PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PROPUESTA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DE ROTACIÓN Y TRASLACIÓN EN EL PLANO BASADO EN LAS APREHENSIONES EN EL REGISTRO FIGURAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR

Javier Saturnino Alvarez Quirhuayo

ASESORA:

Dra. Katia Vigo Ingar

Mayo, 2021

RESUMEN

Nuestra investigación se centra, dentro del marco de la Geometría, en el estudio de las transformaciones geométricas de figuras en el plano en los movimientos de rotación y traslación por medio de una propuesta de secuencia didáctica para analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de Educación Básica Regular (EBR). Para ello nos apoyamos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994). Así mismo, utilizamos aspectos de la metodología cualitativa y nuestras fuentes son secundarias. Todo ello nos permite proponer una secuencia didáctica para lograr el objetivo descrito.

Debemos mencionar que nuestra investigación no es de carácter experimental dada la coyuntura excepcional a raíz de la COVID-19, pero sí está dirigida al logro de aprendizajes en el ciclo VII de EBR. Nuestra secuencia de didáctica está compuesta de tres situaciones en el marco de la Geometría dentro de la enseñanza de la Matemática, la primera contiene cinco actividades, la segunda situación está compuesta de cuatro actividades y la tercera situación compuesta por una actividad que utiliza el apoyo del recurso del *software GeoGebra*. Todas las actividades propuestas en cada una de las situaciones fueron analizadas y ayudaron significativamente a comprender los procesos geométricos involucrados de acuerdo con las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994) al desarrollar las actividades propuestas en cada una de las situaciones relacionadas con las transformaciones geométricas de figuras en el plano en los movimientos de rotación y traslación. También en las revisiones de investigaciones de referencia, encontramos dificultades en común en el aprendizaje de las transformaciones como el no desarrollar el tema de las transformaciones en el aula, el no fomentar el uso del lápiz y compás para realizar transformaciones geométricas y la ausencia del uso de herramientas tecnológicas como apoyo didáctico.

Palabras clave: Enseñanza, Geometría, Rotación, Traslación, Aprehensiones, Investigación.

ABSTRACT

Our research focuses, within the framework of Geometry, on the study of the geometric transformations of figures in the plane in the movements of rotation and translation through a proposed didactic sequence to analyze the role of apprehensions in the figural register. used in the study of geometric transformations in the plane through rotation and translation movements in cycle VII of Regular Basic Education (EBR). For this we rely on Duval's Semiotic Representation Theory of Records (1994). Likewise, we use aspects of the qualitative methodology and our sources are secondary. All this allows us to propose a didactic sequence to achieve the objective described.

We must mention that our research is not experimental in nature given the exceptional situation as a result of COVID-19, but it is aimed at achieving learning in cycle VII of EBR. Our sequence of activities is composed by three situations within the framework of Geometry within the teaching of Mathematics, the first contains five activities, the second situation consists of four activities and the third situation consists of an activity that uses the support of the resource GeoGebra software. All the activities proposed in each of the situations were analyzed and significantly helped to understand the geometric processes involved according to the apprehensions in the figural register according to Duval (1994) when solving the proposed activities related to the geometric transformations of figures in the plane. in rotational and translational movements. Also, in the reference research reviews, we found common difficulties in learning transformations such as not developing the topic of transformations in the classroom, not encouraging the use of the pencil and compass to perform geometric transformations and the absence of the use of technological tools as didactic support.

Keywords: Teaching, Geometry, Rotation, Translation, Understanding, Research.

DEDICATORIA

Dedicado con mucho cariño a la memoria de mis padres Saturnino Alvarez e Hipólita Quirhuayo y a mi tío Manuel Santa Cruz, que desde el cielo siempre me estarán guiando en el camino del bien, así como todos mis familiares que han partido víctimas de la pandemia.

A mi esposa Alicia y a mis hijas Mónica Ximena y Luciana Carolina, mis motores de fortaleza y perseverancia contínua.

A mi hermano Eduard, ejemplo de humildad y trabajo constante.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, la Dra. Katia Vigo Ingar, por su preocupación, exigencia y sus sugerencias en el desarrollo y culminación de esta investigación.

A los miembros del jurado, la Dra. Jesús Flores y el Mg. Nelson Peñaloza por sus correcciones y sugerencias en el trabajo de investigación.

Agradecemos a la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú - PUCP, especialmente a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática -TecVEM, por su apoyo brindado para la presente investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, por contribuir con mi formación, en especial a los profesores Teódulo Verastegui, Víctor Agapito, Loretta Gasco, Christian Figueroa, Cecilia Gaita y Alejandro Ortiz, a quienes recordaré con mucho cariño y aprecio.

Al apoyo de las directoras de los colegios Nuestra Señora del Carmen (Carmelitas) de Miraflores y al colegio Hans Christian Andersen de Monterrico - Surco, a la Sra. Norma Soberón y a la Sra. Betty Martínez, respectivamente.

A mis estudiantes de la promoción 55 del colegio Carmelitas, dado que implícitamente fueron una inspiración constante para realizar el presente trabajo de investigación.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

INTRODUCCIÓN

Nuestro interés por investigar sobre las transformaciones geométricas en el plano, se origina al observar, a nivel laboral, algunos centros educativos, la ausencia del desarrollo del tema en diversos grados del nivel de secundaria; así mismo al realizar capacitaciones a nivel nacional en diversos departamentos del país auspiciados por las diversas Unidades de Gestión Educativa Locales (UGEL), se observa que los docentes del área, en su mayoría, carecen del conocimiento de la misma, y más aún al ser parte del equipo que generó los mapas de progreso del Ministerio de Educación (MINEDU), resultó complicado validar los estándares en ese aspecto, puesto que al presentar alguna actividad asociada a la transformación geométrica, los estudiantes simplemente no respondían a las actividades propuestas, luego , trabajando en los meses de verano con estudiantes de Educación Básica Regular (EBR) del nivel de secundaria por medio de diversas instituciones, éstos manifestaban que nunca habían tenido contacto con el tema, más aún, indicaban que en el curso de Matemática, específicamente en la Geometría, no era común utilizar instrumentos en la medición y construcción de figuras, como la regla, el compás, el transportador, el juego de escuadras, y mucho menos algún aplicativo tecnológico de apoyo como el *software GeoGebra* para dinamizar las sesiones; ya que en nuestra actualidad, dada la coyuntura de la pandemia por la COVID-19, queda mucho más evidenciada la brecha digital respecto aquellos estudiantes que no logran tener acceso a la información vía Internet por falta de conectividad.

Campos (2018), Lara (2016), Espinoza (2015) y Moya (2015) circunscriben sus trabajos de investigación en función a problemas en común encontrados a lo largo de sus experiencias, todos ellos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en el cual, Campos (2018) menciona que muchos estudiantes no tenían experiencias gratificantes con la geometría porque su enseñanza fue descuidada en los años iniciales de escolaridad o el aprendizaje se logró memorizando fórmulas con poco sentido, la autora señala que el desarrollo de las transformaciones geométricas revitalizaría la enseñanza, afirma que es un campo rico en conexiones y una herramienta muy útil para resolver problemas. Lara (2016) refiere haber encontrado problemas en la enseñanza de las cónicas, específicamente en la parábola, dado que indica que solo se muestra a los estudiantes su representación algebraica, que el trabajo de éstos es algorítmico, con un soporte algebraico memorístico, pero no logran los mismos resultados cuando se involucran propiedades o relaciones, la autora hace referencia a la importancia de enseñarlo donde se promueva las construcciones geométricas, que se favorezca la intuición en el estudio de las propiedades, las relaciones espaciales y se estimule las competencias matemáticas haciendo uso de los ambientes de representaciones dinámicas.

En ese sentido, nuestra investigación tiene como objetivo analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR. El tipo de investigación es cualitativa y la fuente de nuestros datos es secundaria.

Nuestro procedimiento metodológico implicó realizar una indagación de documentos en maestrías y doctorados de repositorios virtuales de la Pontificia Universidad Católica del Perú, la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, la Universidad de Valladolid de España, la Universidad Anhanguera de Sao Paulo de Brasil y artículos en revistas científicas ubicadas en la base de datos como Scielo, Scopus y Latindex de los últimos cinco años, una revisión histórica sobre la génesis de las transformaciones geométricas a lo largo de la historia de la humanidad; así como un análisis del libro didáctico aprobado por el MINEDU dirigido a estudiantes pertenecientes al ciclo VII de EBR.

También hemos propuesto una secuencia didáctica que comprende tres situaciones, cada una de ellas contiene cinco, cuatro y una actividad respectivamente, asociados con las transformaciones geométricas en el registro figural en los movimientos de rotación y traslación, dichas actividades implican la realización de tratamientos de acuerdo con las aprehensiones perceptiva, operatoria, secuencial y discursiva relacionados con la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994) en el marco de las aprehensiones en el registro figural.

Nuestra investigación se encuentra estructurada en tres capítulos: En el primer capítulo, desarrollamos la problemática de la investigación, en la cual revisamos, describimos y analizamos las principales investigaciones de referencia que involucran la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas. Asimismo, presentamos la justificación y los aspectos teóricos tomando como referencia la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), además de presentar la pregunta y objetivos de la investigación. Proseguimos con la Metodología de la investigación basada en una revisión de fuentes secundarias.

En el segundo capítulo desarrollaremos un estudio del objeto matemático siguiendo la metodología de la investigación histórico – bibliográfica. Este capítulo comprende el análisis de nuestro objeto matemático, las transformaciones geométricas en el plano en los movimientos de rotación y traslación, revisaremos los aspectos históricos de las transformaciones geométricas, en la cual presentaremos una breve referencia histórica a la evolución de las transformaciones geométricas basada en la tesis de maestría de Santos (2018) y en el libro de Boyer (1985) quienes nos muestran algunas de las contribuciones significativas de Euclides, Da Vinci, Durero, Pascal, Desargues, Klein, entre otros. Luego mostraremos aspectos formales de la teoría de las transformaciones del libro de Lima (1995) donde desarrolla el tema desde un punto de vista intramatemático, el cual nos permitirá tener una visión formal del tema tal como lo explica el autor. Introduciremos la noción de isometrías en el plano y los movimientos de rotación y traslación que es el objeto de estudio de nuestra investigación. Finalmente realizaremos un análisis del libro didáctico aprobado por el MINEDU, el texto de Matemática n.°4 correspondiente al VII ciclo (3ro, 4to y 5to de secundaria) de la Editorial COREFO edición 2020, utilizado en muchas instituciones educativas a nivel nacional con relación a las transformaciones geométricas.

En el tercer capítulo, detallaremos el análisis didáctico de la Investigación, el cual comprende la organización y descripción de las situaciones propuestas en la secuencia didáctica, así como el análisis de cada una de ellas y finalmente en las consideraciones finales, mostraremos las principales conclusiones de la presente investigación y las recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo presentamos la problemática de nuestro trabajo de investigación abarcando diversos estudios relacionados con el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano, caso la rotación y traslación en el plano en la Educación Básica Regular (EBR) en el nivel de la educación secundaria en el Perú que nos permitirá ubicar nuestro trabajo dentro de las investigaciones realizadas en el área de la Educación Matemática. Seguidamente, presentaremos la justificación, la formulación de la pregunta y los objetivos de investigación en nuestro trabajo de investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

En primer lugar, seleccionamos los principales trabajos en el área de Educación Matemática y/o didáctica de la matemática relacionados con nuestro objeto matemático. Como criterio de búsqueda, priorizamos las tesis doctorales y de maestría ubicadas en algunos principales repositorios digitales de universidades del país, Brasil, Colombia, España y actas de conferencias disponibles en sitios web. También, buscamos artículos publicados en revistas científicas indexadas de los últimos cinco años en base de datos, caso de Scielo, Scopus y Latindex relacionadas con el aprendizaje de las transformaciones geométricas de rotación y traslación en el plano a nivel de secundaria en el Perú.

A continuación, detallaremos las investigaciones hasta el momento encontradas.

Campos (2018) realiza en Brasil, un estudio cuyo objetivo fue investigar los aportes de un curso de capacitación que involucren el uso del lápiz y papel; así como también el uso del *software GeoGebra* con el fin de incrementar los conocimientos del contenido y enseñanza de las transformaciones geométricas en profesores de Matemáticas y luego aplicarlo como apoyo en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje con estudiantes en aula. La autora realizó un trabajo de formación de profesores tomando como referencia al autor Shulman (1986,1987) y complementado con los autores Ball, Thames y Phelps (2008).

La metodología estuvo conformada por el análisis de los programas curriculares; así como los textos de Matemática que desarrollan el tema, el curso se desarrolló a partir de una encuesta respondida por los profesores pertenecientes a un Programa de Residencia Docente (PRD) que buscaba comprender cómo los profesores desarrollan las transformaciones geométricas en las aulas, los datos obtenidos sirvieron para elaborar el curso compuesto por actividades sobre el tema que apuntaba a conocer y mejorar el conocimiento común que tenía el profesor e indagar a través del debate de las actividades y cómo contribuye dicho estudio para el desarrollo del contenido y enseñanza en los profesores.

Mediante la encuesta inicial, Campos (2018) pudo conocer que los profesores no desarrollaban las transformaciones geométricas en el aula debido a que no tenían la seguridad del dominio sobre el tema o que nunca tuvieron contacto con el mismo ni en la educación secundaria ni superior. Las actividades propuestas y aplicadas estuvieron compuestos con el uso de recursos como el plegado de papel, recortes, geoplano, dibujo en papel cuadriculado y el apoyo del *software GeoGebra*, que conlleva a la generación de conocimiento especializado y pedagógico en los profesores que luego desarrollarán en las aulas, considera haber realizado un profundo estudio sobre la realidad investigada, conociendo la situación real del conocimiento de los profesores frente al desarrollo del tema.

La autora propone actividades para explorar la simetría y la reflexión, en el primer caso con el objetivo de comprobar los saberes previos de los profesores, motivando o sugiriendo que dichas actividades sean actividades motivadoras con estudiantes en el aula y en el segundo caso con el objetivo de explorar la reflexión utilizando diversos recursos como el *software GeoGebra*, utilizando la función arrastre y resolver las situaciones problemáticas propuestas. Dentro de las dificultades encontradas, se menciona que los profesores no tienen un conocimiento común sobre las transformaciones geométricas, carecen del conocimiento especializado del tema, no logran establecer relaciones con el gráfico de funciones, la reducción de ángulos trigonométricos al primer cuadrante, el estudio de matrices, entre otros y que le permitirían tener variedad de situaciones de diversos contextos al momento de trabajarlo en las aulas, también tuvieron dificultades en identificar las rotaciones, desconociendo los elementos asociados como el ángulo de rotación y el centro de la misma.

Reyes (2017) realiza un estudio de investigación en Colombia, asociado a la utilización del *software GeoGebra* con el objetivo de mejorar la visualización y exploración de los estudiantes que llevan el curso de Geometría Euclídea en el segundo semestre de formación continua de futuros maestros para la Enseñanza de las Matemáticas, el marco teórico considera aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como metodología desarrolla la investigación-acción como recurso de aprendizaje para estudiantes. El estudio estuvo compuesto por tres fases: la fase Diagnostica, la fase Instructiva mediante el uso del *software GeoGebra* y las sesiones de aprendizaje dirigidas a obtener los resultados de la valoración de los desempeños mostrados por los futuros maestros.

La fase Diagnostica recogió saberes previos geométricos mediante la visualización y construcción geométrica, identificando el grado de conocimiento de conceptos, así como el dominio en el uso de instrumentos como la regla y el compás. Esta fase según la autora muestra la ausencia de conocimientos en geometría y la no resolución de situaciones problemáticas propuestas; así como la falta en el manejo de instrumentos como la regla y el compás, Reyes (2017) también afirma que los estudiantes no reconocen propiedades ni relaciones en una representación figural presentada o elaborada en lápiz y papel o en el entorno del *software GeoGebra*.

En las situaciones propuestas por la autora en esta fase diagnóstica, se presentaron tres figuras geométricas con el objetivo de identificar los conceptos geométricos fundamentales visualizados por los futuros maestros y que se vayan apropiando de los mismos, así como el lenguaje geométrico involucrados a las figuras presentadas para luego proponer realizar tres construcciones con regla y compás.

En una segunda fase, la autora desarrolla el taller denominado "Explorando con *GeoGebra*" compuesta por actividades dirigidas a reconocer y aplicar las funciones de la herramienta tecnológica, permitiendo a los futuros maestros familiarizarse con conceptos, características y propiedades que les ayuden a desarrollar competencias de visualización y exploración y crear sus propias conjeturas. Dicho taller estuvo compuesto por tres guías a ser desarrolladas en el aula, de manera que en la primera sesión se introduce la plenaria de discusión y la formalización en la clase siguiente según sea el caso, propone que los futuros maestros por medio del trabajo colaborativo en parejas y el soporte del *software GeoGebra* logren dominar los conceptos involucrados, así como el desarrollo de las habilidades informáticas explorando las figuras en ambientes de representaciones dinámicas.

La última fase está compuesta por 15 sesiones donde se presenta situaciones problemáticas en forma individual que luego son discutidos en plenaria de clase completa y lleven a lograr el objetivo del presente estudio. Se trataron diversos temas geométricos de acuerdo con el plan curricular, se desarrollan construcciones con apoyo del *software GeoGebra* solicitando la descripción realizada en cada construcción por cada uno de los futuros maestros dado que le permite producir conjeturas y argumentaciones. La autora afirma que el uso de herramientas tecnológicas tuvo un gran impacto en los hábitos de estudio de los futuros maestros, donde se desarrollaron mecanismos que propiciaron un autoaprendizaje, como es el caso del *GeoGebra* que mediante el descubrimiento permite la visualización y exploración de conceptos geométricos generando espacios propicios para la reflexión y la justificación.

La investigación de Lara (2016), realiza un estudio en Perú sobre la parábola como lugar geométrico en el proceso de formación continua de profesores de matemática por medio de actividades que involucra el uso de la herramienta tecnológica *GeoGebra*. El objetivo de la investigación consiste en analizar cómo profesores de matemática movilizan la noción de la parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia de acciones en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica, para el cual utiliza la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como metodología aspectos de ingeniería didáctica.

Lara (2016) afirma que el estudio se centra en la coordinación de los registros figural, gráfico, lengua natural y algebraico, y sus transformaciones: tratamientos y conversiones. Propone cuatro actividades que se apoyan en el uso del *software GeoGebra* con algunos comandos como la de animación, lugar geométrico, rastro y función de arrastre y que luego son analizadas de acuerdo con los aspectos del método de ingeniería didáctica. Luego de aplicar dichas actividades, observa que la mayoría de los profesores participantes coordinan satisfactoriamente el registro figural de la construcción de la parábola con el registro de lengua natural evidenciando a su vez durante el proceso experimental desarrollado por los profesores, algunos de ellos, muestran tener dificultades en realizar conversiones del registro grafico al registro algebraico y que desconocen la noción de la parábola como lugar geométrico, así como la confusión de la representación con el objeto.

Espinoza (2015) plantea una investigación en el Perú cuyo objetivo es analizar como los estudiantes del 4° año de secundaria de EBR conjeturan la propiedad existente en la base media del trapecio cuando se movilizan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica con apoyo del *software GeoGebra*, este estudio tiene como base teórica aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica y aspectos de la ingeniería Didáctica como marco metodológico, la secuencia de trabajo experimental está compuesto por tres actividades que llevan a que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones.

La primera actividad asociada al recojo de saberes previos, dicha actividad tiene por objetivos lograr que los estudiantes identifiquen las propiedades del trapecio, realicen la conversión del registro en lengua natural al registro figural, realicen tratamientos en el registro figural y reconozcan el tipo de trapecio mediante la construcción de la figura, identifiquen las propiedades del trapecio y articulen las aprehensiones secuencial y operatoria en el registro figural. Asimismo, el autor presenta una segunda actividad dirigida a que los estudiantes movilicen sus conocimientos sobre propiedades del trapecio y logren articular las aprehensiones operatoria y discursiva en el registro figural y finalmente una tercera actividad relacionada al trabajo con las bases del trapecio, el cual tiene por objetivo articular las aprehensiones en el registro figural y deducir la propiedad de la base media del trapecio. Todas las actividades fueron analizadas a priori y posteriori de acuerdo con la metodología de Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

El autor afirma que los estudiantes ejecutaron la conversión del registro en lengua natural al registro figural, se logra que realicen tratamientos en el registro figural, mediante el uso del *software GeoGebra* y la función arrastre, así como la acción de mover sus conocimientos, articular sus aprehensiones y establecer relaciones entre elementos del trapecio, y mediante el registro en lengua natural escribir sus conjeturas, pero los estudiantes también mostraron ciertas limitaciones en relación a los conocimientos del trapecio, en la construcción de la misma así como en la comunicación matemática para dar a conocer sus conjeturas.

Moya (2015) realiza la investigación en el Perú con el objetivo de analizar las articulaciones del registro figural que desarrollan los estudiantes del quinto de secundaria al movilizar nociones de geometría en la construcción del cubo truncado utilizando el entorno dinámico del *software Cabri 3D*; el estudio toma como referencia el marco referido a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, centrándose en el registro figural y sus aprehensiones, tomando aspectos de la ingeniería Didáctica para el desarrollo metodológico, dicha investigación se compuso de dos actividades apoyados con el uso de dicha herramienta tecnológica.

La primera actividad implica la manipulación de algunas herramientas del *Cabri 3D* necesarias para la construcción del cubo truncado además de la elaboración de dos planos secantes al plano base y una serie de puntos en dichos planos que generan triángulos, para luego realizar un cuestionario asociado al área y perímetro de los triángulos construidos con el *software*. La segunda actividad está dirigida a la construcción del cubo truncado realizando acciones como el trazado de la diagonal de una cara del cubo, construcción de circunferencias para ubicar los puntos de corte y recorte de las esquinas del cubo y luego responder un nuevo cuestionario en función al objeto construido.

El autor evidenció que los estudiantes movilizaron nociones de geometría y desarrollaron sus aprehensiones en cada una de las construcciones hechas, también algunos estudiantes mostraron el desconocimiento de la noción de planos secantes, así como el no poder generar adecuadamente los triángulos de acuerdo con la secuencia de pasos propuesta en una de las actividades.

Avcu y Çetinkaya (2019) realizaron un estudio en Turquía que luego publicaron en la Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología (IJMEST), ellos exploraron la comprensión de las transformaciones geométricas por parte de los futuros maestros de matemáticas de las escuelas de educación secundaria mediante el diseño y la implementación de un instructivo didáctico. Entendemos por instructivo didáctico el documento de carácter curricular compuesto por una serie de pasos a desarrollar por el estudiante y que han sido propuestas por el docente con la finalidad de apoyar a los estudiantes en el logro de sus aprendizajes. Asimismo, los autores toman como recurso el *software GeoGebra*, en el estudio de las transformaciones geométricas como funciones tal como la rotación y traslación.

Los autores utilizaron como procedimiento metodológico el diseño denominado: *classroom teaching experiment* basado en los principios del aula constructivista en un grupo de 16 futuros maestros pertenecientes a una universidad estatal de Turquía, el instructivo didáctico concibe cinco fases, donde la primera fase tiene como objetivo que los participantes exploren en pareja y expongan sus ideas, ante toda la clase, respecto a las transformaciones geométricas presentadas previamente en diversas figuras y mosaicos entregados por el docente guía a cada uno de los equipos de trabajo. La segunda fase consiste en realizar transformaciones geométricas utilizando lápiz, papel y compás, para luego realizar dichas transformaciones usando como medio el *software GeoGebra* y explorar las relaciones entre los parámetros, una imagen y sus respectivos puntos, la preservación de la longitud, entre otros.

Una tercera fase implicó presentar a los participantes la noción de función como una relación entre puntos mediante el apoyo del *software GeoGebra,* se les presentó archivos en dicho software que incluían puntos en la cuadricula y que, mediante el uso de la función arrastre, logren los participantes observar el comportamiento de dichos puntos e identifiquen aquellos puntos en el plano como dependientes e independientes. La fase cuatro resulta de integrar las fases anteriores, donde el *software GeoGebra* cobra un rol muy importante, dado que ayuda a que se visualice la variación continua de los puntos y concebir el dominio de las funciones en $\mathbb{R}^2$,finalmente en una quinta fase compuesta por la explicación dada por el docente guía del estudio acerca de las características de las transformaciones como funciones.

Avcu y Çetinkaya (2019) afirman que la investigación muestra que los participantes se encontraban por debajo del nivel de conocimientos esperados respecto a las transformaciones geométricas antes de la implementación del instructivo didáctico mediante la aplicación de un cuestionario, pero al finalizar todo el proceso, se logra que todos los participantes lo respondan satisfactoriamente. Asimismo, el estudio muestra ser útil para ayudar a los futuros maestros a conceptualizar las transformaciones geométricas como funciones y poder integrar sus conocimientos sobre las funciones y las transformaciones geométricas. También mencionan que el uso del *software GeoGebra* facilita la comprensión del tema en los estudiantes de secundaria debido a su dinamismo dado que permite que los estudiantes manipulen, conjeturen relaciones y propiedades.

Algunas dificultades mencionadas están relacionadas con la definición de transformaciones geométricas con sus parámetros al definir por ejemplo la rotación. Los participantes mencionan solo el ángulo de rotación, pero no el centro de rotación. Además, al definir la traslación, los futuros maestros de matemática de la Educación Secundaria no mencionan la magnitud o la dirección del vector de traslación.

Barrantes (2019) en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) realizada en Colombia, resalta la actual importancia del estudio de las transformaciones geométricas en el plano que tienen actualmente los programas curriculares de educación

Matemática básica en muchos países a nivel mundial, menciona como ejemplo a Chile, Colombia, Costa Rica y Perú. Dichos programas se dirigen al desarrollo de capacidades en los estudiantes, en el sentido de lograr plantear y resolver problemas, razonar y argumentar, conectar, comunicar y representar, pero cuestiona en cierta medida respecto a las transformaciones el que se lo defina formalmente como función en la etapa secundaria puesto que dicho enfoque no tiene el elemento de orden didáctico, es decir, no se encuentra asociado al enfoque visual e intuitivo donde pueda verse la transformación como un movimiento de puntos o figuras.

Barrantes (2019) afirma que introducir las transformaciones geométricas resulta ser novedoso pues quiebra con los esquemas tradicionales de la enseñanza en el nivel de la primaria y secundaria, pero que lamentablemente los profesores no están debidamente preparados para enseñarlo en las escuelas, ello implica en muchos casos a que se resistan en desarrollarlo, menciona la alternativa de desarrollar el tema de las transformaciones geométricas en el plano como recurso para la comprensión del estudio de la congruencia, semejanza y simetría, así como el trabajo con mosaicos y diseños con regla y compás, también menciona el uso del *software GeoGebra* como herramienta de simulación como apoyo en el aspecto didáctico.

Morales, Locia y Salmerón (2016) realizaron un estudio en México, que fue publicado en la revista científico-pedagógica “Atenas”. Ellos muestran una estrategia didáctica para favorecer la planificación de la enseñanza de la transformación geométrica: traslación y rotación, en el nivel preuniversitario utilizando el *software GeoGebra* como recurso tecnológico heurístico. El marco teórico – metodológico se fundamenta en el enfoque de la resolución de problemas, el trabajo está dirigido hacia los profesores del nivel preuniversitario con el fin de darle a conocer y facilitar diversas herramientas heurísticas, además que dichas herramientas se puedan incluir en la planificación y desarrollo de la enseñanza de las transformaciones de traslación y rotación e incluso su funcionalidad, es decir en la realización de algunas graficas o funciones de segundo grado y que sean transformadas o rotadas.

Los autores realizan su estudio mediante el trabajo realizado por estudiantes del segundo ciclo de la Licenciatura en Matemáticas, al desarrollar el tópico de transformaciones de coordenadas y la gráfica de curvas de segundo grado, donde 25 estudiantes que asistieron al curso, 21 de ellos no lograban encontrar la relación entre la transformación de coordenadas con los desplazamientos horizontales o verticales de algunas gráficas, lo consideraban de forma independiente, cometiendo errores al querer factorizar expresiones para transformarlas a las formas canónicas que ya los conocían o mencionaban que las ecuaciones de traslación y rotación ayudan a realizar las transformaciones de las ecuaciones y en consecuencia facilitan en gran medida su representación gráfica, pero todo ello sin ningún fundamento analítico, el equipo de estudio considera que esto se debe a la propia formación del profesor en los niveles de la secundaria y preuniversitaria, donde no se da la debida importancia ni se desarrolla el tópico de la transformación de coordenadas como un mecanismo que facilite el grafico de curvas de segundo grado.

Muñoz (2015) presenta una crónica del encuentro auspiciado por el Centro de Investigación en la Enseñanza de la Matemática - CIEM y el Instituto *GeoGebra* donde se propone difundir el uso de dicho software en la mayor cantidad de profesores involucrados con la enseñanza de las matemáticas e impulsar el uso efectivo de este recurso tecnológico y metodológico en el aula priorizando los aspectos de orden didáctico respecto a los técnicos, y sus efectos en la enseñanza y en el aprendizaje de los estudiantes, definitivamente uno de los puntos en común de todos los profesores participantes a este encuentro es la preocupación en la mejora de los aprendizajes de sus alumnos en el día a día en sus respectivas aulas. Dentro de las conclusiones se da énfasis a la necesidad de incorporar este recurso como elemento de formación de maestros en enseñanza de Matemáticas, de modo que se pueda maximizar su uso en las aulas con los estudiantes.

Encontramos que Campos (2018) y Barrantes (2019) afirman que los maestros no desarrollan el tema de las transformaciones geométricas en el aula por no estar debidamente preparados o que carecen del conocimiento especializado, ello repercute significativamente en el aprendizaje de los estudiantes. Reyes (2017) en la etapa Diagnostica de su investigación, recogió saberes previos que muestran la ausencia de conocimientos en geometría, así como la falta de destreza en el manejo de instrumentos como la regla y el compás. Avcu y Çetinkaya (2019) también indicaron que al inicio los estudiantes se encontraban por debajo del nivel de conocimientos sobre transformaciones geométricas.

En el movimiento de rotación, Campos (2018) afirma que los estudiantes no logran identificar las rotaciones, desconociendo los elementos asociados como el ángulo de rotación y el centro de esta. Avcu y Çetinkaya (2019) también mencionan dificultades encontradas con dicho movimiento, dado que los estudiantes solo logran mencionar el ángulo de rotación, pero no el centro de rotación, inclusive en relación con el movimiento de traslación, indican que los estudiantes obvian mencionar la magnitud o la dirección del vector de traslación.

Muñoz (2015) resalta la necesidad propuesta en un encuentro Internacional de difundir el uso del *software GeoGebra* en la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de lograr mejoras en el aprendizaje de los estudiantes, ello coincide con Barrantes (2019) en su recomendación del uso de dicha herramienta como apoyo didáctico, donde vemos que los trabajos de Campos (2018), Reyes (2017), Lara (2016), Espinoza (2015), Avcu y Çetinkaya (2019) y Morales, Locia y Salmerón (2016) utilizan dicha herramienta como recurso tecnológico heurístico.

Campos (2018), Lara (2016), Espinoza (2015) y Moya (2015) circunscriben sus trabajos de investigación en función a problemas en común encontrados a lo largo de sus experiencias, todos ellos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, en el cual, Campos (2018) menciona que muchos estudiantes no tenían experiencias gratificantes con la Geometría dado que su enseñanza fue descuidada en los años iniciales de escolaridad, priorizando en los estudiantes a desarrollar su aprendizaje de formación escolar memorizando fórmulas con poco sentido, pero que el desarrollo de las transformaciones geométricas en los mismos revitalizaría la enseñanza, dado que lo ve como un campo rico en conexiones y una herramienta muy útil para resolver problemas. Lara (2016) refiere haber encontrado problemas en la enseñanza de las cónicas, específicamente en la parábola, dado que indica que solo se muestra a los estudiantes su representación algebraica, afirma que el trabajo de estos es memorístico, no se logran los mismos resultados ante otras representaciones o relaciones, considera la importancia de enseñarlo desde el punto de vista didáctico, donde se promueva las construcciones geométricas, favorezca la intuición en el estudio de las propiedades, las relaciones espaciales y se estimule las competencias matemáticas haciendo uso de los ambientes de representación dinámica.

Espinoza (2015) en relación con su experiencia docente, observa dificultades que presentan estudiantes pertenecientes al 4to año de secundaria en relación con el aprendizaje de los cuadriláteros, afirma que el desarrollo de los mismos no ha sido tratado con la debida profundidad mientras que Moya (2015) encuentra que el desarrollo de los contenidos de geometría espacial o geometría del espacio son relegados hacia el final del año escolar, por lo que se deduce su poco desarrollo o nulo, debido a los tiempos, también indica la constante de utilizar solo fórmulas sin enfatizar el proceso de construcción y análisis de dichos sólidos.

Avcu y Çetinkaya (2019) realizaron un estudio que indagó el posible desarrollo de la comprensión de las transformaciones geométricas por parte de los futuros maestros de matemáticas de la escuela intermedia mediante el diseño y la implementación de una unidad instructiva en un entorno de aula respaldado por la tecnología. Morales, Locia y Salmerón (2016) muestran parte de un proyecto denominado “Las transformaciones geométricas en el plano y la graficación de curvas de segundo grado: Una propuesta de enseñanza aprendizaje basada en el *software GeoGebra* para el nivel preuniversitario”. Reyes (2017) a partir de indagaciones con profesores que desarrollan el curso de geometría Euclídea en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) infiere que la incorporación del uso de la tecnología se encuentra en un nivel básico, desaprovechando la oportunidad de desarrollar habilidades y destrezas con la tecnología.

Las actividades propuestas por Campos (2018), Reyes (2017) y Avcu y Çetinkaya (2019), muestran actividades donde no se logra evidenciar el papel heurístico que tiene la figura en los problemas propuestos, de igual modo , si bien es cierto que coinciden en resaltar la importancia en el uso del *software GeoGebra*, esta herramienta no es aprovechada debidamente dado que se predomina en el uso de funciones como el deslizador que bien podrían ocultarse y más bien provocar la necesidad de generar y aplicar tratamientos heurísticamente relevantes que conduzcan a resolver situaciones problemáticas referidos a las transformaciones geométricas. Es importante resaltar el trabajo de análisis a priori y posteriori en las actividades de Lara (2016), Espinoza (2015) y Moya (2015) de acuerdo con aspectos de la ingeniería didáctica y con la teoría de representación semiótica de Duval (1994) pero que en este último se obvia en todos los casos el papel heurístico de la figura, la importancia que tiene en el registro figural luego de realizar tratamientos que ayudan a resolver problemas en diversas situaciones geométricas.

A modo de resumen mostramos en la Figura 1, algunas de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de transformaciones geométricas señaladas por los investigadores citados.

