diferentes registros de representación semiótica que movilizan los estudiantes del Bachillerato Internacional al resolver actividades sobre la noción de la derivada.

› Describir los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes al coordinar el registro gráfico, gráfico dinámico y algebraico, en el desarrollo actividades sobre la noción de la derivada.

1.4 La Ingeniería Didáctica

Una investigación de corte cualitativa está orientada a reconstruir la realidad tal como observan los participantes involucrados. El proceso de la investigación cualitativa es flexible dado que se ajusta a los sucesos que van ocurriendo y para así lograr una correcta interpretación de las evidencias y desarrollo pertinente de la teoría.

La investigación cualitativa es muy útil para las ciencias sociales, ya que permite observar la realidad de un contexto social específico y cómo este influye en los individuos. Una de sus ventajas es que con la implementación de técnicas como, por ejemplo, la entrevista no estructurada, es posible realizar preguntas abiertas que permiten al investigador conocer al detalle, actitudes y comportamientos de los sujetos de estudio, entender sus experiencias y distinguir aspectos relevantes que no se pueden identificar con técnicas propias de un enfoque cuantitativo. (Escudero y Cortez, 2018, p.46)

En tal sentido, nuestra metodología de investigación es de corte cualitativo, ya que, en función a nuestras secuencias de actividades observaremos, describiremos y analizaremos el desarrollo de actividades de los estudiantes del Bachillerato.

La Ingeniería Didáctica (ID) surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de la década de los ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica.

Douady (1995, como se citó en De Faria, 2006) refiere acerca de la Ingeniería Didáctica:

> […] el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase. (p. 1)

Como se ve la ID contiene actividades estructuradas y organizadas (análisis a priori) por el docente de modo que los estudiantes interactúen en este medio artificial propuesto por el docente; posteriormente, la ID contrasta lo planificado por el docente con la ejecución de las actividades en la clase; finalmente, el docente verá si es conveniente modificar las secuencias.

1.4.1 Características de la ID

- Como metodología se caracteriza en primer lugar, como modelo experimental basado en las “realizaciones didácticas” en la clase, así lo llama Artigue (1995);

es decir sobre los procesos que pasa la ID en la clase: concepción, realización, observación y análisis de la secuencia.

- En este proceso de la ID se presentan dos niveles la Micro- Ingeniería y la Macro- Ingeniería.

Nivel Micro-Ingeniería, estudian un determinado tema. Se toman en cuenta de manera local e identifica la complejidad de los fenómenos que acontecen en el aula.

Nivel Macro-Ingeniería, a pesar de las dificultades metodológicas e institucionales se hacen imprescindibles, ya que trata de componer la complejidad de las investigaciones de la Micro -ingeniería con los fenómenos relacionados a la duración que hay entre enseñanza y aprendizaje.

Los dos niveles de investigación son importantes y se complementan. Las investigaciones de Micro-Ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las investigaciones de Macro-Ingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales, son indispensables.

La validación es principalmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

1.4.2 Fases de la metodología de la Ingeniería Didáctica de Artigue

Detallaremos las fases desde el aspecto teórico y luego presentaremos aplicado a nuestra investigación. El proceso experimental consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminar.
2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

1.4.2.1 Fase 1: Análisis preliminar. Con respecto al análisis preliminar, Artigue (1995) refiere:

> En una investigación en Ingeniería Didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares" (p.38).

Los análisis preliminares más frecuentes:

- En el análisis epistemológico se aborda el objeto matemático, una reseña histórica, aspectos teóricos y dificultades que puede presentar el conocimiento y como ha ido evolucionando en el tiempo.

En nuestro trabajo realizaremos un estudio epistemológico e histórico de la derivada y al análisis del saber por parte de los libros de matemática superior de Apóstol (2001) y Larson y Edwards (2011) en el siguiente capítulo.

- En el análisis cognitivo aborda la forma como lo estudiantes aprenden el conocimiento en cuestión teniendo en cuenta sus saberes previos y los errores que cometen, para esto nos apoyamos de nuestras investigaciones de referencia, sobre las dificultades que tienen los estudiantes al abordar el concepto de la derivada y sus aplicaciones.
- En el análisis didáctico se aborda la forma de enseñanza del conocimiento, para esto se analizan textos que utilizan los estudiantes y maestros en el desarrollo del concepto de la derivada, de forma específica analizaremos el libro: Mathematics: Analysis and Approuches, Standar Level, trabajo de Awada et al. (2022), este libro aborda de forma específica temas y problemas tipo propios del Bachillerato Internacional. Finalmente, en esta dimensión también se considera el sistema de enseñanza o la forma en que nuestro objeto matemático está presente en los ejes temáticos que propone el Bachillerato Internacional y específicamente el Programa del Diploma, el cual se presentó en la justificación de nuestra investigación.
- En el análisis del campo de restricciones, se refiere a donde se va a situar la realización didáctica, el grupo de estudiantes, los recursos que posee la institución, la edad de los estudiantes, etc.

Con respecto a nuestra investigación, se sitúa en un colegio de alto rendimiento, COAR San Martín, ubicado en el departamento de San Martín, provincia y distrito de Moyobamba, el cual es parte del Bachillerato Internacional y de forma puntual del Programa del Diploma.

Los Colegios de Alto Rendimiento son entidades del estado, de tipo internado, creados para atender las necesidades de estudiantes con alto desempeño en sus colegios de procedencia y recibir una educación de calidad; así, según la Resolución Ministerial N° 274-2014- MINEDU (Ministerio de Educación) se crea el “modelo de servicio educativo para la atención de estudiantes con destacado desempeño” con el objetivo de impulsar una educación de excelencia con calidad y equidad dirigido a estudiantes de educación secundaria que demuestren una alto desempeño académico, artístico y/o deportivo otorgándoles la oportunidad que en el séptimo ciclo (cuarto y quinto grado de secundaria) de la Educación Básica Regular, desarrollen un proceso formativo de gran rigor y exigencia académica (impartir el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional) que les permita desarrollar sus potencialidades. El horario escolar se imparte de lunes a viernes; sin embargo, la mayoría de los estudiantes permanece los fines de semana en el COAR, ya que proceden de lugares alejados del centro educativo.

El grupo de estudiantes es muy diverso, tanto en el nivel socioeconómico (desde el nivel socioeconómico NS A hasta el NS E), cultural (estudiantes procedentes de etnias nativas como los Awajun, etnia nativa originario del Amazonas), religión (católicos, adventistas, evangélicos) y lugar de procedencia (urbano-rural). La formación en el COAR comprende un periodo de 3 años. Los estudiantes ingresan al tercer año después de haber alcanzado una vacante, es decir, después de aprobar el proceso de admisión que consiste en rendir un examen nacional y una entrevista con especialistas del MINEDU.

Con respecto a nuestro grupo de estudio, son alumnos del quinto año de educación secundaria con edades que oscilan entre 16 y 17 años; como se mencionó en el capítulo anterior el Programa del Diploma tiene una duración de dos años de estudio; es decir que a estudiantes de cuarto y quinto año de secundaria se les imparte las asignaturas que propone el Programa del Diploma. Con respecto a nuestro objeto matemático derivada, se desarrolla, en un principio, a finales del cuarto año, las tres últimas semanas de noviembre, abordándose temas como la interpretación geométrica de la derivada, límites, reglas de derivación, derivada como pendiente en un punto de la función, recta tangente y normal y regla de la cadena. Durante las primeras cuatro semanas del quinto año se realiza una revisión de lo visto en cuarto año y, además, se desarrolla los criterios de la primera y segunda derivada, el comportamiento y relación de sus gráficas. Finalmente, se aborda aplicaciones de la derivada, específicamente problemas de optimización y cinemática.

El sistema de trabajo en el COAR hace énfasis en la indagación, valores y atributos desde el enfoque del Bachillerato Internacional, los materiales y recursos que los estudiantes utilizan para la asignatura incluye laptops, por lo general, los estudiantes traen sus propios equipos, salvo las calculadoras de pantalla gráfica.

Las laptops que cuentan los COAR son muy pocas y con muchos años de uso, oscilan entre 8 a 6 años de antigüedad, por lo general, se les otorga a aquellos estudiantes de extrema pobreza. También se cuenta con las calculadoras de pantalla gráfica, proyectores para presentar la clase, una biblioteca equipada, que favorece la investigación; además trabajamos con plataformas virtuales de Google Workspace, como el Classroom, Meet, Drive, formularios, etc. El Classroom es utilizado por los docentes-estudiantes, como repositorios de materiales, tales como guías, diseños metodológicos, libros de consulta, videos, etc. Así como para asignar algunas tareas o trabajos de investigación. Con respecto a la cantidad de estudiantes, en quinto año son 82 estudiantes; sin embargo, los matriculados al Programa del Diploma en la asignatura de Matemáticas (Análisis y Enfoques, nivel medio) son 43, ellos están distribuidos en dos secciones de 20 y 23 estudiantes.

1.4.2.2 Fase 2: La concepción y el análisis a priori. En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones, para nuestro trabajo de investigación las definiremos en el capítulo de la experimentación.

Estas son las variables de comando que el investigador percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando:

- Variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase.

Godino et al. (2013) se refiere en torno al análisis a priori:

> Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos:
>
> - Se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
>
> - Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor.
>
> - Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje. (p.8)

Para nuestra investigación, tomaremos en cuenta las variables micro didácticas que serán definidas en cada secuencia de actividades.

1.4.2.3 Fase 3: Experimentación Es la fase de la realización de la ID se lleva a cabo la acción investigador-profesor-observador con los estudiantes investigados. De Faria (2006) sostiene que la experimentación supone:

• La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;

• El establecimiento del contrato didáctico;

• La aplicación de los instrumentos de investigación;
• El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

En esta fase se define previamente los sujetos de estudio, así como las actividades a realizar para la recolección de datos, además se detallan los medios e instrumentos a utilizar. Esto se explicará en el capítulo de experimentación.

1.4.2.4 Fase 4: Análisis a Posteriori y Evaluación. Según De Faria (2006) señala que en esta última fase de la ID se recolectan los datos de la experimentación, como las observaciones y las producciones de los estudiantes. Estos datos se completan con otros mediante el uso de la metodología externa, como cuestionarios, entrevistas individuales o pequeños grupos en el aula.

En cuanto a la validación, Artigue et al. (1995) sostiene: “la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación”. (p. 48)

Esta comparación es entre los comportamientos esperados, con los que sucedieron realmente durante la clase.

Para nuestro trabajo, en esta fase adaptaremos la tabla de campos de problemas propuesto en Pino-Fan (2013) que se mostró en la figura 2 con la finalidad de organizar, relacionar y sintetizar los registros de representación semiótica que utilizan los estudiantes y los tránsitos que hacen entre ellos.

1.4.3 Resumen de la aplicación de la ID en nuestra investigación

Dado lo amplia que es la metodología de la ID y para evitar confusión, proponemos un esquema a modo de hacer un resumen de las fases de la ID que aplicaremos en nuestra investigación. Esto lo plasmamos en la tabla 3.

Tabla 3

Fases de la ID en nuestra investigación

Fases	Dividen	Contiene
Análisis Preliminar	A. Epistemológico	• Estudio histórico de la derivada. Análisis de los libros de Apóstol (2001) y Larson y Edwards (2011).
	A. Cognitivo	Investigaciones de referencia, sobre las dificultades y errores que cometen los estudiantes sobre la derivada
	A. Didáctico	• Análisis del libro: Mathematics: Analysis and Approuches, Standar Level, trabajo de Awada et al. (2022). • Malla curricular del BI
	Campo de las restricciones.	• Estudiantes entre 16-17 años. • Cursan el quinto año de secundaria. • Colegio COAR San Martín. • Cantidad de estudiantes :43
Concepción y análisis a priori	Variables micro didácticas (solo se tomará en cuenta)	Secuencias de actividades
Experimentación	Se define los sujetos de estudio	Muestra:4
	Aplicación de las actividades	En aula
Análisis a Posteriori y Evaluación.	Síntesis del tránsito de los registros que realizan los estudiantes	Tabla adaptada de Pino–Fan (2013)

Capítulo II: Estudio de la Derivada

En este capítulo abordaremos el estudio de la derivada desde un aspecto epistemológico, histórico y didáctico. Haremos una revisión de la evolución histórica del concepto derivada a lo largo del tiempo y los aportes de diversos matemáticos, Posteriormente abordaremos el aspecto didáctico, para esto, analizaremos un texto que desarrolla el tema de la derivada desde la perspectiva del Bachillerato Internacional. Finalmente se hará una revisión de problemas tipo que proporciona un Banco de Preguntas (Question Bank), y algunas preguntas de exámenes pasados desde la perspectiva de la TRRS.

2.1 Aspectos Históricos y Epistemológicos del Concepto de la Derivada

Según Ramírez (2009) refiere que la historia y epistemología de la función derivada como parte del cálculo, dan cuenta de la complejidad y vaivenes que a lo largo de veinte siglos ha ido desarrollando nuestro objeto matemático. Una de estas complejidades que presenta nuestro objeto de estudio es el lenguaje, como el uso de la simbología, las representaciones (internas y externas), los contextos de aplicación, las interpretaciones sintácticas y semánticas, así como las relaciones enseñanza- aprendizajes; por lo expuesto, Ramírez (2009) manifiesta que la complejidad del objeto derivada debe ser abordado desde cuatro dimensiones: histórica, epistemológica, la cognitiva y la didáctica; sin embargo, para algunos investigadores como Artigue (1995, como se citó en Ramírez, 2009) manifiesta que se debe abordar en tres dimensiones, ya que considera a la historia y la epistemología como una sola dimensión.

En la misma línea, Ramírez (2009) afirma que los griegos se plantearon cuatro problemas: el de la velocidad, recta tangente, área bajo una curva, y máximos y mínimos, que al quedar resuelto en el siglo XVI y XVII dieron luz a la función derivada.

Para comprender la evolución histórica de la derivada, retomamos el trabajo de Pino-Fan (2013) que presentamos en nuestro capítulo 1, donde identifica nueve configuraciones epistémicas a lo largo de la evolución histórica de la derivada y las organiza en tres problemáticas generales: 1) problemas de las tangentes, 2) problemas de máximos y mínimos y 3) problemas sobre velocidades.

Con respecto al problema de las tangentes, Euclides, Apolonio y Arquímedes marcaron los inicios de la derivada; así pues, según refiere Pino-Fan (2013) Euclides fue el primero en introducir la noción de recta tangente en su libro III de su gran obra Los Elementos. Así tuvieron que pasar muchos siglos para volver abordar el problema de las tangentes desde otra perspectiva, como es el cálculo.

Pasaron muchos años, hasta finales del siglo XVI y principios del XVII para que los trabajos de Kepler activen las ideas referidas a la noción de la derivada. Kepler abordó un problema sobre aplicación de máximos y mínimos, tal como refiere Duran (1996, como se citó en Pino-Fan, 2013) el problema trata sobre la cosecha de uvas y su almacenamiento en barriles; para esto Kepler estudió la forma de los barriles, de tal modo que, con la menor superficie, o menor cantidad de madera en su elaboración, tuviera el mayor volumen, el cual pudiera albergar la mayor cantidad de vino.

Para resolver este problema, Kepler empleó un método que es considerado el primer antecedente de la derivada, del que usamos en la actualidad, para hallar los valores extremos. De manera puntual, Kepler buscó el punto donde la variación en el volumen producida por una variación en las dimensiones fuera prácticamente nula; en términos actuales buscó los puntos que anulaban la derivada de la función que medía el volumen, lo que llamamos números críticos.

El siglo XVII fue crucial para el surgimiento y consolidación del Cálculo, el desarrollo del Álgebra y el descubrimiento de la Geometría Analítica jugaron un rol crucial en el desarrollo del cálculo diferencial.

Los problemas de diferenciación abordan los tres problemas mencionados líneas arriba: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. El abordar estos problemas en este periodo sentó las bases sobre la idea de infinitesimal que más tarde se desarrollaría en el cálculo diferencial de Leibniz y el cálculo de fluxiones de Newton.

El primer matemático en este periodo que dio notables aportes a nuestro objeto matemático, tal como afirma Pino- Fan (2013) fue Descartes y su método de las tangentes. Si bien es conocido que su obra cumbre fue la creación de la geometría analítica, según Collette (1993, como se citó en Pino-Fan, 2013) Descartes diseñó tres métodos para el cálculo de las normales, el primero es conocido como el *método del círculo,* el cual consistía en trazar tangentes a las líneas curvas mediante la construcción previa de la recta normal. El segundo método consistía en hallar la tangente a una curva considerándola como una posición particular de la recta secante que gira en torno al pie de la tangente hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva lleguen a coincidir. El tercer método consiste en que la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto de corte a la curva coincida con el primero, esta es la idea actual que se tiene con respecto a la derivada en un punto. Si bien Descartes presentaba interés por los métodos infinitesimales, no participó de ello, esto debido a que todo su trabajo se basaba en aspectos netamente algebraicos, descartando la noción de límite o infinitésimo por aún no tener un fundamento teórico consistente.

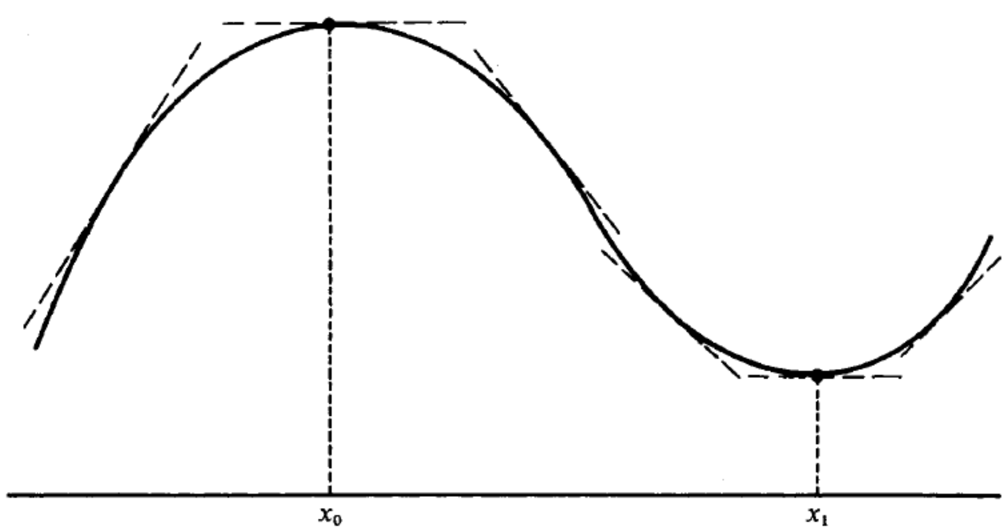
En la misma línea Fermat desarrolló el método de los extremos, teniendo como base los trabajos de los matemáticos griegos como Euclides, Apolonio y Arquímedes. Según Gonzales (2008, como se citó en Pino-Fan, 2013) Fermat realiza cinco trabajos sobre mínimos y máximos.

En su primer libro llamado *Methodus,* libro puramente algorítmico, desprovisto de demostraciones introduce la técnica de *adigualdad de dos expresiones,* este término lo había utilizado Diofanto y se refería en hacer aproximar un número racional lo más cercano a este sea posible. También propone un ejemplo en la aplicación de máximos y mínimos en el trazado de tangentes a curvas como parábola.

Según Apóstol (2001) la idea de Fermat, con respecto a los máximos y mínimos, es básicamente muy simple, tal como se muestra en la figura 7.

Figura 7

Tangentes a la curva



Nota. Tangentes horizontales en los valores extremos Tomado de Calculus (p. 192) volumen I. Por Apóstol, 2001, Reverté

Se observa que, en cada uno de estos puntos, la curva tiene una dirección definida, la cual está dada por la tangente, Las tangentes se evidencian en el gráfico mediante trazos. Fermat observó que en aquellos puntos en que la curva presenta un máximo o mínimo, como x_0 y x_1 en la figura, la tangente ha de ser horizontal. Por tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce al de localizar las tangentes horizontales.

El trabajo de Fermat y de otros matemáticos de la época posteriores a él como Torricelli, Roverbal y Barrow, entre otros, sentaron las bases para el desarrollo del cálculo diferencial e integral, que, de forma independiente, Newton y Leibniz trabajaron de tal modo que los problemas que describimos líneas arriba, que eran irresolutos desde los griegos, fueran, con sus aportes y nuevos métodos una cuestión rutinaria.

Si bien a ambos se les considera los fundadores del cálculo, sus trabajos referidos al Cálculo Infinitesimal resultan muy diferentes; así, según Pino-Fan (2013) Newton trabajó elementos infinitesimales y toma en consideración los trabajos de Fermat y Barrow; aunque luego va tomando su postura hacia la concepción mecánica, utilizando términos como fluentes y fluxiones, el primero referido a la variación de una cantidad con respecto del tiempo y el segundo a la variación de la velocidad respecto al tiempo, lo que más tarde se conocería y se conoce como la derivada; de ahí que su trabajo se le reconozca como el cálculo de fluxiones.

Por otro lado, Leibniz en su trabajo destaca por su aporte simbólico y analítico siendo las diferencias infinitesimales y suma infinitamente pequeñas la base del cálculo diferencial. El aporte de Leibniz es muy valioso, porque introduce por primera vez el término *cálculo diferencial* y proporciona los métodos que hasta ahora conocemos (reglas de derivación), para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, acompañado de aspectos geométricos como tangentes, máximos y mínimos y puntos de inflexión.

2.2 Estudio del Objeto Matemático: la derivada.

Los aspectos que incluyen el estudio de nuestro objeto matemático lo abordaremos desde los conocimientos propuestos por los libros de Apóstol (2001) y Larson y Edwards (2011).

En primer lugar, presentamos la propuesta de Apóstol (2001) donde primero da alcances de un problema de velocidad mediante un ejemplo. En este ejemplo utiliza conceptos como velocidad media, cociente incremental, y velocidad instantánea. Luego procede a definir la derivada:

Definición: Sea f definida por lo menos en un intervalo abierto (a, b) del eje x. Se elige un punto x en ese intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h$ pertenezca también a (a, b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + h$. El cociente representa la variación media de f en el intervalo que une x a $x + h$.

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica con el símbolo $f'(x)$ (se lee "f prima de x"). (Apóstol, 2001, p. 195)

Como se evidencia en este tramo del libro y según la TRRS utiliza de forma predominante un registro de lengua natural, habiendo algunos elementos del registro algebraico, para las notaciones y expresiones, aunque de manera muy esporádica. Sin embargo, en el siguiente párrafo define la derivada de manera formal.

Definición. La derivada $f'(x)$ esta definida por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

con tal que el límite exista. La función $f'(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x.

Como apreciamos, el autor emplea la existencia del límite y utiliza la derivada con otros términos como coeficiente de variación; en este caso, al calcular este límite da paso a una nueva función, $f'(x)$. A este proceso se le conoce como derivación, donde f' es la primera derivada en un intervalo abierto dado, en f. Del mismo modo, a partir de f' se vuelve a calcular el límite y da paso a f'' que es la segunda derivada de f. De forma análoga se puede determinar la derivada n-sima de f a partir de $f^{(n-1)}$.

Ahora mostraremos algunos ejemplos que utiliza en Apóstol (2001) para determinar reglas de derivación a partir de la definición de la derivada:

Ejemplo 3. *Derivada de una función potencial de exponente entero positivo.* Consideramos el caso $f(x) = x^n$, siendo n un entero positivo. El coeficiente de diferencia es ahora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para estudiar este cociente al tender h a cero, podemos proceder de dos maneras o por la descomposición factorial del numerador considerado como diferencia de dos potencias n-simas o aplicando el teorema del binomio para el desarrollo de $(x+h)^n$…

En álgebra elemental se tiene la identidad:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Si se toma $a = x + h$ y $b = x$ y dividimos ambos miembros por h, esa identidad se transforma en

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1}(x+h)^k x^{n-1-k}.$$

En la suma hay n términos. Cuando h tiende a 0, $(x+h)^n$ tiende a x^k, el k-ésimo término tiende a $x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$, por tanto, la suma de los n términos tiende a nx^{n-1}. De esto resulta que

$f(x) = nx^{n-1}$ para todo x. (Apóstol, 2001, p. 197 y 198).

En este ejemplo que propone Apóstol (2001) evidenciamos que aplica el cociente de diferencias. A partir de ahí, para calcular el límite cuando h tiende a cero, utiliza el método de descomposición de factores. De esta manera calcula de forma implícita el límite cuando h tiende a cero y obtiene la derivada de la potencia.

Al realizar la revisión de este libro, apreciamos que existe una preponderancia de tratamientos en el registro algebraico, dando las explicaciones en el registro lengua natural para justificar los procesos algebraicos, lo que sugiere una conversión entre ambos registros.

Luego, con respecto a la interpretación geométrica de la derivada, Apóstol (2011) considera lo mostrado en la figura 8.

Figura 8

Interpretación Geométrica de la derivada y las pendientes de recta

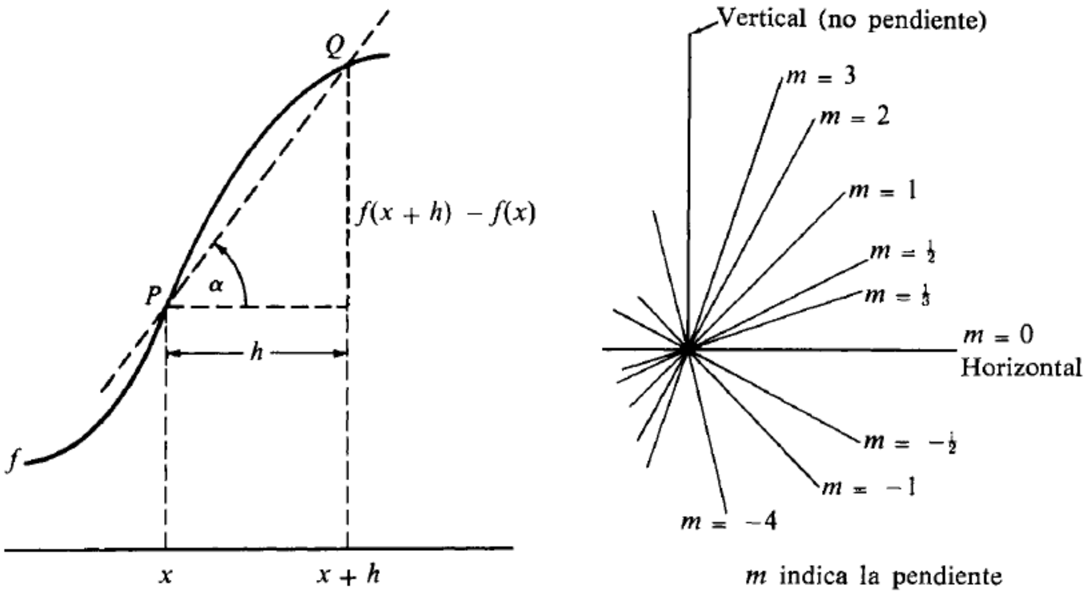


FIGURA 4.4 *Interpretación geométrica del cociente de diferencia como tangente de*

FIGURA 4.5 *Rectas de pendiente distinta.*

Nota. Tomado de Calculus (p. 207), volumen I, por Apóstol, 2001. Editorial Reverté S.A.

Se observa en la figura 4.4, que los puntos P y Q tienen como coordenadas $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. Luego en el triángulo rectángulo de ángulo $\propto$ y de hipotenusa PQ, el cateto opuesto al ángulo $\propto$ es $f(x+h) - f(x)$ y el cateto adyacente tiene como medida a h. Luego, el cociente de diferencias es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

Esta expresión representa la tangente del ángulo $\propto$, la cual es la pendiente de la tangente a la curva entre P y Q y brinda un método para valorar la inclinación de esa línea.

En la figura de la derecha (4.5), se muestran ejemplos de rectas con diversas pendientes; así, si es una recta horizontal su pendiente es 0, por ende $tg \propto = 0$.

En general si el ángulo $\propto$ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, la pendiente aumenta su valor siendo positiva y como consecuencia la recta es ascendente (de izquierda a derecha). Caso contrario, si el ángulo $\propto$ varía entre $\frac{\pi}{2}$ y π, la pendiente aumenta su valor, pero entre números negativos, llegando casi a tener valor 0; como consecuencia su pendiente es negativa y las rectas serán de tipo descendente.

Con respecto a la expresión que representa el cociente de diferencias, el autor refiere, que cuando h tiende a 0, el límite de la expresión tiende a $f'(x)$. En la interpretación geométrica, el punto P es fijo, mientras que el punto Q se mueve hacia P a lo largo de la curva, y la recta PQ se mueve cambiando su dirección, de tal modo que la tangente del ángulo $\propto$ tiende al límite $f'(x)$. La recta que pasa por P que tiene esta pendiente se denomina la tangente a la curva en P.

Siguiendo la línea de la TRRS, en este apartado, el autor trabaja con registro gráfico, y luego realiza la conversión al registro natural, si bien se apoya de algunas expresiones y utiliza notaciones y simbologías, las cuales son para explicar e interpretar los gráficos, no realiza tratamientos en el registro algebraico.

Por otro lado, Larson y Edwards (2010) definen a la derivada de una función mediante el límite del cociente incremental o de diferencias, así:

La derivada de f en x esta dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

Siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x. (Larson y Edward, 2010, p. 99)

El autor introduce la notación Δx que se refiere al incremento en x; mientras que la expresión del numerador se refiere al incremento en y. Esta nueva función derivada proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Por otro lado, con respecto a la regla de la cadena, Larson y Edward (2010) presentan el siguiente teorema:

Teorema 2.10, la regla de la cadena

SI $y = f(u)$ es u a función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

O su equivalente

$\frac{d}{dx}[f(g(x)] = f'(g(x))g'(x)$. (Larson y Edwards, 2010, p.131)

Teniendo como base al autor, realiza la demostración de la siguiente forma.

Sea $h(x) = f(g(x))$, se va a demostrar que para $x = c$, entonces $h'(c) = f'(g(c)).g'(c)$.

Se supone $g(x) \neq g(c)$, para todos los valores de x distintos de c, por definición de derivada, se tiene:

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(g(c)) - f(c)}{x - c}$$

Luego como $g(x) \neq g(c)$, se multiplica y divide por $g(x) - g(c)$ y agrupando convenientemente, se tiene:

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(g(c)) - f(c)}{g(x) - g(c)} \times \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Aplicamos propiedades de los límites,

$$h'(c) = \left[\lim_{x \to c} \frac{f(g(c)) - f(c)}{g(x) - g(c)}\right] \times \left[\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right]$$

Se deduce:

$$h'(c) = f'(g(c)) \times g'(c)$$

Con respecto a la TRRS, se evidencia el uso del registro algebraico y lengua natural, hay coordinaciones entre ellos y por lo expuesto realiza tratamientos en el registro algebraico.

Con respecto al criterio de la primera derivada, Larson y Edward (2010) presentan el siguiente teorema.

Teorema 3.6 Criterio de la primera derivada.

Sea c un punto crítico de una función que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasififcarse como sigue:

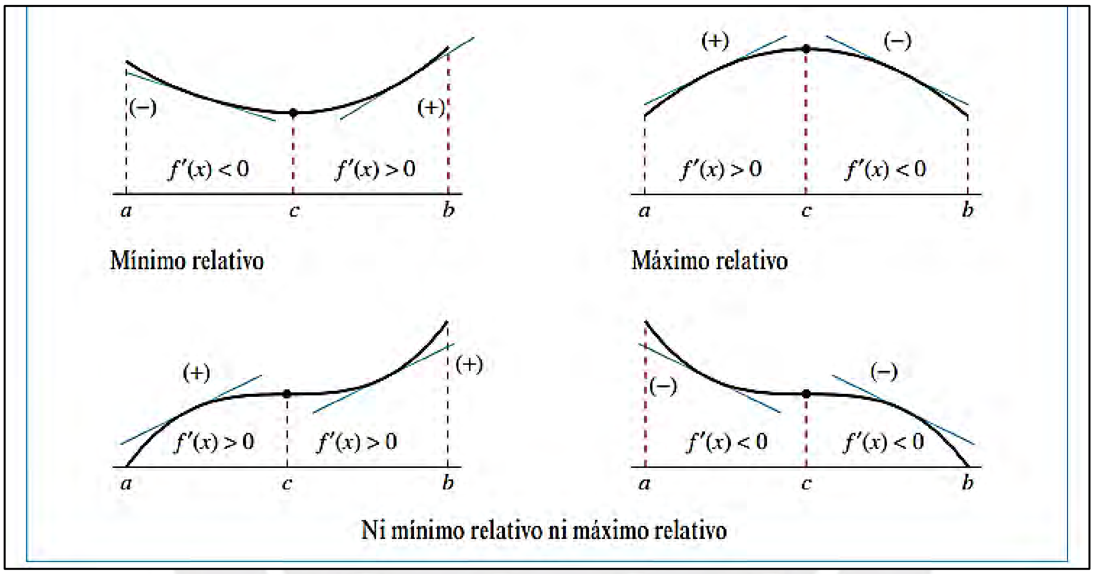
1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f'(c))$.

2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f'(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un máximo relativo ni un mínimo relativo. (p.181)

Luego los autores presentan unas gráficas donde se configuran los casos del teorema, las mostramos en la figura 9.

Figura 9

Rectas tangentes por debajo o encima de la función



Nota. Tomado de *Cálculo 1 de una variable* (p. 181), novena edición. Por Larson & Edwards, 2010, Mc Graw Hill.

Observamos que en el primer caso, la función derivada es negativa y cuando esto pasa la función es creciente en el intervalo (a, c); mientras que en el intervalo (c, b) la función derivada es positiva y su función es creciente en ese intervalo. Al darse esas condiciones se puede concluir que va a existir un mínimo relativo cuando el valor de x es c. Ocurre lo contrario en el segundo caso, ya que, la gráfica, primero pasa de una función creciente, cuando $f'(x) > 0$, a una decreciente, cuando $f'(x) < 0$; en tal sentido, la función tiene un valor máximo relativo cuando x es c.

Finalmente en el tercer caso, si no hay un cambio de signo en la función derivada en los intervalos mencionados, la función no tendrá ni máximos ni mínimos; esto es porque la función o es creciente o es decreciente en todo el intervalo (a, b).

Desde la TRRS observamos que el texto trabaja de manera específica los registros lengua natural, algebraico, en el uso de notaciones y simbologías, y el registro gráfico.

2.3 Enseñanza de la Derivada en los Textos del Bachillerato Internacional

Para conocer cómo se presenta la derivada en el Programa del Diploma del Bachillerato Internacional, haremos una revisión del libro de matemáticas, Mathematicas: Analysis y Approaches standar level de la editorial Oxford. Los autores del texto son Awada, Buchanan, Chang, Kemp, La Rondie, Stevens y Thompson (2019). Elegimos este libro, ya que la red de Colegios de Alto Rendimiento lo utiliza en la planeación de los diseños metodológicos, para la enseñanza y aprendizaje del concepto derivada en los estudiantes de los últimos años de educación básica, entre 16 y 17 años. Los autores mencionados, presentan la derivada en el capítulo 5 con el título, *Medir el cambio: derivación.* En esta sección realizaremos diversos análisis de la propuesta del texto, tomando como referencia la TRRS haciendo énfasis en los tratamientos y conversiones.

A continuación, mostramos en la tabla 4 como presenta el concepto de la derivada Awada et al. (2019).

Tabla 4

Presentación de la derivada en el libro del Bachillerato Internacional de Oxford

Sección	Título	Páginas
5.1	Límites y convergencia	216
5.2	La función derivada	222
5.3	Reglas de derivación	234
5.4	Interpretación gráfica de la primera y segunda derivada	240
5.5	Aplicación del cálculo diferencial: optimización y cinemática.	260

Nota. Adaptado de del texto de Awada et al. (2019). Editorial Oxford.

Como se observa en la tabla, los autores abordan la noción de límite y convergencia; sin embargo, para nuestro caso solo haremos una revisión a partir de la sección 5.2.

La introducción del capítulo se muestra en la figura 10, donde presenta unas imágenes de contexto real, en la que se pretende despertar el interés de los estudiantes, complementando con preguntas sobre cada imagen.

Figura 10

Introducción al capítulo de la derivada por el libro de Mathematicas: Analysis y Approaches

5 Measuring change: differentiation

The motion of people and objects, a company's profits and losses, and how rates of change of two phenomena are related may change from moment to moment. This chapter is about differential calculus: a way of measuring instantaneous change. Differential calculus provides a framework for you to model, interpret and make predictions about real-life problems. Calculus was first formulated in the 19th century and today it is perhaps the most important area of mathematics which aids the development of modern science.

Concepts

- Change
- Relationships

Microconcepts

- Limit of a function at a point
- Derivative function as the gradient of a curve, and as a rate of change
- The power rule for differentiating polynomial functions
- Tangents and normals to curves
- Differentiation rules: chain, product and quotient rules
- Maxima, minima and points of inflexion
- Kinematics problems
- Optimization

How is a runner's speed measured with respect to time?

At which instant must a rocket make its re-entry into the Earth's atmosphere, or risk being caught in the Earth's orbit?

How can a company maximize its profits and minimize its losses?

What are the dimensions of a cylindrical object for maximum volume using minimum material?

How does the rate at which water flows out of a reservoir affect the rate of change of the water depth in the reservoir?

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 214), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

En la figura 10, los autores introducen situaciones de contexto extra matemático, dando preponderancia al registro lengua natural; el propósito de esta introducción es generar expectativa por el capítulo a tratar, busca que los estudiantes se conecten con la importancia del cálculo diferencial y sus aplicaciones.

Posteriormente, en la figura 11 del texto de Awada et al. (2019) proponen una actividad preliminar que busca activar los saberes previos de los estudiantes, los cuales le servirán para desarrollar los conceptos referidos a la derivada.

Figura 11

Activación preliminar

Before you start

You should know how to:

1 Find the gradient of a line passing through points A(1, 2) and B(0, −3).

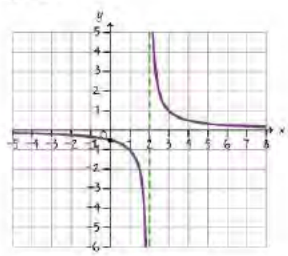
eg gradient of (AB) is $\frac{-3-2}{0-1} = 5$

2 Use rational exponents to rewrite expressions in the form cx^n.

eg $\frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$; $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$

3 Sketch graphs of functions, clearly labelling any intercepts and asymptotes

eg $y = \frac{1}{x-2}$



4 Find the sum of an infinite geometric series.

eg $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Since $|r| < 1$, $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Skills check

Click here for help with this skills check

1 Find the gradient of a line passing through each pair of points:

a A (0, 0) and B (−4, −3)

b C $\left(\frac{-3}{4}, 2\right)$ and D (4, −1)

2 Use rational exponents to rewrite expressions in the form cx^n.

a $7\sqrt{x}$ b $\frac{1}{x^2}$ c $\frac{8}{5\sqrt{x^3}}$

3 Sketch the graph of $f(x) = \frac{2}{x+3}$.

4 Find $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 215), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

Consideramos que los tres primeros puntos, de ambas columnas, de la figura 11 se relacionan con los conceptos a tratar más adelante en la derivación. El primer aspecto se refiere a determinar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos, la cual se va a relacionar con la derivada de una función en un punto dado.

El segundo ejercicio aborda las propiedades del álgebra, de manera específica, la teoría de exponentes; concordamos con la inclusión de este saber previo, ya que los estudiantes lo van a requerir cuando realicen tratamientos en el registro algebraico, de forma específica, cuando utilicen las reglas de derivación.

El tercer punto, está orientado a que los estudiantes conozcan el gráfico de una función y sus características, ya que estará ligado con las gráficas de la primera y segunda derivada. Pero también está orientado hacia el concepto de límite (cálculo de asíntotas horizontales) En este punto, vemos preponderancia del registro gráfico haciendo énfasis en las rotulaciones de las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

El cuarto punto, no lo procedemos a analizar ya que esta fuera del alcance de nuestra investigación. Además, hay que añadir que el texto en el idioma inglés lo seleccionamos, porque la versión en español aún no se encontraba disponible.

Del mismo modo, creemos que los conocimientos previos abordados fueron insuficientes faltando algunos conceptos que consideremos que los estudiantes requieren para el desarrollo de la derivada, tal como mencionó Pino-Fan (2013) en su tesis doctoral sobre la evolución histórica de la derivada en donde lo organiza en tres problemáticas generales: 1) problemas de las tangentes, 2) problemas de máximos y mínimos y 3) problemas sobre velocidades (pp. 107). Como vemos en estos antecedentes, que se revisaron en la dimensión epistémica - histórica, el texto no incluye estos aspectos en los conocimientos previos del concepto de la derivada.

A continuación, los autores, proponen una situación, que inicia con una información sobre el velocista y récord olímpico y mundial Usain Bolt. Esta situación de contexto extra matemático busca que el estudiante relacione este problema con la pendiente de una recta secante visto como la razón de cambio promedio. Presentamos, la figura 12.

Figura 12

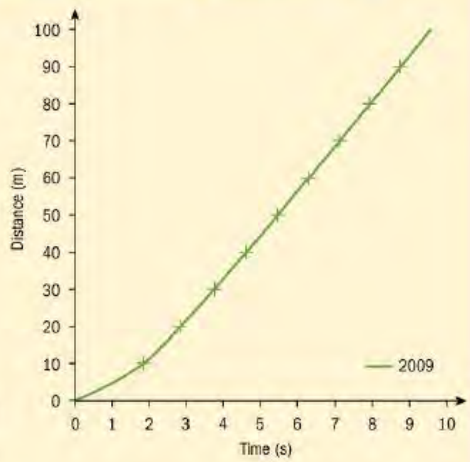
Situación indagatoria sobre razón de cambio promedio

Investigation 4

The Jamaican sprinter Usain Bolt was the first person, since speed times were fully automated, to hold both the 100 m and 200 m world records at the same time.

The data shows the time, in seconds, which had elapsed when Usain Bolt passed every 10 m mark in the 100 m final at the World Championships in Berlin (2009).

The graph shows Bolt's time (plotted on the x-axis) against the distance he had run (plotted on the y-axis).



1 Write down what you notice about the time Bolt took to cover each 10 m distance in 2009.

2 Estimate Bolt's average running speed over the 100 m.

3 Estimate Bolt's fastest average speed over any 10 m interval in the race, and state the 10 m interval over which he achieved this.

4 **Factual** Compare Bolt's fastest speed with his average speed in that race. If you were to examine Bolt's speed at *any* point in that race, which of the two speeds you found would likely be closest to the speed that he was running at that instant?

5 **Factual** From the given information, is it possible to find his fastest speed at any particular moment in time, for example, at 3.25 s?

6 **Conceptual** What is an average rate of change between output and input values of a function?

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 222), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

Esta situación presentada en el registro lengua natural, tiene algunos valores numéricos y se apoya de un registro gráfico. Se puede notar que las marcas en el gráfico que relaciona el tiempo y la distancia puedan generar confusión, sobre todo en el valor final de 100 m. Se esperan que las posibles respuestas de los estudiantes están orientadas a que utilicen el concepto de pendiente de una recta, la cual se podría expresar en el registro algebraico. Esto se evidencia en los ítems 2 y 3.

En el ítem 4 se busca comparar la rapidez media con la rapidez en cada intervalo de 10 metros propuestos en los ítems 2 y 3. Se espera que los estudiantes comprendan que cuando los intervalos son de menor amplitud (son de menor distancia), la rapidez que se hallaría se aproximaría a la rapidez que corría en cualquier instante.

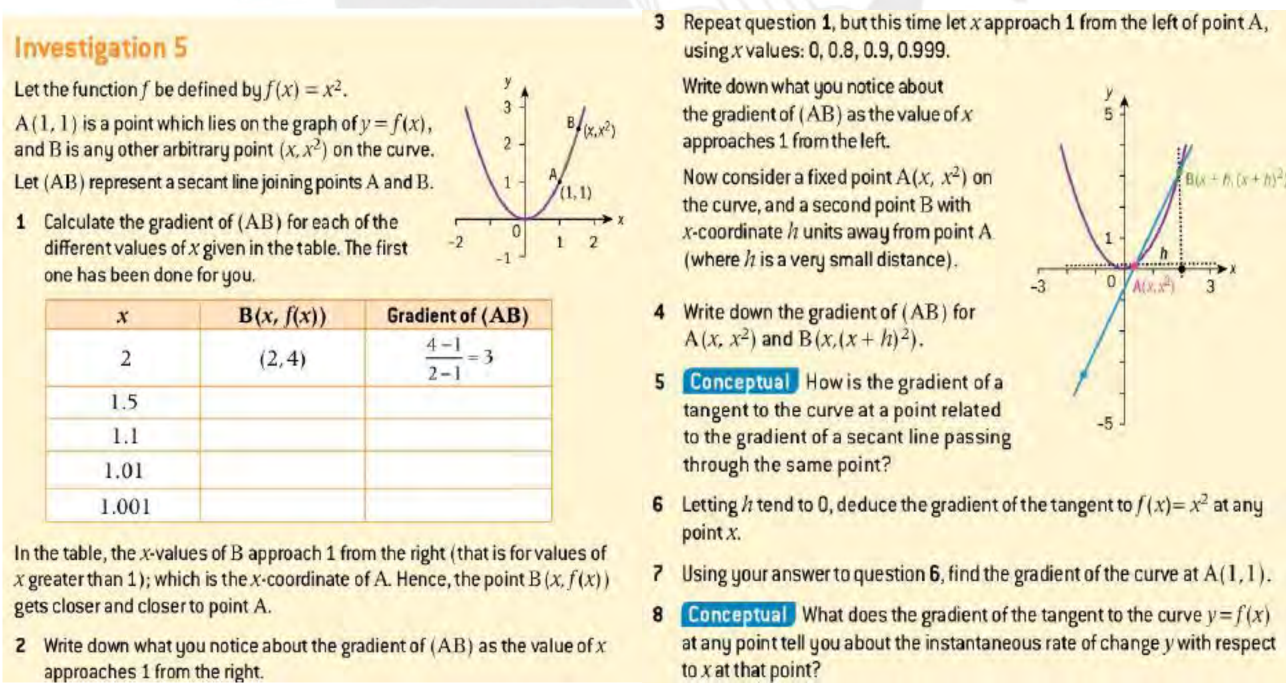
En el ítem 5 se busca que el estudiante pueda determinar la mayor rapidez en cualquier instante a partir de reconocer la gráfica (es una recta) y por lo tanto en el tramo entre 2 y 10 segundos se obtendrá la mayor rapidez.

