

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Estudio de una organización estadística con relación a la
representación gráfica de variables estadísticas en un libro de
texto universitario

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las
Matemáticas que presenta:

Julio César Sánchez Ramos

Asesora:

Dra. Maritza Luna Valenzuela

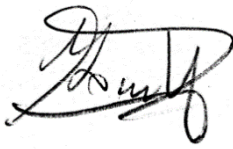
Lima, 2023

Informe de Similitud

Yo, Maritza Luna Valenzuela, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada “Estudio de una organización estadística con relación a la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto universitario”, del autor Julio César Sánchez Ramos, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 17%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 05/06/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima 23 de junio de 2023.

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora:	
Luna Valenzuela, Maritza	
DNI:29718677	
ORCID: 0000-0002-3039-451X	
Firma	

Resumen

El estudio presenta una organización estadística con relación a la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto universitario. Se pretende responder la pregunta de investigación: ¿qué tan completa es una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades? El objetivo general es describir, analizar y valorar dicha organización estadística. Para lograrlo, se realizó un modelo epistemológico de referencia de los gráficos estadísticos; se identificó y describió una organización estadística en el libro de texto *Matemática para no matemáticos*, texto dirigido a estudiantes universitarios para el área de Letras y Humanidades; se valoró dicha organización mediante los indicadores de Fonseca (2004). Basándose en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), se pudo identificar las tareas, técnicas para resolverlas, tecnologías que las justifican y la teoría que justifica las tecnologías. La metodología empleada tiene un enfoque cualitativo (Fernández, Baptista y Hernández, 2014) y es de corte bibliográfico, ya que se realiza un análisis de documentos (Fiorentini y Lorenzato, 2006). Se tomaron los elementos metodológicos propuestos por Almouloud (2015), y se agregó una etapa histórica-epistemológica. Se evidencia que no se puede hablar de gráficos estadísticos sin antes referirnos a las variables estadísticas, y que la representación tabular se relaciona con la gráfica. Finalmente, según Fonseca (2004), se determinó que la organización estadística en el estudio es relativamente completa al no encontrar presencia de algunos indicadores.

Palabras clave: Gráficos estadísticos, Modelo epistemológico de referencia, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Organización estadística.

Abstract

The investigation presents a statistical organization in relation to the graphic representation of statistical variables in a university textbook. The goal is to answer this research question: how complete is a statistical organization of the graphic representation of statistical variables in a textbook of the Basic Mathematics course at the university level for the area of Letters and Humanities? The general objective is to describe, analyze and evaluate this statistical organization. To achieve this, a reference epistemological model of statistical graphs was made; a statistical organization was identified and described in the textbook "Mathematics for non-mathematics", text addressed to university students for the area of Letters and Humanities; this organization was valued through the indicators of Fonseca (2004). Based on the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard, 1999), it was able to identify the tasks, techniques to solve them, technologies that justify them and the theory that justifies technologies. The methodology used has a qualitative approach (Fernández, Baptista and Hernández, 2014); is bibliographical, since it was a performed document analysis (Fiorentini and Lorenzato, 2006). The methodological elements proposed by Almouloud (2015) were important since adding a historical-epistemological stage. No one can talk about statistical graphs without referring to statistical variables and that the tabular representation is related to the graph. Finally, according to Fonseca (2014), it was determined that the statistical organization in the study is relatively complete, since some indicators were not present.

Keywords: Statistical graphs, Reference epistemological model, Anthropological theory of didactics, Statistical organization.

A mis padres, César y Julia, sus enseñanzas guían mi vida, siempre serán mis mejores maestros.

A mis sobrinos y alumnos, no olviden que nunca es tarde para cumplir sus metas, luchen por sus sueños.



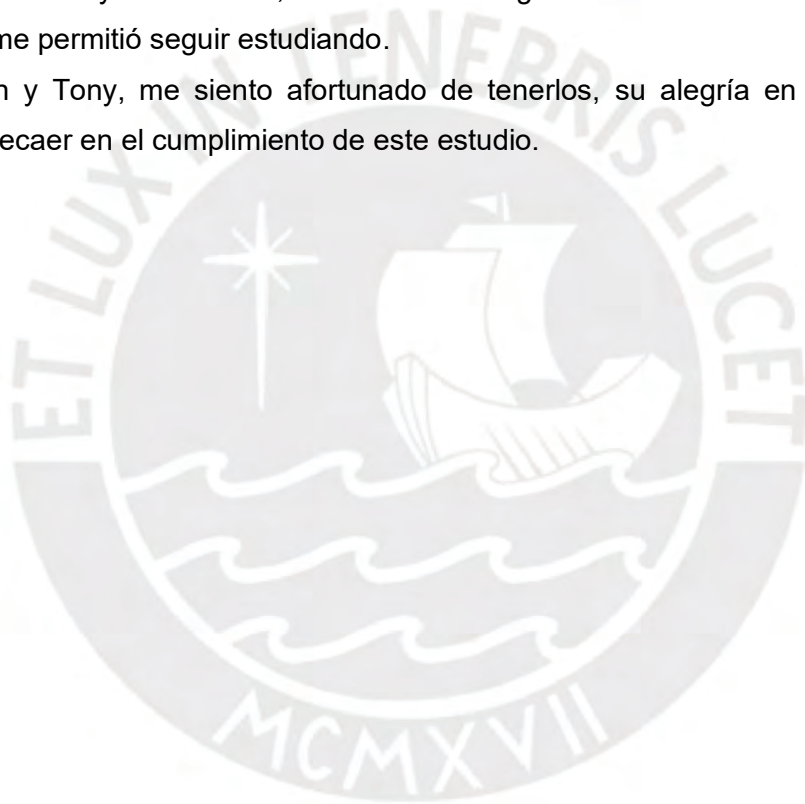
Agradecimientos

A mi asesora, la doctora Maritza Luna Valenzuela, su exigencia y aportes fueron fundamentales para la realización de esta investigación, siempre le estaré agradecido.

A los profesores de la Maestría “Enseñanza de las Matemáticas” de la Pontificia Universidad Católica del Perú, todos son muy profesionales, guardo los mejores recuerdos de sus enseñanzas en los diversos cursos que me brindaron. Sin lugar a duda, seguir esta maestría fue una de las mejores decisiones que he tomado, siento que hay un antes y un después en mi manera de concebir la enseñanza de las matemáticas.

A mis hermanos y sus familias, estuvieron conmigo en los momentos más difíciles de la pandemia, esto me permitió seguir estudiando.

A Joselyn y Tony, me siento afortunado de tenerlos, su alegría en el día a día me motivaron a no decaer en el cumplimiento de este estudio.



Índice

Introducción	13
Capítulo I: Problemática.....	16
1.1 Antecedentes	16
1.2 Delimitación del problema de investigación	34
1.3 Justificación.....	36
1.4 Pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos.....	40
Capítulo II: Marco teórico y Metodología.....	42
2.1 Teoría antropológica de lo didáctico (TAD).	44
2.1.1 Institución y Sujeto.....	45
2.1.2 Praxeología.....	45
2.1.3 Organización matemática.....	47
2.1.3.1 Completitud de una organización matemática.	47
2.1.4 Modelo Epistemológico de Referencia.	49
2.2 Metodología de investigación.	51
2.2.1 Análisis de una organización matemática.	53
Capítulo III: Estudio del objeto matemático	55
3.1 El objeto matemático en estudio: variable estadística.....	56
3.1.1. Organización de datos	59
3.1.2. Presentación de datos	61
3.2. Modelo Epistemológico de Referencia para la Representación Gráfica de Variables Estadísticas	62
3.2.1. Clasificación de datos estadísticos	64
3.2.1.1. Cualitativa	64
3.2.1.2. Cuantitativa.....	64
3.2.1.3. Cronológica	65
3.2.1.4. Geográfica.....	65
3.2.2. Formas para representar datos estadísticos	68
3.2.2.1 Representación escrita	68
3.2.2.2. Representación tabular	70

3.2.2.3. Representación semitabular	77
3.2.2.4. Representación gráfica.....	78
3.2.2.4.1. Gráficas de series de tiempo	81
3.2.2.4.2. Gráfico lineal o curva simple	82
3.2.2.4.3. Gráficas que expresan saldos netos.....	84
3.2.2.4.4. Gráficas de partes componentes	85
3.2.2.4.5. Gráfico de barras.....	87
3.2.2.4.6. Gráfica de Pareto	97
3.2.2.4.7. Gráfico circular o de sectores	98
3.2.2.4.8. Gráfico de área polar.....	102
3.2.2.4.9. Gráficas de puntos	103
3.2.2.4.10. Gráfico de dispersión	105
3.2.2.4.11. Gráfico de árboles de tallo y hoja	107
3.2.2.4.12. Gráfico de cajas (boxplot).....	108
Capítulo IV: Análisis del libro de texto.....	118
4.1 Momento de publicación del libro.....	118
4.2 Representatividad de la obra.	118
4.3 Estructura del libro.	123
4.4 Análisis ecológico del libro.	124
4.5 Análisis praxeológico del libro.....	125
4.6 Valoración de la organización estadística en el libro de texto analizado.....	162
Capítulo V: Conclusiones	168
Referencias Bibliográficas	171

Lista de tablas

Tabla 1. Investigaciones de análisis de texto en relación a gráficos estadísticos.....	17
Tabla 2. Principales resultados de investigaciones que conforman los antecedentes.....	26
Tabla 3. Investigaciones sobre el estudio de OM o elaboración de MER en el marco de la TAD.....	30
Tabla 4. Tipos de gráficos encontrados en el MER de gráficos estadísticos.	110
Tabla 5. Tipos de tarea encontrados en el MER de gráficos estadísticos.....	112
Tabla 6. Tipos de tarea encontrados en el análisis praxeológico del libro Matemática para no matemáticos.....	158
Tabla 7. Ejercicios según el tipo de representación de la variable estadística.	164



Lista de figuras

Figura 1. <i>Resumen de investigaciones sobre la representación gráfica de variables estadísticas en libros de texto, según el nivel educativo.</i>	25
Figura 2. <i>Modelo praxeológico.</i>	46
Figura 3. <i>Metodología de investigación.</i>	52
Figura 4. <i>Criterios para el análisis del bloque tarea-técnica.</i>	54
Figura 5. <i>Criterios para el análisis del bloque tecnología-teoría.</i>	54
Figura 6. <i>Variable estadística.</i>	57
Figura 7. <i>Clasificación de las variables estadísticas.</i>	58
Figura 8. <i>Matriz de datos.</i>	59
Figura 9. <i>Distribución de frecuencias.</i>	60
Figura 10. <i>Distribución de frecuencias por intervalos.</i>	61
Figura 11. <i>Quipu.</i>	63
Figura 12. <i>Distribución de frecuencias de una distribución cuantitativa.</i>	64
Figura 13. <i>Distribución de frecuencias a partir de una serie cronológica.</i>	65
Figura 14. <i>Serie geográfica.</i>	66
Figura 15. <i>Representación escrita del valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.</i>	69
Figura 16. <i>Representación tabular del valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.</i>	70
Figura 17. <i>La tablilla sumeria creada alrededor del 2600 a. C.</i>	72
Figura 18. <i>Primera tabla de mortalidad de John Graunt.</i>	73
Figura 19. <i>Partes de una tabla.</i>	74
Figura 20. <i>Estructura de una tabla de frecuencias.</i>	75
Figura 21. <i>Descripción de los elementos de la tabla de frecuencias.</i>	75
Figura 22. <i>Ejemplo propuesto para organizar datos.</i>	76
Figura 23. <i>Representación tabular propuesta para ejemplo de la figura 22.</i>	77
Figura 24. <i>Representación semitabular.</i>	77
Figura 25. <i>Primera construcción gráfica.</i>	78
Figura 26. <i>Primera representación de datos estadísticos.</i>	79
Figura 27. <i>Gráfico “línea de tiempo”.</i>	81
Figura 28. <i>Gráfico lineal usando los cuadrantes I y IV.</i>	82
Figura 29. <i>Deuda nacional de Inglaterra.</i>	83

Figura 30. <i>Gráfico lineal</i>	84
Figura 31. <i>Gráfico de partes componentes de la campaña del ejército napoleónico en Rusia</i>	86
Figura 32. <i>Gráfica de barras para dos categorías durante varios años</i>	88
Figura 33. <i>Gráfica de barras para varias categorías en dos años</i>	89
Figura 34. <i>Gráfica de barras para varias categorías que se subdividen en dos</i>	90
Figura 35. <i>Gráfica de barras de doble dirección</i>	91
Figura 36. <i>Gráfico de barras agrupado</i>	92
Figura 37. <i>Distribución de frecuencias</i>	93
Figura 38. <i>Representación gráfica de una distribución de frecuencias</i>	94
Figura 39. <i>Distribución de frecuencias con datos no continuos</i>	95
Figura 40. <i>Gráfico serie temporal paralela</i>	96
Figura 41. <i>Gráfica de Pareto</i>	98
Figura 42. <i>Gráfico circular</i>	99
Figura 43. <i>Gráfico de sectores</i>	100
Figura 44. <i>Gráfica de área polar</i>	102
Figura 45. <i>Conjunto de datos</i>	104
Figura 46. <i>Gráfica de puntos</i>	105
Figura 47. <i>Gráfico de dispersión</i>	106
Figura 48. <i>Gráfico de árbol de tallo y hoja</i>	108
Figura 49. <i>Gráfico boxplot o caja de Tukey</i>	109
Figura 50. <i>Esquema del MER de gráficos estadísticos</i>	116
Figura 51. <i>Tablas de distribución de frecuencias</i>	120
Figura 52. <i>Frecuencias y marca de clase</i>	121
Figura 53. <i>Definiciones para gráfico de barras, circular y de puntos</i>	122
Figura 54. <i>Capítulo 3 del índice del libro Matemáticas para no matemáticos</i>	124
Figura 55. <i>Situación 9</i>	126
Figura 56. <i>Situación 10</i>	129
Figura 57. <i>Solución del libro para la situación 10</i>	130
Figura 58. <i>Situación 11</i>	131
Figura 59. <i>Solución del libro para la situación 11 a)</i>	132
Figura 60. <i>Solución del libro para la situación 11 b)</i>	133
Figura 61. <i>Situación 12</i>	134
Figura 62. <i>Solución del libro para la situación 12 a)</i>	135

Figura 63. Solución del libro para la Situación 12 b).	136
Figura 64. Situación 13.	137
Figura 65. Solución del libro para la situación 13.	138
Figura 66. Ejemplo de gráfico de puntos.	139
Figura 67. Situación problema para practicar 1.	140
Figura 68. Situación problema para practicar 1 a).	141
Figura 69. Solución del libro para la situación problema para practicar 1 b).	142
Figura 70. Solución del libro para la situación problema para practicar 1 c).	142
Figura 71. Situación problema para practicar 2.	143
Figura 72. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 a).	144
Figura 73. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 b).	145
Figura 74. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 c).	146
Figura 75. Situación problema para practicar 3.	147
Figura 76. Solución del libro para la situación problema para practicar 3 a).	149
Figura 77. Solución del libro para la situación problema para practicar 3 b)	152
Figura 78. Situación problema para practicar 4.	153
Figura 79. Solución del libro para la primera parte de la situación problema para practicar 4.	153
Figura 80. Solución del libro para la segunda parte de la situación problema para practicar 4.	154
Figura 81. Situación problema para practicar 5.	155
Figura 82. Solución del libro para la situación problema para practicar 5 a).	156
Figura 83. Solución del libro para la situación problema para practicar 5 b).	156
Figura 84. Esquema del análisis praxeológico del texto analizado.	160
Figura 85. Preguntas relativas al cuestionamiento tecnológico.	163
Figura 86. Pregunta 1b) de la situación 11 y solución propuesta.	164
Figura 87. Lenguaje natural, tabular y gráfico.	165
Figura 88. Tarea directa e inversa.	166

Introducción

En el contexto de la pandemia mundial por COVID-19, los medios de comunicación mostraban todos los días, a través de gráficos estadísticos, reportes sobre los casos positivos de dicha enfermedad, según el país, la edad, el género y otras diferentes variables. De la misma manera, cuando se realizaron las elecciones presidenciales peruanas del año 2021, los medios de comunicación transmitían la información mediante gráficos estadísticos para resaltar ciertos resultados; inclusive, una vez elegido el presidente, constantemente presentaban información por medio de gráficos estadísticos, con relación, por ejemplo, a la aceptación del gobierno de turno. Al comentar estas situaciones con estudiantes, que promediaban los 17 años de edad, se notó la influencia por la manera en que se les presentaba la información, cuando la elección de determinado gráfico, a veces, no reflejaba la realidad de los datos obtenidos. En la vida diaria, se pueden encontrar múltiples situaciones en las que se presenta una cierta información mediante un gráfico estadístico, y muchas veces las personas no son conscientes de lo importante que es estar alfabetizado estadísticamente, que, según Gal (2002), se entiende dicho término como la “capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente, y comunicar información y mensajes estadísticos” (p.1).

En la presente investigación, se estudia una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en el libro de texto *Matemática para no matemáticos*, el cual contiene distintos temas de matemática y estadística. Dicho texto fue diseñado para alumnos del primer ciclo de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), que se decidieron por carreras afines al área de Letras y Humanidades. Desde el punto de vista como profesor de matemáticas, se pueden conocer las dificultades que suelen tener ellos al iniciar una carrera universitaria, sobre todo, si son estudiantes que se deciden por el área de Letras y Humanidades, en la cual deben cursar materias relacionadas a números y cuya importancia resulta vital para su formación integral. Los gráficos estadísticos son muy necesarios en las distintas etapas del desarrollo de carreras como Psicología, Sociología, Antropología, Gestión, etc., en las que, por ejemplo, los resultados de las investigaciones que se realizan en dichas profesiones se presentan por medio de gráficos estadísticos.

Diversos investigadores como Valentín (2015); Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín (2015); Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015); Díaz-Levicoy y Giacomone (2016); Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal (2018); Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero (2020); Méndez y Ortiz (2012), entre otros, evidencian un interés por el análisis de gráficos estadísticos en libros de texto para diferentes niveles educativos. Además, hay autores que

analizan las dificultades que presentan los alumnos y profesores para la comprensión, construcción e interpretación de gráficos estadísticos: Guimarães, 2002; Lima, 2010; Silva, 2012; Lemos, 2002; Arteaga y Batanero, 2010.

Esta investigación tiene por objetivo general describir, analizar y valorar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en el libro de texto *Matemática para no matemáticos* del curso de Matemática Básica, materia dirigida a los alumnos del área de Letras y Humanidades. El capítulo 3 de dicho texto está dedicado a “Análisis de Datos”. La presente investigación se centra en el estudio de los gráficos estadísticos señalados en el punto 3.3., “Representación gráfica: circular, de barras y de puntos”, que va desde la página 111 a la 120.

Se basará en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la que permitirá fundamentar la base estructural de esta investigación para así identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas que se utilizan en determinados tipos de tareas y cómo se articulan los discursos tecnológicos-teóricos en una organización estadística, presente en el libro de texto, para el estudio de representaciones gráficas de variables estadísticas.

Este trabajo está estructurado en cinco capítulos. En el primer capítulo, se presenta una revisión de la literatura existente en la que se hayan realizado análisis de textos enfocados a gráficos estadísticos, además de otros estudios que contribuyeron a la elección del marco teórico y la metodología a utilizar. Se delimita el problema de investigación, fundamentando su elección, para luego plantear la pregunta de investigación a la que se procura dar respuesta: ¿qué tan completa es una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica de nivel universitario para el área de Letras y Humanidades? En este capítulo, también se establece el objetivo general que es describir, analizar y valorar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica de nivel universitario para el área de Letras y Humanidades. Con el fin de concretar el objetivo general, se plantean tres objetivos específicos: identificar y describir una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas por medio de un modelo epistemológico de referencia; identificar y describir una organización estadística con respecto de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica de nivel universitario para el área de Letras y Humanidades; valorar una organización estadística del libro de texto mediante los indicadores de completitud de Fonseca (2004).

En el segundo capítulo, se desarrollarán los elementos teóricos de la TAD, teoría de la didáctica de las matemáticas que fundamenta el análisis praxeológico que realizaremos en la investigación. También, se propone la metodología a utilizar, la cual es cualitativa y de corte bibliográfico. Se toma lo establecido por Almouloud (2015) para realizar el análisis de texto, presentando tres etapas: “Etapa de Selección” (momento de publicación del libro, representatividad de la obra, estructura del libro), “Etapa de análisis” (análisis ecológico, análisis praxeológico), “Etapa de evaluación” (evaluación de tareas, técnicas y tecnologías); adicionalmente, se propone una “Etapa epistemológica”, en la cual se realizará un modelo epistemológico de referencia sobre gráficos estadísticos.

En el tercer capítulo, se realiza el estudio del objeto matemático “variable estadística”, en el que se detalla su clasificación, organización de los datos por medio de tablas de distribución de frecuencias, y la presentación de los datos mediante gráficos estadísticos. También se realizará un modelo epistemológico de referencia (MER) de gráficos estadísticos, teniendo como referencias diferentes fuentes, entre las cuales están los institutos nacionales de estadística de Perú y España; publicaciones sobre gráficos estadísticos, como *The Visual Display of Quantitative Information* de Tufte (1983), *La historia de la esquemática en la visualización de datos* de Pontis (2007); diversos libros de estadística, por ejemplo, *Estadística general aplicada*, de Croxton y Cowden (1967); *Estadística general*, de Haber y Runyon (1973); *Estadística*, de Triola (2004). Además, se tienen distintas investigaciones, por ejemplo, *Un estudio socioepistemológico de la resignificación de los usos de gráficos estadísticos en estudiantes de grado tercero de la básica primaria*, de Mosquera, Abadía y Palacios (2019), entre otras.

En el cuarto capítulo, basado en lo propuesto por Almouloud (2015), se realiza el análisis del libro de texto *Matemática para no matemáticos*, el cual se enfoca en la representación gráfica de variables estadísticas, desarrollando los siguientes puntos: momento de publicación del libro, representatividad de la obra, estructura del libro y análisis ecológico. También se realiza el análisis praxeológico, que describe los tipos de tareas encontrados, las técnicas que el texto plantea para su solución, las tecnologías que justifican las técnicas y la teoría que justifica las tecnologías. Además, por medio de los indicadores de Fonseca (2014), se valora una organización estadística encontrada en el libro de texto analizado.

En el quinto capítulo, se encuentran las conclusiones, consideraciones finales, y sugerencias para futuras investigaciones.

Por último, se encontrarán las referencias bibliográficas.

Capítulo I: Problemática

En este primer capítulo, se presentarán las investigaciones que forman parte de los antecedentes de este estudio, para luego realizar la delimitación del problema de investigación y la justificación del presente trabajo. Luego, se planteará la pregunta de investigación y, en concordancia con dicha pregunta, se establecerán el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación.

1.1 Antecedentes

En la presente investigación, el objeto de estudio es la variable estadística en su representación gráfica. Dado que en la revisión de los antecedentes todas las investigaciones encontradas hacen referencia de manera directa a “gráficos estadísticos”, en adelante, se considerará “representación gráfica de variables estadísticas” y “gráficos estadísticos” como equivalentes.

La literatura revisada corresponde al periodo del año 2012 hasta el año 2021. Inicialmente, se revisó el repositorio digital de tesis y trabajos de investigación PUCP; luego, en el repositorio de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUCSP); también en el catálogo de tesis de maestría y doctorado de la coordinación de la formación del personal de nivel superior (CAPES); y en Google Académico. Las palabras clave utilizadas en la búsqueda fueron gráficos estadísticos, análisis de texto, praxeología, organización matemática y modelo epistemológico. La búsqueda condujo a encontrar estudios realizados en países como España, Brasil, México, Costa Rica, Argentina, Chile, Colombia, Perú y Venezuela.

La revisión bibliográfica se llevó a cabo seleccionando investigaciones que hayan realizado análisis de texto enfocado al estudio de gráficos estadísticos. También se buscaron trabajos en los cuales se hayan realizado análisis de texto con respecto de algún objeto matemático, no necesariamente de gráficos estadísticos, pero que tomen como base la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) planteada por Chevallard (1999), en los que se utilicen las herramientas proveídas por dicha teoría, se describa la organización matemática presente en el texto analizado y se estudie el tipo de organización encontrada, en relación con su completitud. Además, se buscaron estudios en los que se hayan elaborado Modelos Epistemológicos de Referencia (MER) para distintos objetos matemáticos. Esto servirá como referencia para realizar un MER de gráficos estadísticos necesario para el posterior el análisis praxeológico del libro de texto escogido para la investigación.

Las investigaciones encontradas se clasifican en dos grupos:

- Investigaciones sobre análisis de texto en relación con la representación gráfica de variables estadísticas.
- Investigaciones enfocadas al estudio de Organizaciones Matemáticas o elaboración de Modelos Epistemológicos de Referencia.

A continuación, se detalla cada grupo:

Investigaciones sobre análisis de texto en relación con la representación gráfica de variables estadísticas.

En este punto, se muestran los estudios en los que presentan análisis de libros de texto enfocados a la representación gráfica de variables estadísticas. En la Tabla 1, se muestran las investigaciones que conforman los antecedentes encontrados.

Tabla 1. *Investigaciones de análisis de texto en relación a gráficos estadísticos.*

AÑO	AUTOR	TÍTULO	A/TL/TM
2012	Méndez, M. Ortiz, M.	Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional	TL
2014	Díaz-Levicoy, D.	Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española	TM
2014	Mateus, L.	Estudio de gráficos estadísticos usados en una muestra de libros de matemáticas para la educación básica y media en Bogotá	A
2015	Valentín, M.	Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del Ministerio de Educación	TM
2015	Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín M. M.	Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena	A
2015	Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.	Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española	A
2016	Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.	Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria: un estudio comparativo entre España y Chile	A
2016	Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B, López-Martín, M. M. y Piñeiro, J. L.	Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española	A
2016	Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P.	Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria	A

2016	Salcedo, A. y Ramirez, T.	Gráficos estadísticos en libros de texto de matemáticas venezolanos	A
2016	Díaz-Levicoy, D. y Giacomone, B.	Actividades asociadas a los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en Argentina	A
2017	Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P.	Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de educación primaria	A
2018	Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F.	Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de educación primaria en Perú	A
2018	Díaz-Levicoy, D., Osorio, M.	Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la educación primaria peruana	A
2019	Jiménez-Castro, M. y Arteaga, P.	Complejidad semiótica y nivel de lectura de gráficos estadísticos en libros de texto de la educación primaria en Costa Rica	A
2020	Jiménez-Castro, M., Arteaga, P., Batanero, C.	Los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en Costa Rica	A

Notas: A = Artículo, TL= Tesis de Licenciatura, TM = Tesis de Maestría.

Fuente. Elaboración propia

Para la presentación de cada estudio encontrado, de modo que se realice en forma estandarizada, se indicarán aspectos como el objetivo buscado, metodología, marco teórico y los principales resultados obtenidos.

Méndez y Ortiz (2012) presentan una investigación en la cual se centraron en el estudio de la elaboración de tablas y gráficos estadísticos realizada en 58 tesis de licenciatura en Psicología Educativa. Con dichas tesis, se realizó un trabajo exploratorio y descriptivo de corte cuantitativo, que utiliza el análisis de contenido y documental, principalmente. Para la clasificación, los autores utilizan el estudio del desarrollo de la lectura que fue propuesto por Curcio (1987), el cual está constituido por 4 tipos de lectura: a) leer los datos, b) leer entre los datos, c) leer más allá de los datos, d) leer detrás de los datos. Además, los autores consideran como marco teórico para la producción gráfica el propuesto por Arteaga (2011), cuyas clases de producción se clasifican en lo siguiente: a) representación de datos individuales; b) representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir una distribución; c) representación de una distribución de datos en distintos gráficos; y d) representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico.

Algunos de los principales hallazgos que Méndez y Ortiz (2012) mostraron fueron que en las tesis se elaboran primordialmente gráficos de los tipos “representación de una distribución de

datos en diferentes gráficos” y “representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico”. Con respecto del tipo de lectura, se halló más “leer entre los datos” y la lectura literal. Los gráficos más usados son los de barras y los sectores; los menos utilizados son los histogramas, polígono de frecuencias y gráficos de línea. Se detallan distintas dificultades en la construcción de los distintos gráficos y tablas, y las principales son estas: problemas en la amplitud de las escalas en el eje vertical, en el punto de origen del plano cartesiano, en el uso del lenguaje escrito en el gráfico, en los conceptos matemáticos representados. El 34.15% de los egresados utilizan las normas APA en la presentación de los gráficos. La conclusión a la que llegaron Méndez y Ortiz (2012) fue que el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje de la estadística, en particular la construcción e interpretación de gráficos estadísticos, constituyen un contenido de mucha utilidad para un psicólogo educativo.

El estudio realizado por Díaz-Levicoy (2014) se basa en lo propuesto por el enfoque ontosemiótico (EOS) respecto del conocimiento y la instrucción matemática, desarrollado por Godino y sus colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007). La metodología utilizada es cualitativa y cuyo nivel de estudio es de tipo exploratorio, que, según Escorcía (2010), permite la aproximación hacia un tema no tan estudiado. La investigación consta del análisis de 18 libros agrupados en tres series, el cual es utilizado del primero al sexto año de educación primaria de España. Estos libros de texto presentan gráficos estadísticos que, según el autor, eran complejos, y presentaban dificultad para su lectura y comprensión. En los resultados, se determinó que los gráficos que intervienen en las actividades planteadas son gráficos de barras, de líneas, de líneas acumuladas, de sectores, pictograma, histograma, gráfico de puntos, gráfico de dispersión y pirámide de población. De los mencionados, los de barras, líneas, sectores y pictogramas son los más frecuentes. De acuerdo con los documentos analizados, el autor recomienda el estudio de gráficos estadísticos de manera gradual y con datos en contextos cercanos. Las actividades en las que se involucran gráficos estadísticos en las tareas dadas definieron las presentes categorías: leer, calcular, construir, comparar, ejemplo, traducir, pasar a tabla, completar, describir variable, inventar problema o alguna combinación de ellas.

Mateus (2014) seleccionó libros para la enseñanza básica y media escolar, publicados desde el año 1960 hasta el 2010, los cuales obtuvo de la Biblioteca Nacional de Colombia, en Bogotá. Dicho estudio se enfocó en describir, caracterizar e interpretar los gráficos estadísticos que aparecen en los libros de texto. Para esto hace énfasis en tres constructos del ámbito de la educación estocástica: alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico. Además, para

su estudio, utilizó una metodología cualitativa desplegada en el campo de la educación estadística. En las diferentes descripciones, Mateus (2014) resalta que se prioriza el aula de clase obviando las aplicaciones a las distintas disciplinas científicas; también observó mayor inclinación por la alfabetización estadística que por el razonamiento o pensamiento estadístico. Esto quiere decir que se procura la obtención de los saberes estadísticos básicos en el transcurso de la escuela, como lo señala Zapata (2011). Un error frecuente es presentar el histograma de frecuencias como si fuera un diagrama de barras. En la investigación, se mostró un ejemplo de lo que se realizó en cada libro de texto, lo cual deja observar los elementos y la intencionalidad en la construcción de gráficos estadísticos.

La investigación de Valentín (2015) tiene por objetivo la descripción de la organización matemática de un texto de tercer grado de educación primaria, *Matemática 3*. Para dicha investigación, la autora considera como fundamento base la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), con la cual identifica los tipos de tareas, las tareas de estos tipos, las técnicas y las tecnologías que las justifican, y la teoría utilizada. Además, la autora verifica la presencia de los indicadores de Fonseca (2004) para describir cómo se presenta la organización praxeológica local. Valentín (2015) utiliza una metodología de corte bibliográfico, la cual permite realizar el estudio con base en la información hallada en el texto escogido, para así determinar la organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos. En dicho estudio, Valentín (2015) señala como resultado de que la parte del texto seleccionado está conformada por 10 tipos de tareas, 15 tareas, 2 técnicas, 13 tecnologías y una teoría. Además, la autora determinó la presencia parcial de los indicadores OML 4 y OML 6, establecidos por Fonseca (2004). El indicador OML4 refiere que una organización matemática local (OML) tiene mayor grado de completitud en la medida que existan técnicas con las que se puedan realizar tareas inversas a las presentadas; por otro lado, el indicador OML 6 describe que una OML será más completa si existen tareas “abiertas”, en las que no se establecen del todo, previamente, los datos e incógnitas. Debido a la presencia parcial de los indicadores OML 4 y OML 6, la autora establece que la praxeología local identificada en el texto analizado es relativamente completa.

Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López (2015) elaboran un artículo que analiza las variables que determinan los gráficos estadísticos en dos series de libros de texto utilizados para la educación primaria de Chile. Esta investigación se desarrolla en tres ejes: importancia del libro de texto en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la semiótica al trabajar con gráficos estadísticos, y niveles de lectura y construcción de gráficos estadísticos explicados por distintos autores. Utilizan una metodología cualitativa y exploratoria con análisis de contenido. En los

resultados, se notó el predominio del uso del gráfico de barras. En más del 90% de las actividades observadas, los autores encuentran dos niveles de complejidad semiótica: “representación de una distribución de datos” y “representación de una lista de datos sin formar una distribución”. Existe mayor presencia de las actividades de calcular, construir un gráfico y ejemplos; en menor proporción, se encontraron actividades como completar, traducir, crear problemas o detallar variables.

Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y Gea (2015) desarrollan un estudio en tres series de textos para la educación española en primaria, las cuales presentan gráficos estadísticos, con el objetivo de recomendar algunas mejoras para la enseñanza e instrucción de docentes que estén encargados de brindar dicho tema. Utilizan una metodología cualitativa exploratoria con análisis de contenido. Concluyen que predomina el gráfico de barras, al igual que la actividad de lectura con niveles adecuados, y diversidad en los niveles de dificultad del gráfico.

Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2016) realizan un estudio comparativo de la presencia de gráficos estadísticos en libros de texto utilizados para la educación primaria en España y Chile, con el objetivo de mejorar la formación de los docentes. Utilizan una metodología cualitativa de carácter descriptivo basada en el análisis de contenido. Concluyen, de manera general, que los textos analizados se adecúan a las directrices curriculares, pero se diferencian en el número de actividades. Asimismo, los autores indican que en los libros españoles se prioriza leer el gráfico, mientras que en los chilenos el cálculo; si se consideran las semejanzas en los dos casos, hay un predominio del gráfico de barras, un básico nivel de lectura y una representación de la disposición de datos en el gráfico.

Díaz-Levicoy, Giacomone, Del Mar, López y Piñeiro (2016) eligieron libros de texto digitales para educación primaria española, y analizaron cómo se muestran los gráficos estadísticos en ellos, con el objetivo de investigar si son idóneos para la enseñanza en ese nivel. Utilizaron la metodología cualitativa de carácter descriptivo, con análisis de contenido. Concluyen que sobresalen los gráficos de barras a la par de las actividades de leer, calcular y construir. Además, los autores indican que los aspectos cognitivos y epistémicos son los idóneos.

Díaz-Levicoy y Arteaga (2016) caracterizan los conflictos semióticos encontrados en una selección de 12 libros de texto que se utilizan desde primero hasta el sexto grado de educación primaria en Chile, tomando dos libros por cada grado, en relación con los gráficos estadísticos. Utilizan como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino. Obtuvieron como resultado la identificación y caracterización de

potenciales conflictos en actividades con gráficos estadísticos, los cuales podrían complicar la lectura e interpretación idóneas de los mismos.

Salcedo y Ramírez (2016) analizan, de la colección bicentenario, los libros de texto de matemática para la educación primaria (6 libros) y secundaria (5 libros), producidos por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela, que consideran las actividades propuestas sobre gráficos estadísticos. Utilizando la taxonomía de Curcio (1989), pidieron a tres profesores universitarios del curso de Estadística, con una experiencia mínima de 6 años en la capacitación de docentes de primaria, que pudieran identificar las actividades con gráficos estadísticos presentes en los libros de texto. Los autores obtuvieron como resultado, al analizar, un mínimo número de actividades, en las cuales a la mayoría se le pide construir el gráfico de barras. Se muestran pocos casos para la interpretación y, si en caso se diera, con mínima exigencia cognitiva. Recomiendan la revisión de dichos textos en lo que respecta a gráficos estadísticos.

Díaz-Levicoy y Giacomone (2016) tienen como objetivo analizar y describir el tipo de tareas que representan el significado institucional de los gráficos estadísticos en 12 libros de texto para el segundo ciclo de la educación primaria en Argentina. Utilizan la metodología cualitativa de carácter descriptivo con análisis de contenido. En los resultados obtenidos, los autores señalan que las tareas que más se presentan son construir y calcular. Estas están vinculadas a la realización de operaciones sencillas como cálculos aritméticos, porcentajes, proporciones. Además, evidencian el uso de gráficos estadísticos para la enseñanza de otros conceptos matemáticos. En la investigación, los resultados se comparan con otros estudios análogos realizados; por ejemplo, se indica que la actividad construir también destaca en la investigación de May (2009), Díaz-Levicoy (2014) y Díaz-Levicoy et al. (2015). Los autores refieren que en estos dos últimos estudios la actividad construir está entre las predominantes, pero no ocupa el primer lugar; además, señalan que las actividades calcular y leer son muy frecuentes en las investigaciones de Díaz-Levicoy (2014), Díaz-Levicoy et al. (2015) referentes a libros de texto en España y Chile.

Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga (2017), en cuatro series de libros de texto para el segundo ciclo de educación primaria de Argentina, hicieron un estudio de las tareas relacionadas con gráficos estadísticos, presentes en los libros de texto mencionados. Se apoyaron en el enfoque ontosemiótico (Godino y Batanero, 1994). Utilizaron la metodología cualitativa con análisis de contenido a un nivel exploratorio, que permitían estudiar el significado institucional de los gráficos estadísticos en Argentina. Los autores lograron identificar y analizar 44 actividades,

sobresaliendo los gráficos de barras, sectores y líneas; el nivel de lectura “leer dentro de los datos”; y los niveles semióticos “representación de un listado de datos sin resumir en una distribución” y “representación de una distribución”. También, identificaron las tareas de calcular, completar, construir, leer y ejemplificar. Finalmente, concluyen que en los libros de texto analizados se presenta poco énfasis en el trabajo con gráficos estadísticos.

Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez (2018) tomaron libros de texto para la educación primaria del Perú e hicieron un estudio de los gráficos estadísticos que aparecen en dichos textos. Usaron la metodología cualitativa de nivel descriptivo con base en el análisis de contenido, que reconozca el tipo de tarea que se plantea, los gráficos incluidos, el nivel de lectura y semiótica que se presenta. En los resultados, los autores determinan que las tareas que predominan son calcular y construir. Sobresale el gráfico de barras con un nivel básico de lectura y representación de distribución de datos en el gráfico.

Díaz-Levicoy y Osorio (2018) enfocaron su estudio en lograr una aproximación al significado institucional de gráficos estadísticos analizando 12 libros de texto de educación primaria del Perú, de los cuales 6 son distribuidos por el Ministerio de Educación del mencionado país y los otros 6 ofrecidos por la editorial Bruño, los cuales son de mayor difusión, según los autores. Se apoyaron en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Godino y Batanero (1994). Utilizaron la metodología cualitativa con análisis de contenido. De manera general, según los resultados obtenidos, los autores observaron que, en las dos series de libros analizados, el gráfico de barras era el más frecuente, seguido del gráfico de líneas. Además, identificaron la inclusión de gráficos no recomendados, contrario a lo que se señalaba en las directrices curriculares, como es el caso del histograma. Solo el 7.8% de las secciones en las que se introducían algún gráfico estadístico estaban dirigidas a su construcción. El análisis de los datos está por encima de la recolección de datos.

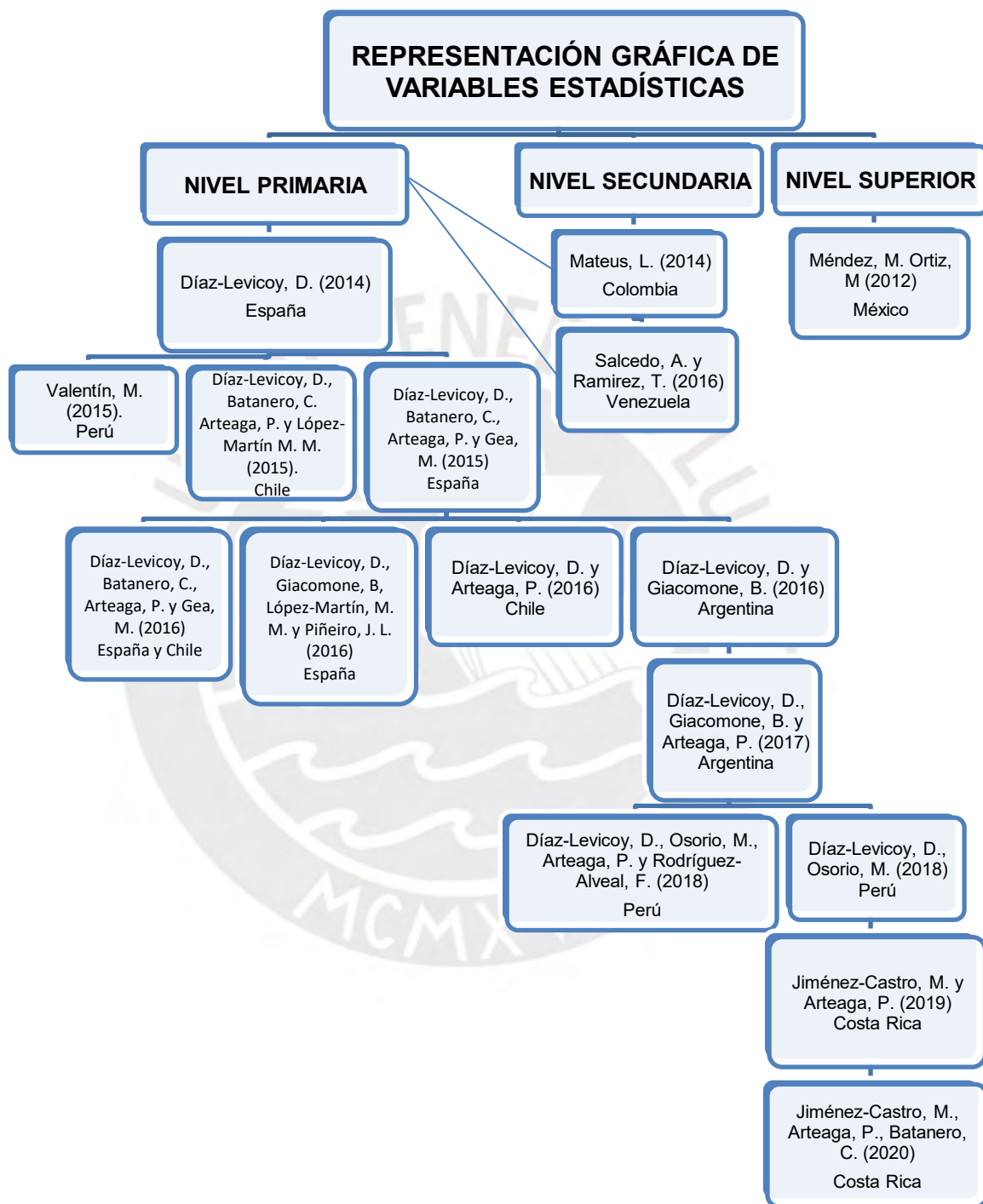
Jiménez y Arteaga (2019) describen los principales resultados al realizar un estudio sobre gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto que tienen mayor demanda para la educación primaria de Costa Rica, los cuales son distribuidos por la Asociación Libro para Todos y editorial Santillana. Utilizaron el enfoque ontosemiótico para realizar un análisis de gráficos estadísticos desde los significados institucionales y personales, usando la metodología cualitativa de análisis de contenido, que examina 167 unidades de registro que contenían gráficos estadísticos y 398 actividades relacionadas a gráficos estadísticos, repartidas en 2 series de libros de texto cada una con seis niveles educativos. Los resultados más notorios hicieron posible que los autores presentaran una comparación de las orientaciones curriculares de Costa Rica y

España. Esto resaltó las coincidencias y diferencias con otras investigaciones análogas. Por ejemplo, según los autores, los resultados obtenidos por Díaz-Levicoy et al. (2016), para el nivel 3 de lectura “leer más allá de los datos”, son poco frecuentes en los libros de texto españoles seleccionados para dicha investigación; en contraposición, el estudio de Jiménez y Arteaga (2019) explica que en los libros de texto de Costa Rica le dedican un espacio considerable (13,5%). Ahora bien, indican que la actividad que más sobresale en cada uno de los dos estudios en relación con la complejidad semiótica de un gráfico es el nivel 3, “representación de una distribución de datos”.

Jiménez, Arteaga y Batanero (2020) se concentran en investigar cómo en algunas series de libros de texto de educación primaria de Costa Rica se estudian los gráficos estadísticos. Realizan un análisis de contenido que se apoya en estudios que detallan la comprensión, niveles de lectura y complejidad de los gráficos estadísticos en dichos libros de texto. Según los resultados obtenidos por los autores, hay un predominio del gráfico de barras. Con relación al nivel de complejidad semiótica, resalta el representar una distribución; como segundo nivel de lectura, leer entre los datos, actividades de lectura y cálculo, y propósito de análisis. Dicho predominio del gráfico de barras, según los autores, coincide con la investigación de Díaz-Levicoy et al. (2016) y con las sugerencias dadas en las orientaciones curriculares en Costa Rica, España y Chile (MEC, 2006; M.E.P., 2012; Mineduc, 2012). En cambio, refieren que el nivel 3, “leer más allá de los datos”, es menos frecuente que en lo mostrado por la investigación de Díaz-Levicoy et al. (2016). La tarea más frecuente compete a leer, calcular y completar. Se introducen, paulatinamente, los gráficos de puntos y gráficos de sectores, que pasan del gráfico de barras, pictogramas y diagramas de puntos en el primer ciclo a gráficos circulares y de líneas o barras múltiples en el segundo ciclo de la educación primaria. Esto de acuerdo con las orientaciones curriculares costarricenses.

Los antecedentes permitieron establecer el camino para dar relevancia a la presente investigación, la cual se realizó a un libro de texto de nivel universitario, en contraste a lo que se encontró en los antecedentes. Se tiene una mayor cantidad de estudios enfocados a la representación gráfica de variables estadísticas en libros de texto para el nivel primario, como se observa en la Figura 1.