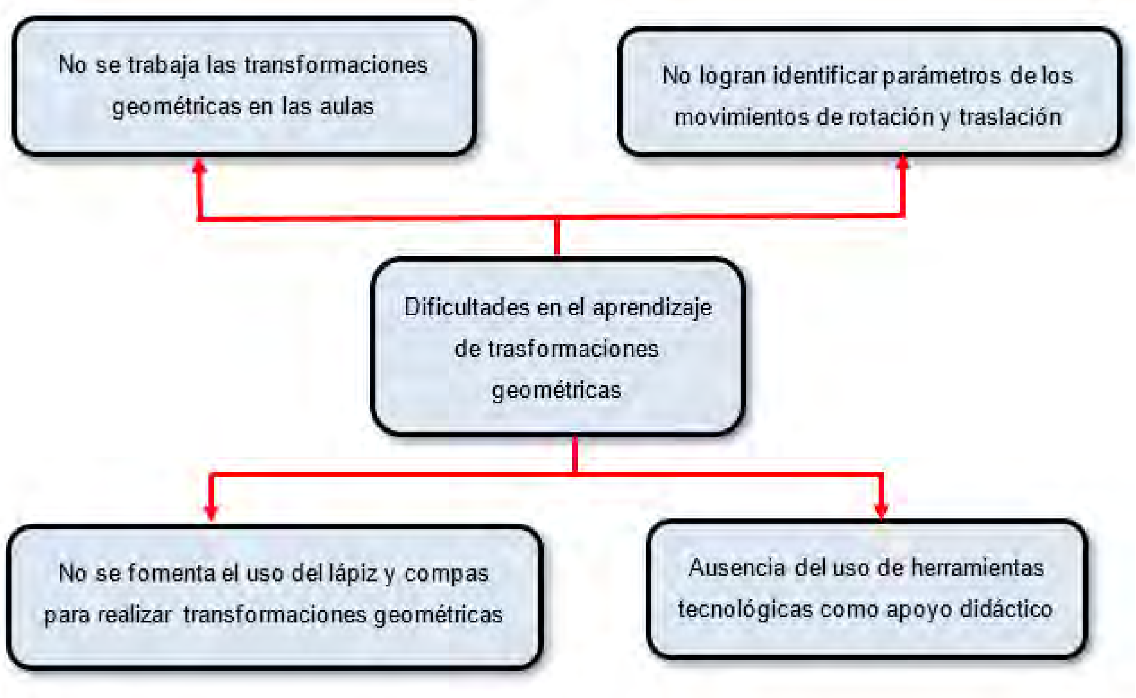


***Figura 1*:** Dificultades encontradas en la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas.

De acuerdo con estas dificultades encontradas en las investigaciones de referencia, y revisando a fondo las actividades propuestas en dichas investigaciones, afirmamos que éstas no logran evidenciar el papel heurístico que tiene la figura en los problemas propuestos y/o actividades, no se hace referencia dentro de los tratamientos presentados, aquellos que sean heurísticamente relevantes y que permitan resolver dichos problemas y/o actividades, de igual modo la utilización del *software GeoGebra* en alguna de las actividades revisadas, muestra un uso predominante del deslizador, herramienta que debería usarse, en nuestra opinión en una etapa final, no desde el inicio, como es el caso específico de nuestra investigación que se encuentra asociado a las transformaciones geométricas en el plano en los movimientos de rotación y traslación y además, a esto sumado a nuestra experiencia en la práctica docente, en el cual coincidimos con los problemas encontrados en los antecedentes mencionados, y adjuntando la experiencia personal, vemos de que existe la necesidad de comprender la importancia que tiene una figura y reconocer su papel heurístico en la solución de problemas de contexto geométrico.

En ese sentido, queremos analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR a través de una propuesta de secuencia didáctica compuesta por situaciones que contienen un conjunto de actividades, además que nos proporcione información relevante y funcional para comprender la importancia de las figuras geométricas, e identificar y realizar los tratamientos que ayuden a desarrollar las actividades propuestas en dichas situaciones.

1.2 Justificación

En esta sección presentamos nuestra justificación basada en las investigaciones seleccionadas y descritas en los antecedentes y relacionadas con nuestro objeto matemático, las transformaciones geométricas, así como documentos del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) ,el cual nos motiva a investigar y plantear una propuesta de secuencia didáctica para el aprendizaje de los movimientos de rotación y traslación en el plano con la finalidad de conocer los procesos que se desarrollan cognitivamente para el logro de aprendizajes en la geometría así como resaltar la importancia del uso del *software GeoGebra* como uno de los apoyos didácticos a utilizar.

Al respecto, Campos (2018) menciona que los profesores no tienen un conocimiento común sobre las transformaciones geométricas, carecen del conocimiento especializado del tema, no logran establecer relaciones con el gráfico de funciones, la reducción de ángulos trigonométricos al primer cuadrante, el estudio de matrices, entre otros y que le permitirían tener un bagaje al momento de desarrollarlo en las aulas, mostraron dificultades en identificar las rotaciones, desconociendo los elementos asociados como el ángulo de rotación y el centro de la misma.

Además, Reyes (2017) afirma en relación con las transformaciones geométricas a su etapa Diagnostica de trabajo, que los estudiantes muestran la ausencia de conocimientos en geometría y la no resolución de situaciones problemáticas propuestas ni el manejo de instrumentos como la regla y el compás, así mismo no reconocen propiedades ni relaciones en una representación gráfica presentada o elaborada en lápiz y papel o en el entorno del recurso tecnológico del *software GeoGebra*. Del mismo, el autor asevera el gran impacto en el desarrollo de los hábitos de estudio de los estudiantes al trabajar con dicho software.

Los autores Avcu y Centinkaya (2019) muestran que los estudiantes no alcanzaban el nivel de conocimientos esperados respecto a las transformaciones geométricas previo a la implementación del instructivo didáctico, mencionan dificultades relacionadas con la definición de las transformaciones geométricas con sus respectivos parámetros, al definir por ejemplo la rotación, los autores afirman que los estudiantes mencionan solo el ángulo de rotación, pero no el centro de rotación. Además, al definir el movimiento de traslación, aseveran que los estudiantes no mencionan la magnitud o la dirección del vector de traslación. Dichos investigadores destacan también la relevancia de utilizar el *software GeoGebra* por que ayuda a que los estudiantes logren manipular, conjeturar, evidenciar relaciones y propiedades en el aprendizaje de las transformaciones.

En relación con las Rutas de Aprendizaje del MINEDU (2015), esta incluye en la propuesta para el currículo la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización, que implica desarrollar progresivamente el sentido de la ubicación en el espacio, la interacción con los objetos, la comprensión de propiedades de las formas y cómo estas se interrelacionan, así como la aplicación de estos conocimientos al resolver diversos problemas. Esta competencia se plantea mediante el desarrollo de cuatro capacidades matemáticas que confluyen para poner de manifiesto formas de actuar y pensar en el estudiante, esto involucra por ejemplo emplear procedimientos de construcción y medida para resolver problemas.

A continuación, presentamos la descripción del estándar de aprendizaje o mapa de progreso correspondiente al ciclo VII (3°, 4° y 5° de secundaria) asociado a dicha competencia respecto a cada una de sus capacidades, es así que en la capacidad matematiza situaciones, el mapa de progreso describe que el estudiante : “Relaciona datos de diferentes fuentes de información referidas a situaciones sobre formas, localización y desplazamiento de objetos, y los expresa con modelos referidos a formas poligonales, cuerpos geométricos compuestos o de revolución, relaciones métricas, de semejanza y congruencia, y razones trigonométricas. Analiza los alcances y limitaciones del modelo usado, evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación”.

En la capacidad comunica y expresa ideas matemáticas, el mapa de progreso describe que el estudiante: “Expresa usando terminologías, reglas y convenciones matemáticas su comprensión sobre: relaciones entre las propiedades de figuras semejantes y congruentes, superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución, razones trigonométricas".

Respecto a la capacidad: Elabora y usa estrategias, el mapa de progreso indica que el estudiante: "Elabora y relaciona representaciones de una misma idea matemática usando mapas, planos, gráficos, recursos. Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas, procedimientos como calcular y estimar medidas de ángulos, superficies bidimensionales compuestas y volúmenes usando unidades convencionales; establecer relaciones de inclusión entre clases para clasificar formas geométricas; con apoyo de diversos recursos. Juzga la efectividad de la ejecución o modificación de su plan".

Luego, en la capacidad razona y argumenta generando ideas matemáticas, el mapa de progreso que se contempla en Rutas del Aprendizaje del MINEDU (2015), refiere que el estudiante: "Formula conjeturas sobre posibles generalizaciones estableciendo relaciones matemáticas; justifica sus conjeturas o las refuta basándose en argumentaciones que expliciten puntos de vista opuestos e incluyan conceptos y propiedades matemáticas".

Las capacidades e indicadores de logro que deberían desarrollar los estudiantes en el VII ciclo de la EBR según Rutas del aprendizaje se muestran en los Cuadros 1, 2, 3 y 4.

Capacidad	Indicadores de logro		
	3°	4°	5°
Matematiza situaciones	•Selecciona información para organizar elementos y propiedades geométricas al expresar modelos que combinan **transformaciones geométricas.** •Compara y contrasta modelos que combinan **transformaciones geométricas** al plantear y resolver problemas.	•Reconoce relaciones geométricas al expresar modelos que combinan **traslación, rotación y reflexión** de figuras geométricas. •Examina propuestas de modelos que combinan **traslación, rotación y reflexión** de figuras respecto a un eje de simetría	•Genera nuevas relaciones y datos basados en expresiones analíticas para **reproducir movimientos** rectos, circulares y parabólicos. •Examina propuestas de modelos analíticos para **reproducir movimientos** de acuerdo con un propósito contextualizado

Cuadro 1. Indicadores de logro asociadas a transformaciones geométricas.

Fuente: Adaptado de Rutas del Aprendizaje, 2015, p.52

El Cuadro 1 nos muestra una matriz con los indicadores de logro propuestas a alcanzar en los grados 3, 4 y 5 del nivel de secundaria en la capacidad "matematiza situaciones" en donde se observa que en cada uno de los grados pertenecientes al VII ciclo de EBR se describe indicadores de logro asociados a las transformaciones geométricas.

Capacidad	**Indicadores de logro**		
	3°	**4°**	**5°**
Comunica y representa ideas matemáticas	•Describe características de sistemas dinámicos y creación de mosaicos con figuras poligonales que aplican **transformaciones geométricas**. •Grafica la composición de **transformaciones de figuras geométricas planas** que combinen transformaciones isométricas y la homotecia en un plano cartesiano.	•Describe características de **transformaciones geométricas** sucesivas de formas bidimensionales empleando terminologías matemáticas. •Expresa **transformaciones** que permitan cambiar las formas de triángulos equiláteros, paralelogramos y hexágonos regulares en figuras de animales (pájaros, peces, reptiles y otros) para embaldosar un plano.	•Describe empleando **transformaciones geométricas**, en sistemas articulados de mecanismos. •Usa expresiones simbólicas para expresar **transformaciones geométricas** con figuras geométricas simples y compuestas.

Cuadro 2. Indicadores de logro asociadas a transformaciones geométricas.

Fuente: Adaptado de Rutas del Aprendizaje, 2015, p.53

El Cuadro 2 nos muestra una matriz con los indicadores de logro propuestas a alcanzar en los grados 3, 4 y 5 del nivel de secundaria en la capacidad “Comunica y representa ideas matemáticas” en donde se observa que en cada uno de los grados pertenecientes al VII ciclo de EBR se describe indicadores de logro asociados a las transformaciones geométricas.

Capacidad	**Indicadores de logro**		
	3°	**4°**	**5°**
Elabora y usa estrategias	•Realiza proyecciones y composición de **transformaciones geométricas**, con polígonos en un plano cartesiano al resolver problemas, con recursos gráficos y otros	•Realiza proyecciones y composición de **transformaciones de traslación, rotación, reflexión y de homotecia** con segmentos, rectas y formas geométricas en el plano cartesiano al resolver problemas, con recursos gráficos y otros.	•Realiza proyecciones y composición de **transformaciones de traslación, rotación, reflexión y homotecia** al resolver problemas relacionados a sistemas dinámicos y mosaicos, con recursos gráficos y otros.

Cuadro 3. Indicadores de logro asociadas a transformaciones geométricas.

Fuente: Adaptado de Rutas del Aprendizaje, 2015, p.54

El Cuadro 3 nos muestra una matriz con los indicadores de logro propuestas a alcanzar en los grados 3, 4 y 5 del nivel de secundaria en la capacidad “Elabora y usa estrategias” en donde se observa que en cada uno de los grados pertenecientes al VII ciclo de EBR se describe indicadores de logro asociados a las transformaciones geométricas.

Capacidad	**Indicadores de logro**		
	3°	**4°**	**5°**
Razona y argumenta generando ideas matemáticas	•Justifica la combinación de proyecciones y composiciones de **transformaciones geométricas** con polígonos en un plano cartesiano.	•Justifica que una figura de dos dimensiones es similar o congruente a otro considerando el plano cartesiano y **transformaciones**.	•Justifica el efecto de **transformaciones** respecto a líneas verticales u horizontales o un punto empleando puntos de coordenadas y expresiones simbólicas.

Cuadro 4. Indicadores de logro asociadas a transformaciones geométricas.

Fuente: Adaptado de Rutas del Aprendizaje, 2015, p.55

El Cuadro 4 nos muestra una matriz con los indicadores de logro propuestas a alcanzar en los grados 3, 4 y 5 del nivel de secundaria en la capacidad "Razona y argumenta generando ideas matemáticas" en donde se observa que en cada uno de los grados pertenecientes al VII ciclo de EBR se describe indicadores de logro asociados a las transformaciones geométricas.
Así mismo, el actual Currículo Nacional (2016) está compuesto por 29 competencias de aprendizaje, donde la competencia 26 es referida a Resolver problemas de forma, movimiento y localización, cada competencia se divide en 7 niveles de logro de aprendizaje, para nuestros intereses, nos enfocaremos al nivel correspondiente al ciclo VII (3°, 4° y 5° de secundaria), donde describimos las capacidades que combinadas promueven al desarrollo de dicha competencia que se encuentra en el CN (2016).

La capacidad Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones describe que el estudiante debe: "Construir un modelo que reproduzca las características de los objetos, su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y **transformaciones en el plano**. Es también evaluar si el modelo cumple con las condiciones dadas en el problema".

La capacidad Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas se refiere a que el estudiante: "comunica su comprensión de las propiedades de **las formas geométricas, sus transformaciones** y la ubicación en un sistema de referencia; es también establecer relaciones entre estas formas, usando lenguaje geométrico y representaciones gráficas o simbólicas".

La capacidad Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio describe que el estudiante: "Selecciona, adapta, combina o crea, una variedad de estrategias, procedimientos y recursos para construir formas geométricas, trazar rutas, medir o estimar distancias y superficies, y **transformar las formas bidimensionales y tridimensionales**".

Finalmente, la capacidad Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas indica que el estudiante: "Elabora afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los elementos y las propiedades de las formas geométricas; basado en su exploración o visualización. Asimismo, justificarlas, validarlas o refutarlas, basado en su experiencia, ejemplos o contraejemplos, y conocimientos sobre propiedades geométricas; usando el razonamiento inductivo o deductivo".

Seguidamente, mostramos el Cuadro 5 con el estándar de aprendizaje correspondiente al nivel 7 que deberían lograrse al finalizar el VII ciclo de la EBR en la competencia 26 denominada Resuelve problemas de forma, movimiento y localización contempladas en el vigente Currículo Nacional (2016).

Estándar de aprendizaje
Nivel 7
Resuelve problemas en los que modela las características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones**, la distinción entre trasformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos,** y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.

Cuadro 5. Nivel de desarrollo de la competencia matemática en el Nivel 7.

Fuente: Adaptado del Currículo Nacional, 2016, p.147

En ambos documentos curriculares: Rutas del aprendizaje y el Currículo Nacional, comprobamos que existe la propuesta de trabajar a nivel nacional todo lo concerniente a las transformaciones geométricas, en cada una de las capacidades pertenecientes a la competencia de forma, movimiento y localización. Asimismo, coincidimos con lo que expresan Campos (2018) y Barrantes (2019) que afirman que los maestros no trabajan el tema de las transformaciones geométricas en el aula por no estar debidamente preparados o que carecen del conocimiento especializado puesto que bajo la experiencia de haber trabajado con estudiantes y profesores de diversas instituciones públicas y privadas, existe una negación para desarrollar en las aulas dicho conocimiento, de igual modo se corrobora aquello en las capacitaciones para docentes organizadas por la Dirección Regional de Lima Metropolitana (DRELM), donde los maestros manifiestan desconocer a profundidad dicho tema.

De igual forma, también concordamos con Reyes (2017) que, dentro de las dificultades descritas, afirma que los estudiantes no tienen habilidades en el uso de instrumentos como la regla y el compás para realizar transformaciones, esta característica se comprueba en los diversos talleres de verano dirigidos para estudiantes, donde manifiestan no haber trabajado en el año escolar situaciones que involucren el uso de dichos instrumentos. También hacemos referencia a Muñoz (2015) y Barrantes (2019) por resaltar la necesidad de difundir el uso del *GeoGebra*, dado que es un software de acceso gratuito y que ayuda al logro de aprendizajes de conceptos geométricos.

Como hemos observado en las investigaciones, la existencia de dificultades en relación al aprendizaje de las Transformaciones geométricas tales como la rotación y la traslación implica la necesidad que los estudiantes movilicen sus conocimientos básicos sobre dichas transformaciones apoyados con recursos concretos como el lápiz, papel, compás, el Geoplano, conocido recurso didáctico manipulativo que servirá para que el estudiante pueda comprender los conceptos geométricos así como también utilizando como medio el *software GeoGebra*, en el cual por medio de secuencias didácticas ayuden a que los estudiantes aprendan. Es por ello que, ante estas dificultades observadas y las necesidades actuales en aprendizaje de la matemática, pensamos que es importante realizar una investigación que involucre el objeto matemático Transformaciones geométricas en el plano, mediante una propuesta de secuencia didáctica con el uso de la regla, el compás y ambientes de representación dinámica (ARD) como es el caso del *GeoGebra* para el logro de aprendizajes en los estudiantes del nivel secundaria y nos ayude a comprender los procesos de aprehensión involucrados para lograr resolver situaciones problemáticas asociadas a las transformaciones geométricas en los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR.

Presentamos a continuación la teoría que nos dará el sustento de nuestra investigación.

1.3 Teoría de Registros de Representación Semiótica

En esta sección presentamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) donde principalmente nos enfocaremos en las aprehensiones desarrollado por Duval (1994). Al respecto, tomaremos la siguiente afirmación como reflexión realizada por Duval (2016) en el cual asevera:

> Entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben aprender, la geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver, indisociablemente. Pero la geometría también es el campo más difícil de enseñar (2016, p.13)

Nosotros tomaremos en cuenta de manera fundamental el trabajo de Duval (1994) quien nos dará el soporte necesario para nuestro marco teórico del presente trabajo de investigación, complementado con aportes del mismo autor desarrollado en el año 2012. Es así como el autor nos muestra el porqué de la importancia de una figura geométrica, donde afirma que: "una figura es la representación de una situación geométrica que es más fácil de entender que su representación en un enunciado verbal" (p.121) puesto que nos permite explorar diversos aspectos de la situación propuesta, anticipar posibles resultados, así como el poder obtener una solución esperada.

También el autor nos da conocer sobre la existencia de dos dificultades presentes en la etapa de formación en estudiantes a nivel escolar, una de ellas es la resistencia a desprenderse de las formas y propiedades de una figura a primera vista y la otra dificultad referida a la Incapacidad de visualizar posibles elementos de una solución a un problema propuesto en un contexto geométrico, asevera que "...existe un vacío entre la visualización de una figura, es decir, su aprehensión perceptiva espontánea, y la forma matemática de verla" (p.122). Se plantea incluso una interrogante más allá de la utilidad de una figura, y que está referido a la función de una figura en el contexto geométrico.

También afirma que existen cuatro tipos de aprehensión de una figura en un proceso geométrico y que la manera matemática de observar dicha figura implica poder mirarlo de dos, tres o cuatro aprehensiones que iremos detallando a lo largo del presente marco teórico. Así mismo indica que "…el verdadero aprendizaje de la forma matemática de mirar una figura no puede ser posible si uno no tiene en cuenta específicamente cada uno de estos cuatro tipos de aprehensión" (p.122).

Luego, Duval (2012) asegura que las dificultades de los estudiantes para comprender las matemáticas se generan por la diversidad y complejidad de las representaciones semióticas de un objeto matemático, podemos mencionar por ejemplo a las transformaciones geométricas como objeto matemático de nuestro estudio. La distinción entre dicho objeto matemático y su representación indica el autor que es un punto importante para que los estudiantes puedan entenderlo y aprenderlo.

El autor asevera que los registros de representación semiótica son sistemas que se producen cognitivamente, en el cual un objeto es representado por diferentes registros, indica que "…el uso de muchos registros parece ser una condición necesaria para que los objetos matemáticos no se confundan con sus representaciones y que también puedan reconocerse en cada una de sus representaciones" (p. 270), también los denomina como creadores de nuevas representaciones y que cumplen un rol fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.

Duval (2012) añade que para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe cumplir con tres actividades cognitivas fundamentales asociadas a la denominada “semiosis”, entendida como la aprehensión o producción de una representación semiótica, como la formación, el tratamiento y la conversión. Indica que la formación de una representación es la selección de relaciones y datos en el contenido a representar, el tratamiento explica qué “es la transformación de una representación en otra representación en un mismo registro” (p. 271) y la conversión, afirma qué “es la transformación de un registro en otro registro, conservando todo o parte del contenido de la representación inicial” (p. 272). Se asevera que esta última actividad cognitiva es la primera fuente de dificultad para comprender las matemáticas.

Asimismo, refiere que, para un mismo significado, se pueden obtener diversas representaciones o imágenes posibles. Veamos el siguiente ejemplo donde mostramos la figura de un círculo y las posibles representaciones icónicas de la misma.

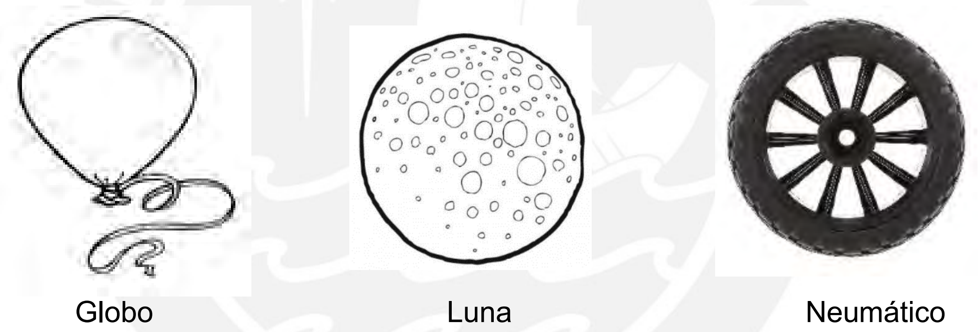


Figura 2**:** Ejemplo de algunas representaciones icónicas del círculo.

Nota: Podemos observar las diversas representaciones icónicas que puede tomar el significado del circulo, como es el caso de un globo, la luna o la de un neumático.

Vemos también que el autor asevera que la formación y el tratamiento son dos de las tres actividades, las que se toman en cuenta en la enseñanza, incluso cuando se trata de la organización o elaboración de secuencias de aprendizaje. En este sentido coincidimos con el autor, dado que cuando los maestros desarrollamos contenidos en el ámbito de la Geometría a nivel escolar, buscamos asociarlos con aquellos objetos matemáticos que tienen propiedades heurísticas para ser exploradas y redescubiertas por los estudiantes. Sabemos que estos objetos se pueden representar de distintas maneras, y el estudiante que interactúa con estas representaciones es susceptible de generar diversas interpretaciones.

Duval (1994) afirma que existen cuatro tipos de aprehensión de una figura en un proceso geométrico, estas aprehensiones figurales pueden a su vez ser perceptivas, operatorias, secuenciales y discursivas. Define **la Aprehensión Perceptiva** a “lo que se identifica o se reconoce de inmediato, una forma o un objeto, ya sea en un plano o en el espacio” (p.123), esta aprehensión se desarrolla en los estudiantes en la medida de que puedan lograr identificar un objeto matemático a partir de su representación gráfica de acuerdo con las leyes “Gestaltistas” que explican el origen de las percepciones a partir de los estímulos, como por ejemplo la ley de la totalidad, que indica que el todo es mayor a la suma de sus partes, o la del cierre, donde establece que una figura tendrá mejor forma en tanto su contorno este cerrado, entre otras 11 leyes más de un total de 13. El autor asevera que la función epistemológica de la aprehensión perceptiva es la de identificar objetos en 2 o 3 dimensiones, tal como mostramos en la Figura 3.

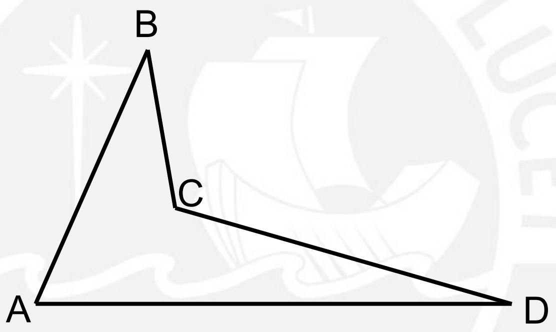


Figura 3: Aprehensión perceptiva.

La representación mostrada en la Figura 3, puede ser vista como la representación geométrica del cuadrilátero cóncavo, pero también como la silueta de un Boomerang o la aleta de una tabla para la práctica de un deporte acuático, etc. Vemos que cada uno de estos resultados son producto de una aprehensión perceptiva.

También, el autor define a **la Aprehensión Operatoria** como “la aprehensión de una figura dada en sus diversas modificaciones posibles en otras figuras” (p.126), es decir referida a las modificaciones o cambios que se pueden realizar a las figuras para que ayuden a resolver diversas situaciones problemáticas. El autor los clasifica en modificaciones mereológicas, ópticos y posicionales. Dicha aprehensión tiene como función a la exploración heurística, justificando así el uso de figuras en situaciones geométricas. El autor explica en qué consisten cada una de estas tres modificaciones de la aprehensión operatoria, en el cual:

> Las modificaciones mereológicas, consisten en dividir una figura en partes para recombinarlas en otra figura………. las modificaciones ópticas consisten en la ampliación, la reducción o la deformación de la figura, y las modificaciones posicionales que consisten

en el desplazamiento de la figura en el plano o en el desplazamiento del plano de la figura con respecto al plano frontal-paralelo (1994, p.126)

Para nuestros intereses de investigación, debemos entender que **la modificación posicional** según Duval (1994), señala que es aquella modificación donde la figura mantiene su tamaño y su forma, pero sufre variación en su orientación, por medio de una rotación o traslación, movimientos que contempla nuestro estudio, tal como mostramos en el siguiente ejemplo ubicado en la Figura 4.

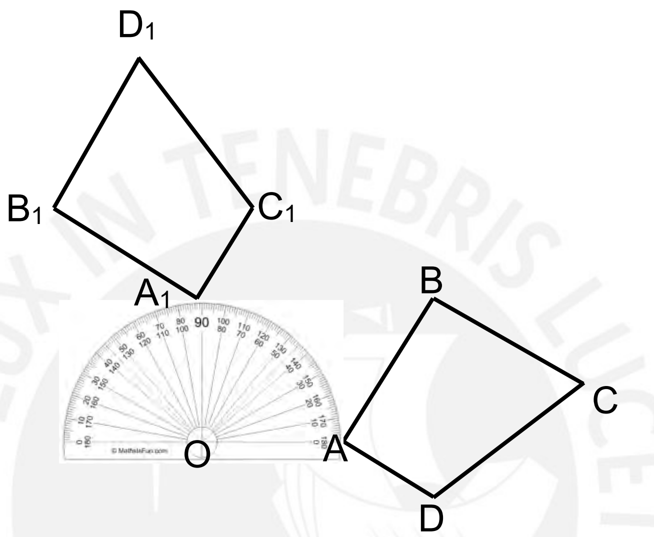


Figura 4**:** Ejemplo de Aprehensión Operatoria.

Nota: La figura muestra el cambio de posición y de orientación del cuadrilátero ABCD al realizarle una transformación, es decir en una rotación cuyo centro de rotación es el punto O y un ángulo cuya amplitud es de 90° en sentido antihorario.

El autor afirma que a cada uno de estos tipos de modificación le corresponden tratamientos específicos.

> …estos tratamientos pueden llevarse a cabo tanto mental como materialmente (doblando o cortando hojas, usando rompecabezas de piezas de diferentes formas, usando lupas, lentes, espejos convexos o cóncavos, etc.). Esta presentación rápida es suficiente para comprender el siguiente principio: **una figura proporciona una ayuda heurística cuando una de sus posibles modificaciones muestra la "idea" de una solución**. (1994, p.126)

Refiere que cualquier figura realizada mediante trazos o imaginada es susceptible a poder realizar modificaciones del tipo mereológica, óptica o posicional, en el cual, si una modificación ayuda a la solución de un problema dado, esta modificación es denominada modificación heurísticamente relevante.

La Aprehensión Secuencial que es definida por el autor como "…el orden de construcción de una figura. Este orden depende no solo de las propiedades matemáticas de la figura que se va a construir, sino también de las limitaciones técnicas de los instrumentos utilizados" (p.

126). Es así como debemos entenderla, como aquella aprehensión en la que se explicita los pasos a seguir en la construcción de una figura geométrica mediante el uso de algún instrumento como la regla, el compás, el transportador, el juego de escuadras, el *software GeoGebra*, etc.

La función epistemológica de esta aprehensión es la de modelo, dado que el estudiante deberá construir la figura según la secuencia de pasos establecidas desde un inicio. Este tipo de aprehensión según Duval (1994) es una de las que más se toma en cuenta, cosa que contrasta con la realidad peruana y latinoamericana, donde una de las dificultades encontradas en los trabajos de referencia para esta investigación es la de no fomentar el uso de instrumentos al trabajar situaciones geométricas. Veamos en la Figura 5, un ejemplo de aprehensión secuencial.

Paso 1: Dado el cuadrilátero ABCD en el plano, cuyos vértices son los puntos ABCD, y con el centro de rotación en el punto “O” y con ayuda de un **compás**, haciendo centro en “O”, traza un arco desde el vértice A en sentido antihorario.

Paso 2: Traza un segmento auxiliar $\overline{AO}$ y con ayuda del **transportador**, marca el ángulo de 90° en sentido antihorario.

Paso 3: Traza otro segmento auxiliar desde O hasta el punto marcado con el **trasportador**. La intersección del segmento y el arco es la imagen A_1, Hallaste $R_1(A) = A_1$

Paso 4: Repite los pasos anteriores para hallar las imágenes de los demás vértices.

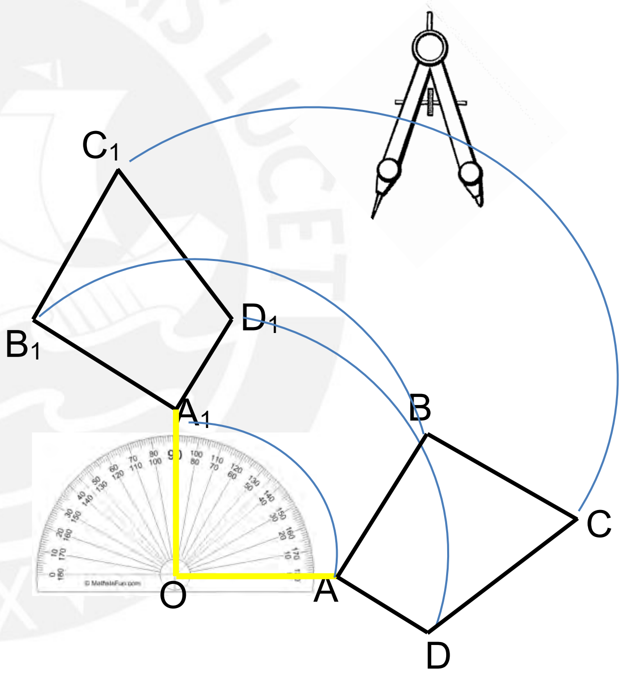


Figura 5**:** Figura construida por una secuencia de pasos.

Duval (1994) define que **la Aprehensión Discursiva** le “corresponde a una explicación de las otras propiedades matemáticas de una figura que las indicadas por la leyenda o por las hipótesis. Esta explicación es de naturaleza deductiva” (p.124). La función epistemológica de esta aprehensión es la demostración, donde el autor señala que es el aprendizaje más simple, realidad que también contrasta con la realidad peruana dado que no se fomenta la argumentación puesto que en los textos escolares o libros didácticos del grado respectivo se evidencia ausencia de esta.

Debemos también mencionar el Registro Figural Dinámico (RFD), definido por Flores y Almoulud (2015) como aquel registro de figuras en un ambiente de geometría dinámica, que para nuestro estudio denominaremos Ambiente de Representación Dinámica (ARD) dado que las tres actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión permiten configurar un registro cuando se interactúa con las representaciones dentro de un ARD. Dichos autores presentan la formación dinámica como la formación de una representación semiótica en ARD, que se da cuando el estudiante elige una o más herramientas específicas de un determinado software como es el caso del *software GeoGebra* para representar un objeto geométrico movilizando sus conocimientos previos que le permitan representar dicho objeto, identificando las unidades figurales y la combinación de estas.

Los autores coinciden con Duval (2005) respecto a la utilización del software, puesto que éste le permite acelerar tratamientos en una figura, logrando mayor rapidez y precisión en la solución de un problema, utilizar las funciones de arrastre y manipulación frente al monitor permiten construir relaciones, conjeturas de manera diferente en comparación a una enseñanza tradicional, es así como dichos investigadores describen al tratamiento dinámico. En relación con la conversión dinámica, mencionan que esta se da al plantear un problema en lenguaje natural a una representación figural en ARD, donde se pueden realizar tratamientos dinámicos con las funciones ya mencionadas.

A continuación, mostramos un resumen de las aprehensiones en el registro figural en el Cuadro 6 tomada de Duval (2012) en el cual se muestra una matriz con las características de las cuatro aprehensiones definidas con anterioridad, la aprehensión perceptiva, la aprehensión operatoria, la aprehensión secuencial y la aprehensión discursiva.

Aprehensión perceptiva	**Aprehensión operatoria** de una figura			**Aprehensión secuencial**	**Aprehensión discursiva** (según la definición de objetos)
Integración de trazos (fuertes contrastes de brillo) en una figura.	Tipos de modificaciones figurales.	Operaciones que modifican la figura: proceso heurístico.	Factores internos que desencadenan o inhiben la visibilidad de estas operaciones.	Factores externos que intervienen en la construcción de la figura.	Variaciones de congruencia entre las modificaciones figurales visibles y deducibles.
Leyes de agrupamiento de estímulos (simplicidad, cierre, proximidad, …) e identificación de formas.	Mereológico (proporción parte/ todo).	-Reconfiguración una figura se divide en diferentes unidades figurales: se pueden combinar en otra figura o en diferentes sub-figuras; …	- división en varias sub-figuras relevantes; - convexidad o no de las sub-figuras; -complementariedad; -duplicación; ...	Grado de congruencia entre las posibles unidades figurales y las permitidas por los instrumentos utilizados.	Las unidades de las figuras elementales y los objetos matemáticos utilizados por el razonamiento deductivo tienen o no el mismo número de dimensiones - Dependiendo de las hipótesis dadas, hay congruencia o no entre el tratamiento figural heurístico y el orden en los pasos de la deducción.
Indicadores de profundidad y distancia (tamaño, superposición, perspectiva en relación con un punto de paso, inclinación en relación con un plano frontal-paralelo) y número de dimensiones: orientación 2D o 3D en el plano frontal-paralelo.	Óptica	- La misma forma y orientación en el plano frontal paralelo, pero con variación de tamaño: superposición en profundidad de dos figuras similares; - Variación del plano en relación con el plano frontal-paralelo (variación de forma y constancia de forma y tamaño).	- La misma orientación que las figuras (objeto e imagen); - Las líneas de perspectiva son todas distintas de los lados de las dos figuras; - Centro de homotecia dentro o fuera del contorno convexo que rodea las dos figuras.		
	Posición	El mismo tamaño y forma, pero con variación de orientación, rotación, traslación, ...	-prevalencia de direcciones verticales y horizontales		

Cuadro 6. Aprehensiones en Geometría.

Fuente: Adaptado de Duval, 2012, p. 288

En el Cuadro 6 mostrado, podemos ver la descripción y característica de cada una de las aprehensiones en el registro figural: la aprehensión perceptiva, la aprehensión operatoria, la aprehensión secuencial y la aprehensión discursiva elaborada por Duval (2012).

Propondremos una secuencia didáctica compuesta por actividades relacionadas con las transformaciones de figuras en el plano y para su análisis respectivo, nos apoyamos en el marco de las Aprehensiones de una figura de Duval (1994), en el cual se podrán analizar didácticamente en cada una de las actividades propuestas, como se desarrollan las aprehensiones perceptuales, secuenciales, operatorias y discursivas.