Consideramos que la actividad investigativa es importante, ya que busca que los estudiantes se identifiquen y relacionen velocidad promedio con la pendiente de una recta; sin embargo, creemos que el gráfico puede generar algunas confusiones al momento de determinar estas razones de cambio promedio.

A continuación, los autores formalizan la idea de que la razón de cambio promedio, "Therefore, the average rate of a change of a function f between the points x_1 and x_2 is the gradient of the line segment joining $(x_1, f(x_1))$ and $(x_2, f(x_2))$" (Awada et al., 2019, p. 223), esta expresión en su mayoría propuesta en el registro lengua natural y el registro algebraico.
Previamente a la definición de la derivada, los autores, presentan un gráfico y una secuencia de preguntas donde identifican claramente la recta secante y la recta tangente en una función no lineal. En esta actividad investigativa se presenta la función cuadrática $f(x) = x^2$ y su gráfico, etiqueta dos puntos en el gráfico A y B, que es donde pasa la recta secante $[AB]$. Mostramos en la figura 13, la situación planteada por el texto.

Figura 13

Situación indagatoria sobre la pendiente de la recta tangente



Investigation 5

Let the function f be defined by $f(x) = x^2$.

A(1, 1) is a point which lies on the graph of $y = f(x)$, and B is any other arbitrary point (x, x^2) on the curve.

Let (AB) represent a secant line joining points A and B.

1 Calculate the gradient of (AB) for each of the different values of x given in the table. The first one has been done for you.

x	$B(x, f(x))$	Gradient of (AB)
2	(2, 4)	$\frac{4-1}{2-1} = 3$
1.5		
1.1		
1.01		
1.001		

In the table, the x-values of B approach 1 from the right (that is for values of x greater than 1); which is the x-coordinate of A. Hence, the point $B(x, f(x))$ gets closer and closer to point A.

2 Write down what you notice about the gradient of (AB) as the value of x approaches 1 from the right.

3 Repeat question **1**, but this time let x approach 1 from the left of point A, using x values: 0, 0.8, 0.9, 0.999.

Write down what you notice about the gradient of (AB) as the value of x approaches 1 from the left.

Now consider a fixed point $A(x, x^2)$ on the curve, and a second point B with x-coordinate h units away from point A (where h is a very small distance).

4 Write down the gradient of (AB) for $A(x, x^2)$ and $B(x, (x+h)^2)$.

5 **Conceptual** How is the gradient of a tangent to the curve at a point related to the gradient of a secant line passing through the same point?

6 Letting h tend to 0, deduce the gradient of the tangent to $f(x) = x^2$ at any point x.

7 Using your answer to question **6**, find the gradient of the curve at A(1, 1).

8 **Conceptual** What does the gradient of the tangent to the curve $y = f(x)$ at any point tell you about the instantaneous rate of change y with respect to x at that point?

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 224), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

En esta actividad se ven involucrados varios registros como el algebraico, la lengua natural, el gráfico y el tabular, lo cual es importante para la coordinación entre los registros, tal como lo manifiesta Duval (2006)

> En otras palabras, la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto. (p.145)

Según la actividad de la figura 13, Awada et al. (2019) buscan, a partir del registro tabular, aproximar los valores de la abscisa del punto B (punto móvil) a la abscisa del punto A (punto fijo) por ambos lados. En la última columna de la tabla determinan su pendiente en cada par de puntos de estas rectas secantes. Luego en la pregunta 2 y 3 se espera que los estudiantes describan que la recta secante se aproxima a la recta tangente en el punto A, por ende, la pendiente de la recta secante también se aproxima a la pendiente de la recta tangente.

En la pregunta 4, los autores introducen el uso de simbologías, para llegar a una generalización, en este caso pretenden que el estudiante determine la pendiente de la recta secante con los puntos $A(x, x^2)$ y $B(x+h, (x+h)^2)$. La expresión que se desea es $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$. En este ítem se evidencia el uso de tratamientos en el registro algebraico, los cuales según Duval (2006) manifiesta:

> Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas. Es más, lo que importa es el tratamiento que es el que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro (economía de medios, más potencia para la generalización, o más intuitivo...) para resolver el problema dado. (p.149)

Con la pregunta 5 y 6, se busca relacionar con la pendiente de la recta secante con la pendiente de la recta tangente, para esto en la expresión $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ se hace tender h a cero, de tal modo que coincida con la pendiente de la recta tangente. Posteriormente, los autores mencionan a esta relación como el límite de la pendiente de la recta secante cuando hacemos que h se aproxime a cero.

Luego, vinculan a la pendiente de la recta tangente con la razón de cambio instantánea de una función en un punto dado, tal como mostramos en la figura 14.

Figura 14

Razón de cambio instantánea como pendiente de la recta tangente

> The gradient of the tangent to the curve at A is the instantaneous rate of change of $f(x)$ at A. This instantaneous rate of change is called the **derivative** of f with respect to x.
>
> We sometimes use different notation for the derivative function:
>
> - $f'(x)$ (this is called "f dash of x" or "f prime of x"); or
> - $\frac{dy}{dx}$ (meaning "the derivative of y with respect to x")

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 225), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

En esta definición sobre derivada observamos que los autores vinculan con la razón de cambio instantánea. Realizan descripciones en el registro lengua natural, apoyados en notaciones y simbologías como $f'(x)$ y la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$.

Luego, en la figura 15 que mostramos, proponen una situación indagatoria sobre la regla de derivación de la potencia x^n para cualquier número real.

Figura 15

Reglas básicas de derivación: x^n

> The power rule for differentiating x^n:
>
> If n is any real number and $f(x) = x^n$, then $f'(x) = nx^{n-1}$.

Nota. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 227), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

Esta regla básica, es expresada en el registro algebraico, y a partir de este registro se realizan tratamientos, no habiendo conversiones en los ejemplos y actividades que se proponen, lo que para Duval (2006) significa:

> … y parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento. El problema que la mayoría de los estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como el **umbral** de la comprensión. ¡La conversión de representación semiótica aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado! (p.149)

Está claro que hacer que los estudiantes cambien de registro y realicen tratamientos puede asegurar la comprensión de los conceptos referidos a la derivada. En la misma línea mostramos un ejemplo, en la figura 16, propuesto por los autores donde se evidencia tratamientos en el registro algebraico.

Figura 16

Ejemplos de derivación: regla de la potencia

Example 5

Find the derivative of each function.

a $f(x) = x^{11}$ **b** $f(x) = \frac{1}{x^4}$ **c** $f(x) = \sqrt{x}$

a $f(x) = x^{11}$	
$f'(x) = 11x^{11-1}$	Use the power rule.
$f'(x) = 11x^{10}$	Simplify.
b $f(x) = \frac{1}{x^4}$	
$f(x) = x^{-4}$	Rewrite using rational exponents.
$f(x) = -4x^{-4-1}$	Use the power rule.
$f(x) = -4x^{-5}$	Simplify.
c $f(x) = \sqrt{x}$	
$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	Rewrite using rational exponents.
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$	Use the power rule.
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Simplify.

Nota. Tratamientos en el registro algebraico. Tomado de *Mathematicas: Analysis y Approaches standar level* (p. 227), por Awada et al., 2019. Oxford University Press.

En las resoluciones de los ejemplos que propone el libro, se evidencian tratamientos en el registro algebraico. A partir de la función dada se aplican las propiedades de teoría de exponentes de los números reales, luego se reescribe la función. A continuación, se procede a derivar utilizando la regla de la potencia. También se observa un error de impresión en la resolución del ejemplo 2, ya que debió decir $f'(x)$ en vez de $f(x)$. Finalmente complementa los tratamientos realizados con explicaciones, en lengua natural, muy puntuales al lado derecho de los procesos algebraicos.

El texto propone la misma dinámica para los siguientes subcapítulos, donde aborda el desarrollo de la derivada; es decir, plantean una primera parte indagatoria/exploratoria, luego complementan con una breve información, referidos a propiedades o definiciones, esto lo plasman, por lo general, desde el registro lengua natural y algebraico y apoyados del registro gráfico según sea el caso (como ecuación de la recta tangente y norma, por ejemplo). En seguida, se presenta una batería de ejemplos resueltos, con explicaciones complementarias desde el registro lengua natural. Finalmente brindan un conjunto de actividades (los autores lo llaman "ejercicios") para que los estudiantes practiquen y se ejerciten.

Capítulo III: Teoría de Registros de Representación Semiótica

Nos referimos a la teoría de Duval por la importancia en nuestro trabajo de investigación, ya que, para la aplicación de nuestras actividades los estudiantes deberán representar diversos registros. Así Guzmán (1998) señala acerca del significado de registro:

> Un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, iconos…y estos signos están asociados de manera interna y externa. De manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica; y de manera externa, según las reglas de combinaciones en expresiones o configuraciones. En consecuencia, los registros son medio de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos. (pp. 1-2)

Además, el mismo Duval (2006) indica que para que se pueda realizar la actividad matemática, las representaciones deben ser necesariamente semióticas; cada representación semiótica proporciona un registro diferente, lo que implica tener en cuenta tanto la manera en que se utiliza como las acciones cognitivas que involucran utilizar dicho registro.

En la misma línea, Duval (2006) distingue dos aspectos muy importantes en su teoría:

> (1) La importancia de la propiedad de transformación, ya que en el desarrollo de la actividad matemática siempre se va a realizar alguna transformación de representación semiótica.
>
> Lo que importa es su propiedad de transformación porque el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas. En matemáticas los signos no son prioritarios para presentar objetos sino para sustituirlos por otros como, por ejemplo, en el cálculo.
>
> Además, esta transformación depende del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. En ese sentido no hay una “mediación semiótica” sino “mediaciones semióticas” bastante diferentes.
>
> (2) Aunque los estudiantes empleen diversos registros de representación semiótica, deben elegir solo uno, según lo que requiera la actividad; esto quiere decir, que debe haber una coordinación interna entre los registros sobre un determinado objeto matemático, la cual debe ser desarrollada por el estudiante; ya que, si esto no ocurre, por ejemplo, dos representaciones diferentes significarían dos objetos matemáticos diferentes. (p.145)

Estos dos aspectos deben trabajar unificadamente en la actividad matemática, para comprender los problemas de aprendizaje y analizar los procesos cognitivos puestos de manifiesto; estos aspectos conllevan a distinguir dos clases de transformaciones que presenta la TRRS: la conversión y el tratamiento.

3.1 Conversión

Es la transformación de una representación de un registro a la representación de otro registro sobre un mismo objeto de estudio, conservando el significado en forma total o parcial con respecto a la representación inicial. Es de carácter externo.

3.2 Tratamiento

Es la transformación que se da dentro de un mismo registro, pudiendo realizarse una secuencia de varias transformaciones. Es de carácter interno.

Así, presentamos en la figura 17, un ejemplo propuesto en el libro de Buchanan et al. (2015), sobre un problema tipo IB que cumplen con las condiciones de conversión y tratamiento.

Figura 17

Dos tipos de transformaciones: la conversión y el tratamiento

14

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	1	4	−3	2
4	2	−1	3	4

En la tabla anterior, se muestran los valores de f y g y sus derivadas en $x = 3$ y $x = 4$.

a Halle la pendiente de $(f \circ g)(x)$ cuando $x = 3$.

b Halle la pendiente de $\frac{1}{[g(x)]^2}$ cuando $x = 4$.

Nota. Tratamientos en el registro algebraico. Tomado de *Matemáticas nivel medio* (p. 119), por Buchanan et al., 2015. Oxford University Press.

En primer lugar, el problema está dado este dado en el registro tabular, luego se realiza la primera transformación: conversión, según lo solicitado en el ítem a), la pendiente $\big((f \circ g)(3)\big)'$ produce una conversión en el registro algebraico. El estudiante, en paralelo, debe comprender que la pendiente de la función compuesta evaluada en el valor de 3 es la derivada de la función compuesta para este valor de x.

Posteriormente realiza la segunda transformación: tratamiento en el registro algebraico, el cual se evidencia:

$$\left((f \circ g)(3)\right)' = f'(g(3)) \times g'(3)$$

Tercera transformación: conversión, para esto utiliza el registro tabular para determinar los valores de $g(3)$, $f'(g(3))$ y $g'(3)$ y a la vez realiza tratamientos en el registro algebraico y numérico; así se tiene:

$$\left((f \circ g)(3)\right)' = f'\big(g(3)\big) \times g'(3) = f'(4) \times 2 = 3 \times 2 = 6$$

Esto evidencia que ha utilizado por lo menos dos registros. Además, ha realizado diversas conversiones y tratamientos, entonces podríamos decir que se evidencia una coordinación de registros.

Justamente, con respecto a la **coordinación de registros** en la TRRS constituye un aspecto muy importante para el aprendizaje. Así Duval (2006) se refiere con respecto a la coordinación.

> Por eso la comprensión matemática requiere una **coordinación interna** entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar (Duval, 2000). Sin desarrollar esta coordinación interna los estudiantes no pueden cruzar el umbral de la conversión de representación. La habilidad para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación, sino que surge de su desarrollo. En otras palabras, lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos. (p.158)

La cita de Duval es muy importante para nuestro trabajo, ya que en nuestro análisis a priori, las actividades de tipo Bachillerato Internacional, se propondrán haciendo bastante énfasis en la coordinación, ya que, según la TRRS de Duval, es crucial para la comprensión de conceptos, en nuestro caso la derivada.

3.3 Registros de Representación Semiótica

Para que un conjunto de símbolos y signos sea considerado un RRS requiere que se puedan realizar tres actividades cognitivas, que según Duval (1995, como se citó Godino et al., 2016, p. 94) son:

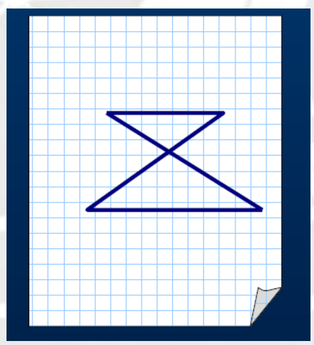
> En primer lugar, constituir una traza o un conjunto de trazas perceptibles que sean identificables como *una representación de cualquier cosa* en un sistema determinado. A continuación, transformar las representaciones mediante las únicas reglas propias del

sistema de manera que se obtengan otras representaciones que pueden constituir un aporte de conocimiento con relación a las representaciones iniciales. Finalmente, convertir las representaciones producidas en un sistema en representaciones de otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a lo que se representa. (Duval, 1995, p. 21)

El segundo y tercer punto, ya se había advertido y se refiere a los tratamientos y conversiones. Para comprender el primer punto, se toma como referencia un ejemplo propuesto en el trabajo de Drouhard y Panizza (2009) que, si bien no tiene que ver con nuestro objeto matemático, nos parece muy adecuado para comprender la idea de una representación no articulada. Así cuenta, que una maestra en formación define un trapecio de la siguiente manera: "Un trapecio es un cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos" y le pide que dibuje a sus alumnos su trapecio que tenían en mente; al cabo de un momento un alumno dibuja lo siguiente (se muestra en la figura 18).

Figura 18

Dibujo de un trapecio por un estudiante



Nota. Tomado de *Aspectos semióticos y lingüísticos en didáctica de la matemática* (p. 52), Drouhard y Panizza, 2009. Universidad Nacional de la Plata.

Este ejemplo de representación no articulada no aplicaría a la primera condición que refiere que un RRS es un conjunto de trazos que identifican a la representación de algún objeto; pues como vimos en el ejemplo anterior, estos trazos hechos por el estudiante no representan a un trapecio.

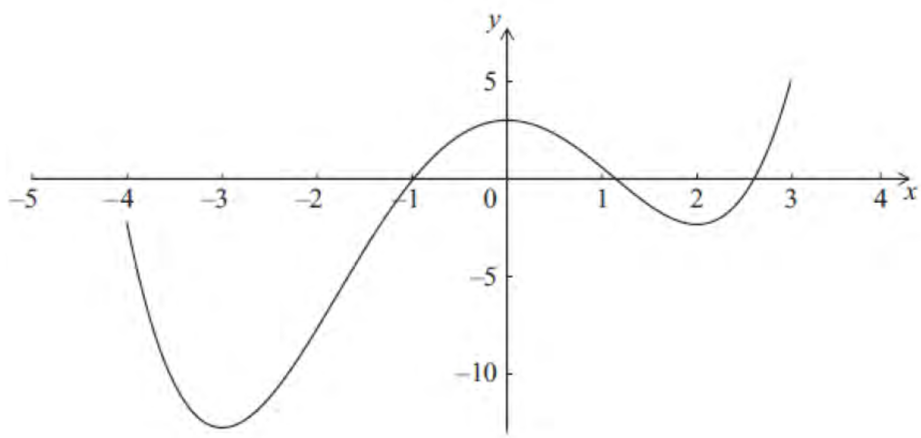
Además; con respecto a los RRS, según Godino (2016) menciona:

Como ejemplos de tales RRS se tienen, la lengua natural (oral, escrita); representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal); representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas). Se reconoce la posición dominante del RRS de la lengua natural, en tanto metalenguaje de todos los lenguajes y de él mismo, es decir, como filtro de toda nuestra experiencia con el mundo natural, social y simbólico o cultural (p.94).

En nuestras actividades propuestas, incluiremos los cuatro RRS y además agregaremos el registro gráfico dinámico (RGD), ya que, nuestra segunda actividad estará planteada con el uso de la herramienta tecnológica.

A continuación, mostramos un ejemplo tomado de una Prueba 1 del BI de la convocatoria mayo 2010, es un problema de 6 puntos sin uso de calculadora con el propósito de evidenciar aspectos de la TRRS en esta pregunta de examinación.

Una función f está definida en el intervalo $-4 \leq x \leq 3$. A continuación, se muestra la gráfica de f.



La gráfica presenta un máximo local para $x = 0$, y mínimos locales para $x = -3$, $x = 2$.

(a) Escriba las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función derivada, f'.

[2 puntos]

(b) Escriba todos los valores de x para los cuales $f'(x)$ es positiva.

[2 puntos]

(c) En el punto D, pertenenciente a la gráfica de f, la coordenada x es -0.5. Explique por qué en el punto $D, f''(x) < 0$. *[2 puntos]*

Procederemos a analizar esta pregunta de la Prueba 1, teniendo en cuenta la TRRS. Así, en primer lugar, observamos que el registro preponderante es el gráfico y adicionalmente se dan datos desde el registro algebraico. Vemos también, que la mayoría de preguntas están planteadas desde el registro lengua natural haciendo uso de notaciones y simbologías en el registro algebraico.

A continuación mostraremos la solución esperada de cada pregunta, e iremos describiendo cada una de ellas considerando la TRRS, para determinar el tránsito por los diversos registros en el desarrollo de cada solución.

Antes de resolver el problema hay que tener en cuenta los términos de instrucción como **escribe** y ***explique***. Así, la Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques (2021), con respecto a este punto manifiesta:

> Los alumnos deberán familiarizarse con los siguientes términos y expresiones utilizados en las preguntas del examen. Los términos se deberán interpretar tal y como se describe a continuación. Aunque estos términos se usarán frecuentemente en las preguntas del examen, también podrán usarse otros términos con el fin de guiar a los alumnos para que presenten un argumento de una manera específica. (p. 95)

Escribir	Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido
Explicar	Exponer detalladamente las razones o causas de algo.

Como observamos, los ítems que tienen como instrucción ***escribir,*** son los que tienen menor puntaje, por lo que no se necesita realizar cálculos, al menos en esta pregunta, solo hay que redactar la respuesta o respuestas, como los ítems (a) y (b). En relación al ítem (c) si es necesario presentar argumentos y justificaciones que expliquen nuestra respuesta.

En el ítem (a) se espera que los estudiantes brinden la siguiente respuesta.

$$x = -3,\ x = 0 \text{ y } x = 2.$$

Vemos que los estudiantes podrían dar sus respuestas en el registro algebraico; sin embargo, es posible que sus respuestas también pudieran ser: $(-3, 0), (0, 0)$ y $(2, 0)$, si fuera el caso, estas respuestas expresadas en pares ordenados estan dadas en el registro numérico de forma predominante.

Para resolver el ítem (b), el estudiante debe comprender que para que la primera derivada sea positiva, $f'(x) > 0$, la función debe tener intervalos donde su gráfica sea creciente; por lo que, le basta observar el gráfico propuesto y brindar su respuesta en intervalos, de la siguiente forma:$]-3,0[\ ,\ ]2,3]$.

Podemos notar que los intervalos se presentan en el registro numérico, aunque es posible que los estudiantes expresen sus respuestas en el registro algebraico, de la siguiente forma: $-3 < x < 0,\ \ 2 < x \leq 3$

Finalmente, para responder el ítem (c), el estudiante debe relacionar el dato que proporciona la pregunta, la abscisa del punto D, con el gráfico Ubica el punto D de forma aproximada, ya que no conoce su imagen. Luego, debe reconocer que el punto D, ubicado en la gráfica de la función, es parte de la gráfica que posee una concavidad hacia abajo; por lo que, basado en el criterio de la segunda derivada se cumple que $f''(-0{,}5) < 0$, y por lo tanto la función segunda derivada $f''(x) < 0$. Evidenciamos que en la resolución de este ítem predomina el registro lengua natural.

En general, en la pregunta se ha evidenciado el uso de varios registros, y el tránsito entre ellos. Con respecto a la conversión, se espera que transiten por el registro lengua natural, numérico y algebraico. Con respecto a los tratamientos, los ítems no requieren de estos; aunque sí se realizan procesos cognitivos en los ítems (b) y (c) para poder representarlos.

En la misma línea, Godino et al. (2016) afirma que la TRRS plantea abordar los problemas de aprendizaje en las matemáticas en base a los diversos tipos de signos que se utilizan cuando se trabaja en matemáticas, estos son representaciones materiales o externas y no representaciones mentales, viendo que la manera de acceder a estos objetos matemáticos es mediante el uso de las representaciones de estos objetos y no mediante la percepción como en otras áreas de estudio. De aquí se desprende la importancia de la semiosis y noesis.

Así Duval (1995, como se citó en Godino at el 2012), se refiere a estos elementos de la TRRS "se llama semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia" (p. 94).

Relacionando el ejemplo anterior con la semiosis y noesis, en la resolución de los ítems (b) y (c), los estudiantes deberán realizar ambos procesos, la noesis, ya que realiza una representación mental para dar la respuesta; es decir, debe realizar una aprehensión del objeto matemático: derivada y los criterios de la primera y segunda derivada; luego y/o casi en simultáneo realiza la semiosis; ya que, necesita representar estos objetos matemáticos mediante un sistema de representaciones o símbolos.

Creemos que ambos aspectos de la TRRS, la semiosis y noesis, son relevantes en nuestro trabajo, ya que nuestras actividades estarán diseñadas para que los estudiantes de forma intrínseca los realicen.

3.4 Calculadora de Pantalla Gráfica: HP Prime

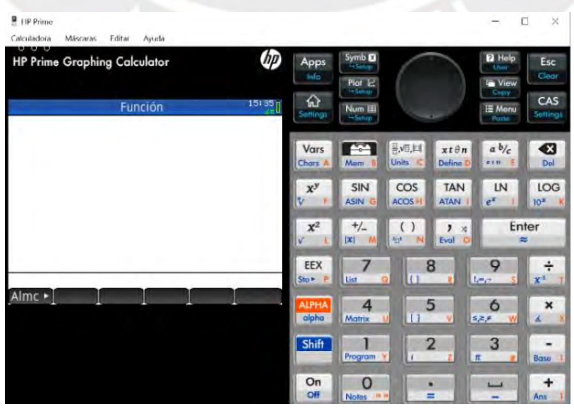
A continuación, presentaremos nuestra calculadora gráfica a utilizar en una de nuestras actividades. Así, Moreno, Hegedus & Kaput (2008, citado en Romero & Oktan 2015) manifiestan con respecto a las representaciones dinámicas:

> La diferencia más importante para nosotros es que las representaciones dinámicas permiten representar objetos que no podrían representarse en un ambiente estático, nos referimos a los objetos variables, como la “c” en la expresión “$3c + 2$” o la “V” en $V \in R^2$. Con el avance de la tecnología nos encontramos en una etapa de representaciones dinámicas continuas. (p. 5)

Como ya se ha mencionado en nuestra justificación una de los aspecto relevantes por lo que nuestros alumnos utilizan la calculadora de pantalla gráfica HP Prime, es para poder desarrollar la prueba 2, requisito obligatorio para aprobar el curso y por ende ostentar el diploma; por tal motivo, iremos describiendo las funcionalidades que tiene la calculadora y que utilizarán los estudiantes para trabajar actividades de la derivada, tal como se muestra en la figura 19.

Figura 19

Calculadora de pantalla gráfica HP Prime



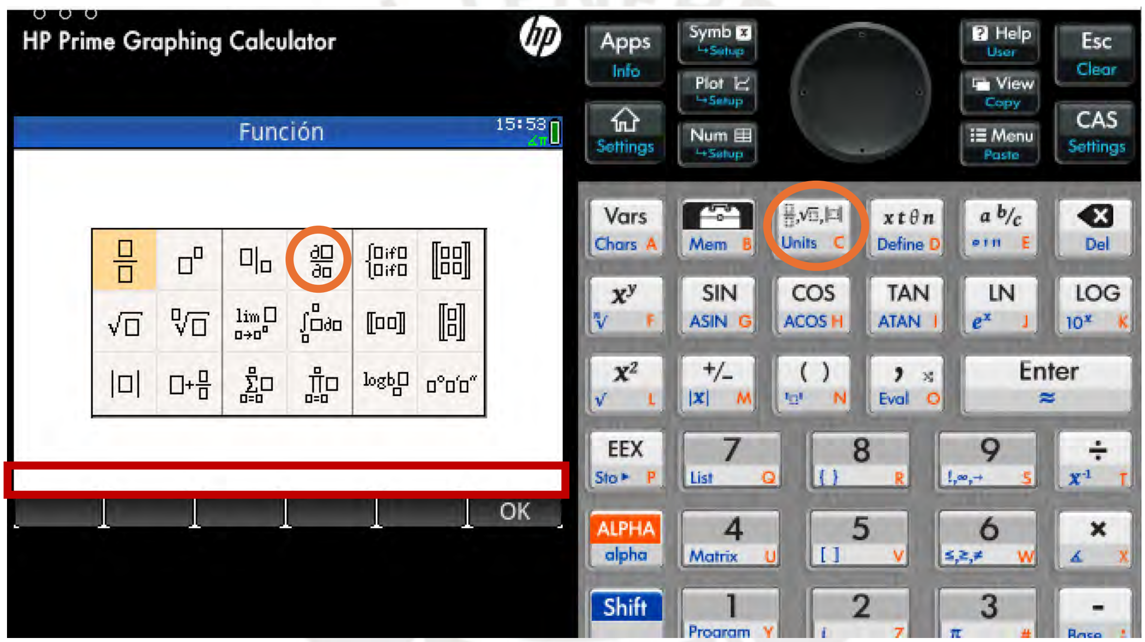
Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

Los estudiantes trabajan durante dos años lectivos con esta graficadora, por lo que tienen nociones sobre su funcionalidad. Para nuestro trabajo, solo incluiremos el editor de ecuaciones y la aplicación FUNCIÓN que necesitan los estudiantes para trabajar las actividades referidas a la derivada. La parte de fondo blanco es para realizar todo lo referido a cálculos y además les permite calcular la derivada, evaluada en algun valor de x.

Señalamos la secuencia para poder calcular la derivada en un valor de x, esto les serviría para poder determinar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto cuando les dan la función. Esta secuecia lo motramos en la figura 20.

Figura 20

Pasos para calcular la derivada en un punto

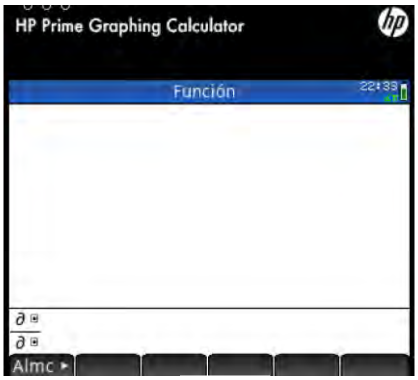


Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

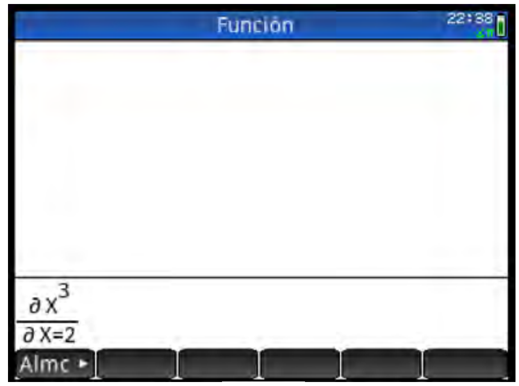
Como primer paso se pulsa la tecla del editor de ecuaciones que está encerrado en el círculo de la derecha, inmediatamente la calculadora muestra el cuadro de diálogo en la pantalla blanca de cálculos, y se selecciona la tecla que contiene la notación $\frac{\partial\square}{\partial\square}$, luego aparecerá en la barra de entrada que está enmarcada, tal como se muestra en la figura 21.

Figura 21

Pasos para calcular la derivada en un punto II



(a)



(b)

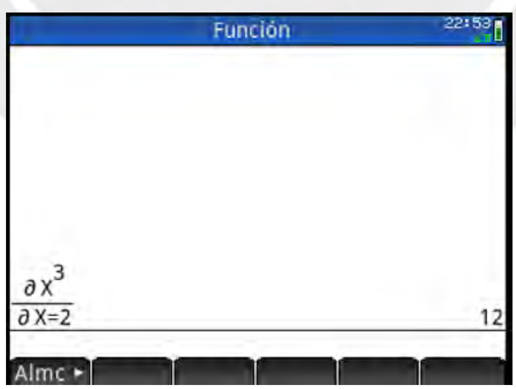
Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

En la simbología, que hace referencia a la derivada, de la figura 21 (a) se tendrá que digitar la función a derivar y el valor que se desea calcular en los espacios a completar, donde la función a derivar se inserta en el numerador y la variable x igualado al valor que se desea calcular en el denominador, tal como se mostró en el ejemplo de la figura 21 (b).

Finalmente, pulsamos la tecla *enter* y nos mostrará el valor de la derivada para un valor de x, tal como se presenta en la figura 22.

Figura 22

Pasos para calcular la derivada en un punto III



Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

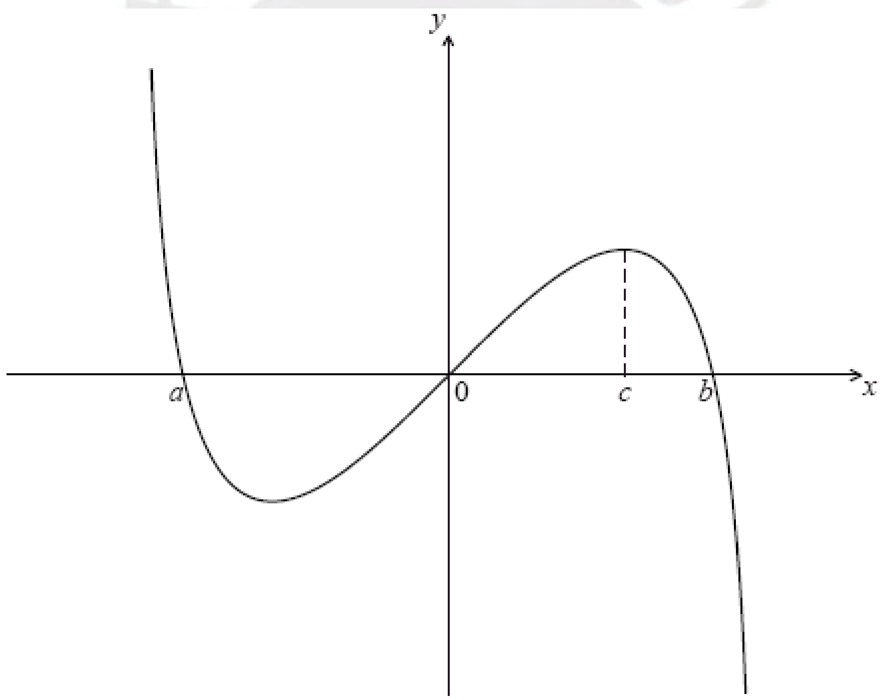
Creemos que esta funcionalidad de la calculadora es muy importante porque les permite a los estudiantes evaluar la derivada en cualquier punto (abscisa) y por tanto les permite hallar la pendiente de la recta tangente para cualquier valor x de la función.

Otra de las funcionalidades de la HP Prime que realizan los estudiantes en la ejecución de sus exámenes del IB, es la Apps Función. Esta aplicación permite que los estudiantes, dado cualquier función, obtengan la gráfica de dicha función; además, les permite encontrar diversos elementos propios de la gráfica de una función, como los cortes con el eje x, valores extremos, pendiente y traza de la recta tangente, entre otros.

A continuación, presentamos una secuencia de pasos por medio de un ejemplo de la Prueba 2, del repositorio IB Question Bank donde el estudiante requiere la utilización de la App, para dar respuesta al problema.

Ejemplo:

Let $f(x) = x\,ln(4 - x^2)$, for $-2 < x < 2$. The graph of f is shown below.



The graph of f crosses the x-axis at $x = a$, x = 0 and $x = b$.

(a) *Find the value of a and of b.* ***(3)***

The graph of f has a maximum value when $x = c$.

(b) *Find the value of c.* ***(2)***

En este ejemplo, vemos que la función dada, es compuesta, y si se quiere dar solución al ítem (a), el estudiante, tendría que resolver la ecuación $x\,ln(4 - x^2\,) = 0$; sin embargo, al tratarse de una pregunta de la Prueba 2, el estudiante podría obviar este proceso y hallar la respuesta con apoyo de la graficadora, de forma específica la aplicación Apps Función de la HP Prime.

Así, como primer paso, se deberá presionar la tecla Apps y luego seleccionar el icono de Función, tal como se muestra en la figura 23.

Figura 23

Apps Función para gráficas de funciones

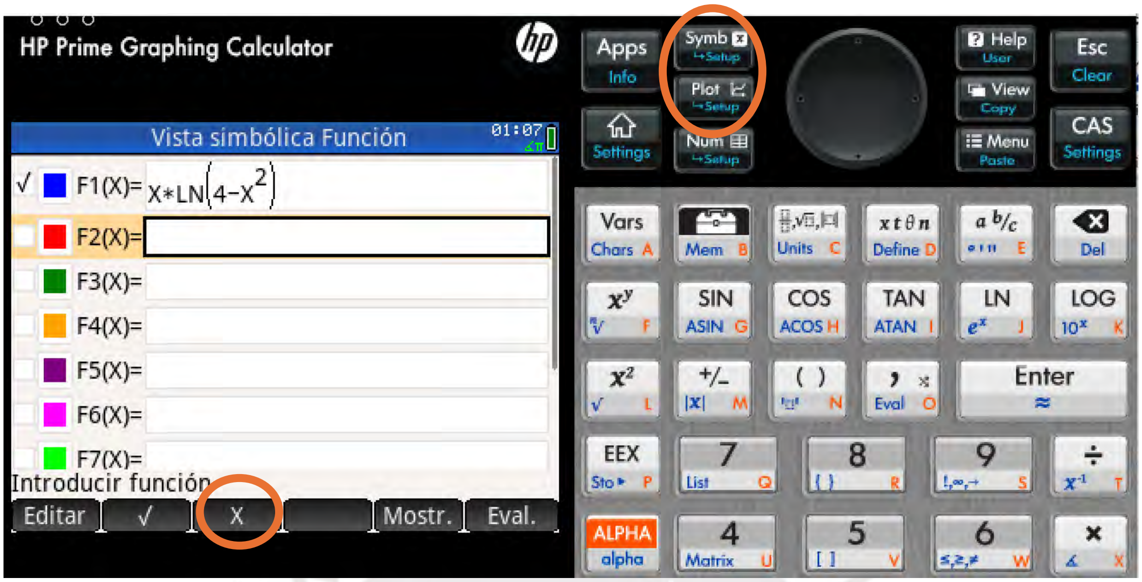
(a) **(b)**

Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

Esta aplicación, entre las muchas que posee HP Prime, es una potente herramienta que permitirá a los estudiantes graficar las funciones que requieran, tal como se irá mostrando en el ejemplo a resolver. En la figura 24, se muestra la vista simbólica de la aplicación.

Figura 24

Apps Función para gráficas de funciones I

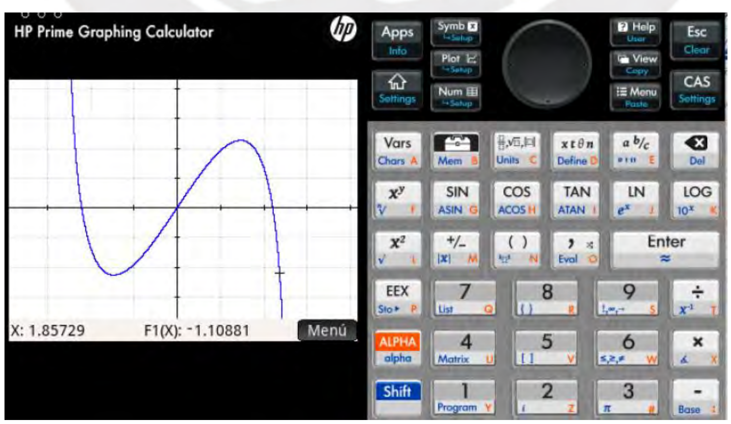


Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

En la vista simbólica se pueden insertar hasta 10 funciones en simultáneo, también se puede acceder con la tecla que está encerrada en un círculo de la derecha y arriba Symb. Para asignar la variable se utiliza la “X”, encerrada en el círculo de la izquierda. Una vez digitada la función se presiona la tecla Plot, encerrada en el círculo de la derecha abajo, y aparecerá la gráfica de la función como se muestra en la figura 25.

Figura 25

Apps Función para gráficas de funciones II

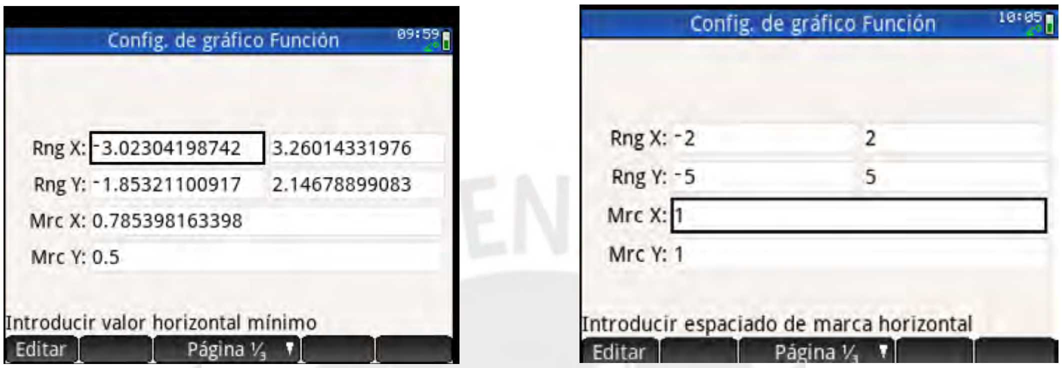


Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

En la pantalla aparecerá la gráfica de la función, sin embargo, en muchas ocasiones la gráfica puede que no se visualice o aparezca otra forma gráfica. Cuando no se visualiza, ocurre porque se necesita configurar la pantalla, para modificar la pantalla se presiona la tecla Shift + Plot y aparecerá el cuadro de configuración, como se muestra en la figura 26.

Figura 26

Apps Función para gráficas de funciones III



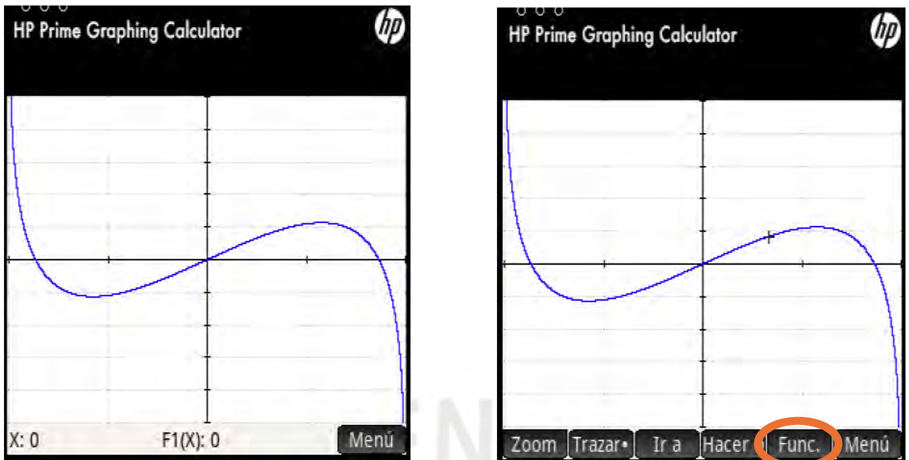
(a) **(b)**

Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

En la figura 26 (a), la calculadora muestra los valores que se visualizan en la gráfica tanto en el eje x y y. En ocasiones no se visualiza la gráfica y esto se pueda deber a que no se ha configurado la pantalla. La primera fila que se observa en la figura 26 (a) y (b), Rng X, corresponde a la vista horizontal de la pantalla; así, en nuestro ejemplo insertamos el dominio que el problema da como dato, tal como se muestra en la figura 26 (b). La segunda fila, Rng Y, corresponde a la vista vertical de la pantalla, en estas celdas el estudiante debería tener nociones para hallar el rango de la función, en nuestro ejemplo nos damos cuenta de que la gráfica presenta asíntotas verticales tanto en $x = -2$ y $x = 2$, por lo que, tienden al infinito negativo y positivo con respecto al eje y, así que bastará darles cualquier valor en las celdas, por ejemplo, los que se muestran en la figura 26 (b). En la tercera y cuarta fila, Mrc X y Mrc Y, son las escalas tanto en el eje horizontal y vertical que queremos que se muestre en la pantalla. Una vez configurada nuestra pantalla regresamos al gráfico con la tecla Plot, tal como se muestra en la figura 27.

Figura 27

Apps Función para gráficas de funciones IV



(a) (b)

Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

En la figura 27 (a), observamos la gráfica y en la parte inferior nos muestra los valores que reflejan la posición del cursor en la pantalla, en este caso (0, 0). Además, se visualiza la opción Menú, que es de suma importancia para poder hallar los requerimientos de nuestro ejemplo. Cuando se presiona la tecla Menú se despliegan otras opciones, con se muestra en la figura 27 (b), nosotros incidiremos en la opción Func. El ítem (a) de nuestro ejemplo solicita los interceptos de la gráfica con el eje x, en este caso, en primer lugar, ubicamos el cursor de la pantalla lo más cerca al primer punto de corte que queremos hallar (lo podemos mover con los dedos o los direccionales ← y →), luego presionamos la tecla Func. y seleccionamos la opción Raíz. Mostramos lo descrito en la figura 28.

Figura 28

Apps Función para gráficas de funciones V

(a) (b)

Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

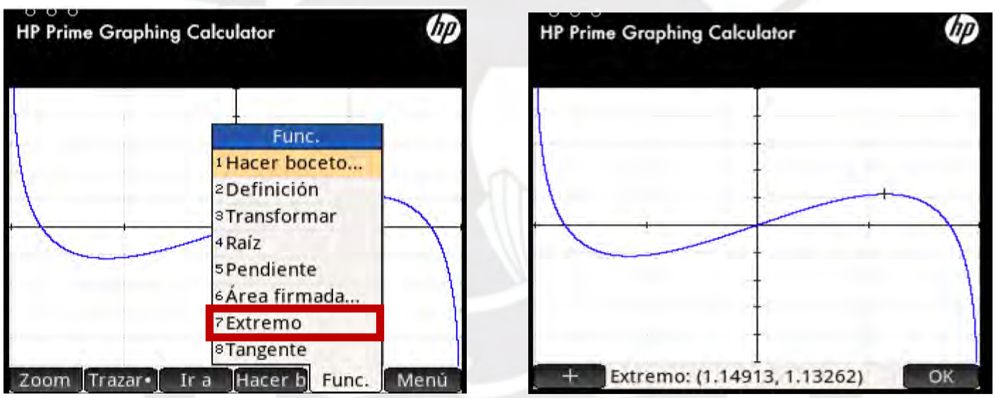
Se observa en la figura 28 (a) el cursor cerca del primer intercepto con el eje x, que, según nuestro ejemplo, es la abscisa a. Una vez elegida la opción Menú, la graficadora nos dará la respuesta, tal como se muestra la figura 28 (b).

