

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Subestructuración en Dinámica de Cuerpos Flexibles

Tesis para obtener el grado académico de Doctor en Ingeniería que
presenta:

Pedro Alonso Flores Alvarez

Asesor:

Dr. Quino Martín Valverde Guzmán

Lima, 2025


Informe de Similitud

Yo, Quino Valverde Guzman, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis de doctorado titulado:

Subestructuración en Dinámica de Cuerpos Flexible, del autor **Pedro Alonso Flores Álvarez**, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 9%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 02/06/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lima, 3 de junio de 2025

Apellidos y nombres del asesor: <u>Valverde Guzmán, Quino Martín</u>	
DNI: 06639297	Firma 
ORCID: 0000-0003-3647-6687	

Resumen

En el funcionamiento de sistemas mecánicos que involucran cuerpos flexibles, es común que sus ecuaciones de movimiento exhiban términos no lineales. Estas no linealidades pueden aparecer debido a la naturaleza de las fuerzas que actúan sobre ellos, las grandes deformaciones a las que pueden estar sometidos, o la naturaleza de la curva esfuerzo - deformación del material del que están hechos, entre muchos otros factores que pueden hacer que estos términos emerjan en las ecuaciones de movimiento.

En la práctica de la ingeniería se suele requerir la evaluación de la respuesta dinámica de un sistema que tiene no linealidades inherentes a él, además de tener una geometría compleja o de estar sometidas a cargas variables en el tiempo. Es por ello que existen diversos métodos numéricos que tratan de ofrecer las herramientas necesarias para obtener esta respuesta. Entre los métodos más populares, el método de los elementos finitos sigue siendo el más utilizado en la industria para predecir el comportamiento estructural de sólidos. No obstante, a lo largo del tiempo, la solución de problemas dinámicos ha sido siempre uno de los principales problemas de los cuales se requiere una solución rápida y precisa, combinación de factores que muchas veces es difícil de equilibrar.

En este trabajo de investigación, se desarrolló un nuevo método para realizar la reducción del número de grados de libertad de modelos de elementos finitos de sistemas dinámicos que contienen términos no lineales en sus ecuaciones de movimiento mediante el uso de subestructuras. El principal aporte de este método es el uso de modos normales no lineales dentro de la aproximación de la parte dinámica del método de Craig - Bampton dual para sistemas con amortiguamiento no proporcional, lo cual permitió capturar no linealidades dentro de las subestructuras, al mismo tiempo que se redujeron el número de grados de libertad de cada una.

Este nuevo método se implementó en Matlab® code. Se realizaron tres casos de estudio donde se compararon las respuestas de los sistemas dinámicos estudiados con las obtenidas con el software comercial ANSYS®, el cual utiliza el método de Hilber-Hughes-Taylor para integrar las ecuaciones de movimiento del modelo completo. La reducción en los tiempos de simulación fue exitosa, reduciendo en más de un orden de magnitud los tiempos alcanzados por el software comercial, conservando la precisión de los resultados en niveles aceptables.

Tabla de contenidos

Resumen	I
Tabla de contenidos	III
Lista de figuras	VI
Lista de tablas	IX
I. Introducción	1
1.1. Motivación y principal aporte	2
1.2. Objetivos	4
1.3. Resultados esperados	4
1.4. Contenido del trabajo	5
II. Antecedentes	7
III. Estado del Arte	15
3.1. La ecuación fundamental del análisis dinámico discreto	15
3.2. Métodos clásicos de resolución de la ecuación fundamental	20
3.2.1. Métodos de Integración Directa	21
3.2.2. El Método Explícito	23
3.3. Modelos de Orden Reducido	24
3.3.1. Métodos de descomposición modal	25
3.3.2. Métodos de Condensación	27
3.3.3. Métodos de Subestructuramiento	29
3.4. Algunos métodos matemáticos para la resolución de problemas estructurales	46
3.4.1. Modos normales no lineales	46
3.4.2. Algoritmo de Lanczos en bloque desplazado para cálculo de valores y vectores propios	49