Recalcamos que las actividades que se propondrán permitirán analizar las aprehensiones mencionadas en el registro figural, es así como, para la aprehensión perceptiva, buscaremos que las actividades propuestas permitan conocer y comprender los conocimientos que los estudiantes movilizan ante situaciones geométricas relacionadas con las transformaciones, que desarrollen la capacidad de reconocer a primera vista la forma de una figura, así como sus elementos y que dicho reconocimiento se vuelva permanente. En lo referido a la aprehensión discursiva, las actividades estarán diseñadas para que los estudiantes logren describir y argumentar sus procesos que realicen con respecto a los movimientos de rotación y traslación, de forma análoga, para la aprehensión secuencial, las actividades que propondremos, requerirán el uso de instrumentos de construcción como la regla, el compás, el transportador, el juego de escuadras y algún *software* accesible como *GeoGebra* de acuerdo con una secuencia instruccional y finalmente, la realización de dichos tratamientos conllevará al desarrollo de la aprehensión operatoria al realizar modificaciones posicionales de una figura en el plano.

Veamos a continuación en la Figura 6, el siguiente mapa conceptual que resume el marco teórico en el cual está basado nuestra investigación.

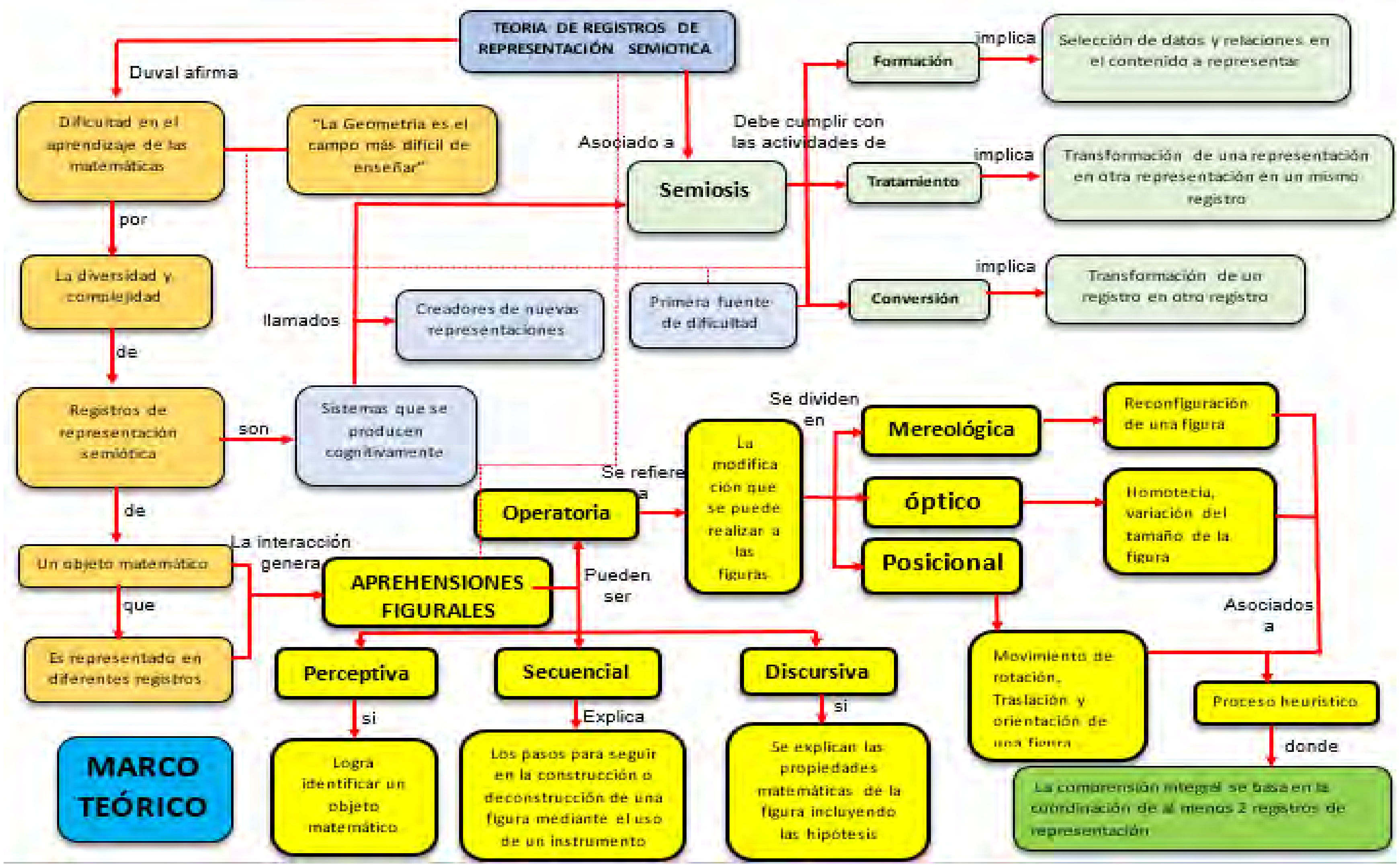


***Figura 6*: Marco teórico sobre la Teoría de Registros de Representación Semiótica-Aprehensiones figurales.**

En la Figura 6 podemos visualizar un mapa conceptual sobre el marco teórico correspondiente a la Teoría de Registros de Representación Semiótica en relación con las aprehensiones figurales de Duval (1994), que a su vez es el marco de la presente investigación en el que se presenta la aprehensión perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

Basados en nuestras investigaciones de referencia sobre el aprendizaje de las transformaciones de rotación y traslación en estudiantes de EBR y en nuestra teoría, nos proponemos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el papel de las aprehensiones en el registro figural en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR?

Objetivo general:

Analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR.

Objetivos específicos:

- Identificar las aprehensiones en el registro figural mediante las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR.
- Identificar las aprehensiones en el registro figural dinámico mediante la utilización del *software GeoGebra* en el movimiento de rotación en el ciclo VII de EBR.
- Reconocer las aprehensiones en el registro figural y figural dinámico en los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR que se desarrollaran *a priori* en una secuencia didáctica.

1.5 Metodología de la Investigación

En esta sección presentaremos la metodología de nuestra investigación.

Según Creswell (2010) la investigación cualitativa tiene una orientación interpretativa y naturalista a su objeto de estudio. Esto quiere decir, que en la investigación cualitativa se estudian las cosas en sus ambientes naturales, pretendiendo darles sentido e interpretando los fenómenos en función de los significados que las personas les otorgan.

La investigación cualitativa implica el estudiado uso y recopilación de una variedad de materiales empíricos, específicamente, textos históricos, los cuales describen momentos y sentidos rutinarios y problemáticos en la vida de los individuos. En la investigación cualitativa, el investigador cimenta un panorama complejo y holístico, analiza discursos, relata visiones detalladas de los informantes y lleva a cabo el estudio en un ambiente natural.

En nuestra investigación, debido al Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio a consecuencia del brote del COVID-19, nuestra investigación no es experimental y nuestros datos provienen de fuentes secundarias. Por lo que, nos apoyamos de la revisión de trabajos de investigación a nivel de maestrías y doctorados, así como artículos publicados en revistas científicas y libros didácticos para proponer una secuencia didáctica y *a priori* inferir las posibles acciones por parte de los sujetos de investigación de modo tal que nos permita responder a nuestra pregunta de investigación.

1.6 Procedimientos metodológicos

Nuestra investigación nos brindará los procesos a seguir para comprender con profundidad los aprendizajes que se lograrán al proponer una secuencia didáctica para los estudiantes de 4to año de secundaria de EBR y realizar el análisis de lo que se esperaría obtener en cada una de las actividades propuestas y poder dar respuesta a la pregunta de investigación así como los objetivos a lograr, tomando en cuenta los antecedentes, el marco teórico y la revisión del texto utilizado por los estudiantes.

Presentamos a continuación los procesos de acuerdo con nuestro objeto de investigación:

La Introducción (problema, preguntas, recolección de datos, análisis, productos), para ello la investigación contempla responder la pregunta: ¿Cuál es el papel de las aprehensiones en el registro figural en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR?

Nos apoyamos en una secuencia didáctica asociada a las transformaciones geométricas en el plano, que podrán permitir analizar el papel de las aprehensiones geométricas en el registro figural utilizadas en el estudio de dichas transformaciones en los movimientos de rotación y traslación, ello implica analizar las aprehensiones perceptivas, operatorias (modificación posicional) , secuenciales y discursivas que se desarrollan en dichas actividades al realizar los movimientos mencionados en el plano con el uso del lápiz, papel, compás, transportador, y el apoyo del *software GeoGebra.*

Las actividades propuestas en la secuencia estarán siendo estudiadas a profundidad según las aprehensiones mencionadas en nuestro marco teórico y que se pretenden movilizar para el logro de aprendizajes al realizar transformaciones mediante los movimientos de rotación y traslación.

Tomando en cuenta los aprendizajes esperados en el CN (2016) vigente y la competencia 26: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, las actividades propuestas contemplan:

- ✓ Reconocer la noción de rotación realizada a una figura dada mediante movimientos en el plano.
- ✓ Deducir el centro y la medida del ángulo de rotación aplicado a una figura dada utilizando regla y transportador.
- ✓ Reconocer la noción de Traslación realizada a una figura dada mediante movimientos en el plano.
- ✓ Identificar el vector de dirección y encontrar sus respectivos parámetros en una figura dada utilizando regla y juego de escuadras.
- ✓ Identificar los movimientos de rotación y traslación aplicados a una figura dada y encontrar sus respectivos parámetros utilizando regla, compás, transportador y juego de escuadras.
- ✓ Construir y describir la transformada de una figura, resultante de la aplicación de una rotación dado un punto de centro y un ángulo de giro utilizando regla, compás, y el transportador.
- ✓ Construir y describir la transformada de una figura dada, resultante de la aplicación de un vector de traslación dado sus parámetros, utilizando regla, compás y el juego de escuadras.
- ✓ Construir y describir la transformada de una figura dada, resultante de la aplicación de una composición de los movimientos de rotación y traslación dado sus respectivos parámetros utilizando regla, compás, trasportador, juego de escuadras y el *software GeoGebra*.

Elaboraremos la propuesta de secuencia didáctica que responda a cada uno de los indicadores de desempeño correspondiente a las actividades propuestas, analizaremos las posibles soluciones matemáticas que se involucran, así como un análisis de acuerdo con las aprehensiones geométricas que nos lleven a responder la pregunta de investigación y el logro de los objetivos propuestos.

A continuación, presentaremos el siguiente capítulo asociado a nuestro objeto matemático de estudio, las transformaciones geométricas en los movimientos de rotación y traslación.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO EN ESTUDIO

Dentro del marco metodológico a utilizar, presentamos el análisis preliminar de nuestro estudio de las transformaciones de rotación y traslación. Para ello examinaremos la evolución histórica de las transformaciones. Luego presentaremos un estudio de un libro formal, en el que se presenta las transformaciones desde el enfoque intramatemático y finalmente analizaremos un texto escolar que presenta nuestro objeto matemático y como es utilizado por los estudiantes del nivel EBR.

2.1 Aspectos históricos de la teoría de transformaciones

En esta sección presentamos la evolución histórica de las transformaciones geométricas como objeto matemático, desde su aparición, hasta la actualidad. Para esta reseña histórica nos apoyaremos en la investigación de Santos (2018) y Boyer (1987).

La historia de las transformaciones geométricas pertenece a la historia de la Geometría y para ello, iniciaremos nuestro recorrido histórico por una de las culturas más antiguas, cuna del padre de la Geometría: Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.). Nos referimos a la cultura griega, donde la geometría y la matemática regían la estructura del universo, es decir que el universo debía cumplir con los principios de proporción y simetría, en el cual aparece la obra cumbre que recopila los fundamentos matemáticos de la Geometría denominada "*Los Elementos*" y que se estudia hasta la actualidad.

Debemos mencionar que, en dicha obra, Euclides resumió todos los conocimientos matemáticos presentes desde la época de Tales de Mileto (624 a.C.–546 a.C.) y sirvió de base para el estudio de la geometría desde su creación hasta finales del siglo XIX. La obra se compone de 13 libros, en esta etapa aún no aparece la teoría de las transformaciones, solamente nociones comunes como "cosas que son iguales a la misma cosa, son iguales entre sí". Esta noción nos lleva a la idea intuitiva de congruencia, donde se cumple dicha igualdad al ser superpuestas las figuras correspondientes.

En el libro I denominado Fundamentos de la Geometría. Teoría de triángulos, paralelas y el área, aparece la proposición 8 donde se menciona que, Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y también tienen la base igual, tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales. Veamos la Figura 7:

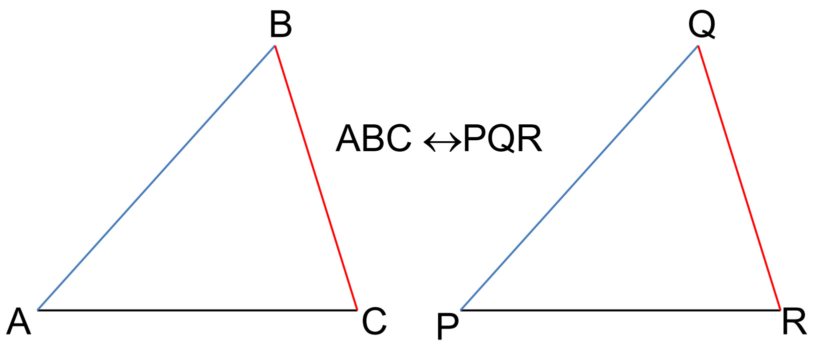


***Figura 7*:** Representación gráfica de la proposición 8 del Libro I, Fundamentos de la Geometría, Euclides.

Vemos que Euclides había establecido la igualdad de figuras por superposición, ello equivale a que las figuras permanecen invariables cuando se mueven en el plano. Es decir que las denominadas transformaciones rígidas, obtenidas a partir de traslaciones, rotaciones, simetrías y sus composiciones, derivan un conjunto de transformaciones.

Siguiendo con nuestro recorrido, debemos tener en cuenta a la cultura china, si bien es mucho más antigua que la griega, los documentos de contenidos matemáticos en el *Chou Pei Suan Ching* de 1200 a.C. aproximadamente, aparecen aspectos de orden geométrico que eran tratados a nivel aritmético o algebraico. Fue en esta cultura a la que le debemos el origen del papel y el arte del plegado, conocidos como el Origami o la papiroflexia, en dichos dobleces se pueden observar transformaciones de simetría, rotación o traslación como en la Figura 8 que mostramos a continuación para elaborar “La Grulla” se necesitan realizar un número de dobleces asociados a las transformaciones.

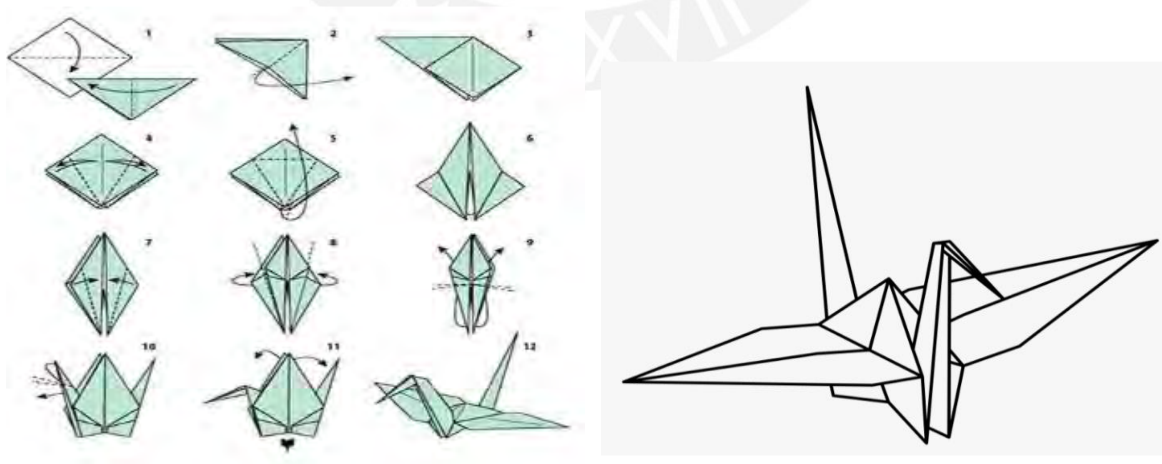


***Figura 8*:** Proceso de elaboración de la “Grulla” mediante la papiroflexia.

Fuente: Adaptado de Origami, en https://paperboogie.com/grulla-origami/

En la cultura árabe encontramos al que es considerado padre del álgebra, nos referimos de Al-Khowarizmi, autor del famoso libro Al-jabr de donde se deriva la palabra algebra, en dicha cultura encontramos los impresionantes mosaicos que revelan una simetría cercana a la perfección en su construcción con el dominio de la regla y compás. Sabemos que la religión dominada por el medio oriente prohíbe la representación de seres vivos, es por este motivo que los artistas musulmanes se enfocaron en el uso de las figuras geométricas. La diversidad de patrones geométricos en la decoración islámica es impresionante.

> En el islam, el círculo o forma perfecta, se usaba como patrón; simetrías, giros y traslaciones de figuras geométricas, eran recursos utilizados repetidamente por los artesanos musulmanes. El arte islámico utiliza diversos patrones geométricos, de entre los que destacan: los polígonos estrellados, que se entrelazan unos con otros y los teselados, para cubrir el plano. (Santos, 2018, p.19)

Con la dinastía Nazarí aparece en el Reino de Granada, la Alhambra, donde se muestra la máxima expresión del arte musulmán en el uso de los mosaicos. Una muestra de esto la podemos encontrar en la Alhambra, donde podemos encontrar diecisiete formas posibles de decoración en el plano de forma periódica, lo cual quiere decir que en esta fortaleza podemos encontrar diecisiete grupos de simetrías en el plano. En la Alhambra podemos encontrar composiciones geométricas simples y complejas, donde las figuras realizan transformaciones. Veamos una muestra de este arte musulmán en la siguiente Figura 9.

***Figura 9*:** Mosaicos de La Alhambra.

Fuente: Adaptado de Mosaicos de Alhambra, https://armasblancas.mforos.com/933172/13001703-victorinox-mosaicos-de-la-alhambra/

A continuación nos situamos en la época del Renacimiento, donde diversos artistas empiezan a representar objetos tridimensionales, donde la perspectiva tendrá un lugar importante y que dará soporte fundamental para poder plasmar las obras en un marco bidimensional o tridimensional en forma realista, podemos mencionar algunos personajes célebres como Leonardo da Vinci (1452 – 1519) quien publicó "*De divina proportione*", en la que se estudian los polígonos y los poliedros regulares y la razón aurea o número de oro. Da Vinci es muy conocido por sus aplicaciones a la teoría de la perspectiva. También podemos mencionar al artista Alberto Durero (1419-1528), donde la geometría adquiere un gran protagonismo para sus obras y describe diversas técnicas para realizar perspectivas.

> "Albrecht Durer o Durero, que era contemporáneo de Leonardo y conciudadano de Werner, puesto que ambos residían en Nuremberg. En la obra de Durero puede apreciarse también cierta influencia de Pacioli (Leonardo da Vinci), especialmente en el famoso grabado de 1514 titulado *Melancolía*, en el que aparece de una manera prominente el cuadrado mágico" (Boyer, 1985, p.377)

***Figura 10*:** Leonardo da Vinci, perspectiva de la última cena.

Fuente: Adaptado de Imagen de la última cena, https://sk.pinterest.com/pin/703546773008057441/

En la edad moderna, el estudio de la geometría proyectiva estuvo a cargo de Girard Desargues (1591 – 1661), ello suponía un enorme avance con respecto a la geometría métrica tratados por Fermat y Descártes, en 1639 aparece en parís su obra *Brouillon projet d'une atteinte aux évenements des recontres d'un cone avec un plan* , que contiene tratados sobre el estudio de un cono con un plano, Desargues es considerado profeta de la geometría proyectiva, es conocido por su famoso teorema que lleva su nombre: "Si dos triángulos están situados de manera que las rectas que unen pares de vértices correspondientes son concurrentes en un punto, entonces los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes son colineales, y recíprocamente".

> Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. Las más conocidas fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet (Boyer, 1987, p. 661).

También mencionamos que Desargues tuvo como discípulo al joven Blaise Pascal (1623-1662) quien a los 16 años publica su artículo *Essay pour les coniques*, donde se encuentra su famoso teorema: Si A, B, C, D, E y F son los vértices sucesivos de un hexágono inscrito en una cónica, y si P es el punto de intersección de AB y DE, y Q el punto de intersección de BC y EF, entonces PQ, CD y AF son rectas <<del mismo orden>>. Es así como la Geometría proyectiva se configura con los aportes de Desargues y Pascal, diferenciándose de la Geometría Descriptiva.

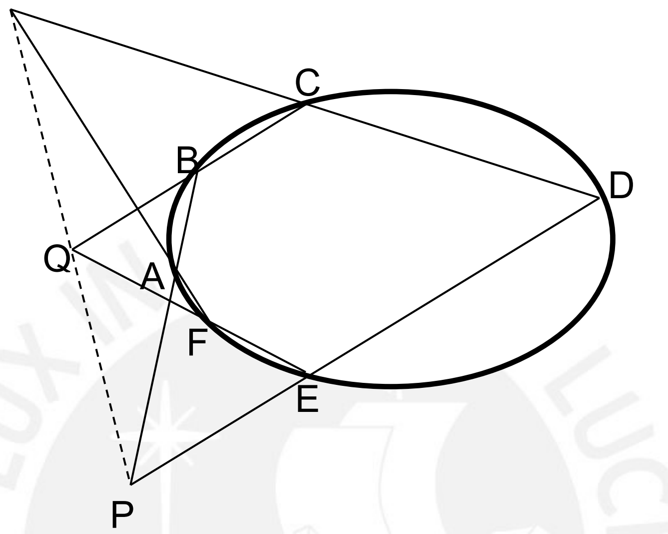


***Figura 11*:** Teorema de Blaise Pascal.

Fuente: Adaptado de Boyer, 1985, p. 455.

Mencionamos a continuación a Poncelet (1788 – 1867), quien aportó significativamente al desarrollo de la Geometría Proyectiva. En su obra "*Traité des propriétés projectives desfigures*" explica los fundamentos de esta geometría. Asimismo, elaboró el Método de las Transformaciones, de gran trascendencia en el desarrollo de las transformaciones geométricas.

En la edad contemporánea hace su aparición Félix Klein (1849 – 1925), quien hizo famoso al *Erlanger Programm*, donde el autor describe en dicho programa a la geometría como el estudio de propiedades de las figuras que permanecen intactas bajo la aplicación de un grupo de transformaciones.

> "…consiste en el estudio de las propiedades de las figuras en el plano, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de transformaciones que está engendrado por las traslaciones y rotaciones en el plano, es decir, las llamadas transformaciones rígidas o movimientos." (Boyer, 1987, p.678)

El trabajo de Klein es considerado según Boyer (1987) como la culminación de "La época heroica de la geometría", dado que impartió y dio conferencias por casi 50 años, en tal medida que figuras de la época a finales del siglo XIX inferían que toda la matemática estaría dentro de la teoría de grupos. Con la aparición de la geometría fractal, por Benoît Mandelbrot (1924-

2010), se abrió una nueva ruta para las transformaciones geométricas, en el cual se da un nuevo impulso para proseguir con los estudios sobre este tópico.

> "El estudio de las transformaciones geométricas sigue estando presente en la actualidad. John Griggs Thompson y Jacques Tits, fueron galardonados con el premio Abel de las ciencias en el año 2008, por la investigación que llevaron a cabo acerca de simetrías en teoría de grupos y Robert P. Langlands ha recibido en el 2018 el Premio Abel de Matemáticas, por su teoría unificada de las matemáticas o "Programa de Langlands", donde la Teoría de los Grupos de Galois tiene gran protagonismo…" (Santos, 2018, p. 30)

Un ejemplo de ello lo podemos ver a continuación en la Figura 12.

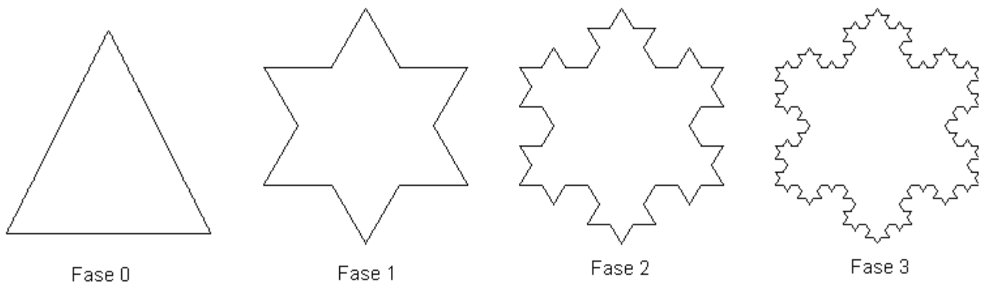


***Figura 12*:** Fractal de Koch, "copo de nieve".

Fuente: Adaptado de imágenes de fractales, http://ibethxiomara16.blogspot.com/2016/09/teorema-de-pitagoras.html

La revisión de algunos aspectos históricos de las transformaciones nos ayuda a comprender el surgimiento de este concepto, cuáles fueron los problemas o situaciones que ayudaron en la aparición de éste, el contexto en que se aplicaban y como fue evolucionando hasta nuestros días. La obra de Euclides fue sin duda la contribución más significativa de la antigüedad a la metodología de la ciencia, influyendo en las matemáticas durante varios siglos.

Hemos mostrado que, en el período del Renacimiento, los artistas y arquitectos se interesaron por la representación plana de figuras espaciales y la relación entre arte y matemáticas se hizo evidente en la obra de Leonardo da Vinci (1452-1519). La mejor combinación de intereses artísticos y matemáticos también se encuentra en la obra de Albrecht Durer (1471-1528). Las nociones renacentistas de perspectiva se ampliarían más tarde a una nueva rama de la geometría. La preocupación de pintores y artistas por representar objetos en el espacio dio lugar a la idea de proyecciones y aparecieron las nociones de geometría proyectiva y geometría descriptiva, importantes en la génesis del concepto de transformaciones.

2.2 Aspecto formal de la teoría de las transformaciones

En esta sección presentaremos el estudio de las transformaciones en los movimientos de rotación y traslación, sus principales características, desde la perspectiva del trabajo de Lima (1995), donde aborda el tema desde un punto de vista intramatemático, el cual nos permitirá a tener una visión formal del tema tal como lo explica el autor. Introduciremos la noción de isometrías en el plano y los movimientos de rotación y traslación que es el objeto de estudio de nuestra investigación.

Isometrías en el plano

Lima (1995) denota con $d(A,B)$ o $\overline{AB}$ la distancia del punto A al punto B en el plano, Π, es decir, la longitud del segmento de recta AB.

Recordemos que el punto C pertenece al segmento de recta AB si y solamente si,

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$$

Una isometría entre los planos Π y Π' es una función T:$\Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distancias. Esto significa que, para puntos cualesquiera, $X, Y \in \Pi$, haciendo $X' = T(X)\ e\ Y' = T(Y)$, se tiene que $d(X',Y') = d(X,Y)$.

1. *Toda isometría T:$\Pi \rightarrow \Pi'$ es una función inyectiva* pues
   $X \neq Y \Rightarrow d(X,Y) > 0 \Rightarrow d(X',Y') = d(X,Y) > 0 \Rightarrow X' \neq Y' \Rightarrow T(X) \neq T(Y)$
   Una isometría es también sobreyectiva. Esto será probado a continuación.
2. *Toda isometría T: $\Pi \rightarrow \Pi'$ transforma rectas en rectas, es decir, si $r \subset \Pi$ es una recta, entonces $T(r) \subset \Pi'$ también es una recta.*
   En efecto, sea $r \subset \Pi$ una recta. Tomemos dos puntos distintos $A\ y\ B\ en\ r$, tomemos $A' = T(A), B' = T(B)$ por 1) $A' \neq B'$ y llamemos r' a la recta en el plano Π' que pasa por $A'y\ B'$. Dado cualquier $X \in r$, uno de los tres puntos $A, B\ y\ X$ está entre los otros dos puntos. Digamos que B está entre $A\ y\ X$, o sea, que $B \in AX$. (Los otros dos casos son tratados análogamente). Entonces $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$ luego, tomando $X' = T(X)$, y por ser T una isometría, tenemos que $\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X'}$. Así los puntos $A', B'y\ X'$ son colineales. Esto muestra que $X \in r$ implica $X' \in r'$. Luego, la restricción de $T a\ r$ es una isometría entre $r\ y\ r'$. Como toda isometría entre rectas es sobreyectiva, se tiene $T(r) = r'$.

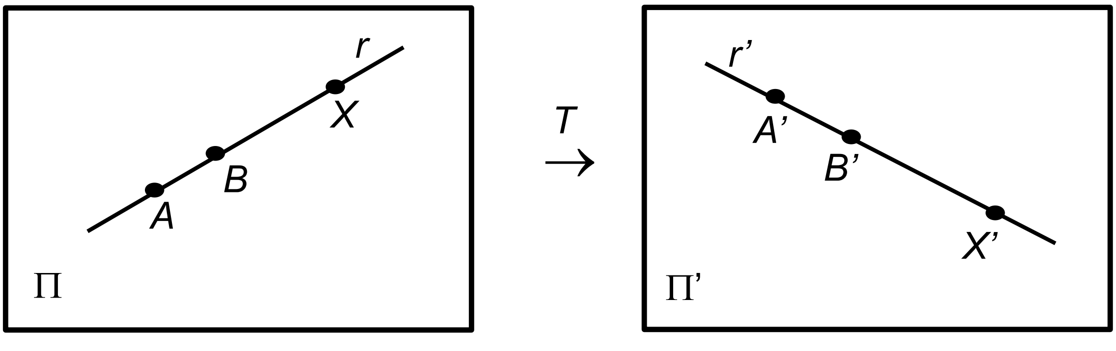


***Figura 13*: **Isometría transforma rectas en rectas.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.15.

3. *Una isometría T: $\Pi \rightarrow \Pi$' transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.*

   En efecto, dadas las rectas perpendiculares $r\ y\ s$, en Π, consideremos: el punto A de intersección dos puntos $B\ y\ C\ en\ r$, equidistantes de A, y un punto cualquiera D sobre s, donde $D \neq A$. La isometría T transforma la mediana AD del triángulo isósceles BCD en la mediana $A'D'$ del triángulo isósceles $B'C'D'$, luego $A'D'$ es perpendicular a $B'C'$, ósea $r' = T(r)$ es perpendicular a $s' = T(s)$.

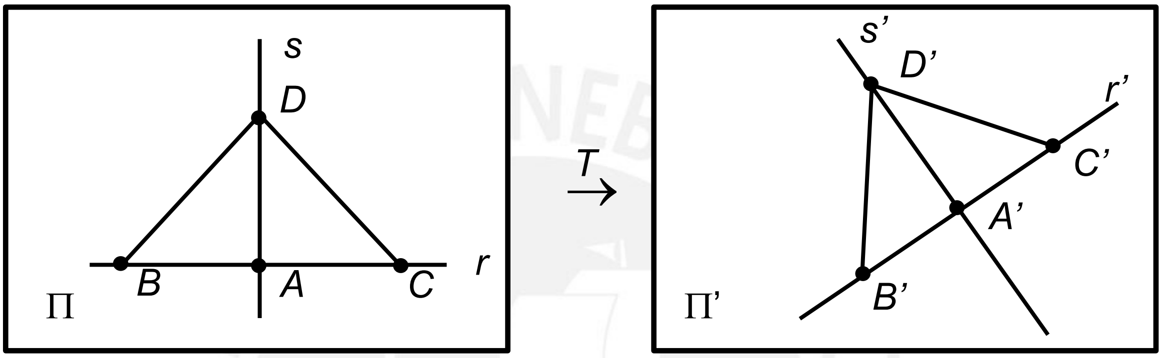


Figura 14: Isometría transforma rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.15.

4. *Toda isometría T: $\Pi \rightarrow \Pi$' es una biyección cuya inversa isometría T^{-1}: $\Pi' \rightarrow \Pi$ es también una isometría.*

   En efecto, ya vimos que T es inyectiva. Para probar la sobreyectividad, tomamos un punto arbitrario $X' \in \Pi'$ y procuramos determinar un punto $X \in \Pi$ tal que $T(X) = X'$. Para eso, trazamos una recta cualquiera r en Π. La imagen de $r\ por\ T$ es una recta r' en el plano Π'.

   i) Si $X' \in r'$ entonces, por definición de imagen existe un punto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$.

   ii) Caso contrario si $X' \notin r'$, sea s' la perpendicular bajada desde X'sobre r'. Llamaremos Y' al punto de intersección de $r'con\ s'$. Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Sea s la recta perpendicular a r pasando por Y. La imagen de s por la isometría T es perpendicular a r' y contiene a Y'. Luego $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$.

   i y ii demuestran que T: $\Pi \rightarrow \Pi$ *es* sobreyectiva.

   En 1) se demostró que T es inyectiva, luego T es biyectiva.

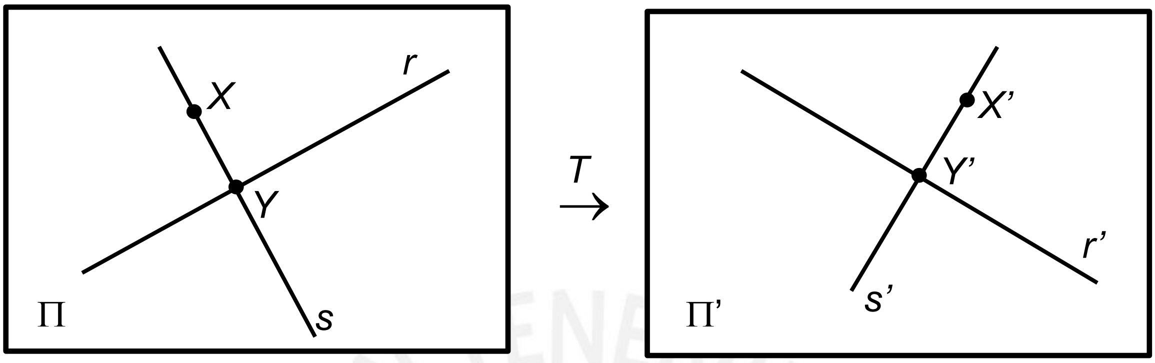


***Figura 15*:** Isometría entre rectas es biyectiva.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.16.

Es evidente que si T: *Π→Π'* y S: *Π'→Π''* son isometrías entre planos entonces la compuesta $S \circ T$: *Π→Π''* es también una isometría.

El ejemplo más obvio de isometría es la función identidad Id:Π→Π.

Traslación

Sean A, B distintos puntos del plano Π. Una traslación T_{AB}: Π→Π es una función así definida: dado $X \in$ Π, su imagen $X' = T_{AB}(X)$ es el cuarto vértice del paralelogramo que tiene como lados $AB\ y\ AX$.

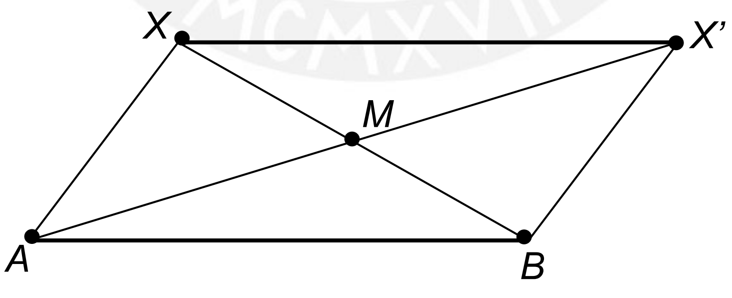


***Figura 16*:** Traslación.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.18.

Esta definición de $T_{AB}(X)$ se aplica solo cuando $A, B\ y\ X$ no sean colineales. Si X pertenece a la recta AB, su imagen $X' = T_{AB}(X)$ ya fue definida cuando estudiamos las isometrías de una recta. Cualquiera que sea la posición de X en el plano Π, su imagen $X' = T_{AB}(X)$ se caracteriza por el hecho de que los segmentos de recta $AX'\ y\ BX$ tienen el mismo punto medio M. Así mismo, si quisiéramos construir X' geométricamente a partir de A, B y X tomamos el punto medio M del segmento BX y prolongamos el segmento AM hasta X' de modo que $\overline{MX'} = \overline{AM}$.

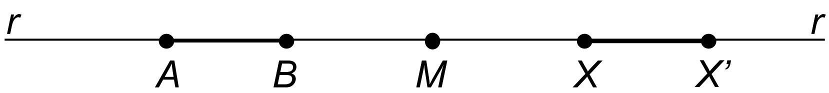


Figura 17: Traslación de un punto en una recta.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.19.