Del mismo modo se halla el otro intercepto b. Por lo tanto, para dar respuesta al primer ítem los valores de a y b son $-1{,}73$ y $1{,}73$. Es importante indicar que en la Prueba 2, la sugerencia para expresar los resultados en decimales es que se consignen como mínimo tres cifras significativas.

Para resolver el segundo ítem nos piden el valor de c, donde hay un valor máximo, en tal sentido no es necesario derivar la función e igualar a cero, ya que la HP Prime nos brinda dicho valor de la abscisa. Se muestra en la figura 29 este proceso.

Figura 29

Apps Función para gráficas de funciones VI



(a) (b)

Nota. 2018 HP Development Company, L.P.

De la misma forma que para hallar los interceptos, ubicamos el cursor al valor extremo del que deseamos hallar la información, en nuestro caso, el punto máximo. Luego, al seleccionar la opción Menú, elegimos la opción 7: Extremo, como se observa en la figura 29 (a), cuando presionamos esta opción la graficadora nos mostrará las coordenadas del punto máximo.

Evidenciamos que no solo nos da la abscisa sino también la ordenada, por consiguiente, la respuesta a este ítem será $c = 1{,}15$.

Consideramos relevante la utilización de esta calculadora de pantalla gráfica para nuestra actividad a planificar y para el desarrollo del concepto de la derivada de nuestros estudiantes.

Capítulo IV: Desarrollo de la Experimentación y Análisis

En este capítulo abordaremos la parte experimental de nuestra investigación donde incluimos una breve descripción del escenario y sujetos de estudio; posteriormente presentamos las secuencias de las actividades, y haremos una descripción de ellas teniendo en cuenta los medios y condiciones de cada actividad. Luego, realizaremos el análisis a priori, y lo compararemos con el análisis a posteriori.

4.1 Escenario y Sujetos de Estudio

El escenario de esta experimentación se realizará en las aulas de 5to año del Colegio de Alto Rendimiento COAR San Martín. Son dos aulas con estudiantes matriculados al Programa del Diploma y al curso de Análisis y Enfoques nivel medio, la primera aula consta de 23 y la otra aula de 20 estudiantes, las cuales cuentan con proyector, pizarra acrílica, las carpetas son unipersonales; también cuentan con herramientas tecnológicas como la calculadora de pantalla gráfica HP Prime y laptops propias. En las actividades se contará con un profesional del área de Matemática para cualquier duda o consulta, así como un profesional para que tome nota de las incidencias de las actividades.

Con respecto a los sujetos para la experimentación, en un principio, se desarrollará una prueba piloto, con el aula A de 23 estudiantes, en la que se aplicarán las secuencias de actividades con dos días de anticipación con respecto a la otra aula, esto nos servirá para garantizar la comprensión de la ficha (indicaciones, redacción, gráficos, etc.) por parte de los estudiantes, así como para corregir errores que no se han contemplado en la elaboración y descripción de las actividades. Luego se ejecutará las actividades en el aula B de 20 estudiantes, de manera formal la experimentación. En ambos grupos, las actividades se realizarán de forma individual.

Se proponen 2 actividades, en la primera actividad, su característica principal es que no se utiliza la calculadora de pantalla gráfica (CPG) HP Prime; mientras que la segunda actividad sí se utiliza la herramienta tecnológica.

Para la recolección de datos se seleccionan 4 estudiantes, estos serán seleccionados teniendo en cuenta la evaluación diagnóstica y además comparando con su desarrollo académicos y actitudinal, requiriendo estudiantes comprometidos y responsables en el desarrollo de sus actividades. Los estudiantes seleccionados serán identificados por las siguientes notaciones: P_1, P_2, P_3 y P_4.

Para la propuesta se utilizan fichas de forma física y se utilizará lápiz o lapicero y borrador; además, para la actividad 2 se realizará con uso de la tecnología, los estudiantes seleccionados utilizarán el simulador de la CPG HP Prime, la cual cumple las mismas funciones que la herramienta física. Esto es, porque se necesita grabar pantalla de las acciones que realiza el estudiante en el simulador de la HP Prime de ser el caso. Ante cualquier eventualidad de algún proceso confuso, se realizarán entrevistas con los estudiantes seleccionados para enriquecer el análisis a posteriori, para esto utilizaremos aplicaciones de audio. Las actividades se realizarán en horas de clase.

4.2 Descripción de las secuencias de actividades.

Como se había mencionado, nuestra investigación incluye dos actividades, la cual detallaremos a continuación.

En la actividad 1 se trabaja **sin** la herramienta tecnológica, la CPG HP Prime. En esta actividad de contexto intra matemático se presenta una función polinomial y su gráfico, a partir de ahí, se pretende que los estudiantes realicen conversiones y tratamientos de los diversos registros, movilizando todo lo referido a concepto derivada.

Contrariamente, la actividad 2 se trabaja con la CPG HP Prime, se presenta del mismo modo que la actividad 1, una función polinomial, pero aquí no se brinda el gráfico, sino que el estudiante mediante la CPG deberá graficarlo. Luego se van desarrollando aspectos de la derivada mediante los diversos tratamientos y cambios de registros, esperando que los estudiantes en estas 2 actividades logren la coordinación de registros. Ambas actividades serán presentadas mediante una ficha de trabajo con el espacio correspondiente para su desarrollo. Las actividades presentadas a los estudiantes en la aplicación se adjuntan en el anexo 2. Se propone un esquema de organización de las secuencias de actividades que presentamos en la tabla 5.

Tabla 5

Organización de la secuencia de actividades

Secuencia	Temas o aspectos conceptuales.	RRS	Instrumentos	Tiempo	Uso de tecnología
Actividad 1	Criterios de la primera y segunda derivada, Gráficos de $f, f' y\ f''$. Rectas tangentes.	Registro algebraico, natural, simbólico y gráfico.	Ficha de actividades.	60 min	No
Actividad 2	Gráficos de $f, f' y\ f''$, criterio de la primera y segunda derivada, reglas de derivación.	Registro gráfico dinámico, registro gráfico, registro algebraico, registro lengua natural.	Ficha de actividades. Entrevista.	50-55 min	Sí

De esta manera, nuestra propuesta contiene actividades con uso de tecnología y sin ella, esto se justifica, ya que, las evaluaciones del Programa del Diploma de la asignatura Análisis y Enfoques nivel medio, al cual pertenecen los estudiantes, son dos pruebas escritas (1 y 2); de las cuales la primera es sin uso de la herramienta tecnológica y la segunda con uso de ella.

Para el recojo de la información, como se observa en la tabla 4, se proponen fichas para cada actividad, en la segunda se complementa con la grabación de la pantalla de su laptop cuando realicen la actividad en el simulador, esto como se explicó, para poder ver los tratamientos que realizan los estudiantes seleccionados en el registro gráfico dinámico RGD. Solo de ser necesario, se procederá a realizar una breve entrevista a los estudiantes selecionados; esto con el proposito de despejar alguna duda o procesos ambiguos que realicen y que no hayan estado previsto en el análisis a posteriori.

4.3 Análisis de las actividades

Seguidamente desarrollaremos el análisis a priori de las actividades, incluyendo la solución experta, objetivos, las variables micro didácticas y luego su análisis a posteriori donde mostraremos el contraste entre ellas. El análisis se orienta al tránsito que realizan los estudiantes por los registros que utilizan haciendo énfasis en los tratamientos y conversiones.

En el análisis a priori de nuestras secuencias, previamente describiremos el objetivo de cada actividad, posteriormente definiremos las variables micro didácticas considerando el control sobre estas variables por medio de lo que se espera que el estudiante desarrolle y también vaya incluyendo los posibles errores que pudieran cometer.

Las diversas actividades están diseñadas para que los estudiantes movilicen los registros gráficos, gráfico dinámico, lengua natural y algebraico – simbólico mediante los tratamientos y conversiones; así como la realización de los procesos noesis y semiosis en las producciones de los estudiantes.

4.3.1 Actividad 1

Esta primera actividad se realizó en un tiempo de 60 minutos, el propósito de esta actividad es que a partir de la gráfica de la función dada en el registro gráfico, los estudiantes identifiquen y reconozcan elementos de la gráfica mediante tratamientos en el registro gráfico, y los relacionen con la primera y segunda derivada, como son los signos de f' y f'', los valores extremos locales y el punto de inflexión, todo esto realizando conversiones en el registro algebraico y lengua natural; además relacionan características de la recta tangente y su pendiente con respecto a la gráfica de la función.

Con respecto a las variables micro didáctica (VMD), la hemos clasificado en generales y específicas; las generales son las que rigen para toda la actividad, mientras que las específicas movilizan los ítems propuestos. Así, las VMD generales son:

- Desarrollo de la actividad sin uso de la CPG HP Prime.
- La actividad propuesta desde el gráfico de una función polinómica.

4.3.1.1 Análisis A Priori de la Actividad 1. A continuación, se presenta la actividad 1, la cual para su análisis la hemos organizado ítem por ítem; es decir primero presentamos el ítem a) de la actividad 1 y realizamos su análisis a priori y así sucesivamente. En el análisis a priori incluimos la solución experta y aspectos específicos de cada ítem, los cuales iremos detallando.

Actividad 1_ Ítem a). Para este y los demás ítems mencionaremos algunos aspectos como el propósito específico del ítem, las VMD específicas, los subtemas inmersos y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones. Para organizar estos componentes, presentamos la tabla 6.

Tabla 6

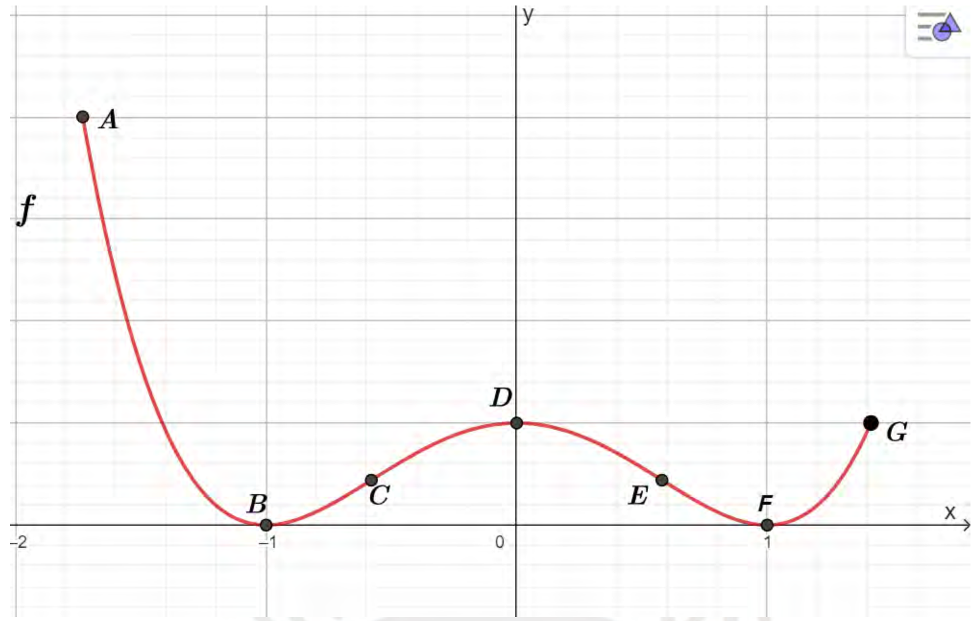
Organización y descripción del ítem a) de la actividad 1

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamientos	Conversión: registros esperados
Identifican y reconocen los signos de la primera derivada a partir de los intervalos de crecimiento y decrecimiento que proporciona la gráfica.	Primera derivada: signos a partir de la gráfica. Función creciente y decreciente.	Variación $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$	Gráfico natural	Registro gráfico	Registro natural o registro algebraico-simbólico

Con respecto a las variables micro didácticas VMD, en este ítem, están asociadas a la variación y cambio de comportamiento en la gráfica de la función cuando $f'(x) > 0$ y luego cuando $f'(x) < 0$.

El registro previo de la tabla 6 tiene que ver con la representación semiótica que se propone, en este caso, desde el registro natural y el simbólico. El registro esperado es el registro que emerge de las producciones de los estudiantes; aunque se espera que previamente haya pasado por otro u otros registros (conversiones) y haya realizado tratamientos en ellos. A continuación, presentamos la solución experta del ítem a) e iremos haciendo el análisis a priori.

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = (x^2 - 1)^2$ para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{2}$



Los puntos A, B, C, D, E, F y G se encuentran en la gráfica de f.

Sea la T el conjunto de todas las rectas tangentes a la gráfica de la función.

a) *Observa el gráfico y SIN DERIVAR* ***escribe*** *los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.*

En este ítem se espera que los estudiantes observen el gráfico e identifiquen y relacionen que cuando la función es creciente, la gráfica de la función derivada es positiva y que cuando la función decrece, la gráfica de la función derivada es negativa.

$f'(x) > 0$ cuando la función es creciente, es decir cuando $x \in]-1,0[,]1,\sqrt{2}[$
$f'(x) < 0$ cuando la función es decreciente, es decir cuando $x \in]-\sqrt{3},-1[,]0,1[$

Análisis A Priori. Para poder dar la respuesta los estudiantes deberán realizar los procesos de noesis y semiosis. La noesis, porque realizan una aprehensión conceptual, así Duval (2004, como se citó en Granados y Jiménez, 2022) sostiene que la aprehensión conceptual de un objeto matemático se basa en dos aspectos importantes: el uso de más de un registro de representación y la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos (p. 5). Así en nuestro ítem los estudiantes deberán realizar un proceso mental que vincula la relación que existe entre las funciones monótonas y los signos de la primera derivada, para ello los estudiantes han trabajado en el registro gráfico y algebraico (comprenden la simbología) pero al plantear la respuesta recurren al registro natural o algebraico creando una representación semiótica diferente, como los intervalos; este proceso de representación mediante los registros, algebraico-simbólico, es la semiosis.

El recuadro anterior muestra la respuesta que se espera que los estudiantes obtengan, se observa que se espera que utilicen el registro algebraico - simbólico y también el natural. Aunque es posible que algunos estudiantes brinden sus respuestas desde el registro natural, con frases como: *la derivada es positiva cuando los valores de x están entre -1 y 0 y también cuando están entre 1 y* $\sqrt{2}$.

Dentro de lo posibles errores que podrían consignar los estudiantes, podrían ser referidos a identificar si es que los intervalos son cerrados o abiertos; otro aspecto podría referirse al no asociar el gráfico de la función con la derivada, como por ejemplo la relación con las pendientes positivas o negativas.

Actividad 1_ Ítem b)

A continuación, presentamos el propósito específico del ítem, las VMD específicas, los subtemas inmersos y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 7.

Tabla 7

Organización y descripción del ítem b) de la actividad 1

Propósito específico	**Tema específico**	**VMD específicas**	**Registro previo**	**Tratamiento**	**Conversión: registros esperados**
Determinan analíticamente las coordenadas x donde la gráfica de la función tiene valores máximos y mínimos locales.	Primera derivada: máximos y mínimos locales.	$f'(x) = 0$	Gráfico natural algebraico	Algebraico	Algebraico

En este ítem, se hace énfasis en el tratamiento algebraico; sin embargo, se espera que utilicen la gráfica para validar sus procesos. A diferencia del anterior ítem, la VMD está enfocada a los cortes con el eje x de la primera derivada donde se evidencian los extremos relativos.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem b)

*b) Realiza procesos para **hallar** las coordenadas x de los puntos mínimos y del punto máximo.*

Se espera que los estudiantes deriven, para esto tienen dos opciones, la primera que apliquen la regla de la cadena, y la segunda que resuelvan el binomio primero y luego realicen la derivación básica.

Primera forma: $f'(x) = 2 \times (x^2 - 1) \times (x^2 - 1)'$

$$f'(x) = 2 \times (x^2 - 1) \times (2x)$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1)$$

Segunda forma: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Una vez derivado:

$$f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0$$

$x = 0$ o $x^2 - 1 = 0$

$x = 1$ o $x = -1$

Luego, de la gráfica, las coordenadas x donde hay puntos mínimos son $x = -1$ y $x = 1$; y máximo es en $x = 0$

***Análisis a priori**.* Como se mencionó, en este ítem principalmente, el estudiante debe realizar tratamientos en el registro algebraico mediante procesos de derivación y procesos de multiplicación y factorización de polinomios, según sea el caso; luego, el estudiante relaciona los valores encontrados con el ítem anterior y con el gráfico propuesto y corrobora los valores extremos. Es importante que el estudiante vincule los valores extremos con $f'(x) = 0$, ya que de esa manera puede obtener los números críticos.

Dentro de las dificultades o procesos que distan del propósito de este ítem, tiene que ver con la posibilidad, de que los estudiantes no comprendan el término de instrucción **hallar** y mencionen las coordenadas x solo mirando la gráfica. Recordemos que según el Programa del Diploma y de manera específica en la Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques (2019) sostiene con respecto a este término de instrucción, **hallar**, “obtener una respuesta mostrando los pasos pertinentes”. (p.97) Sin embargo, el estudiante podría indicar las coordenadas x observando el gráfico de la función, sin necesidad de describir los procesos internos que lo llevaron a elegir dichos valores.

Dentro de los errores que pueden cometer al realizar los tratamientos, sería la aplicación de la regla de la cadena, tal como se evidenció en la evaluación diagnóstica y tal como lo menciona Gonzales et al. (2018) “…el estudiante restante aplicó erróneamente la derivada del producto. Cabe destacar la gran cantidad de estudiantes que derivaron esta función mediante la regla de la cadena como si se tratase de una función potencial”. (p.454)

Como vemos, la aplicación de métodos de derivación como la regla de la cadena o del producto generan muchas dificultades en los estudiantes, esto se debe a que eligen erróneamente la función exterior e interior. También es probable que tengan errores por desconocimiento de conceptos previos o métodos, o un déficit del aprendizaje, tal como lo menciona Rico (1995) y según propuesta de Radatz menciona una clasificación de errores a partir de los procesos que realizan los estudiantes, entre las cuales una categoría se debe a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Estas deficiencias también incluyen ignorancia de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y conocimientos inadecuados de conceptos básicos, entre otros (p.13). Si optan por el segundo método propuesto, un posible error sería el desarrollo equivocado del producto notable, o por lo que es muy probable que la derivada, de un polinomio, no sea de mucho riesgo para el estudiante; sin embargo, proviene de un polinomio errado, a este aspecto el BI le conoce como *arrastre de error.*

Actividad 1_ Ítem c)

A continuación, presentamos el propósito específico del ítem, las VMD específicas, los subtemas inmersos y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 8.

Tabla 8

Organización y descripción del ítem c) de la actividad 1

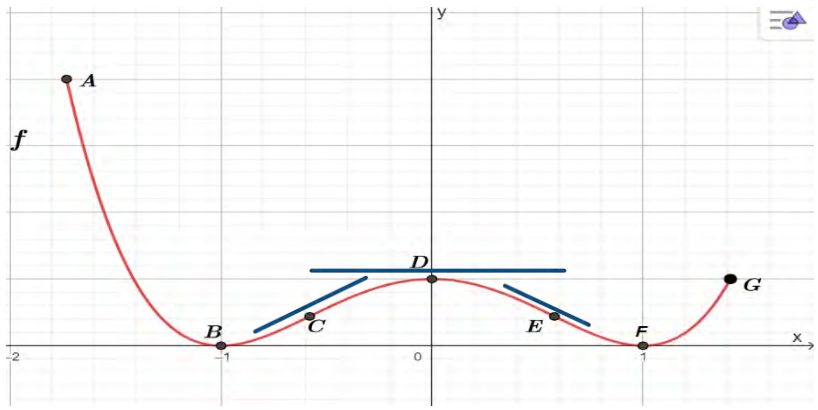
Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: Registros Esperados
A partir de la exploración de las rectas tangentes en los estudiantes identifican y estiman la zona donde la gráfica de la función es cóncava hacia abajo.	Segunda derivada: concavidades	Rectas Tangentes por encima de la gráfica de f $f''(x) < 0$	Lengua natural gráfico	Gráfico	Algebraico o simbólico natural

En este ítem, es necesario utilizar como mínimo dos registros del gráfico, por lo que se deben realizar tratamientos en dicho registro y luego realizar la conversión al registro simbólico - algebraico o en su defecto al registro natural.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem c)

c) *En el gráfico traza 3 rectas T que se encuentren por encima de la gráfica de f. Estima (obtener un valor aproximado) en qué tramo (intervalo) las rectas T están por encima de la gráfica de f.*

Se espera que los estudiantes dibujen en el gráfico tres rectas tangentes que estén por encima de f; o sea estas tangentes deberían estar posicionadas entre el punto C y E.



La estimación podría ser $]-0,6;0,6[$

Análisis a Priori. En este ítem, la primera dificultad es relacionar los puntos de inflexión, ya que, entre los puntos de inflexión, las rectas tangentes se situarán por encima de la gráfica de la función; sin embargo, es muy probable que una (o dos) de las rectas que dibujen los estudiantes en el gráfico tengan como puntos de tangencia a C o a E, pero sabemos que estos puntos en la recta tangente se ubican tanto por debajo como encima de la gráfica de f.

También es posible que los estudiantes ubiquen las rectas en los extremos relativos, es decir, desde el punto B al punto F. Con respecto a la estimación, a pesar de que se incluyó entre paréntesis, *dar un valor aproximado*, es posible que los estudiantes no consideren las coordenadas x de los puntos C y E como respuesta, si no tal vez dan como respuesta un valor numérico.

Consideramos muy importante la conversión que el estudiante realice al registro gráfico. Para que se pueda producir la conversión, el estudiante debe tener en cuenta las unidades significantes de los registros; así Duval (1988, como se citó en Labé 2014) manifiesta:

> ...esta conversión exige que se discrimen bien las unidades significantes de cada registro, es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores, y en la escritura algebraica de una relación las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación y no solamente un objeto a los símbolos utilizados… (p.24)

En tal sentido, los estudiantes al discriminar las unidades significativas en el registro gráfico podemos notar elementos como la gráfica de la función f, los ejes x e y, la recta tangente que estén por encima de la gráfica de f. Consideramos muy importante que los estudiantes identifiquen estas variables visuales con diversos valores (en nuestro caso, la estimación del intervalo) ya que estos elementos serán de mucha ayuda para realizar la conversión. Las unidades significantes, que podemos notar del registro algebraico, tendrían que ver con $f''(x) < 0$ y el intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.

Actividad 1_ Ítem d)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 9.

Tabla 9

Organización y descripción del ítem d) de la actividad 1

Propósito específico	**Tema específico**	**VMD específicas**	**Registro previo**	**Tratamiento**	**Conversión: registros esperados**
A partir de la recta tangente situada por encima de la gráfica de f reconocen la concavidad hacia abajo.	Segunda derivada: concavidades	Rectas Tangentes por encima de la gráfica de f $f''(x) < 0$	Lengua natural gráfico	gráfico	Natural simbólico algebraico.

En este ítem, que es una consecuencia del anterior, esperamos que los estudiantes con lo realizado brinden una respuesta en el registro natural o en el simbólico-algebraico. Con respecto a las VMD toma lo mismo del ítem anterior, el cual está referido con la concavidad de la gráfica de la función.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem d)

d) ¿Qué implica en la gráfica de f que la recta T este por encima de la curva?

Las posibles respuestas para este ítem se proponen en el siguiente cuadro.

Primera opción: *que la función sea cóncava hacia abajo en* $]-0{,}6;0{,}6[$.
Segunda opción: *que la función sea cóncava hacia abajo.*

Análisis a Priori. En este ítem, la respuesta es muy puntual y depende de la pregunta anterior, y tal como se muestra, puede ser expresada desde el registro lengua natural; por lo que, no generaría ninguna conversión entre registros; sin embargo, al ser una extensión de la pregunta anterior, más está orientada a ser una pregunta de conceptos.

Es posible que los estudiantes que no comprendan o no lean bien la pregunta y en sus respuestas relacionen el ítem, con la segunda derivada, en este caso, que $f''(x)<0$ en $]-0{,}6;0{,}6[$, lo cual es correcto; sin embargo, alineados con la pregunta, la respuesta era en relación con la función.

Actividad 1_ Ítem e)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 10.

Tabla 10

Organización y descripción del ítem e) de la actividad 1

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de la posición del punto B en el gráfico de la función determinan el signo de $f''(x)$	Segunda derivada: concavidades	Punto B (mínimo relativo)	Lengua natural gráfico algebraico	Algebraico gráfico	Algebraico lengua natural

Este ítem también está relacionado con las concavidades y específicamente con el signo de la segunda derivada. Esperamos que los estudiantes, tomando como base la gráfica de la función en el registro gráfico, realicen algunas conversiones, al registro algebraico o natural, y tratamientos en el registro gráfico o algebraico. Con respecto a las VMD está referido con la posición del punto B, que en este caso es el mínimo relativo.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem e)

e) Sea x_B la abscisa del punto B, entonces ¿$f''(x_B)$ será positivo, negativo o cero? Explica.

En este ítem se espera que por medio de la gráfica los estudiantes reconozcan que la coordenada x del punto B está incluida en el intervalo donde la función es cóncava hacia arriba por ende $f''(x) > 0$.

En B: $f''(x) > 0$, porque la función es cóncava hacia arriba; también porque la recta tangente se encuentra por debajo de la función lo que implica que la función sea cóncava hacia arriba y por ende la segunda derivada es positiva.

Desde el registro algebraico:

Halla f'':

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Evalúan la coordenada x de B: $f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8$, entonces $f''(-1) > 0$

Análisis a Priori. En este ítem es importante que los estudiantes relacionen los conceptos de la segunda derivada y las concavidades. Se puede manejar varias opciones para llegar a la respuesta, lo esperado es que trabaje el registro gráfico, o sea realice tratamientos, como por ejemplo, trazar una recta tangente en el punto B e identificar que está por debajo de la gráfica de la función; o simplemente reconocer que el punto B está incluido en la zona donde hay una concavidad hacia arriba; entonces el estudiante realiza varias representaciones mentales que lo llevan a expresar el signo de la segunda derivada, así como manifiesta Duval (1993, como se citó en Rico 2009) “mientras que Duval (1993) postula la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas”. (p.7) Creemos que este ítem es importante porque va a propiciar que el estudiante realice representaciones mentales, es decir en un primer lugar interiorice la representación gráfica, identificando o movilizando conceptos como la recta tangente y una vez asimilado realice una representación externa mediante los registros de representación semiótica.

Dentro de los posibles errores que podrían cometer los estudiantes, es que confundan la segunda derivada con la primera derivada, y a su vez el punto es mínimo local; por lo que, podrían afirmar erróneamente que, en B $f''(x) = 0$. Otro error, aunque es menos probable, es que confundan el concepto; es decir que consideren que cuando la recta tangente está por debajo la $f''(x)$ en B, asocien la palabra “debajo” con el signo negativo, por lo que afirmen que $f''(x) < 0$.

Actividad 1_ Ítem f)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, los cuales organizamos en la tabla 11.

Tabla 11

Organización y descripción del ítem f) de la actividad 1

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de la gráfica de f, identifican y estiman la coordenada x del punto de inflexión.	Segunda derivada: Punto de inflexión	Recta tangente por encima y por debajo a la vez.	Lengua natural gráfico	Gráfico	Natural numérico algebraico

Análisis a Priori. Este ítem está relacionado con el punto de inflexión, esperamos que los estudiantes logren identificar este punto, al manipular las rectas tangentes en el gráfico de la función (tratamientos). La VMD está relacionada con la dualidad de la recta tangente, es decir cuando en simultáneo está por debajo y por encima de la gráfica de la función. Con respecto a los registros, deben realizar tratamientos de forma directa (si realiza trazos en el gráfico) o indirecta para poder estimar el punto de inflexión.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem f)

f) *Estima el/los valor/es de la coordenada x de la función f, donde la recta T se encuentra tanto por encima como por debajo de la gráfica f.*
¿Con qué puntos de la gráfica coincide?
¿Qué nombre recibe este punto?

En este ítem esperamos que los estudiantes den 3 respuestas.

En $x = -0{,}6$ y $x = 0{,}6$
En -0,6 coincide con el punto C y en 0,6 coincide con el punto E.
Se llaman **puntos de inflexión.**

Análisis a Priori. Como se mencionó, esperamos que los tratamientos que realice en el gráfico de f, los lleve a intuir en un primer momento, y luego corroborar con el ítem c) y d) que los valores encontrados son las coordenadas x de los puntos de inflexión. Creemos que este ítem está muy relacionado con los ítems anteriores siguiendo una secuencia de los conceptos que conlleve a los estudiantes a ir relacionando los ítems.

Con respecto a los errores que puedan cometer los estudiantes, es probable que aún confundan el punto de inflexión con los extremos relativos. Otro aspecto podría ser la estimación del valor x, aunque esté muy vinculado con el ítem c) sigue siendo una posibilidad que no lo relacionen.

También, es posible que los estudiantes no comprendan el enunciado y determinen la coordenada x, mediante tratamientos algebraicos; es decir deriven la primera derivada e igualen a cero $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$, obteniendo los valores críticos, y al verificarlo con el gráfico de f, den con los valores exactos: $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. También es muy probable que, si siguieron este camino, al dar su respuesta no racionalicen.

Actividad 1_ Ítem g)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 12.

Tabla 12

Organización y descripción del ítem g) de la actividad 1

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir del punto C del gráfico de f, identifican que en el punto de inflexión $f'(x) = 0$	Segunda derivada: punto de inflexión	Recta tangente por encima y por debajo a la vez.	Lengua natural gráfico algebraico	Algebraico	Numérico algebraico natural

Este ítem está vinculado con el anterior, podríamos decir que es la extensión, ya que vincula el punto de inflexión y la recta tangente que está tanto por encima como por debajo de la gráfica de f con los cortes al eje x de la segunda derivada, $f''(x) = 0$. Con respecto a la VMD, es la misma del ítem anterior y con referencia a los registros; si bien, no es necesario hacer tratamientos en el registro algebraico, es una posibilidad que los estudiantes lo realicen, pudiendo usar también el registro numérico.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem g)

g) *Sea x_C la abscisa del punto C, entonces ¿$f''(x_C)$ será positivo, negativo o cero? Explica.*

Esta pregunta los estudiantes puedes responder de manera directa relacionando el punto de inflexión estimado en el ítem anterior o pueden realizar procesos algebraicos.

En C: $f''(x) = 0$

Por ser punto de inflexión.

Segunda forma: $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (lo pueden dar sin racionalizar)

Identifica la coordenada $x_c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Por ende $f''(x_c) = 0$

Análisis a Priori. Esperamos que relacionen el punto de inflexión con la segunda derivada, también lo pueden vincular con el cambio de signo de f'' cuando pasa de una concavidad a otra.

Con respecto a la teoría, el ítem queda abierto para que el estudiante de manera concisa determine el signo y realice una explicación en el registro lengua natural; pero si opta por el camino de los tratamientos en el registro algebraico, aunque no es nuestra intención que aborde este camino, estos procesos deberían ser acompañados por una explicación en el registro lengua natural.

Con respecto a los posibles errores que puedan cometer los estudiantes, podrían estar referidos a la resolución de la ecuación, si consigna el registro algebraico, o en el proceso de la derivación. Es por este motivo, que la intención de este ítem era que se vincule con la pregunta anterior y solo relacione los conceptos, ya que el tratamiento algebraico se iba a desarrollar en el siguiente ítem.

Actividad 1_ Ítem h)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 13.

Tabla 13

Organización y descripción del ítem h) de la actividad 1

Propósito específico	**Tema específico**	**VMD específicas**	**Registro previo**	**Tratamiento**	**Conversión: registros esperados**
Determina los intervalos de las concavidades de la gráfica de f a partir del tratamiento algebraico.	Segunda derivada: concavidades	$f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$	Algebraico	Algebraico gráfico figural	Algebraico o simbólico natural

En este ítem los estudiantes mediante procesos algebraicos (tratamientos) determinan las concavidades de la gráfica de la función, para esto deben derivar dos veces la función, luego hallar los números críticos y hacer el análisis correspondiente. Con respecto a la VMD se hace hincapié en los signos de la segunda derivada y con respecto la TRRS es evidente la preponderancia de los registros algebraico y simbólico pudiendo incluir el registro natural y el figural.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem h)

h) Realiza los cálculos en $f(x)$ para verificar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Se espera que hasta este momento los estudiantes aún no hayan realizado la segunda derivada; aunque es muy probable que los estudiantes hayan derivado para los ítems anteriores.

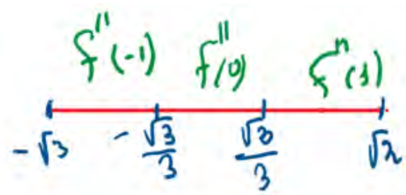
De $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Evaluando:



$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 \rightarrow f''(-1) =8 \ldots$ ***positivo***

$f''(0) = 12(0)^2 - 4 \rightarrow f''(0) = -4\ldots$ ***negativo***

$f''(1) = 12(1)^2 - 4 \rightarrow f''(1) =8 \ldots$ ***positivo***

f es cóncava hacia arriba cuando $f'' > 0$; es decir cuando las coordenadas x pertenecen a los intervalos: $]-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}[$, $]\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}[$

$f$es cóncava hacia abajo cuando $f'' > 0$; es decir cuando las coordenadas x pertenecen a los intervalos: $]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[$.

Análisis a Priori. Como se observa en la solución experta, el estudiante realiza diversos procesos algebraicos, los números críticos hallados los analiza, pudiendo utilizar un diagrama o una tabla para evaluar los signos de f'' entre los números críticos. Según la propuesta utiliza un diagrama figural, pero el estudiante puede recurrir a otra estrategia y en cualquier registro, también evidenciamos el registro simbólico y numérico al realizar los cálculos. Finalmente, basado en las definiciones, expresa los intervalos de las concavidades, esperamos que utilicen el registro simbólico para expresar los intervalos.

Dentro de los posibles errores que los estudiantes pueden cometer, está referido al hallar incorrectamente los números críticos lo que llevaría a un error de arrastre, otro aspecto es con relación al análisis de los signos pues es posible que desconozcan o tengan dificultades en asignar valores cercanos a los números críticos. Finalmente, consideramos muy probable que algunos estudiantes, al hallar los números críticos, ya no realicen el análisis correspondiente y expresen los intervalos apoyados en el gráfico de la función, aspecto, que no era el propósito de este ítem.

Actividad 1_ Ítem i)

A continuación, presentamos el propósito específico, las VMD, los subtemas y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones, las cuales organizamos en la tabla 14.

Tabla 14

Organización y descripción del ítem i) de la actividad 1

Propósito específico	**Tema específico**	**VMD específicas**	**Registro previo**	**Tratamiento**	**Conversión: registros esperados**
Comprueba que las coordenadas x de los puntos de inflexión son $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$ mediante tratamientos algebraicos.	Segunda derivada: punto de inflexión	$f''(x) = 0$	Algebraico	Algebraico gráfico	Natural numérico

En este ítem los estudiantes deben comprobar que los números críticos de la segunda derivada corresponden a las abscisas de los puntos de inflexión, para esto es necesario apoyarse del ítem anterior, ya que, ya se hallaron estos valores y se realizó el analisis, solo se tendría que evidenciar el cambio de signo en la segunda derivada para inferir el punto de inflexión. Con respecto al VMD, tomamos la $f''(x) = 0$ y para la TRRS, se puede incidir en el registro en lengua natural para el análisis y el simbólico.

A continuación, presentamos la solución experta del ítem i).

i) Realiza los cálculos en $f(x)$ para verificar que las abscisas de los puntos de inflexión son: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Este ítem está relacionado con el anterior, el estudiante debe hallar los números críticos y al evaluarlos en su segunda derivada los signos deben alternarse de positivo a negativo o viceversa.

Del ítem anterior: Como en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f''(x)$ pasa de positivo a negativo; por ende, hay un punto de inflexión. Como en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f''(x)$ pasa de negativo positivo a positivo; por ende, hay un punto de inflexión.

4.3.1.2 Análisis a Posteriori de la Actividad 1. Para el análisis a posteriori, se adaptará el cuadro propuesto en la tesis doctoral de Pino-Fan (2013) así como se expuso en nuestros antecedentes, este cuadro lo utilizó para el análisis del plan de estudios de textos referidos al cálculo diferencial y la operatividad de los registros de representación tal como se muestra en la figura 30.

Figura 30

Propuesta por Pino- Fan para el análisis de los textos según el campo de problemas y sus representaciones

Campo de Problemas (CP)	Previas \ Emergentes		Representaciones para $f(x)$ y $f'(x)$							
			$f(x)$				$f'(x)$			
			Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
CP1: Sobre Tangentes	$f(x)$	Verbal								
		Gráfica	1,7				1			
		Simbólica	7						**1,7**	
		Tabular	7							
	$f'(x)$	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								

Nota. La tabla propuesta por Pino-Fan, distribuye los cinco campos de problemas y los diversos registros de representación de forma previa a emergente. Tomado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Para la adaptación modificaremos el campo de problemas (CP), de la propuesta de Pino-Fan, por campos de problemas específicos que se proponen en las actividades, los cuales resumimos en la tabla 15.

Tabla 15

Campos de problemas relacionados con temas específicos de la derivada

Campos de problemas (CP)	Objetos matemáticos relacionados
CP1	Primera derivada: Funciones monótonas, $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$.
CP2	Primera derivada: Extremos relativos, $f'(x) = 0$
CP3	Segunda derivada: Concavidades, $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, tangentes por debajo y encima de la gráfica de f.
CP4	Segunda derivada: Punto de inflexión, $f''(x) = 0$

Así pues, dependiendo del ítem, identificaremos a qué campo de problemas corresponde para poder plasmarlo en nuestro cuadro adaptado. A continuación, proponemos, en la tabla 16, nuestro cuadro adaptado para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 16

Cuadro adaptado para el análisis a posteriori de la actividad 1

Campo de problemas (CP)	Emergente / Previas		Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD
CP1	$f(x)$	Natural															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP2	$f(x)$	Natural															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP3	$f(x)$	Natural															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP4	$f(x)$	Natural															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Otra modificación que hemos realizado es en el componente “previas”, que son las representaciones con las que se han propuesto las actividades, según el cuadro original de Pino-

Fan, incluía a $f'(x)$, esto quiere decir que se analizaba las propuestas de los libros cuando planteaban las actividades desde la primera derivada; en cambio, en nuestras actividades se presentan desde la función. Sin embargo, en el componente "emergente", hemos incluido la segunda derivada f'', ya que en nuestras actividades sí se proponen las producciones de los estudiantes con esta sección de la derivada. También hemos incluido el registro RGD, para nuestra segunda actividad.

Finalmente, hemos agrupado los ítems de acuerdo con el campo de problemas que estamos proponiendo, esto nos facilitará el análisis a posteriori; ya que, al integrar los ítems nos dará una idea mucho más consistente de las producciones de los estudiantes en cada campo de problemas. Presentamos en la tabla 17 esta distribución.

Tabla 17

Distribución de los ítems de la actividad 1 en los campos de problemas modificados

Campos de problemas	**Ítems**
CP1	A
CP2	B
CP3	c, d, e, h.
CP4	f, g, i

Así pues, para el análisis a posteriori del CP3 hemos integrado 4 ítems y 3 ítems para el CP4.

Campo de problemas 1 (CP1)

Análisis a Posteriori del CP1_ítem a) del Estudiante P_1

a) Observa el gráfico y SIN DERIVAR **escribe** los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.

El estudiante utilizó el registro simbólico para dar su respuesta, la cual mostramos en la figura 31.

Figura 31

Producción del estudiante P_1

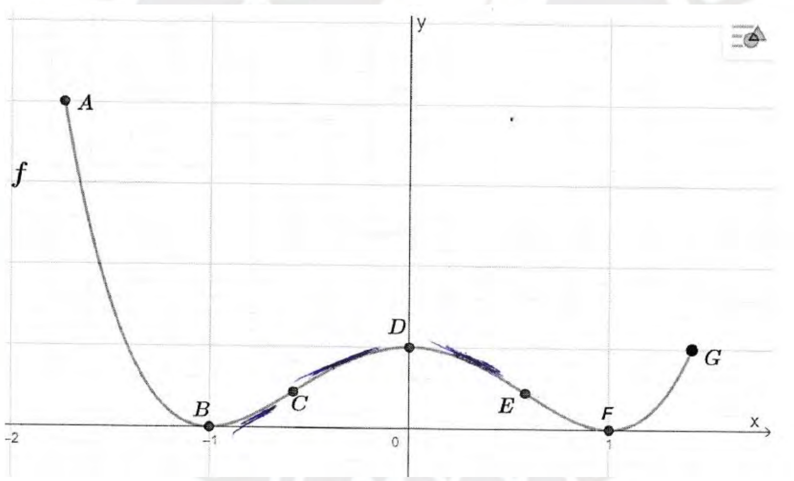
$f'(x) > 0 \in (\cancel{B}B; D)$ y $(F; G]$
$(-1; 0)$ y $(1; \sqrt{2})$.

$f'(x) < 0 \in [A; B)$ y $(0; F)$.
$[-\sqrt{3}; -1)$ y $(0; 1)$.

El estudiante complementó su respuesta con trazos de rectas tangentes en el gráfico inicial que se presentó. Esto lo mostramos en la figura 32.

Figura 32

Producción en el gráfico del estudiante P_1



En el gráfico vemos que ha trazado algunas rectas tangentes, las cuales tienen la particularidad de tener pendientes positivas de B a D, y luego trazó una recta tangente de pendiente negativa entre D y E; esto nos hace pensar que el estudiante realizaba tratamientos en el registro gráfico para detectar en qué parte $f' > 0$ y $f' < 0$. Para emitir su respuesta utiliza el registro simbólico, en primera línea incluye intervalos, pero considerando los puntos (A, B, etc.); sin embargo, al tener dos coordenadas, es posible que el estudiante haya incluido esta expresión como referencia; ya que en el siguiente paso sí escribe los intervalos de forma correcta, como por ejemplo $(-1, 0)$. Se observa que para representar los intervalos utiliza paréntesis, que corresponde a intervalos abiertos y utiliza el corchete para el intervalo cerrado por ese lado; así por ejemplo cuando escribe $[-\sqrt{3}, -1)$, el estudiante toma en cuenta el dominio dado de la gráfica de la función para considerar a $-\sqrt{3}$ como parte del intervalo.

Otro aspecto que no consideramos en nuestro análisis a priori y vemos que el estudiante realiza es que utiliza el conector “y”, en el registro natural; sin embargo, este conector está relacionado con la operación de intersección, por lo que debió considerar de manera estricta la coma o en su defecto el conector “o” que está relacionado con la unión.

En general, podemos afirmar que las producciones del estudiante P_1 en este ítem, las ha realizado de acuerdo con lo esperado según nuestro análisis a priori.

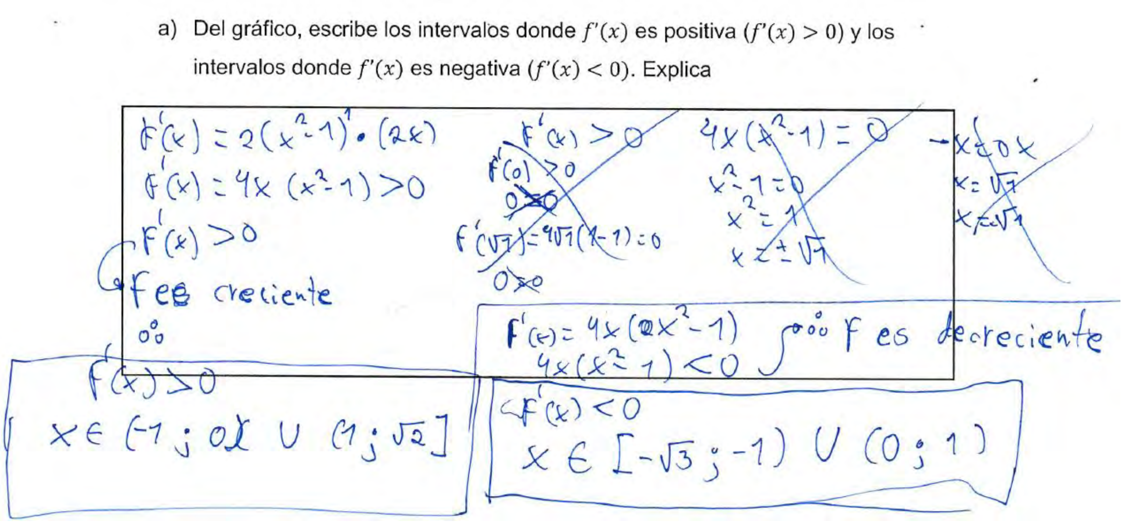
Análisis a Posteriori del CP1_ítem a) del Estudiante P_2

a) Observa el gráfico y SIN DERIVAR ***escribe*** *los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.*

Este estudiante fue seleccionado del grupo piloto, donde realizamos una ligera modificación en la premisa. Agregamos el término “sin derivar”, que no incluíamos en la pregunta original; ya que nuestra intención era que el estudiante utilice la gráfica de la función para poder hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento; sin embargo, notamos que varios estudiantes no entendían la pregunta y derivaban la función; por tal motivo realizamos los ajustes. A continuación, presentamos la producción del estudiante P_2 en la figura 33.