IV. Método de Subestructuramiento basado en Craig - Bampton dual utilizando modos normales no lineales	52
4.1. Método de subestructuramiento basado en Craig - Bampton dual utilizando modos normales no lineales	52
4.1.1. Parte dinámica de la aproximación	54
4.1.2. Parte estática de la aproximación	56
4.1.3. Aproximación completa de la respuesta dinámica de la subestructura	57
4.2. Discusión acerca del método propuesto	57
4.2.1. Mejoras en cuanto al estado del arte	57
4.2.2. Uso del método y limitaciones del método	58
4.3. Comportamiento no lineal de sistemas de cuerpos	59
4.3.1. No linealidad de materiales	60
4.3.2. Grandes desplazamientos	61
4.3.3. Cambio en las condiciones de rigidez	62
4.4. Acerca del amortiguamiento	62
V. Implementación del Método de Subestructuramiento	64
5.1. Programa Principal	65
5.1.1. Parte dinámica de la aproximación	65
5.1.2. Parte estática de la aproximación	65
VI. Comparación del método de subestructuramiento frente a métodos clásicos en elementos finitos para resolución de problemas transitorios estructurales	69
6.1. Caso de estudio: Viga Bernoulli con amortiguadores	69
6.1.1. Descripción general del caso de estudio	69
6.1.2. Mallado	70
6.1.3. Condiciones de apoyo	71
6.1.4. Análisis modal amortiguado	71
6.1.5. Discusión de los resultados obtenidos en el caso de estudio	71
6.2. Caso de estudio: Viga Bernoulli sometida a carga sinusoidal apoyada sobre un resorte con no linealidad cúbica	74
6.2.1. Descripción general del caso de estudio	74
6.2.2. Mallado	74
6.2.3. Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo	74
6.2.4. Resultados utilizando el método HHT	75
6.2.5. Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado	76
6.2.6. Discusión de los resultados	77
6.3. Caso de estudio 3: Armadura con resortes no lineales	78
6.3.1. Descripción general del caso de estudio	78
6.3.2. Mallado	80

6.3.3.	Condiciones de apoyo y carga	80
6.3.4.	Resultados utilizando el método HHT	81
6.3.5.	Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado	81
6.3.6.	Discusión de Resultados	83
6.4.	Caso de estudio 4: Nave industrial sometida a cargas sinusoidales	84
6.4.1.	Descripción general del caso de estudio	84
6.4.2.	Mallado	86
6.4.3.	Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo	86
6.4.4.	Resultados utilizando el método HHT	87
6.4.5.	Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado	88
6.4.6.	Discusión de los resultados	91
6.5.	Caso de estudio 5: Ala de avión sometida a presión pulsante	92
6.5.1.	Descripción general del caso de estudio	92
6.5.2.	Mallado	93
6.5.3.	Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo	93
6.5.4.	Resultados utilizando el método HHT	95
6.5.5.	Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado	96
6.5.6.	Discusión de los resultados	99
	Conclusiones	101
	Trabajo futuro	104
	Referencias Bibliográficas	105

Lista de figuras

2.1. Péndulo matemático. Adaptado de (Gross, Hauger, Schröder, y Wall, 2008)	7
2.2. Armadura flexible utilizada como absorber de vibraciones (Avramov y Mikhlin, 2013)	9
2.3. Rotor y disco apoyados sobre rodamientos (Avramov y Mikhlin, 2013)	10
2.4. Structural testing on Pazy wing. Adapted from Riso y Cesnik (2023).	11
2.5. Modelo de elementos finitos de ala Pazy. Adaptado de Riso y Cesnik (2023).	12
2.6. Fluido dentro de absorber de impacto (Bathe, 2008).	13
2.7. Schematic of a fuel pump chamber (Bathe, 2008).	13
3.1. Finite Element in Deformable Solid	15
3.2. Fuerzas en una subestructura	30
3.3. Subestructura flotante	33
3.4. Viga en voladizo con amortiguadores. Adaptado de Gruber y Rixen (2018)	41
3.5. Frecuencias naturales complejas de la viga estudiada por Gruber y Rixen (2018)	42
3.6. Resultados del análisis modal amortiguado del sistema considerando las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez reducidas según el método de Craig-Bampton en sus formas primal y dual (Gruber y Rixen, 2018)	43
4.1. Cuerpo inicial	53
4.2. División en subestructuras del cuerpo inicial	53
4.3. Nodos elegidos para el cálculo de los modos normales no lineales en la frontera de la subestructura	56
5.1. Programa principal del método propuesto	66
5.2. Parte dinámica de la aproximación del método propuesto	67
5.3. Parte estática de la aproximación del método propuesto	68
6.1. Mallado de viga	70
6.2. Resultados del análisis modal amortiguado	71
6.3. Errores relativos de las partes real y compleja de los modos de vibración hallados	73
6.4. Geometría del segundo caso de estudio	75