Es importante observar que en esta definición de T_{AB}, es esencial tomar en cuenta el orden en que son mencionados los puntos A y B. Una traslación T_{BA} es diferente de T_{AB}. En realidad, como se ve fácilmente, se tiene $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$. Mencionaremos el segmento de recta orientado AB para identificar que el punto A fue tomado como origen y el punto B como extremo. El segmento orientado BA (opuesto de AB) tiene a B como origen y a A como extremo.

Hagamos hincapié que una traslación T_{AB}no tiene puntos fijos. En realidad, para todo punto $X \in \Pi$, con $T(X) = X'$, se tiene $d(X, X') = d(A, B)$.

Para mostrar que una traslación T_{AB}: $\Pi \rightarrow \Pi$ es una isometría, tomemos dos puntos arbitrarios $X, Y \in \Pi$ y sus imágenes.

$$X' = T_{AB}(X) \qquad Y' = T_{AB}(Y)$$

Sea r una recta que contiene X e Y y una recta s paralela que contiene AB, entonces T_{AB} , restringe a r a una traslación $T_{XX'}: r \rightarrow r$, luego $d(X'Y') = d(X, Y)$. Si r no es paralela ni igual a s entonces XX' e YY' son lados opuestos de un paralelogramo, luego lo mismo ocurre con XY e $X'Y'$. Se sigue que $d(X', Y') = d(X, Y)$

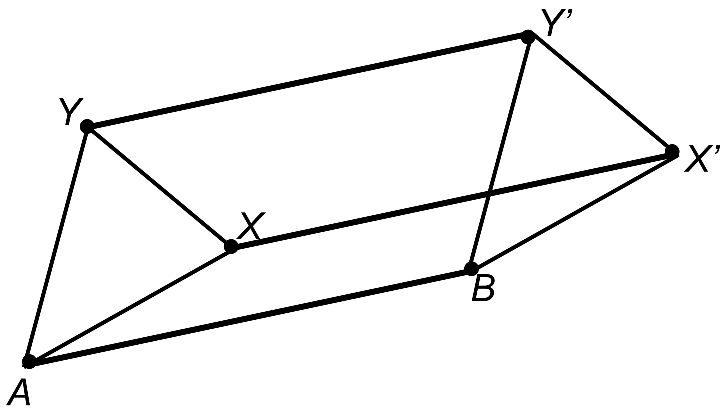


Figura 18: Traslación.

Fuente: Adaptado *de Lima, 1995,* p.20.

La noción de traslación está íntimamente relacionada con el concepto de *vector* (del latín "vehere" = transportar). En realidad, podemos definir los vectores en un plano a partir de las traslaciones. Diremos que dos segmentos orientados $AB\ y\ CD,$ en el plano Π, son equipotentes cuando $T_{AB} = T_{CD}$. Esto corresponde a la definición tradicional pues $T_{AB} = T_{CD}$ sí y solamente si los segmentos $AB y\ CD$ son paralelos, tiene el mismo sentido (ósea si y solamente si los puntos medios de $AD\ y\ BC$ coinciden).

En seguida, diremos que el vector $v = \overrightarrow{AB},$ de origen A y extremo B, es un conjunto de segmentos orientados equipotentes a AB. Entonces podemos escribir T_v en vez de T_{AB} y decir que T_v es una traslación de vector v.

Dado el segmento orientado AB y el punto P en el plano Π, existe un único punto Q en Π tal que los segmentos orientados $AB\ y\ PQ$ son equipotentes, esto es, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = v$. Q es el cuarto vértice de un paralelogramo que tiene $AB\ y\ AP$ como lados. Se escribe $Q = P + v$ y se dice que el vector $v = \overrightarrow{AB}$ trasporta un punto P para la posición Q. Naturalmente, $Q = T_{AB}(P) = T_v(P)$

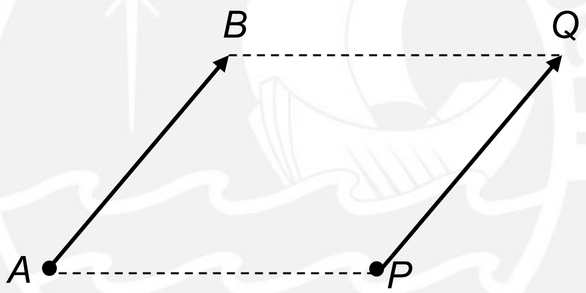


***Figura 19*:** Vector AB.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.20.

Vectores en el plano Π pueden ser sumados. Dados los vectores $u\ y\ v,$ con $u = \overrightarrow{AB}$, se toma un punto Q tal que $\overrightarrow{BQ} = v$ y se pone $u + v = \overrightarrow{AQ}$. Alternativamente, podemos tomar C tal que $\overrightarrow{AC} = v$ y definir $u + v = \overrightarrow{AD}$, donde D es el cuarto vértice del paralelogramo que tiene $AC\ y\ AB$ como lados.

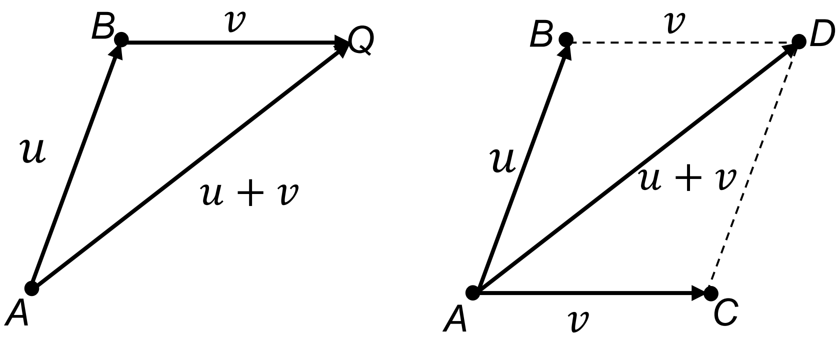


***Figura 20*:** Suma de vectores.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.21.

Es conveniente introducir el *vector nulo* (o vector cero) indicado como 0, donde $0 = \overrightarrow{AA}$ (vector para el cual el origen coincide con el extremo). Esto corresponde incluir a la función identidad como traslación: T_0 = identidad.

Observe que $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u = T_{u+v}$

Por definición, si $v = \overrightarrow{AB}$, se escribe $-v = \overrightarrow{BA}$. Entonces $(T_v)^{-1} = T_{-v}$

Adicionalmente, los vectores también pueden ser multiplicados por números reales. Dado el vector $v = \overrightarrow{AB}$ y el número real $t > 0$, el producto de $t\ por\ v$ es el vector $tv = \overrightarrow{AB_t}$ donde B_t es un punto de la semi recta AB tal que $\frac{\overline{AB_t}}{\overline{AB}} = t$. Si $t < 0$, entonces $tv = -|t|v$ y si $t = 0$, entonces $0.v = 0 = \overrightarrow{AA}$

Rotación

Sea O un punto tomado en el plano Π y $\alpha = A\hat{O}B$ un ángulo de vértice O. Una *rotación* de un ángulo $\propto$ en torno a un punto O es una función $\rho_{O,\alpha}$:$\Pi \rightarrow \Pi$ definida así: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ y para todo punto $X \neq O$ en Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ es un punto del plano Π tal que

$$d(X,O) = d(X',O), X\hat{O}X' = \propto$$

Y el "sentido de rotación" de A para B es el mismo de X para X'. La condición $X\hat{O}X' = \propto$ significa, en términos geométricos, que si tomamos los puntos A y B tales que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$ entonces $\overline{AB} = \overline{XX'}$. La exigencia de que el sentido de rotación de X para X' sea el mismo que el sentido de A para B es claro intuitivamente y puede ser formulada en términos precisos diciendo que los ángulos $B\hat{O}X\ y\ A\hat{O}X'$ tienen la misma bisectriz.

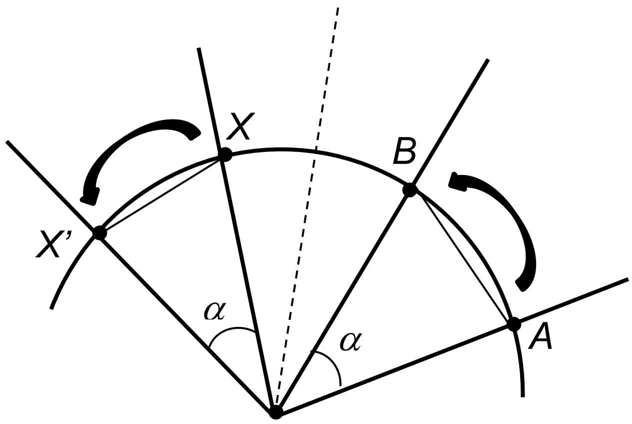


***Figura 21*:** Rotación.

Fuente: Adaptado de Lima, 1995, p.22.

Dados los puntos $X, Y \in \Pi$, distintos de O, sean $X' e\ Y'$sus imágenes por la rotación $\rho_{O,\alpha}$ con los ángulos $X'\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Y'$ tienen una misma bisectriz, se sigue que $X\hat{O}Y = X'\hat{O}Y'$, siendo $\overline{OX} = \overline{OX'}$ e $\overline{OY} = \overline{OY'}$, concluimos que los triángulos $XOY\ y\ X'OY'$ son congruentes (Caso LAL). Luego $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$, ósea, $\rho_{O,\alpha}$es una isometría, cuyo único punto fijo es O.

Cuando un ángulo $\alpha = A\hat{O}B$ es llano, ósea cuando OA y OB son semi rectas opuestas, la rotación $\rho_{O,\alpha}$coincide con la simetría S_O, en torno al punto O.

Este estudio del aspecto formal de la traslación y rotación nos brinda el soporte formal que ayuda a nuestra investigación para identificar las propiedades que están inmersas en este objeto matemático dado que pertenece al grupo de las Isometrías.

2.3 Aspectos del tema de las transformaciones en los libros didácticos

En esta sección presentamos el desarrollo del tema de transformaciones en las instituciones educativas, para ello, hacemos un estudio de los textos de Matemática N°4 correspondiente al VII ciclo (3ro, 4to y 5to de secundaria) de la Editorial COREFO edición 2020, dichos textos están compuestos por el libro de área y por el libro de actividades, que es utilizado en el Colegio Nuestra Señora del Carmen “Carmelitas” por los estudiantes del 4to año de secundaria, en el cual veremos la presentación de los movimientos de traslación y rotación. La Figura 22 corresponde al inicio del tema en la sección correspondiente al libro de área.

***Figura 22*:** Recojo de saberes previos sobre transformaciones geométricas.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.188.

Se puede observar en la Figura 22, la presentación del tema de transformaciones geométricas asociado al recojo de saberes previos, mediante una pregunta de indagación, pero sin describir un contexto especifico, la imagen muestra una clase de matemática, donde la pregunta presentada por el estudiante en la imagen hace referencia a la existencia de eje de simetría de un gráfico en el plano pero no muestra posibles respuestas ni dialogo hipotético ni tampoco se indica el propósito del porque se debería aprender las transformaciones geométricas. En la Figura 23 mostramos algunas de las definiciones colocadas en el libro de área.

Transformaciones geométricas

Es la correspondencia que existe entre dos figuras siempre y cuando una de ellas se obtenga de la otra mediante una rotación, traslación, simetría u homotecia.

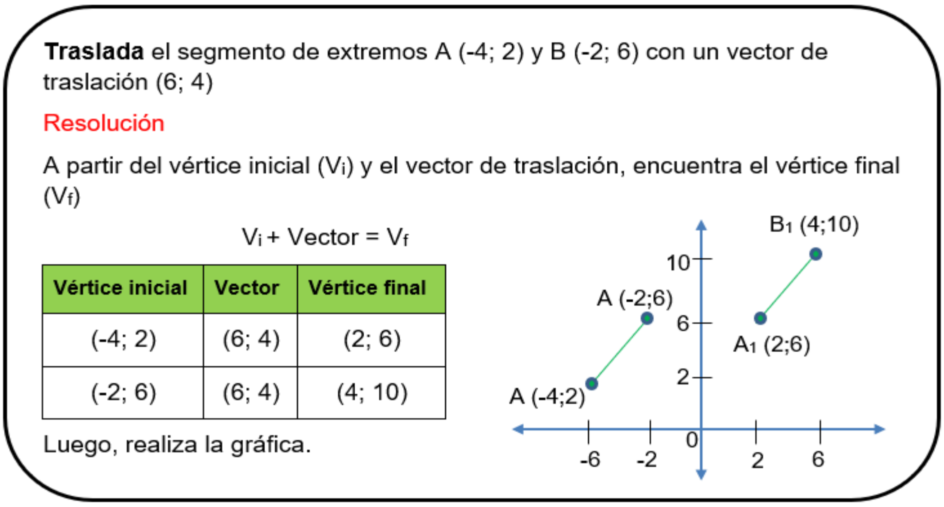
Traslación

Es el desplazamiento en línea recta realizado desde un punto inicial hasta un punto final. Algunos ejemplos de traslación pueden ir desde el movimiento de alguna pieza de ajedrez hasta los movimientos usados para la decoración, frisos.

***Figura 23*:** Definición de Transformación geométrica y Traslación.

Fuente: Adaptado de COREFO,2020, p.188.

Aquí presentamos las definiciones de transformaciones geométricas y la de traslación mediante la noción implícita de una función en la primera parte y en la segunda, solo da indicios del significado de la traslación sin mencionar al vector de dirección. Seguidamente mostramos un ejemplo en la Figura 24, donde se observa la traslación de una figura mediante un vector que no fue mencionado en la definición.



Traslada el segmento de extremos A (-4; 2) y B (-2; 6) con un vector de traslación (6; 4)

Resolución

A partir del vértice inicial (V_i) y el vector de traslación, encuentra el vértice final (V_f)

V_i + Vector = V_f

Vértice inicial	Vector	Vértice final
(-4; 2)	(6; 4)	(2; 6)
(-2; 6)	(6; 4)	(4; 10)

Luego, realiza la gráfica.

Figura 24: Ejemplo de Traslación.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.188.

Asimismo, se observa en el ejemplo resuelto de la Figura 24, que en ningún momento se explican los procesos a seguir para realizar una traslación ni el funcionamiento o rol del vector dirección. Luego, a continuación, en la Figura 25 mostramos lo que el texto presenta respecto a la noción de la composición de traslaciones sin utilizar alguna notación matemática o argumentación.

Composición de traslaciones

Se obtiene cuando el resultado S de una traslación $\vec{u}$ se le aplica otra traslación $\vec{v}$, resultando una figura final congruente a la figura inicial.

Figura 25: Definición de Composición de traslaciones.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.189.

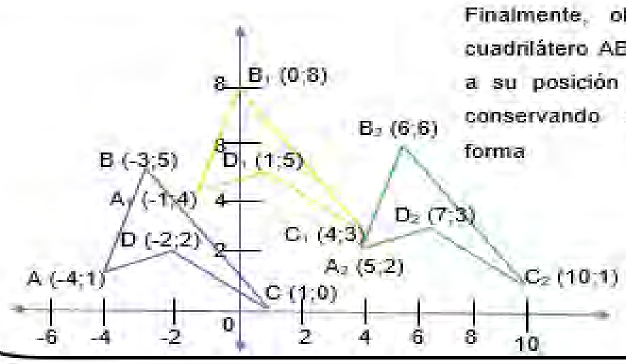
Seguidamente mostramos en la Figura 26 un ejemplo resuelto del libro de área sobre composición de traslaciones.

Traslada el cuadrilátero de extremos A (-4,1), B (-3;5), C (1,0) y D (-2;2) con una composición de vectores (3;3) y (6; -2)

Resolución:

A partir del vértice inicial (V_i) y los vectores de traslación encuentra el vértice final (V_f)

Vértice inicial	Primer vector	Vértice	Segundo vector	Vértice final
A (-4;1)	(3,3)	A_1(-1,4)	(6; -2)	A_2(5,2)
B (-3;5)	(3,3)	B_1(0;8)	(6; -2)	B_2(6;6)
C (1; 0)	(3,3)	C_1(4;3)	(6; -2)	C_2(10;1)
D (-2;2)	(3,3)	D_1(1;5)	(6; -2)	D_2(7;3)



Finalmente, observa que el cuadrilátero ABCD se trasladó a su posición final $A_2B_2C_2D_2$ conservando su tamaño y forma

Figura 26: Ejemplo de composición de traslaciones.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.189.

Se observa en la Figura 26, que no presenta explicación de los pasos sobre los procesos que deben seguir los estudiantes para realizar la composición de traslaciones.

Rotación

Una rotación corresponde al movimiento que se realiza sobre una circunferencia cuyo centro es precisamente el centro de rotación, y la amplitud del arco recorrido es el ángulo de dicha rotación.

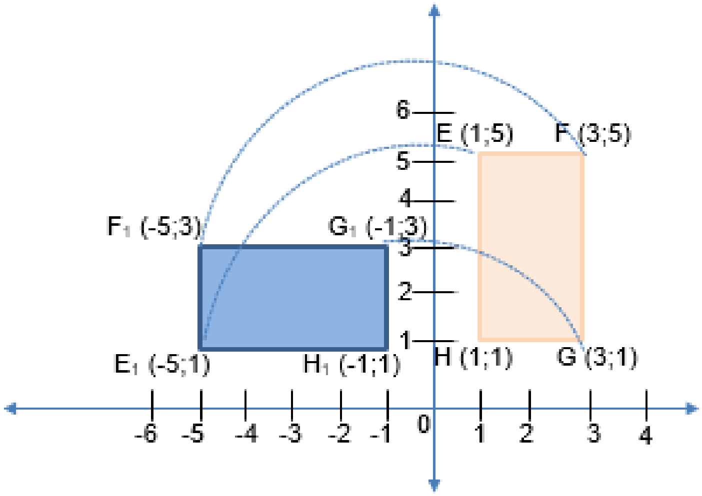
Ejemplo:

Rota 90° del cuadrilátero EFGH, de coordenadas E (1;5), F (3;5), G (3;1) y H (1;1), cuyo centro es el origen de coordenadas.

Resolución:

Punto inicial: $(x; y) \rightarrow R\ (0, 90°)$: $(-y; x)$

E (1;5)	E_1 (-5;1)
F (3;5)	F_1(-5;3)
G (3;1)	G_1(-1;3)
H (1;1)	H_1(-1;1)



En general:

Punto inicial	R (0;90°)	R (0;180°)	R (0; 270°)	R (0;360°)
(x; y)	(-x; y)	(-x; -y)	(y; -x)	(x; y)

***Figura 27*:** Definición y ejemplo de Rotación.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.190.

En la Figura 27, se presenta la definición del movimiento de rotación, donde utilizan la notación respectiva, pero no se muestra el proceso de construcción utilizando instrumentos como regla y compás. Luego se presenta en la Figura 28 un ejercicio resuelto donde se incluyen los dos movimientos de una figura en el plano.

Aplica una rotación de 270° con centro en O (0;0) y una traslación respecto al vector $\vec{v} = (0; -5)$ del polígono A (-3; -3), B (-1; -3), C (-1; -5), D (-4; -5), E (-4; 4) y F (-3; -4).

Resolución:

V_i	R (0; 270°)	Traslación $\vec{v} = (0; -5)$
A (-3; -3)	A´ (-3; 3)	A´´: (-3; 3) + (0; -5) = (-3; -2)
B (-1; -3)	B´ (-3; 1)	B´´: (-3; 1) + (0; -5) = (-3; -4)
C (-1; -5)	C´ (-5; 1)	C´´: (-5; 1) + (0; -5) = (-5; -4)
D (-4; -5)	D´ (-5; 4)	D´´: (-5; 4) + (0; -5) = (-5; -1)
E (-4; -4)	E´ (-4; 4)	E´´: (-4; 4) + (0; -5) = (-4; -1)
F (-3; -4)	F´ (-4; 3)	F´´: (-4; 3) + (0; -5) = (-4; -2)

Luego, la gráfica será la siguiente:

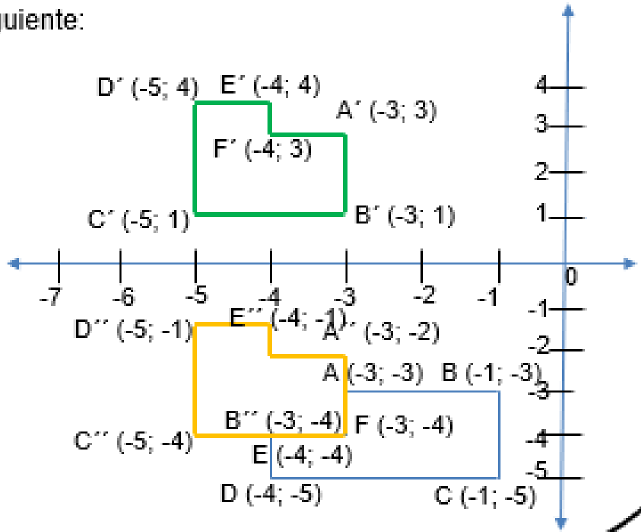


Figura 28: Ejemplo de rotación y traslación.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.191.

En la Figura 28 se muestra un proceso difuso en una tabla, no se orienta al uso de algún instrumento para realizar las transformaciones solicitadas. Como vemos, la presentación de ambos movimientos es netamente memorístico, reproductivo, dejando de lado la construcción del conocimiento, no se fomenta la indagación ni el proceso heurístico para redescubrir las propiedades ni tampoco se asocia a otros contextos, solo al intramatemático.

No se fomenta al desarrollo de habilidades ni destrezas, ni al uso de instrumentos como la regla, el compás o algún soporte o herramienta tecnológica como es el caso del *GeoGebra*. No se muestran secuencias de procesos a seguir en ninguno de los movimientos de transformación geométrica presentados, ni modelos explícitos que describan el paso a paso a seguir por parte de los estudiantes para realizar alguna transformación, sea de rotación o traslación, no permite que los estudiantes movilicen sus aprehensiones para poder resolver situaciones problemáticas, ello confirma la necesidad de generar actividades significativas, retadoras que ayuden a que realmente los estudiantes logren aprender las transformaciones geométricas.

A continuación, presentamos las actividades propuestas correspondientes al libro de actividades IV asociadas a las transformaciones geométricas en los movimientos de traslación y rotación.

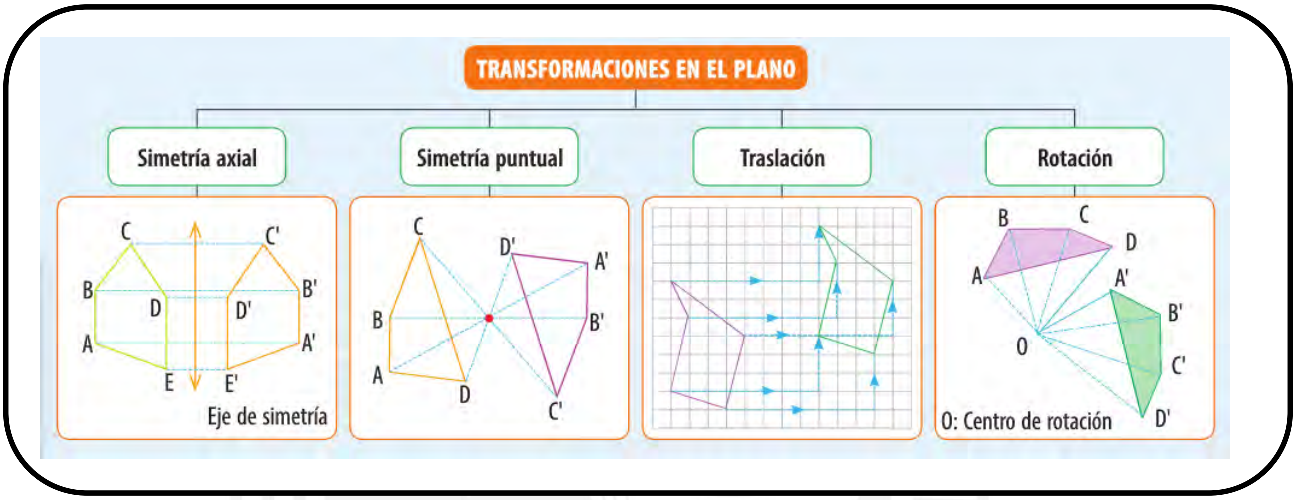
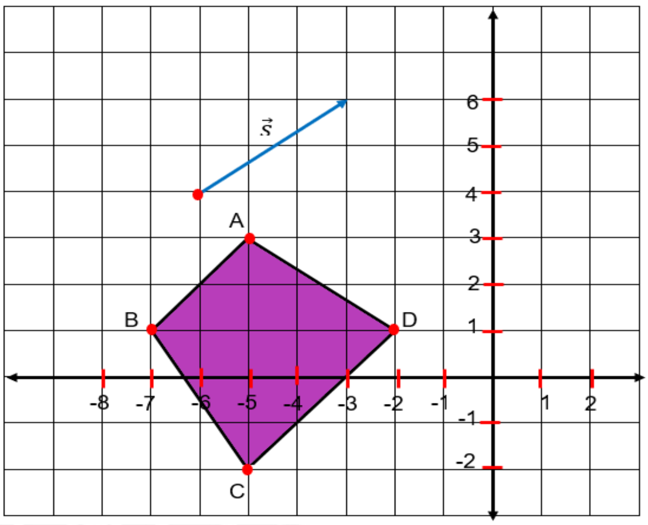


***Figura 29*: Organizador visual sobre transformaciones geométricas.**

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.168.

La Figura 29 muestra el inicio de las actividades con un organizador visual que está incompleto, sin los enlaces respectivos para su comprensión en relación con las transformaciones geométricas. A continuación, presentamos un conjunto de actividades propuestas para los estudiantes para que puedan evidenciar logros de aprendizaje relacionados a los movimientos de traslación y rotación.

Indicador	Representación
Trasladar una figura en el plano de coordenadas cartesianas.	**Aplica tus aprendizajes** **Recuerda la estrategia de aprendizaje (mapa semántico) y aplícala** **1.** El triángulo de vértices A (-5;1), B (-2;4) y C (3;7) se traslada según el vector $\vec{v}$ = (4;5). **Determina** las coordenadas del nuevo triángulo. **2.** **Traslada** el cuadrilátero mostrado según el vector $\vec{s}$ = (3;2). Luego, **calcula** la suma de las abscisas de los vértices de la figura en su posición final. 

__Cuadro 7__. Indicador y representación mostrada en el libro de actividades.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.168.

El Cuadro 7 muestra un ejercicio sobre traslación sin apoyo de cuadricula y otro con apoyo de cuadricula.

Indicador	Representación
Identificar el tipo de transformación realizada.	**Nivel 1** 1. En el polo de la imagen se observan los dibujos de 2 manzanas en diferentes posiciones  **Indica** qué tipo de transformación se realizó. a. Simetría b. Homotecia c. Traslación y rotación d. Rotación e. No se puede precisar

Cuadro 8. Indicador y representación mostrada en el libro de actividades.

Fuente: Adaptado de COREFO, 2020, p.170.

El Cuadro 8 muestra un ejercicio sobre identificación de transformación realizada.

Podemos observar que las acciones propuestas en el libro de actividades solo reproducen dos tipos de actividades a nivel reproductivo mostradas en el libro de área, recordemos que el CN promueve el desarrollo de competencias como la de resolver problemas de forma, movimiento y localización a través de capacidades de modelar, comunicar, usar estrategias y argumentar, que lamentablemente no se logra evidenciar en el conjunto de todas las actividades propuestas para el grado correspondiente, así mismo no se promueve la movilización de los diversos conocimientos o involucrados en el desarrollo del tema para que pueda evidenciarse logros de aprendizaje.

CAPÍTULO III: ANALISIS DIDÁCTICO DE LA PROPUESTA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo presentamos una propuesta de secuencia didáctica compuesta por tres situaciones, en la que explicamos la organización, la descripción y análisis didáctico de dicha propuesta, los objetivos de las actividades que lo componen, los conocimientos de los estudiantes, las acciones del profesor y una posible solución matemática como parte de la organización del análisis matemático.

La secuencia didáctica está estructurada para ser desarrollada por estudiantes de Instituciones educativas del nivel de secundaria, entre 13 y 16 años, en grados pertenecientes al VII ciclo de EBR, específicamente al cuarto de secundaria, dado que según Rutas del Aprendizaje y el Currículo Nacional, existe ya la propuesta por parte del MINEDU desarrollar todo lo concerniente a las transformaciones geométricas en el plano en dicho ciclo, para estimular el trabajo colaborativo, proponemos que las actividades sean desarrolladas en parejas bajo dos criterios: de manera voluntaria y la participación en toda la secuencia didáctica, desde el inicio. Los instrumentos que cada pareja utilizaría serían lápiz, regla, juego de escuadras, transportador y una laptop o computadora que contenga el *software GeoGebra* ya descargado.

3.1 Propuesta de organización y descripción de las situaciones.

Se proponen tres situaciones para ser desarrolladas en parejas o dúos, cuya organización y descripción de cada una de ellas lo detallamos en las siguientes tablas.

Situación	Actividades	Descripción
Situación 1	Actividad 1	Determinar el ángulo de rotación realizado por una figura luego de haber realizado un movimiento de rotación respecto a uno de sus vértices.
	Actividad 2	Determinar el ángulo de rotación realizado por una figura luego de haber realizado un movimiento de rotación respecto a un punto fuera de ella.
	Actividad 3	Determinar las componentes del vector dirección luego de haber aplicado un movimiento de traslación a una figura dada ubicada dentro de una malla cuadriculada.
	Actividad 4	Determinar las componentes del vector dirección luego de haber aplicado un movimiento de traslación a una figura dada ubicada dentro de una hoja blanca.
	Actividad 5	Determinar el ángulo de rotación realizado por una figura luego de haber realizado un movimiento de rotación respecto a un punto fuera de ella y luego las componentes del vector dirección

		luego de haber aplicado un movimiento de traslación a la figura transformada inicialmente.

Cuadro 9. Descripción de las actividades propuestas en la situación 1.

El Cuadro 9 muestra la descripción de cada una de las 5 actividades propuestas para la situación 1.

Situación	Actividades	Descripción
Situación 2	Actividad 1	Dibujar la figura transformada luego de aplicarle una rotación de un ángulo de 120° en sentido horario respecto a uno de sus vértices.
	Actividad 2	Dibujar la figura transformada luego de aplicarle una rotación de un ángulo de 120° en sentido horario respecto a un punto situado fuera de dicha figura.
	Actividad 3	Dibujar la figura transformada luego de aplicarle una traslación dado los componentes del vector dirección.
	Actividad 4	Dibujar la figura transformada luego de aplicarle una traslación dado los componentes del vector dirección y luego una rotación respecto a uno de sus vértices.

Cuadro 10. *Descripción de las actividades propuestas en la situación 2.*

El Cuadro 10 muestra la descripción de cada una de las 4 actividades propuestas para la situación 2.

Situación	Actividades	Descripción
Situación 3	Actividad única	Realizar el movimiento de rotación con el *software GeoGebra.*

Cuadro 11. Descripción de la actividad propuesta en la situación 3.

El Cuadro 11 muestra la descripción de la actividad propuesta para la situación 3 mediante el uso del *software GeoGebra*.

3.2. Propuesta de análisis de las situaciones propuestas

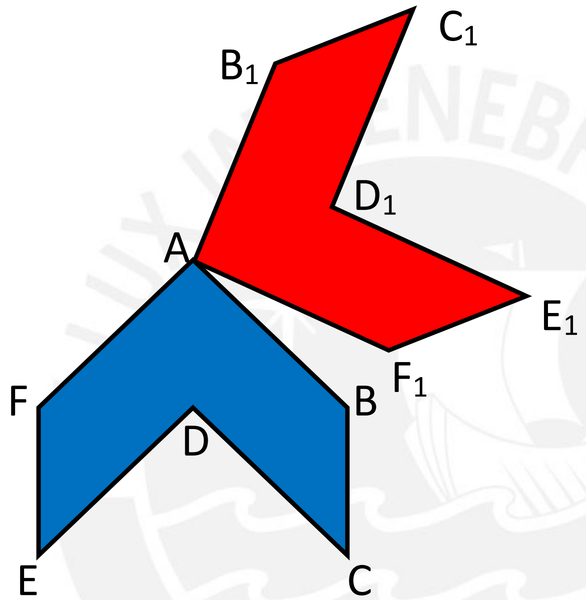
A continuación, presentaremos la propuesta del análisis de la secuencia didáctica compuesta por tres situaciones, que a su vez contempla el desarrollo de actividades donde estableceremos los objetivos, una posible solución matemática y una posible solución esperada por parte de los estudiantes.

SITUACIÓN 1

La situación 1 está compuesta por 5 actividades que presentamos a continuación:

ACTIVIDAD 1

La figura representada por $ABCDEF$ muestra un cambio de posición, luego de haber realizado una rotación respecto al vértice A, obteniéndose la figura representada por $AB_1C_1D_1E_1F_1$. Encontrar la medida del ángulo producido por dicho movimiento.



Cuadro 12. Actividad 1 de la situación 1.

Objetivo de la Actividad 1: Determinar el ángulo de rotación realizado por una figura luego de haber realizado un movimiento de rotación respecto a uno de sus vértices.

Posibles soluciones matemáticas

Para determinar el ángulo de rotación realizado por uno de los vértices de la figura $ABCDEF$, tomaremos como inicio el origen en A, para ello procedemos en primer lugar a prolongar el lado AF y el lado AF_1, con el objetivo de mostrar la abertura del ángulo rotado, procedemos a medir el ángulo FAF_1 en sentido antihorario con el transportador haciendo centro en el vértice A y tomando como lado inicial a la prolongación del lado AF y al lado final a la prolongación de AF_1. Luego, procedemos a medir el ángulo FAF_1 en sentido antihorario con el transportador haciendo centro en el vértice A y tomando como lado inicial a la prolongación del lado AF y al lado final a la prolongación de AF_1 . Se da lectura a la medida del ángulo rotado obteniéndose que:$m\angle FAF_1$ = 120° y se procede análogamente con cada uno de los vértices de la figura

$ABCDEF$. También podemos obtener un segundo ángulo de rotación, es decir, al realizar la medida de dicho ángulo, pero en sentido horario con el transportador, obtenemos que la medida del ángulo $m\angle FAF_1$= -240°. Tal como vemos en la Figura 30.

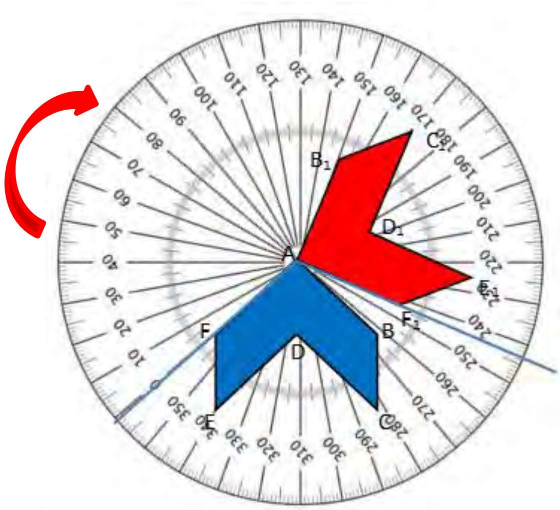


***Figura 30*: Medición del ángulo FAF_1 mediante el uso del transportador en sentido horario.**

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 1

Si fuera aplicada la Actividad 1, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva, movilicen sus saberes previos sobre polígonos y su respectiva clasificación de acuerdo a la medida de sus ángulo interiores, y así logren identificar que la figura mostrada representa a un polígono no convexo puesto que, de acuerdo a la documentación curricular, en el ciclo 7, los estudiantes deberían ser capaces de reconocer y clasificar diferentes figuras geométricas, además esta figura no convexa provocaría un pensamiento más complejo respecto a un polígono convexo porque no es común en el trabajo escolar el uso de este tipo de figuras que es mucho más cercano a objetos reales como por ejemplo la silueta de un galón militar o el ala inferior de una aeronave. Asimismo, la presentación de la presente actividad se apoya en el uso de papel blanco como fondo y colores para las figuras presentadas, puesto que, tomando los antecedentes y los libros didácticos, observamos que los autores utilizan colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano como podemos ver en la Figura 31

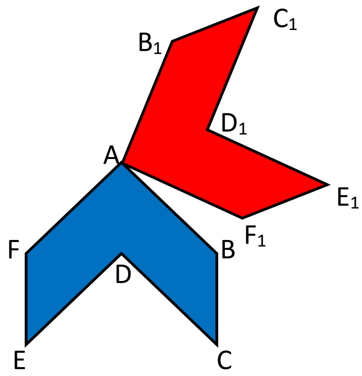


Figura 31: Uso de colores para diferenciar los movimientos realizados por la figura $ABCDEF$.