Figura 1. Resumen de investigaciones sobre la representación gráfica de variables estadísticas en libros de texto, según el nivel educativo.



Fuente. Elaboración propia.

A continuación, se presenta una tabla que resume los principales resultados de las investigaciones que conforman los antecedentes de nuestro estudio.

Tabla 2. Principales resultados de investigaciones que conforman los antecedentes.

AÑO	INVESTIGACIÓN	PRINCIPALES RESULTADOS
2012	Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas en tesis de la licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional (Méndez, M. Ortiz, M.)	<p>Se prioriza la construcción de gráficos de los tipos “representación de una distribución de datos” y “representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico”.</p> <p>Los gráficos de barras y los de sectores son los más usados; los menos utilizados son los histogramas, polígono de frecuencias y gráficos de línea.</p> <p>Las principales dificultades para la construcción de gráficos son problemas en la amplitud de las escalas en el eje vertical, en el punto de origen del plano cartesiano, en el uso del lenguaje escrito en el gráfico, en los conceptos matemáticos representados.</p>
2014	Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española (Díaz-Levicoy, D.)	<p>Los gráficos que aparecen con mayor frecuencia son los gráficos de barras, líneas, sectores y pictogramas.</p> <p>Según los documentos analizados, los gráficos estadísticos se deben trabajar de forma gradual y usando datos obtenidos de contextos cercanos.</p> <p>Las actividades encontradas son leer, calcular, construir, comparar, ejemplo, traducir, pasar a tabla, completar, describir variable, inventar problema o alguna combinación de ellas.</p>
2014	Estudio de gráficos estadísticos usados en una muestra de libros de matemáticas para la educación básica y media en Bogotá (Mateus, L.)	<p>El contexto del aula de clases está por encima de las aplicaciones de la estadística a diferentes disciplinas científicas.</p> <p>Mayor tendencia a alfabetizar que a incentivar el pensamiento estadístico.</p> <p>Un error detectado es presentar el histograma de frecuencias como un diagrama de barras.</p>
2015	Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del Ministerio de Educación (Valentín, M.)	<p>La organización praxeológica encontrada está formada por 10 tipos de tareas, 15 tareas, 2 técnicas, 13 tecnologías que integran los diferentes tipos de tareas y una teoría.</p> <p>Presencia parcial de los indicadores OML 4 y OML 6 propuestos por Fonseca (2004); en consecuencia, la autora concluye que la praxeología local es relativamente completa.</p>
2015	Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena (Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. Arteaga, P. y López-Martín M. M.)	<p>Predominio de los gráficos de barras, del nivel de complejidad semiótica del gráfico “representación de una distribución de datos” y de las actividades: calcular, construir y ejemplos.</p>

2015	Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española (Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.)	Predominancia del gráfico de barras y de la actividad de lectura.
2016	Gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria: un estudio comparativo entre España y Chile (Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M.)	Los libros se adecúan a las directrices curriculares, pero difieren en la cantidad de actividades. La principal actividad que se solicita en los libros españoles es leer, mientras que en los chilenos es calcular. Predominio de los gráficos de barras y la “representación de una distribución de datos”.
2016	Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española (Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B, López-Martín, M. M. y Piñeiro, J. L.)	Predominio del gráfico de barras, y de las siguientes actividades: leer, calcular y construir.
2016	Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria (Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P.)	Se logró identificar y caracterizar posibles conflictos en las actividades en las que intervienen gráficos estadísticos y que pueden dificultar una adecuada construcción y lectura de estas representaciones.
2016	Gráficos estadísticos en libros de texto de matemáticas venezolanos (Salcedo, A. y Ramírez, T.)	Los libros presentan un bajo número de actividades. La mayoría de ellas son para la construcción de gráficos de barras. Existen pocas situaciones para interpretar gráficos y la mayoría de baja demanda cognitiva.
2016	Actividades asociadas a los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en Argentina (Díaz-Levicoy, D. y Giacomone, B.)	Las actividades de mayor frecuencia, corresponden a construir, calcular, ejemplificar y leer.
2017	Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de educación primaria (Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P.)	Predominio de gráficos de barras, sectores y líneas. Los niveles semióticos “representación de un listado de datos sin resumir en una distribución” y “representación de una distribución” Se presentan las tareas calcular, completar, construir, leer y ejemplificar.
2018	Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de educación primaria en Perú (Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F.)	Predominio de las actividades calcular y construir, del gráfico de barras y la “representación de una distribución de datos” en el gráfico.
2018	Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la educación primaria peruana (Díaz-Levicoy, D., Osorio, M.)	Los gráficos están presentes en todos los niveles educativos, de acuerdo con las directrices curriculares (Minedu, 2009), incluso aquellos que no están recomendados para el curso correspondiente como el caso del histograma. El gráfico más frecuente es el de barras, con presencia en todos los cursos, seguido del gráfico de líneas.

		De todas las secciones en las que se incluían algún gráfico estadístico, solo el 7,8% de ellas están dirigidas a su construcción. Se prioriza el análisis de los datos en lugar de la recolección de los datos
2019	Complejidad semiótica y nivel de lectura de gráficos estadísticos en libros de texto de la educación primaria en Costa Rica (Jiménez-Castro, M. y Arteaga, P.)	“Representación de una distribución de datos” es la actividad más frecuente en las series de libros analizados.
2020	Los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en Costa Rica (Jiménez-Castro, M., Arteaga, P., Batanero, C.)	<p>Predomina el gráfico de barras y el tercer nivel de complejidad semiótica (representar una distribución).</p> <p>Se incorporan diagramas de puntos y gráficos de sectores de manera paulatina, que pasan del gráfico de barras, pictogramas y diagramas de puntos en el primer ciclo hacia gráficos circulares y de líneas o barras múltiples en el segundo ciclo de la educación primaria. Esta estrategia es coherente con las orientaciones curriculares costarricenses.</p> <p>Las tareas frecuentes son leer, calcular y completar, de acuerdo con las directrices curriculares costarricenses.</p> <p>El contexto más frecuente en el que se desarrollan los gráficos es el escolar, en concordancia con las directrices curriculares (M.E.P., 2012).</p>

Fuente. Elaboración propia.

Los principales resultados de los antecedentes encontrados, que se muestran en la tabla 2, otorgan un panorama de lo que se ha ido estudiando respecto de los gráficos estadísticos, en libros de texto. Para el desarrollo de la investigación, se han tomado en cuenta los siguientes resultados:

- En los libros de texto, hay un predominio en la utilización del gráfico de barras (Méndez y Ortiz, 2012; Díaz-Levicoy, 2014; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y Gea, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y Gea, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín, y Piñeiro, 2016; Salcedo y Ramirez, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018; Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero, 2020). El segundo gráfico más utilizado es el de sectores (Méndez y Ortiz, 2012; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, 2014).
- El nivel semiótico más presente en los libros de texto es “representación de una distribución de datos” en uno o más gráficos. Esto se refiere a la representación de una distribución de manera agrupada y con cálculo de frecuencias; los datos se

presentan de manera ordenada (Méndez y Ortiz, 2012; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y Gea, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018; Díaz-Levicoy y Osorio, 2018; Jiménez-Castro y Arteaga, 2019; Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero, 2020).

- En las tareas en las que se incluyen gráficos estadísticos, pueden surgir conflictos que impidan la adecuada construcción y lectura de estos (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2016). Entre las principales dificultades se observan los problemas en la amplitud de las escalas en el eje vertical, en el punto de origen del plano cartesiano, en el uso del lenguaje escrito en el gráfico y en los conceptos matemáticos representados (Méndez y Ortiz, 2012).
- Las directrices curriculares recomiendan estudiar los gráficos estadísticos de forma gradual utilizando contextos cercanos (Díaz-Levicoy, 2014). El contexto más frecuente es el escolar (Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero, 2020). A veces, se prioriza el aula de clases, en lugar de las aplicaciones de la estadística a distintas disciplinas científicas (Mateus, 2014).
- Las actividades más frecuentes son calcular y construir (Díaz-Levicoy, 2014; Díaz-Levicoy y Giacomone, 2016; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018).

En seguida, se mostrará otro grupo de investigaciones que servirán como referencia para el análisis praxeológico del libro de texto elegido para el presente estudio.

Investigaciones enfocadas al estudio de Organizaciones Matemáticas o elaboración de Modelos Epistemológicos de Referencia, todas en el marco de la TAD.

Se presentan trabajos que se centran en el análisis de Organizaciones Matemáticas (OM) o elaboración de Modelos Epistemológicos de Referencia (MER), no necesariamente enfocados a la representación gráfica de variables estadísticas. Todos estos estudios contribuyen a la elección de la TAD como marco teórico para nuestra investigación, además de ser buenas referencias de la forma como se utilizan las herramientas propias de esta dentro del análisis de diversas organizaciones matemáticas. En la Tabla 3, se muestran las investigaciones que conforman los antecedentes encontrados.

Tabla 3. Investigaciones sobre el estudio de OM o elaboración de MER en el marco de la TAD.

AÑO	AUTOR	TÍTULO	A/TL/TM
2012	Carrillo, M.	Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria	TM
2013	Carrillo, F.	Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior	TM
2014	Gonzales, C.	Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario	TM
2015	Becerra, A.	Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que se presenta un libro de texto del quinto grado de educación primaria	TM
2016	Álvarez, V.	Análisis de la organización matemática de los números racionales en un texto de primero de secundaria	TM
2017	Bustamante, E.	Un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones en la educación básica regular del Perú	TM
2018	Almeida, C. M. C.	<i>Um modelo didático de referência para o ensino de Probabilidade</i>	TM
2018	Najarro Alcócer, L.	Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria	TM
2019	Vargas Vargas, G. S.	Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria	TM

Nota: TM = Tesis de Maestría

Fuente. Elaboración propia.

Para la presentación de cada estudio encontrado, de modo que se haga en forma estandarizada, se tratará de señalar aspectos como el objetivo buscado, metodología, marco teórico y principales resultados obtenidos.

Carrillo (2012) realizó el análisis y descripción de la organización matemática respecto de las distintas concepciones de fracciones, en el ámbito de la TAD, encontradas en el libro de texto escolar *Matemática Quinto grado de Educación Primaria*, el cual es entregado por el Ministerio de Educación del Perú a todos sus colegios públicos. Con respecto de la metodología utilizada, la autora consideró que fue importante la definición de los criterios para el análisis del texto *Matemática Quinto Grado de Educación Primaria*. Señala que estos criterios le permitieron adoptar una posición en la que se entiende que, al hacer matemática con prácticas determinadas en una institución, pueden ser modelizadas y luego transformadas con el propósito de su enseñanza. Los criterios para el desarrollo del análisis del texto seleccionado son creación propia de la autora basados en el marco de la TAD. Asimismo, Carrillo (2012) estableció el criterio de

tomar en cuenta las tareas que utilicen las concepciones parte-todo, cociente, operador, razón y medida; considerar las representaciones e ilustraciones que se relacionen con dichas concepciones; e identificar la tarea propuesta y la técnica o técnicas presentadas. Carrillo (2012) también indica que en el libro de texto analizado sobresale la praxis o el “saber hacer” que, según la TAD, es el bloque práctico conformado por las tareas y las técnicas para solucionarlas. El hecho de realizar el análisis de las distintas concepciones de fracción (parte-todo, operador, cociente, razón) derivó en el reconocimiento de las praxeologías presentes en el libro de texto, que determinó así la influencia positiva o negativa en el aprendizaje del objeto matemático fracción.

Carrillo (2013) se centró en la descripción y análisis de las organizaciones matemáticas respecto de la función cuadrática que aparecen en dos libros de texto para enseñanza de nivel universitario utilizados en la Escuela de Economía de la Universidad Nacional del Callao. Utilizó una metodología cualitativa de corte bibliográfico, enmarcada por la TAD. En el libro *Métodos fundamentales de economía matemática*, de Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright, encontró técnicas para 7 de 10 tipos de tareas y 4 de 10 tareas presentan justificación, mientras que en el libro *Matemáticas para el análisis económico*, de los autores Knut Sydsaeter, Peter Hammond y Andrés Carbajal, la autora encontró que para 8 de 10 tipos de tareas presentan alguna técnica y 3 de 10 tipos de tarea presentan justificación; estos indicadores le hicieron concluir que se trataban de organizaciones matemáticas locales más o menos completas. Además, planteó una reorganización de los libros analizados, tomando en cuenta las praxeologías encontradas, las cuales están conformadas por distintos tipos de tarea, técnicas y tecnologías utilizadas.

El estudio de Gonzales (2014) realizó un análisis y descripción de la organización praxeológica de los conceptos de escala y proporción en un texto universitario de matemáticas para arquitectos. Es un estudio de enfoque documental que se valió de las herramientas que brinda la TAD, mediante la cual logró identificar que el texto presentaba 3 tipos de tareas, 9 tareas, 11 técnicas, lo que la llevó a concluir la presencia de una praxeología local, en la cual el tipo de tarea predominante es el de valor desconocido.

La tesis de Becerra (2015) describe y analiza la organización praxeológica en torno al objeto matemático cuadriláteros, la cual se presenta en un libro de texto para el quinto grado de educación primaria. Utilizó una metodología de tipo cualitativa y de corte bibliográfico. El marco utilizado fue la TAD, por medio de la cual la autora pudo describir la organización matemática presentada en el libro de texto; encontró la presencia de 9 tipos de tareas, 23 tareas, 6 técnicas 14 elementos tecnológicos y una teoría; también determinó que la praxeología dominante es

“saber hacer” frente a la del “saber”, en la actividad matemática presente en el libro de texto analizado. Para el análisis de dicha organización matemática, se verificaron los indicadores de Fonseca (2004) de los cuales se determinó la presencia parcial de estos, además del no cumplimiento del indicador OML 7; por estos motivos, en lo que respecta al grado de completitud, determinó que la organización matemática presente en el texto seleccionado es relativamente completa.

Álvarez (2016), teniendo como foco a los números racionales, identificó las características de la organización matemática encontrada en los libros de texto para primer año de secundaria e hizo una valoración de dicha organización por medio de los indicadores de Fonseca en el marco de la TAD. Utilizó una metodología cualitativa de corte bibliográfico.

Los resultados determinados por el autor muestran 9 tipos de tareas en el capítulo “Fracciones” y 6 en “Números Decimales”. Según este, las técnicas para resolver dichas tareas no se presentaban en todos los casos, y las que estaban presentes no mostraban las justificaciones (en su mayoría). En consecuencia, indica que se prioriza el “saber hacer”. Respecto de los indicadores de completitud, determinó que se trata de una organización matemática relativamente completa, ya que solo se encontró la presencia del cuarto indicador, mas no el quinto, y los demás de manera parcial.

Bustamante (2017) tiene por objetivo la construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) en relación con el objeto matemático sucesiones en la escuela básica regular por medio de la modelización. Teniendo como marco teórico la TAD, emplea una metodología cualitativa, en la que no recolecta datos numéricos, sino las tareas de documentos curriculares oficiales para proponer el MER. En las conclusiones, Bustamante (2017) hace notar la existencia de distintas definiciones de sucesión, lo cual posiblemente causaría confusión en los alumnos; también señala que, en los documentos curriculares, las tareas que tienen que ver con sucesión: se enfocan más en lo numérico y no en las figuras. Finalmente, concluye que en todos los textos se observa una desarticulación de las praxeologías asociadas a sucesión. Por medio de la modelización, el investigador logró encontrar rasgos de un Modelo Epistemológico Vigente (MEV) asociado a sucesiones en la educación básica regular del Perú, y señala que se podría usar para caracterizar o comparar otros MER de sucesiones.

La investigadora Almeida (2018) realizó un estudio sobre probabilidades que integra sus interpretaciones: clásica y frecuentista. Así, concierta con 3 docentes de una escuela pública federal en Salvador – BA un posible modelo de enseñanza en el marco de la TAD, cuyos objetivos son presentar un estudio histórico epistemológico sobre el concepto de probabilidad, realizar un

análisis institucional de documentos oficiales en relación de la noción de probabilidad, para finalmente describir un modelo didáctico de referencia. Se realizaron 6 reuniones, en las cuales la autora hace experimentar a los participantes de una secuencia didáctica, la cual puede usarse en clase de tercero de secundaria. La autora concluye que es necesaria la formación de profesores para que enseñen Probabilidad con una visión completa de aleatoriedad.

Najarro (2018) tiene por objetivo describir las características del modelo epistemológico dominante de proporcionalidad que se encuentran en los libros de texto oficiales de matemática de educación secundaria. El autor utiliza una metodología cualitativa con corte bibliográfico, basándose en la TAD. Para esto toma como referencia modelos epistemológicos de referencia en relación con la proporcionalidad para poder hacer una descripción de la organización matemática. Asimismo, realiza una revisión de documentos curriculares oficiales para luego analizar y describir por medio de praxeologías los libros de texto otorgados a estudiantes y los manuales proveídos a docentes. En los libros de texto, se encontraron 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos; y en los manuales el autor identificó los mismos discursos tecnológicos y la misma cantidad de tipos de tareas compuestas por 15 tareas y 23 técnicas. El autor concluye que el modelo epistemológico dominante en torno a la proporcionalidad en los materiales educativos escolares no es el del álgebra como instrumento de modelización, pues las tareas y técnicas de la modelización discursiva, y de la modelización proporcional se presentan de manera dominante en todos los grados de la educación secundaria; además, concluye que las situaciones presentadas en los manuales para los docentes requieren una mayor abstracción por parte del alumno.

Vargas (2019) se centra en el objeto matemático seno y coseno basándose en la TAD. Tiene como objetivo construir un Modelo Praxeológico de Referencia que articule las distintas organizaciones matemáticas en las que se apliquen el seno y coseno tanto en el triángulo rectángulo como en el plano cartesiano. La metodología usada por el autor es cualitativa y aplica el mecanismo para análisis de texto elaborado por Chaachoua; para la construcción del Modelo Praxeológico de Referencia, se toma como base la estructura propuesta por Chaachoua, Ferraton y Desmoulins. Vargas (2019) concluye que el origen de las nociones trigonométricas seno y coseno son las identidades trigonométricas; por tal motivo, recomienda que debe estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

Los estudios de Carrillo (2013) y Gonzales (2014) constituyen una referencia importante para nuestro estudio porque en ellos se realiza el análisis de organizaciones matemáticas en libros de texto de nivel superior, basados en la TAD, en concordancia con lo que propone en la

investigación. El estudio de Vargas (2019) resulta de interés por la metodología que utiliza para el análisis de texto, basada en lo propuesto por Chaachoua. Dicha metodología es la referencia de la que se toma para esta investigación, la cual propone Almouloud (2015). Los trabajos de Bustamante (2017), Almeida (2018) y Najarro (2018), al ser propuestas de modelos epistemológicos, sirvieron para dar forma al MER de gráficos estadísticos que se elaboró, el cual fue necesario para realizar el posterior análisis praxeológico de la parte del libro de texto elegido en este estudio. La lectura de las demás investigaciones de este punto fue necesaria para estructurar el análisis praxeológico realizado (más en la forma que en el fondo).

Al terminar la revisión de los antecedentes, se evidencia el interés por el estudio de la representación gráfica de variables estadísticas. Los estudios encontrados, en su mayoría, analizan libros de texto de nivel primario. Por otro lado, se observa que existen diversas investigaciones en las que se analiza la organización matemática presente en libros de texto, que toman como referencia a la TAD y utilizan los indicadores de Fonseca para valorar la organización matemática presente en el respectivo texto analizado.

1.2 Delimitación del problema de investigación

Para delimitar el problema de investigación, teniendo como base distintos estudios, se muestra la importancia de estudiar estadística, puntualmente, la representación gráfica de variables estadísticas. Además, se exhiben algunos aspectos relacionados con su aprendizaje y finalmente se muestra el porqué es fundamental el análisis de libros de texto.

Según Batanero (2001), aprender estadística fomenta en los estudiantes un razonamiento crítico, los cuales adquieren la base para estudiar otras disciplinas, por ejemplo, ser científicos, administradores, políticos con la capacidad de pensar analíticamente. Así, se convierten en ciudadanos capaces de tomar decisiones acertadas en favor del desarrollo de un país.

Cordani (2001) defiende el aprendizaje de la estadística como proceso, y que los conceptos o técnicas enseñados deben estar asociados a un contexto con ejemplos reales y motivadores; de esta manera, los estudiantes pueden visualizar la problemática y relacionarla con el día a día, lo cual generará un equilibrio entre la técnica y la práctica.

Garfield y Ben-Zvi (2008) resaltan la importancia de los gráficos en la enseñanza de la estadística. Proponen un entorno de aprendizaje que promueva el razonamiento estadístico. Para ello, será necesario trabajar con datos reales, introducir el uso de la tecnología y una participación activa de los alumnos en su proceso de aprendizaje.

La elección de un tipo de gráfico podría resaltar, pero también ocultar el verdadero origen de la información, según lo investigado por Cavalcanti y Guimarães (2008), quienes hicieron un estudio sobre gráficos estadísticos en medios de comunicación impresos, y determinaron que en el 39% de ellos la proporcionalidad de las escalas no era la correcta. Los autores sugieren que es importante formar lectores estadísticamente competentes, dado que muchas veces ocurre que la información es presentada de manera sesgada o engañosa; esto último también es corroborado por Lemos (2006).

En relación con la importancia de la enseñanza de las matemáticas utilizando gráficos estadísticos, Grymusa (2015) menciona que la relación que se puede establecer entre las definiciones matemáticas con otros campos del saber resulta ser más notoria si se hace por medio de gráficos estadísticos.

Si bien es cierto, los conceptos estadísticos son abordados desde los primeros años de la etapa escolar, existen diferentes estudios en los que se concluyen que existen dificultades por la comprensión de gráficos estadísticos por parte de alumnos, pero también de profesores, en tareas que necesitan habilidades tanto de construcción como de interpretación (Guimarães, 2002; Lima, 2010; Silva, 2012; Lemos, 2002; Arteaga y Batanero, 2010). Estas investigaciones señalan que las dificultades en el manejo de la representación de gráficos estadísticos ocurren por la denominación de los ejes, títulos, descripción de variables y la escala.

Con relación a la utilización de gráficos estadísticos en la enseñanza de la estadística para la educación superior, Jacobini (1999) indica que es muy común que se centre en aspectos como construir y hacer cálculos, pero no interpretar: se suelen utilizar datos poco relacionados al contexto del alumno. Esto tiene como consecuencia que estudiar Estadística se reduzca a solo utilizar las fórmulas vinculadas a técnicas estadísticas.

En esta parte, se abordará la importancia del análisis de texto, para lo cual se presentan algunas investigaciones.

La tesis doctoral de Vásquez (2012), que hace referencia al impacto que tiene el libro de texto en un aula de clases, señala que la correcta selección del libro de texto es vital para el correcto desarrollo del proceso educativo. De esto dependerá el buen rendimiento académico, y el esperado desarrollo de habilidades y destrezas esperadas en los estudiantes.

El estudio de Braga y Bolver (2016) señala que el libro de texto es un recurso fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, incluso a pesar de los avances tecnológicos.

Bueno (2017) afirma que el libro de texto se conforma como un material currículo que encamina el trabajo del profesor, el cual puede reproducirlo, adaptarlo o realizar alguna creación; en consecuencia, según el autor, analizar un libro de texto puede mostrar cuáles son los contenidos a estudiar y cómo se están trabajando en clase.

Herbel (2007) describe al libro de texto como un recurso educativo relevante, el cual constituye un paso intermedio entre las directrices curriculares y el currículo desarrollado en el salón de clase. El autor también explica que el libro de texto contiene la adaptación de contenidos para ser enseñados de la mejor manera a los estudiantes, la cual considera sus edades y desarrollo cognitivo, definido por Chevallard (1991), como *transposición didáctica*.

Respecto del análisis de texto enfocado al estudio de objetos matemáticos, Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga (2017) enfatizan que esto es una primera aproximación a su significado institucional y de referencia.

Según Ortiz (2012), es muy importante que la información contenida en los libros de texto sea veraz: el docente siempre debe estar pendiente del cuidado y la fiabilidad de los contenidos en los libros de texto que utiliza.

El análisis de libros de texto se configura como una línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas (Gómez, 2011).

1.3 Justificación

La enseñanza de los gráficos estadísticos está incluida en las directrices curriculares a nivel internacional desde la educación primaria, como se ve en los estándares de Estados Unidos (*National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Common Core State Standards Initiative, 2010*); también lo propone el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (MECD) (España, 2014), los Parámetros Curriculares Nacionales de Matemática en Brasil (Brasil, 1997), o las directrices curriculares del Ministerio de Educación de Chile (Mineduc) (Chile 2012), entre otros.

En el contexto peruano, para la organización del área de Matemáticas, el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) propone tres ejes: Números, relaciones y operaciones; Geometría y medición; y Estadística. El DCN (2009) establece:

“Los estudiantes deben comprender elementos de estadística para el recojo y organización de datos, y para la representación e interpretación de tablas y gráficas

estadísticas” (p.188). Por tal razón, el DCN (2009) indica que los alumnos del tercer ciclo deberían poder interpretar relaciones entre un par de variables, para situaciones cotidianas y evaluarlas usando lenguaje gráfico; los alumnos de cuarto ciclo deberían estar en la capacidad de solucionar problemas con datos estadísticos en su contexto y poder transmitir los datos obtenidos por medio de tablas y gráficos estadísticos. Además, para los alumnos del quinto ciclo, se espera que desarrollen la competencia: “Resuelve con autonomía y formula con seguridad, problemas cuya solución requiera establecer relaciones entre variables, organizarlas en tablas y gráficas estadísticas, interpretarlas y argumentarlas” (p.189)

También se observa que en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB, 2016) figura la competencia 25: “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” (p.141), en la cual se requiere la capacidad de: “[...] representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos...” (CNEB, 2016, p.141)

Se debe considerar lo que establece el Mapa de Progreso de Estadística y Probabilidad, en el área de matemática, creado por el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (Perú, 2013), en el cual se especifica que el desarrollo estadístico debe enfocarse en la recopilación y el procesamiento de los datos, interpretación y valoración de los datos, y el análisis de situaciones de incertidumbre.

Bosch, Fonseca y Gascón (2004) realizaron una investigación bajo el marco teórico de la TAD y observaron que se presentan dificultades en el tránsito de la enseñanza aprendizaje de matemáticas de la secundaria a la universidad. Evidencian un elevado índice de fracaso en los alumnos de primeros ciclos de universidad, con base en el análisis de las organizaciones matemáticas presentes en la secundaria frente a las de la universidad.

Con respecto de la importancia de la información estadística en los cursos de pregrado y la formación profesional del estudiante, Costa (2012) dice que es una herramienta con la que se puede tener un mejor entendimiento de los aspectos económicos, políticos y sociales, que ocurren en la vida diaria. De esta manera, el estudiante tendrá la opción de tener un mejor panorama del funcionamiento de su mundo profesional. La estadística está presente en prácticamente todos los cursos de educación superior. Esto se debe a que es una importante herramienta de síntesis, interpretación, análisis de datos, además de brindar elementos para el control, gestión y mejora constante de procesos (Novaes, 2004)

El aprendizaje de la estadística por parte de estudiantes que siguen carreras universitarias que no son orientadas a la matemática es un reto (Eudave, 2007). Los gráficos son una forma de comunicación destacada en las ciencias sociales, complementados con información usualmente de naturaleza textual. La mayoría de las materias o investigaciones que realizan estudiantes universitarios del área de ciencias sociales se elaboran con el formato de gráficos, lo cual genera que estos estudiantes debieran desarrollar habilidades de interpretación, contrastación y construcción de gráficos (Postigo, Echeverría y Oller, 2010). En las clases universitarias, se suele sobreentender que los estudiantes poseen un nivel admisible en la comprensión de gráficos estadísticos, por lo que se dedica más tiempo a las representaciones textuales. Entonces, no es de extrañarse que los estudiantes presten poca atención a los datos representados gráficamente y menos que los asocien con otro tipo de representación (Pérez et al., 2009).

En el plan de estudios de Estudios Generales Letras (EE.GG.LL.) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), para las carreras de Antropología, Sociología, Ciencias Políticas y Gobierno, Psicología y Relaciones Internacionales, figura como requisito para pasar a facultad el curso de Estadística, el cual tiene como prerrequisito el curso de Matemática Básica, en el que se ven aspectos de la estadística, como son los gráficos estadísticos (Estudios generales letras, PUCP, 2022). También se encuentra la presencia de la enseñanza de gráficos estadísticos en el primer ciclo de la Facultad de Estudios Interdisciplinarios de la PUCP, que sirve como base para el curso Estadística Aplicada, que se brinda en el segundo ciclo. Esta preocupación por introducir el tema de gráficos estadísticos en un primer ciclo de una carrera de Letras o Humanidades también se observa en las carreras de Derecho y Lingüística brindadas por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Dicho tema se enseña en un curso introductorio de Matemática para el primer ciclo de dichas carreras (Escuela profesional de derecho, UNMSM, 2018). El curso de Estadística es enseñado en distintas universidades para carreras asociadas a las letras y las humanidades. Sin embargo, en el primer ciclo, muchas de ellas no proveen nociones de gráficos estadísticos, a pesar de ser muy necesarios, pues sirven como base para el posterior curso de Estadística.

Después de haber hecho la revisión bibliográfica para exponer diferentes aspectos que fundamenten el presente estudio, se concluye que es pertinente por las siguientes razones:

- En la revisión de los antecedentes, se ha encontrado un interés internacional por realizar análisis de texto enfocado a la representación gráficos estadísticos, aunque en el país aún son escasos. Cabe señalar que la mayoría de estudios se han enfocado en libros de

texto de nivel primario (Díaz-Levicoy, 2014; Valentín, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero et al., 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone et al., 2016; Díaz-Levicoy y Arteaga, 2016; Díaz-Levicoy y Giacomone, 2016; Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017; Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018; Díaz-Levicoy y Osorio, 2018; Jiménez-Castro y Arteaga, 2019; Jiménez-Castro, Arteaga y Batanero, 2020). Para el nivel superior, solo encontramos una investigación (Méndez y Ortiz, 2012), cabe resaltar que en este estudio se analizaron los gráficos estadísticos presentes en 58 tesis de licenciatura en Psicología Educativa. En ese sentido, al no encontrar análisis de texto enfocado a gráficos estadísticos en libros de texto de nivel superior, el presente estudio resulta ser un aporte innovador.

- Para describir y analizar las organizaciones matemáticas en libros de texto, enfocados a algún objeto matemático, se han encontrado diversos estudios (Carrillo, 2013; Gonzales, 2014; Becerra, 2015; Álvarez, 2016). Estas investigaciones muestran una referencia sobre la utilidad que tienen las herramientas que brinda la TAD para analizar textos, además de la forma como se valoran las organizaciones matemáticas usando los indicadores de Fonseca (2004). Por tal razón, dichos instrumentos serían aplicables a nuestra investigación.
- La enseñanza de los gráficos estadísticos está incluida en las directrices curriculares a nivel nacional (DCN, 2009; CNEB, 2016; Perú, 2013) e internacional (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000; *Common Core State Standards Initiative*, 2010; España, 2014; Brasil, 1997; Chile, 2012). De esta manera, se observa un notorio interés por los gráficos estadísticos.
- El estudio de la estadística, y en particular de los gráficos estadísticos, es importante, ya que en la vida cotidiana se presentan muchas situaciones en las que se tienen que tomar decisiones basadas en datos organizados con distintos tipos de gráficos estadísticos. Es necesario fomentar la alfabetización estadística.
- Se han encontrado estudios que describen diferentes dificultades para el proceso enseñanza aprendizaje de gráficos estadísticos (Guimarães, 2002; Lima, 2010; Silva, 2012; Lemos, 2002; Arteaga y Batanero, 2010). Esto hace necesaria una revisión de los libros de texto utilizados para su enseñanza.

- Se evidencia un alto índice de fracaso en la enseñanza aprendizaje de matemáticas en el tránsito de la secundaria a la universidad (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).
- En la universidad, no se suele tomar mucha importancia a la enseñanza de gráficos estadísticos, ya que se asume que los estudiantes tienen un nivel de comprensión aceptable (Pérez et al., 2009). Sin embargo, los gráficos estadísticos son muy necesarios en el desarrollo profesional de alumnos universitarios, en particular, dentro del área de Ciencias Sociales (Postigo, Echeverría y Oller, 2010).
- En nuestro país, la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) brindan un curso inicial de Matemática, en el que se enseñan gráficos estadísticos para carreras de Letras. Esto se da independientemente del curso de Estadística (Escuela Profesional de Derecho, UNMSM, 2018; Estudios Generales Letras, PUCP, 2022).

Todo este conjunto de razones mencionadas hace que se justifique el analizar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades.

1.4 Pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos.

Los antecedentes encontrados y las razones que justifican la presente investigación motivan a poder estudiar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas que se muestra en el libro de texto *Matemática para no matemáticos*, el cual es utilizado como texto de referencia por los alumnos de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el curso Matemática Básica, que se dicta en el primer ciclo. La pregunta de investigación a la cual se le procura dar respuesta, en términos de la TAD, es la siguiente: ¿qué tan completa es una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades?

Con respecto de los objetivos de la investigación, el objetivo general es describir, analizar y valorar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades. Los objetivos específicos son los siguientes:

- Identificar y describir una organización estadística de la representación gráfica de

variables estadísticas por medio de un modelo epistemológico de referencia.

- Identificar y describir una organización estadística con respecto de la representación gráfica de variables estadísticas en el libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades.
- Valorar una organización estadística del libro de texto mediante los indicadores de completitud de Fonseca (2004).



Capítulo II: Marco teórico y Metodología

Como ya se ha detallado en los antecedentes encontrados para nuestra investigación, existen varios estudios que se centran en analizar la representación gráfica de variables estadísticas en libros de texto. En este punto, se mostrarán las razones por las que es pertinente tener como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Respecto de la importancia de lo social en la determinación de todos los fenómenos humanos, Castela (2017) señala que para poder vencer los obstáculos y lograr una mejora en la enseñanza, por ejemplo, se deben indagar los motivos que se originan en el contexto social, y realizar los posibles cambios a este nivel, mas no a nivel del individuo. Para lograr un desarrollo pleno de su naturaleza humana, el individuo necesita de medios social e históricamente elaborados que se sitúan fuera de él.

El enfoque antropológico no pretende eliminar los análisis cognitivos en relación con las nociones de los alumnos y posibles trabas que supeditan su desarrollo. Según Gascón (1998), más bien, lo que pretende es la integración de todos los análisis, considerando la relación institucional a las obras matemáticas como prioritario, ya que de su análisis dependen todos los demás.

Gascón (1998) expresa que el enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1992) es consecuencia del desarrollo de la transposición didáctica. Dicho enfoque propone que la actividad matemática debe ser modelizada como una actividad humana, y no solamente como la creación de un grupo de definiciones; en consecuencia, el enfoque antropológico integraría visiones epistemológicas, sociológicas, psicológicas, etc.

La TAD presenta las herramientas para analizar dispositivos didácticos como son la clase de matemática, de teoría, de problemas, libro de texto, dispositivos de evaluación, etc., y determinar las posibles consecuencias de su uso (Gascón, 1998; Almouloud, 2015). También permite describir y explicar diversos fenómenos didácticos, por ejemplo, el “problema del diseño del currículo de matemáticas” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). González (2020) señala que, según el enfoque de la TAD, por medio de documentos curriculares, libros de texto, pruebas nacionales, etc., se puede elaborar una organización matemática (en este caso, estadística) que permita planificar la enseñanza de algún tema en particular; de esta manera, se comunica qué y cómo se enseña, dando forma al conocimiento.

Chaachoua y Comiti (2014) señalan que analizar libros de texto es provechoso para

muchos temas de estudio, pero es fundamental considerar el contexto institucional en el que se han producido ya que los programas definen los objetos a enseñar, objetivos y desafíos para la docencia, pero no pueden determinar por sí mismos la relación institucional con el objeto. Por esta razón, es importante el aporte de las herramientas que ofrece la TAD para el análisis de libro de texto, en el que se establece que existe una relación institucional para cada objeto con la institución a la cual pertenece.

Con base en lo propuesto por la TAD, se puede crear una metodología para poder realizar el análisis de materiales didácticos, como son los libros de texto o cualquier otro material que tenga finalidad la enseñanza o aprendizaje de las matemáticas (Almouloud, 2015).

En el estudio de Bosch, Fonseca y Gascón (2004), se observa cómo el aporte de la TAD puede explicar el fenómeno del elevado fracaso en estudiantes de primer ciclo de universidad, tomando como base la naturaleza y diversidad de las organizaciones matemáticas dadas en la educación secundaria y universitaria, que establecen comparaciones entre ellas que permiten tener una mejor comprensión de las dificultades que existen en el tránsito entre ellas.

En resumen, se concluye lo siguiente:

- Para superar las dificultades en la enseñanza, se buscarán los causales en el contexto social. Luego, se realizarían los cambios a nivel de la misma organización social. Esto lleva a pensar que si se desea hacer un análisis de texto, como en la presente investigación, lo ideal es hacerlo a nivel de organizaciones matemáticas (en este caso, estadísticas) para encontrar las posibles causas de las dificultades en la enseñanza de los conceptos dados en el texto elegido.
- El enfoque antropológico integra variados enfoques como los epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, etc. La TAD considera como objeto primario de investigación la relación entre instituciones. El hecho de realizar la presente investigación, tomando como base la TAD, no dejará de lado el aspecto cognitivo.
- El marco teórico propuesto por la TAD permite la descripción y estudio de libros de texto y puede determinar las consecuencias de su uso. Propone la (re)creación de organizaciones matemáticas para la enseñanza de algún contenido específico. Además, con base en las nociones dadas por la TAD se puede obtener una metodología para realizar análisis de texto. Precisamente la presente investigación tiene como objetivo general describir y analizar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel

universitario para el área de Letras y Humanidades. Se puede valer de lo que propone la TAD para tratar de lograr dicho objetivo. Además, se puede obtener, con esta teoría, el método para el análisis de texto que se pretende realizar, según lo propuesto por Almouloud (2015).

Todas las razones expuestas llevan a determinar la pertinencia de utilizar como marco teórico de la presente investigación a la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

A continuación, se describirán los aspectos más importantes que propone la TAD, los cuales son de interés para esta investigación.

2.1 Teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Bosch, García, Gascón e Higuera (2006) plantean un par de problemas que consideran que podrían ser el origen de la TAD: por un lado, a un investigador le es muy necesario independizarse de los modelos epistemológicos dominantes (Chevallard, 2006), es decir, de la forma como se transmite el conocimiento y la actividad matemática en determinada institución. Por otro lado, un investigador debe tener un constante cuestionamiento sobre las dificultades o la forma como se genera el desarrollo de la enseñanza aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Chaachoua y Bittar (2019) consideran que la transposición didáctica estudia el procedimiento que logra el paso del conocimiento de una institución a otra, y la ecología del conocimiento es la manera en que se cuestiona la realidad. Según los autores, los enfoques de estos dos conceptos se basan en las siguientes proposiciones: (1) Todo conocimiento es conocimiento de una institución, (2) el mismo objeto de conocimiento puede vivir en diferentes instituciones, (3) para que el conocimiento viva en una institución, debe someterse a una serie de restricciones, las cuales implican cambios en el conocimiento, de lo contrario, no puede permanecer en la institución (p. 30).

La TAD nace como una extensión de la transposición didáctica y la ecología del conocimiento, y agrega otros términos como son los casos de Objeto, Persona, Instituciones, y Relación Personal o Institucional (Chaachoua y Bittar, 2019).

El aspecto fundamental de la TAD consiste en que sitúa la actividad matemática y su estudio en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales (Chevallard, 1999).

Chevallard (1999) refiere que la TAD tiene como objetivo lograr un claro entendimiento de la comprensión y posibles consecuencias que cometen las instituciones al realizar elecciones para organizar un contenido y lograr la enseñanza-aprendizaje de este.

Castela (2017) refiere que, desde el punto de vista de la TAD, la pregunta central sería: “En cada contexto, ¿cuáles son las determinaciones sociales de las actividades de los participantes? Tal indagación se considera como un requisito imprescindible de toda investigación sobre los fenómenos educativos” (p. 8).

2.1.1 Institución y Sujeto.

La concepción de Institución en la TAD es la de una organización en la que se realizan actividades sociales; los sujetos son los que participan en dichas actividades. La institución establece límites a los sujetos, pero a la vez les otorga recursos organizativos y cognitivos que permitan el desarrollo de las actividades (Castela, 2017).

La institución conforma el hábitat de los objetos matemáticos. Aquí se relaciona el conocimiento con el objeto de estudio; el nicho es determinado por la función de ese conocimiento (Almouloud, 2015).

2.1.2 Praxeología.

La noción de praxeología en la TAD se configura como el modelo básico para describir cualquier actividad humana, y en particular la actividad matemática (Chevallard, Bosch y Gascón 1997). La etimología de la palabra praxeología viene de juntar los términos griegos praxis y logos; se considera que en toda actividad humana la parte práctica (praxis) o “saber hacer” siempre estará asociada a un razonamiento o argumentación (logos) o “saber” (Bosch, 2012).

La TAD propone el modelo praxeológico como respuesta a la necesidad de lograr hacer una descripción de las relaciones que se dan entre instituciones, las cuales condicionan las relaciones entre el sujeto y el objeto de conocimiento (Chaachoua y Bittar, 2019).

Chevallard (1999) refiere que el modelo praxeológico se representa por $[T, \tau, \Theta, \Theta]$ y está conformado por dos bloques: el primero lo denomina el saber-hacer o la praxis $[T, \tau]$, en el que “T” es un tipo de tareas y “ τ ” una técnica conformada por un grupo de procesos no necesariamente algorítmicos que posibilitaran el trabajo de las tareas del tipo “T”, aunque tal vez con cierta técnica no se puedan desarrollar todas las tareas de algún tipo; el segundo bloque es el saber o el logos $[\Theta, \Theta]$, en el que “ Θ ” representa la tecnología de la técnica “ τ ”, vale decir, lo que justifica, clarifica y produce esta técnica; la teoría “ Θ ” es la tecnología de la tecnología; en otras palabras, avala la validez de la tecnología.

A continuación, se presenta un ejemplo de tipo de tarea con una tarea de ese tipo de tarea, la técnica que la resuelve, las tecnologías que justifican la técnica aplicada, y la teoría que justifica las tecnologías:

El tipo de tarea es de condición general.

Tipo de tarea T: Describir los datos representados.

Del tipo de tarea se originan tareas, estas tienen condición particular.

Tarea: Señale cuál es la variable de estudio y de qué tipo es.

La descripción de la técnica se suele dar por medio de pasos, los cuales no siguen necesariamente un orden. La técnica está conformada por un grupo de procesos no necesariamente algorítmicos.

Técnica T:

Paso 1: Identificar la variable

Paso 2: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores (bajo, medio, alto).

Las tecnologías justifican los pasos de la técnica.

Tecnologías:

Θ_1 : Clasificación de variable estadística

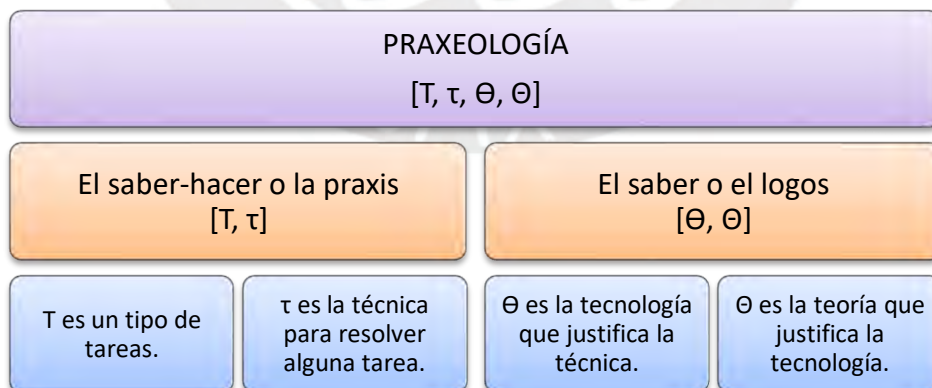
Θ_2 : Escala de medición de variable estadística

Finalmente, la teoría justifica la tecnología.

Teoría Θ : Estadística Descriptiva.

En la figura 2, presentamos un esquema de modelo praxeológico.

Figura 2. Modelo praxeológico.



Fuente. Elaboración propia.

Si los tipos de tarea T emanan de las matemáticas, se referiría a una praxeología matemática u organización matemática (OM); si los tipos de tarea T son tipos de tarea de estudio, se hacen referencia a praxeología didáctica u organización didáctica (Chaachoua y Bittar, 2019).

Almouloud (2010) señala que la TAD es un aporte importante para la didáctica de las matemáticas por ser la evolución de la transposición didáctica, insertar la didáctica en el campo de la antropología, y enfocarse en el análisis de organizaciones praxeológicas didácticas pensadas para la enseñanza y aprendizaje de organizaciones matemáticas.

2.1.3 Organización matemática.

Si bien es cierto que la TAD plantea que toda actividad matemática puede ser modelizada por la praxeología, Bosch, Fonseca y Gascón (2004) indican que dicha actividad es factible de ser analizada en función de praxeologías matemáticas de complejidad creciente. En ese sentido, los autores señalan que se podrá afirmar que una organización matemática es puntual (OMP) si se origina por un único tipo de tareas. Se podrá afirmar que una organización matemática es local (OML) si se compone de distintas praxeologías puntuales alrededor de un mismo discurso tecnológico. Se podrá afirmar que una organización matemática es regional (OMR) si resulta de la organización, estructuración y subsiguiente incorporación de distintas OML en torno a una misma teoría matemática. Chevallard (1999) también menciona sobre las OM globales, las cuales se conforman por la integración de las OM regionales.

2.1.3.1 Completitud de una organización matemática.

El estudio de Fonseca (2004) revela una notable rigidez en la enseñanza de las matemáticas a nivel de la educación secundaria. Los estudiantes presentan dificultades con la nomenclatura, solo manejan una técnica, tienen poca capacidad para diferenciar entre tarea directa y tarea inversa, no interpretan las técnicas, y presentan problemas en el desarrollo de tareas abiertas. Como respuesta a dicha problemática, Fonseca (2004) propone un mecanismo didáctico: “Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas (OMLRC)”, lo cual posibilitará una conexión entre la enseñanza de las matemáticas del nivel secundario y el nivel universitario. Fonseca (2014) determina las particularidades que deben tener las organizaciones matemáticas para consolidarse en organizaciones matemáticas locales (OML). “Los sistemas de enseñanza deberían, al menos procurar reconstruir una OML. El cumplimiento de estas características da cuenta de cierto grado de completitud de las OM” (Corica y Ferrari, 2020).