6.5. Amplitud de desplazamiento del extremo libre de la viga con el método HHT	76
6.6. Amplitud de desplazamiento del extremo libre de la viga con el método HHT	77
6.7. Errores relativos del desplazamiento vertical del extremo libre de la viga entre el método HHT y el método de Craig-Bampton dual no lineal	78
6.8. Armadura del tercer caso de estudio	79
6.9. Modo de vibración de la armadura a 165 rad/s ($\approx 26,253 \text{ Hz}$)	80
6.10. Desplazamiento horizontal del nudo <i>C</i> en función del tiempo en segundos	81
6.11. Primera subestructura de la armadura	82
6.12. Segunda subestructura de la armadura	82
6.13. Desplazamiento horizontal del nudo <i>C</i> en función del tiempo en segundos	83
6.14. Error relativo del desplazamiento horizontal obtenido en el nudo <i>C</i> entre el método HHT y el método de Craig - Bampton dual no lineal	84
6.15. Vista frontal del pórtico de la nave industrial	85
6.16. Vista lateral del pórtico de la nave industrial	86
6.17. Vista superior del pórtico de la nave industrial	86
6.18. Segundo modo de vibración de la nave industrial a $2,645 \text{ Hz}$	87
6.19. Desplazamiento horizontal del nudo <i>B</i> del pórtico central en función del tiempo en segundos	88
6.20. Estrategia de subestructuramiento a utilizar. Los pórticos que se tomarán como subestructuras se muestran en rojo.	89
6.21. Subestructura del pórtico utilizada en la reducción de orden del modelo.	89
6.22. Subestructura de la nave	90
6.23. Desplazamiento horizontal del nudo <i>B</i> del pórtico central en función del tiempo en segundos utilizando el método de subestructuramiento propuesto	91
6.24. Error relativo del desplazamiento horizontal obtenido en el nodo <i>B</i> entre el método HHT y el método de Craig-Bampton dual no lineal	92
6.25. Vista tridimensional del ala utilizada en la simulación.	93
6.26. Vista tridimensional del ala utilizada en la simulación.	93
6.27. Mallado del Ala	94
6.28. Primer modo de vibración del ala a $29,01 \text{ Hz}$	94
6.29. Empotramiento (fixed support) y presión en la dirección y sobre la superficie superior del ala.	95
6.30. Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método HHT	95
6.31. Desplazamiento horizontal de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método HHT	96
6.32. Subestructuras seleccionadas para la reducción de orden del modelo.	97

6.33. Ubicaciones de los nodos seleccionados para el cálculo de los modos normales no lineales en cada subestructura. La ubicación de los nodos es aproximada, pues esta dependió de la localización real del nodo en la malla generada por ANSYS®	97
6.34. Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto	98
6.35. Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto	98
6.36. Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto	100
6.37. Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto	100



Lista de tablas

3.1. Metodos para resolucion del problema dinámico	45
4.1. Clases de no linealidades	60
6.1. Características de la viga utilizada por Kraker y Campen (1996) y Gruber y Rixen (2018).	70
6.2. Características de la viga utilizada por Ponsioen, Jain, y Haller (2020)	74
6.3. Características de la carga utilizada por Ponsioen y cols. (2020)	75
6.4. Características geométricas y propiedades mecánicas del material de la armadura	79
6.5. Características de la carga utilizada sobre la armadura	80
6.6. Características geométricas y propiedades mecánicas del material de la estructura de la nave industrial	85
6.7. Características de la carga utilizada sobre la armadura	87
6.8. Características de la presión sobre el ala	94

Capítulo I

Introducción

El Método de los Elementos Finitos (FEM) se originó alrededor de la década de 1950 en la industria aeroespacial, pero no fue hasta principios de la década de 1970 que su uso se generalizó debido a la disponibilidad de recursos computacionales significativos (Burden y Faires, 2010). Como es bien sabido, el método consiste en discretizar un dominio en elementos, los cuales, a su vez, tienen nodos en sus vértices y bordes. Estos nodos se utilizan para discretizar matemáticamente las ecuaciones diferenciales que describen un fenómeno físico. El uso de este método se ha proliferado en los campos de la mecánica estructural, el electromagnetismo e incluso la dinámica de fluidos computacional (aunque en este último, muchos códigos comerciales prefieren el método de volúmenes finitos).