También, esperaríamos que los estudiantes realicen tratamientos en el Registro Figural utilizando la regla para realizar trazos auxiliares y el transportador, y por medio de su aprehensión secuencial encuentren las posibles medidas del ángulo de rotación de cada uno de los vértices, por ejemplo en nuestro caso, si los estudiantes movilizan sus conocimientos previos asociados a la representación y medición de un ángulo en el plano utilizando la regla y el transportador, éstos deberían lograr encontrar la medida del ángulo FAF_1 solicitado, para ello los estudiantes deberían prolongar en primer lugar los lados $\overline{AF}$ y $\overline{AF_1}$ que serán los lados del ángulo de rotación que deberían medir tal como se muestra en la Figura 32.

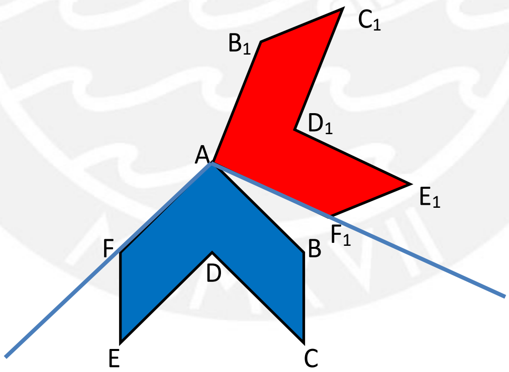


Figura 32: Prolongación de los lados $\overline{AF}$ y $\overline{AF_1}$ para determinar los lados del ángulo FAF_1.

Seguidamente, esperaríamos que los estudiantes, haciendo uso del transportador, logren medir el ángulo FAF_1, para ello los estudiantes deberían movilizar sus conocimientos previos respecto a la correcta utilización del transportador, es decir, esperaríamos que para el caso mostrado en la actividad, los estudiantes procedan en hacer coincidir el punto central del transportador con el vértice A y el lado $\overline{AF}$ con el lado inicial del ángulo, es decir que coincida con 0° y proceder a realizar la medición en sentido antihorario y encontrar su respectiva medida angular en grados sexagesimales como se muestra en la Figura 33.

.

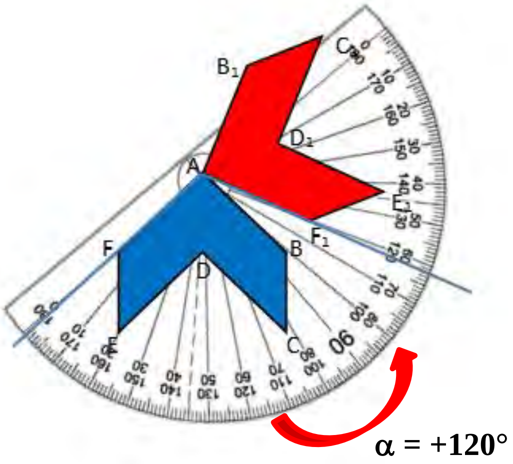
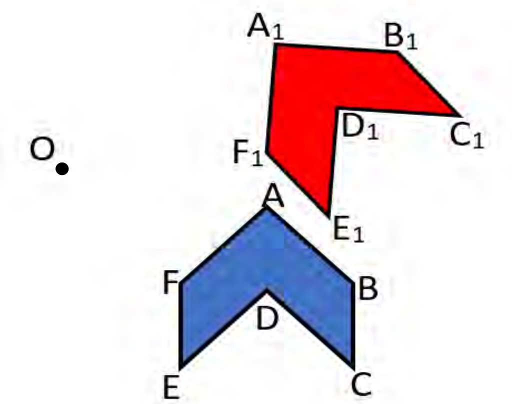


***Figura 33*:** Medición del ángulo FAF_1 en sentido antihorario.

Nuevamente por la aprehensión secuencial esperaríamos que los estudiantes logren encontrar la medida del ángulo FAF_1 con el uso del transportador, realizando una lectura correcta de esta, pero en esta oportunidad, tomando el sentido horario. Finalmente esperaríamos que los estudiantes infieran que la medida angular del movimiento de rotación obtenida para un vértice se vuelve a encontrar para cada uno de los vértices de la figura $ABCDEF$ mostrada en la Actividad 1 correspondiente a la primera situación.

ACTIVIDAD 2

Encuentra la medida del ángulo de rotación de la figura representada por $ABCDEF$ mostrado respecto al punto O



Cuadro 13. Actividad 2 de la situación 1.

Objetivo de la Actividad 2: Determinar el ángulo de rotación realizado por una figura luego de haber realizado un movimiento de rotación respecto a un punto que se encuentra fuera de la figura.

Posible solución matemática

Para determinar el ángulo de rotación realizado por la figura $ABCDE$ mostrado en la Actividad 2 respecto a un punto fuera de ella, procedemos a unir los vértices A y A_1 con el punto O generando los segmentos $\overline{OA_1}$ y $\overline{OA_2}$ que serán los lados del ángulo AOA_1 . Luego realizamos la medición del ángulo $\angle AOA_1$ en sentido antihorario con el transportador, haciendo centro en el vértice O y tomando como lado inicial el segmento $\overline{OA}$ y al lado final al segmento $\overline{OA_1}$. Finalmente Se da lectura a la medida del ángulo $\angle AOA_1$ obteniéndose que m $\angle AOA_1$ = 45°. Análogamente se procede con cada uno de los vértices de la figura $ABCDEF$ mostrada en dicha Actividad.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 2

Si fuera aplicada la Actividad 2, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva y lo realizado en la actividad anterior, logren diferenciar respecto a la ubicación del origen del ángulo de rotación, puesto que ésta se encuentra fuera del polígono a diferencia de la actividad anterior. Asimismo, la presentación de la actividad también se apoya en el uso de papel blanco como fondo y de colores para las figuras mostradas, puesto que, de manera similar a la actividad anterior, lo utilizamos para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano como podemos ver en la Figura 34.

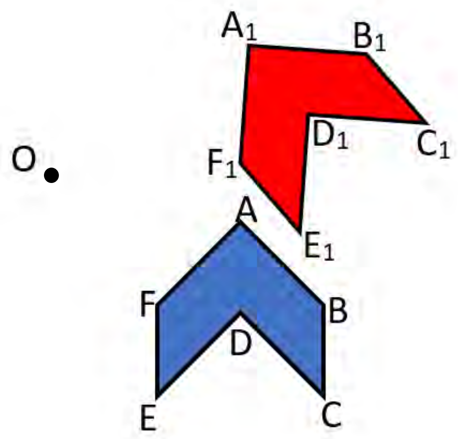


***Figura 34*:** Uso de colores para diferenciar los movimientos realizados por la figura $ABCDEF$ respecto al punto O.

También esperaríamos que los estudiantes pertenecientes al ciclo VII a quienes se les aplique dicha secuencia didáctica, por medio de su aprehensión secuencial, utilizando la regla y el transportador en la figura propuesta en la presente actividad, logren encontrar las posibles medidas del ángulo de rotación de cada uno de los vértices respecto al centro de rotación O, reconociendo que dicho punto O es el referente el cual la figura $ABCDEF$ realiza el movimiento de rotación mostrado en la actividad. Por ejemplo, para encontrar el ángulo de rotación del vértice A respecto al centro de rotación O, esperariamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos para representar el ángulo $\angle AOA_1$ utilizando la regla, uniendo para este caso el punto O que se encuentra fuera de la figura con los vértices A y A_1 obteniendo los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$ que serán los lados del ángulo $\angle AOA_1$ tal como se muestra en la Figura 35.

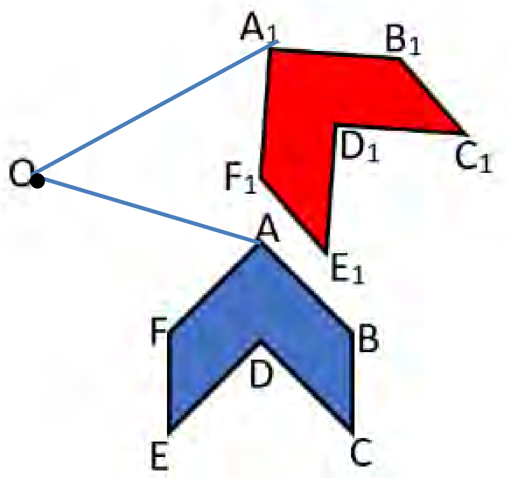


Figura 35: Unión de los lados puntos A y A_1 con el punto O para generar los lados del ángulo AOA_1.

Continuando con su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes realicen la medida del ángulo $\angle AOA_1$ con el uso del transportador, para ello deberán utilizar sus conocimientos previos respecto a la correcta utilización del transportador realizados en la actividad anterior, es decir para el caso mencionado, los estudiantes deberían hacer coincidir el punto central del transportador con el centro de rotación O y el lado OA con el lado inicial del ángulo, es decir que coincida con 0° y realicen la medición en sentido antihorario y encontrar su respectiva medida angular en grados sexagesimales tal como se muestra en la Figura 36.

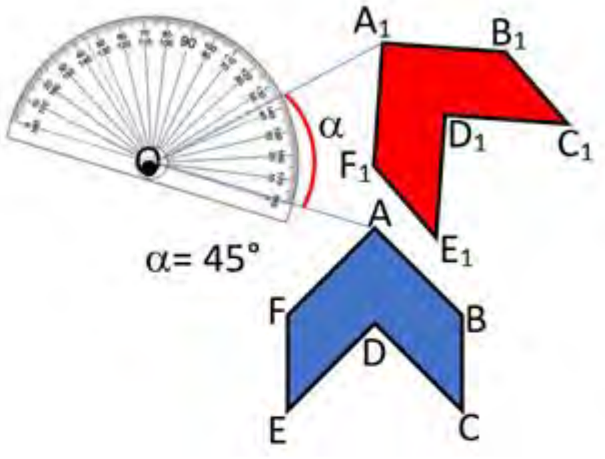
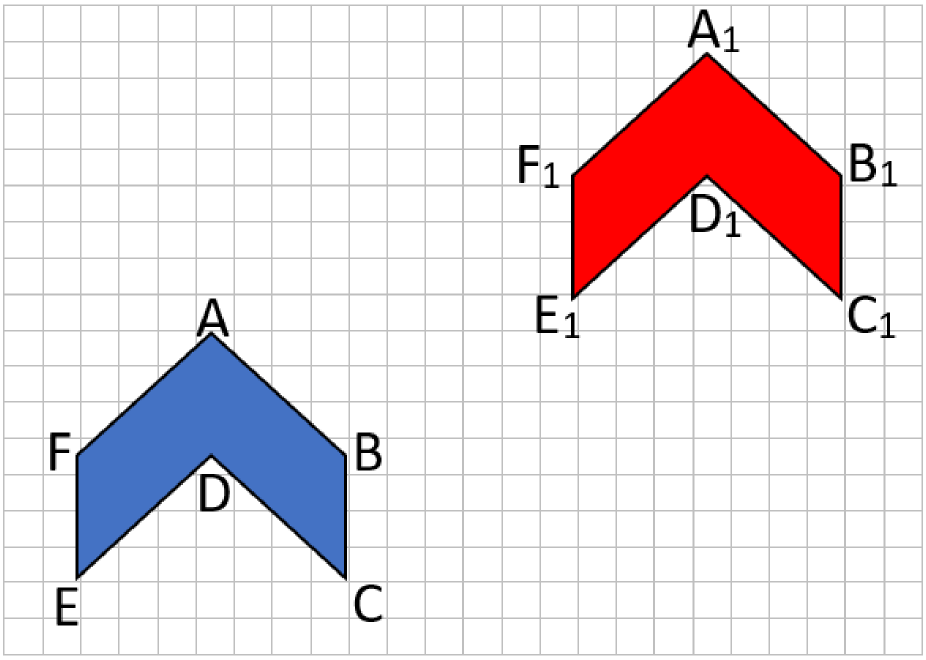


Figura 36: Medición del ángulo AOA_1 con el uso del transportador.

Finalmente esperaríamos que los estudiantes al realizar estos procesos logren deducir que la medida del ángulo AOA_1 obtenida para el vértice A respecto al punto O , tendrá la misma medida al realizar el mismo proceso para cada uno de los vértices restantes de la figura $ABCDEF$ mostrada en dicha Actividad 2 correspondiente a la situación 1.

ACTIVIDAD 3

Dada la figura representada por $ABCDEF$. Encuentra las componentes que permitan que se transforme en la figura $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tomando como patrón el lado de cada cuadrado de la cuadricula donde se encuentra dicha figura.



Cuadro 14. Actividad 3 de la situación 1.

Objetivo de la Actividad 3: Determinar las componentes del vector de dirección que permitan realizar la traslación mostrada de la figura $ABCDEF$.

Posible solución matemática

Para determinar las componentes del vector de dirección, procedemos a trazar un segmento horizontal a partir de un vértice de la figura $ABCDEF$, dicho segmento, en este caso $\overline{CP}$ tal que sea ortogonal a la proyección del vértice trasladado C_1.Trazamos a partir del vértice C_1 el segmento ortogonal al segmento $\overline{CP}$ de tal manera que $\overline{CP} \perp \overline{C_1P}$. Contabilizamos el número de cuadrados contenidos en los segmentos trazados en forma horizontal (13) y vertical (8), obteniendo las componentes 13 y 8 del vector dirección (13,8). Tal como vemos en la Figura 37.

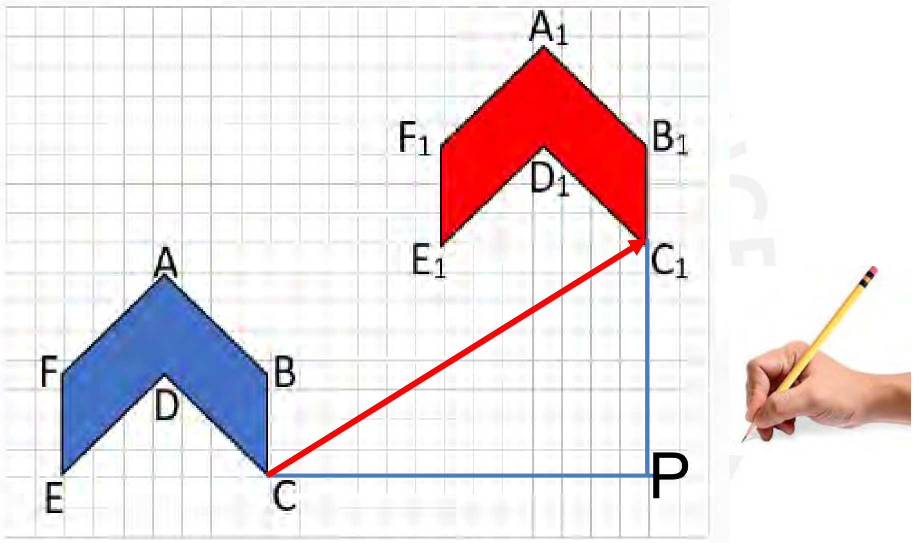


Figura 37: Componentes del vector $\overrightarrow{CC_1}$ (13,8).

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 3

Si fuera aplicada la Actividad 3, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad ha realizado un cambio de posición por medio del movimiento de traslación**.** Asimismo, la presentación de la actividad se apoya en el uso de una malla cuadriculada y en el uso de colores puesto que ayudaría a diferenciar el movimiento realizado por la figura $ABCDEF$ en el plano como podemos ver en la Figura 38

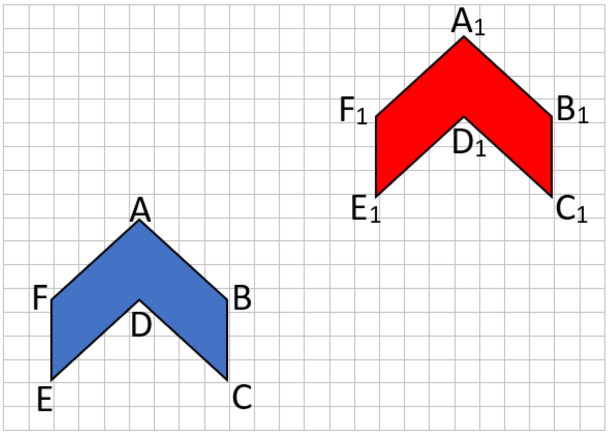


Figura 38: Uso de colores para diferenciar los movimientos realizados por la figura $ABCDEF$.

También esperaríamos que los estudiantes, por medio de su aprehensión secuencial, utilizando la regla, logren encontrar las componentes del vector de dirección mediante el desplazamiento horizontal y vertical que realizan cada uno de los vértices de la figura $ABCDEF$ mostrada en la Actividad 3 correspondiente a la situación 1 esperaríamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos respecto al orden y el signo en que se deben nombrar las componentes de dicho vector, es decir, el avanzar hacia la derecha estará asociada al signo positivo, caso contrario será negativo y avanzar o subir verticalmente hacia arriba tendrá signo positivo, caso contrario será negativo. Para nuestro caso esperaríamos que los estudiantes tomen por ejemplo el vértice C. Tracen con regla, el segmento horizontal $\overline{CP}$, apoyándose de la malla cuadriculada donde P será la proyección ortogonal del punto C_1 tal como se muestra en la Figura 39.

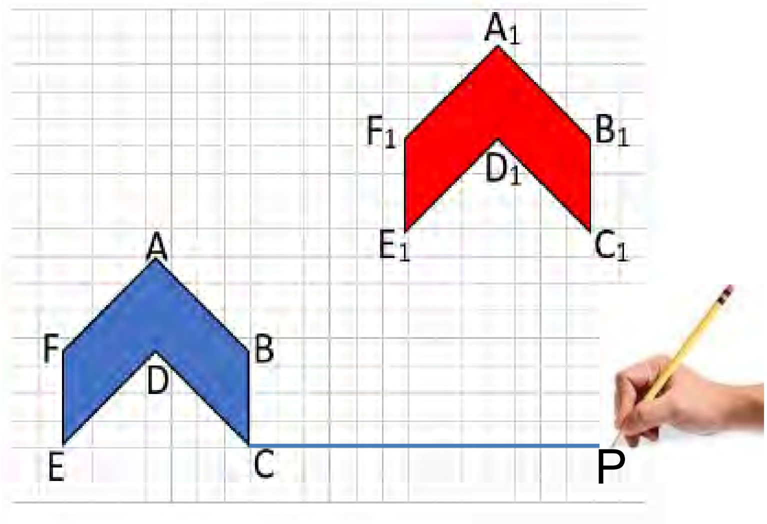


Figura 39: Trazo del segmento $\overline{CP}$ dentro de la malla cuadriculada.

Esperaríamos que los estudiantes tracen a partir del vértice C_1 el segmento ortogonal al segmento $\overline{CP}$ de tal manera que $\overline{CP} \perp \overline{C_1P}$ como vemos en la Figura 40.

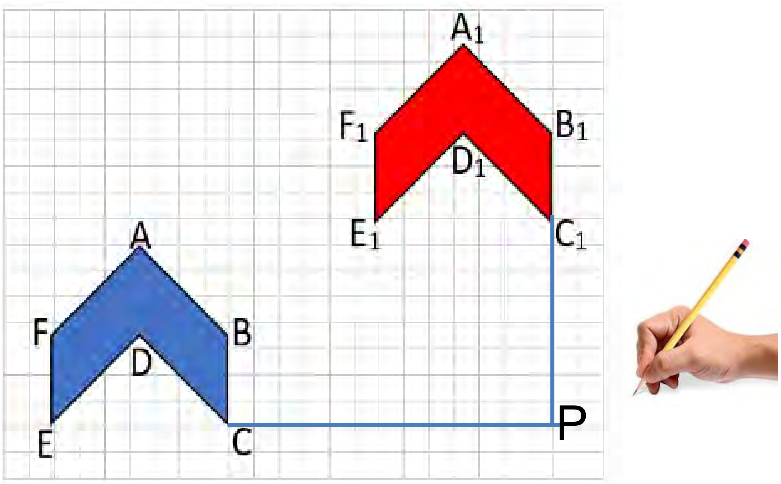
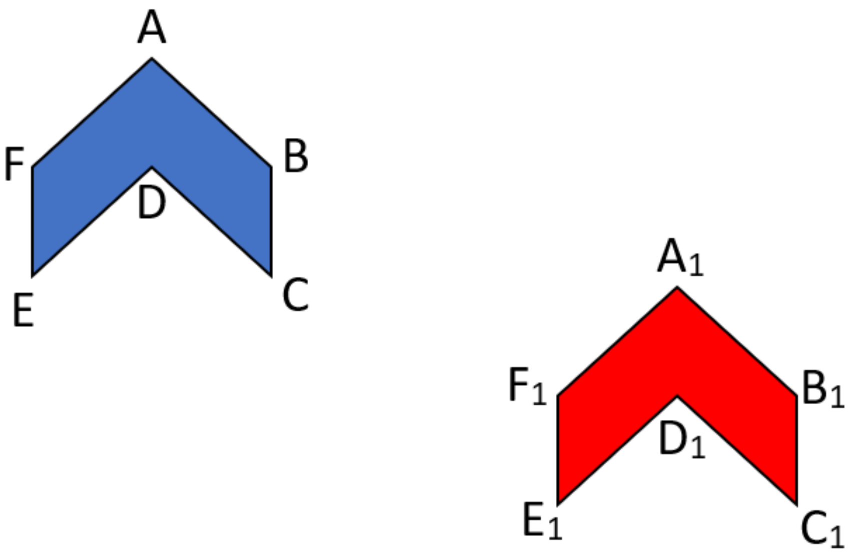


Figura 40**:** Trazo del segmento $\overline{C_1P}$ dentro de la malla cuadriculada.

Finalmente esperaríamos que los estudiantes encuentren las componentes del vector de dirección contabilizando el número de cuadrados que contienen los segmentos $\overline{CP}$ y $\overline{C_1P}$ respectivamente.

ACTIVIDAD 4

Encuentra las componentes del desplazamiento realizado por la figura representada por $ABCDEF$ que permitan que se transforme en la figura $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$



Cuadro 15. Actividad 4 de la situación 1.

Objetivo de la Actividad 4: Determinar las componentes del vector de dirección que permitan realizar la traslación mostrada de la figura $ABCDEF$.

Posible solución matemática

Para determinar las componentes del vector de desplazamiento, procedemos a trazar una línea horizontal L_1 desde el vértice A de la figura $ABCDEF$. Luego ubicamos y trazamos la perpendicular L_2 que pasa por el vértice trasladado A_1 tal que $L_1 \perp L_2$ y $\{P\} = L_1 \cap L_2$ mediante la utilización del juego de las escuadras. Procedemos a realizar las mediciones respectivas de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{A_1P}$ teniendo en consideración los signos de las componentes del desplazamiento, es decir que, si el desplazamiento es horizontal hacia la derecha, tendrá signo positivo y si desplazamiento es vertical hacia abajo, su signo será negativo tal como podemos ver en la Figura 41.

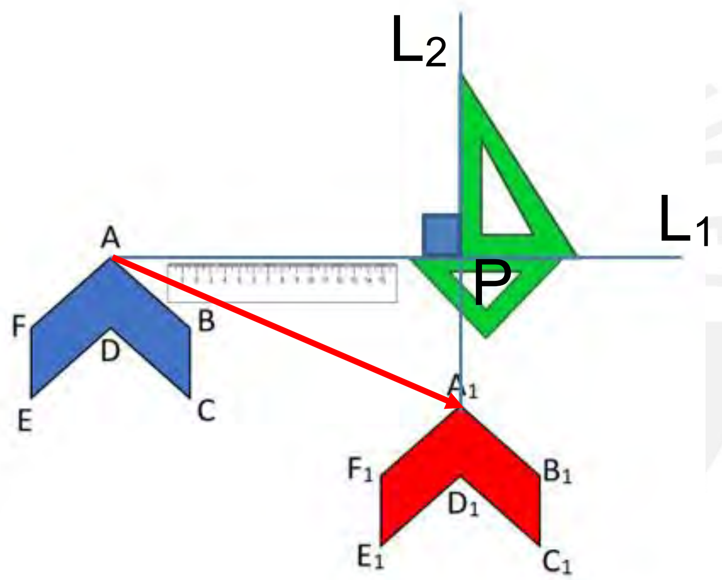


***Figura 41*:** Componentes del vector de dirección $\overrightarrow{AA_1}$.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 4

Si fuera aplicada la Actividad 4, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva, logren identificar que la figura $ABCDEF$ mostrada en la actividad 4 ha realizado un cambio de posición producto del movimiento de traslación; por lo que, los estudiantes deberán movilizar sus conocimientos previos desarrollados anteriormente pero con la dificultad de carecer de la malla cuadriculada como apoyo, pero sí el uso de colores para diferenciar los movimientos realizados como podemos ver en la Figura 42.

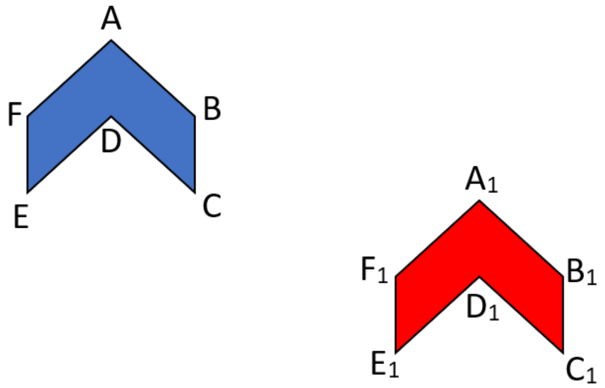


***Figura 42*:** Uso de colores para diferenciar los movimientos realizados por la figura $ABCDEF$.

También esperaríamos que por medio de su aprehensión secuencial los estudiantes logren encontrar las componentes del vector de dirección utilizando como medio la regla y el juego de escuadras, esperaríamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos utilizados en la actividad 3, respecto al orden y el signo en que se deben nombrar las componentes de dicho vector. Para nuestro caso, los estudiantes deberían trazar por ejemplo la recta horizontal L_1 que pase por un vértice de la figura $ABCDEF$ mostrada en la presente actividad, por ejemplo, tomando el vértice A tal como se muestra en la Figura 43.

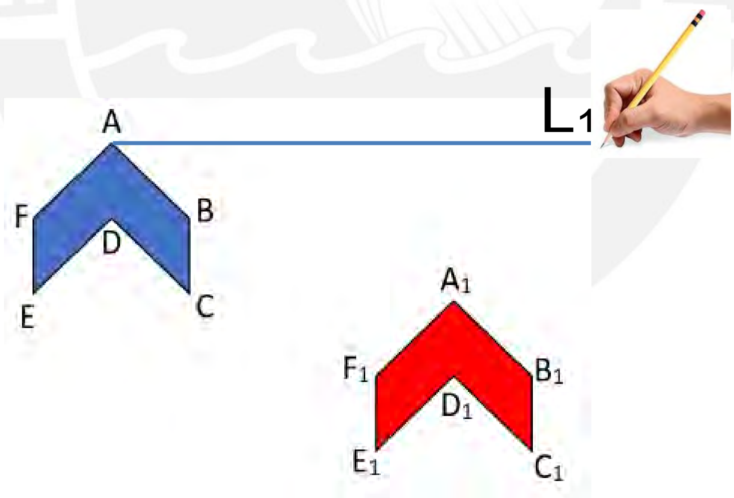


***Figura 43*:** Trazo de la recta horizontal L_1 que pasa por el punto A.

Esperaríamos que los estudiantes utilizando adecuadamente el juego de las escuadras, tracen una segunda recta L_2 perpendicular a la recta L_1 trazada en el paso anterior y a su vez que ésta pase por el vértice A_1, perteneciente a la figura transformada, tal que el punto P sea el punto de intersección de dichas rectas perpendiculares, como vemos en la Figura 44.

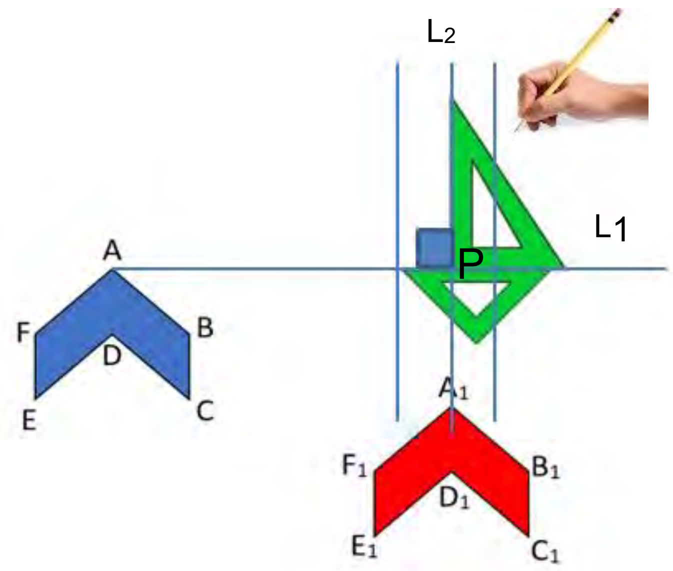


Figura 44: Trazo de la recta L_2 que sea perpendicular a L_1 y que pasa por el vértice A_1.

Continuando con su percepción secuencial, esperaríamos que los estudiantes encuentren las componentes del vector de dirección midiendo en centímetros con la regla los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{A_1P}$ respectivamente tal como vemos en la Figura 45.

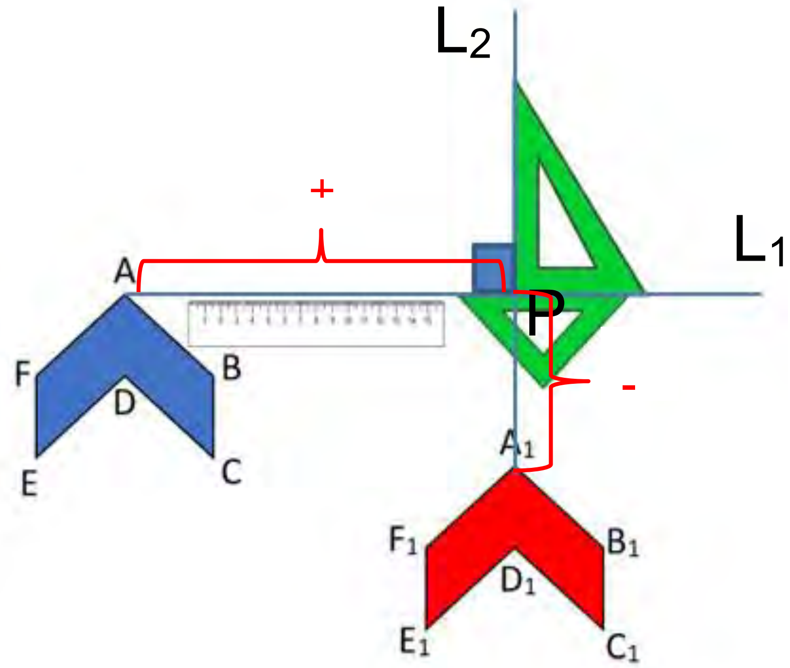
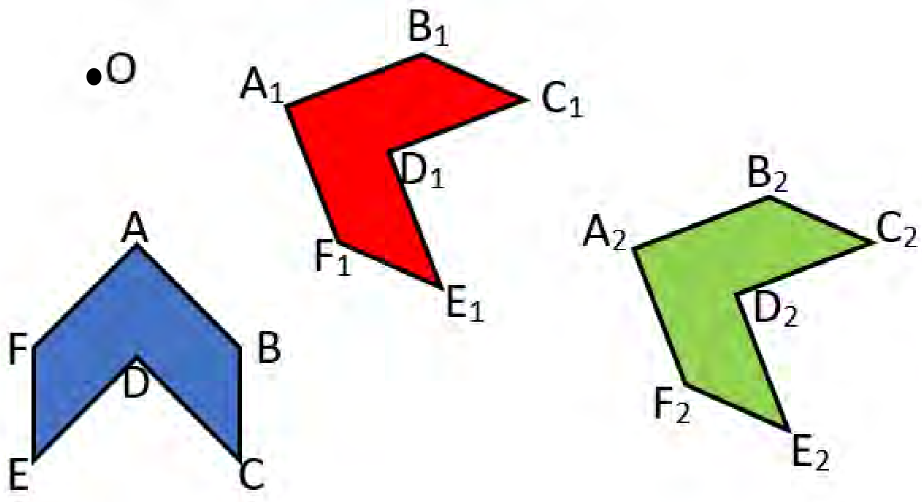


Figura 45: Medición de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PA_1}$.

ACTIVIDAD 5

Encuentra la medida aproximada del ángulo de rotación respecto al punto O de la figura representada por $ABCDEF$ y las componentes del desplazamiento que permitan que la figura transformada $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ se convierta finalmente en $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$



Cuadro 16. Actividad 5 de la situación 1.

Objetivo de la Actividad 5: Determinar el ángulo de rotación y las componentes del vector de dirección realizado por la figura $ABCDEF$ luego de haber realizado un movimiento de rotación y traslación respectivamente.

Posible solución matemática

Para encontrar el ángulo de rotación, procedemos a unir los vértices A y A_1 con el punto O obteniendo los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$. Luego procedemos a medir el ángulo $\angle AOA_1$ en sentido antihorario con el transportador haciendo centro en el vértice O y tomando como lado inicial lado $\overline{OA}$ y al lado final al lado $\overline{OA_1}$ obteniendo que m$\angle AOA_1$ = 80°. A continuación, encontraremos las componentes del vector de traslación de este movimiento inicial realizado, para ello trazaremos líneas rectas L_1 y L_2 tal que $L_1 \perp L_2$ con ayuda del juego de escuadras, entre un vértice rotado E_1 y luego trasladado E_2 y encontrando un punto P, tal que {P} = $L_1 \cap L_2$. Luego procedemos a medir los segmentos $\overline{PE_2}$ y $\overline{PE_1}$ que correspondería a las componentes del vector de traslación teniendo en consideración los signos de la orientación de las componentes del desplazamiento realizado por la figura $ABCDEF$ transformada por un movimiento de rotación.

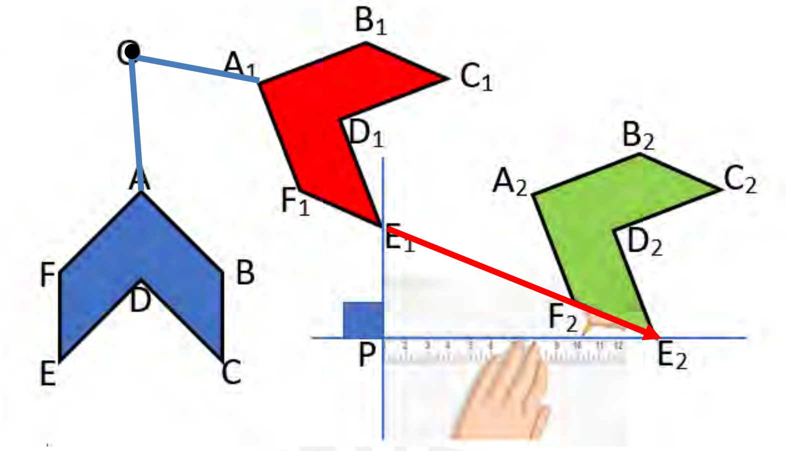


Figura 46: Generación del ángulo de rotación AOA_1 y las componentes del vector dirección.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 5

Si fuera aplicada la Actividad 5, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura $ABCDEF$ mostrada en la presente actividad, ha realizado un movimiento de rotación y luego un movimiento de traslación. Es decir, un movimiento compuesto. Asimismo, la presentación de la actividad también se apoya en el uso de papel blanco y en el uso de colores en las figuras para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano como podemos ver en la Figura 47

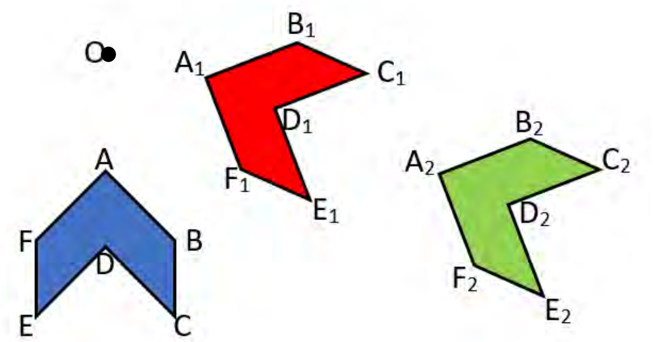


Figura 47: Uso de colores para diferenciar los movimientos realizados por la figura $ABCDEF$.

También esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión secuencial utilicen la regla y el transportador para lograr encontrar la medida del ángulo de rotación de la figura $ABCDEF$ mostrada en la presente Actividad 5 respecto al centro de rotación O ubicada fuera de la figura, por ejemplo, para encontrar el ángulo de rotación del vértice A respecto al centro de rotación O, esperamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos de cómo se representa el ángulo $\angle AOA_1$ uniendo el punto O con A y A_1 y obteniendo los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$ que serán los lados del ángulo a medir tal como se muestra en la Figura 48.

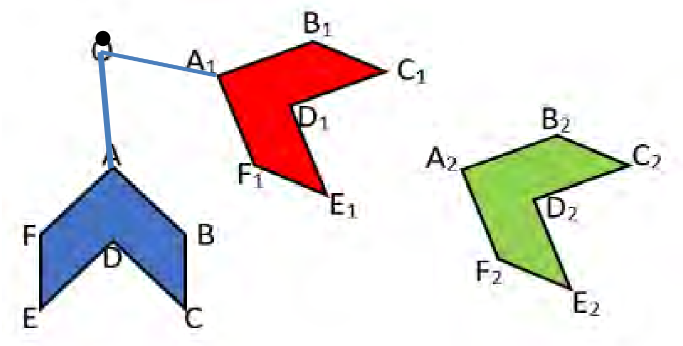


Figura 48: Unión de los lados puntos A y A_1 con el punto O para generar los lados del ángulo $\angle AOA_1$.

Luego esperaríamos que los estudiantes realicen la medida de dicho ángulo $\angle AOA_1$ con el transportador, para ello deberán utilizar sus conocimientos previos respecto a la correcta utilización del transportador, es decir, esperamos que para el caso mencionado, los estudiantes hagan coincidir el punto central del transportador con el centro de rotación O y el lado OA con el lado inicial del ángulo, es decir que coincida con 0° y proceder a realizar la medición en sentido antihorario y encontrar su respectiva medida angular tal como se muestra en la Figura 49.

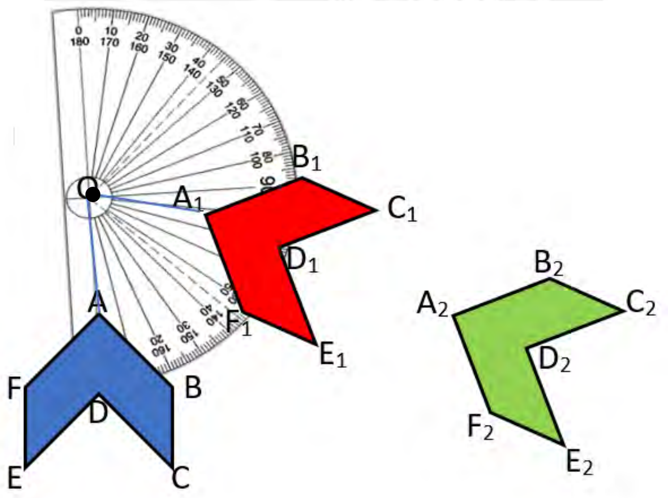


Figura 49: Medición del ángulo $\angle\, AOA_1$ con el uso del transportador.

Continuando con su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes realicen tratamientos utilizando la regla y el juego de escuadras para realizar trazos auxiliares y logren encontrar las componentes del vector de dirección, esperaríamos que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos respecto al orden y el signo en que se deben nombrar las componentes de dicho vector, así como el aprestamiento en la utilización del juego de escuadras respecto a la perpendicularidad. Para nuestro caso esperaríamos que los estudiantes tomen uno de los vértices de la figura rotada, por ejemplo, el vértice E_1 y tracen la recta vertical L_1. Luego con ayuda del juego de escuadras puedan trazar una segunda recta L_2 perpendicular a L_1 y que pase por E_2, tal que P sea la intersección de dichas rectas perpendiculares tal como se muestra en la Figura 50.

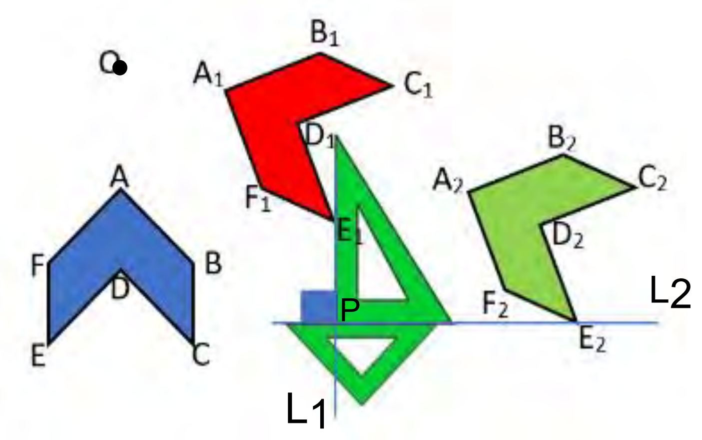


Figura 50: Trazo de las rectas L_1 y L_2 tal que $L_1 \perp L_2$.

Finalmente procedan a realizar las mediciones de los segmentos $\overline{E_1P}$ y $\overline{PE_2}$ teniendo en cuenta el orden y signos de dichas componentes tal como mostramos en la Figura 51.

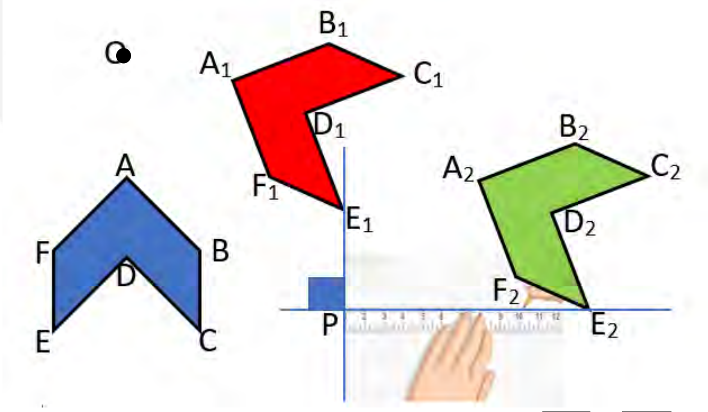


Figura 51: Medición de los segmentos $\overline{E_1P}$ y $\overline{PE_2}$.

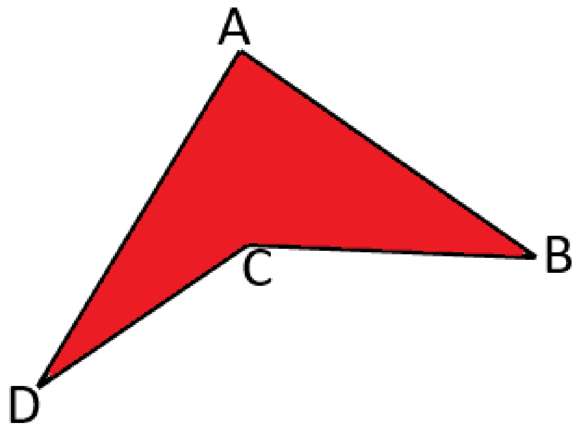
Los estudiantes deberán indicar las componentes del vector de dirección en función a las medidas obtenidas de los segmentos $\overline{E_1P}$ y $\overline{PE_2}$ respectivamente.

SITUACIÓN 2

La situación 2 está compuesta por 4 actividades que presentamos a continuación:

ACTIVIDAD1

Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de rotar 120° en sentido horario respecto al vértice B y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 17. Actividad 1 de la situación 2.

Objetivo de la Actividad 1: Realizar un movimiento de rotación respecto a uno de sus vértices de la figura $ABCD$

Posible solución matemática

Procedemos en primer lugar a prolongar los segmentos $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ con el fin de obtener los lados iniciales de los ángulos de rotación a representar teniendo como centro de rotación al vértice B. Seguidamente representamos con regla y transportador el ángulo de rotación de 120° en sentido horario para la prolongación realizada en el segmento $\overline{BA}$. A continuación, representamos con regla y transportador el ángulo de rotación de 120° en sentido horario para las prolongaciones restantes. Luego Utilizamos el compás para trasladar cada uno de los vértices según el ángulo de rotación representado, para ello se deberá colocar la punta metálica en el vértice B y el lápiz en cada uno de los vértices restantes de la figura, procediendo a rotar y obtener los puntos de intersección A_1, C_1 y D_1 de intersección de cada arco con los lados finales de cada ángulo representado. Finalmente procedemos a unir los puntos $BA_1D_1C_1$ para obtener la figura transformada por medio de una rotación respecto al vértice B como se ve en la Figura 52.

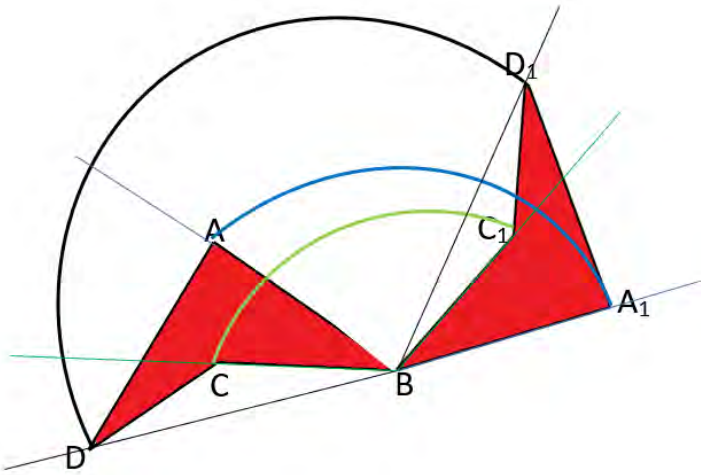


***Figura 52*:** Rotación de la figura $ABCD$ en sentido horario respecto al vértice B.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 1

Si fuera aplicada la Actividad 1, esperaríamos que los estudiantes al desarrollar la presente actividad, por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad representa a un polígono no convexo. Asimismo, la presentación de la actividad se apoya en el uso de papel blanco para realizar tratamientos en el registro figural y colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano tal como mostramos en la Figura 53.

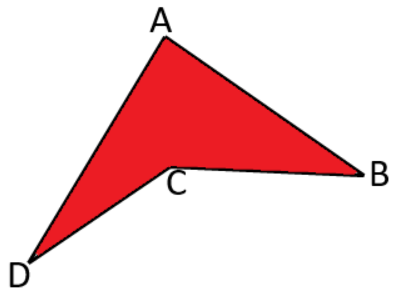


***Figura 53*:** Uso de papel blanco y color en la figura $ABCD$.

Luego por su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de instrumentos como la regla, el compás y el transportador realicen tratamientos mediante el trazado de líneas auxiliares así como arcos de circunferencia y puedan dibujar la figura transformada del polígono $ABCD$, para el cual tendrían que movilizar sus conocimientos previos asociados a la representación y medición de ángulos utilizando el transportador así como el aprestamiento en el uso adecuado de dicho instrumento y el compás, esperamos que los estudiantes representen para cada vértice del polígono no convexo y con centro en el vértice B ángulos de 120° en sentido horario, para ello deberán prolongar a partir del vértice B los segmentos $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente tal como mostramos en la Figura 54.

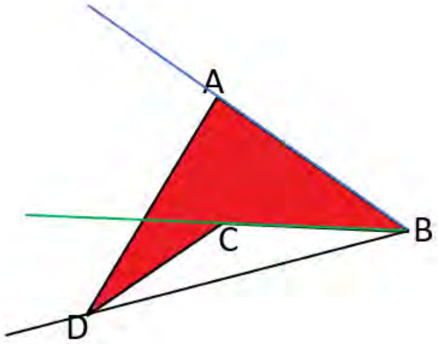


***Figura 54*:** Prolongación de los segmentos $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$.

Esperaríamos que los estudiantes representen el ángulo de rotación de 120° en sentido horario mediante uso del transportador, por ejemplo, para el caso del segmento $\overline{BA}$ prolongado, deberán colocar el centro de dicho instrumento en el vértice B y el lado inicial BA del ángulo en 0° y realizar la respectiva medición en grados sexagesimales en sentido horario tal como mostramos en la Figura 55.

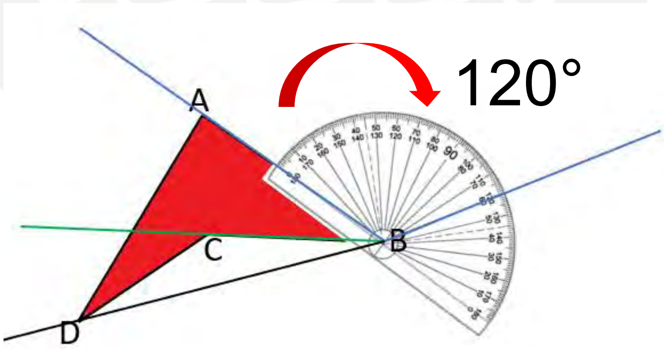


***Figura 55*:** Representación del ángulo de 120°en sentido horario.

Análogamente esperaríamos que realicen el mismo procedimiento para cada uno de los segmentos restantes tal como se muestra en la Figura 56.

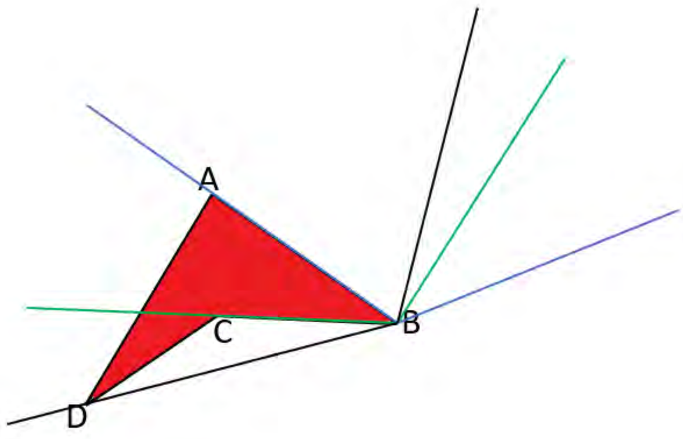


Figura 56: Representación del ángulo de 120° en sentido horario de todos los vértices respecto al vértice B.

Seguidamente, mediante el uso del compás y haciendo centro en el vértice B y tomando como punto de paso cada uno de los vértices del polígono $ABCD$, esperaríamos que los estudiantes tracen los arcos de 120° respectivamente, luego encuentren los puntos de intersección A_1, C_1 y D_1 de dichos arcos con los lados finales de cada ángulo representado tal como mostramos en la Figura 57.

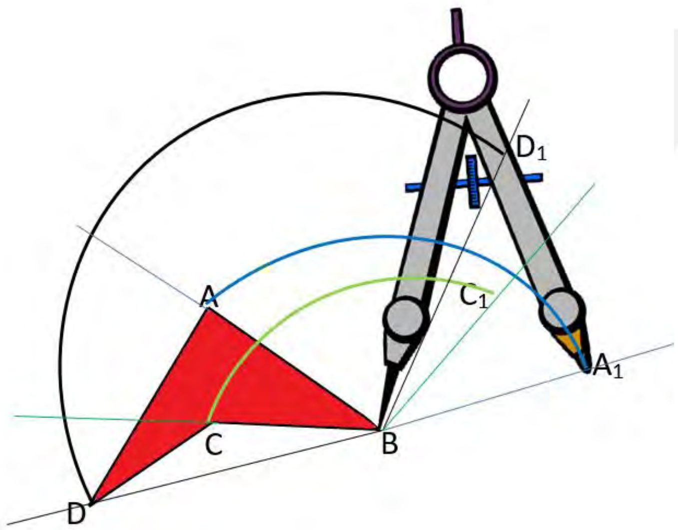


Figura 57: Representación de los arcos de 120° en sentido horario de todos los vértices respecto al vértice B.

Esperaríamos que los estudiantes unan los puntos A_1, C_1 y D_1 con el vértice B y poder obtener la figura transformada del polígono $ABCD$ producto de un movimiento de rotación. Es decir, puedan inferir que la figura $A_1B_1C_1D_1$ luego de una serie de tratamientos realizados con la regla y el compás, es la transformada producto de una rotación, en este caso la figura del polígono $ABCD$ ha tenido una modificación posicional, cambiado de orientación respecto a su posición inicial tal como mostramos en la Figura 58.

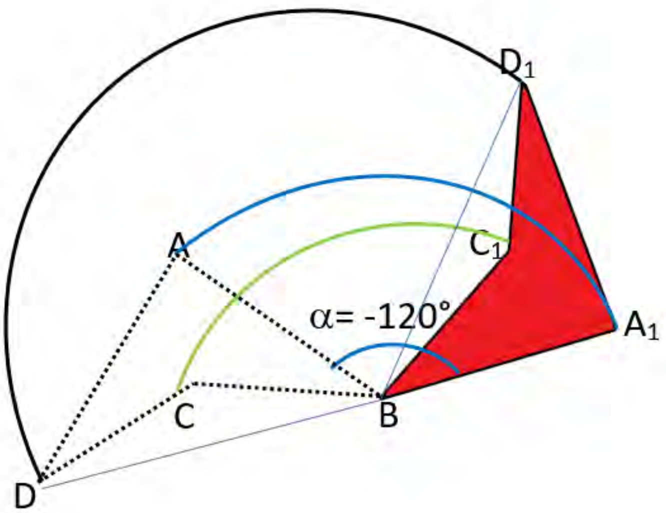
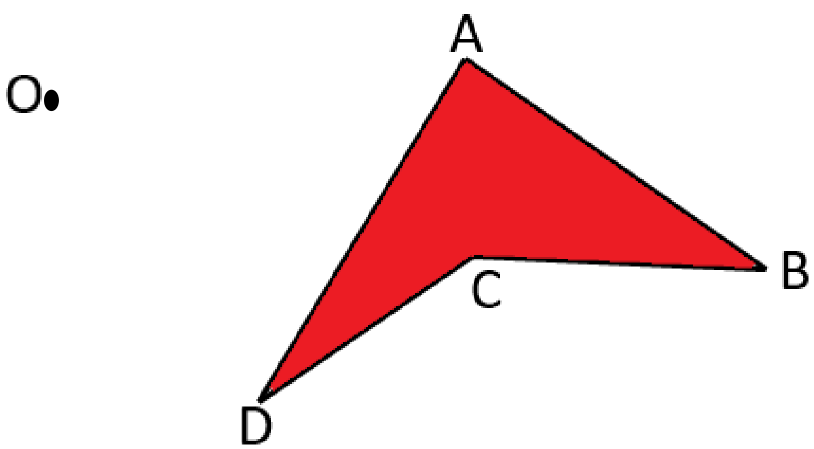


Figura 58: Representación de la figura transformada por una rotación de 120° en sentido horario respecto al vértice B.

Esperaríamos así mismo que los estudiantes mediante su aprehensión discursiva puedan describir con detalle cada uno de los procesos seguidos en la representación de la figura transformada.

ACTIVIDAD 2

Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$A luego de rotar 120° en sentido horario respecto al punto O y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 18. Actividad 2 de la situación 2.

Objetivo de la Actividad 2: Realizar un movimiento de rotación respecto a un punto fuera de la figura $ABCD$.

Posible solución matemática

Procedemos a unir con segmentos cada uno de los vértices de la figura representada en la presente actividad con el punto O obteniendo los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ que serán los lados iniciales del ángulo de rotación a representar. Seguidamente utilizando la regla y el transportador, representamos el ángulo de rotación de 120° en sentido horario con centro de rotación en O y lado inicial OA . Continuaremos con la representación de dicho ángulo para los demás vértices restantes. Utilizaremos el compás para trasladar cada uno de los vértices según el ángulo de rotación representado, para ello se deberá colocar la punta metálica en el punto O y el lápiz en cada uno de los vértices de la figura presentada en la actividad, procediendo a girar y obtener los puntos de intersección $A_1, B_1, C_1,$ y D_1 de cada arco con los lados finales de cada ángulo representado. Finalmente procedemos a unir los puntos $A_1B_1C_1D_1$ para obtener la figura transformada por medio de una rotación respecto al punto O tal como se muestra en la Figura 59.

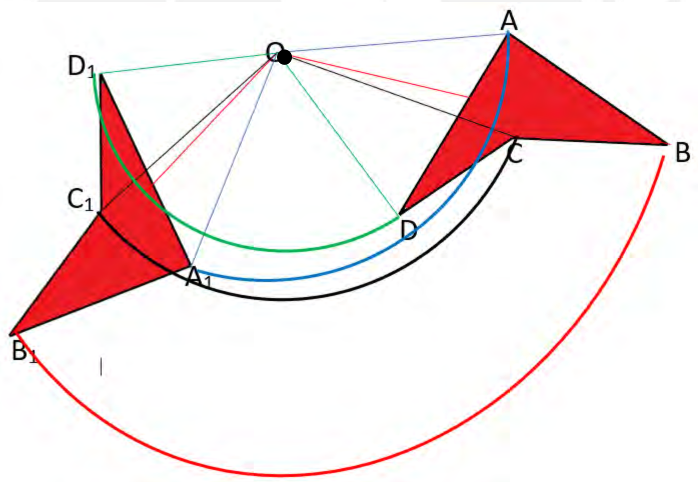


Figura 59: Representación de la figura transformada por una rotación de 120° en sentido horario respecto al punto O.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 2

Si fuera aplicada la Actividad 2, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad representa a un polígono no convexo. Así mismo, la presentación de la actividad se apoya en el uso de papel blanco como fondo para realizar tratamientos en el registro figural mediante el trazo de líneas auxiliares y arcos de circunferencia y colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano tal como mostramos en la Figura 60.

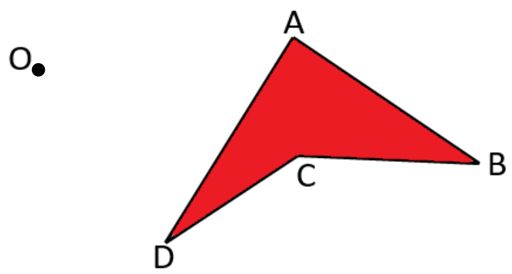


Figura 60: Uso de papel blanco y color en la figura $ABCD$.

Luego por su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de instrumentos como la regla, el compás y el transportador puedan dibujar la figura transformada del polígono $ABCD$ respecto al punto O que se encuentra fuera de la figura que representa al polígono mostrado en la actividad, para el cual tendrán que movilizar sus conocimientos previos en la representación y medición de ángulos utilizando el transportador así como el aprestamiento en el uso adecuado del compás, esperaríamos que los estudiantes unan con segmentos cada vértice de la figura $ABCD$ con el punto O generando los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$,$\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ tal como mostramos en la Figura 61.

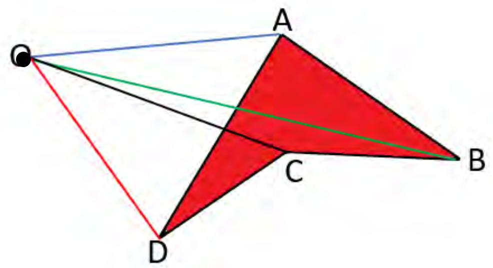


Figura 61: Generación de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$,$\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.

Esperaríamos que los estudiantes representen el ángulo de rotación de 120° en sentido horario con centro de rotación en el punto O mediante uso de la regla y del transportador, por ejemplo, para el caso del segmento $\overline{OA}$ deberán colocar el centro de dicho instrumento en el punto O y el lado inicial $\overline{OA}$ en 0° y realizar la respectiva medición en grados sexagesimales, tal como mostramos en la Figura 62.

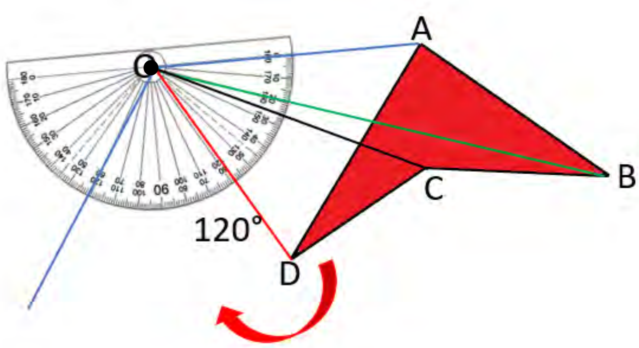


***Figura 62*:** Representación del ángulo de 120° en sentido horario.

Análogamente deberán realizar el mismo procedimiento para cada uno de los segmentos restantes, tal como se muestra en la Figura 63.

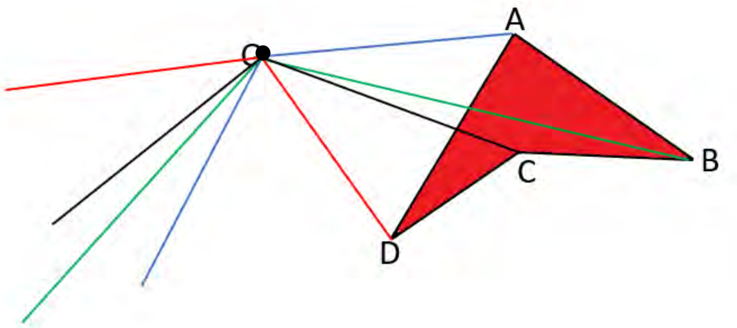


***Figura 63*:** Representación del ángulo de 120° respecto al punto O y los segmentos $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.

Seguidamente, mediante el uso del compás y haciendo centro en el centro de rotación O y el punto de paso en cada uno de los vértices A, B, C y D los estudiantes deberían dibujar los arcos respectivos de 120° y encontrar los puntos de intersección A_1, C_1 y D_1 de dichos arcos con los lados finales de cada ángulo representado, tal como mostramos en la Figura 64.

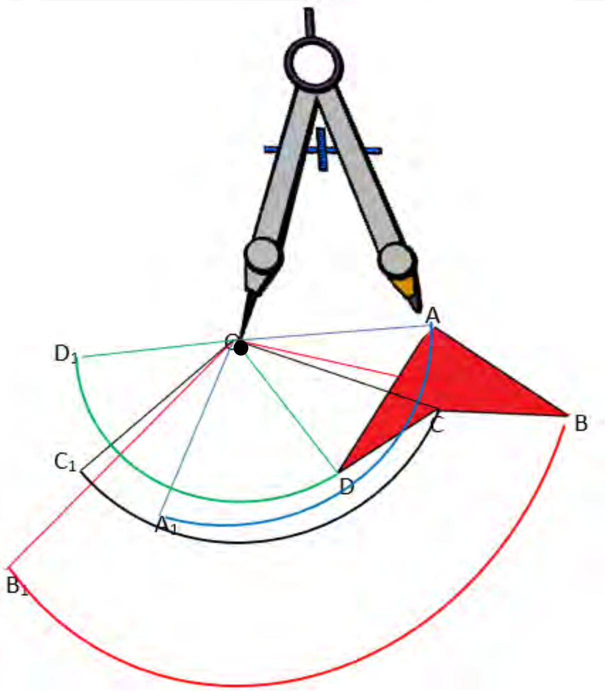


***Figura 64*:** Representación de los arcos de 120° en sentido horario de todos los vértices respecto al vértice B.

Esperaríamos que los estudiantes unan los puntos $A_1B_1C_1D_1$ y poder obtener que la figura representada por $ABCD$ ha realizado un movimiento de rotación mediante su aprehensión operatoria de posición dado que puedan inferir que la figura $A_1B_1C_1D_1$ luego de una serie de tratamientos realizados con la regla y el compás, es la transformada producto de una rotación respecto al punto O, en este caso la figura $ABCD$ ha realizado una modificación posicional cambiando de orientación respecto a su posición inicial tal como mostramos en la Figura 65.

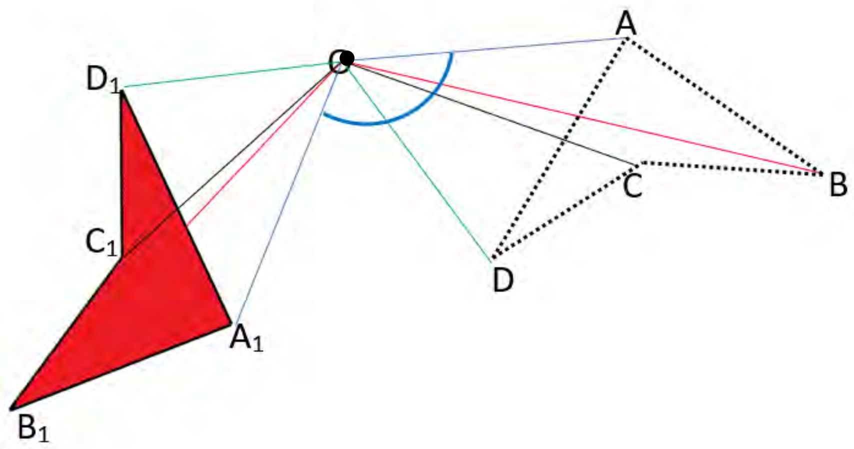
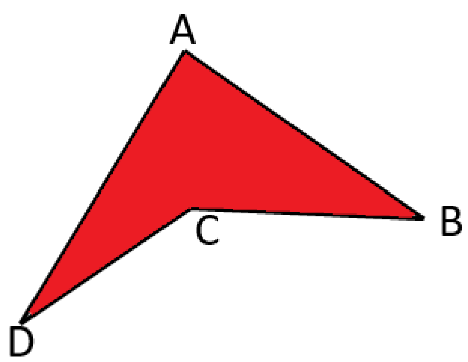


Figura 65: Representación de la figura transformada por una rotación de 120° en sentido horario respecto al punto O.

Asimismo, esperaríamos que los estudiantes mediante su aprehensión discursiva puedan describir con detalle cada uno de los procesos seguidos en la representación de la figura transformada.

ACTIVIDAD 3

Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de realizar un desplazamiento de 8cm en línea horizontal hacia la derecha y 3cm en línea vertical hacia arriba y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 19. Actividad 3 de la situación 2.

Objetivo de la Actividad 3: Realizar un movimiento de traslación dada las componentes del vector de dirección a la figura $ABCD$.

Posible solución matemática

Procedemos a trazar una línea horizontal L_1 desde el vértice A y a su vez una línea vertical L_2 perpendicular a dicha línea con ayuda del juego de escuadras, cuya intersección es el punto P, es decir $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2 = \{P\}$ y $\overline{AP}$ = 8cm. Luego procedemos a medir a partir del punto P, 3cm en forma vertical hacia arriba, de tal forma que el punto extremo de este segmento será el punto A_1, obteniendo $\overline{PA_1}$ = 3cm. Análogamente procederemos de la misma manera para cada uno de los vértices de la figura $ABCD$ y encontrar los puntos B_1, C_1 y D_1 restantes. Finalmente uniremos los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 y así poder obtener la figura transformada por un movimiento de traslación tal como mostramos en la Figura 66.

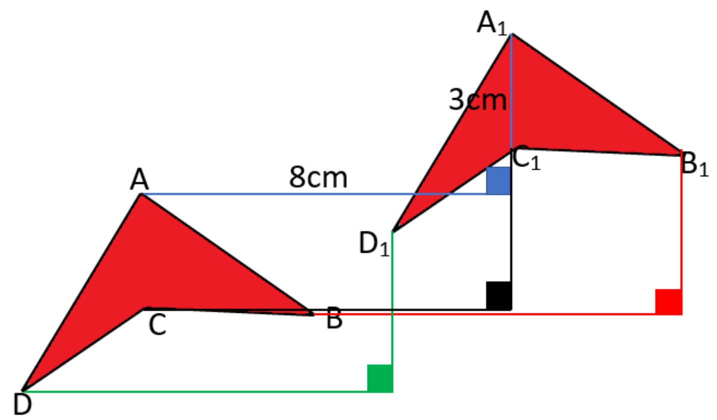


Figura 66: Traslación de la figura $ABCD$.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 3

Si fuera aplicada la Actividad 3, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad representa a un polígono no convexo. Así mismo, la presentación de la presente actividad también se apoya en el uso de papel blanco para realizar tratamientos en el registro figural y colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano tal como mostramos en la Figura 67.

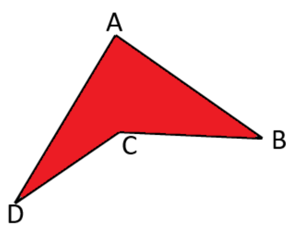


Figura 67: Uso de papel blanco y color en la figura $ABCD$.

Luego por su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de instrumentos como la regla y el juego de escuadras puedan dibujar la figura transformada del polígono $ABCD$, para el cual tendrán que movilizar sus conocimientos previos en la representación de rectas perpendiculares así como el aprestamiento en el uso adecuado del juego de escuadras, se espera que tracen a partir de un vértice , por ejemplo el vértice A, una línea horizontal L_1 y a su vez una línea vertical L_2 perpendicular a dicha línea con ayuda del juego de escuadras, cuya intersección sea el punto P, es decir $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2$ = $\{P\}$ y proceder a medir el segmento $\overline{AP}$ utilizando la regla tal como se ve en la Figura 68.

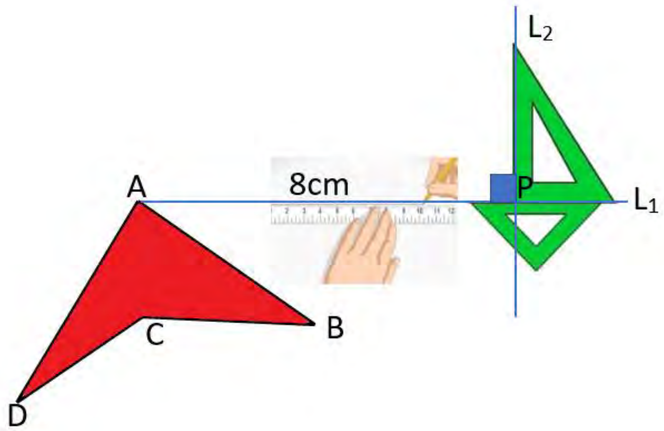


Figura 68: Representación de las rectas $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2$ = $\{P\}$ y medición del segmento $\overline{AP}$.

Luego esperaríamos que los estudiantes procedan a medir un segmento perteneciente a la recta L_2,a partir del punto P, cuya medida sea de 3cm en forma vertical hacia arriba, de tal forma que el punto extremo de este segmento será el punto A_1, obteniendo así que el segmento $\overline{PA_1}$ = 3cm como se ve en la Figura 69.

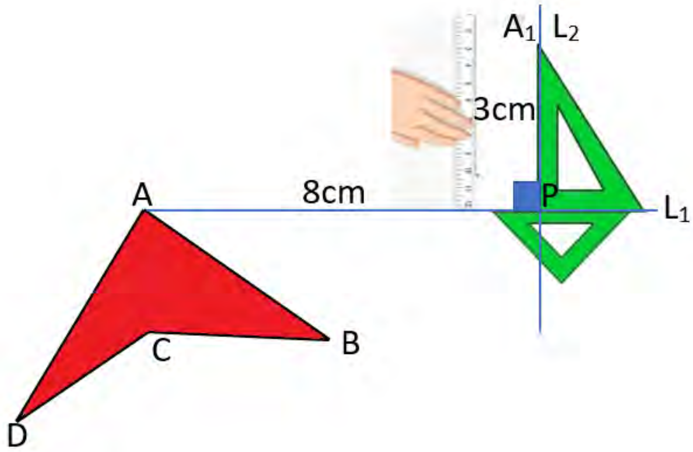


Figura 69: Medición del segmento $\overline{PA_1}$.