Figura 33

Producción del estudiante P_2


a) Del gráfico, escribe los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica

$f'(x) = 2(x^2-1)^1 \cdot (2x)$

$f'(x) = 4x(x^2-1) > 0$

$f'(x) > 0$

f es creciente

$\therefore$

$f'(x) > 0$

$x \in (-1; 0) \cup (1; \sqrt{2}]$

$f'(x) = 4x(x^2-1)$

$4x(x^2-1) < 0$ $\therefore$ f es decreciente

$f'(x) < 0$

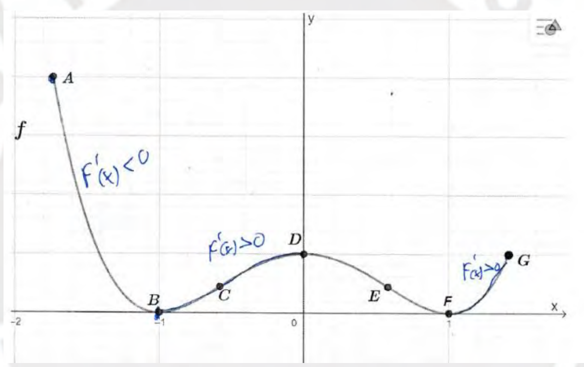
$x \in [-\sqrt{3}; -1) \cup (0; 1)$

En un primer momento, notamos que el estudiante deriva la función dada haciendo tratamientos en el registro algebraico, aplicando la regla de la cadena; luego halla los números críticos derivando la función; aunque tacha los procesos realizados, esto se puede deber a la condición del problema (a partir del gráfico).

Con respecto a las notaciones, observamos que utiliza las notaciones y simbologías apropiadas, el conector de la unión es el indicado, y utiliza paréntesis y corchete para mostrar un intervalo abierto y cerrado. Para expresar los intervalos toma como referencia el gráfico de la función para corroborar las coordenadas donde hay un cambio de decrecimiento a crecimiento y viceversa; esto se puede evidenciar en las anotaciones que hizo en el gráfico de la función dada que presentamos en la figura 34.

Figura 34

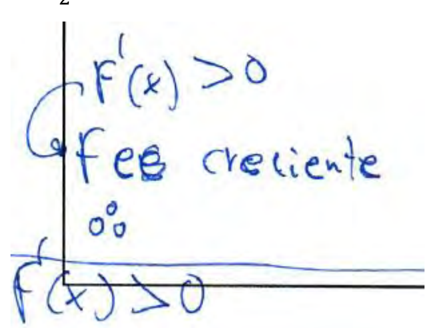
Producción en el gráfico del estudiante P_2



Verificamos que el estudiante P_2 realiza una conversión del registro gráfico al simbólico, para esto el estudiante reconoce en que tramos la función es creciente y luego lo relaciona con los signos de la primera derivada, en este caso $f'(x) > 0$ tal como se muestra en sus anotaciones y en el gráfico de la figura 35.

Figura 35

Producción sobre f' del estudiante P_2



Consideramos que el estudiante P_2 ha logrado coordinar los registros semióticos algebraico y gráfico, lo que sugiere que comprende el criterio de la primera derivada con respecto a los intervalos de crecimiento, tal como lo menciona Duval (2006) “De hecho la comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión”. (p. 167) En este ítem utiliza dos sistemas semióticos el gráfico y el simbólico-algebraico. En este caso el estudiante discrimina a partir de la gráfica de la función las zonas donde crece y decrece para luego relacionarlo con los conocimientos referidos al criterio de la primera derivada.

En general, salvo la confusión de la premisa original que no indicaba que debía realizarse el ítem sin derivar, consideramos que las respuestas del estudiante están en concordancia con nuestro análisis a priori.

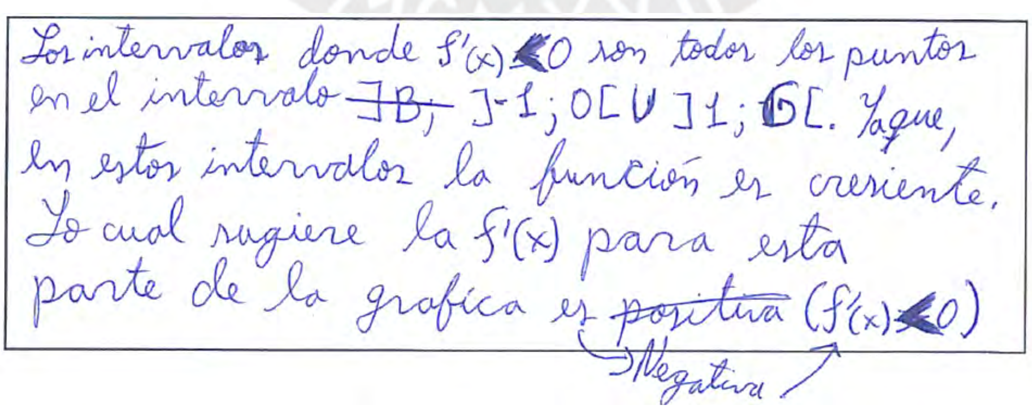
Análisis a Posteriori del CP1_ ítem a) del Estudiante P_3

a) Observa el gráfico y SIN DERIVAR ***escribe*** *los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.*

El estudiante, en este ítem, mayoritariamente brinda sus respuestas en el registro natural, pero también incluye el registro simbólico; sin embargo, en sus procesos notamos un error de interpretación de la propiedad, ya que el estudiante P_3 no tiene muy claro la relación entre los intervalos de crecimiento de una función y signo de la primera derivada, esto se puede constatar en el tachado que realizó el estudiante, en la figura 36.

Figura 36

Producción del estudiante P_3


Los intervalos donde $f'(x) < 0$ son todos los puntos en el intervalo ~~]B;~~ $]-1;0[\cup]1;6[$. Ya que, en estos intervalos la función es creciente. Lo cual sugiere la $f'(x)$ para esta parte de la gráfica es ~~positiva~~ ($f'(x) < 0$)
Negativa

De forma similar también confunde la función decreciente con la derivada positiva; creemos que el error del primer recuadro conlleva a continuar con el error en este segundo proceso con respecto a la interpretación de la propiedad. Como se había dicho, el estudiante combina los registros simbólico y natural; siendo el registro simbólico donde expresa sus respuestas. Tal como mostramos en la figura 37.

Figura 37

Producción sobre intervalos de crecimiento del estudiante P_3

Los intervalos donde $f'(x) > 0$ son $]-\sqrt{3};-1[\cup]0;1[$.
Esto se cumple ya que en este tramo de la recta la función $f(x)$ es decreciente.
Lo cual sugiere que para este intervalo $f'(x) > 0$

Con respecto a otros errores, notamos que, en el primer recuadro, utiliza la letra "G" para indicar el valor final del intervalo; esto ya lo habíamos evidenciado en el participante 1, el estudiante considera este punto como límite superior del intervalo donde la función es creciente; no considerando que el punto contiene dos coordenadas; sin embargo, mejora esta situación en el segundo recuadro, ya que ahí sí considera la abscisa del punto A.

Con respecto a nuestro análisis a priori no habíamos considerado, dentro de los errores que podrían cometer los estudiantes, que confundan los signos de la primera derivada para mencionar el crecimiento o decrecimiento de la gráfica de la función, aun así es un error conceptual que puede deberse a que el estudiante no relaciona correctamente el gráfico de la función con las propiedades de la derivadas así como lo señala Radatz (1979, como se citó en Rico 1995) "Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual del pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información". (p. 13)

Así pues, de manera general creemos que el estudiante no ha podido dar con la respuesta esperada, su conocimiento sobre al criterio de la primera derivada y su relación con la gráfica de la función es limitado. Con respecto a la TRRS, realiza conversiones en el registro algebraico y lengua natural apoyado con el registro gráfico, pero interpreta erróneamente la teoría intercambiando los signos de la primera derivada.

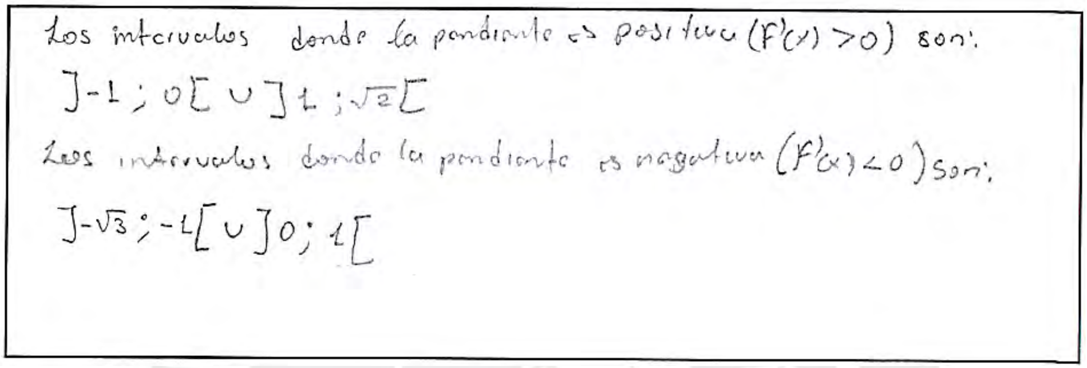
Análisis a Posteriori del CP1_ ítem a) del Estudiante P_4

a) Observa el gráfico y SIN DERIVAR ***escribe*** *los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.*

El último participante, al igual que los anteriores participantes, realiza sus explicaciones desde el registro natural y sobre todo desde el simbólico-algebraico. A continuación, presentamos sus producciones en la figura 38.

Figura 38

Producción del estudiante P_4


Los intervalos donde la pendiente es positiva ($f'(x) > 0$) son:

$]-1 ; 0[\cup]1 ; \sqrt{2}[$

Los intervalos donde la pendiente es negativa ($f'(x) < 0$) son:

$]-\sqrt{3} ; -1[\cup]0 ; 1[$

Lo interesante de sus respuestas es que moviliza tres conceptos, el de la función creciente y decreciente, el de la pendiente de la recta tangente y el del signo de la primera derivada; es decir, el estudiante ha detectado en el gráfico los tramos donde la función crece y decrece, para esto utiliza la idea de la pendiente positiva, lo cual conlleva a que la gráfica de la función sea creciente y si la pendiente es negativa conlleva que sea decreciente.

Está claro que el estudiante ha desarrollado su noesis; es decir una aprehensión del objeto matemático o por lo menos de las funciones de monotonía y su relación con la derivada de una función, pero está basado en la semiosis que realizó, en este caso en los registros que utilizó, natural, simbólico e incluso el gráfico. Así D'Amore et al. (2015) señala con respecto a este punto.

> A nuestro criterio, Raymond Duval tenía razón cuando afirmaba: no existe noética sin semiótica (1993). Hoy sabemos que debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto, es decir, lograr que el aprendiz se dé cuenta que, frente a un objeto O, existen varias representaciones semióticas $Ri(O)$ de O ($i = 1, 2, 3, \ldots$). (p. 183)

El objeto O, en este caso podríamos, por ejemplo, plantearlo como la función creciente, entonces como los $Ri(O)$ tendríamos: $R1(O)$, el registro lengua natural donde la respuesta del estudiante es la "pendiente positiva"; $R2(O)$ el registro simbólico donde la respuesta del estudiante es el intervalo de crecimiento, $]-1{,}0[\cup]1,\sqrt{2}[$; $R3(O)$ un registro algebraico que sería $f'(x) > 0$ e incluso tendríamos un $R4(O)$ que sería el propio registro gráfico, que si bien no lo ha desarrollado, si debió utilizar el gráfico para visualizar donde la gráfica de la función es creciente.

Con respecto al análisis a priori, creemos que el estudiante respondió según lo que esperábamos no evidenciando errores y más bien haciendo uso de los registros semióticos algebraico _ simbólico y lengua natural.

Sistematización del CP1

A continuación, presentamos el cuadro adaptado que realizamos al propuesto por Pino-Fan (2013), donde en este ítem solo incidiremos en el CP1, es decir campo de problemas alusivos a las funciones monótonas y los signos de la primera derivada. Presentamos en la tabla 18.

Tabla 18

Sistematización del CP1 de la actividad 1

Campo de problemas (CP)	**Emergentes / Previas**		**Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$**														
			$f(x)$					**$f'(x)$**					**$f''(x)$**				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP1	$f(x)$	**Natural**															
		Algebraico															
		Gráfico	P_3, P_4 P_2		P_1, P_2			P_3	P_1, P_2 P_3, P_4								
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Se observa que como registro previo solo se ha consignado al registro gráfico, esto es porque el ítem 1 está planteado desde dicho registro o al menos tiene mayor preponderancia. Se observa, de la parte superior del cuadro, que el estudiante P1 para *representar la función* f ha utilizado el registro gráfico, esto evidencia en los trazos de las rectas tangentes a la gráfica de la función con pendientes positivas y negativas (tratamientos) que realizó en este registro. Y cuando representó a la derivada utilizó el registro algebraico-simbólico. El participante 2, para *representar la función* f*,* utiliza el gráfico de la función propuesto poniendo anotaciones en el registro algebraico, como, por ejemplo, $f'(x) > 0$, y en sus conclusiones menciona f es creciente o decreciente de manera correcta.

Con respecto a la *representación de la derivada* f' netamente trabaja en el registro algebraico. En el participante 3 hemos consignado, *en la representación de la función* f*,* el registro lengua natural, ya que intenta dar una respuesta del porqué la función es creciente utilizando palabras y frases; mientras que, en la *representación de la función derivada* f', utiliza el registro natural, porque intenta dar una explicación, también usando palabras acerca de la relación de la derivada y el crecimiento o decrecimiento de la función. También emplea el registro simbólico al expresar los intervalos.

Finalmente, el participante 4 para la *representación de la función* f utiliza el registro lengua natural para relacionar la pendiente positiva, por ejemplo, con el crecimiento de la función; y para la *representación de la derivada* f', utiliza el registro simbólico mediante los intervalos que consignó como respuesta.

En este ítem, estaba estipulado hacer énfasis en la función derivada y en el registro algebraico, lo que coincide con nuestro cuadro, ya que los cuatro participantes transitaron por este registro; sin embargo, resulta interesante que surgieron registros en la representación de la función, como el registro lengua natural y los tratamientos en el registro gráfico.

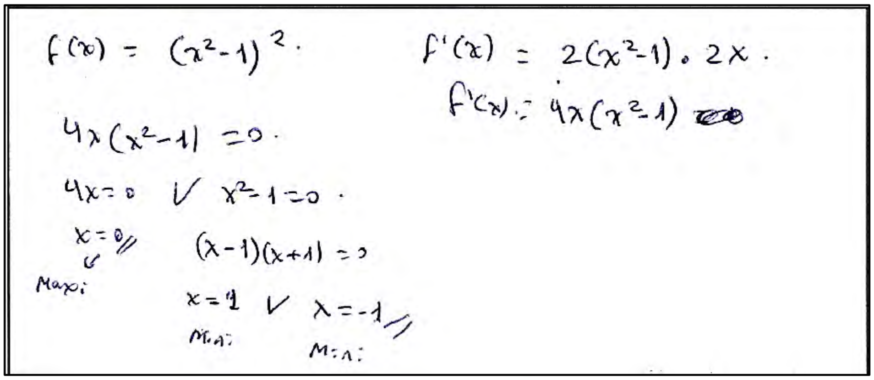
Campo de problemas 2 (CP2)

Análisis a Posteriori del CP2_ítem b) del Estudiante P_1

A continuación, presentamos la producción del participante 1 en la figura 39.

Figura 39

Producción del estudiante P_1 en ítem b)



Como se había previsto, el estudiante realiza tratamientos en el registro algebraico, deriva correctamente mediante la regla de la cadena, identifica la función externa e interna, luego iguala a cero la derivada y halla los números críticos. Luego discrimina el valor máximo y los valores mínimos, aunque no menciona como seleccionó estos valores, por lo que creemos que el estudiante tomó en cuenta la gráfica de la función y la relacionó con los números críticos, por ejemplo, para el valor de $x = 0$, observó que había un valor máximo y del mismo modo para los valores mínimos.

Verificamos que el estudiante conoce y domina los procesos que conllevan a determinar los valores extremos en el registro algebraico, el estudiante ha interiorizado las técnicas de derivación, usa las notaciones y simbologías correctas, y vincula sus resultados parciales con la gráfica de la función. Así pues, consideramos que si bien, el proceso y respuesta del ítem está dado en el registro algebraico, el estudiante ha tenido que hacer uso del registro gráfico para discriminar los valores extremos, en tal sentido, como lo menciona García y Bermúdez (2016).

> El acercamiento semiótico al lenguaje algebraico, mediante la integración de textos problema que permitan conjugar lo numérico y lo geométrico donde las fuentes de significado y los sistemas de representación semióticas de tratamiento y conversión como las planteadas por Raymond Duval (1999), solidados en una secuencia didáctica constituyen un enfoque coherente para la consolidación del pensamiento algebraico. (p. 409)

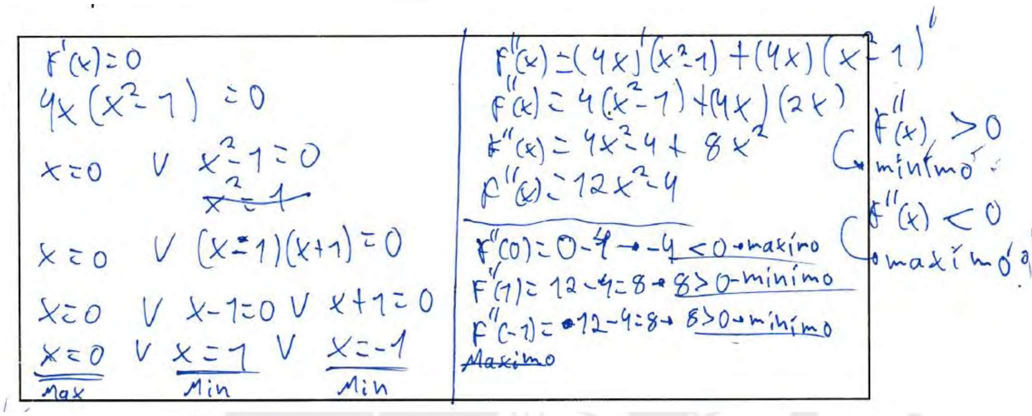
En función a esta cita consideramos que nuestra secuencia de actividades está vinculada con esta afirmación, ya que de sobre manera, el registro gráfico ha proporcionado insumos a esta secuencia didáctica para que las representaciones semióticas del lenguaje algebraico se puedan desarrollar; por lo que consideramos que nuestro participante 1 sí ha consolidado su pensamiento algebraico.

Análisis a Posteriori del CP2_ítem b) del Estudiante P_2

Este segundo estudiante, al igual que el primero, plasma sus procesos en el registro algebraico e incluso realiza un análisis más específico para hallar los valores extremos. A continuación, presentamos las producciones del estudiante P_2, en la figura 40.

Figura 40

Producción del estudiante P_2 en el ítem b)



Al igual que el participante 1, este estudiante realiza primordialmente el registro algebraico y simbólico para representar sus evidencias; sin embargo, a diferencia del primer participante comprueba los valores extremos por medio de la segunda derivada. Recordamos que este estudiante había realizado la derivada en el primer ítem, por lo que solo reescribió la derivada y la igualó a cero. Podemos afirmar que el estudiante conoce las propiedades referidas a la segunda derivada para determinar un máximo o mínimo local, utiliza el registro numérico al evaluar los números críticos de la primera derivada en la segunda, luego mediante los signos identifica los valores mínimos y el valor máximo.

Creemos que el estudiante interiorizó el método para obtener los valores extremos, esto conlleva que el estudiante realice transformaciones en el propio registro algebraico, es decir, realice tratamientos; aunque después realiza una conversión al registro numérico, pero sigue usando simbologías.

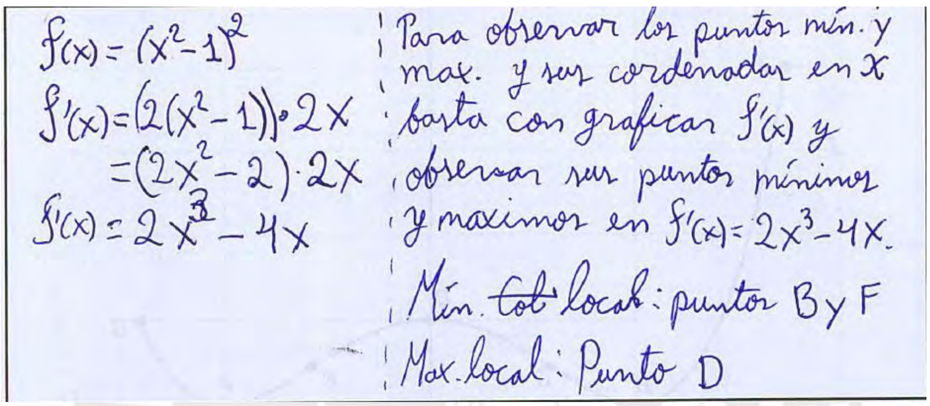
Finalmente, ambos participantes 1 y 2 creemos que han concordado con nuestros análisis a priori, donde el segundo participante, a diferencia del primero, al parecer, no utilizó ni de forma directa ni indirecta el registro gráfico.

Análisis a Posteriori del CP2_ítem b) del Estudiante P_3 y P_4

Hemos agrupado a los dos participantes porque poseen ciertas similitudes en sus producciones; así ambos hacen el mismo proceso de derivación, la regla de la cadena, pero el participante 3 comete un error al aplicar la propiedad distributiva; mientras que el otro estudiante sí realiza correctamente la derivación. A continuación, mostramos, en la figura 41, la producción del estudiante P_3.

Figura 41

Producción del estudiante P_3 en el ítem b)



$f(x) = (x^2-1)^2$

$f'(x) = (2(x^2-1))\cdot 2x$

$= (2x^2-2)\cdot 2x$

$f'(x) = 2x^3 - 4x$

Para observar los puntos mín. y max. y sus cordenadas en x basta con graficar $f'(x)$ y observar sus puntos mínimos y maximos en $f'(x) = 2x^3 - 4x$.

Mín. ~~tot~~ local: puntos B y F

Max. local: Punto D

Vemos que realiza tratamientos en el registro algebraico, deriva correctamente mediante la regla de la cadena, sin embargo, tiene dificultades cuando realiza la multiplicación de polinomios, este tipo de error lo habíamos consignado en nuestro análisis a priori y como lo había clasificado Radatz (1979, como se citó en Rico 1995) este error pertenece al grupo de errores por aprendizaje deficiente de conceptos previos y métodos. Luego el participante 3 esboza una justificación, en el registro lengua natural con el registro simbólico sobre la obtención de los valores máximos y mínimos; sin embargo, comete un error conceptual, es decir, no interpreta correctamente la propiedad, ya que afirma que para obtener los valores extremos se debe graficar la primera derivada y ahí identificar los valores máximos y mínimos, esto nos lleva a pensar que tiene una dificultad en comprender el concepto pero además tal como menciona Gonzales et al (2018) hay una “ausencia de la comprobación de la coherencia de los resultados obtenidos”. (p. 457) Está claro que el estudiante al obtener una función derivada incorrecta, en ningún momento corroboró con la gráfica propuesta los valores extremos; es decir, no halló los números críticos de la primera derivada, los cuales iban a salir diferentes en las coordenadas x de los valores mínimos con respecto al gráfico. Finalmente obtiene la respuesta, pero está claro, que lo realizó usando la gráfica de la función.

Por otro lado, el participante 4, del mismo modo, trabaja en el registro algebraico, realiza tratamiento y aplica acertadamente la regla de la cadena obteniendo los números críticos de la primera derivada. Luego, realiza una explicación del proceso de obtención (al igual que el participante 3) de los valores extremos; no realiza el análisis del como obtuvo los valores mínimos y máximos, solo los asocia con el gráfico de la función. Creemos que este estudiante sí ha realizado la coordinación entre los registros algebraico y el gráfico para relacionarlos, ya que se ha observado una asociación entre los resultados hallados en el registro algebraico y la obtención de los valores extremos con el apoyo del registro gráfico.

Sistematización del CP2

A continuación, presentamos nuestro cuadro, donde solo abordaremos el CP2. Aquí sintetizaremos las producciones que han realizado los estudiantes mediante el tránsito de los diversos registros que mostramos en la tabla 19.

Tabla 19

Sistematización del CP2 de la actividad 1

Campo de problemas (CP)	Emergentes / Previas		***Representaciones para*** $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{f'(x)}$ **y** $\boldsymbol{f''(x)}$														
			$f(x)$					$\boldsymbol{f'(x)}$					$\boldsymbol{f''(x)}$				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP2	$\boldsymbol{f(x)}$	**Natural**															
		Algebraico			P_1 P_3, P_4			P_3, P_4	P_1, P_2 P_3, P_4		P_2						
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Se observa que como registro previo solo se ha consignado al registro algebraico, esto es porque el ítem b) está planteado desde dicho registro. Para los registros emergentes se observa, de la parte superior del cuadro, que los estudiantes P_1 P_3 y P_4 para las *representaciones* *de la función f* han utilizado el registro gráfico, no de manera explícita, si no de forma indirecta; es decir, los estudiantes no han realizado trazos ni gráficas adicionales, si no que han utilizado la gráfica de la función para cotejar los números críticos hallados en los tratamientos algebraicos. Para las *representaciones de $f'(x)$,* como era de esperarse, todos los estudiantes utilizan el registro algebraico; todos, salvo el estudiante P_3 acertaron en sus tratamientos algebraicos; y solo los estudiantes P_3 y P_4 complementaron el registro algebraico con el registro lengua natural con explicaciones y justificaciones; aunque en el caso del estudiante P_3 fueron sin sentido. También el estudiante P_3 utilizó el registro numérico. Las simbologías utilizadas son correctas en los cuatro participantes.

En resumen, evidenciamos que el registro preponderante para la representación de función derivada fue el registro algebraico; los estudiantes realizaron tratamientos, aunque solo un estudiante realizó el análisis en el registro algebraico – numérico. El resto utilizó la gráfica de la función para dar con la respuesta.

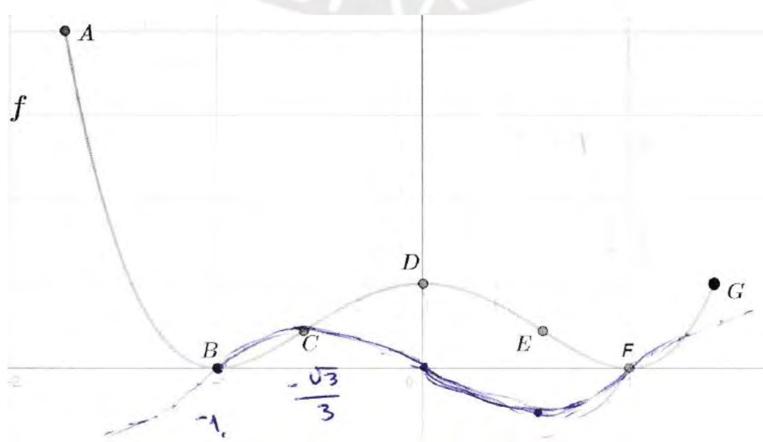
Campo de problemas 3 (CP3)

Análisis a Posteriori del CP3_ítems c), d), e) y h) del Estudiante P_1

El campo de problemas está compuesto por estos cuatro ítems, describiremos las acciones más relevantes del estudiante P1. En general el estudiante responde correctamente pasando por varios registros los cuales iremos detallando. Una cuestión muy interesante es el bosquejo del gráfico de la primera derivada que realizó, ya que esto no estaba estipulado en el ítem c) y tampoco en nuestro análisis a priori. Presentamos el dibujo del estudiante en la figura 42.

Figura 42

Producción del estudiante P_1 en el CP3



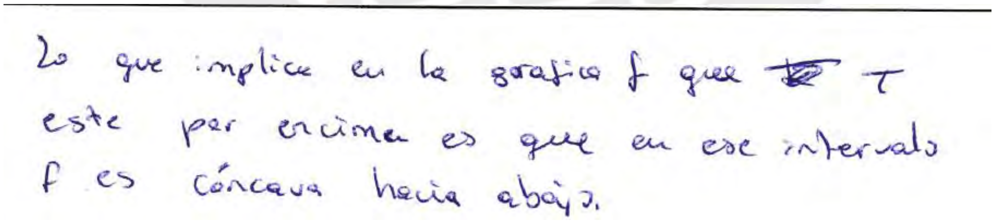
Como observamos el estudiante ha realizado un bosquejo de la gráfica de la primera derivada; creemos que realizar este bosquejo muestra que el estudiante ha interiorizado la relación de la gráfica de la función con la gráfica de la función derivada e incluso con aspectos de la gráfica de la segunda derivada. El tratamiento realizado en el registro gráfico es importante porque evidencia que el estudiante maneja muchos conceptos referidos a la derivada. Así, por ejemplo, reconoce que en los puntos máximos y mínimos de la función las coordenadas x de la gráfica de f' cortará al eje x; también reconoce que en los puntos de inflexión de la gráfica de f, en la gráfica de la función derivada hay valores extremos; y finalmente identifica la forma o curvatura de la gráfica de f', es decir las concavidades de f', salvo en el tramo inicial y final.

Consideramos que este estudiante ha movilizado un tipo de aprehensión discursiva, tal como lo manifiesta Duval (1994, como se citó en Vigo y Ferreira 2019) “la aprehensión discursiva de una figura explica propiedades matemáticas de la figura, como aquellas indicadas por una leyenda o por las hipótesis, que se configura como explicaciones de naturaleza deductiva con la función epistemológica de demostración”. (p. 209) Así, en este caso, el estudiante describe mediante el gráfico las diversas propiedades de nuestro objeto matemático, estas descripciones las irá detallando el estudiante a lo largo de toda la actividad 1.

Específicamente, en este campo de problemas (CP3) el estudiante P_1 reconoce el intervalo donde las rectas tangentes están por encima del gráfico de la función y por ende reconoce que hay una concavidad hacia abajo, tal como se muestra en la figura 43.

Figura 43

Producción en el registro lengua natural del estudiante P_1 en el CP3

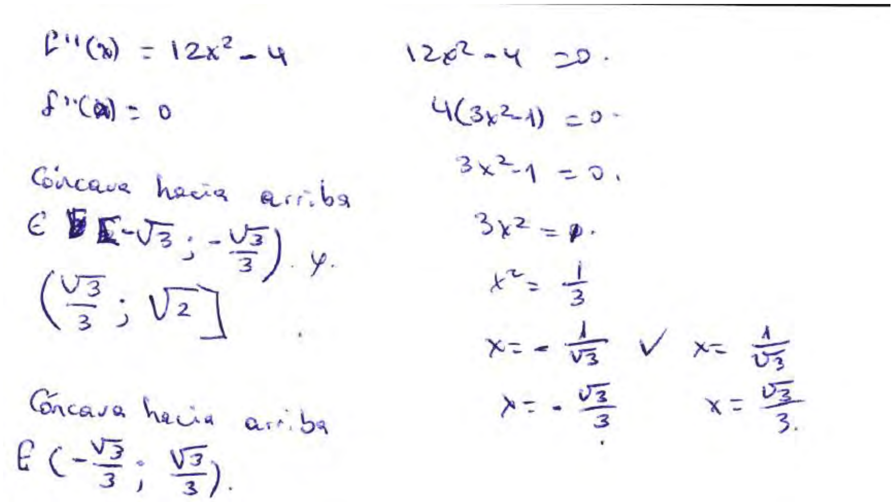

Lo que implica en la grafica f que ~~T~~ T
este por encima es que en ese intervalo
f es cóncava hacia abajo.

También reconoce que el punto mínimo (B) de la gráfica de la función, pertenece a un tramo de la gráfica de la función donde existe una concavidad hacia arriba. Para esto realiza tratamientos en el registro algebraico, obteniendo la segunda derivada y luego realiza una conversión al registro numérico evaluando la abscisa del punto B y determinado su signo.

Finalmente, para hallar los intervalos con valores exactos de las concavidades de la función el estudiante trabaja en el registro algebraico haciendo uso de tratamientos. Como mostramos en la figura 44.

Figura 44

Producción en el registro algebraico del estudiante P_1



$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) = 0$

Cóncava hacia arriba

$\in\ ]-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ y

$(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{2}]$

Cóncava hacia arriba

$\in (-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$.

$12x^2 - 4 = 0.$

$4(3x^2-1) = 0.$

$3x^2 - 1 = 0.$

$3x^2 = 1.$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

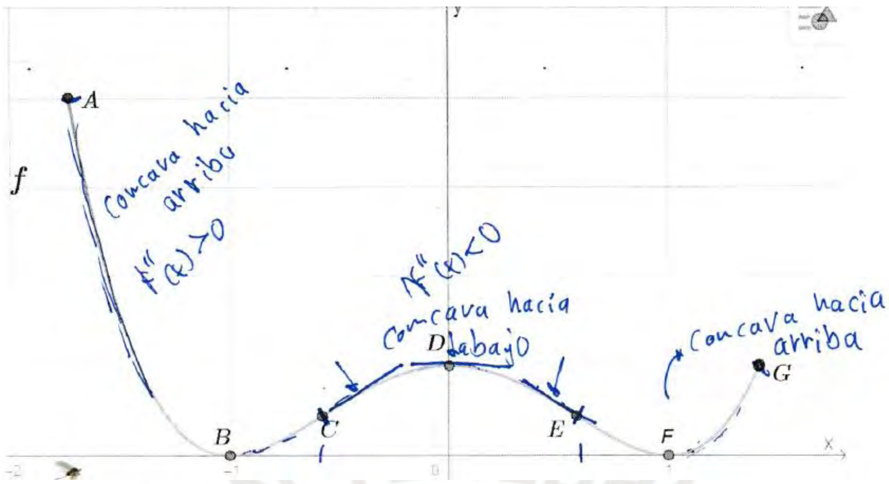
De este modo, vemos que el estudiante transita correctamente por diversos registros como el algebraico numérico y gráfico, aunque no hace mucho énfasis en el registro lengua natural. También demuestra manejo de la simbología y notaciones, aunque, al igual que el primer ítem, el estudiante mantiene el conector “y”, el cual conduciría a una intersección de intervalos.

Análisis a Posteriori del CP3_ítems c), d), e) y h) del Estudiante P_2

El estudiante P_2 realiza sus producciones utilizando diversos registros desde el gráfico, el algebraico, el numérico y lengua natural. Para el primer ítem trabaja en el registro gráfico propuesto, e identifica y traza las rectas tangentes que están por encima de la gráfica de la función, pero también las que están por debajo; además relaciona correctamente estas rectas T con el signo de la primera derivada y con las concavidades de la gráfica de la función utilizando notaciones y simbologías apropiadas. Mostramos el trabajo realizado por el estudiante P_2, en la figura 45.

Figura 45

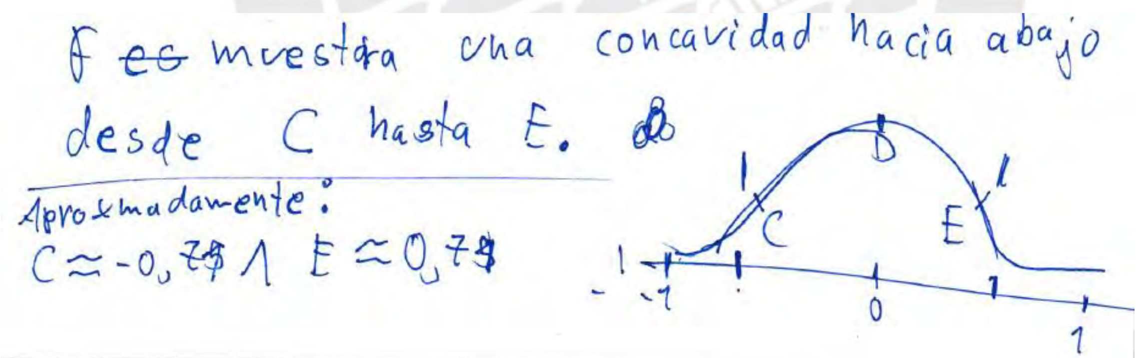
Producción del estudiante P_2 en el CP3



Luego realiza una explicación en lengua natural de lo señalado en la gráfica, donde lo único que difiere un tanto del valor real es la estimación (valor real $-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0{,}58$); aunque esta alineado con lo que proponía el ítem, es decir, que no hallen la segunda derivada. Esto lo mostramos en la figura 46.

Figura 46

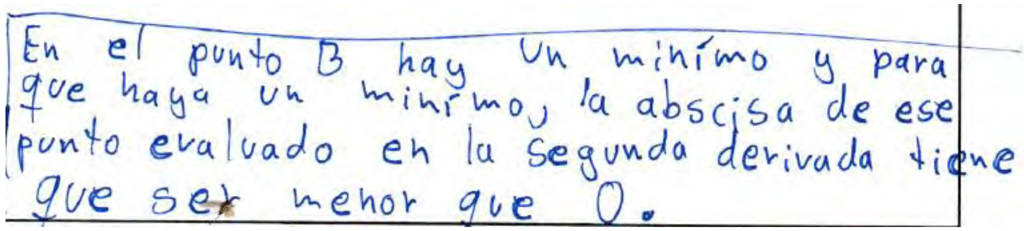
Estimaciones del estudiante P_2 en CP3



También observamos que introdujo la simbología $\wedge$, la cual, como ya se dijo de forma estricta recae en un error por el uso de la simbología incorrecta; además, como aspecto favorable es que el estudiante relacionó este intervalo con el signo negativo de la segunda derivada $f''(x) < 0$. Para el ítem e) el estudiante se vale del registro algebraico en un primer momento y luego el numérico para comprobar el signo de $f''(x_B)$, lo realiza con éxito, llegando simbólicamente que $f''(-1) = 8 > 0$; sin embargo, el error surge cuando lo plasma en el registro lengua natural. Lo mostramos en la figura 47.

Figura 47

Producción del estudiante P_2 en el registro lengua natural

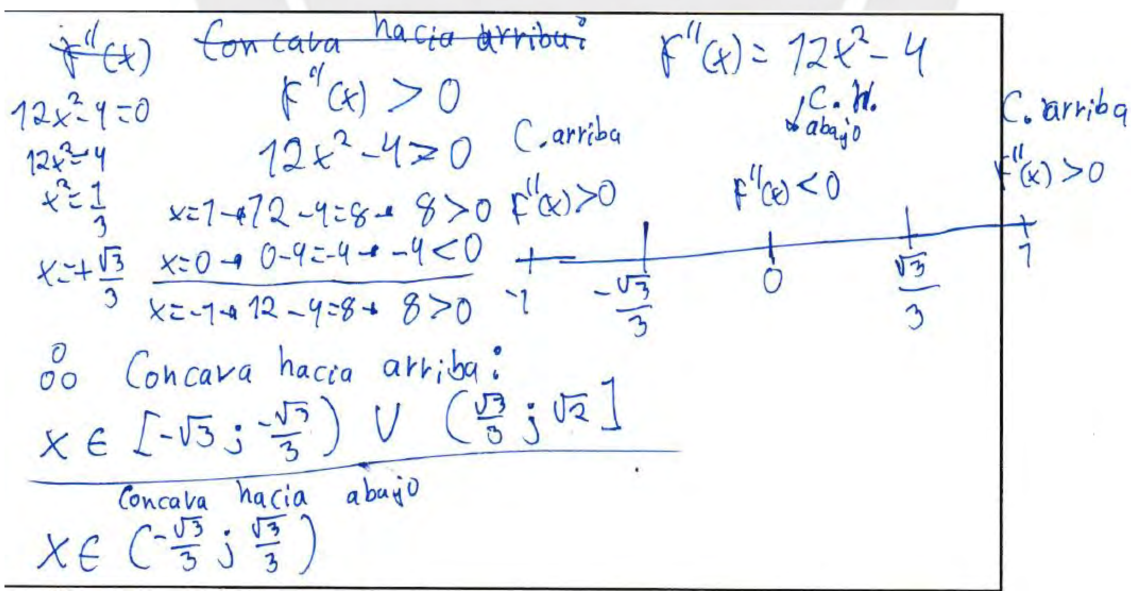

En el punto B hay un mínimo y para que haya un mínimo, la abscisa de ese punto evaluado en la segunda derivada tiene que ser menor que 0.

Observamos que el estudiante P_2 quiere aplicar la propiedad de la segunda derivada para identificar valores extremos; sin embargo, no la asocia correctamente, ya que la propiedad indica que para que haya un valor mínimo, la segunda derivada evaluada en la coordenada x del número crítico de la primera derivada debe ser mayor que cero, lo que verificaba su proceso $f''(-1) = 8 > 0$. El estudiante no contrastó su proceso con lo que menciona en el registro natural, como habíamos visto según la clasificación de Radatz, el estudiante comete un error de asociaciones incorrectas.

Finalmente, en el último ítem del CP3, el estudiante P_2 al igual que el participante 1, realiza los tratamientos algebraicos, pero también utiliza un esquema para evaluar los signos de la segunda derivada, tal como lo mostramos en la figura 48.

Figura 48

Producción del estudiante P_2 en el registro algebraico



Como vemos el estudiante toma $f''(x)$, que había hallado en el anterior ítem y luego determina los números críticos de la segunda derivada, en seguida, ubica los números críticos y valores de referencia, en este caso y de forma conveniente, toma los valores extremos de la primera derivada y todos estos valores los ubica en un segmento de manera ordenada y evalúa estos valores de referencia en f'' mediante el registro numérico.

Finalmente, expresa correctamente los intervalos utilizando notaciones y simbologías apropiadas.

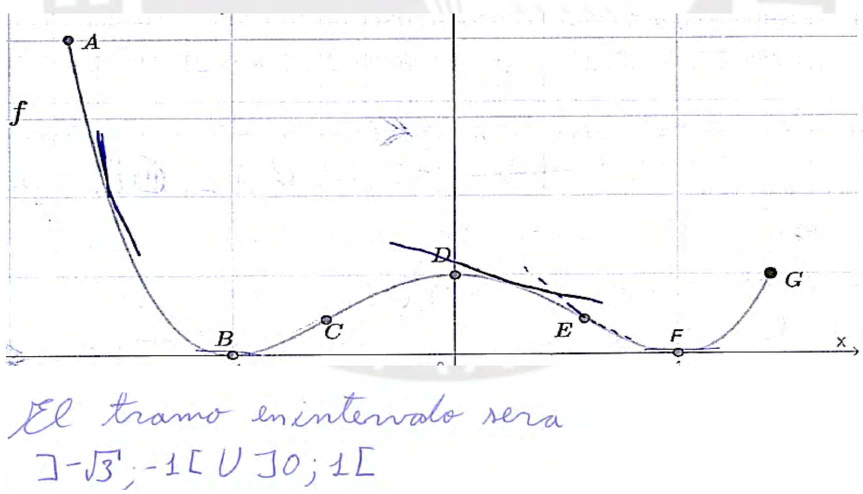
En general y salvo algunas incongruencias, creemos que el estudiante P3, ha cumplido con lo esperado en nuestro análisis a priori, moviliza varios registros y a diferencia del anterior participante pone más énfasis en el registro natural.

Análisis a Posteriori del CP3_ítems c), d), e) y h) del Estudiante P_3 y P_4

En este caso analizaremos a los dos estudiantes, aunque en este campo de problemas sí presentan diferencias en sus producciones; así observamos que el participante 3 ha tenido muchas dificultades. En el primer ítem, desconoce la posición de la recta tangente por encima de la gráfica de la función y por ende se equivoca en la estimación o en la referencia que presenta. Mostramos su producción en la figura 49.

Figura 49

Producción del estudiante P_3 en el CP3



Como vemos, solo acierta en la recta tangente que está entre D y E, pero tiene errores en la ubicación de las dos otras rectas tangentes; en la primera recta tangente que ubica entre A y B, está claro que el estudiante no relaciona la concavidad hacia arriba de la gráfica de la función con el hecho de que en ese tramo las rectas tangentes se encuentran por debajo de la gráfica, ya que como se observa la recta tangente la ubica por arriba.