En el campo del análisis estructural, se pueden realizar dos tipos de análisis en sistemas de cuerpos: análisis estático y análisis dinámico. Dentro de este último, se pueden llevar a cabo varios subtipos de análisis: análisis modal, análisis armónico, análisis de espectro de respuesta, análisis de vibración aleatoria y análisis transitorio. Este último tiene una característica particular: puede simular el comportamiento de cualquier fenómeno estructural, considerando todo tipo de no linealidades (por ejemplo, comportamiento no lineal del material, grandes desplazamientos, cambios en las condiciones de contacto entre cuerpos), además de tener en cuenta el paso del tiempo. Sin embargo, como se verá más adelante, este tipo de análisis implica la resolución de un número significativo de ecuaciones—muchas más que en el análisis estático—por lo que el tiempo necesario para realizar un estudio completo de este tipo (incluyendo un análisis de convergencia de malla) suele volverse inaceptable (Bathe, 2016).

A lo largo de los años, esto ha motivado el desarrollo de Modelos de Orden Reducido, cuyo objetivo principal es disminuir el tiempo computacional necesario para resolver un problema dinámico (particularmente uno transitorio) mediante la resolución de solo ciertos grados de libertad del modelo completo (de ahí el nombre "orden reducido"). Esto, por supuesto, implica una pérdida de precisión en los resultados en comparación con la reso-

lución del mismo problema dinámico utilizando el modelo completo de elementos finitos, el cual ya es una aproximación del fenómeno físico real. Uno de los principales desafíos de los modelos de orden reducido es precisamente sacrificar la menor precisión posible en favor de la reducción del costo computacional.

Entre los diferentes modelos de orden reducido estudiados a continuación se encuentran los métodos de subestructuración. Estos métodos, en términos generales, analizan previamente las características dinámicas de ciertas partes del modelo (que, por lo general, aunque no necesariamente, se repiten dentro de él) para crear *superelementos*, los cuales pueden utilizarse como parte de un modelo más grande de elementos finitos para encontrar la respuesta dinámica de un sistema de cuerpos.

No existe una única forma de crear subestructuras para llevar a cabo esta reducción de orden, ni se garantiza que el uso de estas subestructuras reduzca efectivamente el tiempo computacional requerido para resolver el problema dinámico o que la precisión de los resultados sea aceptable. Diversos autores han desarrollado múltiples estrategias de subestructuración con campos de aplicación específicos en ingeniería, no solo a nivel numérico (es decir, mediante un modelo físico-matemático basado únicamente en la transformación de las ecuaciones gobernantes del fenómeno dinámico transitorio utilizando diversas técnicas numéricas aproximadas), sino también a nivel experimental e incluso con técnicas que combinan ambas áreas (los llamados métodos de subestructuración híbridos).

1.1. Motivación y principal aporte

La principal desventaja de muchos métodos de subestructuramiento, incluyendo los que más han tenido éxito en los últimos años, como lo es el método de Craig-Bampton dual (Rixen, 2004), es la falta de capacidad de abordar no linealidades dentro de las subestructuras. Como se describirá en capítulos posteriores, muchos métodos de subestructuramiento están basados en utilizar el espacio vectorial generado por los modos de vibración de las subestructuras como base o como parte del método. Estas técnicas tienen la clara desventaja de que difícilmente se pueden utilizar cuando existen fenómenos no lineales en la subestructura debido principalmente a la naturaleza lineal del teorema de superposición modal, la cual combina linealmente los vectores solución del análisis modal de las subestructuras. El hecho de que los métodos aproximativos de estas técnicas de subestructuramiento tomen como base una combinación lineal de las bases del espacio vectorial generado es un indicativo de que únicamente pueden lidiar con fenómenos que son lineales dentro de la subestructura y que, en caso de que se tenga alguna no linealidad en la ecuación de movimiento, la precisión de estos métodos no está garantizada.