Análogamente esperaríamos que los estudiantes procedan de la misma manera para cada uno de los vértices de la figura $ABCD$ y encontrar los puntos B_1, C_1 y D_1 restantes tal como mostramos en la Figura 70.

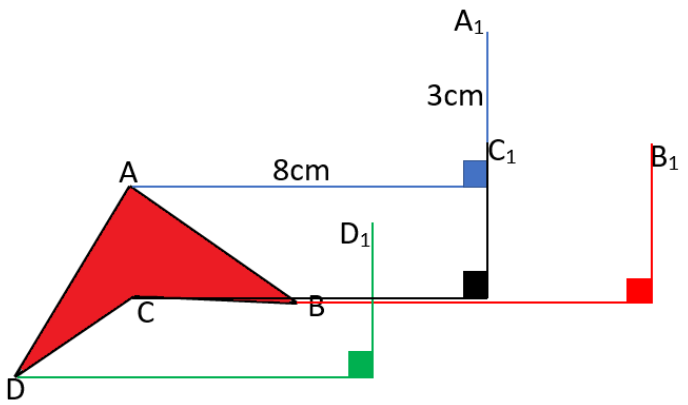


Figura 70**:** Encontrando los puntos B_1, C_1 y D_1.

esperaríamos que los estudiantes unan los puntos $A_1B_1C_1D_1$ y poder obtener la figura transformada mediante un movimiento de traslación. Mediante su aprehensión operatoria de posición puedan inferir que la figura $A_1B_1C_1D_1$ luego de una serie de tratamientos realizados mediante el trazo de líneas auxiliares, es la transformada producto de una traslación dado los componentes del vector dirección, en este caso la figura $ABCD$ ha realizado una modificación posicional cambiando de posición respecto a su posición inicial tal como mostramos en la Figura 71.

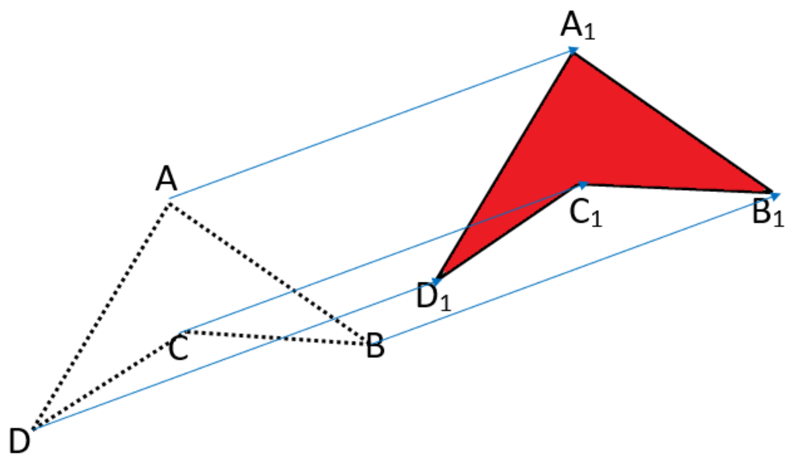
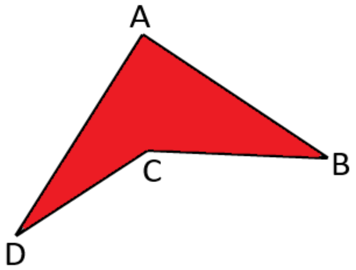


Figura 71**:** Traslación de la figura $ABCD$.

Asimismo, esperaríamos que los estudiantes mediante su aprehensión discursiva puedan describir con detalle cada uno de los procesos seguidos en la construcción de la figura transformada.

ACTIVIDAD 4

Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de realizar un desplazamiento horizontal de 6cm hacia la derecha y un desplazamiento vertical de 3cm hacia arriba y luego rotar 90° en sentido horario respecto al vértice A trasladado y responde a la pregunta ¿Cómo se realizaron dichas transformaciones? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 20. Actividad 4 de la situación 2.

Objetivo de la Actividad 4: Realizar un movimiento de traslación y luego un movimiento de rotación de la figura $ABCD$.

Posible solución matemática

Procedemos a trazar una línea horizontal L_1 desde el vértice A y a su vez una línea vertical L_2 perpendicular a dicha línea con ayuda del juego de escuadras, cuya intersección es el punto P, es decir $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2$ = $\{P\}$ y $\overline{AP}$ = 6cm. Seguidamente medimos a partir del punto P, 3cm en forma vertical hacia arriba, de tal forma que el punto extremo de este segmento será el punto A_1, es decir $\overline{PA_1}$ = 3cm. Análogamente procederemos de la misma manera para cada uno de los vértices de la figura $ABCD$ para encontrar los puntos B_1, C_1 y D_1 restantes. Finalmente uniremos los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 y así obtener la figura transformada por un movimiento de traslación. Luego procedemos a prolongar los lados $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$ y $\overline{A_1D_1}$ de la figura trasladada que serán los lados iniciales del ángulo de rotación que se representará. Seguidamente procedemos a representar y medir los ángulos de rotación de 90° en sentido horario respecto al vértice A_1 y el lado $\overline{A_1D_1}$ de la figura trasladada. Seguidamente procedemos a representar y medir los ángulos de rotación de 90° en sentido horario respecto al vértice A_1 y los lados $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$ restantes de la figura trasladada. A continuación, utilizaremos el compás para trasladar cada uno de los vértices según el ángulo de rotación representado, para ello se deberá colocar la punta metálica en el vértice A_1 y el lápiz en cada uno de los vértices restantes de la figura, procediendo a girar y obtener los puntos de intersección B_2, C_2 y D_2 de cada arco con los lados finales de cada ángulo representado. Finalmente procedemos a unir los puntos $A_1B_2C_2D_2$ y así obtener la figura transformada por medio de una rotación respecto al vértice A_1 como se muestra en la Figura 72.

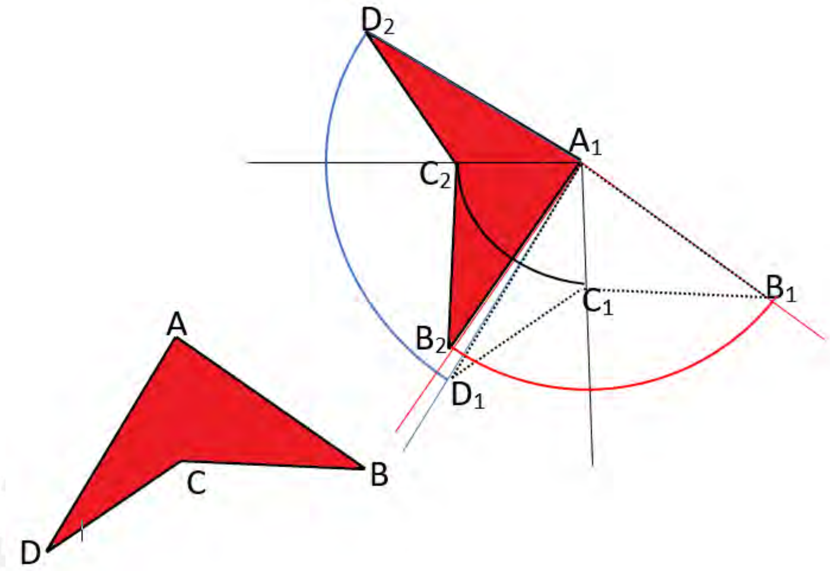


***Figura 72*:** Traslación y Rotación de la figura $ABCD$.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 4

Si fuera aplicada la Actividad 4, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad representa a un polígono no convexo, por qué; por sus conocimientos previos en las anteriores actividades, los estudiantes son capaces de reconocer diferentes figuras geométricas. Asimismo, la presentación de la actividad se apoya en el uso de papel blanco para realizar tratamientos en el registro figural mediante el trazo de líneas auxiliares y color (rojo) en la representación de la figura $ABCD$ puesto que, tomando los antecedentes y los libros didácticos, observamos que los autores utilizan colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano tal como mostramos en la Figura 73.

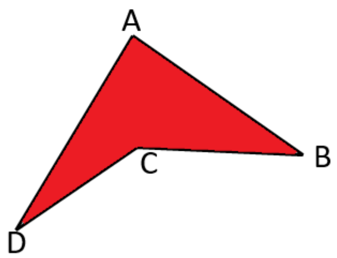


***Figura 73*:** Uso de papel blanco y color en la figura $ABCD$.

Luego por su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de instrumentos como la regla y el juego de escuadras puedan dibujar la figura transformada del polígono $ABCD$, para el cual tendrán que movilizar sus conocimientos previos en la representación de rectas perpendiculares así como el aprestamiento en el uso adecuado del juego de escuadras, se espera que tracen a partir de un vértice (Ejemplo: vértice A) una línea horizontal L_1 y a su vez una línea vertical L_2 perpendicular a dicha línea con ayuda del juego de escuadras, cuya intersección sea el punto P, es decir $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2$ = $\{P\}$ y proceder a medir el segmento $\overline{AP}$ = 6 cm como se ve en la Figura 74.

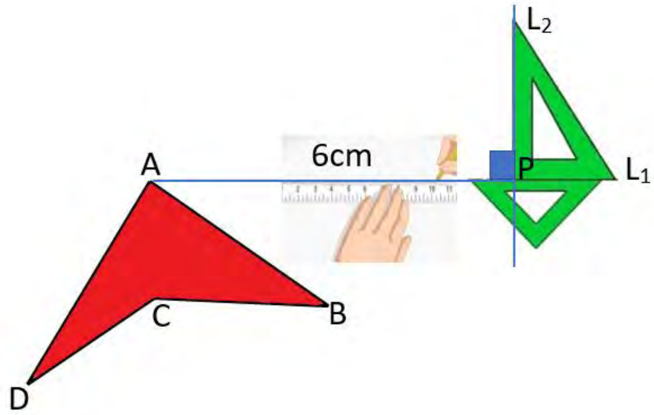


Figura 74: Representación de las rectas $L_1 \perp L_2$, donde $L_1 \cap L_2$ = $\{P\}$ y medición del segmento $\overline{AP}$.

Luego esperaríamos a que los estudiantes procedan a medir a partir del punto P, un segmento cuya medida sea de 3cm en forma vertical hacia arriba, de tal forma que el punto extremo de este segmento será el punto A_1, obteniendo $\overline{PA_1}$ = 3cm como se ve en la Figura 75.

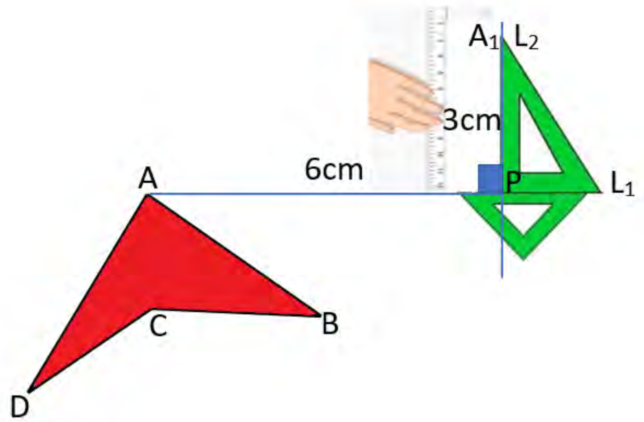


Figura 75: Medición del segmento $\overline{PA_1}$.

Análogamente esperaríamos a que los estudiantes procedan de la misma manera para cada uno de los vértices de la figura $ABCD$ y encontrar los puntos B_1, C_1 y D_1 restantes tal como mostramos en la Figura 76.

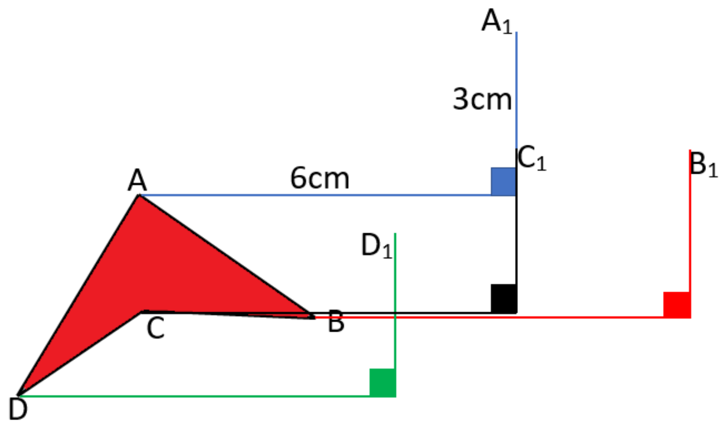


***Figura 76*:** Encontrando los puntos B_1, C_1 y D_1.

Esperaríamos que los estudiantes unan los puntos $A_1B_1C_1D_1$ y logren concluir que la figura $ABCD$ ha realizado un movimiento de traslación mediante su aprehensión operatoria de posición dado que puedan inferir que la figura $A_1B_1C_1D_1$ luego de una serie de tratamientos es la transformada, producto de una traslación dado los componentes del vector dirección, en este caso la figura $ABCD$ ha cambiado de orientación respecto a su posición inicial tal como mostramos en la Figura 77.

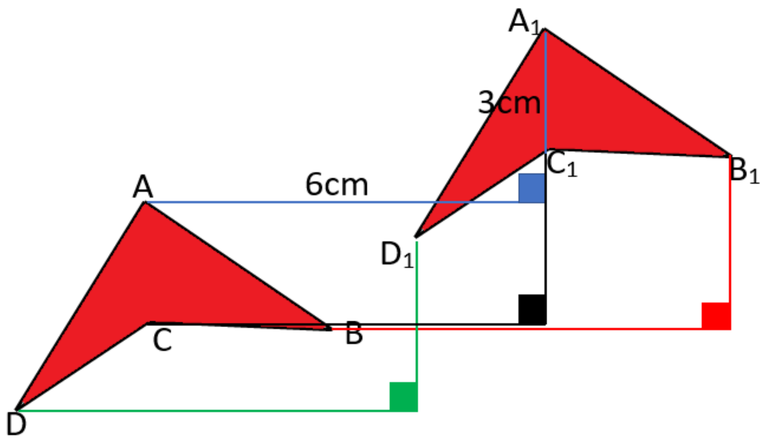


***Figura 77*:** Traslación de la figura $ABCD$.

En una segunda parte esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de instrumentos como la regla, el compás y el transportador puedan dibujar la figura transformada del polígono $A_1B_1C_1D_1$ transformado inicialmente por una traslación, para el cual tendrán que movilizar sus conocimientos previos en la representación y medición de ángulos utilizando la regla y el transportador, así como el aprestamiento en el uso adecuado del compás, esperamos que los estudiantes realicen prolongaciones de los lados $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$ y $\overline{A_1D_1}$ de la figura $A_1B_1C_1D_1$, que serán los lados iniciales del ángulo de rotación que se construirá, tal como se ve en la Figura 78.

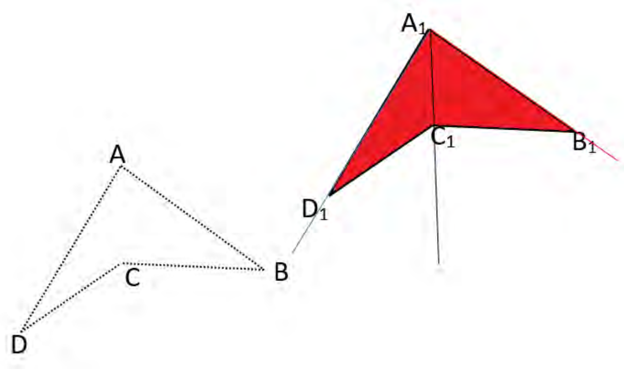


Figura 78: Prolongación de los lados $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$ y $\overline{A_1D_1}$.

Esperaríamos que los estudiantes procedan a representar el ángulo de rotación de 90° en sentido horario respecto al vértice A_1 y el lado $\overline{A_1D_1}$ de la figura $A_1B_1C_1D_1$, para ello deberán utilizar adecuadamente el transportador colocando el centro de dicho instrumento en el punto A_1 y el lado $\overline{A_1D_1}$ coincidente con en 0° tal como mostramos en la Figura 79.

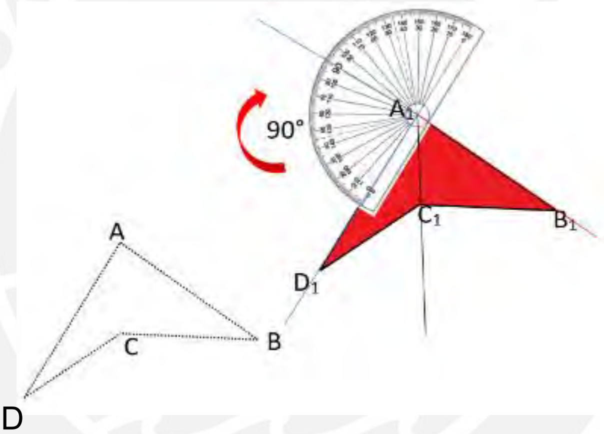


Figura 79: Representación del ángulo de rotación del vértice D_1 respecto al vértice A_1.

Seguidamente esperaríamos que los estudiantes en forma análoga procedan a representar los ángulos de rotación de 90° en sentido horario respecto al vértice A_1 de los lados $\overline{A_1B_1}, \overline{A_1C_1}$ restantes de la figura $A_1B_1C_1D_1$ como se ve en la Figura 80.

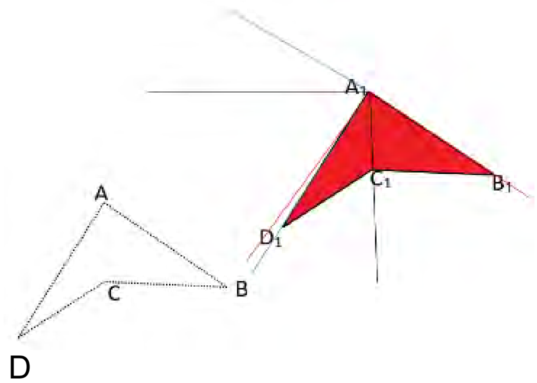


Figura 80: Representación del ángulo de rotación de 90° de los vértices B_1 y C_1 respecto al vértice A_1.

A continuación, esperaríamos que los estudiantes mediante el uso del compás logren rotar los vértices B_1, C_1 y D_1 respecto al centro de rotación A_1, para ello deberán colocar la punta metálica en el vértice A_1 y el lápiz en cada uno de los vértices restantes de la figura, procediendo a girar en sentido horario y obtener los puntos de intersección B_2, C_2 y D_2 de cada arco con los lados finales de cada ángulo representado tal como mostramos en la Figura 81.

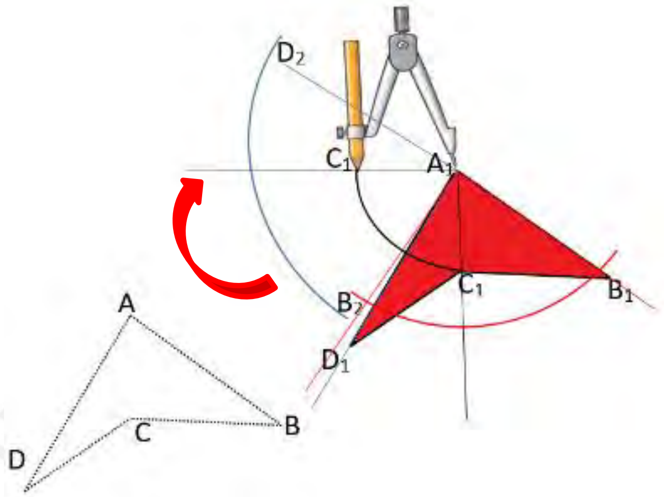


Figura 81**:** Rotación de 90° de cada uno de los vértices de la figura $A_1B_1C_1D_1$ respecto al punto A_1 en sentido horario.

Esperaríamos que los estudiantes procedan a unir los puntos $A_2B_2C_2D_2$ y mediante su aprehensión operatoria luego de realizar una serie de tratamientos en el registro figural, como el trazo de líneas auxiliares y arcos de circunferencia, concluyan que la figura representada por $ABCD$ ha realizado en este caso dos movimientos, un movimiento de traslación puesto que la figura ha cambiado de posición y un movimiento de rotación dado que dicha figura ha cambiado de orientación respecto a uno de sus vértices como se muestra en la Figura 82.

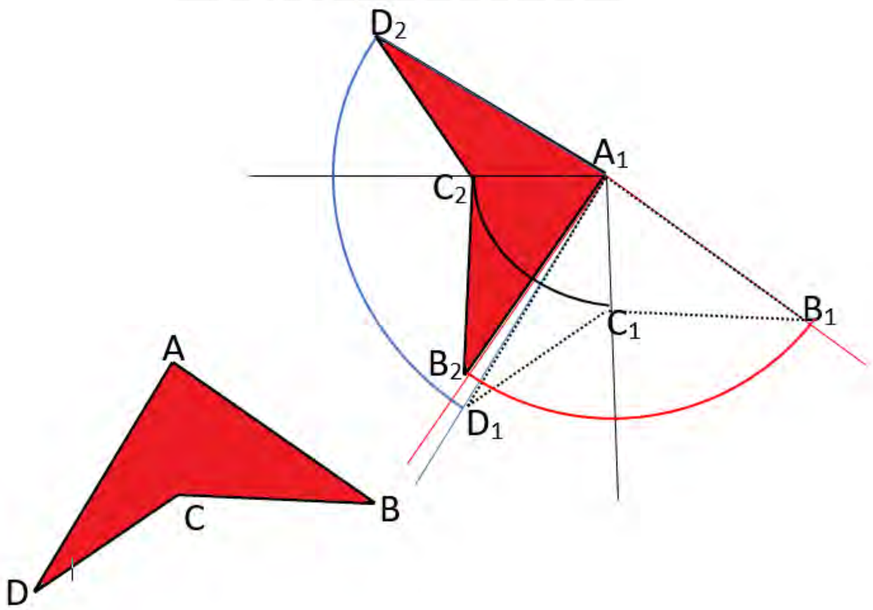


Figura 82**:** Rotación de 90° de la figura $A_1B_1C_1D_1$ respecto al vértice A_1.

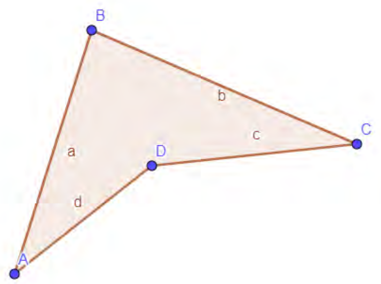
Asimismo, esperaríamos que los estudiantes mediante su aprehensión discursiva puedan describir con detalle cada uno de los procesos seguidos en la construcción de la figura transformada.

SITUACIÓN 3

La situación 3 está compuesta por 1 sola actividad que presentamos a continuación:

ACTIVIDAD

Mediante el uso del *GeoGebra*, dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego rotar 135° en sentido antihorario respecto al vértice C y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 21. Actividad única de la situación 3.

Objetivo de la Actividad: Rotar una figura geométrica $ABCD$ mediante el uso del *software GeoGebra*.

Posible solución matemática

Procedemos a generar el ángulo de rotación de 135° en sentido antihorario, tomando como centro de rotación al vértice C, y cómo lado inicial al lado CB. Procedemos a trazar con el icono respectivo, la semirrecta que tiene como origen el punto C y en la dirección del ángulo de 135°. Procedemos a generar el arco de circunferencia de centro C y radio CB para poder encontrar el punto de intersección con la semirrecta trazada en el paso anterior. Seguimos en forma análoga encontrando los otros puntos de intersección. Procedemos a unir los puntos de intersección formando el polígono transformado por una rotación tal como se muestra en la Figura 83.

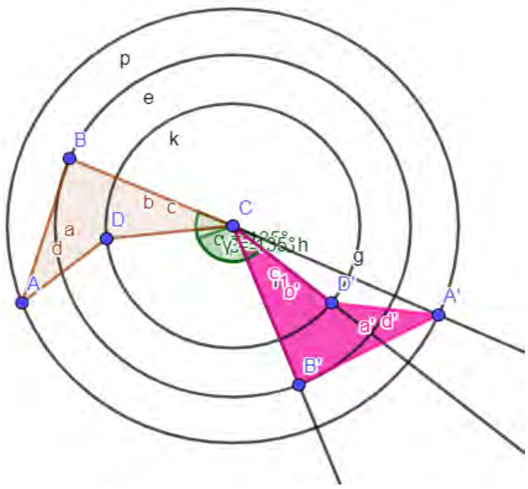


***Figura 83*: ** Rotación de 135° del polígono $ABCD$ en sentido antihorario.

Posibles conocimientos que movilizaría la Actividad 1

Si fuera aplicada la Actividad 1, esperaríamos que los estudiantes por medio de su aprehensión perceptiva identifiquen que la figura mostrada en la actividad representa a un polígono no convexo dado que no es común presentarlo en aula. Además, el tipo de polígono presentado no contradice la estrategia de solución si este fuese un polígono convexo. Así mismo, la presentación de la actividad se apoya en el uso de la tecnología mediante el uso del *software GeoGebra* ocultando los ejes y cuadricula respectivamente, para realizar tratamientos en el registro figural dinámico mediante el uso de herramientas ubicada en la barra de herramientas de dicho software y colores puesto que, tomando los antecedentes y los libros didácticos, observamos que los autores utilizan colores para diferenciar los movimientos realizados por una figura en el plano tal como mostramos en la Figura 84.

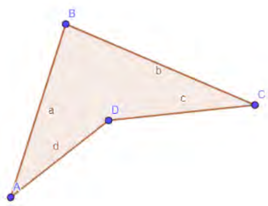


***Figura 84*: ** Uso de color en la figura con ejes y cuadricula oculta en la actividad.

Luego por su aprehensión secuencial, esperaríamos que los estudiantes por medio del uso de comandos puedan obtener los ángulos de rotación respecto al vértice C, para ello tendrán que movilizar sus conocimientos previos obtenidos en las actividades anteriores respecto a la noción de rotación, esperaríamos que los estudiantes ubiquen el icono correspondiente para generar ángulos, ubicado en la barra de herramientas haciendo clic en la imagen  y desplegando las opciones para elegir aquella que permita medir ángulos tal como mostramos en la Figura 85.

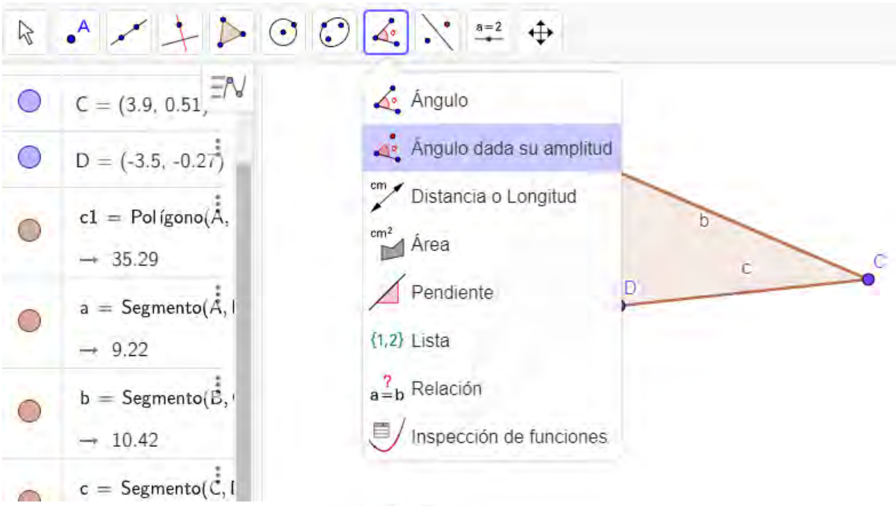


Figura 85: Ubicación del icono para generar ángulos.

Esperaríamos que los estudiantes elijan la opción para medir ángulos cuyo ícono esta dado por la imagen  y logren establecer el ángulo de rotación solicitado para uno de los vértices del polígono respecto al vértice C por ejemplo el vértice B para obtener el punto B' tal como mostramos en la Figura 86.

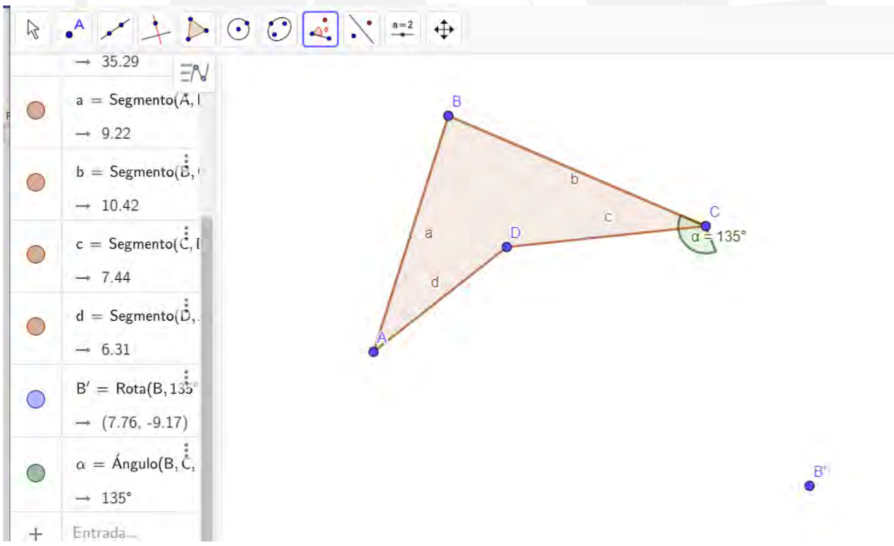
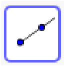


Figura 86: Generación del ángulo de rotación de 135° en sentido antihorario.

Esperaríamos que los estudiantes ubiquen el icono  para generar una semirrecta, tal como mostramos en la Figura 87.

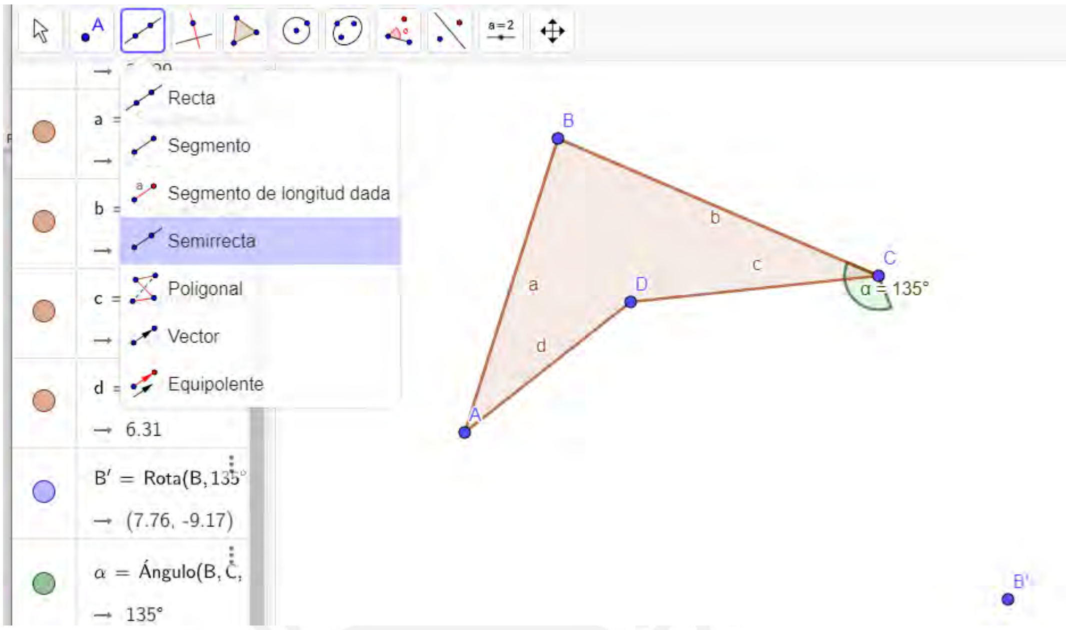
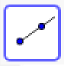


Figura 87: Ubicación del icono para generar semirrectas.

Esperaríamos que los estudiantes generen una semirrecta con origen en el punto C y punto de paso B' haciendo clic en el icono  tal como mostramos en la Figura 88.

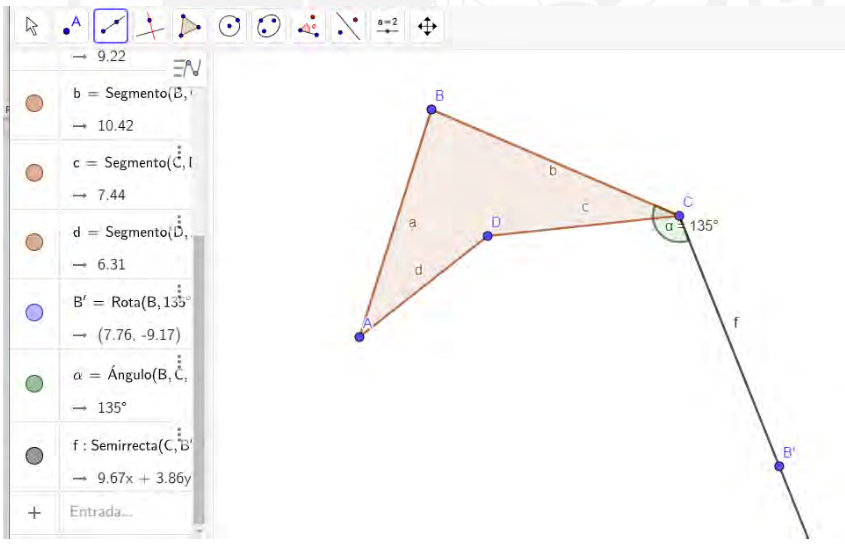


Figura 88: Generación de la semirrecta que tiene como origen al punto C.

Esperaríamos que los estudiantes en forma análoga generen los ángulos restantes, así como sus respectivas semirrectas con origen en el punto C, tal como mostramos en la Figura 89.

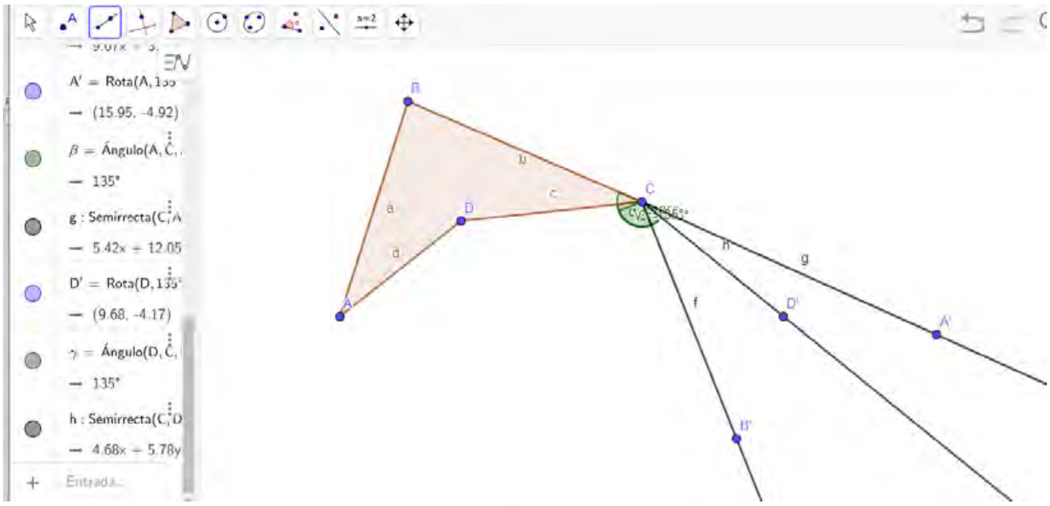


Figura 89: Generación de las semirectas que tiene como origen al punto C.

Esperaríamos que los estudiantes logren ubicar el icono correspondiente al compás, tal como mostramos en la siguiente Figura 90.