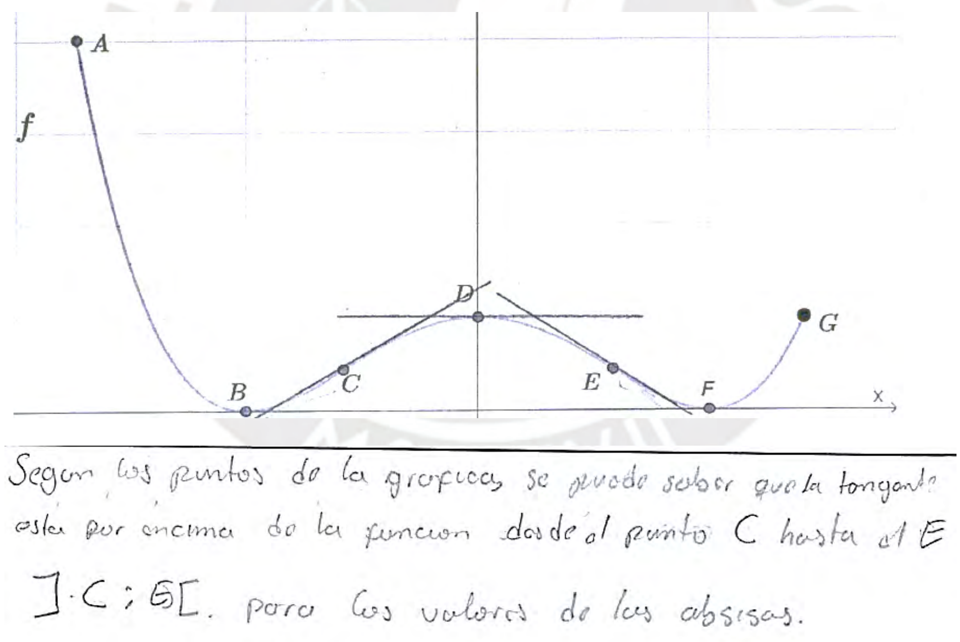
La segunda recta tangente que comete el error es la que pasa por el punto E, el punto de inflexión, en este caso el estudiante P_3 no reconoce que en el punto de inflexión la recta tangente pasa tanto por encima como a la derecha. Creemos que el estudiante no identifica o desconoce la definición de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función cuando ubica la recta tangente en A y B y además desconoce su característica cuando pasa por el punto de inflexión, para este tipo de error tomamos la afirmación de Gonzales et al. (2018)

> El desconocimiento de las funciones elementales y sus características principales también son fuente de bastantes errores, así como la falta de asimilación de los conceptos básicos de la geometría analítica (pendiente de una recta e interpretación de su signo, crecimiento y decrecimiento, ecuación punto-pendiente, etc.). (p. 457)

El estudiante P4, en cambio, sí traza correctamente las rectas tangentes por encima de la gráfica, detecta la zona donde ocurre esto, tal como lo mostramos en la figura 50.

Figura 50

Producción del estudiante P_4 en el registro gráfico, lengua natural y simbólico

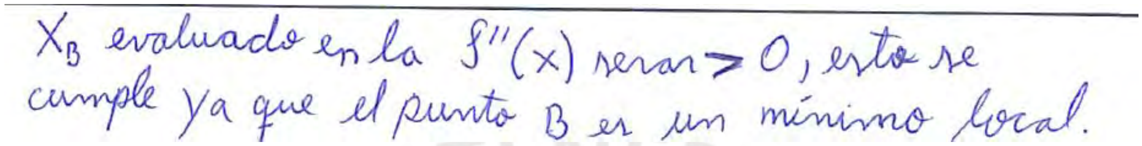


Este error se ha vuelto común, el estudiante P4 considera como los límites de los intervalos a los propios puntos (los cuales son las referencias correctas), desconociendo o no, dándose cuenta de que un punto en el plano cartesiano consta de dos componentes, por lo que la notación del intervalo que propone sería incorrecta. Con respecto al TRRS, vemos preponderancia del registro gráfico y lengua natural.

Con respecto a los ítems d) y e) el estudiante P_3 continúa teniendo muchas dificultades, así en el ítem d) se solicitaba la implicancia con respecto a la función sin embargo el estudiante esboza afirmaciones en el registro lengua natural, con respecto a f', las cuales carecen de coherencia, lo que evidencia un gran desconocimiento de la propiedad. A continuación, mostramos el ítem e) en la figura 51.

Figura 51

Explicación en el registro lengua natural del estudiante P_3


X_B evaluado en la $f''(x)$ seran > 0, esto se cumple ya que el punto B es un mínimo local.

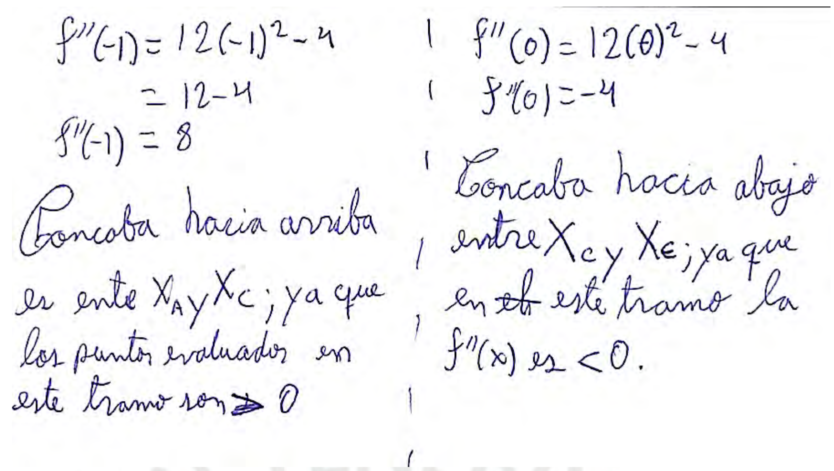
El estudiante da con la respuesta $f''(x) > 0$, pero la explicación queda ambigua, ya que correctamente afirma que en el punto B, al ser un punto mínimo, la gráfica de la función tiene una concavidad hacia arriba y por ende $f''(x) > 0$. Las notaciones y simbologías utilizadas son acertadas.

El Participante P_4 en el ítem e) tiene un error de interpretación ya que considera que la implicancia en f de las rectas T sobre la gráfica de la función conllevan a que hay punto de inflexión, de ser el caso, en el intervalo de referencia hallado por el estudiante habría infinitos puntos de inflexión, lo que origina una incongruencia conceptual. El estudiante responde correctamente al ítem e), usando tratamientos en el registro algebraico y numérico. Aplica correctamente la propiedad de la multiplicación de la derivada y luego explica y afirma, en el registro lengua natural, que la segunda derivada en la coordenada x de B es mayor que cero.

Finalmente, en el ítem g) el estudiante 3, corrige la primera derivada y luego halla correctamente la segunda, esto se evidencia en el ítem i) cuando el estudiante evalúa los valores de $x = -1$ y $x = 0$ en $f''(x)$, tal como mostramos en la figura 52.

Figura 52

Producción del estudiante P_3 en el registro numérico



Evidenciamos, que en este ítem el estudiante mejora con respecto a los ítems anteriores, ahora sí relaciona correctamente el signo de la segunda derivada en $x = -1$ que es la abscisa del punto B, y del mismo modo $x = 0$; sin embargo, notamos que no determinó un tramo de la concavidad hacia arriba. Otro aspecto, es que no analizó o al menos no lo mencionó, como obtuvo los valores de los límites, como x_c por ejemplo, es evidente que tuvo que apoyarse del gráfico propuesto, aunque en este ítem, se esperaba que realicen un análisis completo para encontrar los intervalos de las concavidades.

Con respecto a la TRRS el estudiante P3, exclusivamente en este ítem, realiza un predominio en registro numérico y lengua natural, usa simbologías y notaciones acertadas.

Sistematización del CP3

A continuación, presentamos nuestro cuadro, donde solo abordaremos el CP3. Aquí sintetizamos las producciones que han realizado los estudiantes mediante el tránsito entre los diversos registros. En este campo de problemas tenemos varios ítems y vemos que se trabaja más registros previos. A continuación, mostramos la tabla 20.

Tabla 20

Sistematización del CP3 de la actividad 1

Campo de problemas (CP)	Emergentes / Previos		Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD
CP3	$f(x)$	Natural	P_1, P_2 P_3, P_4	P_2													
		Algebraico												P_1, P_2 P_3, P_4		$P_2,$ P_3, P_4	
		Gráfico	P_3	P_1, P_2 P_3, P_4	P_2 P_3 P_4					P_1			P_2 P_3 P_4	P_1, P_2 P_3, P_4		P_1, P_2 P_3, P_4	
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p. 57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

En la columna de los registros previos, el concepto función, hemos propuesto desde el registro lengua natural para que los estudiantes realicen sus producciones emergentes en la ***representación de la función*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en los registros que ellos contemplen. También proponemos, el concepto de función desde el registro algebraico para que realicen sus producciones emergentes en la **representación de** $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$; y finalmente en el registro gráfico se propone la ***representación de*** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y también de $f'(x)$

Los estudiantes P_3 y P_4 en la tabla, en algunos casos están con una sombra, esto es porque consideramos que sus producciones realizadas muestran un error significativo; por lo que, sí se ha consignado en nuestro cuadro, pero a modo de diferenciarlos optamos por esta tonalidad.

De la tabla identificamos que cuando la pregunta se dio desde el registro lengua natural (ítem d) para trabajar en la *representación de la función* $f(x)$, todos los estudiantes dieron sus respuestas desde el mismo registro lengua natural y solo el estudiante P_2 transitó por el registro algebraico para complementar su respuesta en el registro lengua natural. Cuando la pregunta se dio desde el registro algebraico (ítem h) para trabajar en la *representación de la segunda derivada* $f''(x)$ todos los estudiantes optaron por el registro algebraico y el numérico, salvo el participante P_1 que exclusivamente trabajó los tratamientos en el registro algebraico.

Finalmente, cuando la pregunta se planteó desde el registro gráfico las producciones han sido variadas, así cuando se trabajó la *representación de la función* $f(x)$*,* el registro predominante fue el algebraico, por lo que los estudiantes tuvieron que realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Por otro lado, acerca del ítem c) observamos que tres de los cuatro estudiantes trabajaron en el registro gráfico. El estudiante P_3, transitó por el registro natural, aunque sus explicaciones tenían un error conceptual de fondo. Cuando los estudiantes trabajaron la *representación de la segunda derivada* $f''(x)$*,* los cuatro estudiantes transitaron por el registro algebraico y el numérico; aunque también consignaron sus procesos en el registro lengua natural, salvo el estudiante P_1, que no utilizó este registro. El estudiante P_3, evidenció errores conceptuales en el registro lengua natural.

Por último, el estudiante P_1 realizó una producción desde el registro gráfico para la *representación de* $f'(x)$*,* este caso fue singular, ya que ni el ítem lo requería, ni nuestro análisis a priori contemplaba este proceso.

Campo de problemas 4 (CP4)

Análisis a Posteriori del CP4_ítems f), g) e i) del Estudiante P_1

Este campo de problemas está compuesto por tres ítems, describiremos las acciones más relevantes del estudiante P_1. El estudiante respondió los ítems f) y g) desde el registro lengua natural, así en el ítem f) contestó las preguntas que se pedían, sin embargo, cuando se solicitó la estimación de los puntos de inflexión, el estudiante dio los valores exactos, tal como lo había hecho en el ítem c), entendemos que previamente ha calculado estos valores por medio de la segunda derivada. Seguidamente presentamos en la figura 53, la producción del estudiante en el ítem g).

Figura 53

Producción del estudiante P_1 en el CP4

~~La funcion~~ La recta T se encuentra tanto por encima como por debajo de f en $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, coinciden con los puntos C y E.

El nombre que reciben estos puntos es punto de inflexión donde la función cambia de concavidad.

En el segundo ítem, el estudiante responde en registro lengua natural, pero comete un error conceptual cuando afirma que la abscisa de f'' debe ser cero, cuando lo que se iguala a cero sería la ordenada ósea $f''(x) = 0$. Mostramos el detalle de su explicación, en la figura 54.

Figura 54

Explicación del estudiante P_1 en el registro lengua natural

La abscisa del punto C en $f''(x_c)$ es igual a cero ya que en la función real el punto C es punto de inflexión por lo que en la segunda derivada la abscisa es cero.

Este error nos generó muchas interpretaciones, por lo que, en este caso, consultamos al estudiante: *¿qué quiso decir con la abscisa del punto C de f''(x) es igual a cero?* El estudiante manifiesta que confundió el término ***abscisa*** por ***ordenada***, es decir cometió un error de interpretación; por lo que siguiendo la línea de Radatz (1979, como se citó en Rico 1995) observamos que el estudiante comete un error debido a dificultades en el lenguaje; es decir, el estudiante no ha comprendido semánticamente los textos matemáticos, por ello, afirma, la resolución de problemas verbales, o en nuestro caso la propiedad, está abierta a errores de traducción desde un esquema semántico a un esquema más formal como el lenguaje matemático. (p.13)

En este caso el estudiante no ha comprendido semánticamente el significado de la abscisa y la ordenada, por tal motivo confunde los términos y esto trae como consecuencia inconsistencias en las propiedades y definiciones.

En el ítem i) el estudiante respondió correctamente, haciendo tratamientos en el registro algebraico, halló los números críticos de la segunda derivada, pero no realizó la evaluación (tampoco en el ítem anterior) ya que le bastó tomar la gráfica propuesta para identificar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

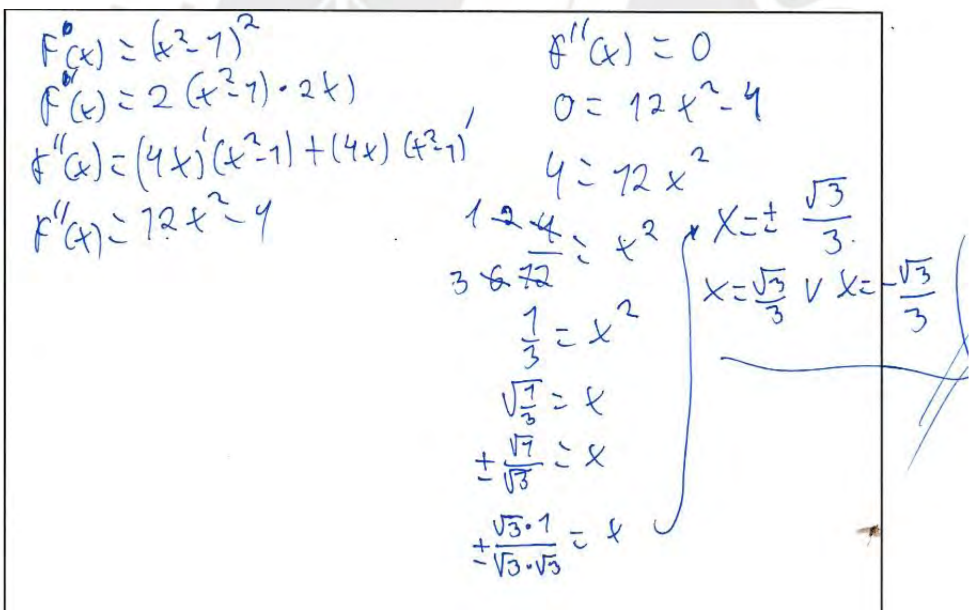
En general, y salvo el error cometido en el ítem g), consideramos que los procesos del estudiante P_1 están acordes con nuestro análisis a priori.

Análisis a Posteriori del CP4_ítems f), g) e i) del Estudiante P_2

En la figura 55 mostramos los procesos del estudiante P_2 en este ítem.

Figura 55

Producción del estudiante P_2 en el CP4



El estudiante, mayoritariamente utilizó el registro lengua natural para responder a los dos primeros ítems, complementando con el registro numérico y simbólico. En el ítem f), el estudiante entiende que el punto donde la ubicación de la recta tangente esta tanto por encima como debajo de la gráfica de la función es el punto de inflexión, lo especifica; sin embargo, toma la estimación hecha en el ítem c), la cual, como habíamos mencionado difiere algo con respecto al valor real.

Finalmente, en el ítem i) el estudiante sigue la secuencia planteada en nuestro análisis a priori, y mediante tratamientos en el registro algebraico determina los números críticos. En este ítem no realiza la evaluación de los signos para comprobar si los números críticos son las coordenadas x de los puntos de inflexión, ya que, lo había realizado en el ítem anterior.

También notamos que el estudiante domina métodos de derivación, ya sea por regla de la cadena o por multiplicación de funciones, también abrevia la raíz con el doble signo (error común), aunque después explicita las dos soluciones mediante el conector " $\vee$ ". Finalmente, el estudiante muestra que sí posee conocimientos suficientes para resolver la actividad planteada.

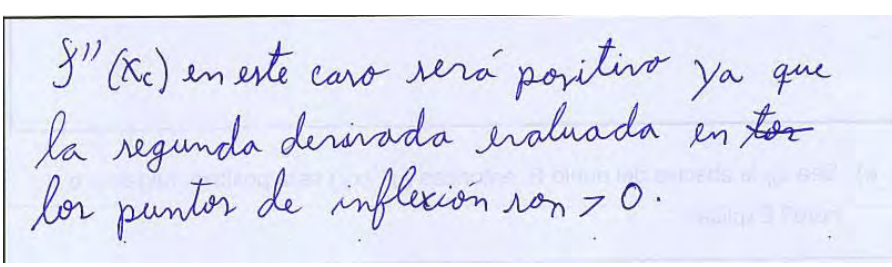
Por otro lado, observamos que el estudiante transita correctamente en el registro algebraico realizando tratamientos; además interpreta correctamente el gráfico de la función con la segunda derivada, por lo que consideramos que el estudiante ha movilizado una aprehensión *tipo discursiva* en el registro gráfico tal como lo manifiesta Ingar (2014, como se citó en Vigo y Ferreyra 2019) “la aprehensión discursiva describe propiedades matemáticas del registro gráfico, considerando la semántica de las propiedades del objeto con la función de formular conjeturas para la construcción del conocimiento” (p.209). En este caso y conforme a lo realizado en esta actividad 1 el estudiante comprende la semántica de las propiedades de la primera y segunda derivada de la función y a partir de ahí relaciona aspectos relacionados al punto de inflexión, concavidades, máximos y mínimos, etc.

Análisis a Posteriori del CP4_ítems f), g) e i) del Estudiante P_3

El estudiante realiza sus procesos, mayoritariamente, en el registro lengua natural y algebraico. En el ítem f) relaciona correctamente el punto de inflexión con las rectas tangentes que se ubican por encima y por debajo de la gráfica de la función. Utiliza la simbología correcta y la estimación es muy cercana al valor real. A continuación, mostramos en la figura 56, su proceso en el ítem g).

Figura 56

Producción del estudiante P_3 en el CP4


$f''(x_c)$ en este caso será positivo ya que la segunda derivada evaluada en ~~tos~~ los puntos de inflexión son > 0.

Para el ítem g), utiliza el registro lengua natural de forma predominante, en este ítem se evidencia un error en la aplicación de la teoría, así como lo manifiesta Movshovitz-Hardar (1987, como se citó en Rico 1995) en su clasificación de los errores que cometen estudiantes de secundaria.

> 4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable…aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; …; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmulas reconocibles. (p.14)

Consideramos que en este caso que el estudiante no identifica que en el punto de inflexión la segunda derivada corta al eje x, por lo que $f''(x) = 0$, a pesar de que en el ítem anterior sí identifica el punto de inflexión y su relación con las rectas tangentes; además, se aprecia que no logra coordinar el registro algebraico con el gráfico.

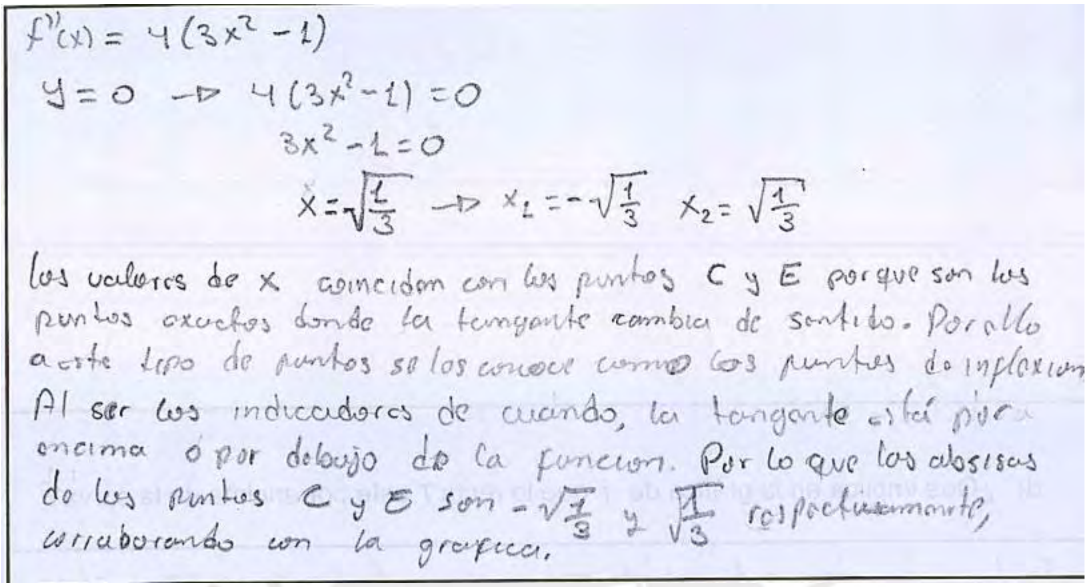
Finalmente, en el ítem i), el estudiante expresa sus procesos mediante el registro algebraico, realiza tratamientos que incluyen desarrollar la primera derivada y la segunda de forma correcta y luego igualar a cero; aunque no hace una validación de los signos de los números críticos. Podemos afirmar que las producciones del estudiante están conforme a nuestro análisis a priori.

Análisis a Posteriori del CP4_ítems f), g) e i) del Estudiante P_4.

El estudiante en su producción del ítem f) halla la segunda derivada y encuentra los números críticos mediante tratamientos en el registro algebraico, estos valores con los puntos C y E realiza una explicación en el registro lengua natural; a diferencia de otras producciones el estudiante realiza sus procesos y al final recién lo valida con la gráfica, tal como lo menciona. Y lo mostramos en la figura 57.

Figura 57

Producción del estudiante P_3 en el CP4



El estudiante evitó la estimación, es posible que no comprenda la terminología, aunque se definió este término de instrucción en la pregunta del ítem c); en tal sentido, creemos que la producción del estudiante difiere de nuestro análisis a priori. En el ítem g, el estudiante realiza un proceso muy diferente a los demás, se vale del registro numérico y simbólico para evaluar un número crítico de la segunda derivada hallado en el ítem anterior, obviamente el resultado es cero; es decir, realizó el proceso inverso cuando encontró los números críticos.

Consideramos que el estudiante ha relacionado los tres objetos matemáticos que se proponen, la segunda derivada, el punto de inflexión y la posición de la recta tangente.

Finalmente, en el ítem i), se recolectó todo lo realizado en estos dos ítems, y lo valida con un diagrama de signos (registro figural) que lo había realizado en el ítem anterior para determinar las concavidades.

Creemos que el estudiante ha saltado pasos que pedía la secuencia de la actividad; sin embargo, sí consideramos que el estudiante ha realizado la coordinación de registros, de manera específica el algebraico y el gráfico, complementado con el registro natural y numérico.

Sistematización del CP4

A continuación, presentamos nuestro cuadro, donde solo abordaremos el CP4. Aquí sintetizaremos las producciones que han realizado los estudiantes mediante el tránsito de los diversos registros. Este campo de problemas consta de tres ítems donde la pregunta en f) propone que los estudiantes realicen registros semióticos en la *representación de la función* $f(x)$; mientras que el ítem g) e i) las producciones se realizan en la *representación de* $f''(x)$; sin embargo, como en el ítem anterior, es posible que un estudiante utilice la representación de la primera derivada $f'(x)$ para realizar alguna explicación. Presentamos nuestra tabla 21, donde sintetizamos las producciones de los estudiantes en el CP4

Tabla 21

Sistematización del CP4 de la actividad 1

Campo de problemas (CP)	Emergentes / Previas		***Representaciones para*** $f(x)$, $f'(x)$ **y** $f''(x)$														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP4	$f(x)$	**Natural**															
		Algebraico												P_1, P_2, P_3, P_4	P_4		
		Gráfico	P_1, P_2, P_3, P_4	P_4		P_1, P_2, P_3							P_2, P_4 P_1 P_3	P_1, P_2, P_3, P_4			
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p. 57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

En este campo de problemas, vemos que se han propuesto como registros previos al gráfico y algebraico; si bien es cierto, hay enunciados que movilizarían el registro lengua natural, vemos que lo resaltante o la principal herramienta que se brinda en este campo es la gráfica de la función y la expresión funcional. Así cuando se *representó la función* $f(x)$ desde el registro gráfico los estudiantes trabajaron mayoritariamente en el registro natural para dar respuesta a preguntas ¿con qué puntos de la gráfica coincide? ¿Qué nombre recibe este punto? También dieron sus respuestas sen el registro numérico para dar la estimación de los puntos de inflexión, solo el estudiante P_4 brindó sus respuestas desde el registro algebraico, y esto se deba a que no comprendió el enunciado. Cuando los procesos estaban vinculados con la representación de $f''(x)$ vemos que todos los estudiantes trabajaron, de forma particular el ítem g), desde el registro algebraico y solo el estudiante P_4 trabajó en un registro que no hemos consignado en nuestro cuadro, el registro figural, pero lo hemos considerado dentro del registro gráfico.

4.3.2 Actividad 2

La segunda actividad se realizó en un tiempo de 50 minutos. El propósito de esta actividad es que, a partir de una función y con asistencia tecnológica (HP Prime), los estudiantes exploran, identifican, interpretan y reconocen elementos de las gráficas de la función, la primera y segunda derivada relacionando con los signos de f' y f'', los valores extremos locales y el punto de inflexión; además relacionan características de la recta tangente y su pendiente con respecto a la gráfica de las funciones f, f', f''.

Con respecto a las variables micro didáctica (VMD) como se mencionó movilizaremos las generales y específicas. Así, las VMD generales son:

- Desarrollo de la actividad con uso de la CPG HP Prime.
- La actividad se desarrolla a partir de una función dada.

4.3.2.1 Análisis a Priori de la actividad 2. A continuación, se presenta la actividad 2, para su análisis, hemos organizado las descripciones ítem por ítem; es decir, primero presentamos el ítem ai) de la actividad 2 y realizamos su análisis a priori y así sucesivamente. En el análisis a priori incluimos la solución experta y aspectos específicos de cada ítem, los que iremos detallando paso a paso.

Actividad 2_ Ítem a)

Al igual que en la actividad 1, iremos detallando puntos como el propósito específico del ítem, las VMD específicas, los subtemas inmersos y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones. Para organizar estos componentes, presentamos la tabla 22.

Tabla 22

Organización y descripción del ítem ai) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
Grafican la función en la HP Prime y luego dibujan aproximadamente teniendo en cuenta aspectos como el dominio, el rango, valores extremos, concavidades y punto de inflexión.	Gráfica de la función.	Grafica de la función $f(x)$ en: $-2 \leq x \leq 2$	Algebraico	RGD	RGD gráfico

Con respecto a las variables micro didácticas VMD, en este ítem, están asociadas a la gráfica de la función en un dominio dado.

En el registro previo de la tabla 22 está plasmado desde el registro algebraico, se espera que los estudiantes realicen una conversión y tratamientos al registro gráfico dinámico RGD y luego lo plasmen en el registro gráfico. A continuación, presentamos la solución experta del ítem a) e iremos realizando el análisis a priori.

ACTIVIDAD 2_ítem ai)

Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 - x + 4$. Responde las siguientes consignas.

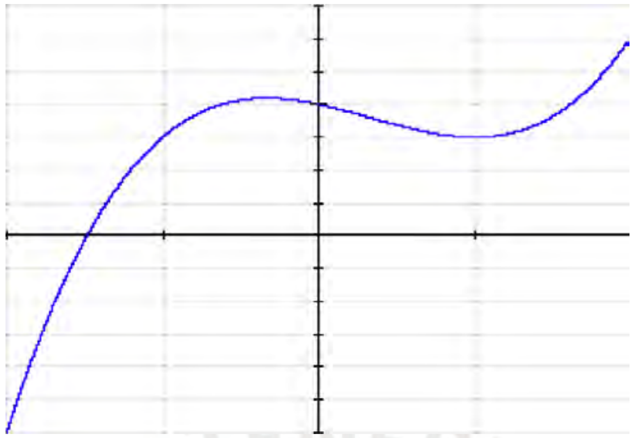
a.

i. *Dibuja aproximadamente la función f para $-2 \leq x \leq 2$ en la siguiente plantilla.*

En este ítem se espera que los estudiantes utilicen la calculadora HP Prime y dibujen la función. Recordemos, que la funcionalidad de la calculadora la explicamos en el capítulo 3, por lo que abreviaremos la secuencia del paso a paso. A continuación, presentamos la figura 58, que es una captura de lo que se espera realice el estudiante en la HP Prime.

Figura 58

Gráfica de f utilizando HP Prime

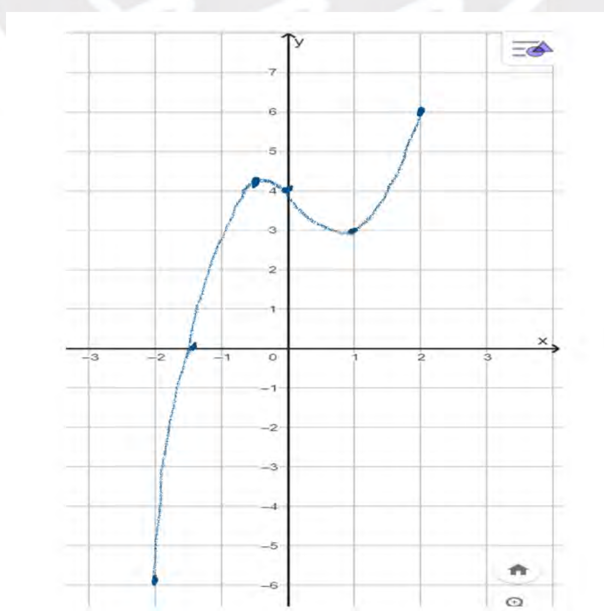


Es importante, incidir que este tipo de problemas son muy comunes en la examinación del Bachillerato Internacional que rinden nuestros estudiantes; por lo que es importante que cuando los estudiantes dibujen la función en la hoja incluyan elementos referenciales que brinda la graficadora HP Prime y que están alineados con el propósito específico del ítem. En la gráfica, esperamos que los estudiantes, puedan centrar la pantalla de la función según el dominio $-2 \leq x \leq 2$ y además que logren visualizar la imagen de la función.

Una vez que el estudiante graficó la función mediante el RGD, se espera que el estudiante dibuje en la hoja, tal como se muestra en la figura 59.

Figura 59

Gráfico esperado del estudiante en la hoja de trabajo.



Análisis a Priori. Se espera que cuando los estudiantes dibujen la función, realizada previamente en la HP Prime, realicen de forma muy aproximada el gráfico de la función, donde se haga notar el punto inicial $f(-2)$ y el final $f(2)$ y entre ellos tengan en cuenta las concavidades, el punto máximo y mínimo y los cortes a los ejes. Todos estos elementos son de utilidad para los demás ítems de la actividad.

Creemos que esta actividad mediante el uso de la HP Prime es relevante porque permite que los estudiantes amplíen sus conocimientos y clarifiquen sus dudas al explorar la herramienta tecnológica, tal como lo manifiesta Del Puerto y Minnaard (2003)

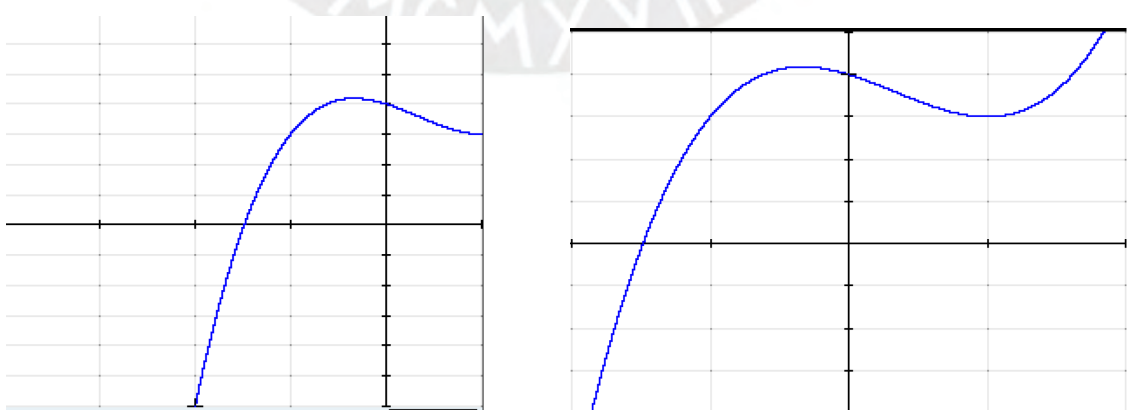
> Las calculadoras gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, favoreciendo una activa aproximación al aprendizaje y, aunque se podría pensar que ellas sólo permiten el trabajo individual, las investigaciones indican que promueven la interacción entre estudiantes y maestros y entre el conjunto de estudiantes. (p. 11)

Así, en nuestra investigación si bien no realizamos el trabajo en equipo, ya que no enfatizamos en las interacciones entre los estudiantes y estudiantes y maestros, sino nuestro objetivo está orientada a los tránsitos de los registros semióticos que realizan los estudiantes; sin embargo, consideramos que se podría incluir en futuras investigaciones, el trabajo en equipos haciendo énfasis en las interacciones.

Por otro lado, dentro de los posibles errores que puedan cometer los estudiantes, distinguimos que pueden darse desde los dos registros RGD y en el registro gráfico. En RGD es muy posible que al estudiante se le dificulte la forma de configurar la pantalla y corte partes de la gráfica tal como se muestra en la figura 60.

Figura 60

Errores comunes que realizan los estudiantes al graficar con la HP Prime



Así, por ejemplo, los errores que generalmente cometen los estudiantes al graficar en la HP Prime están relacionados con estas dos figuras, en la gráfica de la izquierda el estudiante no consignó correctamente el dominio de la función en la pantalla; mientras que en la derecha no consignó correctamente el rango de la función. Otro error que puedan cometer los estudiantes es el que haya digitado mal la función, llevándolo a un error de tipo arrastre. Este tipo de error lo incluye el Bachillerato Internacional en sus esquemas de calificación; así, por ejemplo, en el esquema de calificación de la convocatoria noviembre 2023, la Organización del Bachillerato Internacional (2023) define al arrastre de Error:

> FT Arrastre de error (del inglés Follow Through). La práctica de conceder puntos, a pesar de que el alumno haya concedido errores en apartados anteriores, por sus métodos/respuestas correctas a partir de resultados incorrectos. (p. 3)

En el registro gráfico, el error puede ser al dibujar la gráfica, muchos estudiantes fallan en la aproximación, por ejemplo, el punto de corte dista mucho del observado en la gráfica con la HP Prime, o el valor máximo está más alejado del valor real; también en la concavidad muestran errores, como por ejemplo invierten las concavidades o realizan trazos rectos en vez de curvos; además encontramos gráficas incompletas, como tramos de gráficas que sobran, o sea dibujan más de lo que el dominio indica, o el caso contrario, trazos de gráfica que faltan, es decir, grafican hasta antes del límite superior o después del límite inferior del dominio.

Actividad 2_ Ítem aii)

Del mismo modo que el ítem anterior, detallaremos las VMD específicas, los subtemas inmersos y finalmente los registros previos y esperados: los tratamientos y conversiones. Para organizar estos componentes, presentamos la tabla 23.

Tabla 23

Organización y descripción del ítem ai) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
Los estudiantes exploran el comportamiento de las rectas tangentes y sus pendientes a la gráfica de la función, y determinan los valores donde las pendientes son positivas o negativas a modo de intervalos	Pendiente y recta tangente a la gráfica de una función	$m > 0$ o $m < 0$	RGD	RGD	Simbólico numérico

En este ítem, es necesario que los estudiantes exploren la HP Prime y utilicen sus funcionalidades, creemos que las VMD están alineadas con el signo de las pendientes y además como registro previo se tiene al RGD, ya que es necesario que se movilice sobre la base de gráfica de la HP Prime, realiza tratamientos en este registro, utilizando las funcionalidades de la HP prime y como registro emergente se propone el registro simbólico o lengua natural. A continuación, mostramos la solución experta del ítem aii).

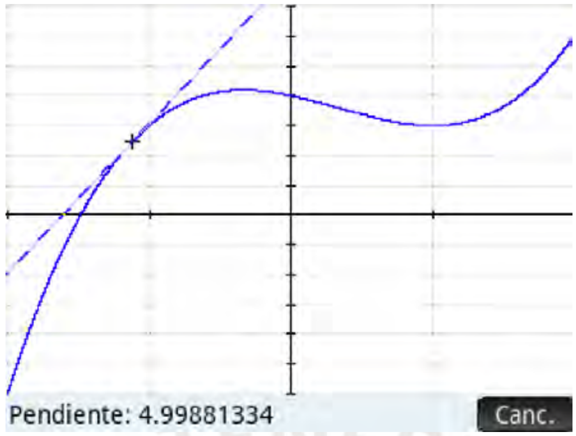
ii. Sea la recta T, tangente a la gráfica de f en cualquier punto

¿Para qué valores de x , la recta T, tiene pendiente negativa y para que valores de x es positiva?

En esta pregunta se espera que los estudiantes manipulen la HP Prime mediante el comando ***función*** y el modo ***pendiente*** y también se pueden complementar con la opción **tangente**, tal como mostramos en la figura 61.

Figura 61

Uso del comando pendiente y tangente de la app función de la HP Prime



Esperamos que una vez graficada la función por los estudiantes en la HP Prime, utilicen la opción *"pendiente"* y de manera complementaria la opción *"tangente"*. Esto implica, que cuando el estudiante movilice el cursor en la pantalla gráfica de la HP Prime, con la opción seleccionada les pueda dar la pendiente en cualquier punto y con la opción *"tangente"*, la HP prime les devuelve la recta tangente en cualquier punto donde el cursor se ubique. Así en el caso específico, en esta coordenada "x" $(x \approx 1{,}1)$, la HP Prime devuelve el valor de la pendiente $m \approx 5$.

Se espera que, habiendo realizado los tratamientos en el RGD, los estudiantes estimen estos valores e indiquen los intervalos.

Pendiente negativa: en registro simbólico $]-0{,}3; 1[$, o en registro numérico: *entre* $-0{,}3$ *y* 1 Pendiente positiva $[-2; -0.3[,]1; 2]$.

Análisis a Priori. En este ítem, se espera que los estudiantes realicen tratamientos en el RGD, para esto, es necesario que el estudiante conozca las funcionalidades de la Apps "función" de la HP Prime. Al manipular la herramienta tecnológica, se espera que los estudiantes de forma aproximada den con los valores extremos. Hay que hacer notar que el modo "extremo" de la HP Prime estará desactivado, por lo que, los estudiantes no lo podrán utilizar. La intención es que detecten este valor mediante los signos de la pendiente. Con respecto a la importancia del uso de la tecnología, Hitt (2003) manifiesta:

> … importante promover la visualización matemática utilizando diferentes representaciones y promoviendo un uso racional de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, se favorecerá la

construcción de conceptos a través de la coordinación, libre de contradicciones, de las diferentes representaciones relacionadas con dichos conceptos…

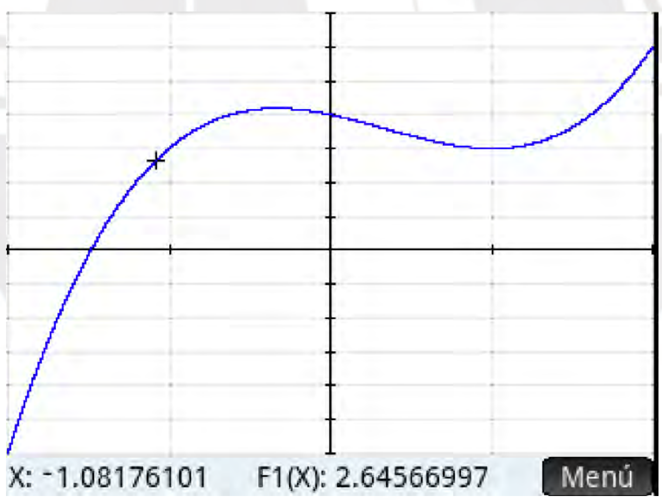
El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos fundamentales del cálculo (p. 23-24).

Consideramos que nuestras actividades impulsadas por el uso de la calculadora gráfica HP Prime son un complemento muy importante, para que los estudiantes mediante la visualización y la exploración les permita construir y asimilar los conceptos y propiedades de la derivada por medio de la coordinación del registro gráfico dinámico y el simbólico.

Con respecto a los errores que puedan cometer los estudiantes, en el componente tecnológico, el error tendría que ver con la funcionalidad de la HP Prime, es decir que no reconozcan la opción pendiente y/o recta tangente y confundan la ubicación del cursor, par ordenado (x, y), con el signo de la pendiente, tal como se observa en el ejemplo de la figura 62.

Figura 62

Errores de No reconocimiento de los comando pendiente y tangente



Así, en la figura, los estudiantes pueden cometer el error, al entender que el valor de la abscisa x, que muestra la posición del cursor, es el valor de la pendiente.

Actividad 2_ Ítem aiii)

Presentamos la tabla 24 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 24

Organización y descripción del ítem aiii) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD especificas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de obtener los intervalos de monotonía del ítem anterior y mediante la exploración del HP prime, los estudiantes estiman los valores donde la pendiente es cero y además los asocia con los valores extremos.	Recta tangente paralela al eje "x", pendiente nula, máximos y mínimos locales	$m = 0$	RGD	RGD	Simbólico lengua natural.

Siguiendo la línea del ítem anterior, los estudiantes, cuando exploran los signos de la pendiente, detectan el cambio de signo en la gráfica de la función, estiman el valor más aproximado que arroje la HP Prime y además reconocen que en este valor existen valores extremos. A continuación, mostramos la solución experta del ítem aiii).

iii. Estima en qué valor o valores de x la recta T tiene pendiente 0

Se espera que los estudiantes manipulando la HP Prime como en el ítem ii) estimen los intervalos de monotonía y se aproximen a los puntos máximos y mínimos.

$x = -0{,}3$ o simplemente $-0{,}3$.

$x = 1$ o simplemente 1.

¿Qué ocurre con la gráfica de la función f en los puntos estimados?

Se espera que, si no lo dijo en el ítem anterior, en esta pregunta lo mencione:

Que, cuando $\mathrm{x} = -0{,}3$ hay un punto máximo.

Que, cuando $\mathrm{x} = 1$, hay un punto mínimo.

Análisis a Priori. Este ítem está vinculado con el anterior, ya que solamente deben reconocer que los valores en x, cuando se acercan al punto máximo o al punto mínimo local, se hacen muy pequeños casi tendiendo a cero, por lo que deben relacionar la pendiente cero con los valores extremos y además con la recta tangente paralela al eje x.

Del mismo modo que en el ítem anterior el registro predominante es RGD, por lo que creemos importante que el estudiante realice tratamientos en este registro mediante la exploración de la recta tangente y su pendiente en la gráfica de la función; sin embargo, es posible que algunos estudiantes prefieran el proceso analítico para hallar las coordenadas x de los extremos relativos.

Consideramos que nuestras actividades impulsadas por el uso de la calculadora gráfica HP Prime son un complemento muy importante, para que los estudiantes mediante la visualización y la exploración les permita construir y asimilar conceptos y propiedades de la derivada por medio de la coordinación del registro gráfico dinámico y el simbólico. Los posibles errores que pueden cometer los estudiantes van en la línea del ítem anterior.

Actividad 2_ Ítem aiv)

Presentamos la tabla 25 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 25

Organización y descripción del ítem aiv) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de la función dada deriva la expresión y grafica mediante la HP Prime, luego dibuja aproximadamente la gráfica de la función derivada.	Derivación de funciones polinomiales y gráfica de la primera derivada	Gráfica de la primera derivada con HP Prime	Algebraico	Algebraico	GRD gráfico

En este ítem, la intención es que los estudiantes realicen tratamientos en el registro algebraico. Luego de hallar la derivada, grafican la función por medio de la HP Prime teniendo en cuenta el dominio para la configuración de pantalla. El tratamiento se realiza en el registro algebraico y se entiende que la derivación de una función polinomial tiene menor grado de dificultad que la derivación por la regla de la cadena que hicieron en la primera actividad, esto se hizo con la intención de minimizar el error y no se dé un error tipo arrastre. Los registros emergentes son el RGD para la gráfica una vez obtenido la función derivada y luego utiliza el registro gráfico para dibujar aproximadamente en la hoja. Presentamos la solución experta de este ítem.

iv. Deriva la función ($f'(x)$) y dibuja aproximadamente la función derivada en la misma plantilla del ítem ai)

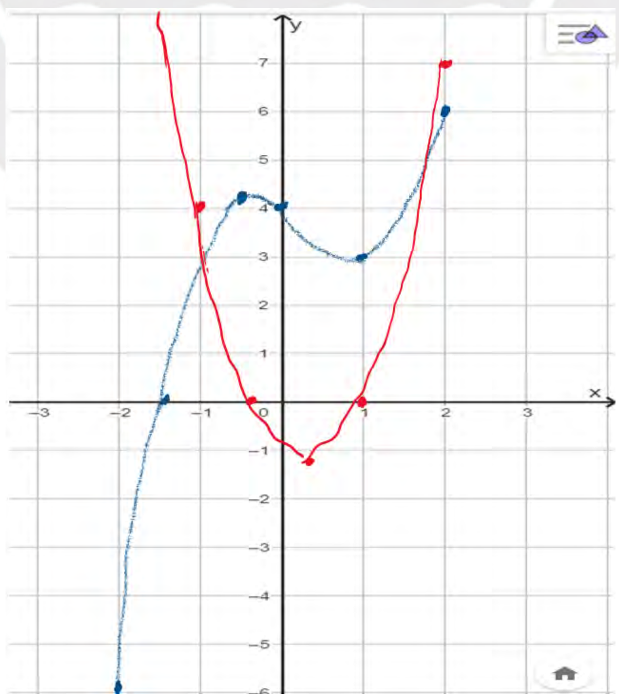
Acá se espera que realicen el tratamiento en el registro algebraico**.**

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Una vez realizada la derivada se espera que la inserten en la HP Prime del mismo modo que hicieron con la función.