Por otro lado, Shaw y Pierre (1993) propusieron un equivalente al método de super-

posición modal, pero utilizando funciones no lineales. Ellos sugirieron la existencia de continuaciones no lineales de los espacios generados por la base de vectores propios provenientes del análisis modal y que estas continuaciones se podían hallar utilizando una formulación general de la expansión de Taylor alrededor de un punto en el espacio modal. A estas continuaciones las llamaron modos normales no lineales, y los autores demostraron su existencia y sugirieron que estos modos se podrían utilizar como una base de modelos de orden reducido. Los modos normales no lineales han sido objeto de estudio recientemente por Haller y Ponsioen (2016), y Ponsioen y cols. (2020), quienes han logrado utilizarlos en forma de subvariedades espectrales para encontrar la respuesta forzada de sistemas no lineales de múltiples grados de libertad mediante un modelo de orden reducido exacto. No obstante, aún con este avance, resulta inviable la aplicación de estos modos normales no lineales a las subestructuras, debido a que el enfoque utilizado se centra en el cálculo de las variedades subspectrales y en cómo la solución de los sistemas dinámicos está incluida en ellas, pero no calcula directamente algún método de transformación entre las coordenadas reales y las coordenadas reducidas, con lo cual no se pueden generar las matrices de reducción de orden que suelen aparecer durante el subestructuramiento.

El principal aporte de esta tesis es incorporar el cálculo de modos normales no lineales, como los describieron Shaw y Pierre (1993), al cálculo de las subestructuras mediante el método de Craig-Bampton dual con amortiguamiento no proporcional. La ventaja del método originalmente propuesto para el cálculo de modos normales no lineales es la simplicidad matemática con la que se generan las matrices necesarias para el cálculo de estos modos, los cuales se pueden incorporar al método de Craig-Bampton dual, que en su formulación original solo utiliza los modos de vibración lineales para realizar la aproximación del sistema dinámico de las subestructuras. Con esta combinación de ambas teorías, el método de Craig-Bampton dual ahora también puede lidiar con no linealidades que aparezcan en el sistema dinámico original en forma de dependencia polinómica de desplazamientos o velocidades de los nodos.

1.2. Objetivos

A continuación, se enuncia el objetivo general y específico de este trabajo de investigación.

Objetivo general

Desarrollar un método de subestructuramiento aplicable a problemas de la dinámica de sistemas de cuerpos flexibles, cuyo uso implique la reducción del tiempo computacional requerido para la solución del problema en comparación con un método clásico de resolución de las ecuaciones dinámicas que gobiernan el fenómeno físico, pero que, a su vez, mantenga la precisión de los resultados en un nivel aceptable.

Objetivos específicos

1. Realizar un análisis de los modelos de orden reducido, en particular aquellos que utilizan subestructuramiento, desarrollados hasta la fecha, y cuáles han sido sus principales resultados.
2. Desarrollar un método de subestructuramiento aplicable a problemas de la dinámica de sistemas de cuerpos flexibles que involucren no linealidades que se puedan modelar como polinomios de orden superior dentro de las ecuaciones de movimiento del sistema.
3. Realizar la implementación del método desarrollado en un código de Matlab®.
4. Hacer una comparación en cuanto a la precisión y tiempo computacional empleado del método desarrollado frente a los métodos clásicos de resolución de análisis dinámicos transitorios.

1.3. Resultados esperados

Se esperan principalmente tres resultados de este trabajo de investigación:

1. El método propuesto debería poder capturar y resolver las no linealidades de las ecuaciones de movimiento de un modelo de elementos finitos que involucre cuerpos flexibles sometidos a cargas dinámicas, en particular cuando estas no linealidades se presenten en forma de polinomios de orden superior.
2. Asimismo, también debería reducir de manera notable el tiempo computacional que tomar resolver los sistemas de ecuaciones del modelo de elementos finitos frente a

los métodos de integración directa tradicionales utilizados en softwares comerciales.

3. Por último, el método propuesto debería mantener dentro de márgenes aceptables la precisión alcanzada por los métodos de integración directa.

1.4. Contenido del trabajo

El presente documento describe el trabajo de investigación realizado en 6 capítulos, los cuales se describen a continuación.