Lucas (2010) señala que la organización matemática debe ser estructural y a la vez dinámica; el autor detalla la dimensión del estudio de la OMLRC como producto resultante, de la siguiente manera:

El proceso de construcción de la OM es un producto de ingeniería matemática. Para medir el grado de completitud de una organización local, se utilizarán los indicadores referidos por Cecilio Fonseca (2004).

OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al “cuestionamiento tecnológico”, esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas. El grado de completitud dependerá del grado de integración de todos los tipos de tareas. Una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas existan, esto es, tareas realizables mediante técnicas que no están relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico.

OML2. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas. Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo concreto de tareas de OML, existan dos o más técnicas que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo. Este indicador de la completitud comporta que en la OML existan, además, los elementos tecnológicos que permiten discernir, para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicha tarea.

OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática. La flexibilidad de las técnicas utilizadas debe permitir la utilización de diferentes representaciones, pero también deben existir criterios explícitos para elegir la representación más adecuada, dependiendo de la actividad matemática en la que estas técnicas se hayan inmersas

OML4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”. La flexibilidad de las técnicas debe también permitir trabajar tareas inversas como, por ejemplo, aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas del problema o, a partir de la respuesta, analizar la situación de partida.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas. Debe existir un tipo de tarea que permita al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para, a posteriori, percibir su beneficio matemático o ventaja en relación con otras técnicas.

OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”. En las tareas abiertas los datos se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos sino las relaciones que se establecen entre ellos. El estudiante ha de decidir, ante una situación matemática o extramatemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas. En este nivel se incluyen las tareas de modelización matemática.

OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas. Simultáneamente, la tecnología y la teoría son los componentes para la construcción de técnicas nuevas, capaces de ampliar los tipos de problemas que se pueden abordar y, en consecuencia, los tipos de tareas de una organización matemática local (pp. 39-41).

Bosch, Fonseca y Gascón (2004) acotan que se debe tomar en cuenta que la noción de “completitud” es relativa. No se puede determinar si una OML es “completa” o “incompleta”, es un asunto de grado. Una OML será más o menos “completa” que otra en la medida del cumplimiento de lo que estipulan lo señalado por los indicadores.

En la presente investigación, se enfatiza sobre una “organización estadística”, ya que se analizan variables estadísticas y las diferentes formas de representarlas (Almouloud, Santos y Freitas, 2022).

Para identificar las organizaciones estadísticas se realizó un MER de gráficos estadísticos. A continuación, se describe lo que es un Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

2.1.4 Modelo Epistemológico de Referencia.

El análisis epistemológico del objeto matemático se hace desde la Teoría Antropológica de la Didáctica de la matemática (TADM) de Chevallard (2005), en el que cada periodo histórico de la evolución del objeto está formado por estructuras matemáticas complejas llamadas sistemas, los cuales son analizados por herramientas lógico matemáticas basadas en teorías de acuerdo con la situación matemática planteada (citado en García, 2014)

Según afirma Bosch (2012), los estudios desde el punto de vista de la TAD no solo se centran en las actividades de los alumnos, profesores o la relación entre estos, sino que el espectro es más amplio: abarca también los diversos documentos que contienen información para el desarrollo de la enseñanza y la elaboración de organizaciones matemáticas, tanto en la actualidad como en el pasado. En este sentido, la TAD contribuye al plantear la noción de Modelo Epistemológico de Referencia, el cual “constituye una de las herramientas metodológicas clave

para construir un punto de vista propio a la didáctica sobre los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje” (Bosch, 2012, p. 40).

Para poder llevar a cabo lo planteado por la TAD, se necesita un MER explícito, el cual tiene como finalidad orientar el estudio de la actividad matemática a realizar (Trigueros, 2019).

El que investiga se posiciona en una postura determinada frente a la actividad matemática. Esto se constituye en un medio fundamental para el reconocimiento de fenómenos didácticos (García, Barquero, Florensa y Bosch, 2019)

García, Barquero, Florensa y Bosch (2019) indican que la elaboración de un MER es un trabajo complejo y laborioso. Involucra el estudio y cuestionamiento de una variedad de fuentes de información, entre otras “fuentes sabias”, con las que se acceden a las matemáticas de las instituciones que generan conocimiento de esta disciplina; “fuentes escolares”, con las que podemos conocer a las matemáticas de las instituciones que se encargan de la enseñanza de estas; y en ambos casos se incluyen a las “fuentes históricas”, que otorgan la posibilidad de averiguar el origen y desarrollo evolutivo del saber matemático a lo largo del tiempo y con relación a distintas instituciones.

Los MER tienen carácter relativo y provisional, sujetos a revisión con apertura a su cuestionamiento, y relevantes, en tanto sirvan para identificar fenómenos didácticos o la elaboración de problemas didácticos (Gascón, 2014).

En el caso de nuestra investigación, desde la TAD, se realizó un MER de gráficos estadísticos que sirvió como referencia para el posterior análisis praxeológico del libro de texto elegido.

Se observa que la TAD brinda las herramientas necesarias que contribuyen al cumplimiento de los objetivos trazados en nuestra investigación. Además, los indicadores de Fonseca (2004) permiten realizar la valoración de la organización estadística encontrada, en relación con su completitud.

A continuación, se determina el enfoque de la metodología a utilizar, se plantea la metodología a aplicada, la cual se divide en 4 etapas; además, se hará la descripción de los elementos relevantes para la realización del análisis de materiales didácticos, según la metodología propuesta por Almouloud (2015).

2.2 Metodología de investigación.

El problema de investigación planteado en el presente estudio posee características que se adecúan al enfoque cualitativo, las cuales permitirían el cumplimiento de los objetivos trazados. Dichas características, según Fernández, Baptista y Hernández (2014), son estas: la realización de una revisión inicial de la literatura que puede aumentar en cualquier etapa del estudio; en el proceso, algunas veces es necesario regresar a etapas anteriores; se va de lo particular a lo general; no se prueban hipótesis, más bien, se generan producto del resultado del estudio; los datos obtenidos son cualitativos si se trata de información simbólica verbal, audiovisual o texto e imágenes; se obtienen los datos revisando documentos; es naturalista, no se manipula la realidad; es interpretativo. Por tanto, la investigación desarrollada presenta un enfoque cualitativo.

El presente estudio es de corte bibliográfico ya que se obtiene información de libros de texto e investigaciones en educación matemática. Al respecto, Fiorentini y Lorenzato (2006) indican que los estudios de corte bibliográfico están basados en la observación de las actividades institucionales y análisis de documentos, los cuales pueden ser materiales o libros didácticos, currículos, entre otros.

La realización del estudio de análisis de texto, se basó en la metodología propuesta por Almouloud (2015) para el análisis de materiales didácticos. Esta señala que el análisis de libros de texto sigue siendo el principal aporte a la investigación ecológica y antropológica. El autor, basándose en Chaachoua y Comiti (2010), presenta elementos que describen las características del libro de texto, el contexto de su producción y una caracterización de la relación institucional, y propone como elemento adicional la evaluación de las tareas/técnicas y tecnologías involucradas en las organizaciones matemáticas y didácticas, en el sentido de Chevallard (1999) (citado en Almouloud, 2015, p. 13). Cabe señalar que en dicha etapa evaluativa se usaron los indicadores de Fonseca (2004). Se agrupó en tres etapas el desarrollo de los elementos metodológicos propuestos por Almouloud (2015), además se consideró una etapa epistemológica necesaria para el presente estudio. El esquema de la metodología de investigación se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Metodología de investigación



Fuente. Elaboración propia.

Las flechas en doble sentido, que se observan en la figura 3, explican la relación que se establece entre las distintas etapas. Cabe resaltar que la etapa epistemológica se relaciona con las otras 3, lo mismo ocurre con la etapa de análisis.

A continuación, se describirá cada uno de los elementos propuestos por Almouloud (2015):

- El momento de publicación del libro didáctico: El libro de texto debe ser en principio una herramienta, en la que se materialice la correcta elección de contenidos con la respectiva

presentación, acorde con las especificidades de las matemáticas y lo que demanda la sociedad.

- La representatividad de la obra: Hay cuatro polos que se relacionan mutuamente, profesor, estudiante, las matemáticas, y el cuarto lo conforman el libro de texto y su autor. Este último es el que otorga lo que debe ser estudiado en matemática, la manera más eficaz para que los estudiantes puedan aprender dichos conocimientos, la organización curricular a lo largo de los años de escolaridad.
- La estructura del libro: El estudio de la estructura del libro de texto explica sobre la ubicación asignada a las actividades, la existencia o falta de ejercicios resueltos, además de posibles comentarios de los autores del texto.
- El análisis ecológico: Este se realiza en función al concepto de hábitat, el cual se entiende como el lugar donde vive el objeto matemático a analizar, y al concepto de nicho, el cual refiere a la función del objeto matemático en interacción con otros objetos de su sistema.
- El análisis praxeológico: Desde el punto de vista de la TAD, el estudio de la relación institucional puede hacerse mediante el análisis praxeológico. Para el caso de análisis de texto, se deben identificar los tipos de tareas, las técnicas y tecnologías (pp. 13-15).
- Evaluación de las tareas, técnicas y tecnologías: En esta última etapa que corresponde a un momento evaluativo, los indicadores de Fonseca ayudarán a determinar el grado de completitud de la organización praxeológica encontrada.

2.2.1 Análisis de una organización matemática.

Usualmente se realiza, según Almouloud (2015), de la siguiente manera:

- Identificación de los tipos de tarea: Se analizan los diferentes ejemplos y actividades, sean propuestas o resueltas; de esta manera, se identifican los tipos de tarea más importantes, según la institución. La idea es agrupar las tareas más semejantes en un determinado tipo.
- Identificación de técnicas: Luego de haber agrupado las tareas en tipos de tarea, se estructuran las técnicas que permiten resolverlas, basándonos en los ejercicios resueltos o analizando matemáticamente las situaciones propuestas.
- Identificación de tecnologías: Se determina la tecnología con base en los comentarios de los autores, los que figuran en el texto del profesor, o del análisis matemático de situaciones que se proponen para la consolidación del aprendizaje (p. 16).

Si un investigador desea realizar una evaluación *a priori* de determinada organización matemática, debe tomar en cuenta ciertos criterios que, al ser aplicados, le permitan evaluar dicha organización. Los criterios que se consideran para evaluar los tipos de tareas también se pueden utilizar para la evaluación de las técnicas, pero buscando respuestas para ciertas preguntas (Almouloud, 2010). Estos criterios se muestran en la figura 4

Figura 4. Criterios para el análisis del bloque tarea-técnica.

Praxeologia	Critérios
Tipos de tarefa	De identificação: verifica quais tipos de tarefa são apresentados de forma clara e bem identificados, De razões de ser: verifica quais razões de ser dos tipos de tarefas são explicitadas ou, ao contrário, se esses tipos de tarefa aparecem sem motivos válidos. De pertinência: verifica quais tipos de tarefa considerados são representativos das situações matemáticas frequentemente encontradas, bem como se são pertinentes, tendo em vista as necessidades dos alunos.
Técnicas	De identificação: verifica quais técnicas são apresentadas de forma clara e bem identificadas. De razões de ser: verifica quais razões de ser das técnicas são explicitadas ou, ao contrário, se essas técnicas aparecem sem motivos válidos. De pertinência: verifica quais técnicas consideradas são representativas das situações matemáticas frequentemente encontradas, bem como se são pertinentes, tendo em vista as necessidades dos alunos. Obs.: Devem-se buscar respostas para as seguintes indagações: 1. As técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou somente esboçadas? 2. São de fácil utilização? 3. São fidedignas e confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefa proposto?

Fuente. Almouloud, Santos y Freitas, 2022, (p. 80).

Para la correspondiente evaluación del bloque tecnológico-teórico utilizado en las sustentaciones de las técnicas empleadas en la resolución de un determinado tipo de tarea, se comenzaría partiendo de un grupo de cuestionamientos, tales como los que se muestran en la figura 5

Figura 5. Criterios para el análisis del bloque tecnología-teoría.

Praxeologia	Buscar respostas para as seguintes indagações
Bloco tecnológico-teórico	1. Dado o enunciado, o problema de sua justificativa está somente colocado ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido? 2. As formas de justificativa utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas? 3. Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado? 4. Os argumentos utilizados são cientificamente válidos? 5. O resultado tecnológico de determinada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Fuente. Almouloud, Santos y Freitas, 2022, p. 80.

Capítulo III: Estudio del objeto matemático

Se empezará definiendo ¿Qué es la estadística?, concibiéndola como el conjunto de métodos científicos mediante los cuales se recopilan, organizan, resumen, presentan y analizan los datos, y de los cuales se pueden sacar conclusiones y tomar decisiones sólidas (Almouloud, Santos y Freitas, 2022, p. 24).

Johnson y Kuby (2005) definen terminologías importantes para tener un mejor entendimiento al estudiar estadística. “**Población**: es la colección, o conjunto, de individuos, objetos o eventos cuyas propiedades serán analizadas” (p. 7). Los autores señalan, además, que cuando se trata de población no solo se debe entender como un conjunto de personas, ya que también podrían ser animales u objetos. Por otro lado, indican que, como algunas veces el estudio de toda la población resulta complicado, lo que se hace es realizar el estudio de una muestra de dicha población. Así, definen “**Muestra**: es el subconjunto de una población” (p. 8). Además, definen otros seis términos: “**Variable (o variable de respuesta)**: es una característica de interés relacionada con cada elemento individual de una población o muestra” (p. 8). “**Dato**: es el valor de la variable asociada a un elemento de una población o muestra. Este valor puede ser un número, una palabra o un símbolo” (p. 8). “**Datos**: son el conjunto de valores que se obtienen de la variable a partir de cada uno de los elementos que pertenecen a la muestra” (p. 8). “**Experimento**: es una actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos” (p. 8). “**Parámetro**: es un valor numérico que resume todos los datos de una población completa” (p. 8). “**Estadístico**: es un valor numérico que resume los datos de la muestra” (p. 9).

La siguiente situación planteada por Johnson y Kuby (2005) provee una mejor idea de lo que significa cada uno de los términos definidos: un alumno del curso de Estadística tiene cierto interés en precisar algo respecto del costo promedio en dólares de los autos pertenecientes a los profesores de la universidad. En esta situación, los autores indican que la población estaría integrada por el conjunto de todos los autos pertenecientes a los profesores de la universidad; la muestra sería un subconjunto de dicha población, por ejemplo, los autos pertenecientes a los docentes del área de matemáticas de la universidad; la variable es el costo en dólares de cada auto; un dato es el costo en dólares de un auto en particular, por ejemplo, el auto del docente Pérez valorizado en 10 000 dólares; los datos lo conforman el grupo de cantidades que se obtuvieron en la muestra (10 000, 9400, 8700, ...); el experimento sería la metodología que se aplicó para la elección de cada auto que conforma la muestra y establecer el costo de cada uno;

el parámetro sería el costo promedio de los autos de la población; el estadístico es el costo promedio de los autos de la muestra.

Se debe precisar que, al querer determinar el comportamiento de la población analizando una muestra, esta debe ser representativa de dicha población (Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010).

A continuación, se explicará la variable estadística como objeto matemático en estudio, y se describirá el camino que ha seguido hasta su representación como gráfico estadístico.

3.1 El objeto matemático en estudio: variable estadística.

La didáctica de las matemáticas, desde el punto de vista de la antropología cognitiva, reconoce distintas clases de objetos particulares como son las instituciones y los individuos, además de la posición que ocupa el individuo en las instituciones a las que pertenece, las cuales son sujetos de estas (Almouloud, 2015).

En la TAD, Chevallard (1992) se enfoca en un concepto que denomina “relación al objeto”, y no en el significado de este, en ese sentido: Un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (respectivamente, para I) si existe un objeto que represento por R (X, O) (respectivamente, $R(I, O)$), llamado relación personal de X a O (respectivamente, relación institucional de I a O) (p. 9).

Para poder afirmar que un objeto existe, por lo menos, una persona o institución debería relacionarse con dicho objeto o reconocerlo (Almouloud, 2015).

Chevallard (1999) observa que los objetos matemáticos son entidades que surgen de las actividades de las instituciones; es decir, no son absolutos.

Chevallard (1991) concibe que un objeto matemático es definido como:

[...] un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de las inscripciones, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito (p. 8).

En la presente investigación, se plantea analizar gráficos estadísticos como una representación del objeto matemático variable estadística.

Según el Glosario de Términos Estadísticos (2007), se define variable como “objeto matemático que puede tomar diferentes valores. Generalmente asociado a propiedades o características de las unidades de la muestra...” (p. 10)

Establecer una variable es uno de los pasos más fundamentales de toda actividad estadística; por medio de la variable se puede cuantificar, convertir en cantidades las particularidades de una determinada cualidad de los individuos de la población (Veliz, 2000)

Zamora (2003) muestra algunos ejemplos de variables estadísticas, las cuales representa con letras del alfabeto y toman como población los empleados de una universidad:

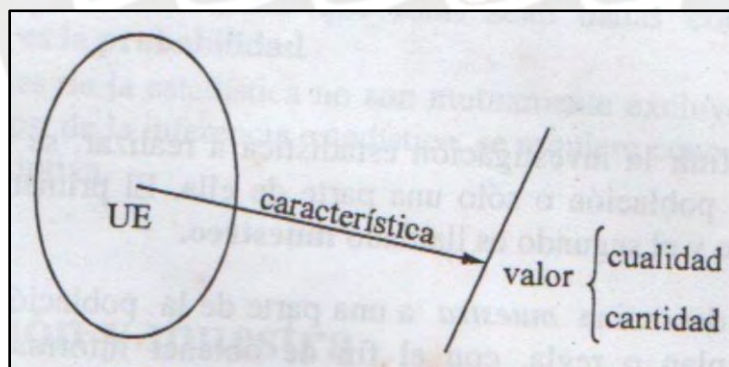
X: “sexo”. Valores: Masculino, Femenino

Z: “número de hijos”. Valores: 0, 1, 2, etc.

W: “ingresos mensuales”. Valores: Números reales positivos. (p. 3-4).

En el proceso de examinar alguna característica de una población, se establece una correspondencia, en la que a cada unidad de análisis se le hace corresponder un número real; de esta manera, “se define una variable, como una función X que a cada elemento de una población le hace corresponder un número real” (Veliz, 2000, p. 3). Lo mencionado se puede apreciar en la Figura 6.

Figura 6. Variable estadística.



Fuente. Zamora, 2003, (p. 4).

Según Osorio (2008), una variable estadística “es el atributo que se estudia sobre una población estadística determinada” (p. 12); además, indica que, si se tiene interés en analizar un atributo en particular de un individuo, se obtendrá un valor producto de la observación para cada elemento de la población o muestra, los cuales definen al atributo como lo siguiente: cualitativos, aquellos que producen observaciones no numéricas (color de ojos, profesión, marca de auto,

etc.); cuantitativos, aquellos que producen observaciones numéricas (peso, estatura, número de hijos, etc.).

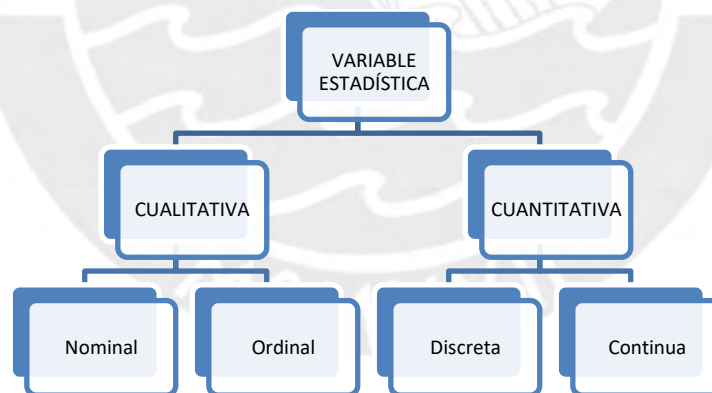
Usualmente se utiliza el término “modalidad” cuando se refieren a las observaciones obtenidas de variables cualitativas; por ejemplo, del atributo estado civil, están las modalidades casado, soltero, viudo, divorciado. Por otro lado, se usa el término “valor” cuando se refieren a las observaciones obtenidas de variables cuantitativas; por ejemplo, del atributo edad, están los valores 16, 17, 18, ... (Osorio, 2008).

Para las modalidades de atributos cualitativos, existen dos opciones: cualitativo nominal, cuando no se pueden ordenar, por ejemplo, el sexo o el color de ojos, y cualitativo ordinal, cuando se pueden ordenar estableciendo una jerarquía, por ejemplo, grado de instrucción o nivel socioeconómico (Osorio, 2008).

Para los valores de atributos cuantitativos, aparecen dos opciones: discretos, en los que no se puede encontrar ningún valor entre dos valores sucesivos fijos, por ejemplo, el número de hijos, y continuos, en los que se pueden encontrar infinitos valores entre dos valores sucesivos fijos, por ejemplo, la estatura (Osorio 2008).

En la figura 7, un esquema para la clasificación de las variables estadísticas.

Figura 7. Clasificación de las variables estadísticas.



Fuente. Elaboración propia.

La modalidad o valor obtenidos, al aplicar la variable estadística en un determinado individuo de la población, es una medición que requiere de algún tipo de escala (Osorio, 2008). La escala de medición es una herramienta que se utiliza para atribuir valores a las unidades estadísticas de una determinada variable. Estos valores pueden ser cualidades o números (Zamora, 2003).

Escala nominal: las modalidades de la variable estadística son como etiquetas, “[...] solo permiten percibir las diferencias o semejanzas de las unidades estadísticas que se midan” (Zamora, 2003, p. 4).

Escala ordinal: “[...] reflejan el orden de las unidades estadísticas” (Zamora, 2003, p. 5).

Escala de intervalos: se pueden comparar intervalos, “[...] tiene un cero relativo. Esto no significa ausencia total de la propiedad que se observa” (Zamora, 2003, p. 6). Por ejemplo, cuando se estudia la variable temperatura, el valor cero en la escala Celsius o Fahrenheit no indica ausencia de temperatura (Osorio, 2008).

Escala de razón: tiene un cero absoluto que sí refleja ausencia total del atributo a medir. También se puede establecer en qué proporción una cantidad es mayor que la otra, por ejemplo, el estudio de la temperatura en la escala Kelvin. (Osorio, 2008).

3.1.1. Organización de datos

Cuando se ha definido una muestra de la población objetivo, y de ella se realizaron las mediciones sobre cada individuo, que concluyen la labor de obtención de datos, se vuelven datos en bruto, los cuales carecen de significado sin una previa organización o descripción (Osorio, 2008).

Veliz (2000) señala que los datos recogidos pueden colocarse en cuadros llamados matrices de datos, como vemos en la figura 8.

Figura 8. Matriz de datos.

INDICADORES BASICOS					
<i>País</i>	N.Habit. (millón) V_1	Superficie. (en miles de km^2) V_2	PNB (en \$) V_3	Tasa inf. an. (en %) V_4	Esper. vida (en años) V_5
Perú	22	1285	1160	233.9	63
Colombia	32	1139	1260	24.8	69
Chile	13	757	1940	20.5	72
Bolivia	7	1099	630	317.9	60
Argentina	32	2767	2370	395.2	71
Venezuela	20	912	2560	19.3	70
Brasil	150	8512	2680	284.3	66
Japón	124	378	25430	< 5	79
Populación mundial	5284	133342	4200	14.7	66

Fuente: Banco Mundial. Informe sobre el desarrollo mundial 1992.
< 5 indica "menor que 5."

Fuente. Veliz, 2000, (p. 5).

Si organizamos las observaciones de la muestra en una tabla para indicar la frecuencia de cada modalidad o valor, se le denomina distribución de frecuencias (Osorio, 2008).

La tabla de distribución de frecuencias también es denominada tabla estadística (Mendenhall, Beaver y Beaver, 2010, p. 11).

En las distribuciones de frecuencia, usualmente se coloca en la primera columna la modalidad o valor, luego la frecuencia absoluta o el número de mediciones de cada categoría (f_i). Tomando en cuenta la suma de todas ellas, daría como resultado el número total de observaciones (n), luego la frecuencia relativa (h_i), que da la proporción y se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de la respectiva modalidad entre el número total de observaciones (n), partiendo de que la suma de todas las frecuencias relativas es 1. Finalmente, la frecuencia acumulada (F_i) se obtiene al sumar la frecuencia absoluta (f_i) de la fila con la frecuencia acumulada que se encuentra en la fila anterior. En el caso de la primera fila, la frecuencia acumulada es la misma que la frecuencia absoluta de dicha fila (Osorio, 2008). En la figura 9, se muestran dos distribuciones de frecuencia.

Figura 9. Distribución de frecuencias.

VARIABLE CUALITATIVA				VARIABLE CUANTITATIVA DISCRETA			
MODALIDAD	f_i	h_i	F_i	VALOR	f_i	h_i	F_i
Primaria completa	125	125 / 200	125	0 Hijos	2	2 / 150	2
Secundaria completa	70	70 / 200	195	1 Hijo	15	15 / 150	17
Educación superior	5	5 / 200	200	2 Hijos	40	40 / 150	57
TOTAL	200	1		3 Hijos	55	55 / 150	112
				4 Hijos	38	38 / 150	150
				TOTAL	150	1	

Fuente. Osorio, 2008, (p. 19).

Si se encontrara el caso de que la variable estadística es continua o la cantidad de valores diferentes de la variable discreta es muy grande, Zamora (2003) señala que se debería organizar los datos en una distribución de frecuencia por intervalos o clases. Con respecto a la elaboración de dicha distribución, el autor recomienda seleccionar de 5 a 20 intervalos, considerando que muchos intervalos harían más difícil las cuentas para obtener las medidas descriptivas, y que al trabajar con pocos intervalos se podrían obviar algunas características de importancia de los datos. Lo ideal es que la cantidad de intervalos seleccionados debe originar una distribución de frecuencias mono modal, o sea, la que aumenta y disminuye progresivamente.

En la figura 10, se muestra un ejemplo de distribución de frecuencias por intervalo. Se debe indicar que la columna “porcentajes” es el resultado de multiplicar la columna frecuencia relativa por 100.

Figura 10. *Distribución de frecuencias por intervalos.*

Intervalos I_i	Conteo	Frecuencias		
		Absolutas f_i	Relativas h_i	Porcentajes p_i
I_1	///...	f_1	h_1	p_1
I_2	///...	f_2	h_2	p_2
...
I_k	///...	f_k	h_k	p_k
Total		n	1.00	100.00

Fuente. Zamora, 2003, (p. 14).

3.1.2. Presentación de datos

Luego de la organización de los datos, se deben mostrar de tal manera que sea de fácil comprensión para su subsiguiente estudio y uso (Zamora, 2003).

Un gráfico bien elaborado suele mostrar algunas características sobre los datos que normalmente serían complicados presentar por medio de una tabla (Espinel, 2000).

Para Osorio (2008) los distintos modelos de gráficos se catalogarán según el tipo de variable estadística presentada; para una variable cualitativa, recomienda el gráfico de barras o de sectores; para una variable cuantitativa discreta (con pocos valores), recomienda una gráfica de bastones o de sectores; para una variable cuantitativa discreta (con muchos valores) o continua, recomienda el histograma, polígono de frecuencias o la ojiva.

Hasta este punto, se ha descrito el camino que recorre el objeto matemático a estudiar, la variable estadística, la cual puede ser clasificada con una escala de medida determinada, según la naturaleza de los datos obtenidos; luego, para que dichos datos adquieran un sentido, se organizan por tablas de distribución de frecuencias, para finalmente hacer una presentación gráfica que permita la mejor comprensión y posterior análisis de los datos obtenidos. El presente estudio se enfoca en la representación gráfica de las variables estadísticas, y para llegar a dicha representación es necesario tener conocimiento del recorrido descrito.

A continuación, se realizará un modelo epistemológico de referencia de la representación gráfica de variables estadísticas, el cual contribuye a la realización del posterior análisis praxeológico.

3.2. Modelo Epistemológico de Referencia para la Representación Gráfica de Variables Estadísticas

Para realizar el modelo epistemológico de referencia (MER), se formulan puntos que resultan adecuados para el objeto de estudio: q_0 : ¿Qué es una variable estadística?, q_1 : ¿Cómo se describen las variables estadísticas?, q_2 : ¿Cuáles son los tipos de variables estadísticas y cómo pueden ser estudiadas?, q_3 : En la institución matemática, ¿qué interrogantes, matemáticas o extra matemáticas, las variables responden?, q_4 : ¿Qué se entiende por estudiar, aprender, enseñar o aplicar las representaciones gráficas de las variables estadísticas en una situación?

En este punto, se describirán distintos aspectos que ayudarán a comprender mejor la representación gráfica de variables estadísticas. Se observará la manera como la humanidad ha ido elaborando formas de representación al surgir la necesidad de tener que realizar registros de las actividades que realizaban en el día a día.

Para realizar el MER, se iniciará con una breve introducción; luego, se explicará la clasificación de los datos estadísticos, además de sus escalas de medición; posteriormente, veremos las distintas formas en las que se pueden representar los datos estadísticos, poniendo especial énfasis en la representación gráfica. Todo esto a partir de diferentes fuentes históricas.

Se realizará una descripción de cada representación de variables estadísticas, las cuales han ido surgiendo cada cierta época. También se reconocerán las variables representadas indicando su tipo y la respectiva escala de medición; además, se indicarán los tipos de tareas presentes con sus correspondientes tareas, basados en lo que propone la TAD. Para esto, ayudará la siguiente notación: T_i : Representa el tipo de tarea i ; $t_{i,j}$: Representa la tarea j del tipo de tarea i . Se comentará sobre las técnicas y tecnologías involucradas en cada representación de variables estadísticas descritas en esta parte de nuestro estudio.

Desde la antigüedad, el ser humano se ha valido de diferentes instrumentos para poder comprender y administrar distintas situaciones de la vida cotidiana. Los gobiernos de turno requerían saber las particularidades de su población para una debida organización y disposición de esta. La acumulación e interpretación de una gran cantidad de información hace surgir la necesidad de tratar de encontrar distintas maneras para realizar una clara presentación de los

hallazgos encontrados. Para tal fin, se ayudaron de las técnicas de representación gráfica (Monroy, 2013).

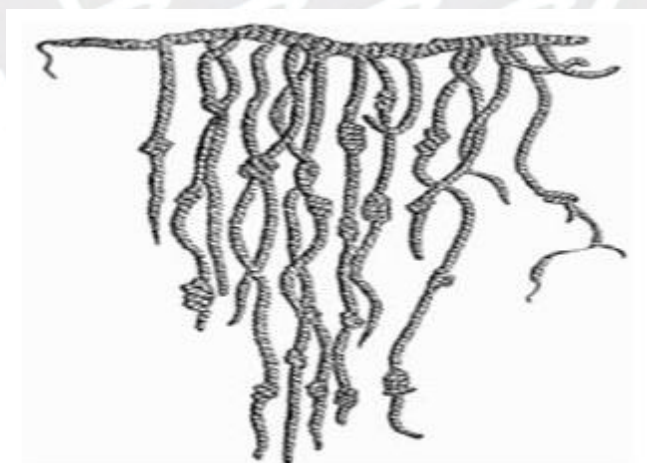
Según Hernández (2006), la aparición de gráficos y dibujos encontrados en la isla de Cerdeña, los cuales mostraban la manera como los hombres prehistóricos, llevaba un conteo de los animales cazados que se dibujaban en piedra. Es un hecho que está estrechamente vinculado con el origen de la estadística.

Surgió la necesidad de comprender diversos fenómenos sociales, como determinar el número de personas de una comunidad y actividades económicas, como la producción agrícola (Mosquera, Abadía y Palacios, 2019).

La utilización de instrumentos cualitativos para el tratamiento de datos se remonta desde, aproximadamente, los 3000 años antes de Cristo, cuando, por ejemplo, los egipcios realizaban censos que facilitaban la organización del Estado además de la construcción de pirámides (Altamirano y Espinosa, 2009).

En la época antigua, los incas se valieron de los quipus, cuerdas de distintos colores y tamaños con funciones específicas. Dicho instrumento se usaba, principalmente, para contar o medir. Al estar formado por un eje fijo del cual se desprenden líneas, genera una idea de lo que hoy se conoce como gráfico de línea (Mosquera, Abadía y Palacios, 2019), así como se ve en la figura 11.

Figura 11. Quipu.



Fuente. Mosquera, Abadía y Palacios, 2019, (p. 24).

En la Edad Moderna, se le da un enfoque más técnico a la elaboración de gráficos estadísticos y con esto se podrían extraer conclusiones a partir del análisis de datos. (Mosquera, Abadía y Palacios, 2019)

3.2.1. Clasificación de datos estadísticos

La forma adecuada para la presentación de los datos es por medio de cuadros o gráficos. Dichos datos deben clasificarse durante la tabulación antes de presentarlos gráficamente; de esta manera, el análisis se realiza, en parte, a la par en que se recopila y se presentan los datos (Croxtton y Cowden, 1967).

Según Croxtton y Cowden (1967), los datos estadísticos se clasifican considerando cuatro bases principales:

3.2.1.1. Cualitativa

Cuando se distinguen clases y no cantidades

3.2.1.2. Cuantitativa

En caso los valores cambien en función a alguna cualidad medible. La mayor parte de las distribuciones cuantitativas son distribuciones de frecuencia. Triola (2004) define distribución de frecuencias como un listado de los valores de datos, individuales o agrupados en intervalos, al lado de sus respectivas frecuencias. A los datos de frecuencias también se les pueden llamar enumerativos o categóricos (Haber y Runyon, 1973). La figura 12 muestra el número (la frecuencia) de las casas urbanas alquiladas correspondiente a cada tipo de renta.

Figura 12. Distribución de frecuencias de una distribución cuantitativa

Renta mensual	Número de casas urbanas
Menos de \$ 10.00	1 563 952
De \$ 10.00 a 14.99	1 330 927
De 15.00 a 19.99	1 302 387
De 20.00 a 29.99	2 545 208
De 30.00 a 49.99	3 191 435
De 50.00 a 74.99	1 503 401
De 75.00 a 99.99	343 071
De 100.00 y más	255 339
Renta desconocida	315 829
Total	12 351 549

Fuente. Croxtton y Cowden, 1967 (p. 12).

Los datos cualitativos algunas veces se podrían clasificar cuantitativamente (Croxtton y Cowden, 1967). Se puede ejemplificar con el caso de las distintas partidas del activo de una entidad financiera en función de su nivel de liquidez, como pueden ser efectivo, deuda, valores del estado o los que se pueden negociar en la bolsa, distintos tipos de préstamos. Aunque estos se diferencian cuantitativamente, su clasificación es cualitativa; pero si se realiza en función del tiempo en que se necesita para que cada una de las partidas se transforme en efectivo, dicha clasificación sería cuantitativa.

Según Triola (2004), los datos cuantitativos pueden ser *discretos* cuando la cantidad de probables valores es finita, o se puede enumerar; pueden ser *continuos* si son el fruto de una cantidad infinita de probables valores, que pueden vincularse a una determinada escala continua, que barre un intervalo de valores sin interrupciones.

3.2.1.3. Cronológica

Cuando se consideran datos o series cronológicas que poseen cifras en relación con un determinado fenómeno en distintos lapsos, por ejemplo, “el coeficiente anual de natalidad en Estados Unidos” durante el transcurso de una cantidad específica de años.

Algunas veces, la serie cronológica se puede convertir en una distribución de frecuencias (Croxtton y Cowden, 1967). A modo de ejemplo, se encuentra el caso de una empresa de trenes que distribuye el número de durmientes que se cambian por año. Estos conforman una serie cronológica; además, cuando se utiliza esta información considerando las fechas en que se instalan, el tiempo de duración de los durmientes se puede representar por medio de una distribución de frecuencias. En la figura 13, se verá la distribución del ejemplo descrito.

Figura 13. Distribución de frecuencias a partir de una serie cronológica.

<i>Duración</i>	<i>Número de durmientes</i>
De 4 años a menos de 5	2
De 5 años a menos de 6	5
De 6 años a menos de 7	17
etc.	etc.

Fuente. Croxtton y Cowden, 1967 (p. 13).

3.2.1.4. Geográfica

En esencia sería cualitativa, pero generalmente se considera como un tipo especial de clasificación. En el ejemplo propuesto por Croxtton y Cowden (1967), se observa la cantidad de personas de diferentes regiones de los Estados Unidos, clasificados geográficamente, a pesar

de que hay una distinción cualitativa entre cada par de regiones: la diferencia que se muestra no es de clase, sino de situación. En la figura 14, se verá dicha serie geográfica.

Figura 14. Serie geográfica.

POBLACION Y AREA DE ESTADOS UNIDOS CONTINENTALES, TERRITORIOS Y POSESIONES DISTANTES, 1930			
Región	Población		Area bruta en millas cuadradas
	Número	Por ciento total	
Total	137.008.435	100.00	3.738.395
Estados Unidos Continentales	122.775.046	89.61	3.026.789
Territorios y posesiones distantes	14.233.389	10.39	711.606
Islas Filipinas	12.082.366 ³	8.82	114.400
Puerto Rico	1.543.913	1.13	3.435
Territorio de Hawai ¹	368.336	0.27	6.407
Alaska	59.278	0.04	586.400
Zona del Canal de Panamá	39.467	0.03	549
Islas Vírgenes de Estados Unidos	22.012	0.02	133
Guam	18.509 ⁴	0.01	206
Samoa Americana ²	10.055	0.01	76
Servicios en el extranjero, militares, navales, etc.	89.453	0.07	...

¹ Incluye las Islas Midway.
² Incluye la Isla Swain.
³ Población estimada el 1º de julio de 1929 (Thirteenth Annual Report of the Director of Education).
⁴ Incluye 1,118 personas en Reserva Naval y en vapores anclados en Guam.

Fuente: *Décimoquinto Censo de Estados Unidos, 1930. Population, vol. 1, p. 5.*

Fuente. Croxton y Cowden, 1967 (p. 67).

La distribución geográfica se puede representar como una distribución de frecuencias; por ejemplo, para la serie geográfica rendimiento por acre de maíz de Iowa, se puede expresar como “una distribución de frecuencias, señalando el número de condados que tienen rendimientos por acre de ‘10 bushels y menos de 15’, de ‘15 bushels y menos de 20’, etc.” (Croxton y Cowden, 1967, p. 14).

Haber y Runyon (1973) señalan que se debe establecer una diferencia entre los términos “número” y “numeral”: los primeros son símbolos, mientras que los segundos son ciertos numerales que se relacionan con otros. Por ejemplo, los numerales 4 y 5 serían considerados números si se pueden efectuar operaciones aritméticas como la adición, sustracción, multiplicación y división, entre ellos, para así obtener resultados con significado. Es de interés

conocer la forma en que se pueden usar los numerales para lograr distintos objetivos. Hay tres formas esenciales para usar los numerales: para designar, en el caso de los numerales nominales; para mostrar la ubicación en una secuencia, en el caso de los numerales ordinales; y para expresar una cierta cantidad, con los numerales cardinales.

Se describen diferentes aspectos en la vida cotidiana como variables, cuya observación específica sería el valor de la variable, por ejemplo, la variable precio de un determinado objeto podría tener un valor de 45 soles. Los valores de las variables poseen escalas para su respectiva medición, las cuales pueden ser nominales, ordinales, o de intervalos y cocientes o razones (Haber y Runyon, 1973).

Triola (2004) propone otra clasificación de los datos utilizando las cuatro escalas de medición: nominal, ordinal, de intervalo y de razón.

“**Nivel de medición nominal** son los datos consistentes exclusivamente de nombres, etiquetas o categorías que no pueden acomodarse, según un esquema de orden” (Triola, 2004, p. 7). Por ejemplo, está la posible respuesta a una encuesta: sí/ no/ indeciso; los colores de ciertos autos: rojo, negro u otros. Con los datos medidos en escala nominal, no se pueden realizar cálculos, dado que no tienen un orden o significación numérica. Usualmente se atribuyen números a las distintas categorías para codificarlas, pero las operaciones con dichos números carecen de sentido (Triola, 2004).

“Los datos están en el **nivel de medición ordinal** cuando pueden acomodarse en algún orden, aunque no es posible determinar diferencias entre los valores de los datos o tales diferencias carecen de significado” (Triola, 2004, p. 8), por ejemplo, las notas de un determinado curso: A, B, C, D o E, que pueden ordenarse sabiendo que A es la nota más alta, pero no tendría sentido restar A y B (Triola, 2004).

“El **nivel de medición de intervalo** se parece al ordinal, pero con la propiedad adicional de que la diferencia entre dos valores de datos cualesquiera tiene un significado” (Triola, 2004, p. 8). Por ejemplo, con los años 1000, 2000 o 1492, podemos establecer la diferencia entre un par de años, $2000-1492=508$ años. En este nivel de medición, los datos no poseen un punto de inicio natural, el cual represente ausencia de cantidad. En el ejemplo de los años, el año 0 no es el inicio de los tiempos; o sea, no sería un punto de partida inherente, solo es una elección referencial (Triola, 2004).

“El **nivel de medición de razón** se parece al nivel de intervalo, aunque tiene la propiedad adicional de que sí tiene un punto de partida o cero inherente (donde cero indica que nada de la

cantidad está presente)” (Triola, 2004, p. 9). En este nivel, gracias a que existe un 0 natural, tanto las diferencias como las proporciones poseen significado. A modo de ilustración, los pesos (en quilates) de aros representaría aquí el 0 como ausencia de peso, y 6 quilates es el doble del peso de 3 quilates (Triola, 2004).

Resulta más dificultoso distinguir si los datos son de intervalo o de razón. Triola (2004) sugiere considerar dos cantidades, en las que una sea dos veces la otra y cuestionarse si “dos veces” se podría utilizar para representar las cantidades; por ejemplo, el peso de 200 libras es dos veces el peso de 100 libras; sin embargo, 50 °F no representa el doble de caliente que 25 °F; en consecuencia, los pesos tienen un nivel de medición de razón, mientras que las temperaturas un nivel de medición de intervalo.

3.2.2. Formas para representar datos estadísticos

Cuando se realiza un determinado estudio, se obtiene información en forma de datos de frecuencia (por ejemplo, el recuento de la preferencia por algún candidato político), o datos escalares (el caso de pesos netos de ingredientes, o cociente intelectual de un grupo de alumnos). Estos datos suelen no tener sentido en su forma de recopilación inicial; por esta razón, se realiza la función descriptiva, la cual plantea reglas y procedimientos para la presentación de los datos de forma conveniente y de clara transmisión, de manera que adquieran un significado (Haber y Runyon, 1973).

Croxton y Cowden (1967), señalan respecto de la representación de datos estadísticos que podrían ser de forma escrita, tabular, semitabular o gráfica. A continuación, se desarrolla cada tipo de representación.

3.2.2.1 Representación escrita

Mezclar cifras y texto no sería el método más eficiente, ya que para entender el significado de los datos en su conjunto hay que leer el párrafo en su totalidad. No obstante, sí se podría resaltar cifras puntuales o realizar comparaciones significativas. Croxton y Cowden (1967) ejemplifican este tipo de representación, que se muestra en la figura 15.

Figura 15. Representación escrita del valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

La Oficina de Comercio Interior y Exterior de Estados Unidos presentó, en diciembre de 1937, en el *Monthly Summary of Foreign Commerce*, datos de exportaciones de mercancías de Estados Unidos y de importaciones para consumo (sin incluir las importaciones para fines de reexportación), divididos en "clases económicas" y para diversos años. Comparando 1936 y 1937, el valor total de las exportaciones fué (en dólares) 2,418.696,000 en 1936 y 3,294.916,000 en 1937, en tanto que el valor total de las importaciones para consumo fué de 2,423.977,000 en 1936 y 3,012.487,000 en 1937. Los materiales brutos exportados en 1936 montaron a 668.168,000, o sea 27.6 por ciento del valor total de las exportaciones durante ese año; y en 1937 ascendieron a 721.871,000, o sea el 21.9 por ciento del total de ese año. Las importaciones de materiales brutos ascendieron a 732.965,000 en 1936 y a 973.535,000 en 1937, o sea, respectivamente, 30.2 por ciento y 32.3 por ciento del total de las importaciones para el consumo en los dos años. Los productos alimenticios sin elaborar exportados en 1936 se valoraron en 58.144,000, que fué el 2.4 por ciento del total de las exportaciones en ese año; y 101.742,000, o sea el 3.1 por ciento del total en 1937. Las importaciones de productos alimenticios sin elaborar, para consumo, ascendieron a 348.682,000, o sea el 14.4 por ciento del valor total de las importaciones para consumo en 1936; y 413.345,000, o sea el 13.7 por ciento del total, en 1937. Los productos alimenticios elaborados exportados en 1936 ascendieron a 143.798,000, o sea el 5.9 por ciento del total del año; y en 1937 montaron a 177.451,000, o sea el 5.4 por ciento del total. Las importaciones de productos alimenticios elaborados para consumo ascendieron a 386.240,000, o sea el 15.9 por ciento del total de las importaciones, en 1936; y a 440.103,000, o sea el 14.6 por ciento del total, en 1937. Las semi-manufacturas exportadas en 1936 ascendieron a 394.760,000, o sea el 16.3 por ciento del total; en 1937 se valoraron en 677.254,000, o sea el 20.6 por ciento de las exportaciones del año. Las importaciones de semi-manufacturas para consumo ascendieron a 490.238,000, o sea el 20.2 por ciento de todas las importaciones para consumo, en 1936; y a 634.181,000, o sea el 21.1 por ciento del total, en 1937. El valor de las manufacturas acabadas fué de 1,154.099,000, o sea el 47.7 por ciento del total exportado en 1936; y de 1,616.598,000, o sea el 49.1 por ciento del total exportado, en 1937. Los productos acabados importados para consumo ascendieron a 465.852,000, o sea el 19.2 por ciento de todas las importaciones para consumo, en 1936, y a 551.323,000, o sea el 18.3 por ciento del total recibido, en 1937.

Fuente. Croxton y Cowden, 1967 (pp. 60-61).