Figura 63

Gráficos en simultáneo de la función y la función derivada



Tal como se graficó la función, esperamos que los estudiantes, al dibujar en la hoja, tengan en cuenta elementos que están inmersos en la gráfica de la función cuadrática, como la ubicación del vértice, las raíces de la función, el corte al eje y y la concavidad. Estos aspectos dan precisión y consistencia a la gráfica. Dentro de los posibles errores que podrían darse, tenemos errores en el proceso de derivación, lo que llevaría a un error tipo arrastre. Otro obstáculo podría darse en el plano tecnológico, al tener dificultades para configurar la pantalla y/o consignar los elementos referenciales que se describieron líneas arriba y que son necesarias a la hora de pasar el dibujo en la hoja.

En la misma línea, pueden darse errores al plasmar el dibujo en la hoja, por lo que se podrían encontrar errores de aproximación significativos o errores de forma como la concavidad.

Actividad 2_ Ítem v)

Presentamos la tabla 26 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 26

Organización y descripción del ítem av) de la actividad 2

Propósito específico	**Tema específico**	**VMD específicas**	**Registro previo**	**Tratamiento**	**Conversión: registros esperados**
A partir del gráfico de la derivada o de la función, determinan el intervalo donde $f'(x) < 0$ y lo asocian con la pendiente negativa.	Primera derivada: función decreciente	$f'(x) < 0$	RGD gráfico	RGD	Lengua natural simbólico.

En este ítem, se espera que los estudiantes, mediante la gráfica de la primera derivada, determinen el intervalo donde $f'(x) < 0$; es decir, identifiquen donde el grafico $f'(x)$ está por debajo del eje x, luego relacionen el intervalo con el ítem aii). La intención del ítem es que los estudiantes, al final, asocien el signo de la primera derivada con la pendiente negativa y el intervalo de decrecimiento de la gráfica. A continuación, presentamos la solución experta.

v. Halla para que valores $f'(x) < 0$, ¿el/los intervalo/s hallado/s tienen relación con el ítem aii)?

En la gráfica de la derivada se espera que hallen las raíces, para esto:

Usamos el modo ***Func.*** opción ***Raíz.***

$$x = -0{,}333$$

$$x = 1$$

Luego, $f'(x) < 0$ cuando $x \epsilon]-0{,}333; 1[$ o también cuando x se encuentra entre $-0{,}333$ y 1.

Análisis a Priori. Los estudiantes realizan un tratamiento en RGD, que consiste en hallar las raíces para determinar el intervalo donde la función derivada es negativa. Esperamos que los estudiantes consoliden estos aspectos en el registro simbólico o lengua natural. Finalmente, se pide la relación de este intervalo hallado con la pendiente negativa, la cual se podría representar en el registro lengua natural. En estos últimos 3 ítems es importante que el estudiante logre coordinar el RGD y el registro algebraico, ya que esta interacción favorece a la construcción conceptual, en nuestro caso del concepto derivada, por parte de los estudiantes, tal como afirma Guzmán (1998):

> Para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. (p.21)

Creemos que nuestras actividades fomentan que los estudiantes interactúen constantemente en los diversos registros como: GRD, algebraico, gráfico, numérico y lengua natural. Es posible que algunos estudiantes no utilicen la HP Prime, sino más bien realicen tratamientos en el registro algebraico y hallen los números críticos, luego verifiquen los valores extremos; sin embargo, consideramos que sería repetir lo mismo de la primera actividad, por lo que la importancia de las actividades es por la mediación del componente tecnológico, en nuestro caso la HP Prime.

Con respecto a los errores estos serían de tipo arrastre, es decir, si realizan una derivación incorrecta, por ende, la gráfica mediante la calculadora HP Prime sería diferente a la que se espera. Otra podría ser conceptual, como pasó en la actividad 1, donde confundieron los signos de la segunda derivada.

Actividad 2_ Ítem vi)

Presentamos la tabla 27 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 27

Organización y descripción del ítem avi) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir del gráfico de la derivada y de la función y por medio de la HP Prime, determinan las coordenadas x donde hay máximos y mínimos.	Primera derivada: máximos y mínimos locales	$f'(x) = 0$	RGD gráfico	RGD o gráfico	Lengua natural simbólico.

En este ítem esperamos que los estudiantes relacionen ambas gráficas de la función y la función derivada. En primer lugar, es importante que determinen los valores donde $f'(x) = 0$, los cuales han sido hallados en el ítem anterior mediante la opción *"raíz"* de la HP Prime en la función derivada. A continuación, deberán reconocer que estos valores están relacionados con los valores extremos de la función; para esto deberán verificarlos con los signos de la primera derivada teniendo como números críticos a estas raíces. A continuación, presentamos la solución experta.

Cuando $x < -0{,}333$, se observa que la gráfica de f' es positiva (encima del eje x). Y cuando $x > -0{,}333$, se observa que es negativa (por debajo del eje x). Gráficamente implica que en $x = -0{,}333$ hay un valor máximo. Cuando $x < 1$, se observa que f' es negativa. Y cuando $x > 1$, se observa que es positiva. Esto implica que en $x = 1$ hay un valor mínimo.

vi.Sin utilizar la opción Func._extremo. ¿Cómo podrías determinar las coordenadas x del valor máximo y mínimo local de f? Determina las coordenadas x.

Análisis a Priori. Como se mencionó, los estudiantes tendrían dos caminos para la resolución, creemos que sería más útil que relacionen mediante los signos; es decir, que evalúen los signos antes, entre y después de los números críticos; sin embargo, es posible que los estudiantes elijan el camino más directo, el cual consiste en corroborar que en las raíces de la primera derivada existe valores máximos o mínimos en la gráfica de la función.

En este ítem los estudiantes pueden optar por trabajar en el RGD o también en el gráfico; a propósito de este último registro, es posible que lo utilicen como parte de la explicación; además del registro lengua natural. Solamente utilizan el registro algebraico _ simbólico para expresar las coordenadas x donde hay valor máximo y mínimo.

Por otro lado, entre los errores de los estudiantes, podría haber errores de asociaciones incorrectas y rigidez del pensamiento como lo clasificó Radatz (1979, como se citó en Rico 1995) es probable que los estudiantes confundan o interpreten incorrectamente algunas propiedades y conceptos.

Actividad 2_ Ítem bi)

Presentamos la tabla 28 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 28

Organización y descripción del ítem bi) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de $f'(x)$ halla $f''(x)$ y luego grafica mediante la HP Prime. Plasma el dibujo en la hoja teniendo en cuenta elementos como cortes con los ejes y forma de la curva.	Derivación, gráfica de funciones	Gráfico de la segunda derivada con HP Prime	Algebraico	Algebraico	RGD gráfico

A partir de este ítem abordaremos conceptos referidos a la segunda derivada. Los estudiantes utilizan el registro algebraico realizando tratamientos luego utilizan el RGD por medio de la HP Prime, grafican la función teniendo en cuenta elementos como los cortes con los ejes y el trazo de la recta. A continuación, presentamos la solución experta del ítem bi).

b. En esta parte se trabajará con la función segunda derivada.

i. ***Halla $f''(x)$ y dibuja aproximadamente (con diferente color) la segunda derivada en la plantilla propuesta.***

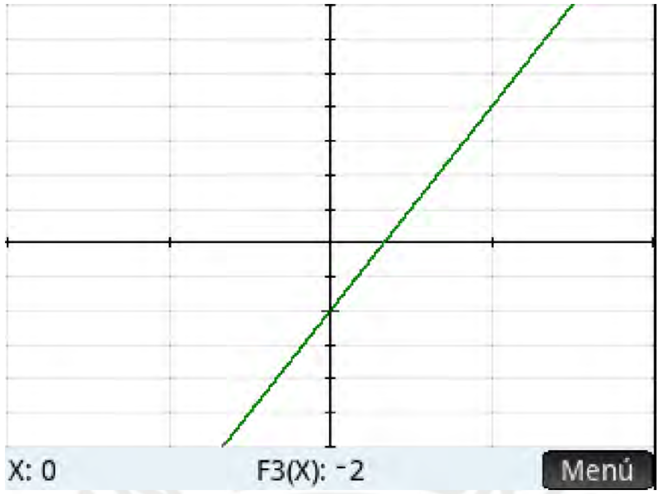
Acá se espera que realicen nuevamente el tratamiento en el registro algebraico**.**

$$f''(x) = 6x - 2$$

Una vez que han derivado por segunda vez, se espera que inserten en la HP Prime del mismo modo que hicieron con la función f y la función derivada f'. Mostramos en la figura 64 lo esperado.

Figura 64

Gráfica de la segunda derivada en HP Prime



Análisis a Priori. En este ítem, es posible, aunque poco probable, que los estudiantes realicen el proceso sin el uso de la HP Prime, solo tabulando la función lineal; es decir, trabajando el registro numérico o tabular, y luego en el registro gráfico. Es importante que estimen los cortes o los dibujen de forma muy aproximada, en especial el corte al eje x; ya que en esta raíz se da el punto de inflexión en la gráfica de la función.

Dentro de los posibles errores, podría darse por efectuar una incorrecta derivación, y también cuando plasman el gráfico de la HP Prime en la hoja. También es posible que cometan errores en la configuración de la HP; aunque es poco probable si antes no han tenido percances en este aspecto.

Actividad 2_ Ítem bii)

Presentamos la tabla 29 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 29

Organización y descripción del ítem bii) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir del gráfico de f'' o f' o f determinan los intervalos donde $f'' < 0$ o $f'' > 0$	Segunda derivada: concavidades	$f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$	RGD gráfico	RGD	Algebraico simbólico.

Teniendo como base los gráficos de f'', pero también f y f', los estudiantes identifican y determinan las concavidades de la gráfica de la función f. Con respecto a las VMD, hemos consignado los signos de la segunda derivada ya que trabajan con las concavidades de la función; y en cuanto a los registros, como previo tenemos el RGD o el registro gráfico. Si eligen por el registro RGD, deben realizar tratamientos en el mismo registro; pero si eligen el registro gráfico, podrían realizar conversiones al registro algebraico o numérico o tabular y luego retornar al registro gráfico. Finalmente, las respuestas se dan desde el registro algebraico-simbólico y lengua natural. A continuación, presentamos la solución experta del ítem bii).

Usamos el modo ***Func.*** opción ***Raíz.***

$$x = 0{,}333$$

Luego, $f''(x) < 0$ cuando $x\epsilon[-2; 0{,}333[$;por lo que existe una concavidad hacia abajo en este intervalo.

Para $f''(x) > 0$ cuando $x\epsilon]0{,}333; 2]$; por loque existe una concavidad hacia arriba en este intervalo.

ii. ¿Para qué valores $f''(x) < 0$ y $f''(x) > 0$? ¿Qué nombre reciben estos tramos en la función?

Análisis a Priori. En este ítem esperamos que los estudiantes al observar el grafico de la segunda derivada, sea en la HP Prime o en el gráfico del ítem anterior, deduzcan los intervalos donde la segunda derivada sea negativa y sea positiva. Con apoyo de la HP Prime o mediante cálculos en la hoja, lo estudiantes determinan la raíz de f'', y relacionan con el número crítico de la segunda derivada.

Con respecto a los errores de los estudiantes, estos podrían ser de interpretación de la propiedad y también de asociación, ya que tendrían dificultades en relacionar los signos de la segunda derivada con las concavidades de la función f; en ese sentido, el problema sería que los estudiantes han interpretado las gráficas de f, f' y f'' de forma independiente no relacionándolas unas entre otras.

Actividad 2_ Ítem biii)

Presentamos la tabla 30 con la descripción del propósito específico, los temas, las VMD y la TRRS.

Tabla 30

Organización y descripción del ítem biii) de la actividad 2

Propósito específico	Tema específico	VMD específicas	Registro previo	Tratamiento	Conversión: registros esperados
A partir de las gráficas f'', f' y f determinan las coordenadas del punto de inflexión.	Segunda Derivada: Punto de inflexión	$f''(x) = 0$	GRD gráfico	GRD gráfico	Natural Simbólico

Finalmente, este ítem sintetiza lo visto en los ítems bi) y bii), hasta aquí los estudiantes ya han graficado la segunda derivada, ya conocen el punto de corte; lo único que le faltaría es analizar que esta raíz sea el punto de inflexión, para esto utiliza los signos de f''. Las VMD están relacionadas con $f''(x) = 0$ y los registros previos están dados desde las gráficas halladas en los ítems anteriores; es decir, en el registro RGD y el gráfico. Sus respuestas pueden estar dadas en el registro natural y simbólico, generando la conversión entre los registros previos y emergentes. Presentamos la solución experta del ítem biii).

iii. Halla el punto de inflexión, utiliza las gráficas para explicar, o de cualquier otro modo.

Cuando $x < 0{,}333$, se observa que la gráfica de f'' es negativa (encima del eje x), y cuando $x > 0{,}333$, se observa que es positiva (por debajo del eje x). Esto implica que en $x = 0{,}333$ hay un punto de inflexión.

Análisis a Priori. En este último punto, se espera que los estudiantes identifiquen que el punto de inflexión (único) ocurre cuando $f''(x) = 0$ y cuando cambian de signo f'', lo pueden verificar ubicando el punto en el gráfico de f.

Con respecto a los errores que pueden cometer los estudiantes, al equivocarse en el punto de inflexión con el corte al eje y, y también de asociación, al igual que el ítem anterior no vincula la raíz de f'' con el punto de inflexión.

4.3.2.2 Análisis a Posteriori de la actividad 2. Antes de realizar el análisis a posterior definiremos nuestros campos de problemas, los cuales son los mismos que la actividad 1, sin embargo, vamos a añadir un campo adicional que es la gráfica y la derivada de las funciones $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}'$ y $\boldsymbol{f}''$. Presentamos en la tabla 31 los campos de problemas.

Tabla 31

Campos de problemas relacionados con la derivada de la actividad 2

Campos de problemas (CP)	Objetos matemáticos relacionados
CP0	Gráfica y derivada de las funciones: f, f' y f''.
CP1	Primera derivada: funciones monótonas, $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$.
CP2	Primera derivada: Extremos relativos, $f'(x) = 0$
CP3	Segunda derivada: Concavidades, $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, tangentes por debajo y encima de la gráfica de f.
CP4	Segunda Derivada: Punto de inflexión, $f''(x) = 0$

Así pues, dependiendo del ítem, identificaremos a qué campo de problemas corresponde para poder plasmarlo en nuestro cuadro adaptado.

A continuación, proponemos en la tabla 32 nuestro cuadro adaptado de la actividad 2 para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 32

Cuadro adaptado para el análisis a posteriori de la actividad 2

Campo de problemas (CP)	**Previas** \ **Emergentes**		**Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$**														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP0	$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP1	$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP2	$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
CP3	$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico															
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															

CP4	$f(x)$	**Natural**
	$f'(x)$	**Algebraico**
	$f''(x)$	**Gráfico**
		Numérico
		RGD

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Otra modificación que hemos realizado con respecto a la actividad 1, es en el componente “previas” (encabezado de la tabla), en este caso sí se incluye la función primera y segunda derivada, ya que dependiendo del ítem sí se tendrá como concepto previo a una de estas funciones: Por ejemplo, al inicio de la actividad como registro previo se tendría a la expresión $f(x)$; la cual está dado desde el registro algebraico, luego los estudiantes realizan una conversión al RGD; entonces la gráfica de la función sería el registro emergente. Para los siguientes ítems este registro emergente pasa a ser registro previo; ya que, la gráfica de la función ya la realizó en la HP Prime.

De esta manera los registros previos y emergentes se pueden ir alternando y pueden estar dados desde el concepto de función, función primera derivada y función segunda derivada; y sus conversiones se puedan expresar en representaciones de f , f' y f'',

Finalmente, para la agrupación de los ítems en los campos de problemas, presentamos en la tabla 33 la distribución.

Tabla 33

Distribución de los ítems de la actividad 2 en los campos de problemas modificados

Campos de problemas	ítems
CP0	ai), aiv) y bi)
CP1	aii), aiv) y av)
CP2	aiii), aiv) y avi)
CP3	bi) y bii)
CP4	bi) y biii)

Se ha generado un campo de problemas adicional, ya que realizar los *gráficos de las funciones* no estaban contemplados en la actividad anterior, esto debido a que la gráfica de la función la brindaba la actividad. En este caso, sí es necesario que los estudiantes realicen el gráfico, por lo que se necesitaba generar un campo adicional para poder incluir este caso. A parte de los gráficos, los ítems aiv) y bii) requieren derivar; así, en el caso de la primera derivada, este concepto moviliza tanto al campo 1 y 2; por lo que se ha considerado en ambos ítems al momento del análisis a posteriori. Del mismo modo, con el ítem bii), que requiere realizar la segunda derivada; por lo que, este concepto moviliza al campo 3 y 4 según el análisis a posteriori.

Finalmente, otro aspecto a detallar es la inclusión de capturas de pantalla de las grabaciones de los tratamientos que realizan los estudiantes en el RGD, según sea el caso; además, de los procesos que han consignado en la hoja de respuestas.

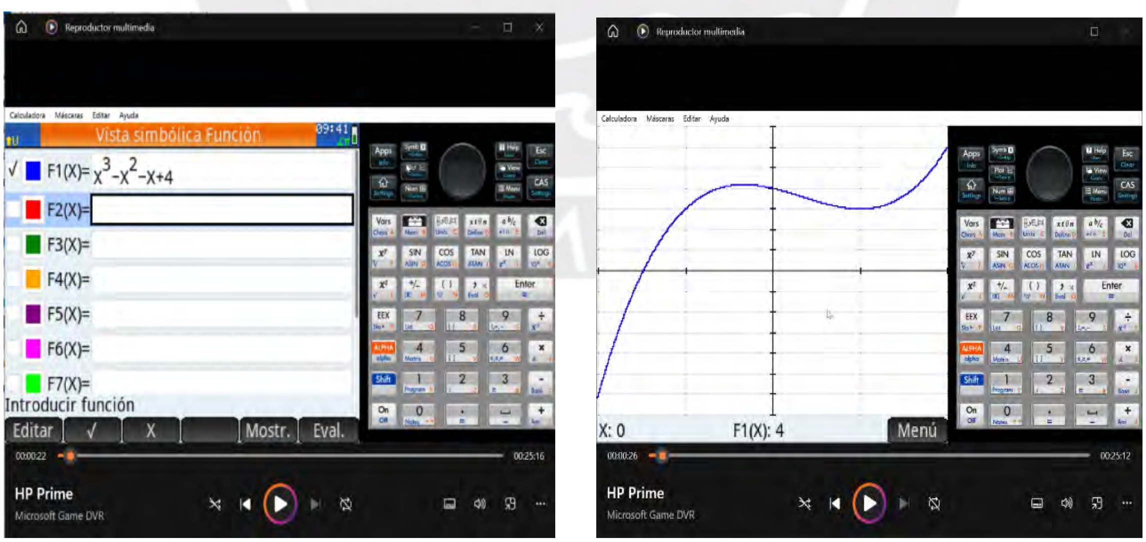
Campo de problemas 0 (CP0)

Análisis a Posteriori del CP0_ítems ai), aiv) y bi) del Estudiante P_1

El estudiante P_1 utilizó la HP Prime para realizar las gráficas de la función, así en su grabación de pantalla se registraron aproximadamente 24 minutos, donde se evidencia los pasos que siguió en la HP Prime, como mostramos en la figura 65.

Figura 65

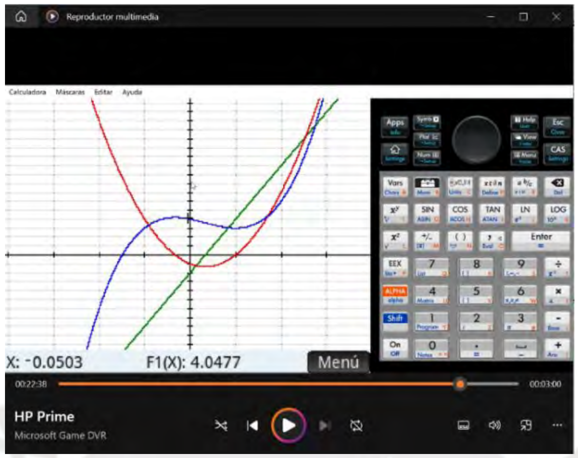
Producción del estudiante P_1 en el CP0



En esta primera captura, evidenciamos que el estudiante inserta la función en la figura de la izquierda, y luego la HP Prime le arroja las gráficas, en la figura de la derecha; vemos que no necesitó configurar la pantalla, seguramente porque lo había hecho antes de grabar. Luego continuó con el mismo proceso para la primera y segunda derivada, como se muestra al final de su grabación en la figura 66.

Figura 66

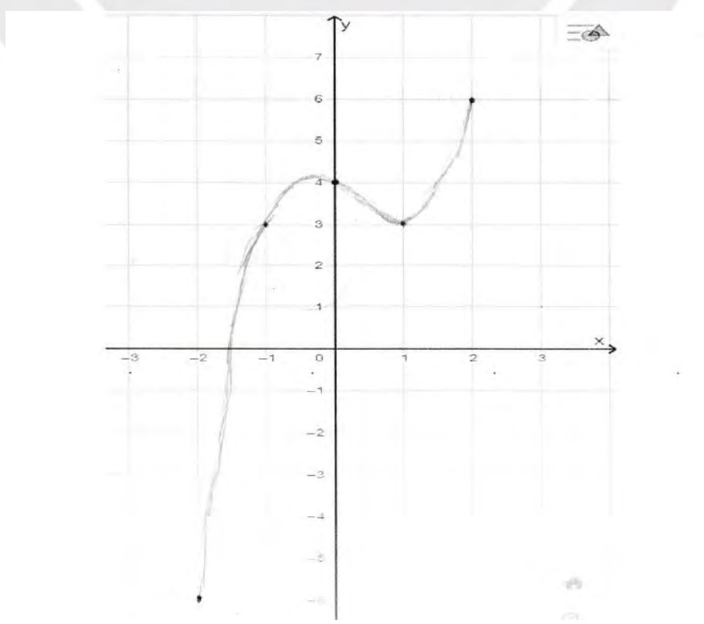
Gráficas en el HP Prime del estudiante P_1 en el CP0



Es importante hacer notar que el estudiante no ha utilizado las funcionalidades de la HP Prime, las cuales iremos detallando según el campo de preguntas que corresponda, lo cierto es que el estudiante P_1 solo ha graficado las funciones, y para hallar los demás elementos lo ha realizado de forma analítica mediante tratamientos algebraicos. Ahora presentamos en la figura 67 las producciones del estudiante P_1 en la ficha de trabajo.

Figura 67

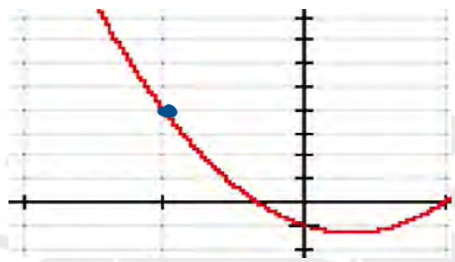
Dibujo del estudiante P_1 en el CP0



En el dibujo de la función, apreciamos que el estudiante realiza un trazo muy aproximado, pero notamos que en los puntos referenciales (valor de inicio, cortes, máximos y mínimos) ha realizado cálculos numéricos; es decir ha utilizado el registro numérico, para encontrar por ejemplo el valor para $f(-2)$. Para los siguientes gráficos realizó el mismo proceso; se entiende que para valores que son visibles en la cuadrícula de la pantalla de la HP Prime, solo identificó la coordenada, como mostramos en la figura 68.

Figura 68

Identificación de la coordenada mediante las cuadrículas por el estudiante P_1



Así, el estudiante fácilmente puede determinar la imagen $f(-1)$, ya que dicha imagen se ubica en el cruce de las cuadriculas, de esa forma pasó la gráfica de la pantalla a la hoja.

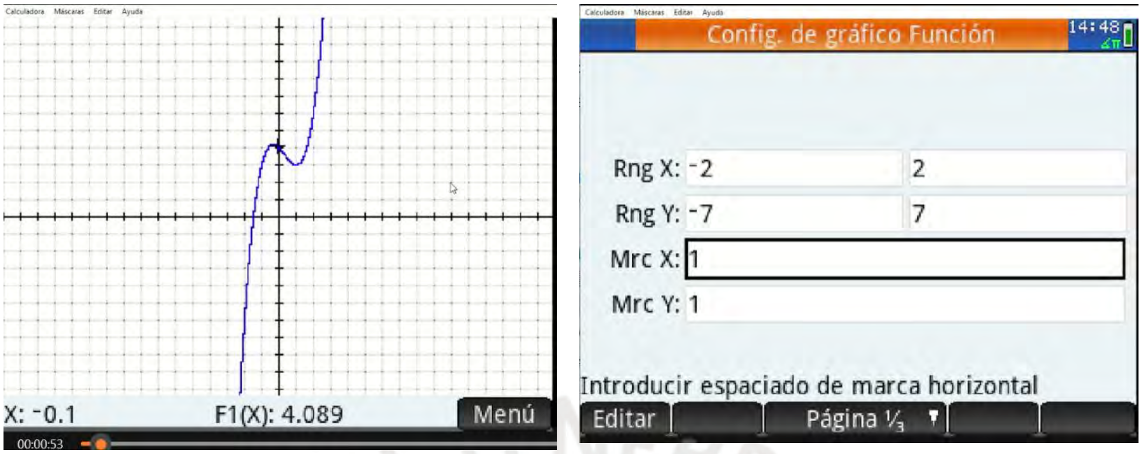
Con respecto a nuestro análisis a priori, consideramos que las producciones del estudiante distan un tanto de nuestra propuesta, ya que esperábamos que el estudiante utilice las funcionalidades de la HP Prime para consignar los elementos referenciales de las gráficas; sin embargo, de forma parcial sí realizó las gráficas, pero utilizó otros registros como el algebraico y el numérico y la visualización de la pantalla para obtener una gráfica muy aproximada.

Análisis a Posteriori del CP0_ítems ai), aiv) y bi) del Estudiante P_2

El estudiante P_2, sí realizó más tratamientos en el registro RGD, con respecto al estudiante P_1, la grabación de su pantalla tuvo un tiempo de aproximadamente 50 minutos. A continuación, presentamos algunas capturas de sus producciones, en la figura 69.

Figura 69

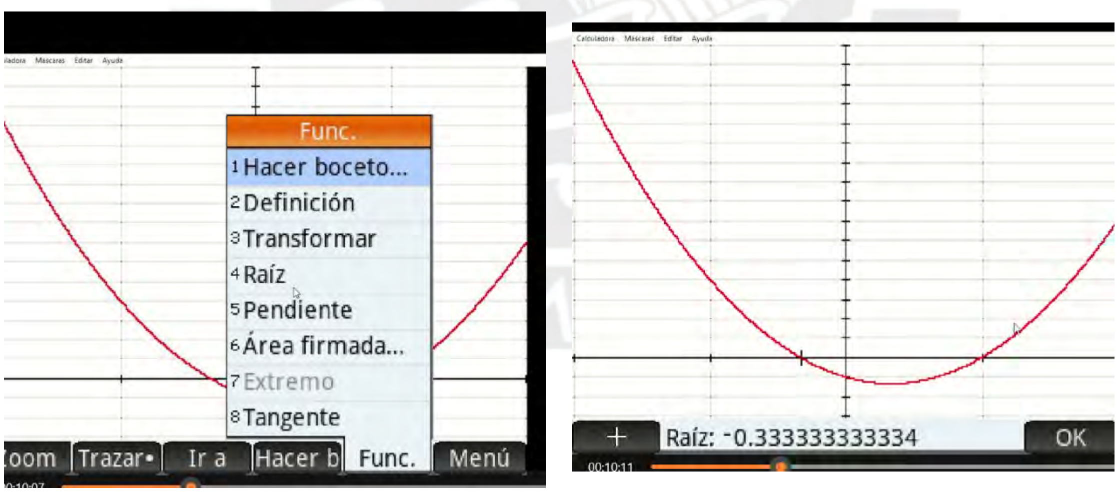
Producción del estudiante P_2 en la HP Prime



En la figura de la izquierda, el estudiante ha digitado la función y luego visualiza la gráfica; sin embargo, aún no está configurada según su dominio; por tal motivo, en la figura de la derecha, el estudiante configura los valores según su dominio y también apoyándose con las numeraciones (eje y) que proponemos en la plantilla. A continuación, presentamos en la figura 70 otras dos capturas de los tratamientos en el registro RGD, que realizó el estudiante.

Figura 70

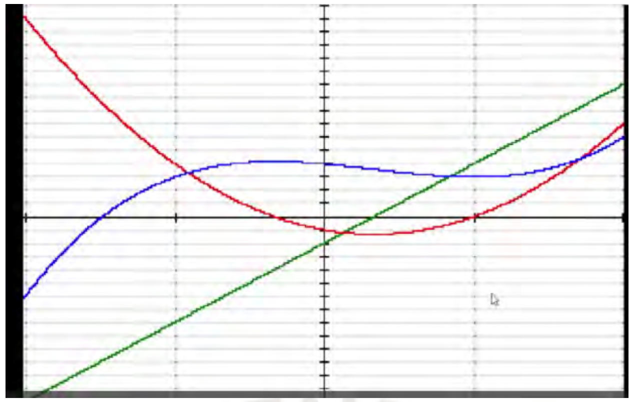
Producción del estudiante P_2 en la HP Prime II



En estas imágenes, vemos que el estudiante utiliza la opción ***raíz*** de la HP Prime para hallar el primer corte con el eje "x" de la grafica f' que se visualiza en la imagen de la derecha. Vemos que el estudiante maneja y conoce las funcionalidades de la HP Prime, lo que le permite realizar un trabajo fluido. Al finalizar la grabación el estudiante logra graficar por medio de la HP Prime las tres gráficas, f, f' y f''. Las mostramos en la figura 71.

Figura 71

Gráfica del estudiante P_2 en el HP Prime



Consideramos que el estudiante domina la funcionalidad de la Apps **función** de la HP Prime, realiza diversos tratamientos, los cuales le serán útiles para el dibujo aproximado en la hoja y para relacionarlos con las propiedades de la derivada. En ese sentido, creemos que el estudiante ha realizado una aprehensión secuencial, que según Duval (1994, como se citó en Vigo y Ferreyra 2019) manifiesta:

> … es requerida siempre que se desea construir una figura o describir su construcción, y trata del orden de construcción de una figura. Ese orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas técnicas utilizadas (la regla y el compás). (p. 210)

Si bien es cierto, no se le pidió al estudiante que detalle el proceso de la construcción de la gráfica de f' en la HP Prime; es decir, la secuencia de pasos que realizó; creemos que de manera implícita el estudiante ha realizado una aprehensión del concepto derivada en la construcción de pasos que realizó en la gráfica del f' por medio de la herramienta tecnológica.

Así para construir la gráfica de la derivada realizó lo siguientes pasos:

1. Ingresó a la aplicación ***función***
2. Digitó la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
3. Configuró pantalla con la tecla *shif* + *plot*
4. Dio los valores del dominio y se apoyó con la plantilla para dar los valores del rango.
5. Una vez visualizada la gráfica, para plasmar en la hoja, mediante la opción **“ir”** digitó los límites del dominio para hallar su imagen.

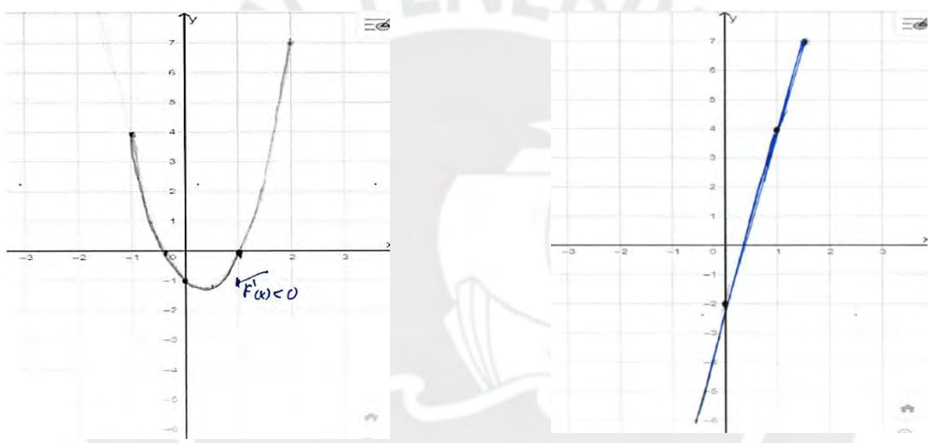
6. Luego halló los cortes, para el primero, acercó el cursor al punto de corte y seleccionó la opción función modo ***raíz,*** del mismo modo para la otra función. De manera alternativa halló otro punto de paso.

Como vemos, el estudiante no explica estos pasos, pero se puede observar en su grabación la secuencia de pasos que realizó.

Con respecto a sus producciones en la hoja, realizó correctamente la gráfica de la función, pero tuvo algunas dificultades en la gráfica de f' y f''. Mostramos sus producciones en la figura 72.

Figura 72

Dibujos del estudiante P_2 en el CP0



En la gráfica de f', vemos que no ha dibujado el tramo de $-2 \leq x \leq -1$, esto es porque cuando halló el valor de $f'(-2)$, el resultado excedía de los valores que proponía la plantilla en el eje y, este aspecto ha generado confusión en el estudiante. Del mismo modo para la gráfica de f'', aunque el trazo incompleto no es tan notorio como f'.

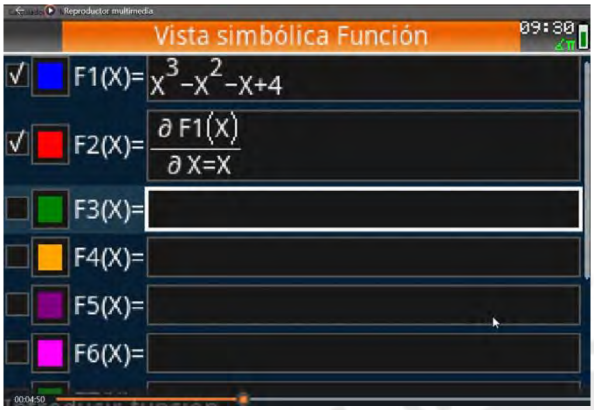
Finalmente consideramos que el estudiante ha transitado en el registro RGD y el gráfico; y con respecto a este obstáculo que tuvo el estudiante en la gráfica de la función en la hoja, no lo habíamos contemplado en nuestro análisis a priori.

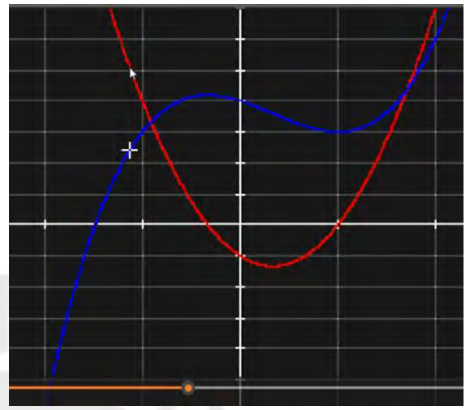
Análisis a Posteriori del CP0_ítems ai), aiv) y bi) del Estudiante P_3

El estudiante realiza un trabajo en HP Prime alrededor de los 20 minutos, al igual que el estudiante anterior, presenta dominio para la obtener las gráficas de f, f' y f'', configura adecuadamente la pantalla, encuentra los puntos de corte y los puntos de referencia; sin embargo, lo que lo hace diferente, es que utiliza un atajo para calcular la primera y segunda derivada, tal como mostramos en la figura 73.

Figura 73

Producción del estudiante P_3 en la HP Prime



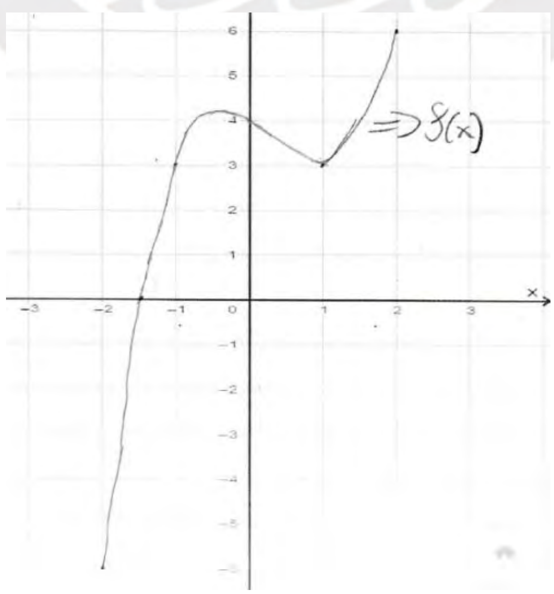


Observamos que, en la primera imagen, el estudiante ha digitado la expresión $\frac{\partial F_1(X)}{\partial X=x}$, esta expresión representa a la primera derivada de la función f (en este caso F_1), luego el estudiante verifica la gráfica, realizando el dibujo en la Hp Prime de la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Con respecto a la ficha de trabajo, la única observación sería el gráfico de la función, específicamente respecto a la curvatura, la cual casi se asemeja a una recta. Presentamos su dibujo en la figura 74.

Figura 74

Dibujo del estudiante P_3 en el CP0



Vemos que el punto mínimo casi termina en pico, y esto debido a que el trazo que realizó entre el punto máximo y el punto mínimo se asemeja al gráfico de un segmento de recta; con lo cual, no se distingue muy bien la concavidad hacia abajo.

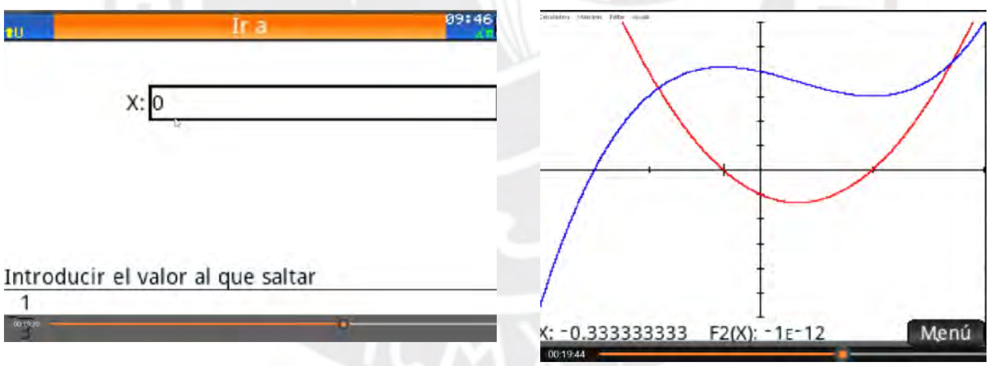
En general consideramos que las producciones del estudiante P_3 están acorde con nuestro análisis a priori donde contemplábamos este tipo de errores en las curvaturas; sin embargo, no contemplamos que haya realizado la gráfica la función derivada y segunda derivada. Consideramos que el estudiante al igual que el anterior estudiante P_2 ha logrado desarrollar una aprehensión secuencial.

Análisis a posteriori del CP0_ítems ai), aiv) y bi) del estudiante P_4

El estudiante realiza tratamiento en RGD, pero no utiliza todas las funcionalidades de la HP Prime, lo que lo hace que se pierda la exactitud, así utiliza la opción ***"ir a"*** para encontrar los valores de la imagen para poder plasmarlo en la hoja, pero pierde precisión cuando quiere encontrar los cortes al eje "x" o máximos y mínimos locales que no se encuentren en el cruce de la cuadrícula. Mostramos una captura de sus producciones, en la figura 75.

Figura 75

Producción del estudiante P_4 en el HP Prime

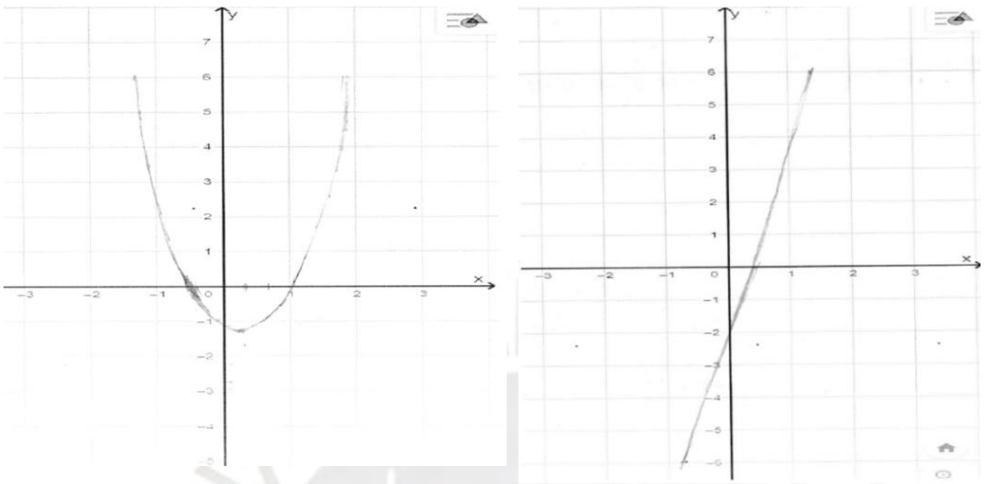


Observamos que en la gráfica de la izquierda el estudiante utiliza la opción ***"ir a"*** ´para hallar la raíz de la función derivada, asignan el valor de $\frac{1}{3}$ a la función o dicho de otro mod $f(\frac{1}{3})$; sin embargo, la opción correcta es por el modo ***"función"*** y luego la opción más segura o precisa es la opción ***"raíz".***

Consideramos que el estudiante tiene un conocimiento limitado de la HP Prime; sin embargo, sí ha logrado realizar la gráfica en la herramienta tecnológica. Con respecto a sus producciones en la hoja, y al igual que el estudiante P_2, tiene dificultades en realizar un gráfico completo en su dominio, ya que se observa que hay tramos sin graficar. Mostramos en la figura 76, los trazos que realizó en la hoja.

Figura 76

Dibujos del estudiante P_4 en el CP0

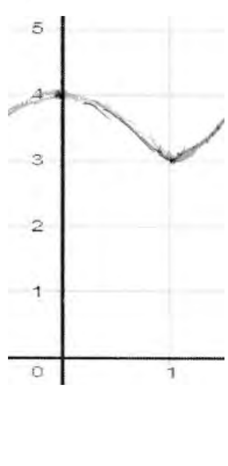


Vemos que en la gráfica de f', la de la izquierda, hay un tramo entre $-2 \leq x \leq -1.3$ aproximadamente, que no presenta trazo. Del mismo modo, en la gráfica de la derecha, de la segunda derivada, hay un tramo antes de $x = 2$, que está sin graficar. Creemos que al igual que el estudiante anterior, los valores en el eje y de la plantilla propuesta han confundido a los estudiantes; esto debido a que en ambas gráficas sus imágenes sobrepasan el valor de 6 que propone la plantilla.

Otro aspecto que ha presentado dificultad, es al plasmar la gráfica de la función f, en el tramo de 0 a 1, donde no ha incluido el punto de inflexión y por ende no se evidencia cambio de concavidad. Mostramos un zoom en la figura 77.

Figura 77

Zoom del dibujo del estudiante P_4



Observamos que el estudiante graficamente no incluyó el punto infexión y por ende se aprecia en el tramo de 0 a 1 una concavidad hacia abajo. Este tipo de errores que cometen los estudiantes, al dibujar aproximadamente la gráfica de la herramienta tecnológica a la hoja, es muy común en nuestros estudiantes del Bachillerato Internacional.

El estudiante en suma ha consigando sus producciones en el RGD y gráfico, que es lo que se esperaba en nuestro análisis a priori.

Sistematización del campo de problemas CP0

A continuación, proponemos en la tabla 34 nuestro cuadro adaptado para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 34

Sistematización del campo de problemas CP0

Campo de problemas (CP)	Emergentes / Previas		Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD	Natural	Algebraico	Gráfico	Numérico	RGD
CP0	$f(x)$	**Natural**															
		Algebraico		P_1 P_2 P_3 P_4			P_1 P_2 P_3 P_4										
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD			P_1 P_2 P_3 P_4												
	$f'(x)$	**Natural**															
		Algebraico		P_1 P_2								P_1 P_2					

				P_3 P_4							P_3 P_4						
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD							P_1 P_2 P_3 P_4								
		Natural															
		Algebraico															P_1 P_2 P_3 P_4
	$f''(x)$	**Gráfico**															
		Numérico															
		RGD													P_1 P_2 P_3 P_4		

Nota. Adaptado de Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Vemos que en nuestro cuadro sistematizador, en un primer momento para el gráfico de la función original $f(x)$, nos plantean la actividad desde el registro algebraico, ya que, nos dan la función polinomial. Luego, se realiza la conversión al RGD, se hacen los tratamientos mediante los atributos de la HP Prime y posteriormente este registro (RGD) pasa a ser de registro emergente a condición previa; ya que para plasmar el dibujo aproximado en la hoja por medio del registro gráfico, es necesario que en esta actividad el estudiante utilice la HP Prime.

Del mismo modo, ocurre con la segunda derivada donde el registro previo sería el algebraico (la expresión de la función derivada) y el emergente el RGD (gráfico de f''), pero luego el RGD pasa a ser el registro previo y el registro emergente será el registro gráfico. Sin embargo, esta condición no ocurre para el participante P_3, ya que, el estudiante para graficar f' y f'' como registro previo solo utilizó el RGD, mediante un atajo de la Apps función, por medio de la derivada de la función. Consideramos que la producción de este estudiante difiere de nuestro análisis a priori.