- **Capítulo 1:** En este capítulo se presenta brevemente la problemática, la idea general del trabajo de investigación y los objetivos de este.
- **Capítulo 2:** Aquí se presentan algunos casos reales selectos donde, para encontrar la respuesta del sistema a las cargas a las cuales se encontraba expuesto, se requerían resolver no linealidades que aparecían naturalmente en las ecuaciones de movimiento. Se muestra que, si bien la solución de problemas no lineales es viable para sistemas con pocos grados de libertad, para sistemas con muchos más grados de libertad la solución se podría volver más tediosa.
- **Capítulo 3:** Este capítulo presenta el estado del arte con las diferentes técnicas de modelos de orden reducido, subestructuramiento, métodos numéricos y otros métodos matemáticos en los que se basa este trabajo de investigación. Es importante notar que en este capítulo se presenta el método de Craig-Bampton dual, uno de los pilares en los que está basado el método presentado en esta tesis. De este método se presentan una versión considerando amortiguamiento nulo o proporcional según Rayleigh, y otra considerando un amortiguamiento no proporcional. La matemática involucrada en el método de Craig-Bampton dual es explorada minuciosamente, ya que sirvió de base para desarrollar el método propuesto en este trabajo de investigación. Por otro lado, también se presenta el otro pilar del método propuesto, el cual es la teoría de modos normales no lineales.
- **Capítulo 4:** Se presenta el método propuesto, cuya parte estática de la aproximación está basada en el método de Craig-Bampton dual, mientras que la parte dinámica se basa en la teoría de modos normales no lineales. Se resalta en este capítulo la importancia de únicamente considerar los modos normales no lineales cuya parametrización se basa en las fronteras de las subestructuras, mientras que también se argumenta el por qué la aproximación estática según el método de Craig-Bampton dual se utiliza sin tomar en cuenta las no linealidades.
- **Capítulo 5:** En este capítulo se examinan los diagramas de flujo del código implementado para poner a prueba el método propuesto en este trabajo de investigación.

- **Capítulo 6:** Se examinan algunos casos de estudio que se basan en la literatura donde se presenta el método de Craig-Bampton dual y el cálculo de modos normales no lineales. Se comparan los resultados obtenidos con el nuevo método, tanto en tiempo computacional como en precisión numérica, resaltando los principales aportes de este trabajo de investigación al estado del arte.



Capítulo II

Antecedentes

En la práctica de la ingeniería, existen muchos problemas en régimen transitorio que son clásicamente resueltos mediante la linealización de sus ecuaciones de movimiento. Esto se observa incluso en los ejemplos más sencillos como el de un péndulo matemático. Si se supone que el péndulo mostrado en la Figura 2.1 tiene un desplazamiento angular θ , entonces su ecuación de movimiento resulta en la ecuación (2.1).

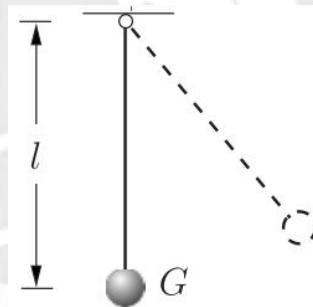


Figura 2.1: Péndulo matemático. Adaptado de (Gross y cols., 2008)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (2.1)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y l es la longitud del péndulo matemático. Como se mencionó anteriormente, la solución de la ecuación (2.1) es conocida si se suponen ángulos pequeños. Sin embargo, para ángulos de mayor magnitud, tal linealización no es posible. En su lugar, se utiliza la aproximación de la función sinusoidal mediante la serie de Taylor alrededor de 0:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (2.2)$$

Si se consideran únicamente los términos lineales y de tercer orden de la serie, la ecuación

(2.1) queda expresada como:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{6l}\theta^3 = 0 \quad (2.3)$$

Como se observa en la ecuación (2.3), la presencia de la no linealidad en este modelo matemático sencillo emerge de manera natural cuando se trata de considerar las grandes amplitudes que este péndulo puede alcanzar a partir de sus condiciones iniciales.

En un caso más sofisticado, se conoce que la magnitud de la fuerza de arrastre en flujo externo para muchas aplicaciones de la aerodinámica, la aeroelasticidad y de la mecánica de fluidos está dada típicamente por la ecuación (2.4):

$$F_d = \frac{1}{2}\rho A_c V^2 \quad (2.4)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, A_c es el área de ataque efectiva, y V es la velocidad promedio del fluido sobre el sólido. Esto implica que en las ecuaciones de movimiento de un sólido a través de un fluido (o del paso de este último por la superficie del sólido), cualquier sistema que pretenda describir la cinética del sólido tendrá que incluir un término cuadrático, el cual necesariamente introduce una no linealidad sobre estas ecuaciones.

Por otro lado, en los últimos años se han desarrollado mecanismos flexibles, los cuales tienen la particularidad de que el movimiento que generan no solo depende de los tipos y cantidad de pares cinemáticos presentes en ellos, sino que también depende en buena medida de la flexibilidad de algunas o todas sus partes. Esta última característica muchas veces implica que las deflexiones localmente alcanzadas por cada una de las partes flexibles se encuentren más allá de los límites aceptables para aplicar teoría de deflexiones lineales (Howell, 2013) y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de estos mecanismos pueden contener no linealidades.