El texto de la figura 15 detalla el valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

Las variables involucradas en esta representación serían las siguientes: valor de las exportaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas en los años 1936 y 1937 (cuantitativa continua, con escala de razón), y valor de las importaciones de mercancías a Estados Unidos, para consumo, por clases económicas entre los años 1936 y 1937 (cuantitativa continua, con escala de razón).

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma escrita.

Tarea $t_{1,1}$: Representar en forma escrita las exportaciones e importaciones de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

Para llevar a cabo esta tarea, se hace uso del lenguaje natural.

3.2.2.2. Representación tabular

Esta forma de representación de datos estadísticos supera a la representación escrita, el título en sí mismo ya explica lo que hay en el cuadro. Algunas veces se puede acompañar de un breve texto que favorece la comprensión o que resalte algunos datos importantes. En la figura 16, se ve cómo se representa de manera tabular los datos representados en forma escrita de la figura 15.

Figura 16. Representación tabular del valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

EXPORTACIONES DE MERCANCIAS DE ESTADOS UNIDOS E IMPORTACIONES PARA SU CONSUMO, POR CLASES ECONOMICAS, 1936 y 1937 (No se incluyen los materiales importados para su reexportación)				
Clase económica	Valor (Millares de dólares)		Por ciento del valor total	
	1937	1936	1937	1936
Total de exportaciones de mercancía de Estados Unidos	3,294,916	2,418,969	100.0	100.0
Materiales en bruto	721,871	668,168	21.9	27.6
Productos alimenticios sin elaborar	101,742	58,144	3.1	2.4
Productos alimenticios elaborados	177,451	143,798	5.4	5.9
Semi-manufacturas	677,254	394,760	20.6	16.3
Productos acabados	1,616,598	1,154,099	49.1	47.7
Total de importaciones para consumo ...	3,012,487	2,423,977	100.0	100.0
Materiales en bruto	973,535	732,965	32.3	30.2
Productos alimenticios sin elaborar	413,345	348,682	13.7	14.4
Productos alimenticios elaborados	440,103	386,240	14.6	15.9
Semi-manufacturas	634,181	490,238	21.1	20.2
Productos acabados	551,323	465,852	18.3	19.2

Fuente: *Monthly Summary of Foreign Commerce*, diciembre, 1937, p. 36, de la Oficina de Comercio Interior y Exterior de Estados Unidos.

Fuente. Croxton y Cowden, 1967 (p. 61).

La tabla de la figura 16 detalla el valor de las exportaciones e importaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

Las variables involucradas en esta representación serían estas: valor de las exportaciones de mercancías de Estados Unidos por clases económicas en los años 1936 y 1937 (cuantitativa continua, con escala de razón), y valor de las importaciones de mercancías a Estados Unidos, para consumo, por clases económicas entre los años 1936 y 1937 (cuantitativa continua, con escala de razón).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,1}$: Representar en forma tabular las exportaciones e importaciones de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937.

Para la realización de esta tarea, se debe tener la noción de columna, categoría y porcentaje; de esta manera, se organizan los datos, según la clase económica, el valor y el porcentaje en cada año.

Es evidente la superioridad de la representación tabular sobre la escrita, los encabezados de cada columna y el título de cada fila no hacen necesario reincidir en explicaciones: la utilización de las columnas y filas favorecen las posibles comparaciones de los valores (Croxtton y Cowden, 1967).

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,1}$: Comparar las exportaciones e importaciones de Estados Unidos por clases económicas entre los años 1936 y 1937, presentados en la tabla.

Para la realización de esta tarea se movilizarían las nociones de relación de orden y de equivalencia, además de las operaciones aritméticas.

Previo a las tablas se utilizaban listas, las cuales eran arreglos verticales u horizontales carentes de encabezado, se listaban cantidades o cosas separadas por espacios o algún signo de puntuación. En cambio, las tablas se reconocen por la usual cuadrícula rectangular dividida en filas y columnas, en cuyas celdas se colocan encabezados o se registran datos (Estrella, 2014).

La tabla procedente de Shuruppag que data del año 2600 a. C., (ver figura 17) se considera como la primera en la historia que organiza datos matemáticos (Campbell, et al., 2003).

Figura 17. La tablilla sumeria creada alrededor del 2600 a. C.



Fuente. Tomado de https://www.mundo-geo.es/conocimiento/viaje-online-traves-historia-matematicas_249805_102.html.

Las variables involucradas en la tabla de la figura 15 serían longitud (cuantitativa continua, con escala de razón) y área (cuantitativa continua, con escala de razón)

Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,2}$: Representar longitudes y la respectiva área en forma tabular.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de columna, longitud, área y las operaciones aritméticas. Los valores se distribuyen en 3 columnas por 10 filas tanto en el anverso como en el reverso. En las dos primeras columnas, figuran longitudes en orden descendente, mientras que la columna final muestra sus productos en medida de área; la secuencia continúa al reverso. La tabla está organizada a lo largo de dos ejes, solo hay un eje para el cálculo, a saber, la multiplicación horizontal (Campbell et al., 2003).

Los registros de datos empíricos se reconocen a inicios del siglo XVII, época en que surgen publicaciones de tablas numéricas, aparece en Alemania “Die Tabellen – Statistik”, como parte de la estadística que se dedica a la descripción de hechos (Estrella, 2014).

John Graunt, en el año 1662, hizo una contribución relevante al elaborar la primera tabla de mortalidad (figura 18).

Figura 18. Primera tabla de mortalidad de John Graunt.

x	lx
0	100
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1

Fuente. Tomado de <https://apuntesdedemografia.com/2015/04/28/john-graunt-primera-tabla-de-mortalidad/>

La variable involucrada en la tabla de la figura 18 sería índice de mortalidad (cronológica, con escala de razón).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,3}$: Representar el índice de mortalidad de los ciudadanos de Londres, en forma tabular.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de porcentajes, proporcionalidad, función exponencial, interpolación, filas, columnas, categoría. En los registros de la obra *Natural and Political Observations on the Bills of Mortality*, se evidenciaban la causa de muerte y el sexo de los fallecidos de los ciudadanos de Londres, pero no la edad. John Graunt infirió la proporción de fallecidos antes de los 6 años sumando la cantidad de fallecidos por causa de enfermedades infantiles con la mitad de los que murieron por sarampión y viruela. Esto resultaba el 36% del total de fallecidos; entonces, supuso la supervivencia del 64% restante en dicha edad. No se especifica la obtención del resto de filas de la tabla, pero se piensa que Graunt dio una supuesta ley de crecimiento exponencial con la cual lograría obtener los valores intermedios mediante la interpolación (Pérez, 2010).

En 1671, Jan de Witt utilizó las tablas de mortalidad para intentar determinar el costo de las rentas vitalicias. En 1693, Edmond Halley elaboró tablas de mortalidad reales que contenían edades de fallecimientos de personas en condiciones estables (Estrella, 2014).

Las tablas fueron evolucionando a través de la historia (Friendly, 2009; como se citó en Estrella, 2014).

En 1779, Lambert diseña la primera visualización semigráfica que combina formatos tabulares con gráficos; Minard elaborará en 1844 la tabla gráfica para mostrar el tráfico comercial; en 1883 le seguirá Loua con el primer uso conocido de una tabla semi-gráfica que muestra una tabla de datos con niveles de sombreado; y así seguirán desarrollándose y ocupándose hasta nuestro días las tablas o combinaciones, como las “sparklines” que Tufte diseñará en el 2004, una combinación que muestra en una tabla información gráfica en línea con el contenido (pp. 7-8).

Para Croxton y Cowden (1967) un cuadro debe tener como mínimo “cuatro partes esenciales: título, columna, matriz y encabezados de las columnas y cuerpo” (p. 62). Esto lo muestra la figura 19:

Figura 19. Partes de una tabla.

POBLACION DE ESTADOS UNIDOS, POR SUBDIVISIONES GEOGRAFICAS, 1930			Título
División	Población	Por ciento del total	Encabezados
United States	122.775,046	100.0	Cuerpo
New England	8.166,341	6.7	
Middle Atlantic	26.260,750	21.4	
East North Central	25.297,185	20.6	
West North Central	13.296,915	10.8	
South Atlantic	15.793,589	12.9	
East South Central	9.887,214	8.1	
West South Central	12.176,830	9.9	
Mountain	3.701,789	3.0	
Pacific	8.194,433	6.7	

Indicación de la Fuente { Fuente: *Décimoquinto Censo de Estados Unidos, 1930. Population, vol. 1, p. 10.*

Fuente. Croxton y Cowden, 1967 (p. 62).

Es vital notar que el cuadro debe acompañarse de la fuente en la que se obtuvieron los datos, en caso dichos datos no sean originales; además, sí es necesario alguna nota preliminar después del título, o al final, usualmente debajo del cuadro (Croxton y Cowden, 1967).

Si se toma en cuenta el uso de los cuadros, habría dos tipos: cuadros generales o de referencia, cuyo fin primordial es el de presentar los datos de manera extensa, y los cuadros de texto o de resumen, los cuales son de sencilla construcción, sintetiza la información de uno o varios cuadros de referencia (Croxton y Cowden, 1967).

Según Ramos, Del Águila y Bazalar (2017), la tabla de distribución de frecuencias es un grupo de datos ordenados según su clase o categoría, vale decir, un conjunto de datos que

detallan alguna particularidad de los datos de cada categoría. Esta tabla es muy útil para organizar los datos de cualquier tipo de variable. En la figura 20, se muestra cómo se estructura una tabla de distribución de frecuencias, según lo propuesto por dichos autores.

Figura 20. Estructura de una tabla de frecuencias.

Categorías o clases	Marcas de clase	f_i	h_i	F_i	H_i
1	x_1	f_1	h_1	F_1	H_1
2	x_2	f_2	h_2	F_2	H_2
.
.
.
k	x_k	f_k	h_k	F_k	H_k
Total	---	n	1	---	---

Fuente. Ramos, Del Águila y Bazalar, 2017, (p. 104).

A continuación, en la figura 21, se describen los elementos de la tabla de distribución de frecuencias.

Figura 21. Descripción de los elementos de la tabla de frecuencias.

Donde:

f_i = frecuencia absoluta simple de la categoría i . Es obtenida por conteo de los datos y representa el número de datos que pertenecen a la categoría i .

$h_i = \frac{f_i}{n}$ = frecuencia relativa simple de la categoría i . Se interpreta como la proporción de datos que pertenecen a la categoría i .

$h_i\% = h_i \times 100$ = frecuencia porcentual simple de la categoría i . Se interpreta como el porcentaje de datos que pertenecen a la categoría i .

F_i = frecuencia absoluta acumulada de la categoría i . Obtenida por acumulación de las frecuencias f_i . Se interpreta como el número de datos acumulados hasta la categoría i .

H_i = frecuencia relativa acumulada. Obtenida por acumulación de las frecuencias h_i . También se obtiene como $H_i = \frac{F_i}{n}$. Se interpreta como la proporción de datos acumulados hasta la categoría i .

$H_i\% = H_i \times 100$ = frecuencia porcentual acumulada. Se interpreta como el porcentaje de datos acumulados hasta la categoría i .

Fuente. Ramos, Del Águila y Bazalar, 2017, (p. 105).

A continuación, en la figura 22, se muestra un ejemplo propuesto por Ramos, Del Águila y Bazalar (2017), en el que se necesitarán organizar los datos presentados.

Figura 22. *Ejemplo propuesto para organizar datos.*

La Municipalidad Distrital de San Martín de Porres realizó una encuesta para conocer el nivel socioeconómico de las familias del distrito en marzo del 2016, por ello se seleccionó una muestra probabilística de 50 familias. La variable de interés se categorizó de la siguiente forma: bajo (B), medio (M), alto (A). Los datos son los siguientes:

M	M	A	M	B	M	M	B	M	M
M	B	B	M	A	M	B	M	B	M
B	B	B	M	M	A	B	B	A	M
A	B	B	B	M	B	M	A	M	B
M	M	M	B	M	M	B	A	M	M

Fuente. Ramos, Del Águila y Bazalar, 2017, (p. 109).

Primero se identificará la variable involucrada y se indicará su tipo. En este caso, sería nivel socioeconómico de la familia, del tipo cualitativa con escala ordinal.

Tipo de tarea T_7 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{7,1}$: Señale la variable de estudio.

Tarea $t_{7,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Para la realización de estas tareas, se movilizarían las nociones de variables estadísticas, clasificación de estas y su respectiva escala de medición. El tipo de variable se puede determinar según la naturaleza de los valores; en este caso, bajo, medio y alto.

En seguida, se procede a organizar los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,4}$: Representar en forma tabular la información presentada en el cuadro.

En la figura 23, la representación tabular que proponen Ramos, Del Águila y Bazalar (2017) para organizar los datos mostrados en la figura 22.

Figura 23. Representación tabular propuesta para ejemplo de la figura 22.

Distribución de familias según nivel socioeconómico (marzo del 2016)

Nivel socioeconómico	f_i	h_i	$h_i\%$
Bajo	18	0,36	36
Medio	25	0,50	50
Alto	7	0,14	14
Total	50	1	100

Fuente: Encuesta realizada por la Municipalidad Distrital de San Martín de Porres

Fuente. Ramos, Del Águila y Bazalar, 2017, (p. 109).

Para la realización de la tarea $t_{2,4}$, se movilizarían las nociones de tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, columna, categoría, frecuencia absoluta, frecuencia relativa y porcentajes.

3.2.2.3. Representación semitabular

Cuando en una investigación solo se va a tomar en cuenta determinados valores, se puede separar el párrafo para después ordenar los datos, como se ve en la figura 24. Dicha representación no es de uso común (Croxtton y Cowden, 1967).

Figura 24. Representación semitabular

...el patrón "debe instruir gradualmente a su aprendiz sobre las varias operaciones del oficio para producir finalmente un trabajador competente". Durante los dos años de aprendizaje debe asistir el aprendiz a los cursos de higiene y materias afines en la universidad y obtener un certificado. La escala de jornales de un aprendiz, por una semana de trabajo, es:

Después de 6 meses en la escuela	dls. 7.50
Después de 12 meses	10.00
Después de 18 meses	12.00

Fuente. Croxtton y Cowden, 1967 (pp. 62- 63).

En la representación semitabular de la figura 24, resaltan algunas cantidades que se separan del texto. En este caso, está la escala de jornales de un aprendiz, por semana, en determinadas temporadas.

La variable involucrada sería jornal por semana de un aprendiz, de tipo cronológica con escala de razón.

Tipo de tarea T_4 : Representar datos en forma semitabular.

Tarea $t_{4,1}$: Representar el jornal por semana de un aprendiz en forma semitabular.

En la solución de esta tarea, emerge la idea de intervalo al presentar una división del tiempo por temporadas: después de 6 meses, después de 12 meses, después de 18 meses.

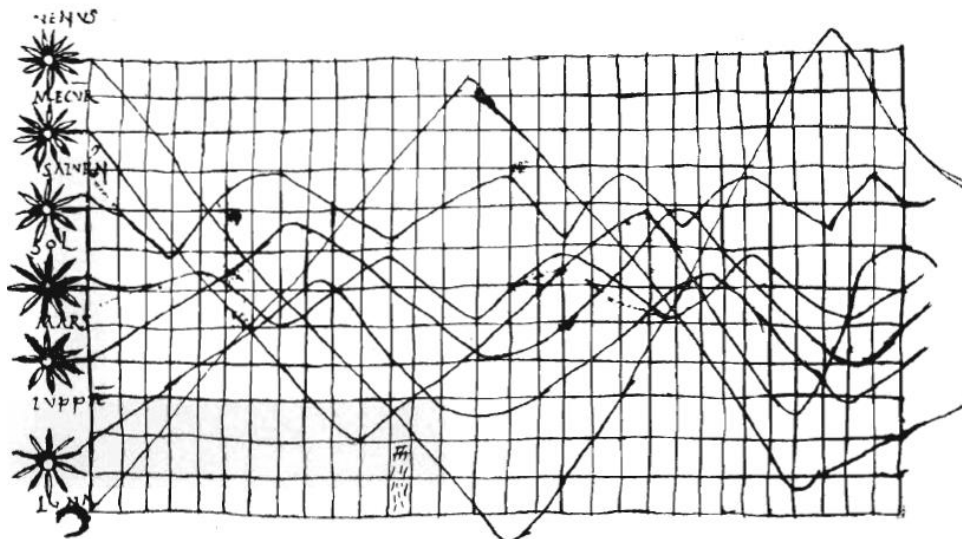
3.2.2.4. Representación gráfica

Los gráficos no se deben usar como reemplazantes de un tratamiento estadístico, sino como un apoyo visual para analizar y entender problemas estadísticos (Haber y Runyon, 1973).

Para Croxton y Cowden (1967), la manera más eficiente de presentar una cantidad limitada de información, en lugar de un cuadro, es por medio de un gráfico simple, que atraiga la atención y que esté bien elaborado.

Funkhouser, en su obra *Historical Development of the Graphical Representation of Statistical Data*, sitúa, en torno al año 950 d. C., lo que estima que sería la primera construcción gráfica. Esta sería hallada en 1877 por el alemán Sigmund Günther. Dicha gráfica pertenece a un manuscrito de la *Bayerische Staats-Bibliothek* de Múnich, y representaba los movimientos planetarios a través del zodiaco en función del tiempo. Lo resaltante era que se estructuraba en una cuadrícula que permitía una mejor disposición visual de los elementos representados (Pontis, 2007). Esto se ve en la figura 25.

Figura 25. Primera construcción gráfica.



Fuente. Tufte, 1983, (p. 28).

Si bien es cierto que la gráfica de la figura 25 no se considera un gráfico estadístico, se observan algunos indicios. Es un gráfico estructurado en una cuadrícula lo que facilita la organización visual de los elementos. En la vertical, están ordenados los planetas del sistema solar, así como la estrella y satélite de la Tierra: Venus, Mercurio, Saturno, Sol, Marte, Júpiter y Luna (Pontis, 2007). Las posiciones van cambiando a medida que cambia el tiempo en la horizontal.

La variable involucrada sería movimientos planetarios a través del zodiaco en relación con el tiempo, de tipo cronológica, con escala ordinal.

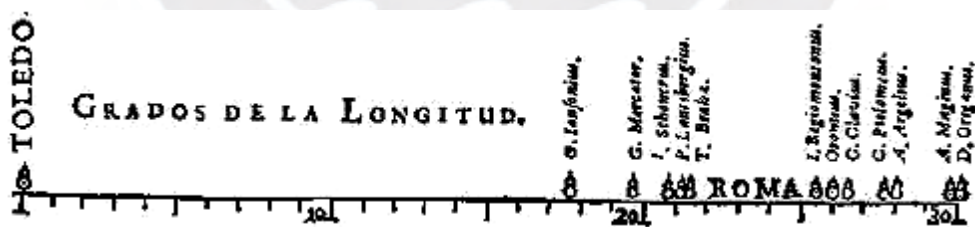
Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,1}$: Representar gráficamente los movimientos planetarios a través del zodiaco a medida que cambia el tiempo.

Para la resolución de esta tarea, emergen las nociones de intervalo, dado que cada cierto tiempo se presenta un cambio de posición, y gráfica lineal, al unir las diferentes posiciones que se valen de las líneas.

Por medio de una representación gráfica, Michael F. Van Langren exhibe por primera vez las diferencias en la obtención de la distancia entre las ciudades de Toledo (España) y Roma (Italia) (Monroy, 2013; Mosquera, Abadía y Palacios, 2019). Esta gráfica se creó en el año 1644; según Altamirano y Espinosa (2009), se considera la primera representación de datos estadísticos, la cual se muestra en la figura 26.

Figura 26. Primera representación de datos estadísticos.



Fuente. Altamirano y Espinosa, 2009, (p. 9).

En el gráfico de la figura 26, las ciudades Toledo (España), Roma (Italia) y lugares aledaños están ubicados, según los grados de longitud que los separan a lo largo de un eje horizontal.

La variable representada sería distancia entre dos ciudades, de tipo cuantitativa continua con escala de razón.

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,2}$: Representar gráficamente las diferencias en la obtención de las distancias entre las ciudades de Toledo (España) y Roma (Italia).

Para la realización de esta tarea, se requieren nociones de distancia entre dos puntos, ya que las diferencias de las distancias pedidas se obtienen restando las posiciones.

Funkhouser considera a Joseph Priestley (1733-1804) como el creador de los gráficos estadísticos, en tanto que para Edward Tufte esa denominación pertenecería a William Playfair (1759-1823) (Pontis, 2007).

La utilización de “la línea de tiempo” realizada por Joseph Priestley para la colocación de eventos en forma cronológica fue inspiración para el escocés William Playfair (1759-1823), inventor, político y economista inglés, además de ser considerado padre de los gráficos estadísticos modernos por ser el creador de los gráficos lineales, de barras y de sectores. El diagrama de barras apareció por primera vez en el año 1786 en su obra *The Commercial and Political Atlas* que, además, contenía 43 gráficos de series de tiempo. Años después, en 1801, publicaría su libro *The Statistical Breviary*, en el que mostró el primer gráfico de sectores. Era impulsor de lo que denominó “método gráfico”, que destacaba la eficiencia cuando se relacionan la tabla de frecuencias con los gráficos estadísticos, y que, en consecuencia, hace notar que, utilizando estos últimos, se puede lograr una mejor comunicación de la información (Altamirano y Espinosa, 2009; Monroy, 2013; Mosquera, Abadía y Palacios, 2019).

De esta manera, William Playfair creó un lenguaje visual universal, el cual se puede utilizar tanto en las ciencias como en el comercio y sienta así un paradigma innovador en el análisis de datos. Esta labor la hizo durante más de 36 años, basándose en sus propios principios:

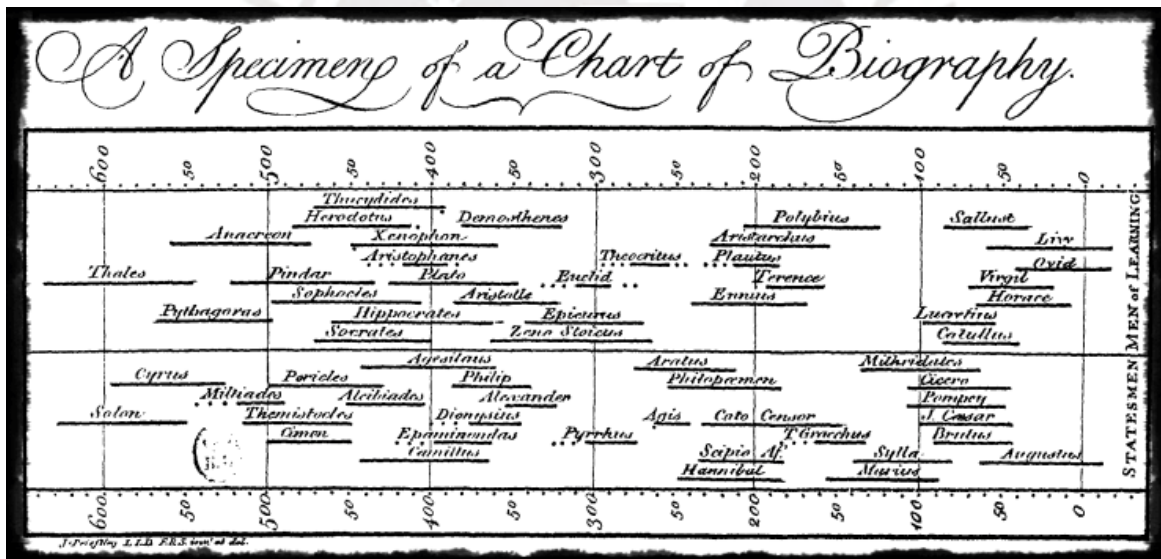
- El método gráfico es una forma de simplificar lo tedioso y lo complejo.
- Los hombres ocupados necesitan alguna clase de ayuda visual.
- El gráfico es más accesible que un cuadro.
- El método gráfico es concordante con los ojos.
- El método gráfico ayuda al cerebro, ya que permite entender y memorizar mejor (Altamirano y Espinosa, 2009, p.10).

3.2.2.4.1. Gráficas de series de tiempo

Los datos que se pueden agrupar en distintos momentos se representan gráficamente por una serie de tiempo (Triola, 2004).

Joseph Priestley, reconocido por sus estudios en el área de la Química, se le atribuye ser el primero en usar la “Línea de tiempo” para mostrar la ubicación de distintos sucesos de manera cronológica. Lo hizo en el año 1765 (Altamirano y Espinosa, 2009). Este aporte significó una innovación en la forma como se estructura y organiza la información, de la tabla a la representación gráfica, en la cual se podían relacionar más de dos variables (Pontis, 2007). Los gráficos del científico y teólogo inglés Joseph Priestley (1733-1804) no son netamente estadísticos, pero, aun así, es considerado uno de los pioneros de la representación gráfica por ser de los primeros en crear gráficos de acontecimientos históricos (Instituto Nacional de Estadística, s.f.). En la figura 27, el gráfico “Línea de tiempo” de Priestley.

Figura 27. Gráfico “línea de tiempo”.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

El gráfico de Joseph Priestley *A Specimens of a Chart of Biography* es una cronología de aproximadamente dos mil personajes ilustres desde 1200 a. C. hasta 1800 d. C., agrupados en 6 categorías: estadistas y grandes militares, teólogos y metafísicos, matemáticos y médicos (incluyen filósofos), poetas y artistas, oradores y críticos (incluyen escritores en prosa), e historiadores y anticuarios (incluyen abogados). En la figura 27, se observa un extracto de la cronología total, en el que se muestran los personajes en dos categorías: eruditos y estadistas del 600 a. C. al año 0. Los segmentos indican el periodo en que vivió cada personaje, y los puntos

junto a algunos segmentos refieren que no se tiene certeza del año de nacimiento o muerte. (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas son periodo en que vivió determinado personaje ilustre (cronológica con escala de intervalo), y ocupación de un personaje ilustre (cualitativa con escala nominal)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,3}$: Representar la cronología del tiempo de vida de personajes ilustres gráficamente.

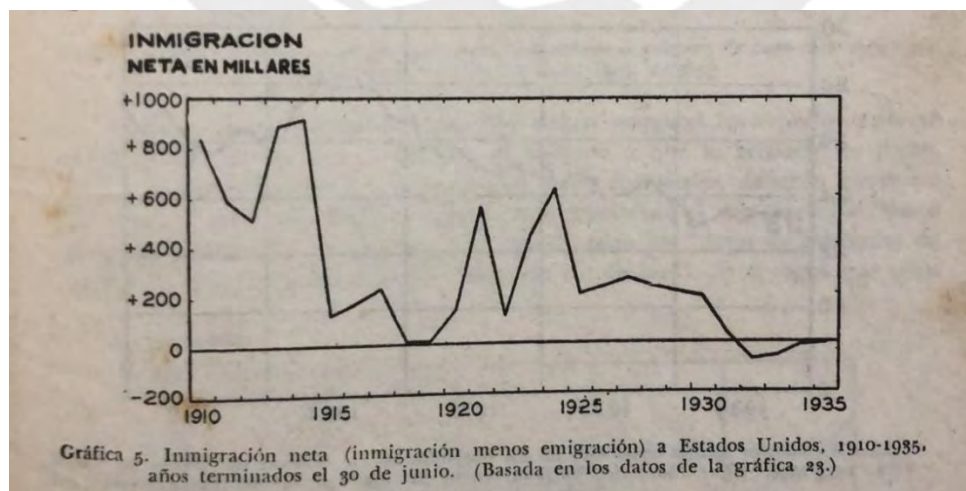
Tarea $t_{5,4}$: Representar la ocupación de personajes ilustres gráficamente.

Para la realización de estas tareas, se movilizan las nociones de intervalo, proporcionalidad, categoría, línea paralela.

3.2.2.4.2. Gráfico lineal o curva simple

Para representar datos estadísticos en forma de curvas, se tendrá como guía el plano cartesiano. Usualmente los valores de la variable independiente se colocan en el eje X, y los de la variable dependiente en el eje Y. A veces, las variables tienen mutua dependencia; en ese caso, es indistinta la asignación de los ejes para cada una. La mayor parte de las veces se dará uso solo del primer cuadrante del plano cartesiano dada la naturaleza positiva de la mayoría de valores de datos estadísticos; sin embargo, en algunas ocasiones, se usan los cuadrantes I y II o los cuadrantes I y IV (como en la figura 28), el cuadrante III se usa muy raras veces (Croxtton y Cowden, 1967).

Figura 28. Gráfico lineal usando los cuadrantes I y IV.

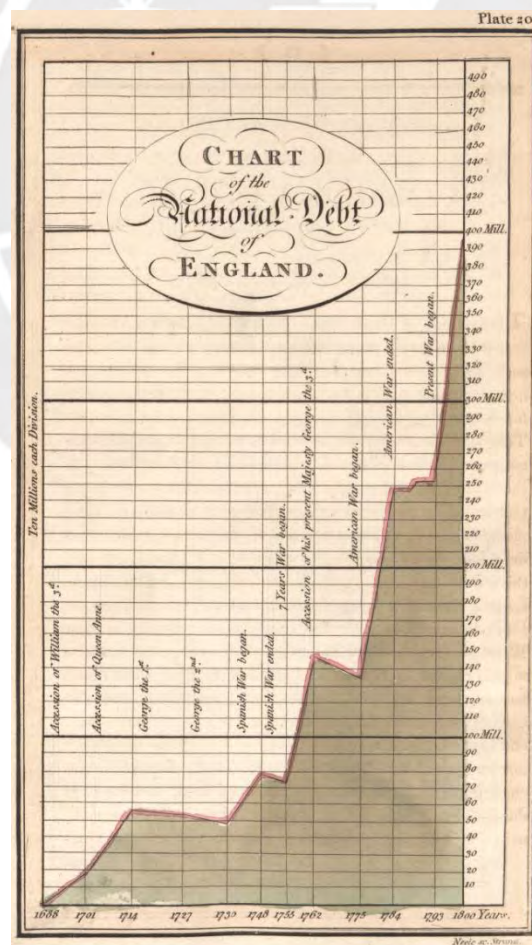


Fuente. Croxtton y Cowden, 1967 (p. 87).

Croxton y Cowden (1967) indican que las curvas son ideales para representar series cronológicas y también distribuciones de frecuencia, aunque también se usan para otro tipo de gráficas. Los datos cualitativos con característica geográfica no se suelen representar mediante curvas, pero sí por gráfico de barras u otras opciones. Para el caso de series cronológicas, dependiendo del tipo de dato a representar, hay que diferenciar entre “datos acumulativos que corresponden a un periodo” (p. 87); por ejemplo, están las ventas por mes, costo promedio durante el año o también “datos que corresponden a un momento dado” (p. 87). Como caso particular, se tiene la cotización de precios o medición de la temperatura, que se realizan para un momento dado.

William Playfair, frecuentemente, utilizaba los gráficos lineales para representar distintas informaciones sobre la economía inglesa. En la figura 29, se muestra gráficamente la deuda nacional de Inglaterra, publicada en la tercera edición de *The Commercial and Political Atlas* en el año 1801 (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Figura 29. Deuda nacional de Inglaterra



Fuente. Historia de la visualización de datos (2021).

Para el gráfico lineal de la figura 29, se observa que en el eje horizontal se ubica el tiempo en años y la cantidad adeudada en el eje vertical, hay que resaltar que la escala de tiempo es irregular. Se señalan básicamente los años en que se evidencian picos que indican el acontecimiento histórico más trascendente ocurrido en dicho año (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas serían deuda nacional de Inglaterra (cronológica con escala de razón) y acontecimiento histórico más trascendente (cronológica con escala nominal)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,5}$: Representar por medio de un gráfico lineal la información de la deuda nacional de Inglaterra a través de los años.

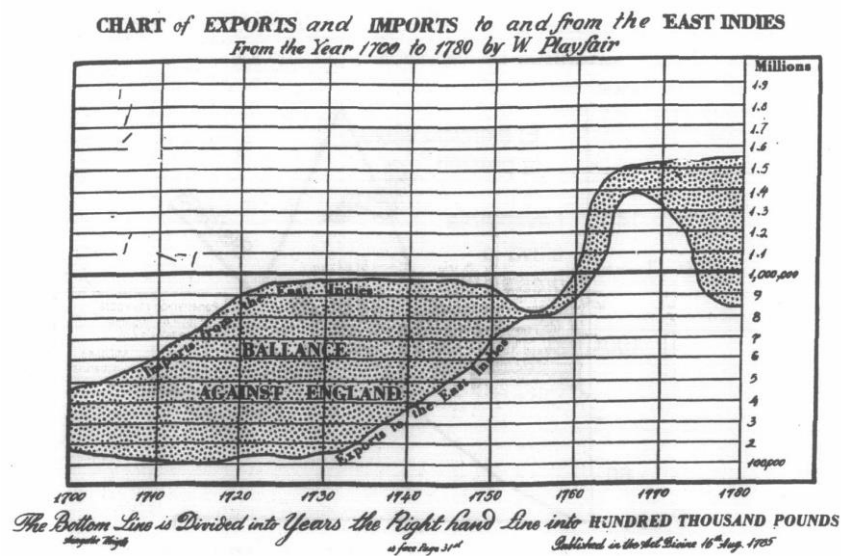
Tarea $t_{5,6}$: Representar gráficamente la cronología de acontecimientos históricos trascendentes en determinados años.

Para la realización de estas tareas, la técnica necesita las nociones de gráfico lineal, categoría, proporcionalidad.

3.2.2.4.3. Gráficas que expresan saldos netos

Como ya se había comentado, Playfair frecuentemente utilizaba los gráficos lineales para representar distintas informaciones sobre la economía inglesa. En la figura 30, se muestra la representación del comercio exterior entre Inglaterra y las Indias Orientales.

Figura 30. Gráfico lineal.



Fuente. Espinel, 1999, (p. 460).

Tufte (1997) hace una descripción del gráfico de la figura 30, publicado en el Atlas de Economía de *Playfair* de la siguiente manera: “Utiliza dos curvas para describir la exportación desde Inglaterra a las Indias Orientales y la importación a Inglaterra desde las Indias Orientales. La distancia entre las curvas da la balanza exportación – importación” (citado en Espinel, 1999, p. 449).

Las variables representadas serían exportación desde Inglaterra a las Indias Orientales, a través de los años (cronológica con escala de razón); importación a Inglaterra desde las Indias Orientales, a través de los años (cronológica con escala de razón); y balanza exportación – importación en cierto año (cronológica con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,7}$: Representar la importación a Inglaterra desde las Indias Orientales y la exportación desde Inglaterra a las Indias Orientales, a través de los años, por medio de gráficos lineales.

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,4}$: Comparar la importación y exportación de Inglaterra hallando la balanza importación-exportación en determinado año.

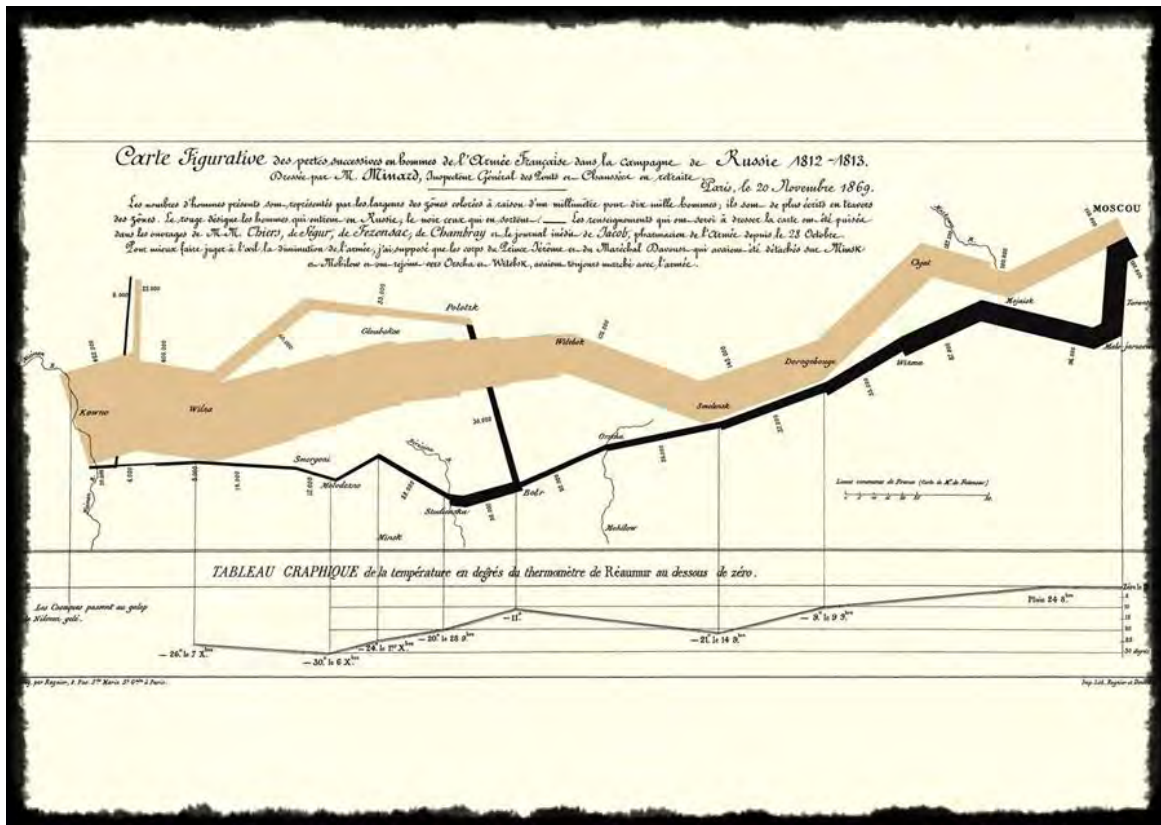
Para la realización de estas tareas se movilizan las nociones de gráficos lineales, distancia entre dos puntos, eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad.

3.2.2.4.4. Gráficas de partes componentes

El avance y retirada del ejército napoleónico en la campaña rusa de 1812-1813 fue claramente plasmado por el ingeniero francés Charles Minard en 1869 por medio de un gráfico, en el cual integró diagramas estadísticos y gráficos de barras a mapas cartográficos, en los que se muestran diversas situaciones respecto de la intervención militar del ejército napoleónico. Dicha representación fue considerada por E.R. Tufte en *The Display of Quantitative Information* como uno de los mejores gráficos elaborados hasta el momento, por su precisión y fácil entendimiento, el cual muestra claramente la tragedia ocurrida en dicha acción de guerra (Altamirano y Espinosa, 2009; Monroy, 2013; Mosquera, Abadía y Palacios, 2019; Pontis, 2007).

Serrano (2009) describe dicho gráfico como “una banda ancha atraviesa Europa y va disminuyendo según el número de soldados que sobreviven, y debajo otra banda muestra la retirada, un río negro” (p. 133). Esto se aprecia en la figura 31.

Figura 31. Gráfico de partes componentes de la campaña del ejército napoleónico en Rusia.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

En la figura 31, se muestra el gráfico de la campaña del ejército napoleónico en Rusia. Dicho gráfico se presentó el 20 de noviembre de 1869, Minard se basó en las investigaciones de M. M. Chiers, Ségur, Fazensac, Chambray, además del diario inédito de Jacob, farmacéutico del Ejército desde el 28 de octubre. La franja beige simboliza los hombres que iniciaron la travesía y la franja negra los que pudieron regresar. Un milímetro de ancho equivaldría a 10 000 hombres. Por medio de un único trazo lineal, el gráfico nos revela distintas variables: ubicación y dirección de los pelotones, las bajas en el trayecto, las temperaturas en el trayecto de regreso, las cuales podrían haber influenciado en la cantidad de soldados caídos para el ejército francés (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas son ubicación de los pelotones (geográfica con escala nominal), dirección de los pelotones (geográfica con escala nominal), cantidad de hombres caídos durante el trayecto (cuantitativa discreta con escala de razón) y temperatura en el trayecto de regreso (cuantitativa continua con escala de intervalo).

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,8}$: Representar la ubicación de los pelotones en un gráfico.

Tarea $t_{5,9}$: Representar la dirección de los pelotones en un gráfico.

Tarea $t_{5,10}$: Representar la cantidad de hombres caídos durante el trayecto gráficamente.

Tarea $t_{5,11}$: Representar la temperatura durante el trayecto de regreso gráficamente.

Para la resolución de estas tareas, se movilizan nociones de proporcionalidad, ancho, dirección, distancia entre dos puntos, gráfico lineal, gráfico de partes componentes.

3.2.2.4.5. Gráfico de barras

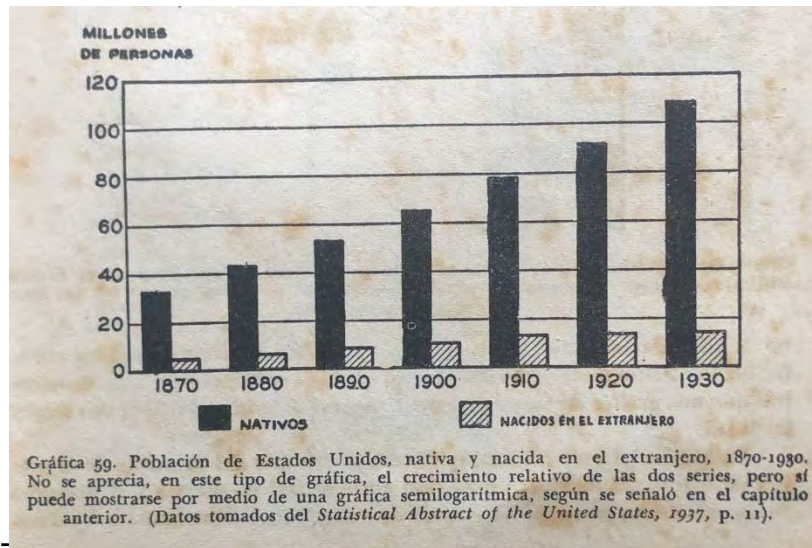
La representación gráfica de datos en escalas tanto nominales como ordinales se puede hacer por medio de un gráfico de barras, en el que para cada categoría correspondería una barra vertical, cuya altura indicará la cantidad de miembros de su respectiva clase. Para las variables con datos en escala nominal, las categorías se colocarán en la horizontal sin ningún orden en particular, aunque algunos autores prefieren hacerlo en orden alfabético; para las variables con escala ordinal, las categorías se colocarán en la horizontal según su orden natural (Haber y Runyon, 1973).

El gráfico de barras se puede utilizar para representar datos cronológicos o los clasificados como cuantitativos, con un arreglo de barras verticales. Por otro lado, para comparar datos cualitativos o geográficos, se suelen utilizar barras horizontales (Croxtton y Cowden, 1967).

Croxtton y Cowden (1967) indican que para la representación de una serie cronológica “una curva facilita el estudio de la variación general que ha experimentado la serie, mientras que una gráfica de barras permite comparar determinados años con mayor facilidad (p. 144).

Croxtton y Cowden (1967) recomiendan que, si se desea hacer la comparación de un par de series de datos a lo largo de varios años, se utilice el diagrama de barras de dos variables, como se muestra en la figura 32.

Figura 32. Gráfica de barras para dos categorías durante varios años.



Fuente. Croxton y Cowden, 1967, (p. 143).

En la figura 32, por medio de barras agrupadas, se representa la cantidad de personas nativas o extranjeras de Estados Unidos desde 1870 hasta 1930.

Las variables representadas son cantidad de personas nativas en Estados Unidos, desde 1870 hasta 1930 (cronológica con escala de razón), y cantidad de personas extranjeras en Estados Unidos desde 1870 hasta 1930 (cronológica con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,12}$: Representar gráficamente la cantidad de personas extranjeras y nativas de Estados Unidos desde el año 1870 hasta 1930.

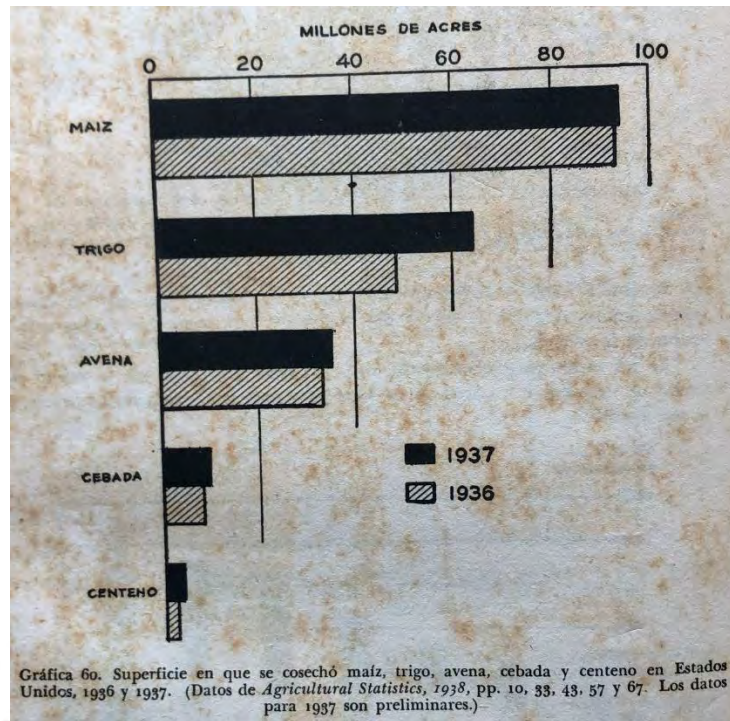
Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,2}$: Comparar la cantidad de personas extranjeras y nativas de Estados Unidos desde el año 1870 hasta 1930, a partir de los datos del gráfico.

Para la resolución de estas tareas se movilizan nociones sobre proporcionalidad, eje de valores, eje de categorías, relación de orden, intervalos, gráfico de barras.

Cuando se desee comparar varias categorías para dos años, se recomienda utilizar la gráfica de la figura 33 (Croxton y Cowden, 1967).

Figura 33. Gráfica de barras para varias categorías en dos años.



Fuente. Croxton y Cowden, 1967, (p. 144).

En la figura 33, por medio de barras agrupadas, se presenta la cantidad de terreno en que se cosechó maíz, trigo, avena, cebada o centeno en Estados Unidos entre los años 1936 y 1937.

La variable representada sería la siguiente: cantidad de terreno en que se cosechó cierto cultivo en los Estados Unidos entre los años 1936 y 1937 (cuantitativa continua, con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,13}$: Representar gráficamente la cantidad de terreno en que se cosechó cierto cultivo en ellos Estados Unidos, en los años 1936 y 1937.