Finalmente, todos los estudiantes presentan dominio de la herramienta tecnológica; aunque los participantes P_2 y P_3 aprovechan más los atributos de la HP prime, en cambio el P_1 y P_4 solo utiliza la máquina para graficar y utilizando solamente la opción ***"ir a".***

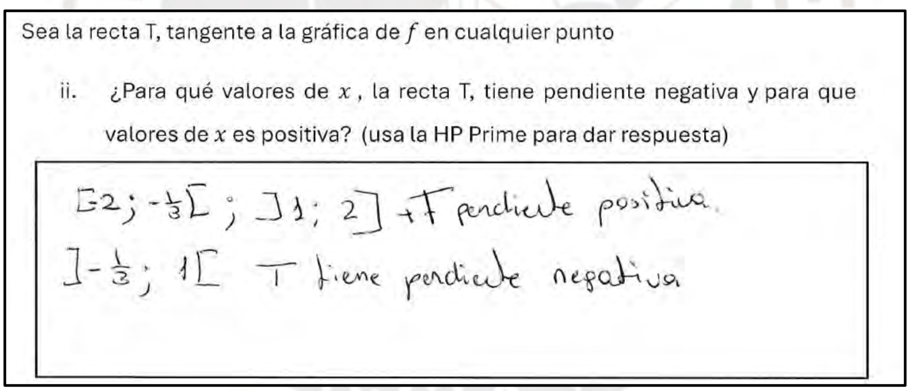
Campo de problemas 1 (CP1)

Análisis a Posteriori del CP1_ítems aii), aiv) y av) del Estudiante P_1

El estudiante P_1, como se mencionó, solo utilizó la HP Prime para realizar las gráficas de las tres funciones, por lo que se diferencia bastante de lo planteado en nuestro análisis a priori, donde esperábamos que el estudiante explore en la graficadora, mediante el modo *pendiente* y también el modo *tangente.* Creemos que el estudiante realiza la conversión al RGD, pero no realiza los tratamientos en este registro; sin embargo, sí realiza explicaciones en la hoja tal como se muestra a continuación en la figura 78.

Figura 78

Producción del estudiante P_1 en el CP1


Sea la recta T, tangente a la gráfica de f en cualquier punto

ii. ¿Para qué valores de x , la recta T, tiene pendiente negativa y para que valores de x es positiva? (usa la HP Prime para dar respuesta)

$[-2; -\frac{1}{3}[$; $]1; 2]$ → T pendiente positiva.

$]-\frac{1}{3}; 1[$ T tiene pendiente negativa

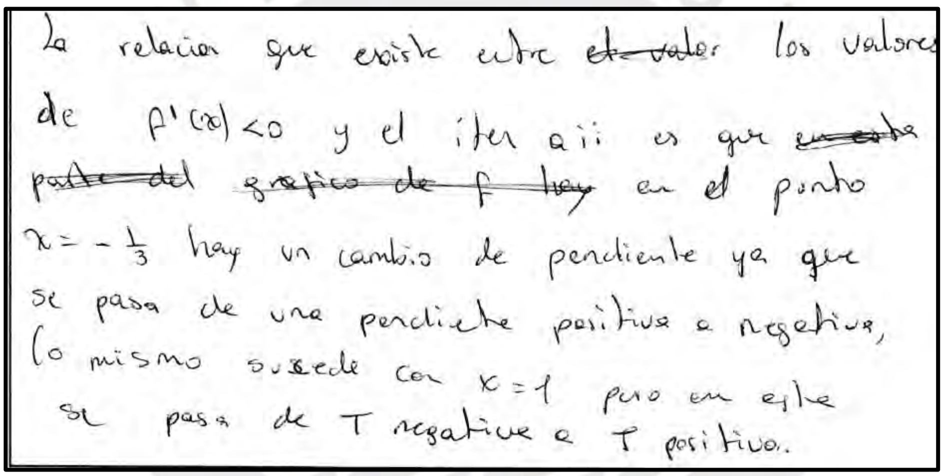
Si observamos la gráfica, en la HP Prime que realizó el estudiante y se analizó en el CP0, vemos que las coordenadas x del punto mínimo es 1. El estudiante, pudo intuir ese valor; sin embargo, la coordenada x del punto máximo al no estar en el cruce de las cuadrículas es más difícil precisarlo. Por tal motivo, consideramos que el estudiante resolvió primero el ítem vi) obteniendo los números críticos $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$ y luego verificando con la gráfica. Este proceso sí se contempló en nuestros análisis a priori, aunque se esperaba que utilice los atributos de la HP Prime.

Una vez obtenido el punto máximo y mínimo (coordenada x), el estudiante identifica y relaciona en la gráfica de la función la pendiente positiva con el intervalo de crecimiento hasta el valor máximo y de forma análoga, del valor máximo al valor mínimo tiene pendiente negativa y se relaciona el intervalo de decrecimiento de la función.

Así con respecto al ítem v), también reconoce que la gráfica de la función derivada proporciona los signos de la pendiente; en tal sentido cuando la gráfica de f' esté por debajo del eje x, $(f'(x) < 0)$ lo relaciona con una pendiente negativa y viceversa. En la explicación de su respuesta, lo realiza en registro lengua natural, pero también utiliza el registro simbólico, su justificación es coherente y relaciona su respuesta con el ítem de aii) como se observa en la figura 79.

Figura 79

Producción del estudiante P_1 en el registro lengua natural


La relacion que existe entre ~~el valor~~ los valores de $f'(x)<0$ y el iter aii es que ~~en esta parte del grafico de f hay~~ en el punto $x=-\frac{1}{3}$ hay un cambio de pendiente ya que se pasa de una pendiente positiva a negativa, lo mismo sucede con $x=1$ pero en este se pasa de T negativa a T positiva.

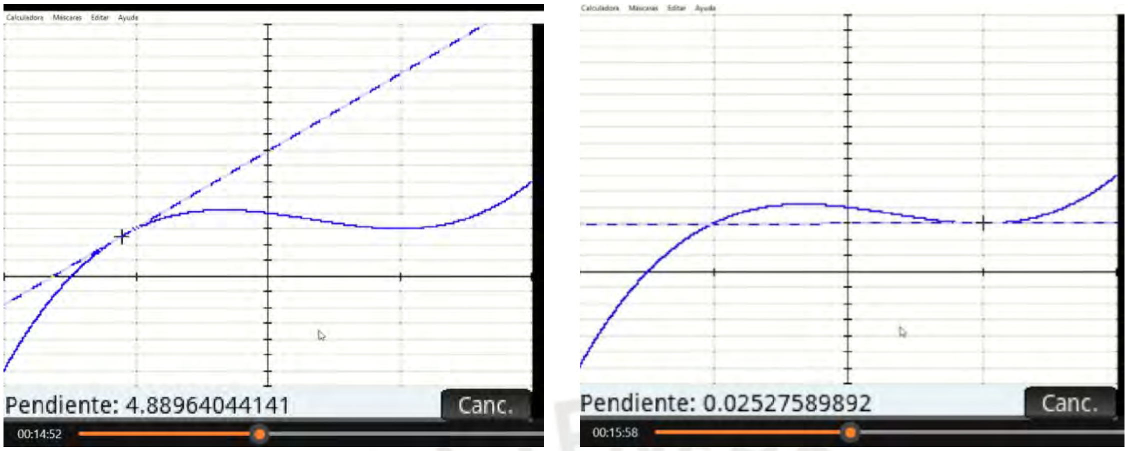
Como se evidencia el estudiante interpreta correctamente el gráfico de la función derivada y lo asocia con el gráfico de la función f mediante las pendientes de la recta tangente.

Análisis a Posteriori del CP1_ítems** aii), aiv) y av) **del Estudiante P_2

Las producciones del estudiante P_2 en este campo de problemas están dados desde el RGD, además del registro gráfico, el registro simbólico-algebraico y la lengua natural. Es importante el tránsito que realiza el estudiante por estos registros. Así, en el ítem aii) vemos que el estudiante realiza tratamientos en RGD mediante la exploración de la recta tangente y su pendiente en la gráfica de la función f, tal como se muestra en la figura 80.

Figura 80

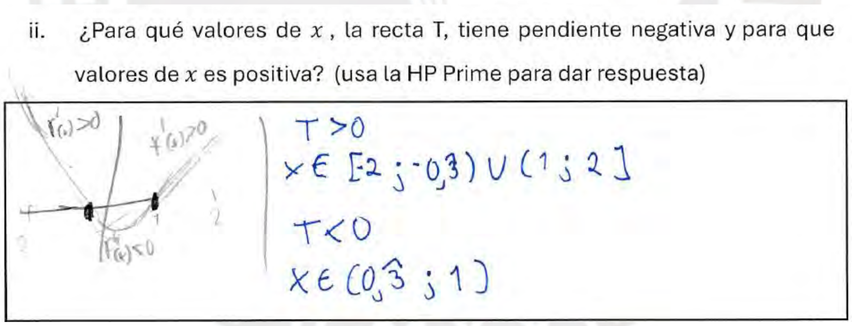
Producción del estudiante P_2 en el HP Prime



Como se observa en ambas figuras, el estudiante utiliza la opción “tangente” y “pendiente” y comienza a deslizar el cursor por toda la gráfica, verificando las pendientes positivas y negativas, así como las que están muy próximas a cero, dando como respuesta lo que se muestra a continuación en la figura 81.

Figura 81

Coordinación de registros del estudiante P_2



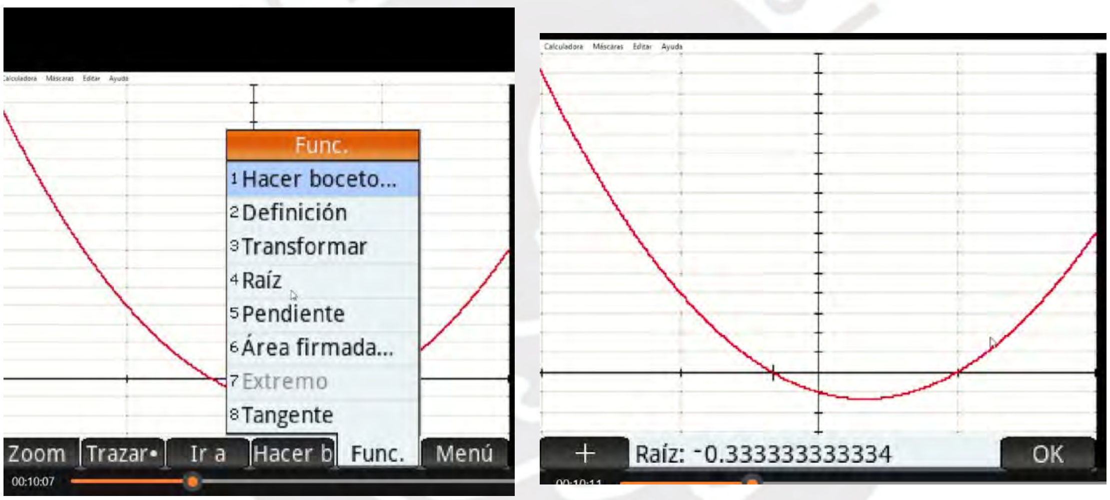
Nos damos cuenta de que el estudiante utiliza el registro simbólico para representar los intervalos, también utiliza simbología adecuada, salvo por la notación $T > 0$ y $T < 0$, se entiende que quiso decir que la pendiente es mayor que cero en el intervalo que muestra; sin embargo, por definición del problema, T es el conjunto de rectas tangentes a la gráfica, lo cual estrictamente no es lo correcto. Adicionalmente, realiza con lápiz un bosquejo de la función derivada (la cual realizó en la HP Prime), donde además etiqueta los tramos donde f' es positiva y negativa; lo que nos lleva a concluir que el estudiante relaciona los signos de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función con las zonas donde la derivada de la función es positiva y negativa.

Hay que entender que el significado de los signos tanto para la pendiente como para la derivada son de contextos diferentes. Así, por ejemplo, que $m > 0$ en el gráfico de la función f implica que la función será creciente; mientras de $f'(x) > 0$ implica que en la gráfica de la función derivada estará por encima del eje "x".

Después en el ítem av), el estudiante corrobora nuestra afirmación, ya que, utilizando el registro algebraico halla el intervalo donde $f'(x)$ es negativa y explica mediante el registro la lengua natural la relación entre la pendiente (signos) y la derivada; tal como habíamos mencionado. También notamos que, en el intervalo, da el valor exacto de los números críticos, esto es porque que utilizó la opción "raíz" de la HP Prime para obtener le valor exacto, tal como se muestra en la figura 82.

Figura 82

Tratamientos en el RGD del estudiante P_2



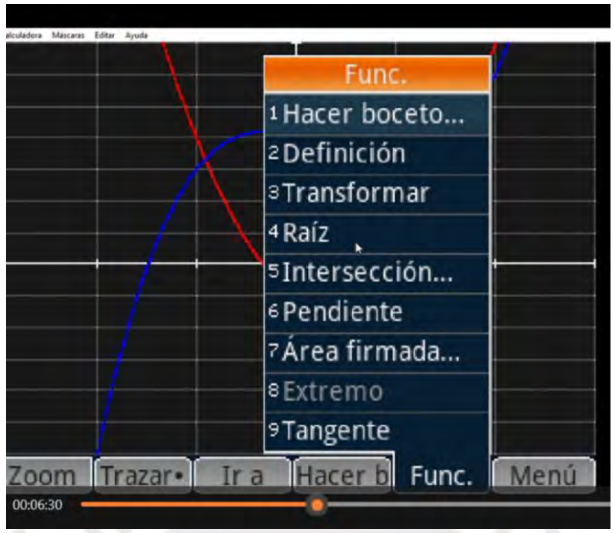
En base a las producciones del estudiante en este campo de problemas, creemos que el estudiante ha logrado coordinar los registros algebraico-simbólico, gráfico y RGD favoreciendo la construcción del conocimiento de la derivada.

Análisis a Posteriori del CP1_ítems aii), aiv) y av) del Estudiante P_3

Las producciones de P_3 también se dan desde RGD, realiza tratamientos mediante la exploración del cursor en la gráfica de la función y la derivada; aunque a diferencia del anterior estudiante no utiliza la opción "pendiente" y "tangente" y solo utiliza la opción "*ir a*" para graficar la función en la HP Prime y luego pasarlo en la hoja (esto se vio en el CP0), también utilizó la opción "raíz" para hallar los límites de los intervalos. Presentamos, en la figura 83, unas imágenes de las producciones más destacadas en la HP Prime.

Figura 83

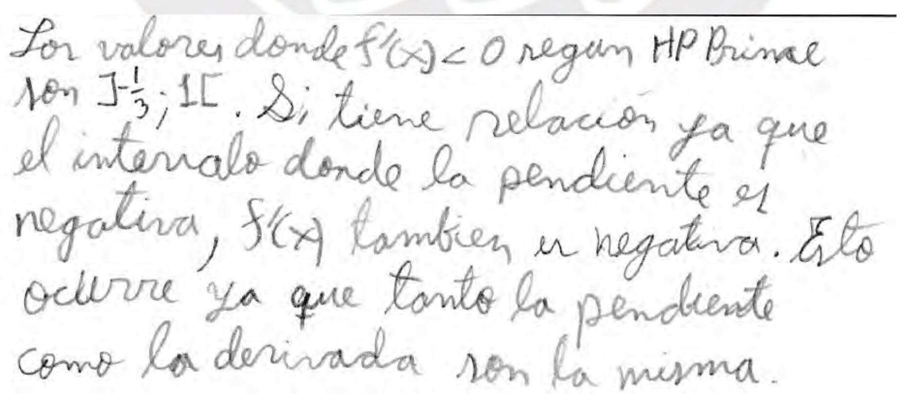
Uso de las funciones del HP Prime estudiante P_3



Como vemos, las producciones son muy similares al estudiante P_2, apreciamos que no necesitó explorar la pendiente en la función, sino más bien utilizó la gráfica de la derivada y halló el número crítico (que no se podía determinar de forma inmediata mediante las cuadrículas) mediante la opción “raíz”; esto lo realiza, porque identifica que la gráfica de $f'(x) < 0$ está relacionada con la pendiente negativa; por lo que, necesita este valor para mencionar desde qué coordenada en x la pendiente es negativa, tal como lo manifiesta la respuesta del ítem av) desde el registro lengua natural que mostramos en la figura 84.

Figura 84

Producción del estudiante P_3 en el registro lengua natural



Acá el estudiante afirma la igualdad entre la equivalencia y la derivada, de manera rigurosa, no especifica que la derivada evaluada en la abscisa de un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto; sin embargo, entendemos que se refiere a la zona donde la gráfica donde $f'(x) < 0$, por lo que es un error de redacción.

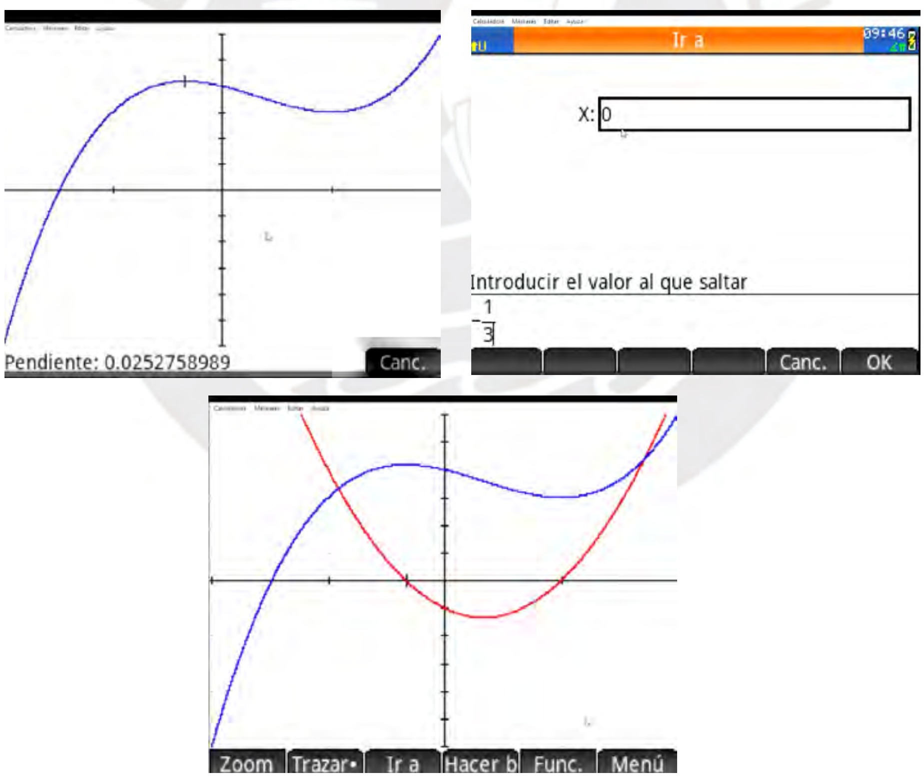
Con respecto, a nuestro análisis a priori, creemos que las producciones del estudiante coinciden en varios aspectos como la utilización de los registros semióticos que esperábamos, el uso correcto de la simbología; aunque esperábamos que explore las gráficas de la función f y f' mediante la opción "tangente" y "pendiente".

Análisis a Posteriori del CP1_ítems aii), aiv) y av) del Estudiante P_4

Del mismo modo que P_1, el estudiante no utiliza mucho los atributos de la HP Prime, solo utiliza la opción "ir a", y la opción "pendiente" para identificar las pendiente negativas y positivas, en tal sentido realiza tratamientos en el RGD de la función f. A continuación, presentamos en la figura 85 las producciones del estudiante.

Figura 85

Utilización de la HP Prime del estudiante P_4

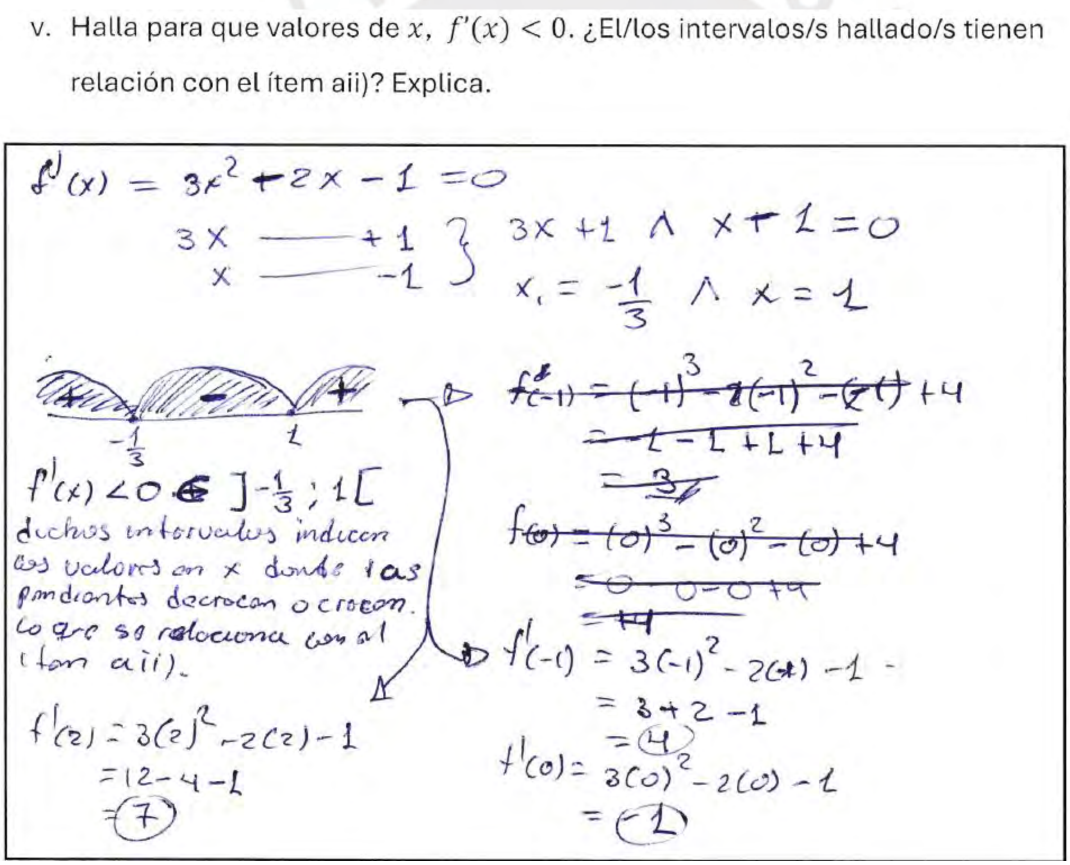


Así, en la primera figura, arriba a la izquierda, vemos que el estudiante utiliza la opción "pendiente" para aproximarse a los valores referenciales, que en este caso sería el número crítico. Luego en la segunda figura, arriba a la derecha, el estudiante utiliza nuevamente la opción "ir a" para verificar el número crítico de la primera derivada, se entiende que previamente ha calculado el número crítico y está validando en la gráfica el valor máximo de la función f, tal como se aprecia en la última figura.

Con respecto a sus producciones en la hoja, utiliza el registro simbólico y lengua natural en el ítem aii), luego deriva correctamente la función, haciendo tratamientos en el registro algebraico. En el ítem av) realiza procesos matemáticos que no eran necesarios, ya que se esperaba que utilice la HP Prime, en este caso halla los números críticos de la primera derivada de forma analítica y luego evalúa los signos entre las zonas que se forma entre estos números críticos. Presentamos en la siguiente figura 86, la producción del estudiante.

Figura 86

Producción del estudiante P_4 en los RRS algebraico, numérico y gráfico



v. Halla para que valores de x, $f'(x) < 0$. ¿El/los intervalos/s hallado/s tienen relación con el ítem aii)? Explica.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$3x$ —— $+1$

x —— -1

$3x + 1 \wedge x + 1 = 0$

$x_1 = -\frac{1}{3} \wedge x = 1$

$f'(x) < 0 \in \left]-\frac{1}{3} ; 1\right[$

dichos intervalos indican los valores en x donde las pendientes decrecen o crecen. Lo que se relaciona con el ítem aii).

$f'(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 1$
$= 12 - 4 - 1$
$= 7$

$\cancel{f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 4}$
$\cancel{= -1 - 1 + 1 + 4}$
$\cancel{= 3}$

$\cancel{f(0) = (0)^3 - (0)^2 - (0) + 4}$
$\cancel{= 0 - 0 - 0 + 4}$
$\cancel{= 4}$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1$
$= 3 + 2 - 1$
$= 4$

$f'(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 1$
$= -1$

Observamos que este proceso sería necesario si se trabajara sin el uso de la tecnología; sin embargo, el estudiante limita el uso de la HP Prime y se enfoca al cálculo, tal cual como lo hizo en la actividad 1. Es probable que el estudiante domine más la parte de procesos mediante el registro algebraico en contraste con la manipulación de la HP Prime. Con respecto a su desarrollo el estudiante simboliza correctamente, también realiza la validación de los valores máximos y mínimos, para esto trabaja en el registro numérico la expresión $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$. En la simbología sí detectamos un error, aunque no es muy relevante, sí es necesario indicarlo, se trata de la expresión $f'(x) < 0 \ \in]\frac{-1}{3}, 1[$ debió añadir el valor de x pertenece.

Sistematización del campo de problemas CP1

A continuación, proponemos en la tabla 35 nuestro cuadro adaptado para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 35

Sistematización del campo de problemas CP1

Campo de problemas (CP)	**Emergentes / Previas**		**Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$**														
			$f(x)$					**$f'(x)$**					**$f''(x)$**				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP1	**$f(x)$**	**Natural**															
		Algebraico							P_1 P_2 P_3 P_4								
		Gráfico	P_1														
		Numérico															
		RGD		P_1 P_2 P_3 P_4			P_2 P_3										
	$f'(x)$	**Natural**															
		Algebraico							P_4	P_4	P_4	P_1 P_2 P_3 P_4					

		Gráfico															
		Numérico															
		RGD						P_1 P_2 P_3	P_1 P_2 P_3	P_2							
		Natural															
		Algebraico															
	$\boldsymbol{f''(x)}$	**Gráfico**															
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado *de Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Como observamos en la tabla, cuando se le proporcionó la función en el registro algebraico, los cuatro estudiantes realizaron tratamientos hallando la derivada, la cual no tuvieron inconvenientes en determinarla; una vez que han obtenido la derivada este registro pasó a ser "previo" y mediante la HP Prime graficaron la función derivada (RGD), luego otras conversiones utilizadas por los estudiantes según la *representación de la función* $f(x)$ son el lenguaje algebraico y tratamientos en el RGD; solo el estudiante P_1 a partir del registro gráfico utilizó el registro lengua natural para formular sus explicaciones.

Cuando los ítems estaban dados desde $f'(x)$ y las producciones de los estudiantes eran en la representación $f'(x)$ los registros emergentes dominantes eran el algebraico y la lengua natural, cuando se registró previo era dado desde el RGD; y para la segunda derivada el tratamiento algebraico fue el requerido. Los casos no esperados en nuestro análisis a priori son el estudiante P_4, cuando a partir de la primera derivada realizó tratamientos en el registro algebraico y luego hizo el proceso de evaluación para hallar el intervalo donde $f'(x) < 0$ pasando por el registro (gráfico) y el numérico. Otro caso especial fue el del estudiante P_2, cuando a partir del RGD vinculó los signos de la primera derivada con los intervalos de crecimiento. En general, creemos que los estudiantes realizaron los tránsitos de los registros: algebraico, RGD, gráfico y numérico; tal como lo habíamos previsto en nuestro análisis a priori.

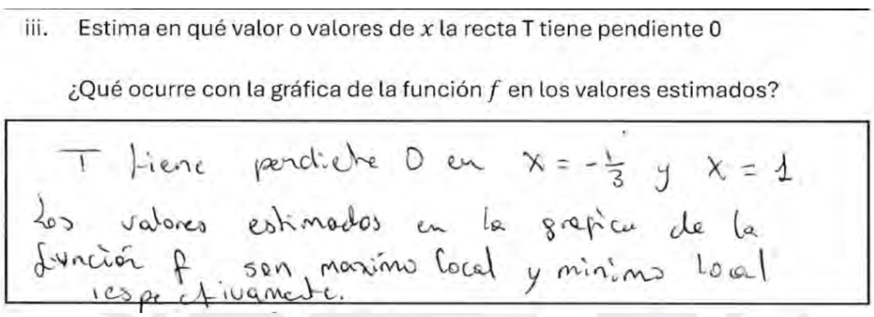
Campo de problemas 2 (CP2)

Análisis a posteriori del CP2_ítems aiii), aiv) y avi) del estudiante P_1

Como se mencionó en los ítems anteriores, el estudiante no utiliza el RGD para determinar el valor x donde hay un punto máximo y un punto mínimo, solo utiliza este registro al igual que el registro gráfico para verificar que los valores hallados correspondan con la gráfica. Realiza sus producciones en el registro algebraico, gráfico y numérico, por lo que, solo presentaremos imágenes de sus producciones en la hoja; ya que lo realizado en la HP Prime es lo mismo que los ítems anteriores. Mostramos en la figura 87 sus trabajos.

Figura 87

Producción del estudiante P_1 en el CP2



iii. Estima en qué valor o valores de x la recta T tiene pendiente 0

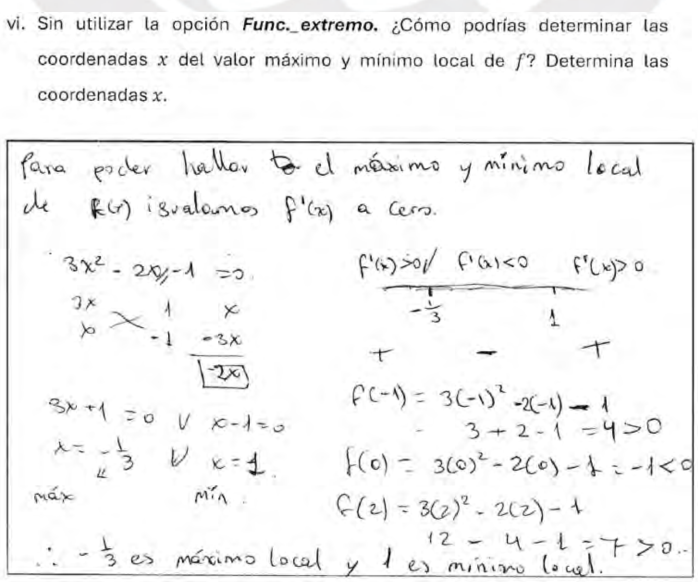
¿Qué ocurre con la gráfica de la función f en los valores estimados?

T tiene pendiente 0 en $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$
los valores estimados en la grafica de la función f son maximo local y minimo local respectivamente.

Así, por ejemplo, en este ítem, el estudiante no estima el valor de x cuando la pendiente es cero, ya que los halla mediante tratamientos en el registro algebraico; para esto, realiza primero el avi) antes que el ítem aiii), a su vez entiende que, en los puntos máximos y mínimos de la gráfica, la pendiente es cero, esto lo indica en el registro lengua natural. Luego, mostramos en la figura 88, las producciones del ítem avi).

Figura 88

Producción del estudiante P_1 en los RRS algebraico y numérico



vi. Sin utilizar la opción ***Func._extremo.*** ¿Cómo podrías determinar las coordenadas x del valor máximo y mínimo local de f? Determina las coordenadas x.

Para poder hallar ~~to~~ el máximo y mínimo local de f(x) igualamos f'(x) a cero.

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$3x \quad 1 \quad x$
$x \quad -1 \quad -3x$
$\boxed{-2x}$

$3x+1 = 0 \lor x-1 = 0$
$x = -\frac{1}{3} \lor x = 1$
máx mín

$f'(x)>0 \; / \; f'(x)<0 \quad f'(x)>0$
$-\frac{1}{3} \qquad 1$
$+ \quad - \quad +$

$f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1$
$= 3 + 2 - 1 = 4 > 0$
$f(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 1 = -1 < 0$
$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 1$
$12 - 4 - 1 = 7 > 0$

$\therefore -\frac{1}{3}$ es máximo local y 1 es mínimo local.

En este proceso, el estudiante, como se mencionó, no realiza el trabajo en RGD, por lo que realiza el tratamiento en el registro algebraico, halla los números críticos de la primera derivada y evalúa las zonas donde f' sea positiva y negativa para determinar las coordenadas x donde hay un valor máximo y un valor mínimo; por lo que, también trabaja en el registro numérico y utiliza una recta para distribuir los signos de f' que podríamos incluirla en el registro gráfico.

Consideramos, que el estudiante domina conceptos y propiedades relativas a la derivada, transita por diversos registros, salvo el RGD, que solo lo utiliza para obtener las gráficas de las funciones. Por ende, creemos que el estudiante se orienta al trabajo analítico y de procesos matemáticos utilizando propiedades y pasos específicos para hallar las coordenadas x del punto máximo y mínimo. En contraparte, el estudiante solo realiza procesos mínimos en la HP Prime, debido a que no domina en su totalidad los atributos de la graficadora.

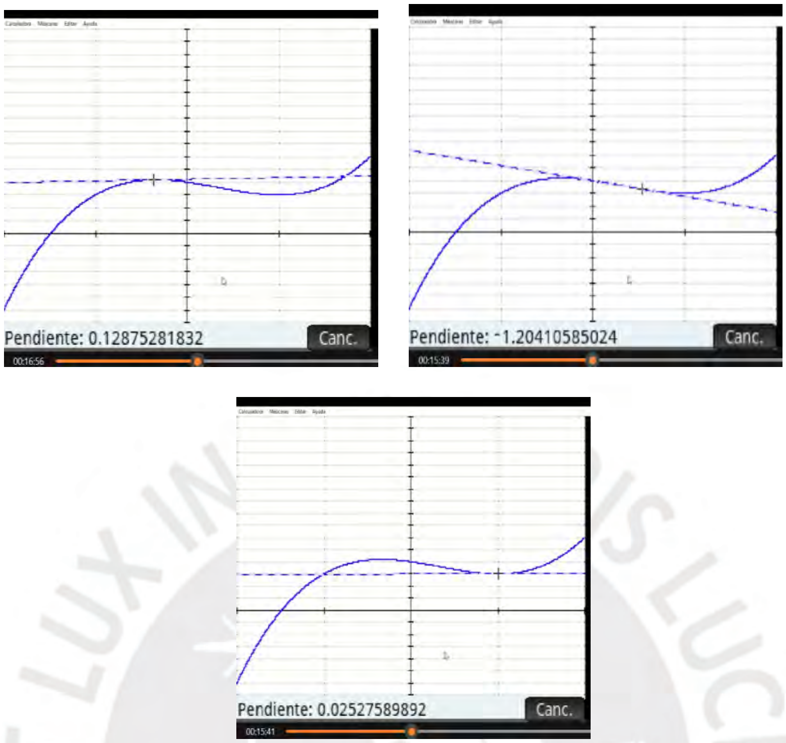
Finalmente, con respecto a nuestro análisis a priori, se contempló la posibilidad de que el estudiante eligiera otro camino al propuesto. En general, el estudiante ha demostrado a lo largo de las 2 actividades que posee conocimientos adecuados sobre el concepto derivada y sus propiedades.

Análisis a Posteriori del CP2_ítems aiii), aiv) y avi) del Estudiante P_2

El estudiante, para responder a este campo de problemas, sí utiliza los atributos de la HP Prime, pues hace tratamientos en el RGD, moviliza la opción “pendiente” y “tangente”, y **estima** el valor en x donde hay un punto máximo. Se verifica la estimación en las siguientes capturas de video en la figura 89.

Figura 89

Producciones del estudiante P_2 en la HP Prime



Si vemos la primera figura (arriba a la izquierda), el estudiante tiene activado la opción "*pendiente"* y la opción *"tangente",* al mover el cursor en la pantalla gráfica, aproxima la recta tangente al punto máximo, el estudiante entiende que esto implica que la pendiente se aproxime a cero. Luego, en la figura de arriba a la derecha, el estudiante continúa explorando y en la captura de pantalla, el cursor se ubica en una posición donde la pendiente es negativa e instantáneamente el estudiante sigue movilizando el cursor llevándolo hasta muy cerca del punto máximo donde la recta tangente es paralela al eje x y por ende la pendiente es casi cero.

Estos tratamientos que están en concordancia con nuestro análisis a priori son importantes para que el estudiante desarrolle nuevas estrategias y desarrolle capacidades relacionadas a la herramienta tecnológica que le permita desarrollar actividades más complejas. Tal como lo manifiesta Armella (2002): "Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora". (p.97)

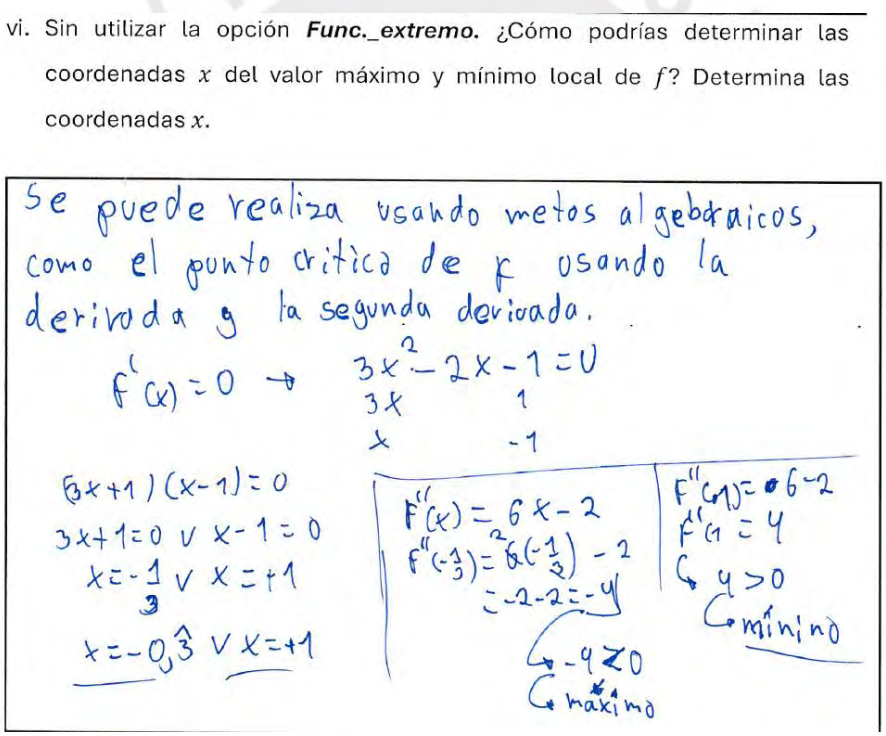
En nuestro caso, el estudiante sí posee capacidades muy importantes referidas al componente tecnológico, que se evidencia en el proceso de graficación, conociendo los atributos de la HP Prime.

Con respecto a las producciones en la hoja en el ítem aiii), el estudiante utiliza en sus procesos el registro simbólico y el registro lengua natural, estima el valor de la coordenada x del punto máximo asignando el valor de $-0{,}3$, estimación muy cercana al valor real; luego realiza tratamientos en el registro algebraico para hallar la derivada.

En el ítem avi), y al igual que el estudiante P_1, utiliza métodos algebraicos para dar con la respuesta, en este proceso vuelve a realizar tratamientos para hallar los números críticos y también utiliza el registro numérico; a diferencia del estudiante anterior no utiliza un segmento de recta para evaluar los signos, sino que recurre a la propiedad de la segunda derivada para evaluar la existencia de puntos máximos y mínimos con los números críticos de la primera derivada. Se muestra a continuación, en la figura 90, el proceso.

Figura 90

Producción del estudiante P_2 en el registro algebraico y numérico


vi. Sin utilizar la opción ***Func._extremo.*** ¿Cómo podrías determinar las coordenadas x del valor máximo y mínimo local de f? Determina las coordenadas x.

Se puede realiza usando metos algebraicos, como el punto critica de f usando la derivada y la segunda derivada.

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$3x \quad 1$

$x \quad -1$

$(3x+1)(x-1) = 0$

$3x+1 = 0 \vee x-1 = 0$

$x = -\frac{1}{3} \vee x = +1$

$x = -0{,}\hat{3} \vee x = +1$

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(-\frac{1}{3}) = 6(-\frac{1}{3}) - 2$

$= -2-2 = -4$

$-4 < 0$ máximo

$f''(1) = 6-2$

$f''(1) = 4$

$4 > 0$ mínimo

Lo más relevante y diferente en este proceso del estudiante es el valor que halló del número critico $x = 0,\hat{3}$. Este número racional, periódico puro, se aproxima al valor estimado en el ítem anterior; lo que comprueba que el estudiante, a diferencia de los demás estudiantes sí comprendió el significado del término de instrucción “estimar”. El otro aspecto, que nos pareció relevante, tal como se dijo, es el método para hallar los valores máximos y mínimos; para esto, el estudiante trabaja de manera predominante en el registro algebraico y luego realiza una conversión al registro numérico para evaluar los valores extremos. La simbología adoptada es muy pertinente.

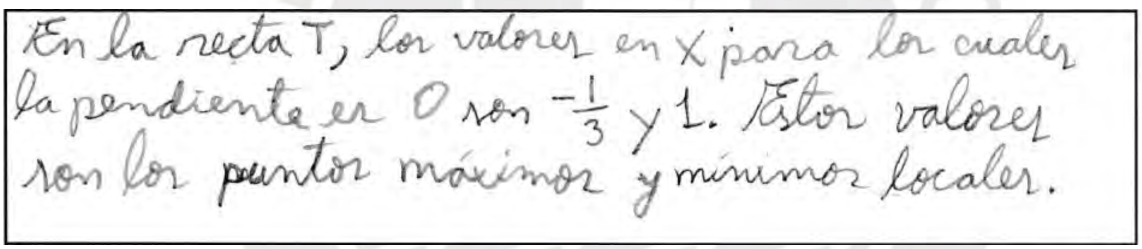
Finalmente, si bien en este último ítem, esperábamos que utilice el RGD, el cual utilizó en el anterior ítem, el proceso que eligió estaba contemplado dentro de nuestro análisis a priori y además también evidenciamos que el estudiante ha logrado coordinar el RGD y el algebraico.

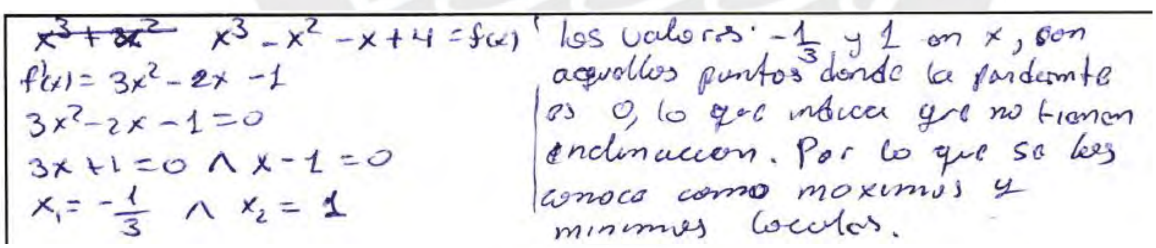
Análisis a Posteriori del CP2_ítems aiii), aiv) y avi) del Estudiante P_3 Y P_4

En ambos casos, los estudiantes no estiman el valor de la coordenada x del punto máximo, si no que hallan su valor exacto. El estudiante P_3 solo menciona los valores, los números críticos de f' (registro numérico), complementado con el registro lengua natural; mientras que el estudiante P_4, sí realiza el proceso de derivación, haciendo tratamientos en el registro algebraico y halla los números críticos. Luego complementa con el registro lengua natural. Se muestran las producciones de ambos, en la figura 91.

Figura 91

Producción del estudiante P_3 y P_4 en el CP2





Vemos que en la producción del estudiante P_3, figura que está arriba, hay un error en la justificación de su respuesta, el estudiante afirma que los valores hallados son los puntos máximos y mínimos; por lo que, entendemos que no reconoce que un punto en el plano cartesiano posee dos coordenadas. Por su parte el estudiante P_4, recurre al registro algebraico y por medio de tratamientos, halla los números críticos.

Luego en el ítem avi), los estudiantes P_3 y P_4, realizan tratamientos algebraicos, en este caso, igualan la derivada a cero y obtienen las raíces, el estudiante P_3 utiliza el método para hallar raíces de una ecuación cuadrática: la fórmula general. Se observa que no evaluaron o justificaron cómo llegaron a dar con los valores máximo y mínimo; sin embargo, es evidente que utilizaron la gráfica de la función f para cerciorarse que los valores hallados corresponden al número máximo y al mínimo.

También notamos que el estudiante P_4, no consignó las coordenadas x del valor máximo y valor mínimo, sí identificó los extremos relativos, pero no hizo la distinción de cada uno.

Las producciones en la HP Prime fueron un tanto básicas, solo para hallar las gráficas y utilizando la opción “ir a” y muy pocas veces la opción “raíz”, “pendiente” y “tangente”. En este caso la HP Prime usualmente ha sido utilizada para verificar los valores máximos y mínimos relativos que iban hallando en la hoja.

Con respecto a nuestro análisis a priori, en general las producciones estaban contempladas en los posibles caminos que elijan los estudiantes, si coincidieron en el ítem aiii) pero no en el avi). Se esperaba que utilicen mucho más la herramienta tecnológica; sin embargo, los procesos utilizados son correctos. A pesar de no haber realizado muchos tratamientos en el RGD, creemos que los estudiantes tienen un importante conocimiento sobre las derivadas y sus propiedades; por lo que se aprecian unas conversiones entre el registro algebraico y el numérico, entre el RGD y el registro lengua natural.