Como queda claro en los ejemplos anteriores, las no linealidades están intrínsecamente presentes en muchos sistemas mecánicos, en particular en aquellos que presentan grandes desplazamientos o rotaciones, aun cuando los materiales de los que están hechos se encuentren dentro de la zona elástico-lineal de su curva esfuerzo-deformación. No obstante, Lacarbonara (2013) indica que estas formas de no linealidades rara vez se manifiestan de manera aislada y desacoplada una de la otra, por lo que considerar dichos efectos en los sistemas mecánicos se vuelve un desafío significativo.

Avramov y Mikhlin (2013) también mencionan algunos otros sistemas mecánicos en los que las no linealidades están presentes de manera intrínseca. Por ejemplo, para la armadura flexible mostrada en la Figura 2.2, las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

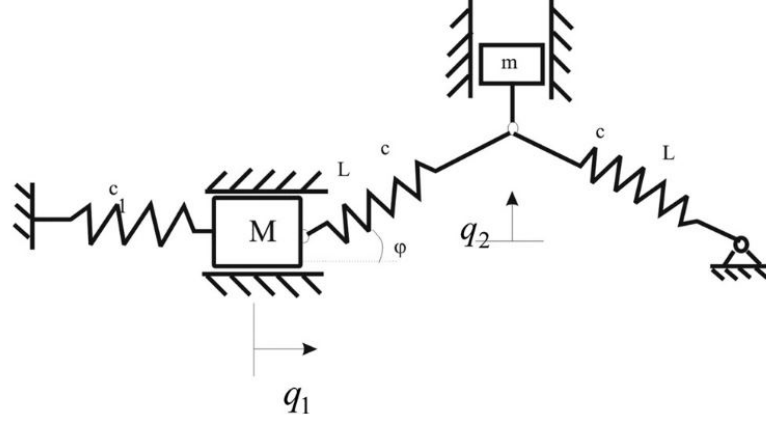


Figura 2.2: Armadura flexible utilizada como absorber de vibraciones (Avramov y Mikhlin, 2013)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= \varepsilon \bar{\gamma} (-q_1 + a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 q_1 q_2^2 + a_4 q_1^3) + \varepsilon f \cos(\omega t) \\ \ddot{q}_2 + p^2 q_2 &(-a_5 - a_6 q_1 - a_7 q_1^2 + a_8 q_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde a_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, ε , y $\bar{\gamma}$ son parámetros propios del sistema. Aquí, las no linealidades en las ecuaciones de movimiento surgen de la propia geometría del sistema, donde la longitud instantánea de las barras de la armadura (modeladas como resortes lineales) provoca los términos cuadráticos en la ecuación (2.5).

Por otro lado, los mismos autores también presentan el caso que se puede observar en la Figura 2.3, en la que se ha modelado un eje rotatorio donde se consideran las fuerzas no lineales causadas por la viscosidad de la lubricación en los rodamientos y cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \tilde{F}_x(x_2, y_2) - \tilde{F}_x(x_1, y_1) &= 0 \\ I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 - l_2 \tilde{F}_x(x_2, y_2) + l_1 \tilde{F}_x(x_1, y_1) &= 0 \\ m\ddot{y} - \tilde{F}_y(x_2, y_2) - \tilde{F}_y(x_1, y_1) &= 0 \\ I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - l_1 \tilde{F}_y(x_1, y_1) + l_2 \tilde{F}_y(x_2, y_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde las propiedades de masa e inercia del rotor están dadas por m , I_e , and I_p , y las fuerzas $\tilde{F}_x(x_1, y_1)$, $\tilde{F}_x(x_2, y_2)$, $\tilde{F}_y(x_1, y_1)$, y $\tilde{F}_y(x_2, y_2)$ representan las fuerzas no lineales desarrolladas en los rodamientos debido a la lubricación de estos. En este caso, las no linealidades aparecen en el modelo debido a la interacción natural entre el eje del rotor y sus apoyos.