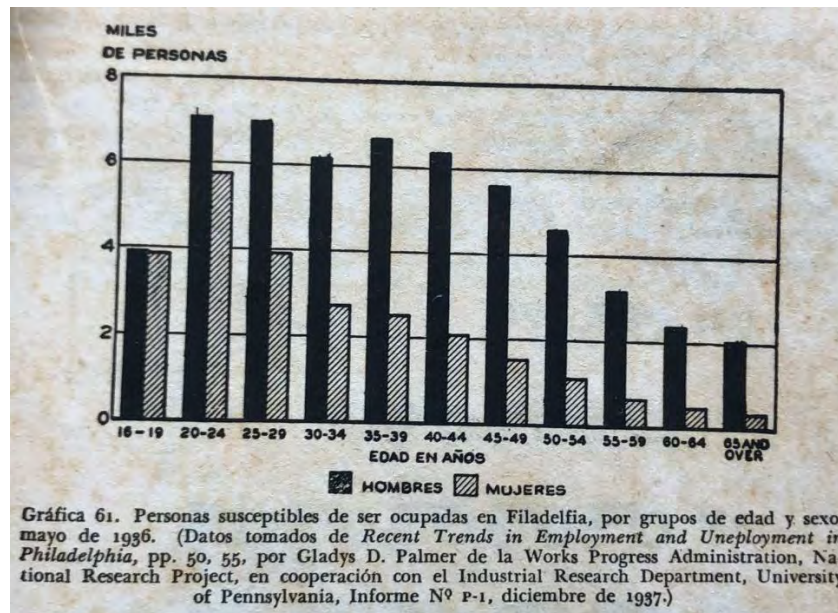
Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,3}$: Comparar la cantidad de terreno en que se cosechó cierto cultivo, entre los años 1936 y 1937, a partir de los datos del gráfico.

Para la resolución de estas tareas, se movilizan nociones sobre eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, gráfico de barras.

La gráfica con dos unidades también es útil para realizar la comparación de múltiples categorías, en las que cada una de estas se divide en dos categorías, como en la figura 34 (Croxtón y Cowden, 1967).

Figura 34. Gráfica de barras para varias categorías que se subdividen en dos.



Fuente. Croxtón y Cowden, 1967, (p. 145).

El gráfico de la figura 34 detalla la cantidad de personas que se pueden contratar en Filadelfia, según la edad y sexo en mayo de 1936.

Las variables representadas serían estas: cantidad de hombres o mujeres que pueden ser contratados en Filadelfia en mayo de 1936 (cuantitativa discreta con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,14}$: Representar gráficamente la cantidad de hombres o mujeres que pueden ser contratados en Filadelfia en mayo de 1936, según sus edades.

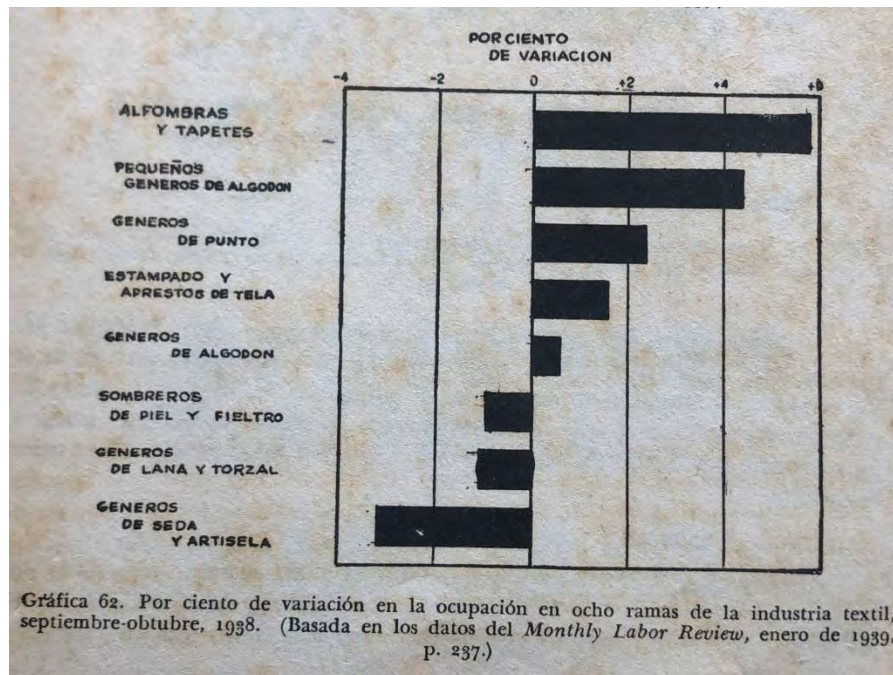
Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,5}$: Representar los datos del gráfico en forma tabular.

La técnica para la resolución de estas tareas moviliza las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, intervalos, tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados, frecuencia absoluta, frecuencia relativa.

Si se desea representar aumento o disminución, se podría utilizar la gráfica de barras de doble dirección, como se muestra en la figura 35. Sería mucho más eficiente si los aumentos tienen un color y las disminuciones otro color (Croxtón y Cowden, 1967).

Figura 35. Gráfica de barras de doble dirección.



Fuente. Croxtón y Cowden, 1967, (p. 145).

La gráfica de la figura 35 representa el porcentaje de variación en la ocupación en ocho ramas de la industria textil.

La variable representada sería la siguiente: variación porcentual en la ocupación de ocho ramas de la industria textil (cuantitativa continua con escala de razón).

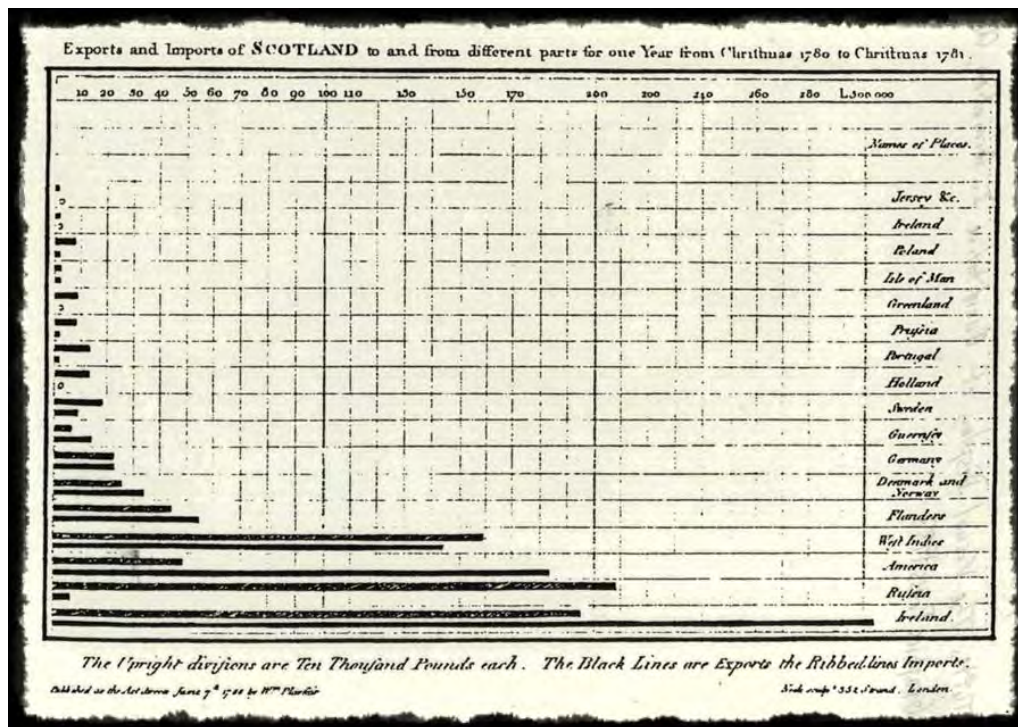
Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,15}$: Representar la variación porcentual en la ocupación de ocho ramas de la industria textil, gráficamente.

Para la resolución de esta tarea se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, porcentajes, gráfico de barras de doble dirección.

En la figura 36, se puede ver un diagrama de barras horizontal elaborado por Joseph Playfair, quien es considerado el creador del gráfico de barras. En este se detalla el comercio exterior de Escocia hacia otros países durante 1781 (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Figura 36. Gráfico de barras agrupado.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

El gráfico de la figura 36 se denomina gráfico de barras agrupado, dado que las importaciones y exportaciones se describen juntas, es el único en su especie expuesto en su libro *Commercial and Political Atlas* (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas serían estas: exportación e importación de Escocia hacia diferentes destinos (cuantitativa continua con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico

Tarea $t_{5,16}$: Representar gráficamente las importaciones y exportaciones de Escocia a diferentes destinos

Para la resolución de esta tarea, se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, gráfico de barras horizontales.

Para los datos con escalas de intervalos y de cocientes o razones, en los que las diferencias iguales en un par de puntos de la escala son iguales entre sí, tendría sentido colocar barras verticales sin separación. Esto se denomina *histograma*. A partir de este, se podría formar lo que se denomina polígono de frecuencias, que se obtiene de la unión de los puntos medios

de la parte superior de cada barra con segmentos de recta, aunque también podría construirse dicho polígono de frecuencias directamente sin ayuda del histograma. Algunos autores elaboran histogramas para distribuciones discretas, y polígono de frecuencias para distribuciones continuas. Cabe mencionar que con el polígono de frecuencias se puede percibir mejor la comparación entre dos o más distribuciones de frecuencias (Haber y Runyon, 1973).

En la figura 37, se muestra un cuadro que presenta una distribución de frecuencia con las calificaciones de los graduados de la Academia Naval de Estados Unidos durante el año 1937.

Figura 37. Distribución de frecuencias.

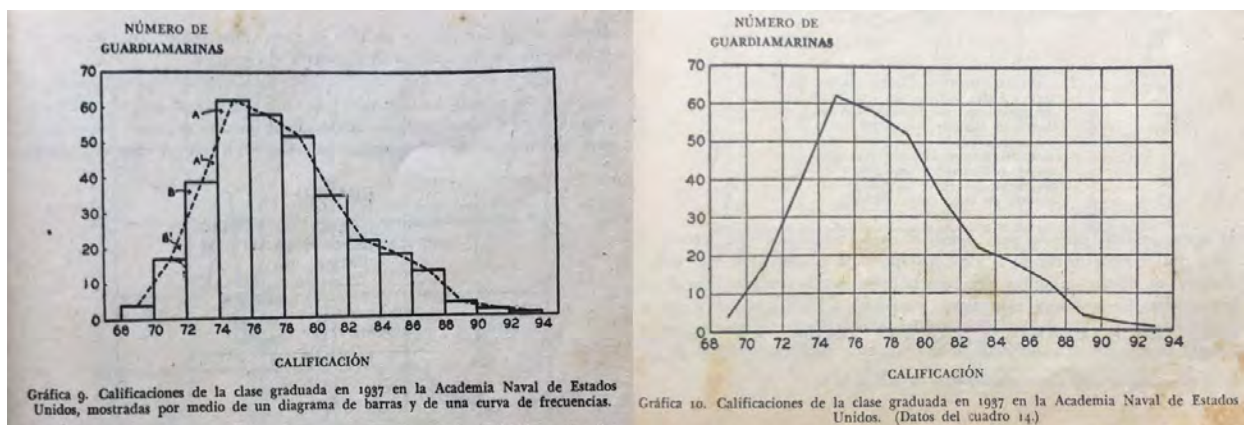
CUADRO 14 DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE CALIFICACIONES DE LA CLASE GRADUADA EN 1937 DE LA ACADEMIA NAVAL DE ESTADOS UNIDOS	
Grado	Número de guardiamarinas
68.0-69.9	4
70.0-71.9	17
72.0-73.9	39
74.0-75.9	62
76.0-77.9	58
78.0-79.9	52
80.0-81.9	35
82.0-83.9	22
84.0-85.9	18
86.0-87.9	13
88.0-89.9	4
90.0-91.9	2
92.0-93.9	1
Total	327

Fuente: Cuadro 25.

Fuente. Croxton y Cowden, 1967, (p. 90).

La distribución de frecuencias se puede representar por medio de un gráfico de barras, aunque comúnmente se traza la curva directamente sin apoyarse en el paso del trazado de barras, para así formar lo que se denomina una curva de frecuencias (polígonos de frecuencia), como se ve en la figura 38 (Croxton y Cowden, 1967).

Figura 38. Representación gráfica de una distribución de frecuencias.



Fuente. Croxton y Cowden, 1967, (p. 91).

Para poder determinar el origen de la curva de distribución de frecuencias, se realizan trazos de los datos en forma de barras rectangulares, como se observa en la parte izquierda de la figura 38. En la horizontal, se colocan las calificaciones, y en la escala vertical la cantidad de guardiamarinas (frecuencia). El número de barras considerado corresponde al número de clases (intervalos) del cuadro (figura 37), y la altura de cada una es proporcional a la frecuencia de cada clase, respectivamente. Si se supusiese que en cada clase las frecuencias se reparten de una manera uniforme, sería factible tomar como representante de cada clase el valor intermedio. De esta manera, se trazaría la curva de distribución de frecuencias uniendo los puntos medios de la parte superior de cada rectángulo con el contiguo. Este proceso de trazado de la curva permite obtener un área bajo la curva igual al área de las barras formadas. Esto se nota en la parte izquierda de la figura 38, que el área de A es igual al área de A' y que el área de B es igual al área de B'; o sea, los trozos triangulares que parecen haber quedado fuera por el trazado de la curva se incluyen por otros que tienen la misma área (Croxton y Cowden, 1967).

La variable representada sería la siguiente: calificaciones de la clase graduada en 1937 de la Academia Naval de Estados Unidos (cuantitativa continua con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,17}$: Representar la información presentada en la tabla por medio de un gráfico de barras.

Tarea $t_{5,18}$: Representar la información presentada en la tabla por medio de un gráfico lineal.

Para la realización de estas tareas, se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, frecuencia, intervalo, altura, marca de clase, área del triángulo, histograma, polígono de frecuencias.

Para la representación de distribuciones de frecuencias, los estadísticos, en su mayoría, convienen en la aplicación de la “Regla de los tres cuartos”, la cual señala que el punto más alto del eje vertical debe ser los tres cuartos de la longitud del eje horizontal, esto para evitar la subjetividad respecto de la proporcionalidad de los ejes (Haber y Runyon, 1973).

Como ya se ha comentado, la distribución de frecuencias se puede representar por medio de un gráfico de barras o trazando una curva. En la figura 39, se tiene una distribución de frecuencias, en la cual los datos de los miembros de cada familia carecen de continuidad, por lo que resultaría más conveniente la representación con un gráfico de barras (Croxtton y Cowden, 1967).

Figura 39. *Distribución de frecuencias con datos no continuos.*

FAMILIAS SEGUN EL NUMERO DE SUS MIEMBROS, EN ESTADOS UNIDOS, 1930	
Número de miembros	Por ciento de todas las familias
1	7.9
2	23.4
3	20.8
4	17.5
5	12.0
6	7.6
7	4.7
8	2.8
9	1.6
10	0.9
11	0.5
12 o más	0.4
Total ...	100.0

Fuente: *Statistical Abstract of the United States, 1937*, p. 50. Las cifras son particulares por familias (con exclusión de instituciones, etc.) e incluyen a las personas solteras que viven solas; los grupos emparentados por sangre, matrimonio u adopción; y los grupos que comparten las mismas condiciones de vida, como “socios”.

Fuente. Croxtton y Cowden, 1967, (p. 92).

En la figura 39, se muestra una tabla con la distribución de frecuencias del número de miembros de cada familia de Estados Unidos en el año 1930. La cantidad de miembros, al ser valores enteros, carecen de la condición de continuidad; entonces, la representación por medio de un gráfico de barras sería la más conveniente. La separación de las barras resaltaría el hecho de la falta de continuidad entre las categorías (Croxtton y Cowden, 1967).

La variable representada sería la siguiente: el número de miembros de cada familia en los Estados Unidos (cuantitativa discreta con escala de razón)

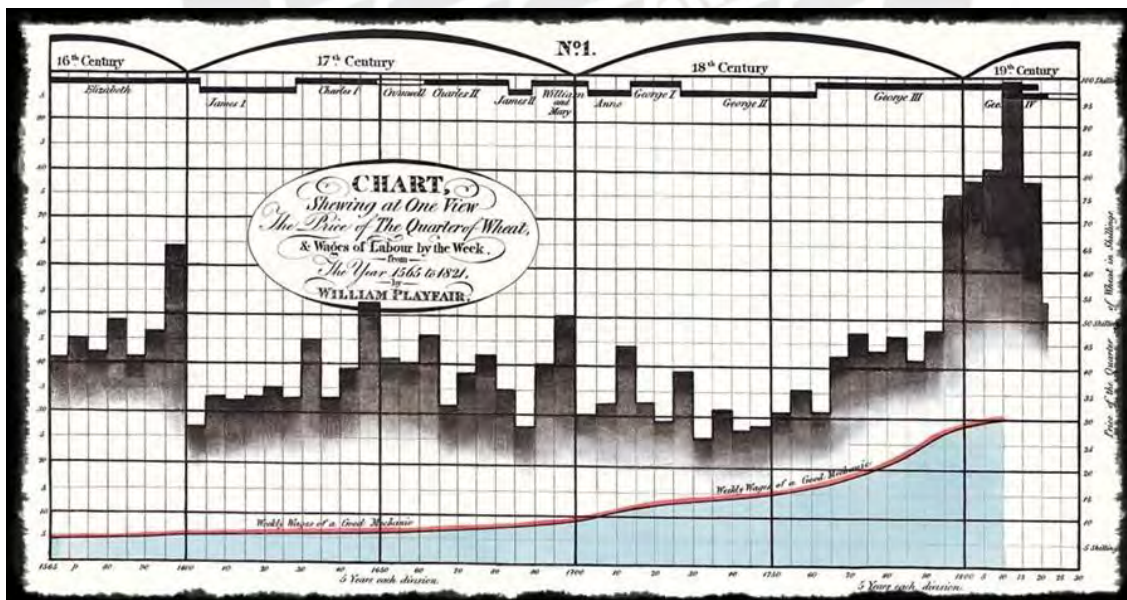
Tipo de tarea T_5 : Representar los datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,19}$: Representar, con el gráfico apropiado, la distribución de frecuencias de la tabla.

Para la realización de esta tarea, se movilizan nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, clasificación de variables estadísticas, escala de medición, gráfico de barras.

La figura 40 muestra una representación gráfica de tres series de tiempo en paralelo: por medio de las barras, el precio de un cuarto de trigo; el sueldo de un trabajador, por medio de la línea inferior; y los reinados ingleses, desde Isabel I hasta Jorge IV (Historia de la visualización de datos, 2021).

Figura 40. Gráfico serie temporal paralela.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

En la figura 40, se muestra cómo va evolucionando el precio del trigo a la par del salario de un trabajador. La representación es una mezcla de gráfico de barras con gráfico lineal presentado por Playfair en el año 1821. La idea del autor era mostrar que el precio del trigo estaba muy accesible en comparación de otras épocas, pero el gráfico no reflejaba eso. Se puede observar en la parte superior del gráfico que los datos se dan por años y por reinados, esto porque estaba dirigido al pueblo británico, el cual no estaba acostumbrado a recordar los acontecimientos por épocas o fechas (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas son estas: precio de un cuarto de trigo (cronológico, con escala de razón) y sueldo de un trabajador (cronológico, con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,20}$: Representar la evolución del precio del trigo por medio de un gráfico de barras.

Tarea $t_{5,21}$: Representar la evolución del salario de un trabajador por medio de un gráfico lineal.

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,6}$: Comparar los valores del precio del trigo según el gráfico de barras y el salario según el gráfico lineal, a través del tiempo.

Para la realización de estas tareas, se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, gráfico de barras, gráfico lineal, intervalos, relación de orden.

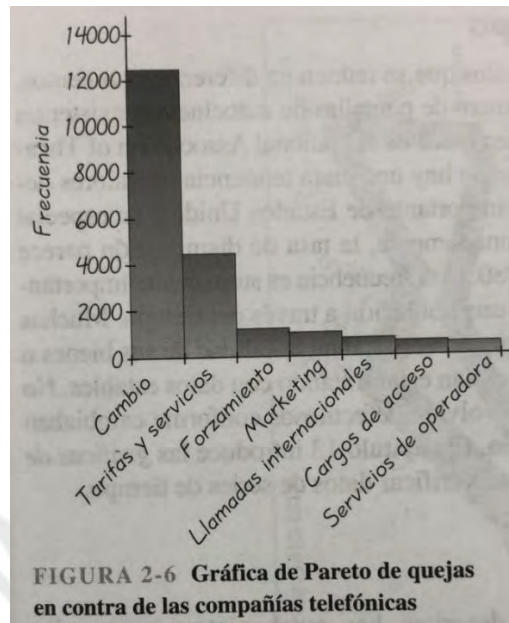
3.2.2.4.6. Gráfica de Pareto

Es una gráfica de barras que representa datos cualitativos. Se construye como el histograma, en el cual el eje vertical de las escalas representa frecuencias relativas, con la diferencia de que las barras se ordenan en forma decreciente de izquierda a derecha; de esta manera, se resaltan las categorías con mayor frecuencia (Triola, 2004).

El creador de este gráfico fue Vilfredo Pareto (1848-1923), ingeniero, sociólogo, economista y filósofo italiano, quien lo publicó en su obra "Cours d'économie politique" (De Souza, 2019).

En la figura 41, se muestra un ejemplo de gráfica de Pareto:

Figura 41. Gráfica de Pareto



Fuente. Triola, 2004, (p. 51).

La figura 41 presenta un gráfico de Pareto con la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.

La variable representada sería esta: tipo de queja en contra de las compañías telefónicas (cualitativa con escala nominal)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,22}$: Representar gráficamente la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{2,5}$: Representar los datos del gráfico en forma tabular.

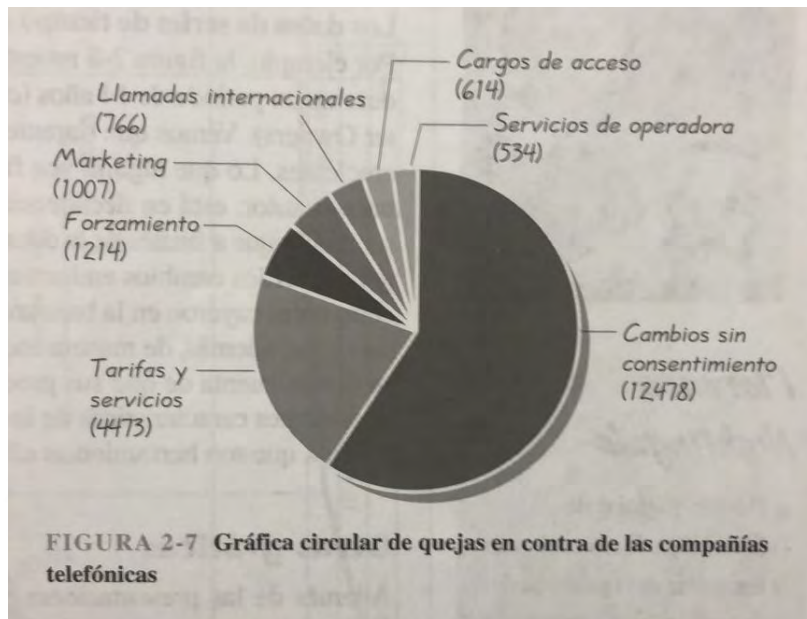
Para la realización de estas tareas en las técnicas, se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, relación de orden, gráfica de Pareto, columna, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados.

3.2.2.4.7. Gráfico circular o de sectores

Los gráficos circulares o gráficos de pastel son círculos que se dividen en sectores en forma de cuña por medio del trazado de radios. Los gráficos circulares y sus variantes son muy

efectivos para representar distribuciones de dinero. Las cantidades se convierten a porcentajes y multiplicando cada porcentaje por 360 (el número de grados del ángulo central de un círculo), se obtendrán los grados de los ángulos de cada sector (Haber y Runyon, 1973). En general sirven para representar datos cualitativos (Triola, 2004). En la figura 42, se muestra un gráfico circular en el que se representan los datos del gráfico de Pareto de la figura 41. En este caso, se evidencia que el gráfico de Pareto resalta mejor los tamaños de los diferentes componentes.

Figura 42. Gráfico circular.



Fuente. Triola, 2004, (p. 51).

La figura 42 presenta un gráfico circular con la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.

La variable representada sería esta: tipo de queja en contra de las compañías telefónicas (cualitativa con escala nominal).

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,23}$: Representar gráficamente la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,5}$: Comparar los datos del gráfico circular con los del gráfico de Pareto.

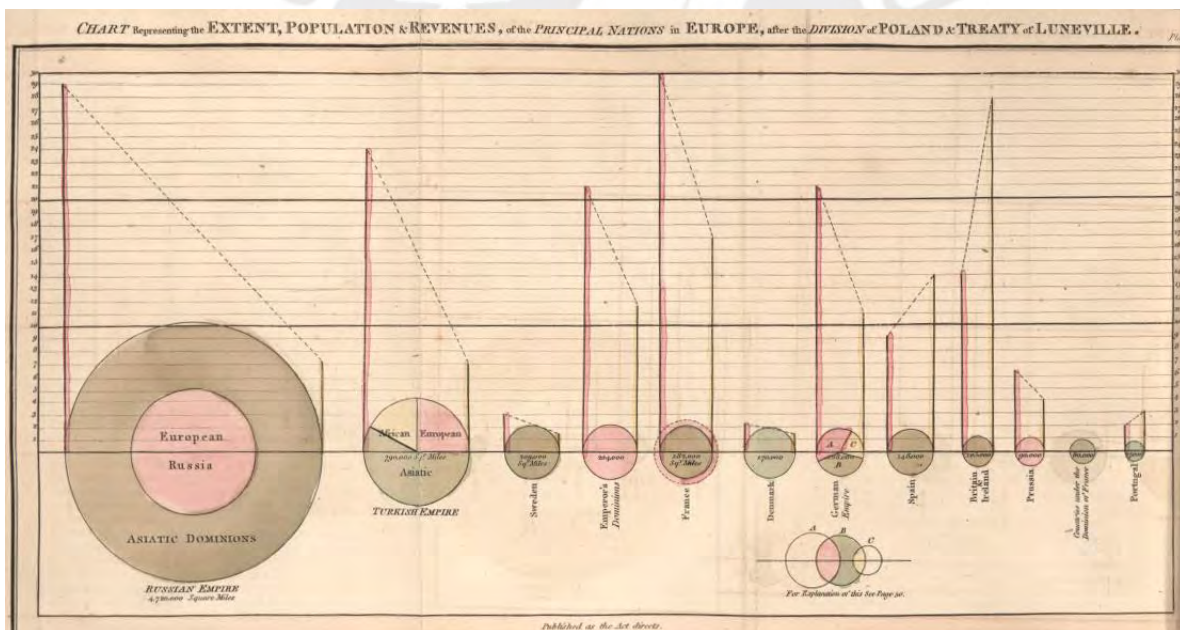
Para la realización de estas tareas, se movilizan las nociones de radio, sector circular, porcentaje, ángulo de sector circular, relación de equivalencia, relación de orden.

Es común utilizar los gráficos circulares para representar distribuciones de razones (Haber y Runyon, 1973). Peterson y Schramm (1954) señalan que, al comparar ocho formas distintas para la representación gráfica de distribución de razones, se determinó que el gráfico circular se interpreta con mayor precisión.

Si se deseara representar partes de un todo por medio de una gráfica de barras, se podría establecer una comparación unidimensional de las partes en que estaría dividida la barra; en cambio, con un gráfico circular, la comparación de las partes del círculo sería bidimensional, la de sus arcos unidimensional, de la misma manera con los ángulos centrales (Croxtton y Cowden, 1967).

Joseph Playfair es el creador del gráfico de sectores. Lo utilizó para representar la extensión, población, e ingresos de distintos países de Europa luego de la división de Polonia, gracias al Tratado de Luneville (Instituto Nacional de Estadística, s.f.). Dicha representación se verá en la figura 43.

Figura 43. Gráfico de sectores.



Fuente. Historia de la visualización de datos (2021).

En el gráfico de la figura 43, las líneas punteadas a la izquierda de los círculos indican la población y las líneas punteadas de la derecha la recaudación de los impuestos. Los gráficos de sectores representan cómo está estructurado el Imperio turco (parte asiática, europea y africana) y el Imperio germano (parte austriaca, letra A y en rojo; otros estados alemanes, letra B y en verde; parte prusiana, letra C y en amarillo); asimismo, el Imperio germano se representa en el

gráfico de circunferencias secantes que se encuentra en la parte inferior, el cual se corresponde con su respectivo gráfico de sectores mediante los colores y letras. La circunferencia punteada alrededor de Francia representa las recientes tierras obtenidas gracias al tratado. El área de cada círculo es proporcional al área de cada respectivo país (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas serían estas: población (cuantitativa discreta con escala de razón); impuestos recaudados (cuantitativa continua, con escala de razón); estructura del Imperio turco (cualitativa con escala nominal); estructura del Imperio germano (cualitativa con escala nominal); y área de un país (cuantitativa continua con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,24}$: Representar gráficamente la población de distintos países de Europa, luego del Tratado de Luneville.

Tarea $t_{5,25}$: Representar gráficamente el área territorial e ingresos de distintos países de Europa luego del Tratado de Luneville.

Tarea $t_{5,26}$: Representar gráficamente la estructura de Imperio turco o germano, según sea el caso.

Tarea $t_{5,27}$: Representar gráficamente los impuestos recaudados de distintos países de Europa, luego del Tratado de Luneville.

Para la realización de estas tareas, se movilizan las nociones de área del círculo, área del sector circular, ángulo del sector circular, proporcionalidad, eje de valores, eje de categorías, relación.

Los economistas y políticos, básicamente, preferían la visualización de datos por medio de tablas tabulares durante el siglo XIX. Gracias a la instalación en Europa de oficinas oficiales de estadística, la representación visual de datos tomó un mayor protagonismo y constató lo significativo que resulta la información estadística para el planeamiento social, la industrialización, el comercio y el transporte (Pontis, 2007).

Debido a las mejoras en tecnología y diseño, en la primera mitad del siglo XIX, se produjo un notable desarrollo de gráficos estadísticos y mapas temáticos. Según Pontis (2007), se inventaron distintos gráficos visuales:

[...] gráficos de barras y circulares (pie chart), histogramas, gráficos de línea, líneas de tiempo, mapas de contornos (1843), gráficos isotérmicos (1817), gráficos en

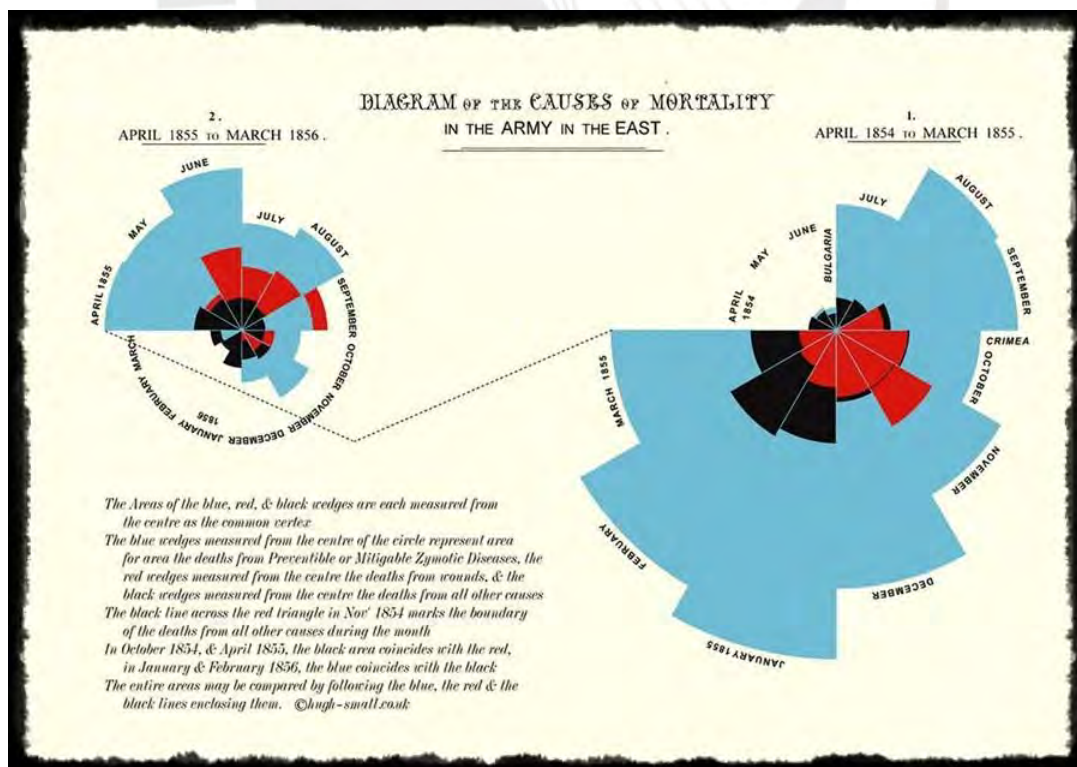
forma de ojiva, cartogramas (1826), mapas de puntos o en inglés *dot-maps* (1830), mapas de transporte (1837), gráficos compuestos (p. 7).

3.2.2.4.8. Gráfico de área polar

Durante el siglo XIX, se realizan una variedad de gráficos utilizados en las ciencias naturales y sociales. Mosquera, Abadía y Palacios (2019) consideran a Nightingale como una “pionera en la representación Gráfica de datos Estadísticos” (p. 27): creó un tipo de gráfico circular que hoy se conoce como diagrama de área polar, o diagrama de la rosa de Nightingale, esto con el fin de llevar una cuenta de las distintas causas de mortalidad, en el hospital militar que dirigía, de los soldados caídos en la guerra de Crimea durante la cual se produjo un desastre sanitario en el año 1858. El fin era presentar informes al departamento británico y funcionarios civiles, de manera que se tenga una mayor facilidad en la comprensión de los hechos, ya que con los reportes estadísticos tradicionales la lectura de estos resultaba muy complicado.

Florence Nightingale salvó muchas vidas gracias al empleo de gráficos y diagramas para el análisis de los cuidados médicos realizados; por ello, se le considera como la protagonista de una real revolución en ese campo (Altamirano y Espinosa, 2009). La rosa de Nightingale se presenta en la figura 44.

Figura 44. Gráfica de área polar.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

En la figura 44, se observa el gráfico de área polar de Nightingale, el cual está compuesto por un círculo dividido en sectores de ángulos iguales. Cada uno de dichos sectores posee un radio diferente, según lo que se desea representar. Además, en cada sector, pueden figurar diferentes datos, como las causas de las muertes siendo el área proporcional a la cantidad de fallecidos por la respectiva causa. Los sectores azules representan los fallecidos por enfermedades infecciosas; los rojos, por heridas; y las negras, por otros motivos. Lo destacable es que Nightingale se dio cuenta de que la calidad de los cuidados en la higiene del hospital eran deficientes; en consecuencia, se tomaron medidas para su mejora (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

La variable representada sería la siguiente: causas de mortalidad en un hospital (cualitativa con escala nominal)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,28}$: Representar las causas de mortalidad en un hospital por medio del gráfico de área polar.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de círculo, sector circular, ángulo de sector circular, radio de sector circular, área de sector circular, proporcionalidad, relación.

3.2.2.4.9. Gráficas de puntos

Es una gráfica en la cual se coloca un punto como marca por cada valor de un dato a lo largo de toda la extensión de la escala de valores. Los puntos se amontonan si existen valores iguales (Triola, 2004). En la figura 45, se muestra un conjunto de datos sobre el consumo de alcohol y tabaco en películas de dibujos animados para niños.

Figura 45. Conjunto de datos.

Conjunto de datos 7: Consumo de alcohol y tabaco en películas de dibujos animados para niños

La duración de las películas es en minutos, los tiempos de consumo de tabaco están en segundos, y los tiempos de consumo de alcohol están en segundos. Los datos se basan en "Tobacco and Alcohol Use in G-Rated Children's Animated Films", de Goldstein, Sobel y Newman, *Journal of the American Medical Association*, vol. 281, núm. 12.

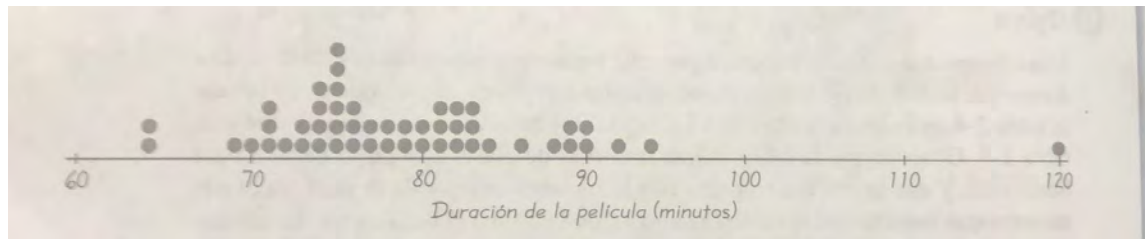
STATDISK: Nombres de los archivos de STATDISK y de los archivos de texto: CHLEN, CHTOB, CHALC.
Minitab: El nombre de la hoja de cálculo es CHMOVIE.MTW.
Excel: El nombre del libro de trabajo es CHMOVIE.XLS.
TI-83 Plus: El nombre de la App es CHMOVIE y los nombres de los archivos son los mismos que para los archivos de texto y de STATDISK.

Película	Compañía	Duración (min)	Consumo de tabaco (seg)	Consumo de alcohol (seg)
Blanca Nieves	Disney	83	0	0
Pinocho	Disney	88	223	80
Fantasia	Disney	120	0	0
Dumbo	Disney	64	176	88
Bambi	Disney	69	0	0
Los tres caballeros	Disney	71	548	8
Fun and Fancy Free	Disney	76	0	4
La cenicienta	Disney	74	37	0
Alicia en el país de las maravillas	Disney	75	158	0
Peter Pan	Disney	76	51	33
La dama y el vagabundo	Disney	75	0	0
La bella durmiente	Disney	75	0	113
101 dálmatas	Disney	79	299	51
La espada en la piedra	Disney	80	37	20
El libro de la selva	Disney	78	0	0
Los aristócatos	Disney	78	11	142
Robin Hood	Disney	83	0	39
Rescuers	Disney	77	0	0
Winnie Pooh	Disney	71	0	0
El zorro y el sabueso	Disney	83	0	0
El corsario negro	Disney	80	0	34
Policías y ratones	Disney	73	165	414
Oliver y su pandilla	Disney	72	74	0
La sirenita	Disney	82	9	0
Rescuers Down Under	Disney	74	0	76
La bella y la bestia	Disney	84	0	123
Aladino	Disney	90	2	3
El rey león	Disney	89	0	0
Pocahontas	Disney	81	6	7
Toy Story	Disney	81	0	0
El jorobado de Notre Dame	Disney	90	23	46
James and the Giant Peach	Disney	79	206	38
Hércules	Disney	92	9	13
Secret of NIMH	MGM	82	0	0
Todos los perros van al cielo	MGM	89	205	73
Todos los perros van al cielo 2	MGM	82	162	72
Babes in Toyland	MGM	74	0	0
Pulgarcita	Warner Bros	86	6	5
Troll en el Parque Central	Warner Bros	76	1	0
Space Jam	Warner Bros	81	117	0
Pippi Longstocking	Warner Bros	75	5	0
Los gatos no bailan	Warner Bros	75	91	0
An American Tail	Universal	77	155	74
Land Before Time	Universal	70	0	0
Fievel Goes West	Universal	75	24	28
We're Back: Dinosaur Story	Universal	64	55	0
Land Before Time 2	Universal	73	0	0
Balto	Universal	74	0	0
Once Upon a Forest	20th Century Fox	71	0	0
Anastasia	20th Century Fox	94	17	39

Fuente. Triola, 2004, (p. 757).

En la figura 46, se observa la representación, por medio de un gráfico de puntos, de los tiempos de duración de cada película dados en la tabla de la figura 45.

Figura 46. Gráfica de puntos.



Fuente. Triola, 2004, (p. 48).

La variable representada sería esta: tiempo de duración de una película (cuantitativa continua con escala de razón).

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,29}$: Representar con un gráfico de puntos, los tiempos de duración de cada película según los datos de la tabla.

Para la realización de esta tarea se movilizan las nociones de proporcionalidad, gráfico de puntos.

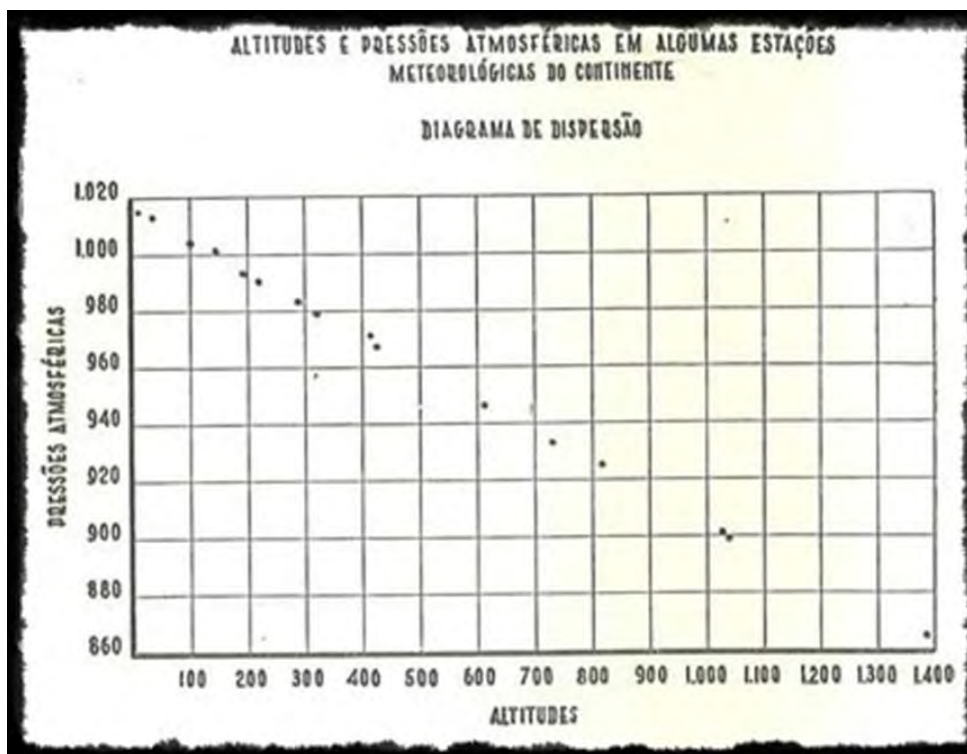
3.2.2.4.10. Gráfico de dispersión

El método gráfico fue debidamente considerado por las agencias gubernamentales entre los años 1860 y 1890, época dorada del método gráfico: muchas publicaciones lo incorporaron como un elemento más de información (Pontis, 2007).

A inicios del siglo XX Francis Galton usa el gráfico de dispersión, y seguidamente distintos autores como Gantt, Herzprung, Rusell, entre otros, hacen uso de los gráficos aplicándolos a sus diferentes disciplinas (Monroy, 2013).

En el campo de la estadística, el gráfico de dispersión es uno de los más fundamentales. Es la representación de dos variables de un mismo individuo o acontecimiento en el plano cartesiano. Tiene como fin analizar la posible relación entre el par de variables por medio de una nube de puntos que adopta una forma más o menos definida dependiendo de la correspondencia entre dichas variables. Las investigaciones sobre astronomía de Sir John Frederick W. Herschel (Reino Unido, 1792 - 1871) y herencia genética de Sir Francis Galton (Reino Unido, 1822 - 1911) permitieron la elaboración de los gráficos de dispersión conocidos en la actualidad. (Instituto Nacional de Estadística, s.f.). En la figura 47, se muestra un ejemplo de gráfico de dispersión.

Figura 47. Gráfico de dispersión.



Fuente. Instituto Nacional de Estadística (s.f.).

En el gráfico de la figura 47, se muestra información sobre la altitud (eje de abscisas) y presión atmosférica (eje de ordenadas) de diversas estaciones meteorológicas. Según la forma adoptada por la nube de puntos, la relación sería aproximadamente lineal, además de ser una relación negativa porque cuando la altitud aumenta la presión disminuye (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Las variables representadas son las siguientes: presión atmosférica (cuantitativa continua, con escala de razón) y altitud (cuantitativa continua, con escala de razón)

Tipo de tarea T_6 : Relacionar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{6,1}$: Relacionar la altitud y la presión atmosférica de diversas estaciones meteorológicas por medio de un gráfico de dispersión.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de eje de abscisas, eje de ordenadas, relación, gráfico de dispersión.

El siglo XX significó una época de cambios en muchos aspectos, sociales, políticos, culturales y económicos: se desató la primera guerra mundial. Durante sus inicios, se le podría recordar como los años oscuros de la representación visual de datos. Se sobrevaloraba la

estética, mientras que se descuidaba el contenido. Definitivamente, fue un retroceso en la evolución de la representación gráfica, la cual perdió pulcritud y técnica (Pontis, 2007).

El desarrollo de la planificación industrial fue sistematizado por Henry L. Gantt en el año 1911. Ello llevó a la creación del diagrama de Gantt (Altamirano y Espinosa, 2009).

Un nuevo comienzo para la astronomía fue la forma de apreciar la evolución de las estrellas. Esto pudo ser posible gracias al diagrama de Herzprung-Rusell, creado en el año 1913, el cual relaciona la luminosidad y temperatura de las estrellas (Altamirano y Espinosa, 2009).

En Harvard se presentó, en el año 1944, el primer computador digital, el cual fue un punto de inflexión para los gráficos y otros diferentes campos (Altamirano y Espinosa, 2009). Esto motivó el interés por retomar las investigaciones usando el método gráfico (Pontis, 2007).

Luego vendrían una serie de mejoras y cambios. En el año 1967, Jacques Bertin publicó en Francia su obra *Semiologie Graphique*, en la que presentaba, según los datos y su correspondiente función, la organización de los elementos de las gráficas (Altamirano y Espinosa, 2009). Este autor forjó toda una teoría respecto de los modos de representación y símbolos gráficos (Pontis, 2007).

En los años 70, John W. Tukey fundó en Estados Unidos de Norteamérica el Análisis Exploratorio de Datos o EDA por sus siglas en inglés (*Exploratory Data Analysis*), lo cual constituye un acercamiento a la estadística que utiliza de una manera sólida un grupo de técnicas que se basan en el empleo de los gráficos (Altamirano y Espinosa, 2009).