Sistematización del campo de problemas CP2

A continuación, proponemos, en la tabla 36, nuestro cuadro adaptado para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 36

Sistematización del campo de problema

Campo de problemas (CP)	**Emergentes / Previas**		**Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$**														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP2	$f(x)$	**Natural**															
		Algebraico		P_4													
		Gráfico															

		Numérico															
		RGD	P_1 P_2 P_3	P_1 P_2 P_3			P_2 P_3 P_4										
	$f'(x)$	**Natural**															
		Algebraico	P_1 P_4					P_4	P_1 P_2 P_3 P_4	P_1	P_1	P_2 P_3		P_2			
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD										P_2 P_3					
	$f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico														P_4	
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

En este campo de problemas notamos que en los registros previos sobre las representaciones de la función $f(x)$, están dadas desde el RGD y las producciones emergentes de los estudiantes sobre la misma representación $f(x)$ están repartidas entre los registros lengua natural, algebraico; además, los estudiantes P_2 y P_3 utilizan las tres representaciones, esto quiere decir, que han transitado por estos registros realizando conversiones en el registro algebraico y legua natural, y además han realizado tratamientos en el RGD; aunque el estudiante P_3 lo utiliza de manera limitada, sí consideramos que solo utiliza algunas funciones de la HP Prime; creemos que han coordinado el registro algebraico y el RGD, así como también la lengua natural y RGD. Solo el estudiante P_4 ha realizado tratamiento en el registro algebraico; es decir ha utilizado la función f y la derivada y sus valores críticos. Cuando se ha tenido como punto de partida la *representación de* f', los registros utilizados por los estudiantes son variados. Lo analizaremos según la representación de sus producciones; así, solo los estudiantes P_1 y P_4 transitaron del registro algebraico al registro lengua natural en la *representación de* f.

En cambio, cuando *representaron en* f', es decir, de f' en registro algebraico a f'; aquí los registros emergentes fueron varios, siendo el registro común a todos los estudiantes, el algebraico; es decir, realizaron tratamientos en la *representación de* f'. Luego dos estudiantes movilizaron el RGD, a partir de las exploraciones que hicieron en el grafico de f', sobre todo en el estudiante P_2, que utilizó todos los atributos de la HP Prime.

Por último, en la *representación que va desde* f' también notamos que utilizaron el registro lengua natural, el registro gráfico y el numérico, en este último el estudiante P_1 lo utilizó para evaluar los signos de f'. Solo el estudiante P_2, realizó tratamientos en el registro algebraico en la *representación de* f'', esto fue cuando a partir de la primera derivada realizó la segunda derivada, para evaluar los máximos y mínimos.

También hubo *representaciones de* f' desde el RGD al mismo registro; estos tratamientos se dieron por los estudiantes P_2 y P_3, cuando a partir de la gráfica de la derivada en la graficadora, utilizaron los atributos de la HP Prime para hallar sus raíces de f' y vincularon con la gráfica de f.

Además, solo el estudiante P_2, movilizó la representación f'' como punto de partida, teniendo como base al registro algebraico y realizando sus producciones en el registro numérico en la evaluación de f'' para hallar máximos y mínimos. Este último proceso no lo teníamos considerado en nuestro análisis a priori; el estudiante de buena forma utilizó otra opción para determinar los extremos relativos, coordinando el registro algebraico con numérico.

Finalmente consideramos que en este campo de problemas CP2 los estudiantes han transitado por varios registros en las tres representaciones f, f'y f'', a pesar de que el CP2 está relacionado con el concepto de f'; donde la mayoría de sus producciones están en concordancia con nuestro análisis a priori.

Análisis a Posteriori del CP3 y CP4_ítems bi), bii) y bii) del Estudiante P_1, P_2, P_3 y P_4

Hemos agrupado a estos dos campos porque en la actividad 1, las actividades estaban enfocadas a estos dos campos; mientras, que en esta actividad está enfocado a los tres primeros campos. Además, también agrupamos a los cuatro estudiantes, porque hay producciones similares, como iremos analizando.

Así, con respecto al uso de la HP Prime, tres estudiantes derivaron f' (registro algebraico) y graficaron en la HP Prime; en cambio el estudiante P_3 realizó un atajo para graficar una función derivada, utilizando la sintaxis que se muestra a continuación en la figura 92.

Figura 92

Producción del estudiante P_3 en el CP3 y CP4

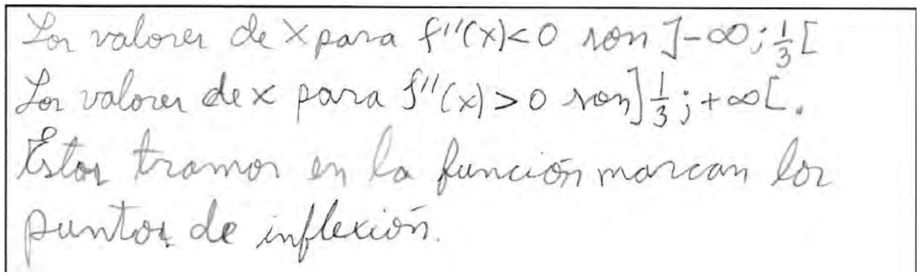
Como se evidencia, el estudiante no necesita derivar para obtener el gráfico de f''; esta acción la realizó para hallar el gráfico de f' a partir de la función original. En la exploración del gráfico de la segunda derivada en el HP Prime, el P_3 muestra mayores tratamientos utilizando el modo "*ir a*" y "*raíz*" de la HP Prime y movilizando el cursor para detectar puntos de referencia. Luego realiza una revisión de las tres gráficas para verificar el punto de inflexión tanto f'' (corte al eje x) como en la función f.

El participante P_2 y P_4 también realizan esta última acción; sin embargo, solo utilizan la opción *"ir a"* para obtener valores de referencia. El participante P_1, solo obtiene la gráfica en la HP Prime, pero prácticamente no moviliza el cursor y solo utiliza en muy pocas acciones el modo *"ir a",* por lo que los tratamientos en este registro son muy escasos.

Para el ítem bii) las producciones tuvieron algunas semejanzas y coincidencias, así los participantes P_1 y P_3 utilizan el registro lengua natural y el algebraico para mencionar sus producciones; aunque notamos un error en el estudiante P_3, como se muestra en la figura 93.

Figura 93

Producción del estudiante P_3 en el CP3 y CP4 con afirmación en el registro lengua natural



Los valores de x para $f''(x)<0$ son $]-\infty;\frac{1}{3}[$
Los valores de x para $f''(x)>0$ son $]\frac{1}{3};+\infty[$.
Estos tramos en la función marcan los puntos de inflexión.

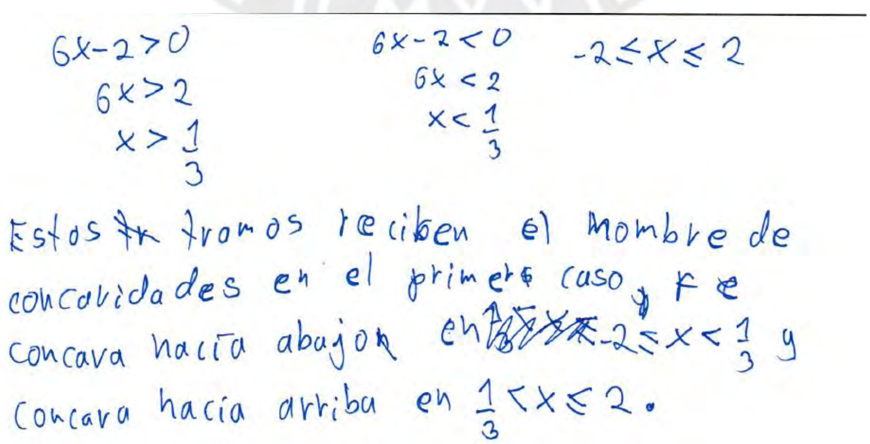
El estudiante relaciona lo expresado con su grafica de la HP Prime y el dibujo de la hoja, observamos que identifica el punto de inflexión; pero el error se manifiesta en los intervalos, ya que no ha tomado en cuenta el dominio de la función:$-2 \leq x \leq 2$. Al finalizar, complementa su respuesta utilizando el registro lengua natural, entendiendo que cuando escribe la palabra "marcan" se refiere que el punto inflexión es el punto de cambio entre los intervalos de la función; aunque, de todas formas, la explicación ha quedado un poco ambigua y da pie a interpretaciones.

Por último, el ítem, a parte de los valores donde $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, requería el nombre de estos tramos en f, por lo que vemos que el estudiante no pudo responder a la pregunta, si no que redireccionó hacia el punto de inflexión. El estudiante P_1, adoptó, como se dijo, los mismos registros, pero sí contestó de forma correcta.

Para el estudiante P_2, sus producciones se centran en el registro algebraico, dominante, y de forma complementaria el registro lengua natural. A continuación, vemos sus producciones en la figura 94.

Figura 94

Producción del estudiante P_2 en el CP3 y CP4



$6x-2>0$ $\quad$ $6x-2<0$ $\quad$ $-2\leq x\leq 2$
$6x>2$ $\quad$ $6x<2$
$x>\frac{1}{3}$ $\quad$ $x<\frac{1}{3}$

Estos ~~tr~~ tramos reciben el nombre de concavidades en el primero caso, f es concava hacia abajo en $-2\leq x<\frac{1}{3}$ y concava hacia arriba en $\frac{1}{3}<x\leq 2$.

A diferencia de los otros dos estudiantes, P_2, utiliza desigualdades para hallar el conjunto de valores donde $f''(x) < 0$ y $f''(x) > 0$, luego los intercepta con el dominio de la función y determina los tramos donde la segunda derivada tiene signo positivo y negativo; además utiliza el registro lengua natural para reconocer y relacionar el signo positivo de f'' con la concavidad hacia arriba de la función y el signo negativo de la función f'' con la concavidad hacia abajo. Este proceso no lo habíamos contemplado en nuestro análisis a priori, creemos que es un proceso más elaborado donde de manera implícita realiza tratamientos en el registro algebraico. La simbología utilizada es correcta.

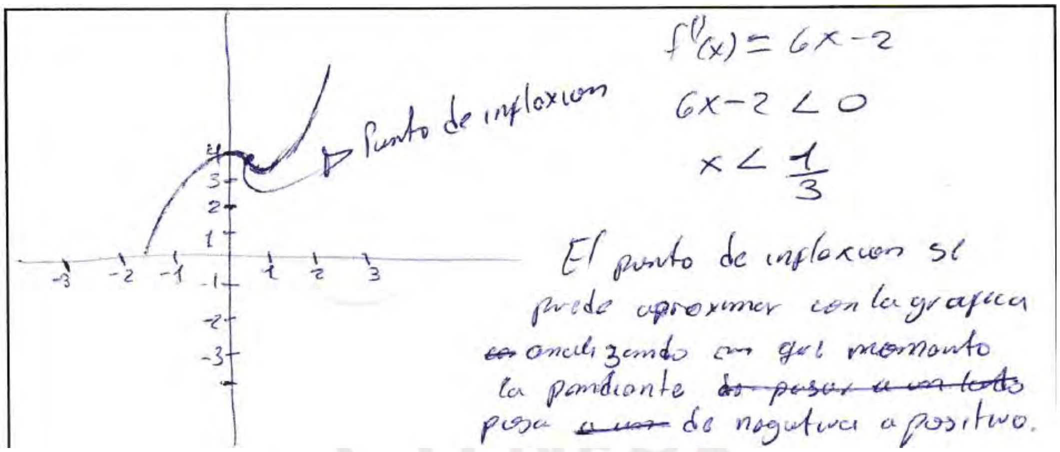
Finalmente, en este ítem bii) el estudiante P_4 realiza sus producciones, al igual que el estudiante P_2, desde el registro algebraico y lengua natural, también utiliza desigualdades para expresar el conjunto de valores donde la segunda derivada es negativa; aunque solo realiza del lado donde $f''(x) < 0$. Cuando explica en el registro lengua natural comete un error al vincular con los signos de f'' con el cambio de la razón de la pendiente. Creemos que este error se debe a un aprendizaje con deficiencias del concepto o falencias en los conocimientos previos, tal como lo manifiesta Radatz (1979, como se citó en Rico 1995) en la clasificación de los errores matemáticos que propone:

> 3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de error se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios. (p.32)

Las deficiencias que se ha visto en las producciones del estudiante P_4, creemos que están referidas a los limitados conocimientos que posee el estudiante sobre el concepto de f''. Este error continúa teniéndolo en el ítem biii), donde sí detecta el punto de inflexión, pero no reconoce los signos de la segunda derivada con las concavidades sino con los signos de la pendiente. Presentamos esta producción en la figura 95.

Figura 95

Producción del estudiante P_4 en el CP3 y CP4



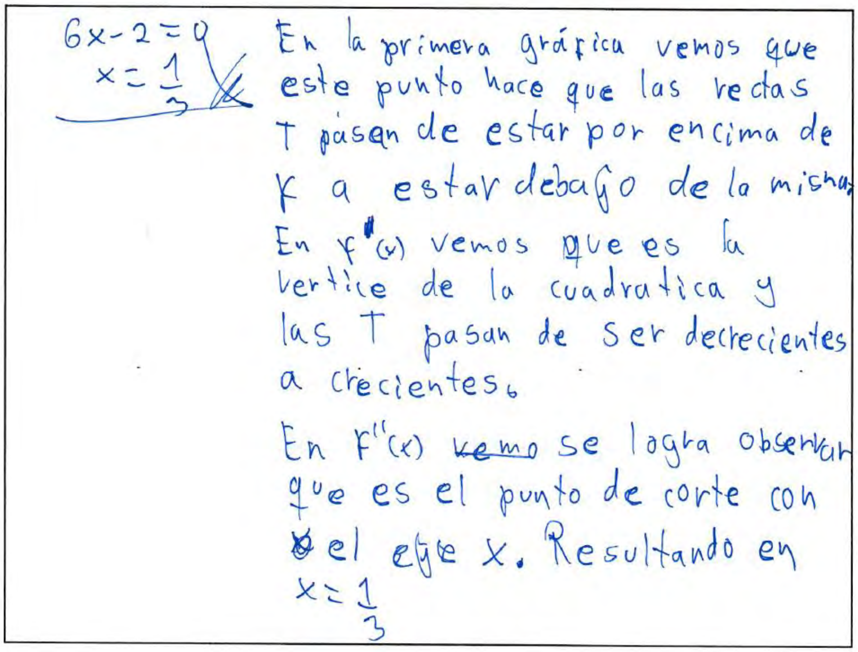
Al igual que en el ítem anterior, solo realiza la desigualdad donde $f' < 0$; por lo que, obtiene la zona donde hay una concavidad hacia abajo; aunque no lo menciona por desconocimiento del concepto. Lo interesante es que ha representado en tres registros, el algebraico, el cual está incompleto; el gráfico, en el que se evidencia que sí reconoce el punto de inflexión en la gráfica, pero no entiende su relación con el cambio de las concavidades, y finalmente la lengua natural, que es donde ha tenido las mayores dificultades al aseverar un enunciado incorrecto. Creemos que, en esta parte del concepto referido a la segunda derivada, le estudiante no ha podido coordinar el registro algebraico con la lengua natural.

El estudiante P_3 trabaja solo en el registro algebraico, realiza tratamientos hallando los números críticos de la segunda derivada, y luego concluye afirmando que ese valor es el punto de inflexión. Debió indicar que el valor hallado es la coordenada x del punto de inflexión. El estudiante P_1 también utiliza el registro algebraico para realizar sus producciones, luego hace la conversión al registro numérico para evaluar los signos de la segunda derivada, previamente utiliza un segmento de recta para ubicar el número crítico y distribuir los signos de f''; lo que podríamos inferir que utiliza un tipo de registro figural, que lo incluiremos en nuestros análisis en el registro gráfico.

Finalmente, el estudiante P_2 realiza un primer proceso en el registro algebraico, igualando la segunda derivada a cero, y luego utiliza de forma predominante el registro lengua natural para realizar una justificación muy apropiada sobre este valor hallado y su injerencia en las tres funciones: f, f' y f''. Mostramos esta producción en la figura 96.

Figura 96

Coordinación de registros lengua natural, algebraico y RGD del estudiante P_2 en los CP3 y CP4



$6x-2=0$

$x=\frac{1}{3}$

En la primera gráfica vemos que este punto hace que las rectas T pasan de estar por encima de f a estar debajo de la misma.
En $f'(x)$ vemos que es la vertice de la cuadratica y las T pasan de ser decrecientes a crecientes.
En $f''(x)$ ~~vemo~~ se logra observar que es el punto de corte con el eje x. Resultando en $x=\frac{1}{3}$

Se observa que el estudiante no realizó la validación del punto de inflexión en este ítem; esto se debe a que en el ítem anterior ya había hallado este valor como el cambio de concavidad en la función, esto sumado a las gráficas que realizó en el HP Prime, hace que afirme este valor en x, como el punto de inflexión, aunque en realidad es la abscisa. Lo particular de esta producción es la redacción que utiliza el estudiante, en el registro lengua natural, ya que se observa que valida este número crítico en las tres representaciones conceptuales: f, f' y f'', comprendiendo que en la función este valor es un factor de posición de las rectas tangentes; es decir que pasen de rectas tangente por encima del grafico de f a estar por debajo; luego lo vincula con la función f', relacionando este punto como el vértice (valor mínimo) de la gráfica de la función cuadrática teniendo rectas tangente que van de pasar de decrecientes a crecientes ; y finalmente en f'' relaciona este valor con el corte al eje x.

Así pues, vemos un gran dominio del estudiante de los conceptos, creemos que ha realizado una aprehensión discursiva tal como lo menciona Duval (2004, como se citó en Moreno e Ingar, 2016) "la aprehensión discursiva de una figura es la explicación de las propiedades de una figura y estas explicaciones son de naturaleza deductiva, y su función epistemológica es de demostración". (p. 372) En este caso, el estudiante conoce propiedades y características de los gráficos de f, f' y f'', tal como lo realizó el estudiante en sus producciones.

__Sistematización del campo de problemas CP3 y CP4__

A continuación, proponemos en la tabla 37 nuestro cuadro adaptado para poder desarrollar nuestro análisis a posteriori.

Tabla 37

Sistematización del campo de problemas CP3 y CP4

Campo de problemas (CP)	**Emergentes** / **Previas**		**Representaciones para $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$**														
			$f(x)$					$f'(x)$					$f''(x)$				
			Natural	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**	**Natural**	**Algebraico**	**Gráfico**	**Numérico**	**RGD**
CP3	$f'(x)$	**Natural**															
		Algebraico												P_1 P_2 P_3 P_4			
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD															
	$f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico	P_1											P_1 P_2 P_3 P_4			
		Gráfico															
		Numérico															
		RGD	P_2 P_4 P_3														P_3 P_4
CP4	$f(x)$	**RGD**			P_4												
	$f''(x)$	**Natural**															
		Algebraico												P_1 P_2	P_1	P_1	

														P_3 P_4			
		Gráfico	P_4														
		Numérico															
		RGD	P_2					P_2					P_2				P_3

Nota. Adaptado de *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (p.57.), file:///C:/2024/pucp/ANTECEDENTES/FUERA%20DE%20PUCP/Luis_Pino_tesis.pdf

Observamos que en los registros previos del CP3, en la *representación de f'*, las producciones emergentes de los 4 estudiantes fueron en el registro algebraico, es decir realizaron tratamientos al momento de realizar la derivada de f''. Todos los estudiantes poseen dominio sobre la derivada cuando realizan procesos algebraicos. Luego, en el mismo CP3, desde la *representación de f''*, los registros previos se fijaron desde los registros algebraico y RGD; los registros emergentes abarcaron a la representación de f y de f''; así tres estudiantes hicieron producciones en el registro lengua natural desde el RGD, esto se dio cuando se le pedía el nombre de los intervalos donde los signos de f'' varían de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba.

Hacemos notar que una de estas producciones tuvo un error de interpretación de conceptos, tal como se mencionó anteriormente; el otro estudiante tuvo como registro previo el algebraico y emergente al registro natural. Hubo tratamientos en los registros algebraicos y el RGD. Así los 4 estudiantes realizaron tratamientos en el registro algebraico para hallar los números críticos de f''; mientras que solo dos estudiantes, P_3 y P_4, hicieron los tratmeintos en el RGD, esto se evidencia cuando hicieron las exploraciones en el gráfico y usaron las funcionalidades de la HP Prime, sobre todo el estudiante P_3.

Cuando se partió desde la *representación de f''*, los registros previos fijados fueron el algebraico, el RGD y el gráfico. Así, cuando partieron del registro algebraico los 4 estudiantes realizaron tratamientos de la *representación de f''*, esto se dio para hallar el número crítico de la segunda derivada, o sea resolvieron la ecuación $f''(x) = 0$; además, el estudiante P_1 realizó conversiones desde el registro algebraico al registro numérico y gráfico. Por otro lado, el estudiante P_4 formuló sus producciones desde el registro gráfico al registro lengua natural; sin embargo, al igual que el ítem anterior, falló en la justificación, tal como se había mencionado en el análisis a posteriori, por tal motivo se sombreó su producción en la tabla. También, apreciamos que las producciones del estudiante P_2 han sido muy significativas, ya que partiendo del RGD, ha movilizado las tres representaciones f, f' y f'', haciendo conversiones al registro natural; esto se evidencia cuando el estudiante explica como el punto de inflexión se relaciona con las tres gráficas de f, f' y f''.

Finalmente, encontramos producciones en la representación de f en el registro gráfico del estudiante P_4 desde el RGD, esto se dio en las *representaciones de f*. Consideramos que el estudiante P_3 es el que se ha movilizado por varios registros, como el algebraico y RGD; aunque, también realiza tratamientos y conversiones en el registro lengua natural.

Capítulo V: Consideraciones Finales

Con relación a nuestro primer objetivo específico: *Identificar los diferentes registros de representación semiótica que movilizan los estudiantes del Bachillerato Internacional al resolver actividades sobre la noción de la derivada,* podemos afirmar lo siguiente:

En la Actividad 1, podemos apreciar que los estudiantes transitaron por los registros algebraico, gráfico, lengua natural y numérico, tal como se muestra en las tablas 18, 19, 20 y 21; mientras que en la actividad 2, los estudiantes transitaron en los registros: algebraico _ simbólico, lengua natural, RGD, gráfico y el numérico, tal como se evidencia en las tablas 34, 35, 36 y 37.

Con relación a los campos de problemas, tenemos:

En el CP0, los registros donde hubo mayor tránsito por parte de los estudiantes son el RGD, el registro algebraico y el registro gráfico al trabajar la actividad 2, tal como se evidencia en la tabla 34.

En el CP1, los estudiantes transitan por los registros lengua natural, algebraico y el gráfico, en la actividad 1, como se evidencia en la tabla 18; mientras, que en la actividad 2, los registros predominantes son el registro algebraico y el RGD; de regular tránsito el registro lengua natural. Hubo registros de poco tránsito, como el registro gráfico y numérico, tal como vemos en la tabla 35.

En el CP2, de la actividad 1, los estudiantes transitan frecuentemente en el registro algebraico, en menor frecuencia el registro gráfico y en menor tránsito el registro lengua natural y el numérico, tal como vemos en la tabla 19. En la actividad 2, el registro algebraico, RGD y la lengua natural, son los más transitados, en menor proporción el numérico y el gráfico, como se evidencia en la tabla 36.

En el CP3 de la actividad 1 vemos, en la tabla 20, que nuevamente el registro predominante es el algebraico, luego el registro lengua natural y numérico, y en menor uso el registro gráfico. En la actividad 2, que solo han transitado por el registro algebraico, RGD y menor proporción el registro lengua natural, tal como se evidencia en la tabla 37,

En el CP4 de la actividad 1, el registro algebraico es el de mayor tránsito, aunque también predomina el registro lengua natural y un menor tránsito del registro gráfico y numérico, tal como vemos en la tabla 21. En la actividad 2, se evidencia mucho tránsito en el registro algebraico, y de manera esporádica, tránsitos en los registros lengua natural, gráfico y numérico, como vemos en la tabla 47.

Por lo expuesto, podemos afirmar que **hemos cumplido** con el objetivo específico.

En relación con nuestro segundo objetivo específico: *Describir los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes al coordinar el registro gráfico, gráfico dinámico y algebraico, en el desarrollo actividades sobre la noción de la derivada.*

Hay un predominio del registro algebraico por parte de los cuatro estudiantes; por ende, se evidencian diversos tratamientos en este registro al momento de hallar la derivada de una función y resolver ecuaciones para hallar los números críticos, como se muestra en la figura 39 y en la figura 40; y como se sintetizó en la tabla 19. También se evidencia que dos estudiantes tienden a transitar por el registro algebraico, cuando la actividad requería el uso de la HP Prime, estos estudiantes solo usaron la herramienta tecnológica para realizar las gráficas de f, f' y f'', pero no utilizaron las demás opciones que propone la HP Prime, esto podemos evidenciarlo en la figura 82 donde el estudiante se orienta al trabajo analítico y de procesos matemáticos utilizando propiedades y pasos específicos realizando procesos mínimos en la HP Prime, debido a que no domina en su totalidad los atributos de la graficadora.

Se evidencia tratamientos en el RGD, pues dos estudiantes utilizan en mayor proporción la HP Prime mediante las opciones "ir a", "raíz", "pendiente" y "tangente". Mediante la exploración de la gráfica el estudiante deduce elementos de la función como los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decreciente, tal como menciona Armella (2002): "Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora". (p. 97) Esto se puede evidenciar en la figura 89.

Con respecto a la conversión del registro gráfico al algebraico y del gráfico a lengua natural. La primera conversión se da sobre todo en la actividad 1, cuando a partir del gráfico hallan intervalos de crecimiento o decrecimiento o identifican los signos de f' o f'', a partir del grafico de f, tal como se muestra en la figura 45. La segunda conversión también se da en la actividad 1 como cuando realizan afirmaciones a partir del gráfico de f, tal como se evidencia en la figura 43 de la actividad 1.

Con respecto a las conversiones del RGD al registro lengua natural, esto se dan cuando los estudiantes quieren vincular una propiedad con la gráfica de las funciones f, f' y f'', tal como se muestra en la figura 84, donde el estudiante vincula parcialmente la derivada con la pendiente.

Con respecto a las conversiones del RGD al algebraico, estas se evidencian mediante simbologías como intervalos o expresiones como $f'(x) > 0$ o ecuaciones para determinar los números críticos, esto podemos evidenciarlo, por ejemplo, en la figura 81.

También hay otras conversiones en menor escala, como del algebraico al numérico, para evaluar los números críticos, como en la figura 52.

Se ha coordinado el RGD, el registro natural y el algebraico, esto se evidencia cuando a partir de las gráficas de f, f' y f'' que realizó en la HP Prime, realiza el análisis y la interpretación de las gráficas, las relaciona con las propiedades de la primera y segunda derivada, generando una aprehensión discursiva, tal como lo menciona Duval (2004, como se citó en Moreno e Ingar, 2016): "la aprehensión discursiva de una figura es la explicación de las propiedades de una figura y estas explicaciones son de naturaleza deductiva, y su función epistemológica es de demostración". (p. 372) Esto se evidencia en la figura 89.

Por lo expuesto, podemos afirmar que **hemos cumplido** con el objetivo específico 2.

Con respecto a nuestro objetivo general: Analizar cómo estudiantes de un colegio de Bachillerato Internacional transitan la noción de la derivada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

A partir de los análisis realizados, hemos verificado que, en esta secuencia de actividades, los registros donde hay mayor tránsito son el registro algebraico, gráfico y lengua natural, en la actividad 1; mientras, que el RGD, el algebraico y lengua natural en la actividad 2. Se observa que el registro gráfico queda al margen cuando se trabaja desde ambientes de registro dinámico, HP Prime. Concluimos, por ende, la importancia del registro lengua natural y algebraico para el tránsito que realizaron nuestros sujetos de investigación.

En el tránsito entre los registros que realizaron los estudiantes, se detectaron algunos errores por asociaciones incorrectas como lo señala Radatz (1979, como se citó en Rico 1995): "Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual del pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información". (p. 13) Esto se evidencia, en la figura 37, cuando el estudiante confunde la función decreciente con la derivada positiva

También se evidencian algunos errores por desconocimiento o una interpretación incorrecta de la recta tangente en un punto, para este tipo de error tomamos la afirmación de nuestro antecedente, Gonzales et al. (2018):

> El desconocimiento de las funciones elementales y sus características principales también son fuente de bastantes errores, así como la falta de asimilación de los conceptos básicos de la geometría analítica (pendiente de una recta e interpretación de su signo, crecimiento y decrecimiento, ecuación punto-pendiente, etc.). (p. 457)

Con respecto a nuestros análisis a priori y a posteriori, consideramos que en general se evidencia una concordancia entre nuestro análisis a priori y a posteriori; ya sea, en el registro que contemplábamos que iban a utilizar los estudiantes, así como las producciones que utilizaron y también en algunos errores que se indicaron en el análisis a priori; sin embargo, hay que consignar que hubieron algunos expresiones que realizaron los estudiantes que no estaban previstos en nuestro análisis a priori; como el uso de algunas notaciones y simbologías como expresó el participante P_1 en la figura 31, o a una mala comprensión en las indicaciones del ítem como se manifiesta en la figura 33 donde el estudiante P_2 procede a derivar cuando el ítem no lo pedía; lo que podría nos podría indicar una mala comprensión de lo que requiere el problema o porque sabía lo que tenía que hacer pero no lo realizó de manera gradual como requerían los ítems.

Por último, tampoco consignamos, en nuestro análisis a priori, producciones un tanto avanzada que no se les solicitaba, tal como evidencia el estudiante P_1 cuando realizó un bosquejo del gráfico de f' a partir del gráfico de f, tal como se muestra en la figura 42.

En la misma línea, con respecto al uso de la calculadora de pantalla gráfica HP Prime, consideramos que no todos los estudiantes aprovecharon esta herramienta tal como esperábamos; ya que en la actividad 2, su desarrollo estaba planteado en el uso de CPG de manera activa y no solo para que nos muestra la gráfica, sino para poder hallar pendientes, valores máximos y mínimos, explorar la recta tangente en toda la traza de la función f, f' y f''; así, podemos mencionar las producciones realizadas por el estudiante P_1, en la que no realiza los tratamientos en el registro RGD como hemos consignando en los análisis que realizamos de las figuras 78 y 79.

Por lo expuesto y habiendo cumplido con los objetivos específicos, consideramos que **hemos cumplido** con todos nuestros objetivos.

Recomendaciones a Futuro

A continuación, proponemos algunas ideas que podrían enriquecer a otros trabajos.

Con respecto al diseño de la secuencia de actividades, consideramos que sería importante generar actividades sin uso de tecnología, a partir de los grafico de f' y f''; ya que, en nuestra secuencia se tomó a partir del gráfico de la función; habiendo más posibilidades de representaciones y tránsitos si se complementa con las otras gráficas.

Nuestras actividades fueron diseñadas para trabajar de manera individual, esto se apoyaba en la orientación de nuestros objetivos; sin embargo, creemos que sería muy productivo que este tipo de secuencias de actividades se proponga mediante el trabajo de grupos pequeños; ya que, se podría apreciar la interacción entre los estudiantes, lo que sería muy enriquecedor para analizar qué los llevó a elegir determinado registro en la resolución de las actividades.

También consideramos que sería muy interesante generar actividades desde otro tipo de RGD, como GeoGebra, Cabri, etc. Lo cual sería muy enriquecedor por la variedad de posibilidades que brindan estos softwares en la construcción del conocimiento.

Bibliografía

Armella, L. M. (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales*, *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Tecnologías digitales en el Aula de Matemáticas*, *1*, 81-86. [Archivo PDF]. https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1171397012609_1631627635_21672/Forma_doce_mate_CAPITULO1A.pdf

Apostol, T. (1967). *Calculus_ Cálculo con funciones de una variable*. Volumen I, Segunda Edición. Editorial REVERTÉ S.A.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. Primera Edición. [Archivo PDF]. file:///C:/Users/rafal/Downloads/Artigueetal195.pdf

Awada, N., Buchanan, L., Chang Wathall, J., Kemp E., La Rondie, P., Stevens, J. y Thompson, E. (2019). *Mathematics: Analysis and Approuches*. Standar level. Oxford University Press.

Bachillerato Internacional. (s.f.). *Acerca del IB*. https://www.ibo.org/es/about-the-ib/

Cantoral, R. y Farfan, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis.* [Archivo PDF]. https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/09/pensamiento.pdf

Chacón, L. (2020). *Trabajo matemático de estudiantes de ingeniería en tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/19941

Cruzado, E. (2018). *Problemas de optimización mediados por el GeoGebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de ingeniería*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/12040

D'Amore, Bruno, Pinilla, Martha Fandiño, Iori, Maura, y Matteuzzi, Maurizio. (2015). *Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval*". Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(2), 177-212. https://doi.org/10.12802/relime.13.1822

De Faria, E. (2006). *Ingeniería Didáctica.* Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. [Archivo PDF]. file:///C:/Users/rafal/Downloads/6887-Texto%20del%20art%C3%ADculo-9471-1-10-20130124%20(2).pdf

Del Puerto, S. y Minnaard, C. (2003). *El uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de la matemática.* Editorial**:** Centro de Altos Estudios Universitarios de la Organización de Estados Iberoamericanos (CAEU/OEI)**.** [Archivo PDF]. file:///C:/Users/user/Downloads/aviseras,+Gestor_a+de+la+revista,+393Puerto.pdf

Drouhard, J. y Panizza, M. (2009). *Aspectos semióticos y lingüísticos en didáctica de la matemática. Memoria Académica*. II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 28 al 30 de octubre de 2009, La Plata. Un espacio para la reflexión y el intercambio de experiencias. [Archivo PDF]. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.613/ev.613.pdf

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación.* La Gaceta De La RSME, Vol 9. [Archivo PDF]. https://skat.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Escudero, C. y Cortez, L. (2019). *Técnicas y métodos científicos para la investigación cualitativa*. Editorial Utmach. [Archivo PDF]. https://repositorio,.utmachala.edu.ec/bitstream/48000/12501/1/Tecnicas-y-MetodoscualitativosParaInvestigacionCientifica.pdf

García, M. del S., y Flores, D. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *12*(46). Recuperado a partir de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/560

Godino, J., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registro de Representación Semiótica y Configuración Ontosemiótica. [Archivo PDF]. file:///C:/Users/rafal/Downloads/Dialnet-AnalisisDeLaActividadMatematicaMedianteDosHerramie-6168889%20(3).pdf

González, A., Muñiz, L. y Rodríguez, L. J. (2018). *Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada*. Aula Abierta, 47(4), 449–462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Granados, N. y Jiménez, A. (2022). *Representaciones semióticas en números racionales*. Revista Habitus: Semilleros De Investigación, 2(3), e13966. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/semilleros_investigacion/article/view/13966/11970

Guzmán, I. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. [Archivo PDF]. https://www.researchgate.net/profile/Ismenia-Guzman/publication/28130437_Registros_de_representacion_el_aprendizaje_de_nociones_relativas_a_funciones_voces_de_estudiantes/links/5fbdaa41299bf104cf7483d3/Registros-de-representacion-el-aprendizaje-de-nociones-relativas-a-funciones-voces-de-estudiantes.pdf

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico). [Archivo PDF]. https://es.scribd.com/document/379257414/Dificultades-en-el-aprendizaje-del-calcu-pdf

Labé, N. (2014). *Dificultades en la representación de la ecuación de la recta Análisis desde la mirada de los registros semióticos* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. [Archivo PDF]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-8000/UCE8448_01.pdf

Larson, R. y Edwards, B. (2011). *Calculo I*. Novena Edición. McCGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A.

Londoño, D. L., Villa, D. I. y Morales, S. I. (2012*). Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*. http://hdl.handle.net/11407/45.

Manrique, A. (2020). *Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora gráfica para movilizar la noción de la función cuadrática en estudiantes de nivel secundario.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional de la Pontificia Universidad Católica del Perú. http://hdl.handle.net/20.500.12404/17211

Moreno, A. y Vigo, K. (2016). *Las aprehensiones en el registro gráfico para la comprensión de la noción de variación*. VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

[Archivo PDF]. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1170805/Moreno2017Las.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2023). *Integración equitativa de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas*. https://www.nctm.org/standards-and-positions/equitable-integration-of-technology/

Nieves, E. M. (2011). *Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial*. Voces y Silencios. Revista Latinoamericana de Educación, 2(especial), 3-21.

Organización del Bachillerato Internacional. (2019). *Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques.* Primera evaluación en 2021. [Archivo PDF]. https://resources.ibo.org/data/mathematics-analysis-and-approaches-guide_e10ae7ad-9d1d-4299-b7d1-395b8e52b7fc/mathematics-analysis-and-approaches-guide-es_a8f1fc7f-1692-4d7e-a957-a65d518787ed.pdf

Organización del Bachillerato Internacional. (2022). *Informes generales de las asignaturas, mayo 2022*. [Archivo PDF]. https://resources.ibo.org/data/d_5_mataa_sur_2205_1hl_s.pdf

Organización del Bachillerato Internacional. (2022). *Informes generales de las asignaturas, noviembre 2022.* [Archivo PDF]. https://resources.ibo.org/data/d_5_mataa_sur_2211_1sl_s.pdf

Organización del Bachillerato Internacional. (2023). *Esquema de Calificación convocatoria noviembre 2023, Matemáticas; Análisis y Enfoques Nivel Medio.*

Organización del Bachillerato Internacional. (2024). *Uso de calculadoras en los exámenes del PD de 2024* (versión1.0). [Archivo PDF]. https://resources.ibo.org/data/d_4_gen4d_sup_2403_1_s.pdf

Pereira, J. A. G. y Bermúdez, E. A. (s.f). *Las representaciones semióticas ayudan a desarrollar el pensamiento algebraico*. [Archivo PDF]. https://core.ac.uk/download/pdf/158573337.pdf

Pino-Fan, L., Castro, W. Godino, J. y Font, V. (2011). *Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato*. Paradigma, 34(2), 129-150. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512013000200008&lng=es&tlng=es

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. [Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/29940

Ramírez, E. (2009). *Historia y Epistemología de la función derivada*. 4° Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias. https://revistas.upn.edu.co/index.php/TED/article/view/261/252

Resolución Ministerial N° 274-2014- MINEDU (Ministerio de Educación) se crea el "*modelo de servicio educativo para la atención de estudiantes con destacado desempeño*". 1 de julio 2014. https://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/20.500.12799/6759/Modelo%20de%20servicio%20educativo%20para%20la%20atenci%C3%B3n%20de%20estudiantes%20con%20habilidades%20sobresalientes.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rico, L. (1995*). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. [Archivo PDF]. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1212675/RicoL95-100.pdf

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Recuperado de file:///C:/Users/user/Downloads/Dialnet-SobreLasNocionesDeRepresentacionYComprensionEnLaIn-3037582%20(1).pdf

Romero, C. y Oktac, A. (2015). *Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal*. Recuperado de https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/454/209

Ruiz L. y Elena F. (2013). *Usando tecnología digital portátil en la resolución de problemas de cálculo.* e-Gnosis, 11 ( ),1-11.[fecha de Consulta 7 de Julio de 2024]. Número de serie. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73029399004

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(2), 267-296. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&tlng=es

Vigo, K. y Ferreira, M. J. (2019). *Las aprehensiones en el registro gráfico para el estudio de la derivada parcial.* Educación, *28*(55), 203-224. https://doi.org/10.18800/educacion.201902.010

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). *Una introducción a la derivada de la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad*. Boletín de Educación Matemática, 28 (48),449-468. [fecha de consulta 7 de julio de 2024]. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades (1998). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123023

.

ANEXOS

TRABAJANDO CON LAS DERIVADAS

Código de estudiante: ____________________

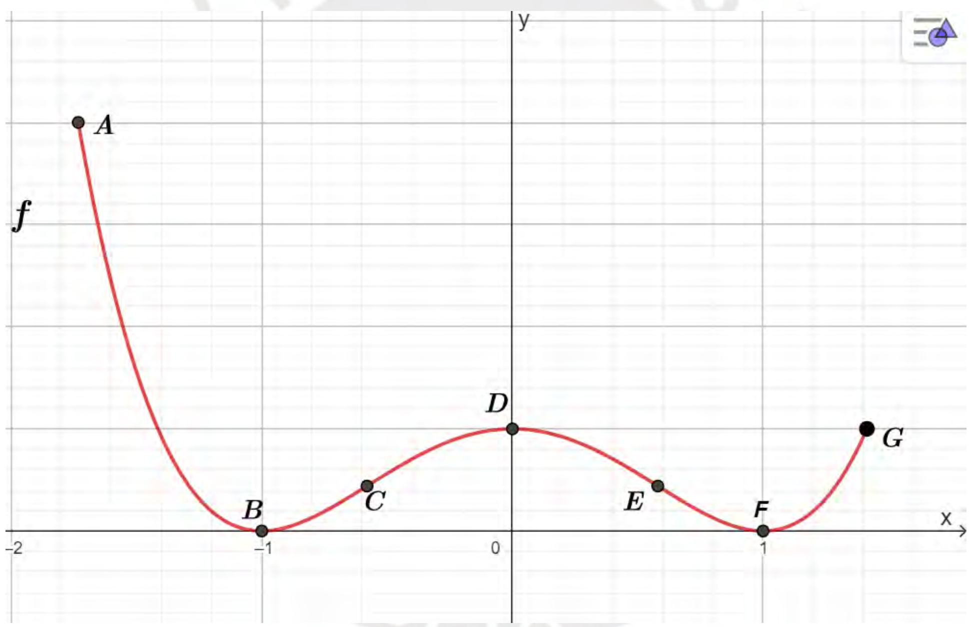
Sección: __________________ **Fecha de aplicación: ______________**

ACTIVIDAD 1

En esta primera actividad ***no se utiliza*** *la calculadora de pantalla gráfica HP prime.*

A continuación, se muestra la gráfica de la función $f(x) = (x^2 - 1)^2$

para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{2}$



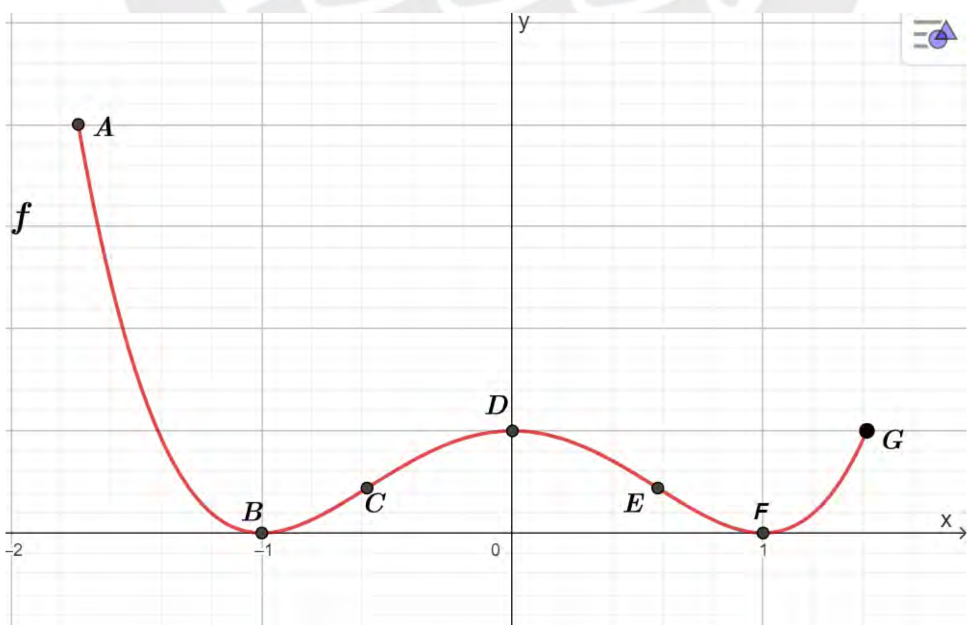
Los puntos A, B, C, D, E, F y G se encuentran en la gráfica de f.

Sea la T el conjunto de todas las rectas tangentes a la gráfica de la función.

a) Observa el gráfico y SIN DERIVAR **escribe** los intervalos donde $f'(x)$ es positiva ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde $f'(x)$ es negativa ($f'(x) < 0$). Explica.

b) Realiza procesos para **hallar** las coordenadas x de los puntos mínimos y del punto máximo.

c) En el gráfico, traza 3 rectas T que se encuentren por encima de la gráfica de f. Estima (obtener un valor aproximado) en qué tramo (intervalo) las rectas T están por encima de la gráfica de f.



d) ¿Qué implica en la gráfica de f que la recta T este por encima de la curva?

e) Sea x_B la abscisa del punto B, entonces ¿$f''(x_B)$ será positivo, negativo o cero? Explica.

f) Estima el/los valor/es de la coordenada x de la función f, donde a recta T se encuentra tanto por encima como por debajo de la gráfica f.

¿Con qué puntos de la gráfica coincide?

¿Qué nombre recibe este punto?

g) Sea x_C la abscisa del punto C, entonces ¿$f''(x_C)$ será positivo, negativo o cero? Explica.

h) Realiza los cálculos en $f(x)$ para verificar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

i) Realiza los cálculos en $f(x)$ para verificar que las abscisas de los puntos de inflexión son: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\sqrt{3}}{3}$.