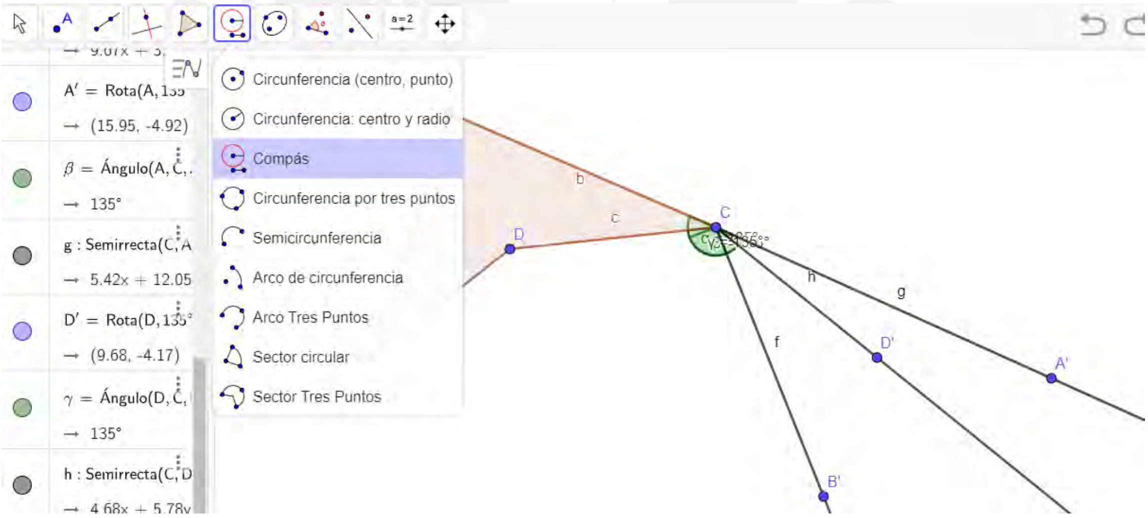
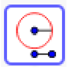


Figura 90 : Ubicación del icono correspondiente al compás.

Esperaríamos que los estudiantes siguiendo con su aprehensión secuencial, tracen un arco de circunferencia de centro C y radio CB, haciendo clic en el icono  correspondiente al compás, tal como mostramos en la siguiente Figura 91.

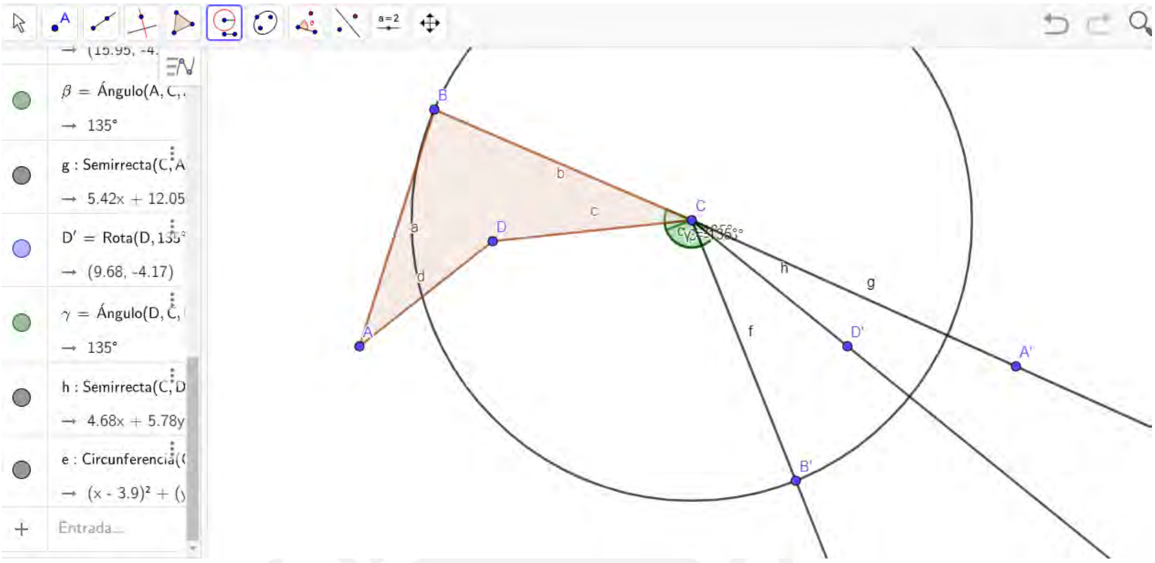


Figura 91: Generación del arco de circunferencia con centro en C y radio CB.

Seguidamente esperaríamos a que los estudiantes generen los arcos de circunferencia restantes para que encuentren las imágenes de los vértices de la figura $ABCD$ tal como mostramos en la Figura 92.

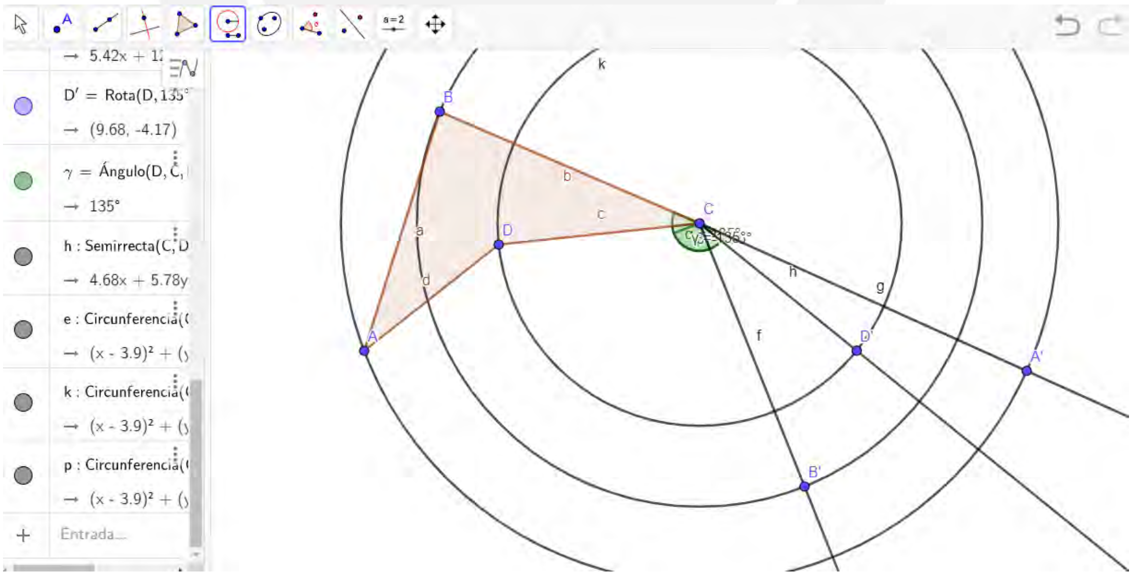
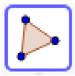


Figura 92: Obtención de las imágenes de los vértices de la figura $ABCD$ que ha rotado respecto al vértice C en sentido antihorario.

Esperaríamos que los estudiantes unan los puntos haciendo clic en el icono  para poder visualizar la figura rotada en un ángulo de 135° en sentido antihorario y mediante su aprehensión operatoria luego de realizar una serie de tratamientos en el registro figural dinámico, concluyan que la figura representada por $ABCD$ ha realizado modificaciones posicionales mediante el movimiento de rotación dado que dicha figura ha cambiado de orientación respecto a uno de sus vértices tal como mostramos en la Figura 93.

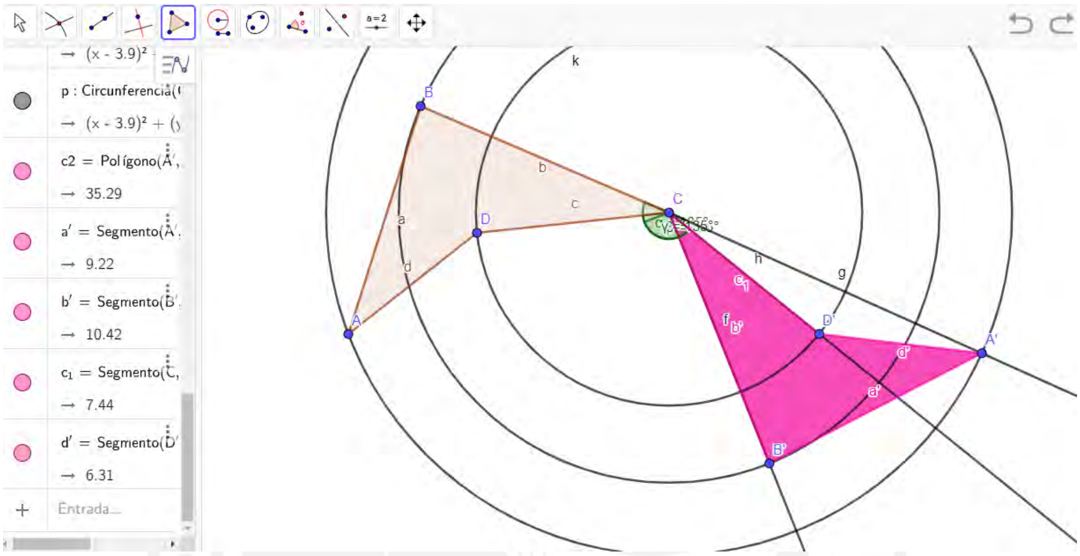


Figura 93: Obtención de la rotación de la figura $FGHI$ respecto al vértice H en sentido antihorario.

Esperaríamos así mismo que los estudiantes mediante su aprehensión discursiva puedan describir con detalle cada uno de los procesos seguidos en la construcción de la figura transformada usando como medio el recurso *GeoGebra*.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta parte, haremos una reflexión de los aspectos importantes de nuestra investigación, consideraremos los objetivos, la fundamentación teórica, los aspectos metodológicos, así como nuestra contribución en la Educación Matemática y finalmente las recomendaciones para futuras investigaciones. De acuerdo a nuestra búsqueda de antecedentes , podemos afirmar que las investigaciones en el Perú de las transformaciones y en particular de los movimientos de rotación y traslación son escasas, la mayoría de las investigaciones están orientadas al nivel escolar, es por ello que hicimos una revisión de las tesis de maestría , doctorado y artículos de investigación en diversos países incluyendo al Perú , tal como se observa en los antecedentes de la presente investigación, donde se puede verificar las dificultades que presentan los estudiantes en este tema, el uso de las aprehensiones y la utilización de instrumentos como la regla, el compás, el transportador y la herramienta tecnológica como el *GeoGebra* serán factores relevantes para verificar el papel heurístico de la figura para el desarrollo de las transformaciones geométricas en el plano en los movimientos de rotación y traslación.

En tal sentido, los trabajos de Campos (2018) y Barrantes (2019) afirman que los docentes no desarrollan el tema de las transformaciones geométricas en el aula por no estar debidamente preparados o que carecen del conocimiento especializado, ello repercute significativamente en el aprendizaje de los estudiantes, para ello también mencionamos a Reyes (2017) que dentro de la etapa Diagnostica de su investigación, recogió saberes previos que muestran la ausencia de conocimientos en geometría así como la falta de destreza en el manejo de instrumentos como la regla y el compás. Avcu y Çetinkaya (2019) también indicaron en su investigación que al inicio los estudiantes se encontraban por debajo del nivel de conocimientos sobre transformaciones geométricas. Campos (2018) afirma que los estudiantes no logran identificar elementos asociados al movimiento de rotación como el ángulo de rotación y el centro de esta, Avcu y Çetinkaya (2019) también mencionan dificultades encontradas con dicho movimiento, dado que los estudiantes solo logran mencionar el ángulo de rotación, pero no el centro de rotación, inclusive en relación con el movimiento de traslación indican que los estudiantes obvian mencionar la magnitud o la dirección del vector de traslación.

Subrayamos que Muñoz (2015) urge en la necesidad de difundir el uso del *software GeoGebra* como apoyo en la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de lograr mejoras en el aprendizaje de los estudiantes, ello coincide con Barrantes (2019) en su recomendación del uso de dicha herramienta como apoyo didáctico, donde vemos que los trabajos de Campos

(2018), Reyes (2017), Lara (2016), Espinoza (2015), Avcu y Çetinkaya (2019) y Morales, Locia y Salmerón (2016) utilizan dicha herramienta como recurso tecnológico heurístico.

Recordemos que Campos (2018), Lara (2016), Espinoza (2015) y Moya (2015) circunscriben sus trabajos de investigación en función a problemas en común encontrados a lo largo de sus experiencias, todos ellos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en el cual, Campos (2018) asevera que muchos estudiantes no tenían experiencias satisfactorias con la geometría porque su enseñanza fue descuidada en los años iniciales de escolaridad o ésta se logró memorizando fórmulas con poco sentido, pero que el desarrollo de las transformaciones geométricas en los mismos revitalizaría la enseñanza, dado que lo ve como un campo rico en conexiones y una herramienta muy útil para resolver problemas. Ello debido a que las actividades no ayudan a desarrollar las aprehensiones, no fomentan a que la figura cumpla su rol heurístico, no permite la realización de tratamientos heurísticamente relevantes que ayuden a resolver situaciones problemáticas, no provoquen concretar la función epistemológica de cada una de las aprehensiones.

Recordemos que según Duval (1994) la función epistemológica de la aprehensión perceptiva es la de identificar objetos en 2 o 3 dimensiones, la función epistemológica de la aprehensión operatoria es la de exploración heurística, la función epistemológica de la aprehensión secuencial es la de modelo, dado que se deberá construir la figura según la secuencia de pasos establecidas desde un inicio y la función epistemológica de la aprehensión discursiva es la demostración de teoremas, propiedades, relaciones que se cumplen en las figuras. A partir del estudio de la figura por Duval (1994) y de acuerdo con la investigación histórica – bibliográfica, nos permitió comprender la Genesis de las transformaciones y ver que históricamente si se aprovechaban el papel heurístico de la figura para resolver problemas.

Así mismo, mencionamos respecto al análisis del libro didáctico, en el cual encontramos una serie de situaciones propuestas que no ayudan a desarrollar las aprehensiones de una figura, no se observa secuencias que ayuden a que se coordinen las aprehensiones, las figuras no cumplen su rol heurístico, tampoco se dan modelos o secuencias para lograr realizar determinados tratamientos a la figura, todo ello nos sirvieron para generar una secuencia didáctica compuesta por tres situaciones que contienen 5, 4 y 1 actividad respectivamente, donde la actividad de la situación 3 se desarrolla con apoyo del software GeoGebra, en el RFD con el propósito de poder analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural y también en el RFD utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR.

La primera situación contiene 5 actividades que en forma gradual se van presentando con el objetivo de lograr analizar las aprehensiones perceptiva y secuencial involucradas en cada una de dichas actividades, cumpliendo sus respectivas funciones epistemológicas como la de identificar y realizar una secuencia de pasos para deducir el centro de rotación en una figura o fuera de ella, encontrar la medida del ángulo de rotación así como identificar el movimiento traslación y los parámetros del vector de dirección mediante el uso de instrumentos de medición como la regla, el transportador y el juego de escuadras utilizando una malla cuadriculada o un fondo blanco como apoyo.

La segunda situación contiene 4 actividades que en forma gradual van presentando situaciones donde se pondrán a prueba la acción de dibujar una figura luego de realizar un movimiento o movimientos en el plano, buscando la movilización de conocimientos previos que conlleven a deducir el centro de rotación, construir la figura rotada dado la medida del ángulo de rotación así como realizar el movimiento traslación e identificar los parámetros del vector de dirección mediante el uso de instrumentos de medición como la regla, el compás, el transportador y el juego de escuadras, realizando tratamientos en el registro figural y analizando las aprehensiones de percepción, operatoria, secuencial y discursiva involucradas en cada una de dichas actividades, cumpliendo sus respectivas funciones epistemológicas como la de identificar, realizar una secuencia de pasos para medir ángulos así como para encontrar los parámetros del vector de dirección de una traslación aplicada a una figura en el plano y construir la figura transformada, explorar heurísticamente mediante los tratamientos relevantes para obtener la modificación posicional solicitada y finalmente mostrar la explicación de todo el proceso realizado hasta obtener la solución del problema propuesto.

La tercera situación contiene una actividad única, en la cual se presenta una situación donde se pondrán a prueba la acción de dibujar una figura luego de realizar un movimiento de rotación en el plano, buscando la movilización de conocimientos previos que conlleven a deducir el centro de rotación, dibujar la figura rotada dado la medida del ángulo de rotación mediante el uso del *software* libre *GeoGebra* como recurso tecnológico heurístico, mencionado también por Morales, Locia y Salmerón (2016), realizando tratamientos en el registro figural dinámico y analizando las aprehensiones de percepción, operatoria, secuencial y discursiva involucradas en dicha actividad, coincidimos plenamente con Avcu y Çetinkaya (2019) en el uso de este software porque nos permitirá a que se manipule la figura, se conjeturen relaciones y propiedades, coincidimos también con Reyes (2017) por que ayudará a desarrollar competencias de visualización y exploración.

Asimismo, las actividades propuestas en cada una de las dos primeras situaciones fueron analizadas desde nuestro marco teórico de referencia, las aprehensiones geométricas en el registro figural de Duval (1994) con los cuales pudimos analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano en los movimientos de rotación y traslación, también pudimos establecer mediante las revisiones de investigaciones de referencia las diferentes aprehensiones en el Registro Figural relacionadas a las transformaciones geométricas en el plano.

De igual modo, el haber realizado un estudio minucioso de los aspectos históricos de cómo se generan las transformaciones geométricas a lo largo de la historia, desde Euclides, pasando luego por el Renacimiento con personajes célebres como Da Vinci, Durero, Pascal, Desargues hasta Klein con la teoría de grupos nos llevan a la reflexión sobre todas las dificultades que fueron superándose hasta obtener todo lo que conocemos en la actualidad y comprender su importancia del por qué se deben instruir o dar a conocer en la etapa de formación escolar. Logramos estudiar en los aspectos históricos como se presentan las aprehensiones en el Registro Figural relacionadas a las transformaciones geométricas en el plano mediante los movimientos de rotación y traslación

También mencionamos sobre la importancia de haber realizado un análisis del libro didáctico aprobado por el MINEDU, un trabajo profundo del tema propuesto en el libro didáctico desde las definiciones mostradas y la revisión exhaustiva de cada una de las actividades propuestas en dicho libro, en el cual, si bien es cierto, existe el tema en el texto, pero que la presentación de las transformaciones mediante las actividades propuestas, estas no responden o no ayudan a que los estudiantes del VII ciclo de EBR logren aprendizajes significativos, estos no estimulan a la realización de tratamientos que conlleven a desarrollar las aprehensiones en el registro figural para lograr resolver problemas de transformaciones geométricas de una figura en el plano. Es así como logramos encontrar en el libro didáctico aprobado por el MINEDU por medio del análisis de este, la ausencia en el desarrollo de las diferentes aprehensiones en el Registro Figural relacionadas a las transformaciones geométricas en el plano mediante los movimientos de rotación y traslación.

Dado todo lo mencionado, al cumplirse con el logro de los objetivos específicos, podemos manifestar que se cumplió el objetivo general de la investigación:

Analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano a través de los movimientos de rotación y traslación en el ciclo VII de EBR y que nos permitió responder nuestra pregunta de investigación.

Recomendaciones para futuras investigaciones

Finalmente, consideramos que esta forma de comprender los movimientos de rotación y traslación mediante las aprehensiones en el registro figural podría ser replicada en otro tipo de movimientos como la simetría y las anamórficas (ampliación o reducción de una figura) y en cualquier situación geométrica.

Se deben generar actividades donde se aprovechen las figuras dado su papel heurístico y que permitan a los estudiantes movilizar todos sus conocimientos, evitando el memorismo, lo tradicional, lo mecánico, de modo que los estudiantes se vuelvan críticos, creativos, desarrollen habilidades, sean capaces de utilizar diversos instrumentos de medición y construcción de figuras en el plano.

Se debe complementar todo trabajo realizado con lápiz y papel fomentando el uso del software libre *GeoGebra*, que proporciona un ambiente de representación dinámica (ARD) para poder comprobar, redescubrir, conjeturar o aplicar relaciones o propiedades no solo en el tema de las transformaciones, sino en cualquier tema de matemática de EBR. El software *GeoGebra* debe ser un medio que ayude a provocar en los estudiantes, la movilización sus conocimientos que, dentro de un ambiente de representación dinámica, desarrollar sus habilidades y destrezas que conduzcan a lograr aprendizajes.

Sugerimos que los docentes podrían generar diversas actividades dentro del Registro Figural Dinámico en todos los temas de la geometría para que los estudiantes mediante el uso del *software GeoGebra* logren realizar sus propias conjeturas y comprobar el cumplimiento de relaciones, propiedades o teoremas en cada uno de los temas que se desarrollen.

REFERENCIAS

Avcu, S. y Çetinkaya, B. (2019). *An instructional unió for prospective teachers' conceptualization of geometric transformations as functions* Recuperado de: https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1699966

Barrantes, H. (2019). *Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza*, Recuperado de: http://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1095/599

Boyer, C. (1985). Historia de la Matemática. Versión traducida de Martínez M, Madrid Alianza Editorial

Campos, I. (2018). *um estudo sobre o conhecimento profissional para o ensino das transformações geométricas* (Tesis de Doctorado en Educación Matemática) universidade anhanguera de são paulo, Sao Pablo, Brasil.

Creswell, J. (2010). QUALITATIVE INQUIRY AND RESEARCH DESIGN. Recuperado de http://academia.utp.edu.co/seminario-investigacion-II/files/2017/08/INVESTIGACION-CUALITATIVACreswell.pdf

Creswell, J. (2007). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (2a ed., Luciana Oliveira, Trad.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 2003). Recuperado de: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/696271/mod_resource/content/1/Creswell.pdf

Duval, R. (1994). *Les Differents Fonctionnemens posibles D'une démarches géometrique.* Reperes-IREM, (17), pp.121-138.Recuperado de: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WR/IWR97117/IWR97117.pdf

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento,* Revista Electrónica de Educación Matemática. REVEMAT 7(2), pp. 266-297.Recuperado de: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465

Duval, R. (2016). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos.* En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas, Capítulo 1, pp. 13-60. Colombia.

Editorial Corefo (2020). *Matemática 4, Libro de área*, Lima: Editorial COREFO S.A.

Editorial Corefo (2020). *Matemática 4, Libro de actividades*, Lima: Editorial COREFO S.A.

Espinoza, B. (2015). *Base media del trapecio y aprehensiones en el registro figural: una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra con estudiantes del nivel secundario* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas) Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2009). *Investigación en Educación Matemática: Recursos teóricos y metodológicos* (Formación de profesores, 3ra Edición) Editora autores Asociados, Brasil.

Flores, J y Almouloud, S. (2015). *Registro figural no ambiente de geometria dinámica*. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas) Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Lima, E. (1995*). Isometrías*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. recuperado de: https://vdocument.in/download/isometrias-elon-lages-lima

Morales, A., Locia, E. y Salmerón, P. (2016). *Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario, (64-79)* Recuperado de:

https://www.redalyc.org/jatsRepo/4780/478055145005/html/index.html

Morán, M. y Soliani, V. (2014). *as apreensões perceptivas, operatórias e discursivas*

em registros figurais de atividades de geometria, Recuperado de: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCAutor/CCA055.PDF

Moya, M. (2015). *Articulación de las Aprehensiones en la construcción del cubo truncado con Cabri 3D en estudiantes del quinto de secundaria* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas) Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Muñoz, J. (2016). *Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados, (105 -108)* Recuperado de: http://revistasuma.es/revistas/81-marzo-2016/ensenar-matematicas-con-geogebra.html

Okuda M. y Gómez-Restrepo C. (2005). *Métodos en investigación cualitativa: triangulación, (118–124)* Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/806/80628403009.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas del aprendizaje VII ciclo, Área Curricular de Matemática. Lima*. Recuperado de:

http://recursos.perueduca.pe/rutas/documentos/Secundaria/Matematica-VII.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional. Lima*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Reyes, D. (2017). *Visualización y Exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con GeoGebra en la asignatura de Geometría Euclídea en estudiantes universitarios* (Tesis de Maestría en TIC aplicadas a las ciencias de la educación) Universidad pedagógica y tecnológica de Colombia, Duitama, Colombia.

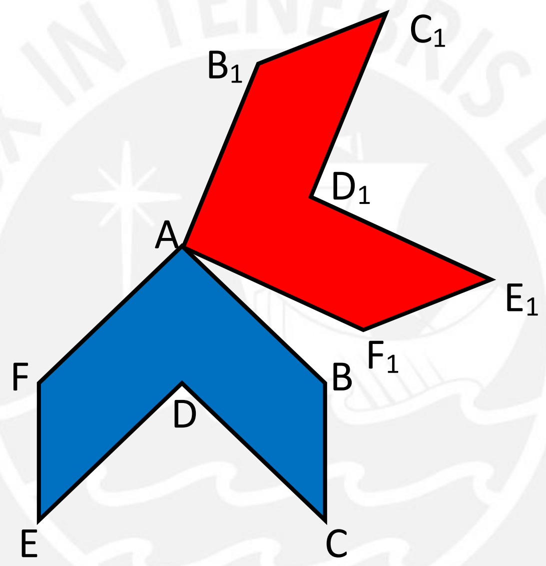
Santos, R. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica* (Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.) Universidad de Valladolid, España.

ANEXOS

Anexo A: SITUACIÓN 1

ACTIVIDAD 1

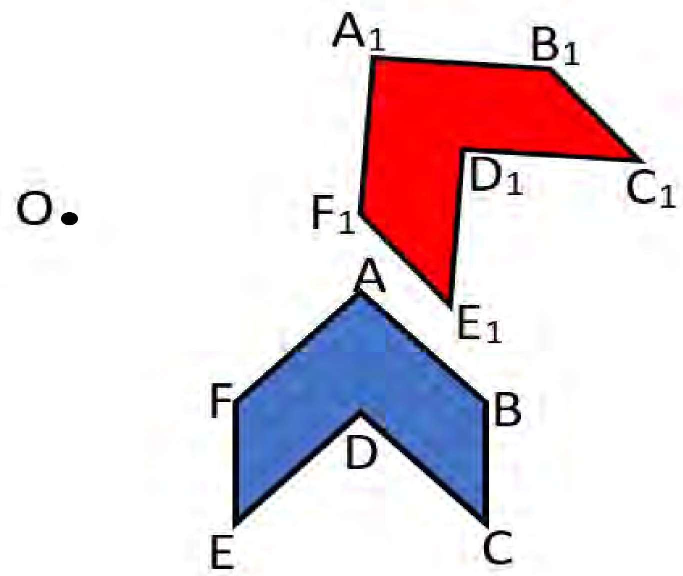
La figura representada por $ABCDEF$ muestra un cambio de posición, luego de haber realizado una rotación respecto al vértice A, obteniéndose la figura representada por $AB_1C_1D_1E_1F_1$. Encontrar la medida del ángulo producido por dicho movimiento



Cuadro 22. Actividad 1 de la situación 1.

ACTIVIDAD 2

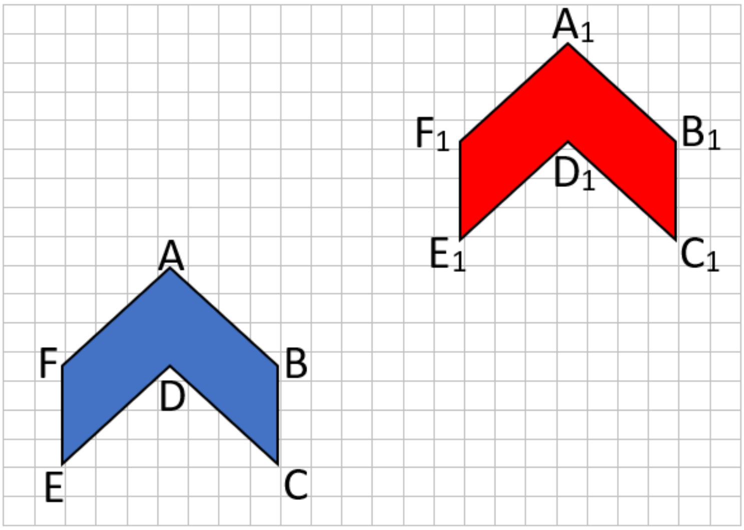
Encuentra la medida del ángulo de rotación de la figura representada por $ABCDEF$ mostrado respecto al punto "O"



***Cuadro 23*. Actividad 2 de la situación 1.**

ACTIVIDAD 3

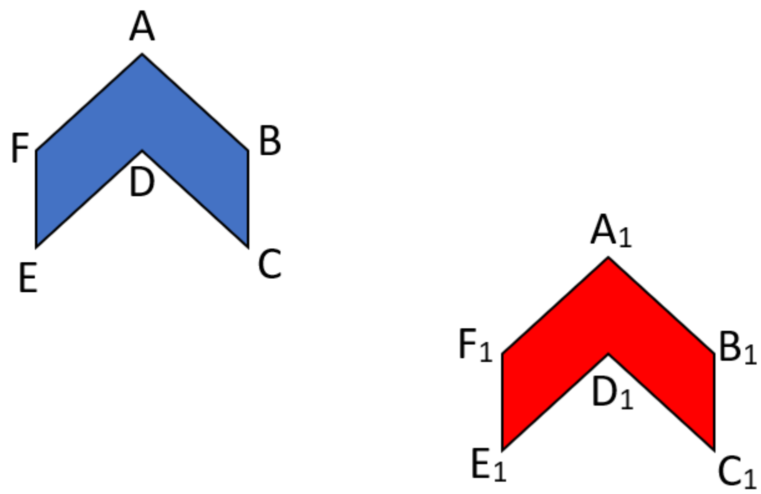
Dada la figura representada por $ABCDEF$. Encuentra las componentes que permitan que se transforme en la figura $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ tomando como patrón el lado de cada cuadrado de la cuadricula donde se encuentra dicha figura.



Cuadro 24. Actividad 3 de la situación 1.

ACTIVIDAD 4

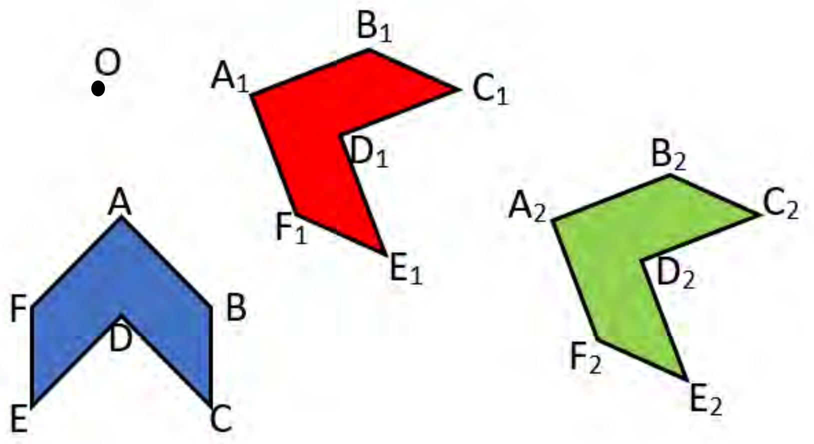
Encuentra las componentes del desplazamiento realizado por la figura representada por $ABCDEF$ que permitan que se transforme en la figura $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$



Cuadro 25. Actividad 4 de la situación 1.

ACTIVIDAD 5

Encuentra la medida aproximada del ángulo de rotación respecto al punto O de la figura representada por $ABCDEF$ y las componentes del desplazamiento que permitan que la figura transformada $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ se convierta finalmente en $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$

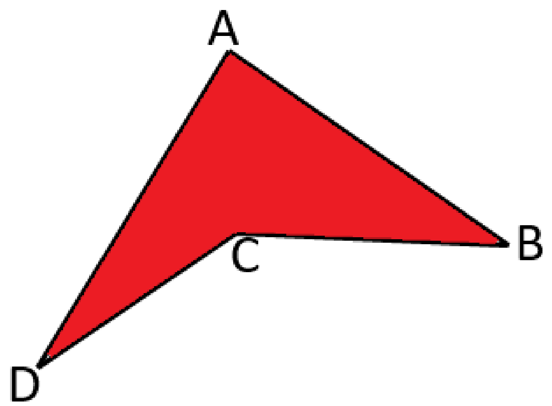


Cuadro 26. Actividad 5 de la situación 1.

Anexo B: SITUACIÓN 2

ACTIVIDAD1

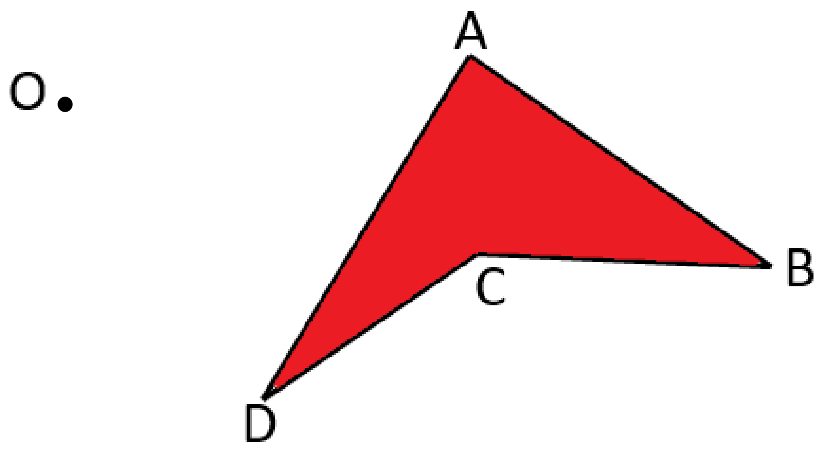
Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de rotar 120° en sentido horario respecto al vértice B y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 27. Actividad 1 de la situación 2.

ACTIVIDAD 2

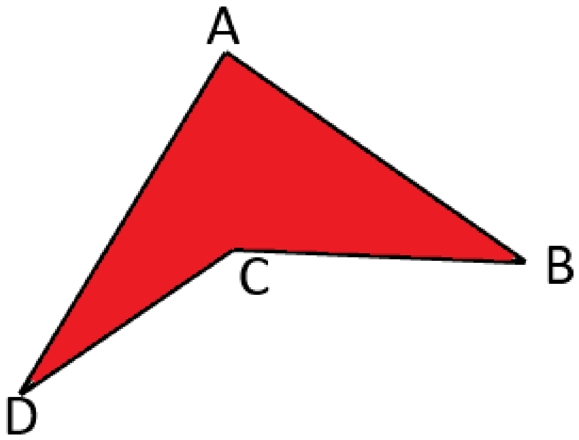
Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de rotar 120° en sentido horario respecto al punto O y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 28. Actividad 3 de la situación 2.

ACTIVIDAD 3

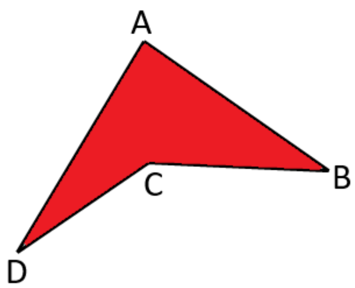
Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de realizar un desplazamiento de 8cm en línea horizontal hacia la derecha y 3cm en línea vertical hacia arriba y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 29. Actividad 3 de la situación 2.

ACTIVIDAD 4

Dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego de realizar un desplazamiento horizontal de 6cm hacia la derecha y un desplazamiento vertical de 3cm hacia arriba y luego rotar 90° en sentido horario respecto al vértice A trasladado y responde a la pregunta ¿Cómo se realizaron dichas transformaciones? Justifica tu procedimiento.

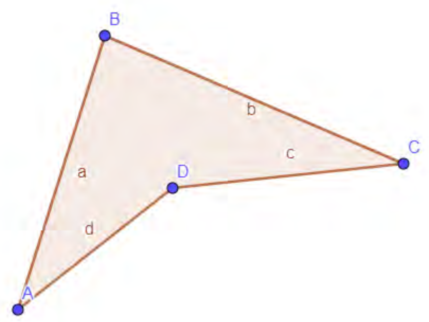


Cuadro 30. Actividad 4 de la situación 2.

Anexo C: SITUACIÓN 3

ACTIVIDAD

Mediante el uso del *GeoGebra*, dibuja la figura en la que se transforma la figura representada por $ABCD$ luego rotar 135° en sentido antihorario respecto al vértice C y responde a la pregunta ¿Cómo se realizó dicha transformación? Justifica tu procedimiento.



Cuadro 31. Actividad única de la situación 3.