Después, se popularizó el uso de la informática para el desarrollo de la representación gráfica: en el año 1974, Jerome H. Friedman y Tukey iniciaron los gráficos interactivos y en 3D (Pontis, 2007).

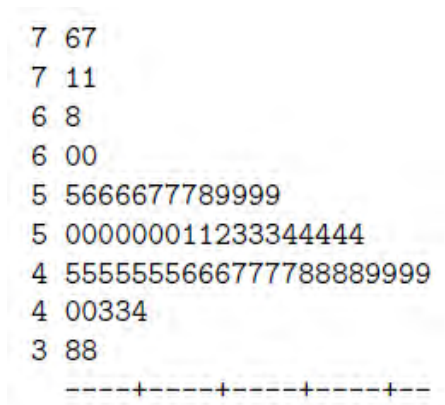
3.2.2.4.11. Gráfico de árboles de tallo y hoja

“Una gráfica de tallo y hojas representa datos que separan cada valor en dos partes: el tallo (el dígito ubicado en el extremo izquierdo) y la hoja (el dígito del extremo derecho)” (Triola, 2004, p. 48).

El gráfico de árboles de tallo y hoja fue creado por Tukey en el año 1977. Es de fácil realización ya que se puede hacer a mano. En este tipo de gráfico, el analista puede notar la distribución de los datos al mismo tiempo que va recopilando la información (Correa y González, 2002). Otra ventaja de este tipo de gráfico es la manera práctica de ordenar los datos. Esto

facilitaría en cálculo de la mediana o de los percentiles (Triola, 2004). Se muestra un ejemplo en la figura 48.

Figura 48. Gráfico de árbol de tallo y hoja



Fuente. Correa y González, 2002, (p. 18).

En la figura 48, se muestran las velocidades registradas con un radar por medio del gráfico de árbol de tallo y hojas; por ejemplo, si la velocidad es 79, la cifra 9 sería una hoja y la cifra 7 sería un tallo. Se ordenaron las velocidades de forma decreciente de arriba hacia abajo; también podría ser al revés.

La variable representada sería la siguiente: velocidad de un radar (cuantitativa continua, con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

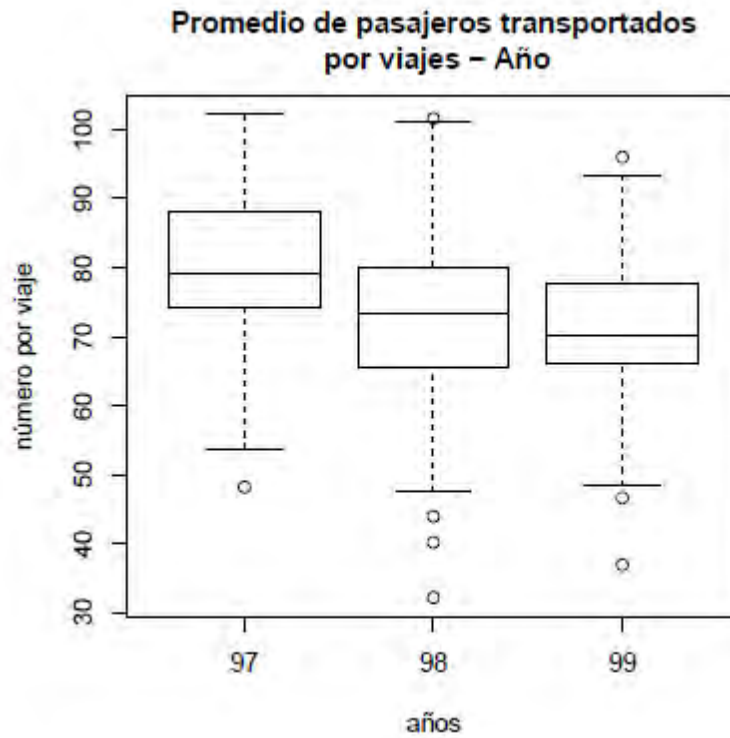
Tarea $t_{5,30}$: Representar las velocidades registradas con un radar por medio de un gráfico de árbol de tallo y hoja.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de número y cifra, relación de orden, tallo, hojas, gráfico de árbol de tallo y hojas.

3.2.2.4.12. Gráfico de cajas (boxplot)

Tukey también es el creador del boxplot o caja de Tukey en el año 1977. Este se elabora con 5 números en los que se observa claramente la distribución de datos y cualidades más resaltantes, se pueden analizar distintos grupos de datos en forma simultánea (Correa y González, 2002). En la figura 49, se muestra un ejemplo de la caja de Tukey.

Figura 49. Gráfico *boxplot* o *caja de Tukey*



Fuente. Correa y González, 2002, (p. 23).

En la figura 49, se puede observar que se comparan las distribuciones del número de pasajero por viaje durante tres años; además, se puede evidenciar la tendencia a la vez que la dispersión (Correa y González, 2002).

La variable representada sería esta: número de pasajeros por viaje (cuantitativa discreta con escala de razón)

Tipo de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{5,31}$: Representar las distribuciones del número de pasajeros por viaje durante tres años por medio de un gráfico de caja.

Para la realización de esta tarea, se movilizan las nociones de eje de valores, eje de categorías, proporcionalidad, relación, gráfico de cajas o *boxplot*.

En el caso de nuestro país, la difusión de estadísticas oficiales, durante los inicios del siglo XX, se hizo de forma limitada en las oficinas gubernamentales. Pasados los años 20, se presenta en el Perú una gran cantidad de publicaciones con relación a visualización gráfica de estadísticas oficiales. Los anexos de *Las memorias anuales del Banco Central de Reserva*

mostraron gráficos lineales desde el año 1923. Tiempo después, los anuarios estadísticos de la Dirección Nacional de Estadística y Censos mezclaban las figuras referentes a los temas de análisis con gráficos de líneas, barras o circulares (Altamirano y Espinosa, 2009). En 1989, se adhieren de manera continua operadores estadísticos en las instituciones, en los que se ocupan a la investigación de significaciones propias de una gráfica (Mosquera, Abadía y Palacios, 2019). El Instituto Nacional de Estadística disponía constantemente de un grupo de personas para la construcción de gráficos. Esto comprendía la elaboración de escalas máximas y mínimas de los datos a examinar; establecimiento del ancho de las figuras en el eje de conceptos; utilización de papel milimetrado, reglas, lápices y un equipo de dibujantes. Desde el año 1990, gracias a las microcomputadoras, se inventaron programas informáticos específicamente para la creación de gráficos. Después, fueron sustituidas por las hojas de cálculo en donde se agregó la función gráfica (Altamirano y Espinosa, 2009).

“En la actualidad sigue siendo el instrumento más completo en el ámbito de gráficas las hojas de cálculo, aunque existan variedades tecnológicas que cumplen funciones parecidas” (Mosquera, Abadía y Palacios, 2019, p. 30) “[...] con el propósito común de convertir datos en información e información en conocimiento, útil para la toma de decisiones.” (Altamirano y Espinosa, 2009, p.12).

En la tabla 4, a modo de resumen, se presentan los tipos de gráficos encontrados en el MER, que fueron creados en la historia. Se detalla el año, autor y las variables asociadas a cada uno de ellos.

Tabla 4. Tipos de gráficos encontrados en el MER de gráficos estadísticos.

AÑO	AUTOR	VARIABLES	TIPO DE GRÁFICO
950 D.C.	Sigmund Günther (descubridor)	-Movimientos planetarios a través del zodiaco en relación al tiempo	Lineal
1644	Michael F. Van Langren	-Distancia entre dos ciudades	De longitudes
1765	Joseph Priestley	-Periodo en que vivió determinado personaje ilustre -Ocupación de un personaje ilustre	Línea de tiempo
1781	William Playfair	-Exportación e importación de Escocia hacia diferentes destinos	Barras agrupadas
1801	William Playfair	-Deuda nacional de Inglaterra -Acontecimiento histórico más trascendente	Lineal
1801	William Playfair	-Exportación desde Inglaterra a las Indias Orientales a través de los años	Lineal

		-Importación a Inglaterra desde las Indias Orientales a través de los años -Balanza exportación – importación en cierto año	
1801	William Playfair	-Población -Impuestos recaudados -Estructura del Imperio turco -Estructura del Imperio germano -Área de un país	Circular o de sectores
1821	William Playfair	Precio de un cuarto de trigo Sueldo de un trabajador	De series de tiempo en paralelo
1858	Florence Nightingale	-Causas de mortalidad en un hospital	De área polar
1869	Charles Minard	-Ubicación de los pelotones -Dirección de los pelotones -Cantidad de hombres caídos durante el trayecto -Temperatura en el trayecto de regreso	De partes componentes
1800-1899	Sir John Frederick W. Herschel y Sir Francis Galton	-Presión atmosférica -Altitud	De dispersión
1909	Vilfredo Pareto	-Tipo de queja en contra de las compañías telefónicas	De Pareto
1977	John W. Tukey	-Velocidad de un radar	De árbol de tallo y hoja
1977	John W. Tukey	-Número de pasajeros por viaje	De caja o boxplot

Fuente. Elaboración propia.

Al realizar el MER, se encontraron diferentes tipos de tareas que se describen a continuación: T_1 : Representar datos en forma escrita, tipo de tarea que induce a la representación de variables estadísticas en lenguaje natural; T_2 : Representar datos en forma tabular, tipo de tarea que induce a la representación de variables estadísticas en forma tabular a partir de datos sueltos, cuadros o gráficos; T_3 : Comparar valores en datos representados, tipos de tarea en los que se comparan valores presentados en tablas, gráficos, y entre ellos; T_4 : Representar datos en forma semitabular, representación escrita y tabular combinadas; T_5 : Representar datos por medio de un gráfico, tareas en las que se representan gráficamente datos determinados y datos presentados en tablas; T_6 : Relacionar datos por medio de un gráfico, tareas que representan

dependencia de dos variables; T_7 : Describir los datos representados, conformados por tareas que tienen que ver con la clasificación y escala de medida de las variables representadas.

A continuación, en la tabla 5, se ordenan los tipos de tarea según la variable a la que hace referencia y su respectiva escala de medición; además, se indica el tipo de representación a la que se relaciona la tarea descrita.

Tabla 5. *Tipos de tarea encontrados en el MER de gráficos estadísticos.*

TIPO DE VARIABLE	ESCALA DE MEDICIÓN	TAREA	TIPO DE REPRESENTACIÓN
CUALITATIVA	Nominal	$t_{5,22}$: Representar gráficamente la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.	Gráfica de Pareto
		$t_{2,5}$: Representar los datos del gráfico en forma tabular.	Tabular
		$t_{5,3}$: Representar la cronología del tiempo de vida de personajes ilustres gráficamente.	Gráfica series de tiempo
		$t_{5,4}$: Representar la ocupación de personajes ilustres gráficamente.	
		$t_{5,23}$: Representar gráficamente la distribución de la cantidad de quejas en contra de las compañías telefónicas, según el tipo de queja.	Gráfico circular o de sectores
		$t_{5,26}$: Representar gráficamente la estructura de Imperio turco o germano según sea el caso	
	$t_{3,5}$: Comparar los datos del gráfico circular con los del gráfico de Pareto.	Gráfico de Pareto y circular	
$t_{5,28}$: Representar las causas de mortalidad en un hospital por medio del gráfico de área polar.	Gráfico de área polar		
CUALITATIVA	Ordinal	$t_{7,1}$: Señale la variable de estudio.	Tabular
		$t_{7,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.	
		$t_{2,4}$: Representar en forma tabular, la información presentada en el cuadro.	
CUANTITATIVA DISCRETA	De razón	$t_{5,10}$: Representar la cantidad de hombres caídos durante el trayecto gráficamente.	Gráfica de partes componentes
		$t_{5,14}$: Representar gráficamente la cantidad de hombres o mujeres que pueden ser contratados en Filadelfia en mayo de 1936, según sus edades.	Gráfico de barras
		$t_{5,19}$: Representar, con el gráfico apropiado, la distribución de frecuencias de la tabla.	

		$t_{2,5}$: Representar los datos del gráfico en forma tabular.	Tabular
		$t_{5,24}$: Representar gráficamente la población de distintos países de Europa luego del Tratado de Luneville.	Gráfico circular o de sectores
		$t_{5,31}$: Representar las distribuciones del número de pasajeros por viaje durante tres años por medio de un gráfico de caja.	Gráfico de cajas o boxplot
CUANTITATIVA CONTINUA	De razón	$t_{1,1}$: Representar en forma escrita las exportaciones e importaciones de Estados Unidos, por clases económicas, entre los años 1936 y 1937.	Escrita
		$t_{2,1}$: Representar en forma tabular las exportaciones e importaciones de Estados Unidos, por clases económicas, entre los años 1936 y 1937. $t_{3,1}$: Comparar las exportaciones e importaciones de Estados Unidos, por clases económicas, entre los años 1936 y 1937, presentados en la tabla. $t_{2,2}$: Representar longitudes y la respectiva área en forma tabular.	Tabular
		$t_{5,2}$: Representar gráficamente las diferencias en la obtención de las distancias entre las ciudades de Toledo (España) y Roma (Italia).	Gráfico de distancias.
		$t_{5,13}$: Representar gráficamente la cantidad de terreno en que se cosechó cierto cultivo en ellos Estados Unidos entre los años 1936 y 1937. $t_{3,3}$: Comparar la cantidad de terreno en que se cosechó cierto cultivo, entre los años 1936 y 1937, a partir de los datos del gráfico. $t_{5,15}$: Representar la variación porcentual en la ocupación de ocho ramas de la industria textil gráficamente. $t_{5,16}$: Representar gráficamente las importaciones y exportaciones de Escocia a diferentes destinos. $t_{5,17}$: Representar la información presentada en la tabla por medio de un gráfico de barras.	Gráfico de barras
		$t_{5,18}$: Representar la información presentada en la tabla por medio de un gráfico lineal.	Gráfico lineal
		$t_{5,25}$: Representar gráficamente el área territorial e ingresos de distintos países de Europa luego del Tratado de Luneville.	Gráfico circular o de sectores

		$t_{5,27}$: Representar gráficamente los impuestos recaudados de distintos países de Europa, luego del Tratado de Luneville.	
		$t_{5,29}$: Representar con un gráfico de puntos, los tiempos de duración de cada película, según los datos de la tabla.	Gráfico de puntos
		$t_{6,1}$: Relacionar la altitud y la presión atmosférica de diversas estaciones meteorológicas por medio de un gráfico de dispersión.	Gráfico de dispersión
		$t_{5,30}$: Representar las velocidades registradas con un radar por medio de un gráfico de árbol de tallo y hoja.	Gráfico de árbol de tallo y hojas
	De intervalo	$t_{5,11}$: Representar la temperatura durante el trayecto de regreso gráficamente.	Gráfico de partes componentes
CRONOLÓGICA	Nominal	$t_{5,6}$: Representar gráficamente la cronología de acontecimientos históricos trascendentes en determinados años.	Gráfico lineal
	Ordinal	$t_{5,1}$: Representar gráficamente los movimientos planetarios a través del zodiaco a medida que cambia el tiempo.	Gráfico lineal
	De razón	$t_{2,3}$: Representar el índice de mortalidad de los ciudadanos de Londres en forma tabular.	Tabular
		$t_{4,1}$: Representar el jornal por semana de un aprendiz, en forma semitabular.	Semitabular
		$t_{5,5}$: Representar por medio de un gráfico lineal la información de la deuda nacional de Inglaterra a través de los años. $t_{5,7}$: Representar la importación a Inglaterra desde las Indias Orientales y la exportación desde Inglaterra a las Indias Orientales, a través de los años, por medio de gráficos lineales. $t_{3,4}$: Comparar la importación y exportación de Inglaterra hallando la balanza importación-exportación en determinado año. $t_{5,21}$: Representar la evolución del salario de un trabajador por medio de un gráfico lineal.	Gráfico lineal
		$t_{5,12}$: Representar gráficamente la cantidad de personas extranjeras y nativas de Estados Unidos desde el año 1870 hasta 1930. $t_{3,2}$: Comparar la cantidad de personas extranjeras y nativas de Estados Unidos, desde el año 1870 hasta 1930, a partir de los datos del gráfico.	Gráfico de barras

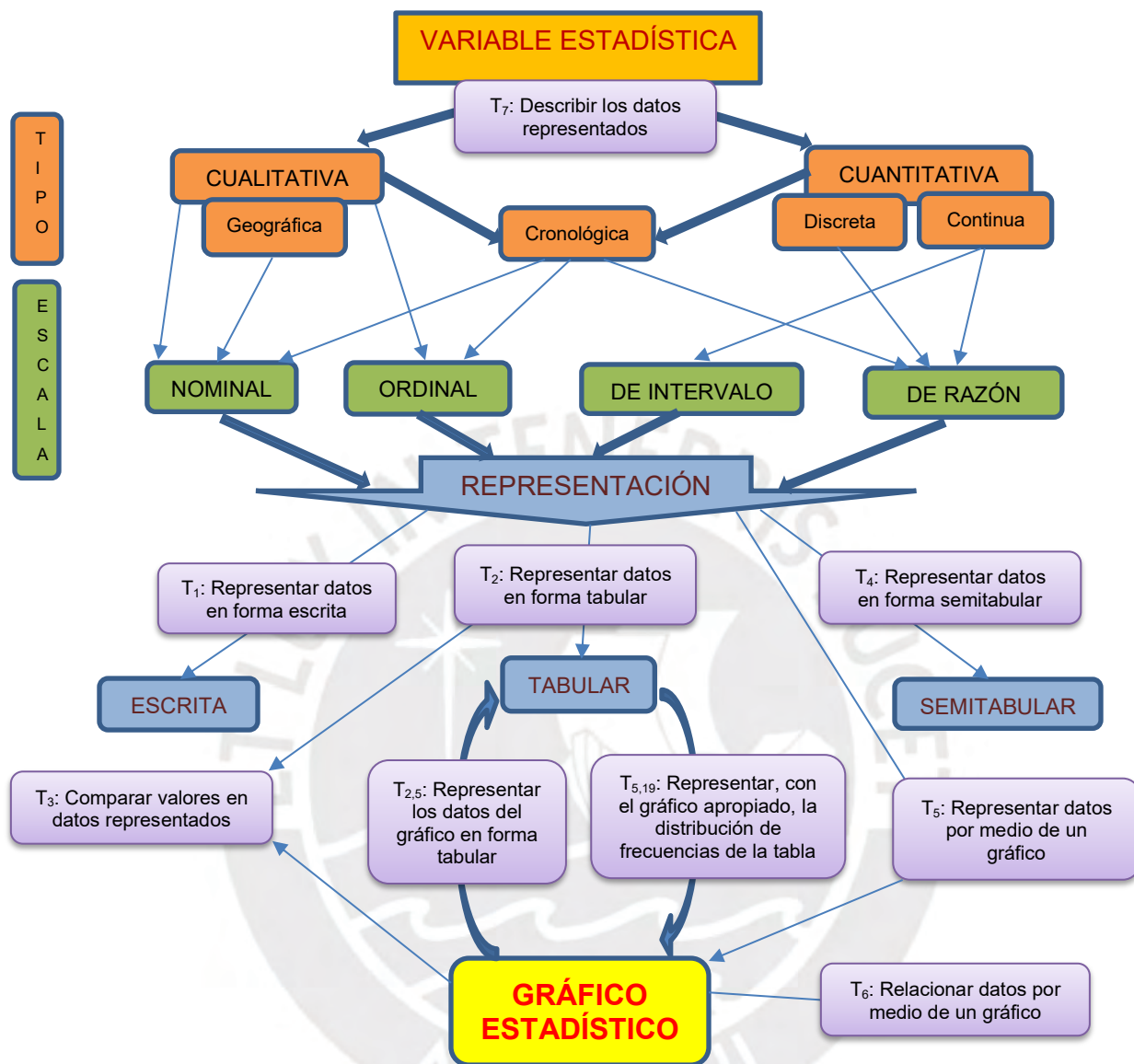
		$t_{5,20}$: Representar la evolución del precio del trigo por medio de un gráfico de barras.	
		$t_{3,6}$: Comparar los valores del precio del trigo según el gráfico de barras y el salario, según el gráfico lineal, a través del tiempo.	Gráfico series de tiempo
GEOGRÁFICA	Nominal	$t_{5,8}$: Representar la ubicación de los pelotones en un gráfico. $t_{5,9}$: Representar la dirección de los pelotones en un gráfico.	Gráfico de partes componentes

Fuente. Elaboración propia.

En la tabla 5, se puede observar que, dependiendo del tipo de variable, surgen determinadas tareas que evidencian la relación entre la variable y su representación; es decir, los tipos de variables se representan mejor con un cierto tipo de representación.

En el MER realizado, se identificaron diversas organizaciones estadísticas puntuales, las cuales se generaron a partir de algún tipo de tarea. Estas organizaciones puntuales se pueden integrar en torno a un discurso tecnológico común. Por ejemplo, los tipos de tarea T_5 : Representar datos por medio de un gráfico; T_6 : Relacionar datos por medio de un gráfico, los cuales se pueden agrupar en torno a las tecnologías que hacen referencia a gráficos estadísticos, por ejemplo, gráfico de barras, de sectores, lineales, etc. Por otro lado, los tipos de tarea T_2 : Representar datos en forma tabular; T_4 : Representar datos en forma semitabular, los cuales se pueden agrupar en torno a las tecnologías que hacen referencia a tablas estadísticas, por ejemplo, tablas de distribución de frecuencias para datos agrupados, o no agrupados. En consecuencia, se determina que se está frente a un nivel de organización estadística local. En este punto, existen condiciones de poder plantear un esquema para el MER realizado, el cual se presenta en la figura 50.

Figura 50. Esquema del MER de gráficos estadísticos.



Fuente. Elaboración propia.

En la figura 50, se muestra un esquema en el que se observa el camino que sigue la variable estadística hacia su representación gráfica, según el MER realizado. Se observa cómo los tipos de tarea, desde el punto de vista de la TAD, van estableciendo las diferentes conexiones. El tipo de tarea T_7 : Describir los datos representados, según el estudio realizado, abarca tareas específicas como son $t_{7,1}$: Señale la variable de estudio y $t_{7,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio; estas inducen a la clasificación de la variable estadística por medio de su escala de medida. La variable clasificada se puede representar en forma escrita, tabular, semitabular y gráficamente como lo señalan los tipos de tarea T_1 , T_2 , T_4 y T_5 , respectivamente; además, se

evidencia que la representación tabular y gráfica se relacionan por medio de las tareas inversas (Fonseca, 2004) T_{2,5}: Representar los datos del gráfico en forma tabular y T_{5,19}: Representar, con el gráfico apropiado, la distribución de frecuencias de la tabla.

El MER presentado tiene carácter relativo y provisional. Está sujeto a una constante mejora (Gascón, 2014), pero resulta ser indispensable para poder establecer un punto de vista propio (Bosch, 2012) en la realización del análisis praxeológico del libro de texto, el cual se elabora en el siguiente capítulo.



Capítulo IV: Análisis del libro de texto

4.1 Momento de publicación del libro.

El prólogo del libro *Matemáticas para no matemáticos* explica sobre su origen, el cual se dio en el contexto de la creación de un curso de nivel superior diseñado para alumnos de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Dichos alumnos estarían inscritos en alguna especialidad, por ejemplo, Derecho, Literatura, Filosofía e Historia, entre otras, en la que no se utiliza de manera intensiva las matemáticas. La situación básicamente era que el curso de Matemática que cursaba un alumno (por ejemplo, de la carrera de Derecho) era el mismo que el que cursaba un alumno de Contabilidad, tanto en los contenidos dictados como en la forma de dictarlos. Tal vez la única diferencia era la profundidad de los temas a tratar. Esto ocasionaba una mala recepción de las matemáticas por parte de ellos que a largo plazo repercutiría en no utilizar los conceptos aprendidos con tanta intensidad como otras carreras, cuando son necesarios desde el punto de vista formativo. Finalmente, el libro y el curso se crearon haciendo los cambios necesarios en los contenidos y la forma en que se dictarían en clase (Advíncula et al., 2009).

4.2 Representatividad de la obra.

El libro *Matemáticas para no matemáticos* se ha elaborado bajo la siguiente premisa: “Se aprende matemáticas cuando se hace matemáticas y el quehacer matemático es el producto de las interacciones de los estudiantes con el saber, a través de la resolución de problemas” (Advíncula et al., 2009, p. 14). Por tal razón, las situaciones problema constituyen el eje principal de la organización del libro de texto.

El aprendizaje de un alumno será mejor en la medida que se dé cuenta de que las matemáticas se pueden encontrar en contextos de la vida diaria, sobre todo si tienen que ver con alguna situación que involucre su profesión. Esto los llevará a utilizar su capacidad de solucionar distintas situaciones con base en el entendimiento de las definiciones matemáticas. Los contenidos del libro *Matemática para no matemáticos engloban* dichos contextos, que se vinculan a las ciencias humanas. Así, genera en el estudiante a realizar análisis de casos particulares que los induzcan a hacer conjeturas y generalizaciones sobre estos. Dichos contenidos son diferentes contribuciones con base en experiencias, enmarcadas en las teorías sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Advíncula et al., 2009).

La presente investigación se centró en el capítulo 3, específicamente en el punto 3.3., “Representación gráfica: circular, de barras y de puntos”, que inicia en la página 111 y culmina

en la página 120. En este ítem, el libro desarrolla la temática de la representación gráfica de variables estadísticas. Se encontraron 5 situaciones problema (de la situación 9 a la 13) para introducir los conceptos propios del tema a tratar, pero también 5 situaciones problema propuestos para practicar. Cada situación planteada contiene diversas preguntas a), b), etc.

Las definiciones, que se presentan en el capítulo 3, específicamente en el punto 3.3, las cuales son propias de la representación gráfica de variables estadísticas, no son las únicas que se necesitan para poder tener un mejor entendimiento de dicha representación gráfica, como se ha observado en la construcción del MER; de hecho, se requieren de otras definiciones, las cuales también se encuentran presentes en otros puntos del capítulo a analizar. Todo esto se describe a continuación.

La estadística se entiende como la ciencia que se encarga de recolectar, organizar, presentar y analizar datos. Una de sus ramas, la estadística descriptiva, se encarga de describir la información obtenida de una muestra determinada y la otra rama, la estadística inferencial, se encarga de realizar inferencias o generalizar con cierto margen de error (Advíncula et al., 2009).

Población es un grupo de elementos susceptibles de ser observados o medidos. Estos elementos conforman la materia de la investigación, mientras que la muestra es una parte representativa de la población (Advíncula et al., 2009).

Variable estadística “es una propiedad o característica de los elementos que componen una determinada población. Dicha característica debe ser factible de medirse u observarse” (Advíncula et al., 2009, p. 97).

Dato estadístico es el resultado de observar o medir una variable en algún elemento definido de la población (Advíncula et al., 2009).

El libro *Matemática para no matemáticos* propone una clasificación de las variables estadísticas como sigue a continuación: variables cuantitativas, las cuales “se pueden medir de manera que produzcan datos numéricos. Los datos son numéricos cuando se pueden realizar operaciones aritméticas con los valores de dichos datos y esas operaciones tienen significado” (Advíncula et al., 2009, p. 97). Asimismo, estas variables pueden ser continuas, “aquellas cuyos posibles valores constituyen un intervalo” (Advíncula et al., 2009, p. 97) o discretas, las cuales son “aquellas cuyos valores posibles se pueden enumerar” (Advíncula et al., 2009, p. 98). Variables cualitativas son las que “solo se pueden medir en datos que expresan distintas cualidades, las cuales no pueden traducirse numéricamente. Los diferentes valores que toma una variable cualitativa se denominan cualidades o atributos” (Advíncula et al., 2009, p. 98). Estas

variables, según su nivel de medición, pueden ser ordinales, cuando sus valores “se pueden ordenar siguiendo alguna escala establecida, de manera que dicho orden expresa un grado posesión de la característica medida en la variable” (Advíncula et al., 2009, p. 98), o nominales, que son “aquellas en las que no se puede establecer un orden para los atributos. Únicamente clasifican en categorías a los sujetos de la población” (Advíncula et al., 2009, p. 98).

Para la representación tabular, según los datos se puedan o no agrupar, el libro presenta las tablas que se muestran en la figura 51.

Figura 51. Tablas de distribución de frecuencias.

Tabla de distribución de frecuencias para datos sin agrupar

Valores de la variable (x_i)	Frecuencias absolutas (f_i)	Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$)	Frecuencias acumuladas (F_i)	Frecuencias relativas acumuladas (H_i)
x_1	f_1	h_1	F_1	H_1
x_2	f_2	h_2	F_2	H_2
....
x_k	f_k	h_k	F_k	H_k
	Número total de datos (n)	1		

donde: x_i es uno de los valores que toma la variable en estudio.

Tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados

Intervalos [$x_i - x_{i+1}$ [Marca de clase (x_i')	Frecuencias absolutas (f_i)	Frecuencias relativas ($h_i = f_i/n$)	Frecuencias acumuladas (F_i)	Frecuencias relativas acumuladas (H_i)
$[x_1 - x_2 [$	x_1'	f_1	h_1	F_1	H_1
$[x_2 - x_3 [$	x_2'	f_2	h_2	F_2	H_2
....
$[x_k - x_{k+1}]$	x_k'	f_k	h_k	F_k	H_k
		Número total de datos (n)	1		

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 105).

Como se observa en la figura 51, en la primera columna se ubican los valores de los atributos, números o intervalos en que se clasificaron los datos. Para el caso de las variables cualitativas, dicha columna sería de categorías; si es ordinal, se deberán ordenar de forma creciente o decreciente. Para el caso de las variables cuantitativas discretas, en dicha columna, van los valores numéricos de los datos; para las variables cuantitativas continuas, van los

intervalos. En caso de que la variable cuantitativa discreta tome muchos valores, también se les agrupa en intervalos (Advíncula et al., 2009).

En la figura 52, algunas definiciones respecto de los valores que se colocan en las otras columnas de las tablas mostradas en la figura 51.

Figura 52. Frecuencias y marca de clase.

- La *frecuencia absoluta* de una clase (f_i) es el número de datos observados en dicha clase. La suma de todas las frecuencias absolutas debe ser igual al número de datos registrados. Así, se verificará que $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$ (número total de datos).
- La *frecuencia relativa* de una clase (h_i) es igual al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos; es decir, $h_i = f_i / n$. Así, se verificará que $h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1$.
- La *frecuencia acumulada* (F_i) de una clase se obtiene sumando la frecuencia absoluta de dicha clase con las frecuencias absolutas de todas las clases anteriores.
- La *frecuencia relativa acumulada* de una clase (H_i) se obtiene sumando la frecuencia relativa de dicha clase con las frecuencias relativas de todas las clases anteriores.

la marca de clase de un intervalo es el valor medio de los extremos del intervalo. Así, en el intervalo $[x_i; x_{i+1}[$, la marca de clase x_i' es igual a:
$$x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 104-105).

A continuación, se presentan las definiciones que presenta el libro *Matemática para no matemáticos* respecto de la representación gráfica de variables estadísticas.

El propósito principal de un gráfico es representar datos estadísticos de una manera visualmente clara; por esta razón, debe estar compuesto por todos los elementos necesarios que le permitan cumplir tal función: títulos, rótulos, unidades, etc. Los gráficos más utilizados son el de barras, sectores circulares y el diagrama de puntos (Advíncula et al., 2009). En la figura 43, las definiciones para cada tipo de gráfico propuesto en el libro mencionado.

Figura 53. Definiciones para gráfico de barras, circular y de puntos.

Gráficos de barras

En un gráfico de barras se representa cada clase a través de una barra vertical (u horizontal) cuya altura (o largo) es proporcional a la frecuencia absoluta de dicha clase. Los gráficos de barras sirven para representar tanto variables cualitativas como cuantitativas. En el caso de variables cualitativas o de variables cuantitativas discretas, las barras deben tener una separación entre ellas. En el caso de variables cuantitativas continuas, las barras van juntas para transmitir la idea de continuidad entre los intervalos. Los gráficos de barras juntas reciben el nombre de histogramas.

Gráfico circular o de sectores circulares

En una gráfica circular, cada clase se representa mediante un sector circular. Dado que la circunferencia completa corresponde a un ángulo central de 360° , la medida en grados del ángulo central correspondiente a una clase con frecuencia relativa h_k es $h_k(360^\circ)$.

Esto es, los ángulos centrales se relacionan con los porcentajes en la medida que 360° equivale a 100%.

El gráfico circular se emplea para representar variables cualitativas.

Gráfico de puntos (o de dispersión unidimensional)

Un gráfico de puntos consiste en un diagrama con las siguientes características:

- Un eje horizontal donde se ubican las clases consideradas para la variable representada.
- Cada dato contenido en una clase se grafica mediante un punto que se coloca encima de la correspondiente clase representada en el eje horizontal.
- Los puntos se disponen verticalmente de manera que a cada clase representada en el eje horizontal le corresponden tantos puntos como lo indica la frecuencia absoluta de dicha clase.

Los gráficos de puntos sirven para mostrar los agrupamientos en un conjunto de datos.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 113, 116-117).

4.3 Estructura del libro.

La estructura del libro se conforma de un prólogo, una introducción, el desarrollo de cuatro capítulos, un anexo en el que se da respuesta a las preguntas propuestas de cada capítulo para terminar con la bibliografía.

Los temas escogidos para cada capítulo tratado en el libro de texto se seleccionaron basándose en lo propuesto por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en el proyecto PISA, tomando en cuenta las áreas que resultarían ser transversales a otras disciplinas, las cuales contribuyen al pensamiento analítico. Por tal razón, los cuatro capítulos se denominaron así: Números y operaciones, Cambio y relaciones, Análisis de datos, e Incertidumbre (Advíncula et al., 2009).

Cada capítulo se conforma de los siguientes puntos: primero, se explica por qué se ha tomado en cuenta el tema a tratar; segundo, se determinan los objetivos a alcanzar en dicho capítulo; tercero, se muestra una situación problema, en la cual se espera generar en el alumno la necesidad de abordar los saberes matemáticos de la respectiva sección valiéndose de sus conocimientos previos. El alumno deberá proponer una posible solución de la situación planteada, ya sea trabajando individualmente o formando equipos de trabajo; cuarto, se formalizan las definiciones realizando tratamientos en distintos registros (algebraico, gráfico, verbal o numérico); finalmente, se muestran más situaciones para reforzar lo aprendido (Advíncula et al., 2009).

En el capítulo 1, Números y operaciones, se inicia con el tema de Escalas. Se presenta una definición y los tipos de escalas; luego, sigue con porcentajes, lo que prepara el camino para la variación porcentual para finalmente desarrollar el interés simple y compuesto.

En el capítulo 2, Cambio y relaciones, se trata la noción de función, dominio y rango, la que establece una definición para función. A partir de esto, se desarrollan varios tipos de funciones: la función constante y lineal, lineal por tramos, cuadrática y exponencial: El desarrollo de todos los tipos de funciones mencionados se realiza desde distintos tipos de representaciones; escrita, algebraica, gráfica o tabular; se finaliza con el análisis de gráficas.

El capítulo 3, Análisis de datos, empieza con la definición y clasificación de la variable estadística, además de algunas definiciones importantes propias de la estadística; luego, se desarrollan las tablas de distribución de frecuencias para una variable para datos sin agrupar y para datos agrupados; después, se continúa con las representaciones gráficas, circular, de barras y de puntos; luego, se sigue con las medidas de tendencia central, moda y mediana, y

media aritmética de un conjunto de datos sin agrupar y agrupados; prosigue el capítulo con las medidas de dispersión, que establecen la diferencia entre las poblacionales y las muestrales, además del respectivo cálculo de la varianza y desviación estándar para datos discretos organizados en distribución de frecuencias y para datos agrupados. Se concluye el capítulo con el tema percentiles, el cual provee un método para su cálculo.

En la figura 54, se muestra el capítulo 3 del índice del libro *Matemáticas para no matemáticos*.

Figura 54. Capítulo 3 del índice del libro *Matemáticas para no matemáticos*.

Capítulo 3: Análisis de datos	93
3.1. Variable estadística. Definición. Clasificación	94
3.2. Tablas de distribución de frecuencias para una variable	101
3.3. Representación gráfica: circular, de barras y de puntos	111
3.4. Medidas de tendencia central	121
3.4.1. Moda y mediana	121
3.4.2. Media aritmética	129
3.5. Medidas de dispersión	137
3.6. Percentiles	150

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 7-8).

El capítulo 4, Incertidumbre, inicia con las definiciones de experimento, aleatorio y no aleatorio; luego, toca el tema de espacio muestral y los eventos. El capítulo finaliza con el tema de Probabilidad, que determina el cálculo de la probabilidad clásica y empírica.

Luego del capítulo 4, se adiciona un anexo con las respuestas a todos los problemas propuestos al final de cada capítulo. Finalmente, se presenta la bibliografía.

4.4 Análisis ecológico del libro.

Como ya se mencionó, el libro *Matemáticas para no matemáticos* se creó a la par de un curso universitario para el primer ciclo de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este nace con la idea de entregar las herramientas matemáticas, haciendo matemáticas, a los alumnos en cuyas especialidades no las utilizarían de una manera tan incisiva, como lo indica el enfoque temático del curso.

El curso ha sido diseñado pensando en aquellos estudiantes que siguen especialidades en las que, la matemática tiene un uso instrumental. En ese sentido, el curso brinda elementos necesarios para que los estudiantes comprendan y manejen

conceptos matemáticos, amplíen su visión sobre la matemática, su vinculación con las ciencias humanas y desarrollen el pensamiento matemático (PUCP, 2022, p. 2)

En este sentido, los temas tratados en el libro van de acuerdo al sílabo del curso denominado Matemática Básica. El libro *Matemática para no matemáticos* dedica temas de Estadística en los capítulos 3 (Análisis de datos) y 4 (Incertidumbre). Para nuestra investigación, interesa el capítulo 3, pues presenta la variable estadística y su representación gráfica. Parte de la sumilla del curso Matemática Básica, específicamente del capítulo 3, el cual es referencial para la elaboración del texto en estudio a continuación:

Capítulo 3: Análisis de datos. Variables estadísticas. Organización de datos cualitativos. Tablas de distribución de frecuencias y gráficos estadísticos para variables cualitativas. Organización de datos cuantitativos (discretos y continuos). Tablas de distribución de frecuencias y gráficos estadísticos para variables cuantitativas. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión (PUCP, 2022, p. 3).

4.5 Análisis praxeológico del libro.

Para la realización del análisis praxeológico de cada representación gráfica de datos estadísticos, se identificarán las variables representadas indicando su tipo. Luego, se describirán los elementos basados en lo que propone la TAD. Para esto, será relevante observar la siguiente notación:

T_i : Representa el tipo de tarea i , donde $1 \leq i \leq 4$, $i \in \mathbb{N}$

$t_{i,j}$: Representa la tarea j del tipo de tarea i , donde $1 \leq j \leq 5$, $j \in \mathbb{N}$

$\tau_{i,j,k}$: Representa la técnica k necesaria para dar solución a la tarea j del tipo de tarea i , donde $1 \leq k \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$

θ_m : Representa la tecnología que justifica un determinado paso del proceso en el que se desarrolla la técnica, donde $1 \leq m \leq 36$, $m \in \mathbb{N}$

La teoría que justifica las tecnologías será, en todos los casos analizados, la estadística descriptiva. Según Ramos, Del Águila y Bazalar (2017), la estadística descriptiva “se encarga de recolectar, clasificar, presentar, describir, resumir o simplificar datos, cuyo análisis no pretende ir más allá del conjunto de los datos obtenidos de la muestra o de la población” (p. 16); es decir, reúne un conjunto de procesos cuyo fin es el de “presentar grupos de datos simplificados en tablas, gráficos o medidas de resumen” (p. 16). Según la Real Academia de la Lengua Española (2023), se define teoría como “Leyes o hipótesis usadas para explicar fenómenos o partes de

una ciencia”, y siendo la estadística “la ciencia que se encarga de obtener, describir e interpretar los datos” (Johnson y Kuby, 2005, p. 4); la estadística descriptiva es la teoría que trata de explicar parte de la estadística, la cual abarca todos los conceptos necesarios para justificar las tecnologías de las técnicas que solucionan los tipos de tareas que giran en torno a la representación gráfica de las variables estadísticas. Dicha representación es un tema de interés en la estadística.

En seguida, se muestra el análisis praxeológico de las diferentes situaciones problema propuestas en el libro *Matemáticas para no matemáticos*.

En la figura 55, se presenta la situación 9. Se muestra en un cuadro la cantidad de discos compactos que tiene cada uno de los 40 estudiantes del curso de Matemática. Se pide elaborar el gráfico adecuado para representar los datos indicados.

Figura 55. Situación 9.

Situación 9

Los siguientes datos muestran el número de discos compactos que tienen 40 estudiantes del curso de Matemáticas:

Número de discos compactos									
2	3	5	6	17	3	23	2	12	19
14	13	12	19	20	11	10	13	7	6
8	13	16	4	6	7	1	9	3	7
10	15	17	20	12	1	8	9	7	11

Elabore un gráfico adecuado para representar la situación mostrada.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 111-112).

La variable involucrada sería la siguiente: número de discos compactos de los 40 estudiantes del curso de Matemática, de tipo cuantitativa discreta con escala de razón.

En el texto, se pide elaborar un gráfico que se adecúe a la situación presentada, pero no se propone una solución, porque es una situación propuesta en la cual se espera generar en el alumno la necesidad de abordar los saberes matemáticos de la respectiva sección, la cual se vale de sus conocimientos previos.

Se planteará una solución con base en la información obtenida en la elaboración del MER. Antes de elaborar el gráfico pedido, se evidencia que los datos se presentan desordenados en un cuadro, tal como se observa en la figura 55. Por tal razón, según Haber y Runyon (1973), resultaría conveniente ordenarlos en una tabla; de esta manera, adquirirían un sentido, como se vio en el MER.

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tomando en cuenta la cantidad de valores diferentes de los datos, Zamora (2003) recomienda agruparlos por intervalos.

Tarea $t_{1,1}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos agrupados.

Técnica $\tau_{1,1,1}$:

Paso 1: Ordenar los datos de forma creciente.

Paso 2: Seleccionar el valor mínimo y el valor máximo.

Paso 3: Determinar la cantidad de intervalos a considerar y la amplitud de los mismos.

Paso 4: Determinar la frecuencia absoluta para cada intervalo.

Paso 5: En la primera columna, se colocarán las categorías, en este caso, los intervalos definidos.

Paso 6: En la segunda columna, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría, en este caso, de cada intervalo.

Tecnologías: θ_1 : Relación de orden, θ_2 : Intervalos, θ_3 : Amplitud de intervalos, θ_4 : Número cardinal, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{14} : Columna θ_6 : Tabla de distribución de frecuencias para datos agrupados.

Ahora que se tienen los datos ordenados en una tabla, se procede a la elaboración del gráfico apropiado. Como se trata de valores que carecen de continuidad, según Croxton y Cowden (1967), se podrían representar con un gráfico de barras verticales separadas, de acuerdo a lo descrito en el MER, así como también lo propone el libro *Matemática para no matemáticos* en su definición de gráfico de barras: “En el caso de variables cualitativas o de variables cuantitativas discretas, las barras deben tener una separación entre ellas” (Advíncula et al., 2009, p. 113).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,1}$:

Antes de representar los datos gráficamente, se debe elegir el gráfico adecuado con base en el tipo de variable que se desea representar.

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, se debe elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cuantitativa discreta con escala de razón, se podría representar con un gráfico de barras verticales separadas.

Tecnologías: θ_{33} : Variable cuantitativa discreta, θ_{28} : Escala de razón, θ_{12} : Gráfico de barras.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el gráfico de barras, se procede a su construcción.

Paso 2: Trazar perpendicularmente el eje (horizontal) de conceptos o categorías y el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 3: Indicar en el eje de conceptos o categorías los intervalos considerados en la tabla de distribución de frecuencias en forma creciente.

Paso 4: Indicar en el eje de escalas o valores la frecuencia absoluta correspondiente a cada intervalo considerado.

Paso 5: Dibujar, para cada intervalo considerado, barras verticales separadas, cada una con una altura de acuerdo con la frecuencia absoluta correspondiente.

Tecnologías: θ_7 : Perpendicularidad, θ_8 : Proporcionalidad, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_2 : Intervalos, θ_1 : Relación de orden, θ_{11} : Altura, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{12} : Gráfico de barras.

En la figura 56, se presenta la situación 10. Se muestra una tabla en la cual se indica la cantidad de alumnos que prefiere cierto curso; además, se presentan dos gráficos circulares con las preferencias de dichos cursos expresadas en porcentajes. Se pide justificar la elección del gráfico circular que represente los datos mostrados en la tabla.

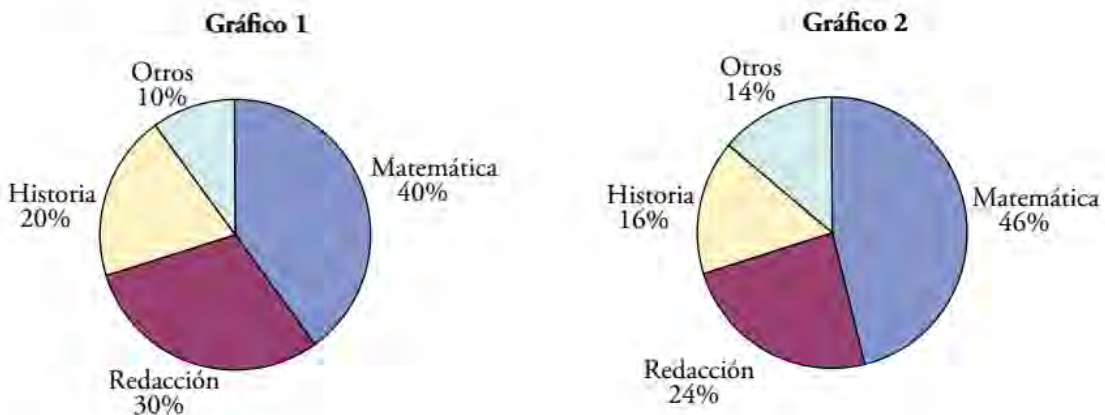
Figura 56. Situación 10.

Situación 10

A un grupo de alumnos del primer ciclo de Psicología se les preguntó cuál era su curso preferido hasta el momento. La información se muestra en la siguiente tabla:

Curso preferido	Número de alumnos
Matemáticas	20
Redacción	15
Historia	10
Otros	5
Total	50

A continuación, se presentan dos gráficos pero solo uno de ellos corresponde a la información dada en la tabla anterior:



¿Cuál de los dos gráficos corresponde a la información dada en la tabla? Justifique la respuesta.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 112).

La variable involucrada sería la siguiente: curso preferido por cada alumno del primer ciclo de Psicología, de tipo cualitativa con escala nominal.

Los datos deberán ser representados con un gráfico circular para compararlo con los que se muestra en la situación 10. Cabe mencionar que el libro propone como solución solo cotejar los valores de los porcentajes obtenidos con los datos de la tabla frente a los que aparecen en los gráficos mostrados en el texto. La solución propuesta por el libro, en la figura 57.

Figura 57. Solución del libro para la situación 10.

Solución propuesta

El gráfico 1 corresponde a la información presentada en la tabla, dado que se verifican los porcentajes para cada curso.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 113).

Sin embargo, si se está pidiendo el gráfico correspondiente, también se debería verificar que los sectores sean proporcionales a los porcentajes que se están calculando. Por tal razón, antes de la elaboración del gráfico, se deben calcular los porcentajes y ángulos de los sectores que correspondan a cada categoría y ordenarlos en una tabla de distribución de frecuencias.

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,2}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos no agrupados.

Técnica $\tau_{1,2,1}$:

Paso 1: En la primera columna de la tabla, se colocarán las categorías; en este caso, irán los cursos preferidos.

Paso 2: En la segunda columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría; en este caso, irá el número de alumnos que prefiere cierto curso.

Paso 3: En la tercera columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría.

Paso 4: En la última columna de la tabla, colocar los ángulos correspondientes a cada sector de cada categoría y multiplicar la frecuencia relativa por 360°

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{17} : Ángulo de sector circular.

Con la información ordenada, se está condiciones de elaborar el gráfico circular que se necesita.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,2}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico circular.

Técnica $\tau_{2,2,1}$:

Paso 1: Dibujar un círculo y dividirlo en sectores, según los ángulos descritos en la tabla.

Paso 2: Asignar la categoría y la respectiva frecuencia relativa, expresada en porcentaje a cada sector dibujado, según la información de la tabla.

Tecnologías: θ_{18} : Círculo, θ_{19} : Sector circular, θ_{15} : Categoría, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje, θ_{17} : Ángulo de un sector circular, θ_{21} : Gráfico circular.

Finalmente, se podrá elegir cuál es el gráfico que representa la información de la situación 10.

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,1}$: Comparar los valores de los datos representados por medio de gráficos circulares para determinar qué gráficos son equivalentes.

Técnica $\tau_{3,1,1}$:

Paso 1: Comparar la asignación de categorías y respectivos porcentajes de los diferentes sectores de cada gráfico.

Paso 2: Comparar los ángulos de los sectores correspondientes a cada gráfico analizado.

Tecnologías: θ_{15} : Categoría, θ_{20} : Porcentaje, θ_{19} : Sector circular, θ_{22} : Relación de equivalencia, θ_{17} : Ángulo de sector circular.

En la figura 58, se presenta la situación 11. La tabla muestra la cantidad de niños correspondiente a cada nivel socioeconómico considerado (bajo, medio y alto) de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima. Se pide identificar la variable de estudio e indicar su tipo, y representar la información gráficamente.

Figura 58. Situación 11.

Situación 11

A continuación, se muestra información sobre el nivel socioeconómico (bajo, medio y alto) de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima.

Nivel socioeconómico	Cantidad de niños
Bajo	17
Medio	14
Alto	9
Total	40

- Señale cuál es la variable de estudio y de qué tipo es.
- Represente gráficamente la información mostrada en la tabla.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 114).

La variable involucrada sería la siguiente: nivel socioeconómico de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima, de tipo cualitativa con escala ordinal.

En la situación 11, primero se pide identificar la variable en estudio señalando su tipo. Esto sería una pregunta que involucra dos tareas del tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados. La solución propuesta por el libro, en la figura 59.

Figura 59. Solución del libro para la situación 11 a).

- a) La variable de estudio es el nivel socioeconómico que considera las clases: bajo, medio y alto. Esta variable es cualitativa ordinal.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 114).

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

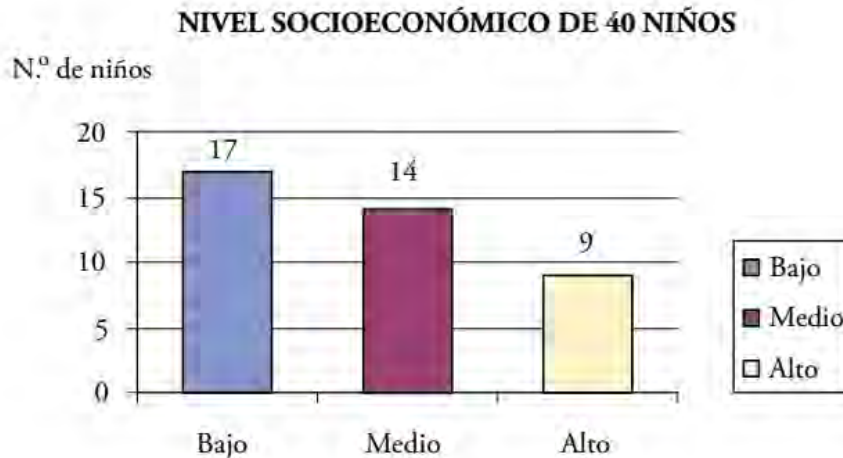
Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores (bajo, medio, alto)

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{25} : Escala ordinal.

En la situación 11, también se pide representar gráficamente los datos de la tabla mostrada. La solución propuesta por el libro, en la figura 60.

Figura 60. Solución del libro para la situación 11 b).

- b) La información mostrada se puede representar con un gráfico de barras, tal como se muestra a continuación:



Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 114).

Aunque no se explica en la solución propuesta por el libro, se asume que la elección del gráfico de barras para la representación de la variable estadística involucrada es por la naturaleza cualitativa de la misma. En el MER, se indicó que la representación gráfica de datos en escalas tanto nominales como ordinales se puede hacer por medio de un gráfico de barras, en el que para cada categoría correspondería una barra vertical, cuya altura indicará la cantidad de miembros de su respectiva clase (Haber y Runyon, 1973).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,1}$:

Antes de representar los datos gráficamente, se debe elegir el gráfico adecuado con base en el tipo de variable que se desea representar.

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, se debe elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cualitativa con escala ordinal, se podría representar con un gráfico de barras verticales separadas.

Tecnologías: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{25} : Escala ordinal, θ_{12} : Gráfico de barras.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el gráfico de barras, se procede a su construcción.

Paso 2: Trazar perpendicularmente el eje (horizontal) de conceptos o categorías y el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 3: Indicar en el eje de conceptos o categorías los posibles valores considerados en la tabla (bajo, medio, alto) ordenados en forma creciente por ser de escala ordinal.

Paso 4: Indicar en el eje de escalas o valores la frecuencia absoluta correspondiente a cada categoría considerada.

Paso 5: Dibujar para cada categoría considerada barras verticales separadas, cada una con una altura de acuerdo con la frecuencia absoluta correspondiente.

Tecnologías: θ_7 : Perpendicularidad, θ_8 : Proporcionalidad, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_{15} : Categoría, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_{26} : Orden creciente, θ_{11} : Altura, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{12} : Gráfico de barras.

En la figura 61, se presenta la situación 12. Se muestra una tabla con información sobre el sueldo por semana (en nuevos soles) de 200 profesores que laboran en un grupo de estudio.

Figura 61. Situación 12.

Situación 12

El cuadro mostrado presenta información sobre el sueldo semanal (en nuevos soles) de 200 profesores que trabajan en grupos de estudio.

Sueldo semanal (en nuevos soles)	Cantidad de profesores
[150 - 180[20
[180 - 210[40
[210 - 240[50
[240 - 270[70
[270 - 300]	20
Total	200

- Señale cuál es la variable de estudio y de qué tipo es.
- Represente gráficamente la información mostrada en la tabla.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 114-115).

Se observa que, en la primera columna de la tabla presentada por la situación 12, figuran intervalos de amplitud 30 soles para los sueldos semanales; en la segunda columna, la cantidad

de profesores cuyo valor de su sueldo se encuentra en el respectivo intervalo. Se pide identificar la variable indicando su tipo, además de la representación gráfica de la información mostrada en la tabla.

La variable involucrada sería la siguiente: sueldo semanal (en nuevos soles) de 200 profesores que trabajan en un grupo de estudio, la cual es de tipo cuantitativa continua con escala de razón.

En la situación 12, primero se pide identificar la variable en estudio y señalar su tipo. Esto sería una pregunta que involucra dos tareas del tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados. La solución propuesta por el libro, en la figura 62.

Figura 62. Solución del libro para la situación 12 a).

- a) La variable de estudio es el sueldo semanal y es una variable cuantitativa continua.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 115).

Es importante mencionar que en la solución propuesta por el libro no se indica la escala de medición. Si bien es cierto que no la pide específicamente, según el MER, las variables cuantitativas continuas pueden ser a su vez de dos tipos: con escala de intervalo o de razón.

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

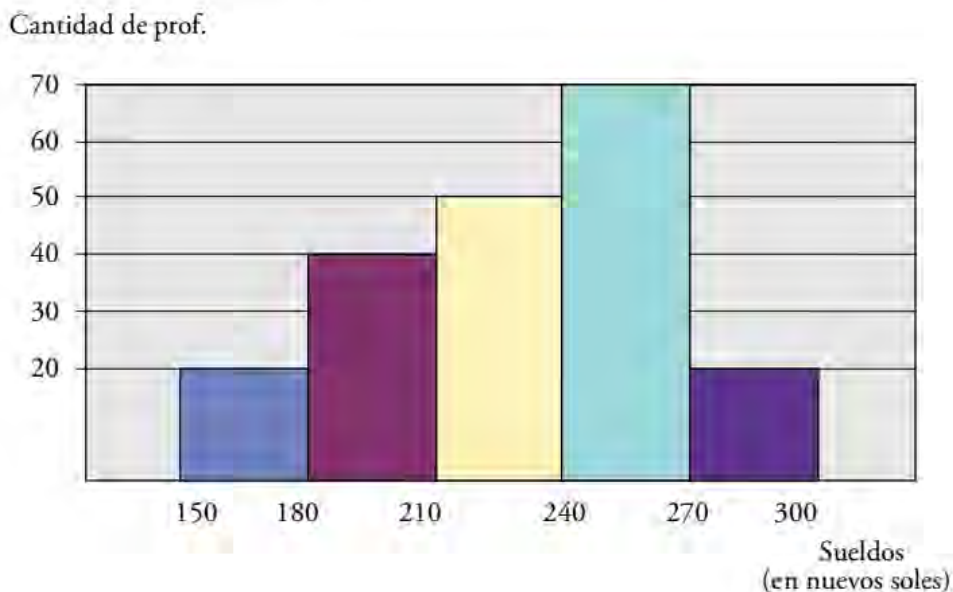
Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores, en este caso, el sueldo semanal en nuevos soles.

Tecnología: θ_{27} : Variable cuantitativa continua, θ_{28} : Escala de razón.

En la situación 12, también se pide representar gráficamente los datos de la tabla mostrada. La solución propuesta por el libro, en la figura 63.

Figura 63. Solución del libro para la Situación 12 b).

- b) La información mostrada se puede representar con un gráfico de barras, tal como se muestra a continuación.



Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 115).

En la solución propuesta por el libro, no se detalla el porqué de la elección del gráfico de barras para la representación de la información mostrada. Sin embargo, se sabe por el MER que el gráfico de barras se puede utilizar para representar datos cronológicos o los clasificados como cuantitativos con un arreglo de barras verticales (Croxtton y Cowden, 1967). Además, por el MER también se sabe que, para representar la continuidad de los intervalos, las barras se dibujarán juntas. A este tipo de gráfico se le denomina histograma (Haber y Runyon, 1973). Así también lo propone el libro *Matemática para no matemáticos* en la definición de gráfico de barras: “En el caso de variables cuantitativas continuas, las barras van juntas para transmitir la idea de continuidad entre los intervalos. Los gráficos de barras juntas reciben el nombre de histogramas” (Advíncula et al., 2009, p. 113).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,2}$:

Antes de representar los datos gráficamente, se debe elegir el gráfico adecuado con base en el tipo de variable que se desea representar.

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, se debe elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cuantitativa continua con escala de razón, se podría representar con un gráfico de barras verticales juntas (histograma).

Tecnologías: θ_{27} : Variable cuantitativa continua, θ_{28} : Escala de razón, θ_{29} : Histograma.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el histograma, se procede a su construcción.

Paso 2: Trazar perpendicularmente el eje (horizontal) de conceptos o categorías y el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 3: Indicar en el eje de conceptos o categorías los intervalos considerados en la tabla, ordenados en forma creciente.

Paso 4: Indicar en el eje de escalas o valores la frecuencia absoluta correspondiente a cada categoría (en este caso, intervalo) considerada.

Paso 5: Dibujar, para cada intervalo considerado, barras verticales juntas, cada una con una altura de acuerdo con la frecuencia absoluta correspondiente.

Tecnologías: θ_7 : Perpendicularidad, θ_8 : Proporcionalidad, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_{11} : Relación de orden, θ_{12} : Intervalos, θ_{13} : Altura, θ_{14} : Frecuencia absoluta, θ_{29} : Histograma.

En la figura 64, se presenta la situación 13. La tabla muestra la cantidad de niños correspondiente a cada nivel socioeconómico considerado (bajo, medio y alto) de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima. Los datos de la situación 13 son los mismos que los de la situación 11, solo que ahora se pide construir un gráfico circular a partir de los datos mostrados en la tabla.

Figura 64. Situación 13.

Situación 13

Construya un gráfico circular con la información presentada sobre el nivel socioeconómico de los 40 niños de un colegio de Lima.

Nivel socioeconómico	Cantidad de niños
Bajo	17
Medio	14
Alto	9
Total	40

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 116).

La variable involucrada sería la siguiente: nivel socioeconómico de un grupo de 40 niños de un colegio de Lima (cualitativa con escala ordinal).

Antes de la elaboración del gráfico circular pedido, se deben indicar las frecuencias absolutas para poder calcular las frecuencias relativas y ángulos de los sectores que correspondan a cada categoría, y ordenarlos en una tabla de distribución de frecuencias. Así lo plantea la solución propuesta por el libro, la cual se muestra en la figura 65.

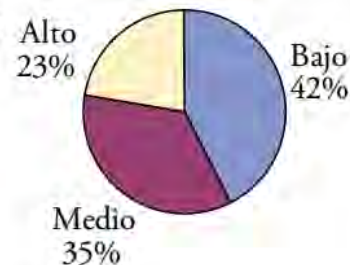
Figura 65. Solución del libro para la situación 13.

Solución propuesta

Se calculan las frecuencias relativas y los respectivos porcentajes para determinar los ángulos de los sectores circulares correspondientes.

Nivel socioeconómico	f_i	h_i	Ángulos
Bajo	17	0,42	153°
Medio	14	0,35	126°
Alto	9	0,23	81°
Total	40	1	360°

El gráfico circular que da información sobre el nivel socioeconómico de los niños sería el siguiente:



Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 116).

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,2}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos no agrupados.

Técnica $\tau_{1,2,1}$:

Paso 1: Elaborar una tabla en cuya primera columna se colocarán las categorías, en este caso, los niveles socioeconómicos.

Paso 2: En la segunda columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría.

Paso 3: En la tercera columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría.

Paso 4: En la última columna de la tabla, colocar los ángulos correspondientes a cada sector de cada categoría y multiplicar la frecuencia relativa por 360°.

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{17} : Ángulo de sector circular

Con la información ordenada en la tabla de distribución de frecuencias obtenida, se estaría en condiciones de elaborar el gráfico circular pedido.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,2}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico circular.

Técnica $\tau_{2,2,1}$:

Paso 1: Dibujar un círculo y dividirlo en sectores, según los ángulos descritos en la tabla.

Paso 2: Asignar la categoría y la respectiva frecuencia relativa, expresada en porcentaje, a cada sector dibujado, según la información de la tabla.

Tecnologías: θ_{18} : Círculo, θ_{19} : Sector circular, θ_{15} : Categoría, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje, θ_{17} : Ángulo de un sector circular, θ_{21} : Gráfico circular.

En la figura 66, el libro propone un ejemplo de gráfico de puntos.

Figura 66. *Ejemplo de gráfico de puntos.*

Si se toma como ejemplo la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

Clases x_i	Frecuencia absoluta f_i
10	2
11	4
13	6
15	5
16	3
Total	20

el diagrama de puntos correspondiente será:

			●			
			●		●	
	●		●		●	
	●		●		●	●
●	●		●		●	●
●	●		●		●	●
10	11		13		15	16

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 117).

En el ejemplo planteado, se nota que se trata de la representación gráfica a partir de la información presentada en una tabla de distribución de frecuencias.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,3}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico de puntos.

Técnica $\tau_{2,3,1}$:

Paso 1: Dibujar un eje horizontal donde se ubicarán las categorías consideradas para la variable representada, en este caso, las clases en orden creciente.

Paso 2: Cada dato contenido en una clase se grafica mediante un punto que se coloca encima de la correspondiente clase representada en el eje horizontal. Dichos puntos se disponen verticalmente, de manera que a cada clase representada en el eje horizontal le corresponden tantos puntos como lo indica la frecuencia absoluta de dicha clase.

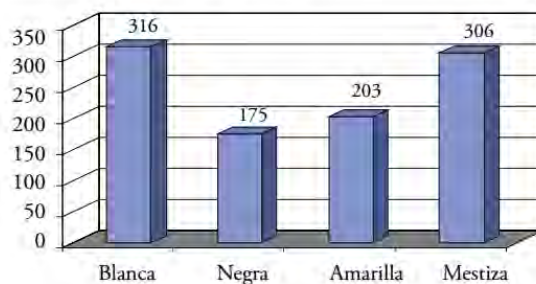
Tecnologías: θ_0 : Eje de conceptos o categorías, θ_1 : Relación de orden, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{30} : Vertical, θ_{31} : Gráfico de puntos.

Continuando con el análisis praxeológico, a continuación, se tienen 5 ejercicios propuestos con el título Más situaciones problema para practicar. Las soluciones de todos estos ejercicios están en los anexos (al final del libro de texto).

En la figura 67, se presenta la “Situación problema para practicar 1”. Se observa un gráfico de barras con la información sobre las defunciones por raza en un determinado país en el año 2006.

Figura 67. Situación problema para practicar 1.

1. En el siguiente gráfico, se muestra información sobre las defunciones por raza en un determinado país en el 2006.



- a) Determine cuál es la variable estudiada y de qué tipo es.
- b) Construya la tabla de distribución de frecuencias correspondiente al gráfico mostrado.
- c) ¿Sería adecuado ubicar en el gráfico las columnas sin separación entre ellas? Explique.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 118).

Se pide determinar la variable involucrada e indicar su tipo, construir una tabla de distribución de frecuencias con los datos del gráfico, y, por último, una pregunta sobre si es adecuado dibujar las barras sin separación entre ellas.

La variable involucrada sería la siguiente: la raza de difuntos en un determinado país en el 2006, las cual es de tipo cualitativa con escala nominal.

En la situación problema para practicar 1, primero se pide identificar la variable en estudio y señalar su tipo. Esto sería una pregunta que involucra dos tareas del tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados. La solución propuesta por el libro, en la figura 68.

Figura 68. Situación problema para practicar 1 a).

a) Variable estudiada: la raza; tipo: cualitativa nominal

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 205).

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores (blanca, negra, amarilla, mestiza).

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{32} : Escala nominal.

Luego, se pide construir una tabla de distribución de frecuencias con los datos que representa el gráfico. La solución que propone el libro, en la figura 69.

Figura 69. Solución del libro para la situación problema para practicar 1 b).

b)

Raza	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia porcentual p_i
Blanca	316	0,316	31,6%
Negra	175	0,175	17,5%
Amarilla	203	0,203	20,3%
Mestiza	306	0,306	30,6%
Total	1000	1	100%

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 205).

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,3}$: Representar los datos del gráfico de barras en una tabla de distribución de frecuencias.

Técnica $\tau_{1,3,1}$:

Paso 1: Elaborar una tabla de distribución de frecuencias, en cuya primera columna se colocarán las categorías identificadas en el gráfico, en este caso, las razas que aparecen en el eje (horizontal) de conceptos o categorías.

Paso 2: En la segunda columna, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría identificada en el gráfico, los cuales son los valores respectivos en el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 3: En la tercera columna, colocar la frecuencia relativa de cada categoría.

Paso 4: En la cuarta columna, colocar la frecuencia relativa de cada categoría expresada como un porcentaje.

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_1 : Frecuencia absoluta, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje.

Finalmente, se pide si sería adecuado dibujar las barras sin separación entre ellas. La solución propuesta del libro, en la figura 70.

Figura 70. Solución del libro para la situación problema para practicar 1 c).

c) No sería adecuado, ya que la variable estudiada no es cuantitativa continua.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 205).

En esta situación problema para practicar 1, la elección del gráfico adecuado dependerá de la escala de medición del tipo de variable analizada. Se dibujarían las barras juntas solo si los valores tienen escala de medición continua; este no sería el caso de la situación, en la cual la raza tiene escala de medición nominal.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,5}$: ¿Sería adecuado un gráfico de barras sin separación entre ellas para la variable estudiada?

Técnica $\tau_{2,5,1}$:

Paso 1: Elegir el gráfico adecuado, según la escala de medición de la variable estudiada.

Tecnologías: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{32} : Escala nominal, θ_{29} : Histograma, θ_{12} : Gráfico de barras.

En la figura 71, se muestra la situación problema para practicar 2. Se presenta un gráfico de barras horizontal que representa datos sobre personas atendidas en la unidad de emergencia de un hospital.

Figura 71. Situación problema para practicar 2.

2. El siguiente gráfico muestra información sobre personas atendidas en la unidad de emergencia de un hospital.



- a) ¿De qué tipo son las variables representadas en el gráfico?
- b) ¿Pueden representarse las dos variables a la vez en una tabla de distribución de frecuencias de una variable?
- c) Elabore gráficos para cada una de las variables identificadas.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 118).

En la situación problema para practicar 2, se pide el tipo de variables representadas, además de si estas variables se pueden representar en una tabla de distribución de frecuencias de una variable. Por otro lado, se deben construir los gráficos para cada una de las variables halladas.

La solución propuesta por el libro para la parte a), en la figura 72.

Figura 72. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 a).

a) Son cualitativas nominales: el sexo y el motivo de la atención.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 205).

Las variables involucradas serían el sexo de las personas atendidas y los motivos de la atención. Estas variables son de tipo cualitativa con escala nominal.

Se observa que se pide el tipo de las variables representadas en el gráfico; esto implica que se determine previamente cuáles son las variables involucradas.

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores, en este caso, hombres o mujeres, y también caídas, cólicos o heridas.

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{32} : Escala nominal.

La solución propuesta para la parte b), en la figura 73.

Figura 73. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 b).

- b) Ambas variables no podrían representarse en una tabla de frecuencias de una variable aleatoria; habría que hacerlo en tablas distintas.

Por ejemplo:

Mujeres				Hombres			
Motivo de la atención	f_i	h_i	p_i	Motivo de la atención	f_i	h_i	p_i
Caídas	15	0,35	35%	Caídas	12	0,21	21%
Cólicos	20	0,46	46%	Cólicos	25	0,44	44%
Heridas	8	0,19	19%	Heridas	20	0,35	35%

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 205-206).

Según plantea la solución propuesta por el libro, la representación tabular de los datos de las dos variables involucradas no sería posible en una sola tabla de distribución de frecuencias de una variable; se tendría que realizar en tablas distintas, como lo muestra la figura 73.

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,3}$: Representar los datos del gráfico de barras en una tabla de distribución de frecuencias.

La situación problema para practicar 2 presenta un gráfico de barras horizontales agrupado, en el que se representan dos variables. Según la solución propuesta por el libro, para cada valor de la variable sexo, se diseñará una tabla cuyas categorías serían los motivos de la atención. La técnica $\tau_{1,3,1}$ sería la misma para diseñar la tabla tanto para el caso de los hombres como para de las mujeres. A continuación, se describe la técnica para el caso de las mujeres, la cual será análoga para los hombres.

Técnica $\tau_{1,3,1}$:

Paso 1: Elaborar una tabla de distribución de frecuencias, en cuya primera columna se colocarán las categorías identificadas en el gráfico, en este caso los motivos de la atención.

Paso 2: En la segunda columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría identificada en el gráfico, los cuales son los valores respectivos en el eje (en este caso, horizontal) de escalas o valores.

Paso 3: En la tercera columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría.

Paso 4: En la cuarta columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría expresada como un porcentaje.

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_1 : Frecuencia absoluta, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje.

La solución propuesta para la parte c), en la figura 74.

Figura 74. Solución del libro para la situación problema para practicar 2 c).

c) Mujeres:



De manera similar, se obtiene un gráfico para los hombres.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 206).

En la parte c), se pide elaborar gráficos para cada una de las variables identificadas. En la solución propuesta por el libro, no se especifica el porqué de la elección del gráfico circular. Según lo descrito en el MER, Triola (2004) señala que los gráficos circulares son útiles, en general, para representar datos de variables cualitativas.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar, con el gráfico adecuado, los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,3}$:

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cualitativa con escala nominal, se podría representar con un gráfico circular.

Tecnologías: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{32} : Escala nominal, θ_{21} : Gráfico circular.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el gráfico circular, se procede a su construcción.

Paso 2: Calcular los ángulos correspondientes a cada sector de cada categoría y multiplicar la frecuencia relativa por 360° .

Paso 3: Dibujar un círculo dividiéndolo en sectores, según los ángulos correspondientes.

Paso 4: Asignar la categoría y la respectiva frecuencia relativa, expresada en porcentaje, a cada sector dibujado, según la información de la tabla.

Tecnologías: θ_{18} : Círculo, θ_{19} : Sector circular, θ_{15} : Categoría, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje, θ_{17} : Ángulo de un sector circular, θ_{21} : Gráfico circular.

En la figura 75, se muestra la “Situación problema para practicar 3”. En la parte a) se presenta una tabla con datos no agrupados; en la parte b) con datos agrupados con 5 intervalos de amplitud de 2 soles. En los dos casos, se pide señalar la variable involucrada e indicar su tipo, elaborar una tabla de distribución de frecuencias con los datos mostrados, y, finalmente, construir el gráfico adecuado.

Figura 75. Situación problema para practicar 3.

3.

- a) En la siguiente tabla, se muestra información sobre el grado de preferencia que tiene un grupo de 50 personas respecto a la comida vegetariana.

Preferencia por la comida vegetariana	
Grado de preferencia	Número de personas
Nada	20
Poco	20
Mucho	10
Total	50

- Señale cuál es la variable involucrada y de qué tipo es.
- Construya una tabla de distribución de frecuencias.
- Elabore un gráfico adecuado para representar la información mostrada.

- b) En la siguiente tabla, se muestra información sobre el costo del menú que consumen 28 empleados que laboran en Miraflores.

Costo del menú (en nuevos soles)	Cantidad de empleados
[8 -10[6
[10 -12[6
[12 - 14[8
[14 - 16[5
[16 - 18]	3
Total	28

- Señale cuáles son las variables involucradas y de qué tipo son.
- Construya una tabla de distribución de frecuencias.
- Elabore un gráfico adecuado para representar la información mostrada.

Fuente. Advíncula et al, 2009, (p. 119).

La parte a) de la situación problema para practicar 3 pide señalar la variable e indicar de qué tipo es. La variable involucrada es el grado de preferencia por la comida vegetariana, del tipo cualitativa con escala ordinal.

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores, en este caso, se tiene lo siguiente: nada, poco o mucho.

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{25} : Escala ordinal.

También se pide construir una tabla de distribución de frecuencias, a partir de los datos mostrados en la tabla.

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,2}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos no agrupados.

Técnica $\tau_{1,2,1}$:

Paso 1: Elaborar una tabla en cuya primera columna se colocarán las categorías, en forma ordenada; en este caso, será el grado de preferencia.

Paso 2: En la segunda columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta de cada categoría.

Paso 3: En la tercera columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría.

Paso 4: En la cuarta columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa de cada categoría expresada como un porcentaje.

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje.

Finalmente, se pide elaborar el gráfico adecuado para representar la información mostrada. En la solución propuesta por el libro, no se especifica el porqué de la elección del

gráfico circular. Según lo descrito en el MER, Triola (2004) señala que los gráficos circulares son útiles, en general, para representar datos de variables cualitativas.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,3}$:

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cualitativa con escala ordinal, se podría representar con un gráfico circular.

Tecnologías: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{25} : Escala ordinal, θ_{21} : Gráfico circular.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el gráfico circular, se procede a su construcción.

Paso 2: Calcular los ángulos correspondientes a cada sector de cada categoría y multiplicar la frecuencia relativa por 360° .

Paso 3: Dibujar un círculo dividiéndolo en sectores, según los ángulos correspondientes.

Paso 4: Asignar la categoría y la respectiva frecuencia relativa, expresada en porcentaje, a cada sector dibujado, según la información de la tabla.

Tecnologías: θ_{18} : Círculo, θ_{19} : Sector circular, θ_{15} : Categoría, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje, θ_{17} : Ángulo de un sector circular, θ_{21} : Gráfico circular.

La solución propuesta por el libro, en la figura 76.

Figura 76. Solución del libro para la situación problema para practicar 3 a).

3. a) Variable: grado de preferencia por la comida vegetariana

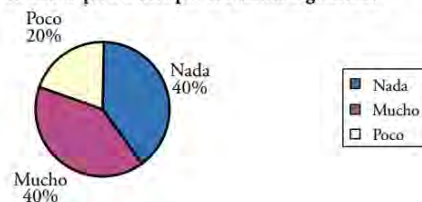
Tipo: cualitativa ordinal

Tabla de frecuencias:

Grado de preferencia	f_i	h_i	p_i
Nada	20	0,4	40%
Poco	20	0,4	40%
Mucho	10	0,2	20%

Gráfico:

Grado de preferencia por la comida vegetariana



Fuente. Advíncula et al., 2009, p. 206

En la parte b) de la situación problema para practicar 3, primero se pide señalar las variables involucradas e indicar de qué tipo son. En este caso, detectamos a la variable costo del menú, del tipo cuantitativa continua con escala de razón.

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores; en este caso, son cantidades en nuevos soles.

Tecnología: θ_{27} : Variable cuantitativa continua, θ_{28} : Escala de razón.

También se pide construir una tabla de distribución de frecuencias, a partir de los datos mostrados en la tabla. Cabe mencionar, que en la solución propuesta que se verá en la figura 77, se observa en la tabla de distribución de frecuencias con datos agrupados columnas con las frecuencias acumuladas. Según Osorio (2008), esto se suele colocar cuando la escala de la variable es ordinal.

Tipo de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular.

Tarea $t_{1,1}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos agrupados.

Técnica $\tau_{1,1,2}$:

Paso 1: Elaborar una tabla en cuya primera columna se colocarán las categorías, en forma ordenada, en este caso, los intervalos considerados.

Paso 2: En la segunda columna de la tabla, colocar la marca de clase.

Paso 3: En la tercera columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta.

Paso 4: En la cuarta columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa.

Paso 5: En la quinta columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa expresada en porcentaje.

Paso 6: En la sexta columna de la tabla, colocar la frecuencia absoluta acumulada.

Paso 7: En la séptima columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa acumulada.

Paso 8: En la octava columna de la tabla, colocar la frecuencia relativa acumulada expresada en porcentaje.

Tecnologías: θ_{13} : Tabla de distribución de frecuencias para datos no agrupados, θ_{14} : Columna, θ_{15} : Categoría, θ_2 : Intervalos, θ_{33} : Marca de clase, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{16} : Frecuencia relativa, θ_{20} : Porcentaje, θ_{34} : Frecuencia absoluta acumulada, θ_{35} : Frecuencia relativa acumulada.

Ahora que tenemos los datos organizados en una tabla de distribución de frecuencias, se debe elegir el gráfico más adecuado para su representación.

En la solución propuesta por el libro, no se detalla el porqué de la elección del gráfico de barras para la representación de la información mostrada. Sin embargo, se sabe por el MER que el gráfico de barras se puede utilizar para representar datos cronológicos o los clasificados como cuantitativos, con un arreglo de barras verticales (Croxtton y Cowden, 1967). Además, por el MER también se sabe para representar la continuidad de los intervalos, las barras se dibujarán juntas. A este tipo de gráfico, se le denomina histograma (Haber y Runyon, 1973). Así también lo propone el libro *Matemática para no matemáticos* en la definición de gráfico de barras: “En el caso de variables cuantitativas continuas, las barras van juntas para transmitir la idea de continuidad entre los intervalos. Los gráficos de barras juntas reciben el nombre de histogramas” (Advíncula et al., 2009, p. 113).

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.

Técnica $\tau_{2,1,2}$:

Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, elegir el gráfico apropiado para su representación. En este caso, por ser variable cuantitativa continua con escala de razón, se podría representar con un gráfico de barras verticales juntas (histograma).

Tecnologías: θ_{27} : Variable cuantitativa continua, θ_{28} : Escala de razón, θ_{29} : Histograma.

Habiendo seleccionado un tipo de gráfico adecuado, en este caso el histograma, se procede a su construcción.

Paso 2: Trazar perpendicularmente el eje (horizontal) de conceptos o categorías y el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 3: Indicar en el eje de conceptos o categorías los intervalos considerados en la tabla, ordenados en forma creciente.

Paso 4: Indicar en el eje de escalas o valores la frecuencia absoluta correspondiente a cada categoría (en nuestro caso, intervalo) considerada.

Paso 5: Dibujar, para cada intervalo considerado, barras verticales juntas, cada una con una altura de acuerdo con la frecuencia absoluta correspondiente.

Tecnologías: θ_7 : Perpendicularidad, θ_8 : Proporcionalidad, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_1 : Relación de orden, θ_2 : Intervalos, θ_{11} : Altura, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{29} : Histograma.

La solución propuesta por el libro, en la figura 77.

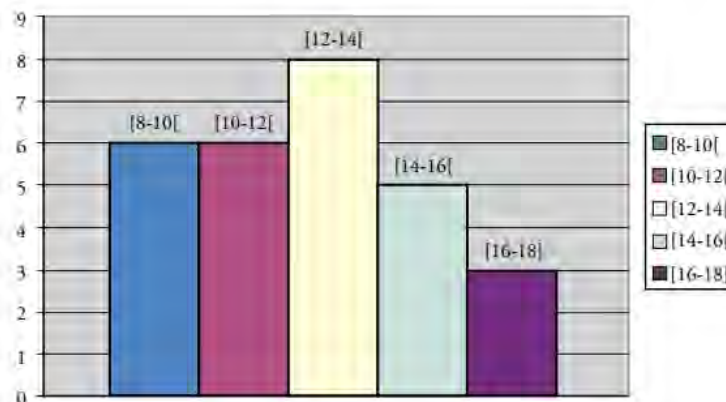
Figura 77. Solución del libro para la situación problema para practicar 3 b)

- b) Variable: costo del menú
 Tipo: cuantitativa continua

Tabla de frecuencias:

Clases	x_i'	f_i	h_i	p_i	F_i	H_i	P_i
[8; 10[9	6	0,21	21%	6	0,21	21%
[10; 12[11	6	0,21	21%	12	0,42	42%
[12; 14[13	8	0,29	29%	20	0,71	71%
[14; 16[15	5	0,18	18%	25	0,89	89%
[16; 18]	17	3	0,11	11%	28	1	100%

Gráfico:

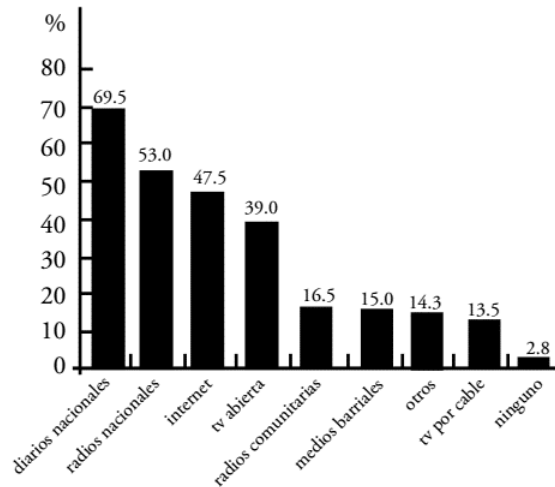


Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 207).

En la figura 78, se muestra la situación problema para practicar 4.

Figura 78. Situación problema para practicar 4.

4. Cuatrocientos entrevistados, entre trabajadores de prensa, estudiantes de comunicación y personas no relacionadas con el periodismo, respondieron a la pregunta *¿qué medios prefiere para informarse mejor?* Los resultados se muestran en el siguiente gráfico:



Fuente: POSTOLSKI, Glenn y Daniel RODRÍGUEZ. Encuesta de credibilidad periodística.

- Determine cuál es la variable representada en el gráfico y de qué tipo es.
- ¿Cómo se explica que los porcentajes no sumen 100%? ¿Se podría emplear un diagrama de sectores circulares para representar la información mostrada?

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 119-120).

En la situación problema para practicar 4, primero se pide determinar la variable representada en el gráfico e indicar el tipo. La variable involucrada sería la siguiente: medio de preferencia para informarse mejor, la cual es de tipo cualitativa con escala nominal. La solución propuesta por el libro, en la figura 79.

Figura 79. Solución del libro para la primera parte de la situación problema para practicar 4.

4. a) Variable: medio de preferencia para informarse mejor
Tipo: cualitativa nominal

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 207).

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores; en este caso, son los siguientes: diarios nacionales, radios nacionales, internet, TV abierta, radios comunitarias, medios barriales, otros, TV por cable, ninguno.

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{32} : Escala nominal.

Luego se pregunta por qué los porcentajes no suman 100%, y si se podría graficar la información mostrada por medio de un gráfico de sectores. La solución propuesta por el libro, en la figura 80.

Figura 80. Solución del libro para la segunda parte de la situación problema para practicar 4.

b) No, porque la suma no es 100%.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 207).

Se ve que, en lo propuesto por el libro, sí se da respuesta al cuestionamiento sobre si es factible la utilización de un gráfico de sectores circulares, pero no al cuestionamiento del por qué los porcentajes no suman 100%. Una posible respuesta a dicho cuestionamiento podría ser que las personas entrevistadas prefieren más de un medio para poder informarse mejor.

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,3}$: ¿Cómo se explica que los porcentajes no sumen 100%?

Técnica $\tau_{4,3,1}$:

Paso 1: Calcular cuánto suman los porcentajes.

Paso 2: Si los porcentajes suman más de 100%, entonces, algunas personas prefieren más de un medio de comunicación para informarse.

Tecnología: θ_{20} : Porcentaje.

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico

Tarea $t_{2,6}$: ¿Se podría emplear un diagrama de sectores circulares para representar la información mostrada?

Técnica $\tau_{2,6,1}$:

Paso 1: Verificar si los porcentajes suman 100%.

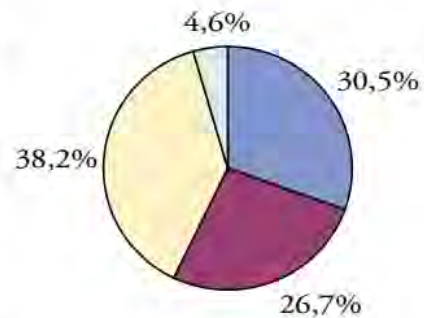
Tecnología: θ_{20} : Porcentaje, θ_{19} : Sector circular, θ_{21} : Gráfico circular.

En la figura 81, se muestra la situación problema para practicar 5.

Figura 81. Situación problema para practicar 5.

5. La tabla y la gráfica muestran el nivel de instrucción y el uso de métodos anticonceptivos en un grupo de mujeres que fueron atendidas en el Hospital 4 de Mayo durante el 2007.

Grado de instrucción	Uso de anticonceptivos		Total
	Usa	No usa	
Analfabeta	10	40	50
Primaria	40	35	75
Secundaria	60	50	110
Superior	23	6	29
Total	133	131	264



- Señale cuáles son las variables representadas en la tabla e indique de qué tipo son.
- ¿A qué parte de la información presentada en la tabla se refiere el gráfico circular mostrado? Complete el gráfico con los nombres adecuados para cada región.
- Construya un gráfico de columnas que ilustre simultáneamente sobre el uso (y no uso) de métodos anticonceptivos y sobre el grado de instrucción de las mujeres que participaron en el estudio.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 120).

La pregunta a) de la situación problema para practicar 5 pide señalar las variables involucradas e indicar su tipo. En la figura 82, se muestra la solución propuesta por el libro.

Figura 82. Solución del libro para la situación problema para practicar 5 a).

5. a) Se representan dos variables:
El grado de instrucción y el uso o no uso de anticonceptivos. Los tipos de estas variables son, respectivamente, cualitativa ordinal y cualitativa nominal.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 207).

Tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados.

Tarea $t_{4,1}$: Señale la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,1,1}$:

Paso 1: Identificar la variable.

Tecnología: θ_{23} : Variable estadística.

Tarea $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio.

Técnica $\tau_{4,2,1}$:

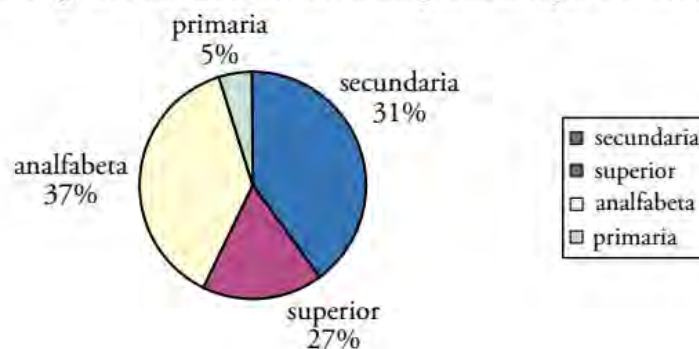
Paso 1: Indicar el tipo de variable por medio de los posibles valores; en este caso, es la siguiente: analfabeta, primaria, secundaria o superior; por otro lado, usa o no usa.

Tecnología: θ_{24} : Variable cualitativa, θ_{25} : Escala ordinal, θ_{32} : Escala nominal.

La pregunta b) de la situación problema para practicar 5 pide que se identifique qué datos de la tabla están siendo representados por el gráfico circular mostrado, además de colocar la categoría correspondiente en cada sector. La solución propuesta por el libro para la parte b), en la figura 83.

Figura 83. Solución del libro para la situación problema para practicar 5 b).

- b) Corresponde al grado de instrucción de las personas que no usan anticonceptivos.



Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 207).

En la figura 83, la solución que aparece en el libro de texto indica que el gráfico mostrado corresponde al grado de instrucción de las personas que no usan anticonceptivos, pero las categorías y porcentajes correspondientes deberían ser las siguientes: analfabeta, 30,5%; primaria, 26,7%; Secundaria, 38,2%; y Superior, 4,6%.

Tipo de tarea T_3 : Comparar valores en datos representados.

Tarea $t_{3,2}$: ¿A qué parte de la información presentada en la tabla se refiere el gráfico circular mostrado? Completar el gráfico con los nombres adecuados para cada región.

Técnica $\tau_{3,2,1}$:

Paso 1: Se identifican los posibles valores, según la cantidad de regiones del gráfico circular. En este caso son 4 regiones, que podrían representar los cuatro grados de instrucción posibles.

Paso 2: Se calculan los porcentajes correspondientes a cada grado de instrucción que usan o no usan anticonceptivos.

Paso 3: Se asigna la categoría que corresponda a cada región según los porcentajes calculados.

Tecnología: θ_{15} : Categoría, θ_{20} : Porcentaje, θ_{22} : Relación de equivalencia.

La pregunta c) de la situación problema para practicar 5 pide construir un gráfico de columnas, que represente los datos dados en la tabla mostrada. El libro de texto no presenta la respectiva solución. Basados en el MER, la tarea que emerge sería la siguiente:

Tipo de tarea T_2 : Representar datos por medio de un gráfico.

Tarea $t_{2,4}$: Represente los datos de la tabla por medio de un gráfico de barras.

Según Croxton y Cowden (1967), el gráfico a elaborar sería uno para varias categorías que se subdividen en dos, como se observó en la figura 34 del MER realizado, o también denominado gráfico de barras agrupado (Instituto Nacional de Estadística, s.f.).

Técnica $\tau_{2,4,1}$:

Paso 1: Trazar perpendicularmente el eje (horizontal) de conceptos o categorías, y el eje (vertical) de escalas o valores.

Paso 2: Indicar en el eje de conceptos o categorías los posibles valores considerados en la tabla (analfabeta, primaria, secundaria y superior) ordenados en forma creciente por ser de escala ordinal.

Paso 3: Indicar en el eje de escalas o valores la frecuencia absoluta correspondiente a cada categoría considerada, según si usa o no usa anticonceptivos.

Paso 4: Dibujar, para cada categoría considerada, barras verticales agrupadas según el uso o no de anticonceptivos, cada una con una altura de acuerdo con la frecuencia absoluta correspondiente.

Tecnologías: θ_7 : Perpendicularidad, θ_8 : Proporcionalidad, θ_9 : Eje de conceptos o categorías, θ_{15} : Categoría, θ_{10} : Eje de escalas o valores, θ_{25} : Escala ordinal, θ_{26} : Orden creciente, θ_{11} : Altura, θ_5 : Frecuencia absoluta, θ_{36} : Gráfico de barras agrupadas.

A continuación, se presenta una tabla que resume los tipos de tareas encontrados en el análisis praxeológico del libro de texto.

Tabla 6. *Tipos de tarea encontrados en el análisis praxeológico del libro Matemática para no matemáticos.*

TIPO DE TAREA	TAREA
T_1 : Representar datos en forma tabular.	<p>$t_{1,1}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos agrupados.</p> <p>$t_{1,2}$: A partir de los datos presentados, construir una tabla de distribución de frecuencias con datos no agrupados.</p> <p>$t_{1,3}$: Representar los datos del gráfico de barras en una tabla de distribución de frecuencias.</p>
T_2 : Representar datos por medio de un gráfico	<p>$t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular.</p> <p>$t_{2,2}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico circular.</p> <p>$t_{2,3}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico de puntos.</p> <p>$t_{2,4}$: Represente los datos de la tabla por medio de un gráfico de barras.</p> <p>$t_{2,5}$: ¿Sería adecuado un gráfico de barras sin separación entre ellas para la variable estudiada?</p> <p>$t_{2,6}$: ¿Se podría emplear un diagrama de sectores circulares para representar la información mostrada?</p>
T_3 : Comparar valores en datos representados	<p>$t_{3,1}$: Comparar los valores de los datos representados por medio de gráficos circulares para determinar qué gráficos son equivalentes.</p> <p>$t_{3,2}$: ¿A qué parte de la información presentada en la tabla se refiere el gráfico circular mostrado? Completar el gráfico con los nombres adecuados para cada región.</p>

T_4 : Describir los datos representados.	$t_{4,1}$: Señale la variable de estudio. $t_{4,2}$: Señale de qué tipo es la variable de estudio. $t_{4,3}$: ¿Cómo se explica que los porcentajes no sumen 100%?
--	--

Fuente. Elaboración propia.

Las praxeologías encontradas en el análisis realizado se relacionan entre sí a través de sus técnicas, como se describen a continuación.

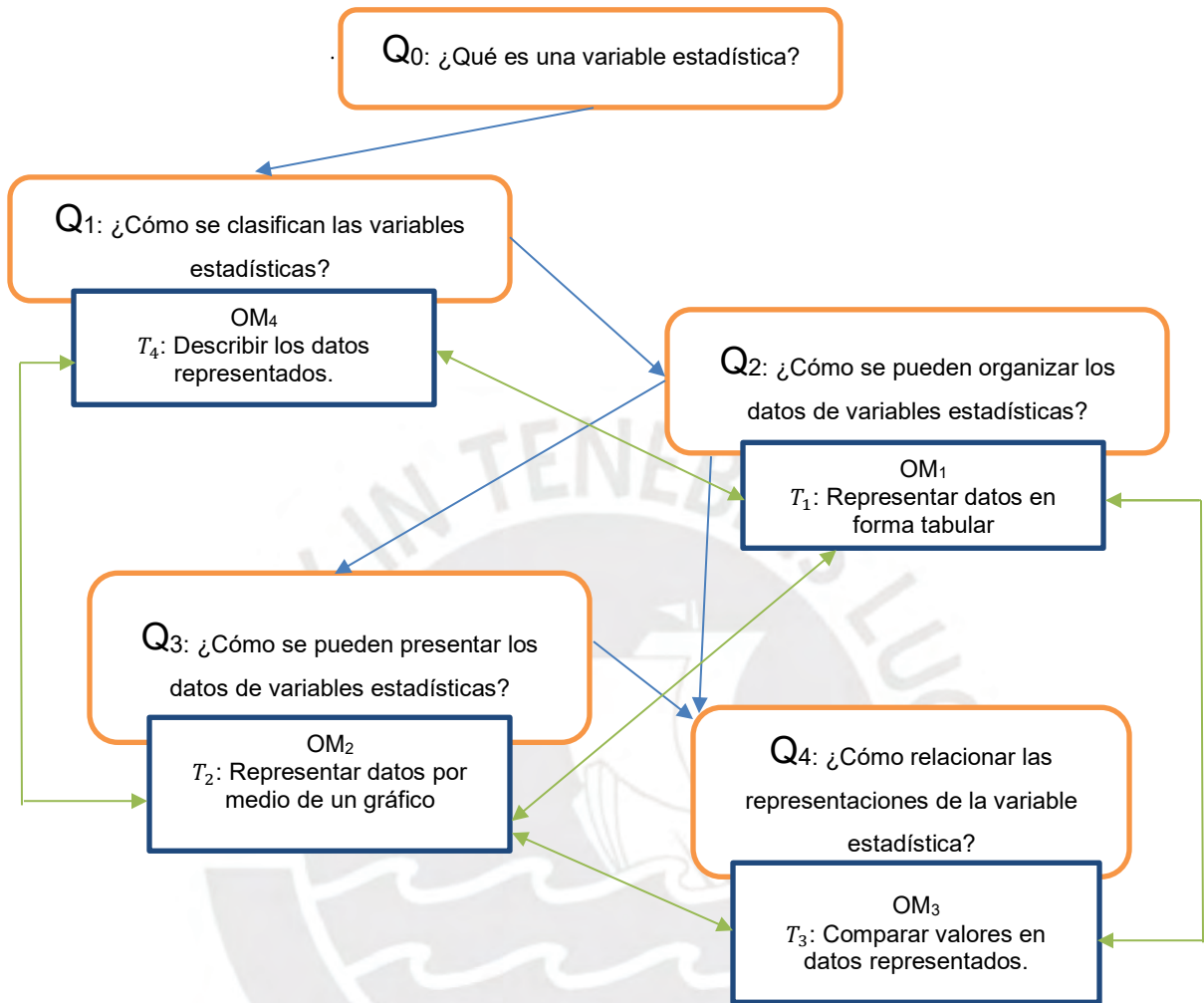
La tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular; se puede resolver por medio de tres técnicas de acuerdo a lo que resulte en el Paso 1: Según la naturaleza de la variable estadística involucrada, se debe elegir el gráfico apropiado para su representación; en consecuencia, las técnicas $\tau_{4,1,1}$ y $\tau_{4,2,1}$ se relacionan con el paso 1 de las técnicas $\tau_{2,1,1}$, $\tau_{2,1,2}$ y $\tau_{2,1,3}$ (también de la técnica $\tau_{2,5,1}$). Luego, los pasos siguientes serían estos: para $\tau_{2,1,1}$, los pasos para construir un gráfico de barras verticales de la técnica $\tau_{2,4,1}$ con el Paso 4 orientado a dibujar barras individuales o agrupadas según sea el caso. Para $\tau_{2,1,2}$, los pasos para construir un histograma de la técnica $\tau_{2,1,1}$ con el Paso 5 orientado a la construcción de barras sin separación. Para $\tau_{2,1,3}$, los pasos para construir un gráfico circular de la técnica $\tau_{2,2,1}$.

La técnica $\tau_{1,1,1}$ es la misma que la técnica $\tau_{1,1,2}$ sin los pasos 6, 7 y 8, los cuales consideran columnas con frecuencias acumuladas por representar una variable cualitativa ordinal.

Entonces, las organizaciones estadísticas puntuales se integran en torno a un discurso tecnológico común, en consecuencia, estamos frente a una organización estadística local.

En la figura 84, se muestra un esquema del análisis praxeológico del texto analizado, que plantea la cuestión directriz Q_0 , de la cual se desprenden las demás. Dichos puntos ayudarán a comprender mejor la organización estadística encontrada en el libro de texto.

Figura 84. Esquema del análisis praxeológico del texto analizado.



Fuente. Elaboración propia.

Observamos que el esquema mostrado en la figura 84 se compone de un grupo de organizaciones matemáticas presentes al realizar el análisis praxeológico del libro de texto. En dicho esquema se plantea la pregunta directriz Q_0 : ¿Qué es un variable estadística? A partir de esta pregunta se derivan otras preguntas que dan origen a 4 organizaciones matemáticas. Q_1 : ¿Cómo se clasifican las variables estadísticas? Esta cuestión origina la OM_4 asociada a la descripción de datos, representada por el tipo de tarea T_4 : Describir los datos representados, que, según el MER elaborado, está conformado por tareas que tienen que ver con la clasificación y escala de medida de las variables representadas. Los datos descritos requieren de un tratamiento que permita su organización, por lo que se deriva la pregunta Q_2 : ¿Cómo se pueden organizar los datos de variables estadísticas? Esta cuestión genera la existencia de OM_1 asociada a la adecuada organización de los datos descritos, representada por el tipo de tarea T_1 :

Representar datos en forma tabular, tipo de tarea que induce a la representación de variables estadísticas en forma tabular a partir de datos sueltos, cuadros o gráficos, en concordancia con lo visto en el MER. A partir de la organización de los datos por medio de la representación tabular, se puede presentar dicha información de una manera más comprensible, por lo que surge la pregunta Q₃: ¿Cómo se pueden presentar los datos de variables estadísticas? Se genera la existencia de OM₂ relacionada con la representación gráfica de los datos, en donde predomina el tipo de tarea T₂: Representar datos por medio de un gráfico, que, según lo visto en el MER, es una tarea en la que se pide representar gráficamente datos determinados y datos presentados en tablas. La representación tabular de la variable estadística se puede dar de manera gráfica, y viceversa, además, la organización de los datos de forma tabular se realiza previa clasificación y determinación de la escala de medida de la variable estadística, así como la elección del gráfico adecuado se escoge en función del tipo de variable; por tal razón las organizaciones OM₄, OM₁ y OM₂ se relacionan entre sí. De las cuestiones Q₂ y Q₃ se deriva Q₄: ¿Cómo relacionar las representaciones de la variable estadística? Dando origen a la OM₃ asociada a la comparación de valores, con el tipo de tarea T₃: Comparar valores en datos representados, según el MER, se refiere a las tareas en las que se comparan valores presentados en tablas, gráficos, y entre ellos; por tal razón OM₁, OM₂ y OM₃ se vinculan entre sí.

En relación a los criterios propuestos por Chevallard (1999) para evaluar los tipos de tareas, notamos lo siguiente:

Criterio de identificación: Se observa que lo solicitado en cada una de las tareas encontradas en el análisis de texto del presente estudio se presenta de forma clara, se puede identificar con facilidad lo solicitado en cada tarea.

Criterio de razón de ser: Las tareas encontradas en el análisis de texto del presente estudio, presentan razones de ser que desarrollan habilidades y competencias necesarias para la construcción de tablas de frecuencia con datos agrupados ($t_{1,1}$), con datos no agrupados ($t_{1,2}$), o a partir de datos representados gráficamente ($t_{1,3}$); para la representación gráfica de datos estadísticos, como la selección del tipo de gráfico adecuado para determinado conjunto de datos ($t_{2,1}, t_{2,2}, t_{2,3}, t_{2,4}, t_{2,5}, t_{2,6}$); para la interpretación y comparación de diferentes tipos de gráficos ($t_{3,1}$) e interpretación y etiquetado adecuado de cada región del gráfico ($t_{3,2}$); para la identificación de variables estadísticas ($t_{4,1}$) y del tipo de variable estadística en un conjunto de datos estadísticos ($t_{4,2}$), además de la identificación y explicación de errores o inconsistencias en los datos ($t_{4,3}$).

Criterio de pertinencia: La pertinencia de las diferentes tareas se evidencian cuando en estas se propone la construcción de tablas de frecuencia con datos agrupados o no agrupados, dado que son procedimientos comunes en el análisis estadístico y son relevantes para la comprensión de conceptos como la media, la mediana y la moda ($t_{1,1}, t_{1,2}$), la representación en una tabla de frecuencias a partir del gráfico de barras ($t_{1,3}$); la representación gráfica de datos ($t_{2,1}, t_{2,2}, t_{2,3}, t_{2,4}$) o la selección del tipo de gráfico adecuado ($t_{2,5}, t_{2,6}$); la comparación de los valores de los datos representados por medio de gráficos circulares ($t_{3,1}$) o la interpretación y análisis gráfico mediante el etiquetado adecuado de cada región de un gráfico circular ($t_{3,2}$); la identificación de la variable estadística de estudio ($t_{4,1}$), la identificación del tipo de variable estadística ($t_{4,2}$), la identificación y explicación de errores o inconsistencias ($t_{4,3}$); todos estos constituyen procedimientos comunes en el análisis estadístico y son relevantes para la comprensión y comparación entre diferentes conjuntos de datos.

Como ya se mencionó, la organización estadística encontrada es local, en consecuencia, se puede verificar la presencia de los indicadores de Fonseca (2004) en el libro de texto analizado.

4.6 Valoración de la organización estadística en el libro de texto analizado.

A continuación, se realizará la valoración de la organización estadística identificada en el capítulo 3.3. “Representación gráfica: circular, de barras y de puntos”, del libro *Matemáticas para no matemáticos*, en relación con la representación gráfica de variables estadísticas. Esto se hará por medio de los indicadores de completitud de Fonseca (2004), que toman en cuenta las técnicas encontradas en el libro de texto, todo ello con el objetivo de medir el grado de completitud de dicha organización estadística.

OML1. Integración de los tipos de tareas

Para este indicador, el grado de completitud de una OML, en nuestro caso, organización estadística local (OEL), está en función de la integración entre los distintos tipos de tareas y de los vínculos existentes entre ellas, además de la presencia de tareas en relación con el cuestionamiento tecnológico, es decir, en las que se hace referencia a la justificación, fiabilidad y economía, así como la comparación. Una OML será menos completa en la medida que exista una mayor cantidad de tipos de tareas aisladas.

Los tipos de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular, T_2 : Representar datos por medio de un gráfico y T_3 : Comparar valores en datos representados están relacionados por los elementos tecnológicos referentes a tablas de distribución de frecuencias y gráficos estadísticos.

En relación con el cuestionamiento tecnológico, en las situaciones problema para practicar 1 c) y 4, se evidencia la presencia de las tareas $t_{2,5}$ y $t_{2,6}$ del tipo de tarea T_2 : representar datos por medio de un gráfico y la tarea $t_{4,3}$ del tipo de tarea T_4 : describir los datos representados, todas relativas al cuestionamiento tecnológico en referencia a ciertas condiciones para el uso de los gráficos de columnas o diagrama de sectores circulares, como se observa en la figura 85.

Figura 85. Preguntas relativas al cuestionamiento tecnológico.

- c) ¿Sería adecuado ubicar en el gráfico las columnas sin separación entre ellas? Explique.
- ¿Cómo se explica que los porcentajes no sumen 100%? ¿Se podría emplear un diagrama de sectores circulares para representar la información mostrada?

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 118 y 120).

En la situación 10 del libro de texto, también aparece una tarea que hace referencia al cuestionamiento tecnológico, en el que se pide justificar la elección de un gráfico, según la información presentada. Esto origina que se realicen los tipos de tarea T_1 : Representar datos en forma tabular, T_2 : Representar datos por medio de un gráfico y T_3 : Comparar valores en datos representados. De esta manera, se presentaría la debida justificación en la elección del gráfico pedido.

OML2. Diferentes técnicas para la resolución de determinada tarea y criterios para escoger entre ellas.

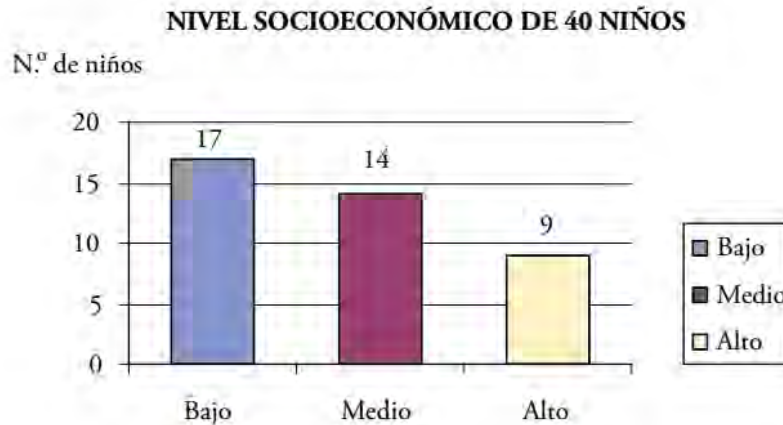
Según este indicador, la completitud de una OML será mayor en la medida que, dado un tipo concreto de tareas de OML, existan dos o más técnicas que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo.

En el libro de texto analizado, no se detecta presencia de este indicador. Las soluciones propuestas por el libro de texto constan de una sola técnica para cada tarea planteada. Por ejemplo, en la situación 11 b) (figura 86), se pide representar gráficamente la información mostrada en la tabla presentada. La solución propuesta por el libro es la elaboración de un gráfico de barras; sin embargo, por tratarse de una variable cualitativa, también se podría representar por medio de una gráfica circular, pero no hay presencia de la técnica para la resolución de dicha tarea, la cual sería una técnica alternativa para dar respuesta a la situación 11 b).

Figura 86. *Pregunta 1b) de la situación 11 y solución propuesta.*

b) Represente gráficamente la información mostrada en la tabla.

b) La información mostrada se puede representar con un gráfico de barras, tal como se muestra a continuación:



Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 114).

OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.

Este indicador señala que, en la utilización de las técnicas, estas se tendrían que valer de diferentes representaciones de la actividad matemática; además, deben existir criterios para elegir la representación más adecuada.

En el libro de texto analizado, se detecta que la variable estadística se representa en lenguaje natural, en forma tabular o gráficamente, ya sea en las tareas o en el desarrollo de las técnicas al proponer las respectivas soluciones. En la siguiente tabla, se presentan los problemas en los que se evidencia cada tipo de representación.

Tabla 7. *Ejercicios según el tipo de representación de la variable estadística.*

TIPO DE REPRESENTACIÓN	SITUACIÓN	SITUACIÓN PROBLEMA PARA PRACTICAR	TOTAL
Lenguaje Natural	9, 10, 11, 12, 13	1, 2, 3, 4, 5	10
Tabular	9, 10, 11, 12, 13	1, 2, 3, 5	9
Gráfica	10, 11, 12, 13	1, 2, 3, 4, 5	9

Fuente. Elaboración propia.

Cabe resaltar que, en el libro de texto, no se especifica los criterios que llevan a utilizar un determinado tipo de representación, según la técnica utilizada.

En la figura 87, se muestra un ejemplo en el que se aprecia la representación en lenguaje natural, tabular y gráfica de la variable estadística involucrada en la situación 13.

Figura 87. Lenguaje natural, tabular y gráfico.

Situación 13

Construya un gráfico circular con la información presentada sobre el nivel socioeconómico de los 40 niños de un colegio de Lima.

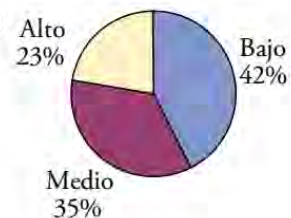
Nivel socioeconómico	Cantidad de niños
Bajo	17
Medio	14
Alto	9
Total	40

Solución propuesta

Se calculan las frecuencias relativas y los respectivos porcentajes para determinar los ángulos de los sectores circulares correspondientes.

Nivel socioeconómico	f_i	h_i	Ángulos
Bajo	17	0,42	153°
Medio	14	0,35	126°
Alto	9	0,23	81°
Total	40	1	360°

El gráfico circular que da información sobre el nivel socioeconómico de los niños sería el siguiente:



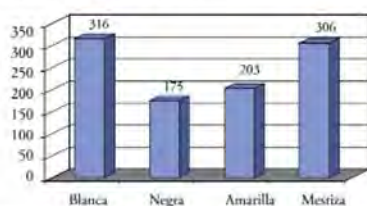
Fuente. Advíncula et al., 2009, (p. 116).

OML4. Existencia de tareas y de técnicas inversas.

Este indicador se presenta, básicamente, cuando en el desarrollo de las técnicas se representa la variable estadística de su forma tabular a la gráfica como tarea directa, y de la representación gráfica a la tabular como la respectiva tarea inversa. Esto se evidencia en la figura 88.

Figura 88. Tarea directa e inversa.

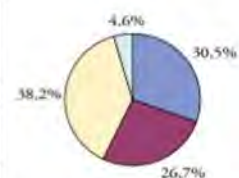
1. En el siguiente gráfico, se muestra información sobre las defunciones por raza en un determinado país en el 2006.



- b) Construya la tabla de distribución de frecuencias correspondiente al gráfico mostrado.

5. La tabla y la gráfica muestran el nivel de instrucción y el uso de métodos anticonceptivos en un grupo de mujeres que fueron atendidas en el Hospital 4 de Mayo durante el 2007.

Grado de instrucción	Uso de anticonceptivos		Total
	Usa	No usa	
Analfabeta	10	40	50
Primaria	40	35	75
Secundaria	60	50	110
Superior	23	6	29
Total	133	131	264



- c) Construya un gráfico de columnas que ilustre simultáneamente sobre el uso (y no uso) de métodos anticonceptivos y sobre el grado de instrucción de las mujeres que participaron en el estudio.

Fuente. Advíncula et al., 2009, (pp. 118 y 120).

En las situaciones mostradas en la figura 88, se observa la presencia de la tarea $t_{1,3}$: Representar los datos del gráfico de barras en una tabla de distribución de frecuencias, como tarea directa, y $t_{2,4}$: Representar los datos de la tabla por medio de un gráfico de barras, como la correspondiente tarea inversa.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

Para que se verifique la presencia de este indicador, debería haber evidencia de la existencia de un tipo de tarea que facilite que el alumno pueda entender el verdadero manejo de la técnica; de esta manera, puede determinar la ventaja o no respecto de otras técnicas. Esto no se evidencia en el texto analizado.

OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

Se considera que la tarea $t_{2,1}$: Representar con el gráfico adecuado los datos presentados en forma tabular es una tarea abierta en la que la representación gráfica no está prefijada completamente. El alumno deberá escoger, entre los distintos tipos de gráficos, el que represente mejor la variable involucrada. No se impone una determinada solución, y por tanto esta no es necesariamente única, por ejemplo, para la situación 11, la variable involucrada es del tipo cualitativa con escala ordinal. Esta podría representarse por medio de un gráfico de barras, pero también con un gráfico circular.

OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica

Chevallard (1999) señala “la necesidad de integrar la tecnología y el trabajo técnico”, o sea, las tecnologías y las técnicas deben estar relacionadas para que exista una mejor comprensión de estas, es decir, la praxis en conexión con el logos. Para el desarrollo de las diferentes técnicas que dan solución a las tareas planteadas por el libro de texto, se necesitan

tecnologías claves para su mejor entendimiento, como lo son las relacionadas a tipos de variables, tablas de distribución de frecuencias y los tipos de gráficos útiles en la representación de determinada variable; todas estas nociones se encuentran en el libro de texto, como se evidenció en el punto 5.2 “Representatividad de la obra”.

Luego de valorar la organización estadística encontrada en el libro de texto analizado, se observa que no se puede considerar como una praxeología local completa, dado que no se encontraron evidencias de la presencia de los indicadores OML2 y OML5. En consecuencia, la praxeología local sería relativamente completa.



Capítulo V: Conclusiones

El presente trabajo tiene por objetivo general describir, analizar y valorar una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades; para lograr dicho objetivo se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué tan completa es una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas en un libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades? Con el fin de responder esta pregunta, se inicia con la descripción de los resultados obtenidos para cada objetivo específico.

En relación con el objetivo específico de identificar y describir una organización estadística de la representación gráfica de variables estadísticas por medio de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), se valió de diferentes fuentes. Se pudo elaborar un MER, que permitió establecer la razón de ser de la representación gráfica de variables estadísticas, la cual permite una mejor presentación de lo que se pretende exponer cuando se recopilan datos de variables estadísticas. En dicho estudio, se evidenció que el tipo de representación gráfica depende del tipo de variable a representar. Por tanto, no se puede estudiar a los gráficos estadísticos sin antes referirnos a las variables estadísticas; además, se observa que las tareas que surgen en la necesidad de representar gráficamente los datos de alguna variable estadística relacionan la representación tabular con la gráfica.

El MER de la representación gráfica de variables estadísticas que se elaboró, proporcionó una estructura teórica para describir, así como para realizar el análisis praxeológico del libro de texto elegido en este estudio. La información encontrada en el MER se utilizó en distintos puntos del análisis praxeológico y sirvió como referencia para un mejor desarrollo de dicho análisis. Según el MER realizado, los tipos de variables estadísticas se adecúan mejor a determinado tipo de gráfico, debido a su naturaleza y escala de medición; sin embargo, en el libro de texto analizado, *Matemáticas para no matemáticos*, no se explica por qué se utiliza un determinado gráfico, es decir no explicita la razón de ser de algunos gráficos, solo se induce a su elaboración.

En relación con el objetivo específico de identificar y describir una organización estadística con respecto de la representación gráfica de variables estadísticas en el libro de texto del curso de Matemática Básica del nivel universitario para el área de Letras y Humanidades, se encontró, en la revisión de los antecedentes, diferentes estudios que revelaban la utilidad que brindan las herramientas que proporciona la TAD para realizar análisis praxeológicos de distintos

objetos matemáticos. El presente estudio se realizó tomando como marco teórico a la TAD, lo que permitió realizar el análisis de una organización estadística del libro de texto, que identifica y describe los tipos de tarea, las técnicas para su solución, las tecnologías que justifican las técnicas, en el marco de la teoría de la estadística descriptiva.

El libro de texto analizado es un libro diseñado para alumnos de carreras del área de Letras y Humanidades que llevan un primer curso de Matemática en la universidad. Se enfoca en brindar la base necesaria para que dichos alumnos enfrenten con satisfacción los cursos posteriores de Matemática o Estadística. Con relación a los principales resultados encontrados en los antecedentes del presente estudio se encuentra lo siguiente: en la parte elegida del libro de texto para ser analizada, o sea, el punto 3.3 “Representación gráfica: circular, de barras y de puntos”, si bien no se realiza un estudio completo del tema gráficos estadísticos, sí aborda los gráficos más comunes y necesarios para un alumno del área de Letras y Humanidades con el fin de adentrarlo en el tema a través de situaciones problema que generan la necesidad de la representación gráfica de las variables estadísticas involucradas. Además, revela la importancia de estas representaciones, que notan así su utilidad. Esto va acorde con lo visto en los antecedentes cuando diferentes directrices curriculares recomiendan el estudio de gráficos estadísticos en contextos adecuados.

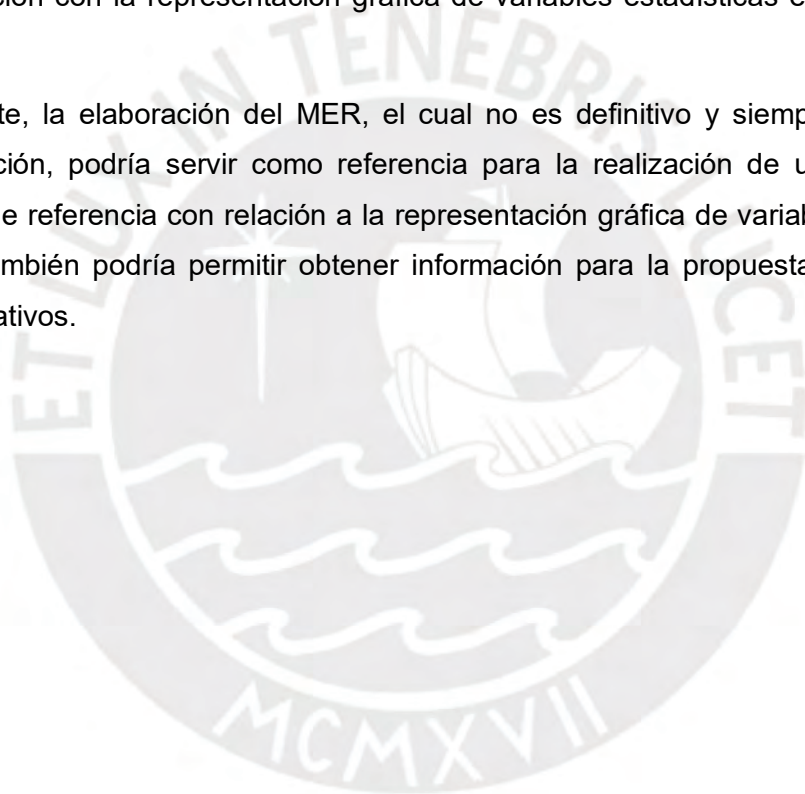
En el punto 3.3 del texto analizado, se presentan 5 situaciones resueltas y 5 situaciones propuestas, en las cuales están incluidos 6 gráficos de barras, 2 histogramas, 5 gráficos circulares y 1 diagrama de puntos, en concordancia con los antecedentes de esta investigación en la que se encontró que el gráfico más usado es el de barras, seguido por el de sectores (o circulares). La “representación de una distribución de datos”, en la que dicha distribución es ordenada y con determinadas frecuencias, según los antecedentes, era la más presente en actividades que incluyen gráficos estadísticos. Esto también coincide con lo que se muestra en el libro de texto que analizamos, porque dicha representación se encuentra en todas las situaciones resueltas y propuestas del libro de texto. También se evidencia la mayor presencia de la actividad “construir”, que coincide con lo visto en los antecedentes de nuestro estudio.

En relación con el objetivo específico de valorar una organización estadística del libro de texto mediante los indicadores de completitud de Fonseca (2004), se pudo determinar que la organización estadística encontrada en el libro de texto analizado es relativamente completa con base en la no presencia de los indicadores: “Diferentes técnicas para la resolución de determinada tarea y criterios para escoger entre ellas” (OML2) e “Interpretación del

funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas” (OML5). En consecuencia, la praxeología local sería relativamente completa.

Si bien es cierto, hay muchas investigaciones sobre libros de texto respecto de gráficos estadísticos, todas las que se pudieron encontrar en los antecedentes son del nivel primario, pero solo se encontró una en la cual se realiza un análisis praxeológico utilizando a la TAD. En ese sentido, la presente investigación es un aporte innovador, ya que se ha realizado el análisis praxeológico a un texto de nivel superior, tomando como base teórica a la TAD, la cual posee las herramientas necesarias para realizar el análisis de texto. En consecuencia, la presente investigación podría servir como referencia para el análisis de futuros libros de texto de nivel superior en relación con la representación gráfica de variables estadísticas en el marco de la TAD.

Finalmente, la elaboración del MER, el cual no es definitivo y siempre está sujeto a constante evolución, podría servir como referencia para la realización de un futuro modelo epistemológico de referencia con relación a la representación gráfica de variables estadísticas. Dicho estudio también podría permitir obtener información para la propuesta de modelos de referencia alternativos.



Referencias Bibliográficas

- Advíncula, E.; Barrantes, E.; Gaita, C.; Henostroza, J.; Jabo, R y Luna, M., (2009). *Matemáticas para no matemáticos*. Estudios Generales Letras-PUCP. Lima Perú. <http://textos.pucp.edu.pe/texto/MATEMATICAS-PARA-NOMATEMATICOS>(accesado en enero 2017).
- Almeida, C. M. C. (2018). Um modelo didático de referência para o ensino de Probabilidade. [Dissertação de Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia]. https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/26173/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_%20Cecilia%20Manoella%20C%20Almeida.pdf
- Almouloud, S. (2010). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.
- Almouloud, S. (2015). *Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos*. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42, pp. 9-34.
- Almouloud, Santos y Freitas. (2022). PRÁTICAS DE ENSINO E PROCESSOS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS. 10.24824/978652513582.3.
- Altamirano, P., Espinosa, E. (2009). *Guía para la presentación de gráficos estadísticos*. Perú: INEI.
- Álvarez, V. (2016). *Análisis de la organización matemática de los números racionales en un texto de primero de secundaria*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/8071>
- Arteaga, P., Batanero, C. (2010). *Evaluación de los errores de los futuros docentes en la construcción de gráficos estadísticos*. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.). XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 211-221. Lleida: SEIEM.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de investigación en Educación Estadística. <http://www.ugr.es/local/batanero>.
- Becerra, A. (2015). *Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que se presenta un libro de texto del quinto grado de educación primaria*. (Tesis de maestría

- en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6617>
- Bosch, M. (2012). *Recorridos de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el grupo TAD*.
- Bosch M, Espinoza L, Gascón J. (2003). *El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas*. Recherches en Didactique des mathématiques. 2003. 23-1, pp. 79-135.
- Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares*. Recherches en didactique des mathématiques, 24 (2-3), pp. 205-250.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Higuera, L. R. (2006). *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Educación matemática, 18(2), 37-74.
- Braga, G., Belver, J. L. (2016). *El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación*. Revista Complutense de Educación, Madrid, 27(1), pp. 199-218.
- Brasil (1997). Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Ensino de 1a à 4a série. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental.
- Bueno. S. (2017). *Uso de materiales curriculares por parte de los profesores de matemáticas*. 164f. Tesis (Doctorado en Educación Matemática). PUC/SP, São Paulo.
- Bustamante, E. (2017). *Un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones en la educación básica regular del Perú*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/9884/BUSTAMANTE_RAMOS_UN_MODELO_EPISTEMOLOGICO_DE_REFERENCIA_ASOCIADO_A_LAS_SUCESSIONES_EN_LA_EDUCACION_BASICA_REGULAR_DEL_PERU.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R., & Robson, E. (Eds.). (2003). *The history of mathematical tables: from Sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.
- Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. <https://tesis.pucp.edu.pe>

/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/4634/CARRILLO_LARA_FLOR_ESTUDIO_SUPERIOR.pdf?sequence=1&isAllowed=y

- Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/1547/CARRILLO_YALAN_MILAGROS_ORGANIZACION_MATEMATICA.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Castela, C. (2017). *La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación*. Acta Herediana, 59.
- Cavalcanti, M. R. G., y Guimarães, G. L. (2008). *Gráficos presentados en medios impresos*. En: Actas del II SIPEMAT - Simposio Internacional de Investigación en Educación Matemática, Recife, Universidad Federal Rural de Pernambuco, 2008. 12f.
- Chaachoua, H., & Bittar, M. (2019). *A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas / la théorie anthropologique du didactique: paradigme, avancées et perspectives*. Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online), 9(1).
- Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). *L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. Apports de la théorie anthropologique*, Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils et connaissances d'action, pp. 771-790.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Del saber sabio al saber enseñado. 1. ed. Buenos Aires: Aique.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 12(1), 73–112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.
- Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education*. In Proceedings of the IV congress of the European society for research in mathematics education, pp. 21-30.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

- Chile (2012). Ministerio de Educación. Matemática Educación Básica. Bases curriculares. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. 1. ed. Washington: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Cordani, L. K. (2001). *La enseñanza de la estadística en la universidad y la controversia sobre los fundamentos de la inferencia*. Tesis de doctorado. USP, São Paulo.
- Corica, A. R., & Ferrari, C. N. (2020). *Análisis de las praxeologías estadísticas que se proponen estudiar en la formación de estudiantes de profesorado en matemática*. Revista Eletrônica de Educação Matemática, 15(2), pp. 1-24.
- Correa, J. C. & González, N. (2002), *Gráficos estadísticos con R*. Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín. Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas. Posgrado en Estadística. <http://cran.r-project.org/doc/contrib/grafi3.pdf>
- Costa (20012). *Proyecto GDF Metodología como alternativa a la enseñanza de la estadística en la educación superior*. Tesis (PhD) - Facultad de Educación, Universidad Estadual de Campinas, Campinas.
- Croxton, F. E., y Cowden, D. J., (1967). *Estadística general aplicada*.
- Curcio, F. R. (1987). *Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs*. Journal for Research in Mathematics Education, 18(5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.
- D'Amore B. (2001). *Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos*. Uno. [Barcelona, España]. 27, pp. 51-76
- D'amore, B. & Godino, J. (2007). *El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas*. En: Relime, 10(2), pp. 191-218.
- De Souza, I. (2019). *Descubre qué es el diagrama de Pareto y sus múltiples utilidades*. Rockcontent. [https://rockcontent.com/es/blog/diagrama-de-pareto/#:~:text=%C2%BFC%C3%B3mo%20surgió%C3%B3el%20diagrama%20de,Pareto%20\(1848%2D1923\)](https://rockcontent.com/es/blog/diagrama-de-pareto/#:~:text=%C2%BFC%C3%B3mo%20surgió%C3%B3el%20diagrama%20de,Pareto%20(1848%2D1923)).
- Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libro de textos de educación primaria española*. (Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TFMDanilo.pdf>

- Díaz-Levicoy, D. (2018). *Gráficos Estadísticos en Libros de Texto de Matemática de Educación Primaria en Perú*. Bolema: Boletim de Educação Matemática [online] v. 32, n. 61, pp. 503-525. <<https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a10>>. ISSN 1980-4415. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a10>.
- Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2016). *Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria*. Educação e Fronteiras On-Line, Dourados/MS, 6(17), pp.81-96.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. Arteaga, P. y López-Martín M. M. (2015). *Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena*. Educação Matemática Pesquisa, 17(4), 715-739.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2015). *Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española*. UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 44, pp. 90-112.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2016). *Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile*. Bolema. Boletim de Educação Matemática, 30(55), pp. 713-737.
- Díaz-Levicoy, D. y Giacomone, B. (2016). *Actividades asociadas a los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria en Argentina*. Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos, pp. 1-10. Jerez: CEAM.
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). *Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del Segundo Ciclo de educación primaria*. Profesorado, Granada, 21(3), pp. 299-326
- Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B, López-Martín, M. M. y Piñeiro, J. L. (2016). *Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española*. Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 20(1), 133-156.
- Díaz-Levicoy, D., Osorio, M. (2018). *Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la educación primaria peruana*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Sección 4, el pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional 31(1).

- Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). *Gráficos Estadísticos en Libros de Texto de Matemática de Educación Primaria en Perú*. Bolema, Rio Claro (SP), 32(61), pp. 503-525
- Eudave Muñoz, D. (2007). *El aprendizaje de la estadística en estudiantes universitarios de profesiones no matemáticas*. Educ. mat, pp. 41-66.
- Escorcía, O. (2010). *Manual para la investigación: guía para la formulación, desarrollo y divulgación de proyectos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Escuela profesional de derecho UNMSM. (2018). *Sumilla del curso Matemática aplicada a las ciencias sociales y humanas del Plan de estudios 2018* [Documento interno]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
- España (2014). Ministerio De Educación, Cultura y Deporte. Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Boletín Oficial del Estado, 52.
- Espinel Febles, M. (1999). *Gráficas estadísticas: perspectiva desde la educación matemática*. El guiniguada.
- Estrella, S. (2014). *El formato tabular: una revisión de literatura*. Actualidades investigativas en educación, 14(2), pp. 449-478.
- Estudios generales letras PUCP. (2022). Sílabo del curso Matemática básica del semestre 2022-1 [Documento interno]. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P., & Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill, 95.
- Florentini, D., y Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos*. Autores asociados.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas). Universidad de Vigo. Vigo, España. http://www.atdtad.org/wpcontent/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf
- Gal, I. (2002). *Alfabetización estadística de adultos: significados, componentes, responsabilidades*. Revista Estadística Internacional, 70(1), pp. 1-25.
- García, C. (2014). *Epistemología del objeto matemático y la pretensión del sujeto cognoscente*. SBN: 1690-3064 Depósito Legal: pp200203AR289, 95.

- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). *Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Avances de investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94.
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Gascón, J. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(52), pp. 7-33.
- Gascón, J. (2014). *Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas*. *Educación Matemática*, n. 25 años, pp. 99-123
- Gascón, J., Nicolás, P. (2021). *Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas*. *AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, pp. 23-39
- Glosario de Términos Estadísticos (2007). Cuarta reunión de expertos gubernamentales en difusión de la información estadística, iv reunión grupo de trabajo 2 andestad. Quito, Ecuador. http://intranet.comunidadandina.org/Documentos/Reuniones/DTrabajo/SG_REG_DIES_IV_dt%202.pdf
- Godino, J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2-3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., & Wilhelmi, M. R. (2006). *Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), pp. 117-150.
- Gómez, B. (2011). *El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas*, *PNA* 5(2), pp. 49-65.
- González, A. S. (2020). *La introducción de los números reales en la enseñanza secundaria: un análisis institucional de libros de texto*. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, pp. 7-24.

- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología Matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/5225/GONZALES_HERNANDEZ_CINTYA_PRAXEOLOGIA_MATEMATICA.pdf?sequence=1
- Haber, A., y Runyon, R. (1973). *Estadística General*. Fondo Educativo Interamericano, S.A.
- Herbel, B. A. (2007). *From intended curriculum to written curriculum: Examining the “voice” of a mathematics textbook*. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, 38(4), pp. 344-369.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Instituto Nacional de Estadística. (s.f.). *Dos siglos de gráficos estadísticos*. https://www.ine.es/expo_graficos2010/expogra_inicio.htm
- Jacobini, O. R. (1999). *Modelación Matemática Aplicada a la Enseñanza de la Estadística en Cursos de Pregrado*. Disertación (Maestría) - Instituto de Geociencias y Ciencias Exactas, UNESP, Rio Claro.
- Jiménez-Castro, M. y Arteaga, P. (2019). *Complejidad semiótica y nivel de lectura de gráficos estadísticos en libros de texto de la educación primaria en Costa Rica*. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Jiménez-Castro, M., Arteaga, P., Batanero, C. (2020). *Los Gráficos Estadísticos en los Libros de Texto de Educación Primaria en Costa Rica*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* 34(66) pp. 132-156. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a07>. Epub 17 Abr 2020. ISSN 1980-4415. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a07>.
- Johnson, R., y Kuby, P. (2005). *Estadística elemental*. Editorial Internacional Thomson Editores.
- Lemos, M. P.F. (2006). *El estudio del tratamiento de la información en los libros de texto de los grados iniciales de la Enseñanza Fundamental: Ciencias y Educación*, 12(2), pp. 171-184.
- López - Noguero, F. (2002). *El análisis de contenido como método de investigación*. XXI, *Revista de Educación*, 4, pp. 167-179. Universidad de Huelva

- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. Tesis de doctorado, Universidad de Vigo. España. <http://docplayer.es/11249474-Organizaciones-matematicas-locales-relativamente-completas-1.html>
- Najarro Alcócer, L. (2018). *Caracterización del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación secundaria*.
- Novaes, D. V. (2004). *La movilización de conceptos estadísticos: estudio exploratorio con estudiantes de un curso de tecnología en Turismo*. Disertación (Maestría en Educación Matemática) - Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo.
- Mateus, L. (2014). *Estudio de gráficos estadísticos usados en una muestra de libros de matemáticas para la educación básica y media en Bogotá*. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 274-280). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- May, R. (2009). *La representación gráfica en estadística a nivel superior: un análisis de libros de texto en psicología y educación*. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Yucatán. México.
- Mendenhall W., Robert J. Beaver, Barbara M, Beaver. (2010). *Introducción A La Probabilidad Y Estadística*. Cengage Learning.
- Méndez Cardona, J. (2019). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la interpretación de gráficos estadísticos: estudio de caso en estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas*.
- Méndez, M. y Ortiz, M. (2012). *Construcción y lectura de gráficos y tablas estadísticas*. (Tesis de la Licenciatura en Psicología Educativa). Universidad Pedagógica Nacional Ajusco. México. <http://200.23.113.59/pdf/28977.pdf>
- Monroy Becerra, E. M. (2013). *Propuesta didáctica para la interpretación de gráficos estadísticos con la inclusión de objetos virtuales en el aula*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Mosquera Ríos, Y., Abadía Palacios, S., y Palacios Rodríguez, J. F. (2019). *Un estudio socioepistemológico de la resignificación de los usos de gráficos estadísticos en estudiantes de grado tercero de la básica primaria*.
- Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Andalucía: Grupo de Investigación en Educación Estadística. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS>

/tesisjj.PDF

- Osorio Gonzáles Augusta Rosa. (2008). *Estadística: curso abp*.
- Pérez, J. (2010). *Apuntes de Demografía*. <https://apuntesdedemografia.com/2015/04/28/john-graunt-primera-tabla-de-mortalidad/>
- Pérez Echeverría, M. P., Postigo, Y., López Manjón, A., & Marín, C. (2009). *Aprender con imágenes e información gráfica*. En J. I. Pozo, & Pérez Echeverría, M. P. (Coords.). *La psicología del aprendizaje universitario: de la formación de contenidos a la formación de competencias* (pp. 134-148). Madrid: Morata.
- Perú. Instituto Peruano De Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica. Mapas de progreso del Aprendizaje. *Matemáticas: Estadística y Probabilidad*. 1. ed. Lima: MINEDU, 2013
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Lima. [file:///C:/Users/admin/Downloads/DCN%202009%20final%20-%20C3%BA%20ultima%20versi%C3%B3n%20\(5\).pdf](file:///C:/Users/admin/Downloads/DCN%202009%20final%20-%20C3%BA%20ultima%20versi%C3%B3n%20(5).pdf)
- Perú. Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/documentos.php#top>
- Pontificia Universidad Católica del Perú (2022). *Matemática Básica (2022-1). Sílabo*.
- Pontis, S. (2007): "La historia de la esquemática en la visualización de datos". En Visualizar 07. http://medialab-prado.es/article/la_historia_de_la_esquematica_en_la_visualizacion_de_datos_por_sheila_pontis_. [10-08-2013].
- Postigo, Y., Echeverría, M. P. P., & Oller, C. M. (2010). *¿Cómo usan y comprenden los gráficos los estudiantes universitarios?* *Revista IRICE*, (21), 81-94.
- Ramos, J., Del Águila, V. y Bazalar, A. (2017). *Estadística básica para los negocios*. Universidad de Lima, Fondo Editorial.
- Salcedo, A. y Ramírez, T. (2016). *Gráficos estadísticos en libros de texto de matemáticas venezolanos*. *VIDYA*, 36(2), pp. 219-236
- Serrano, L. (2009). *Tendencias actuales de la Investigación en Educación Estocástica*. <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>
- Silva, D. B. (2012). *Analizando la transformación entre gráficas y tablas por estudiantes de 3° y 5° año de Enseñanza Básica*. Disertación (Maestría) - Programa de Posgrado en Matemática y Educación Tecnológica - Universidad Federal de Pernambuco. CE.

- Trigueros, M. (2019). *Diálogo entre las teorías APOE y TAD Dialogue between APOE and ATD theories*. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21(5).
- Triola, Mario. (2004). *Estadística* (L.E. Pineda, Trad.). México, D.F.: Pearson Addison Wesley.
- Tufte, E.R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Conn.: Graphics Press.
- Valentín, M. (2015). *Organización praxeológica del objeto gráficos estadísticos en el texto de tercer grado de educación primaria del ministerio de educación*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6567>
- Vargas Vargas, G. S. (2019). *Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria*.
- Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., & Arteaga, P. (2020). *Objetos matemáticos ligados a la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto*. Bolema, Rio Claro (SP), 34(67), pp. 480-500.
- Vásquez, E. (2012). *Medición del impacto de libro de texto en el aula de clases*. (Tesis para optar el grado de Doctor). University of Flensburg. <http://dnb.info/1029421323/>
- 34
- Véliz Capuñay Carlos. (2000). *Estadística: aplicaciones* (4a ed.). Copias Gráficas.
- Zamora, M. C. (2003). *Estadística descriptiva e inferencial: aplicaciones*. Moshera.
- Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 33, pp. 234-247. <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/4>.