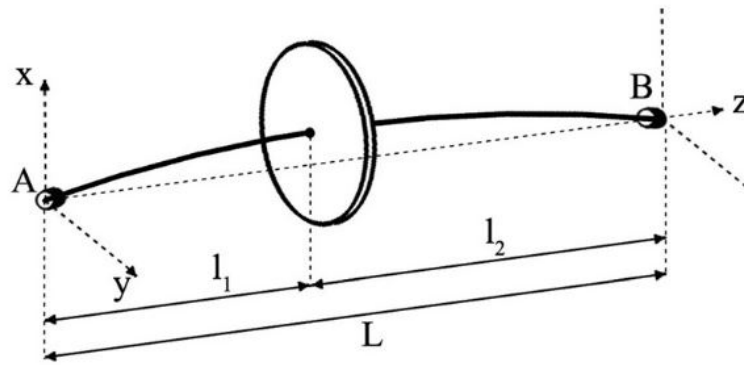


Figura 2.3: Rotor y disco apoyados sobre rodamientos (Avramov y Mikhlin, 2013)

Otras aplicaciones de la dinámica no lineal en sistemas mecánicos son mencionadas por Rega (2022), quien describe una serie de sistemas estructurales donde la consideración de no linealidades puede llevar a un mejor entendimiento y comportamiento del sistema dinámico. Entre los ejemplos resaltan la supresión de vibraciones en sistemas mecánicos a través de absorbentes no lineales, los cuales introducen no linealidades mediante el uso de materiales piezoeléctricos para maximizar el ancho de banda de frecuencias en el que el absorbente de vibraciones reduce eficazmente las amplitudes del sistema primario; la recolección de energía a través de movimientos vibratorios de sistemas de péndulos flotantes excitados por el movimiento del mar; la posibilidad de transformar dinámicamente la geometría de mecanismos ligeros, sistemas de tensegridad y estructuras de origami para mejorar su comportamiento estructural; y el control de propagación de ondas en osciladores acoplados, entre otros. En general, la investigación en dinámica no lineal es una disciplina en crecimiento que está teniendo un gran impacto en el diseño de sistemas mecánicos de gran utilidad en la industria (Rega, 2020).

Por otro lado, las no linealidades también están presentes en sistemas dinámicos más complejos, como aquellos encontrados en el campo de la aeroelasticidad. Riso y Cesnik (2023) estudiaron los efectos de las no linealidades geométricas presentes en un ala *Pazy*, la cual se puede ver en la Figura 2.4.

Según los autores, las ecuaciones que describen la fuerza aerodinámica $l_{c/4}$, el momento aerodinámico de cuarto de cuerda $m_{c/4}$, y la fuerza de arrastre $d_{c/4}$ son:



Figura 2.4: Structural testing on Pazy wing. Adapted from Riso y Cesnik (2023).

$$\begin{aligned}
 l_{c/4} &= \rho b \dot{y}^2 C_{l_\alpha} \alpha_{eff} + \pi \rho b^2 (-\ddot{z} + \dot{y} \dot{\alpha} - d \ddot{\alpha}) \\
 m_{c/4} &= 2 \rho b^2 \dot{y}^2 (C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{eff}) + \pi \rho b^3 \left[\frac{\ddot{z}}{2} - \dot{y} \dot{\alpha} - \left(\frac{b}{8} - \frac{d}{2} \right) \ddot{\alpha} \right] \\
 d_{c/4} &= -\rho b \dot{y}^2 (C_{d_0} + C_{d_\alpha} \alpha_{eff})
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde ρ representa la densidad del aire, $c = 2b$ es la cuerda aerodinámica, los factores C_{l_α} , C_{m_α} , C_{d_α} , C_{m_0} , y C_{d_0} son propiedades del perfil aerodinámica, d representa el desplazamiento del eje de referencia del ala desde la cuerda media, α_{eff} es el ángulo de ataque efectivo, \dot{y} , \dot{z} , \ddot{y} , and \ddot{z} son las velocidades y aceleraciones horizontales y verticales, respectivamente. Es evidente que en las ecuaciones (2.7) se presentan términos no lineales en cuanto a que algunas de las velocidades aparecen con un exponente cuadrático y, además, las ecuaciones se encuentran acopladas entre sí.

Por otro lado, es una práctica común en ingeniería recurrir al MEF para resolver problemas de mecánica estructural demasiado complejos para una solución analítica, ya sea por la naturaleza de las cargas actuantes, la geometría de las estructuras evaluadas o el acoplamiento de los fenómenos físicos que afectan al sistema cuya respuesta se desea evaluar. No obstante, uno de los principales inconvenientes de este método es la resolución de problemas de naturaleza no lineal. Los códigos comerciales actuales de elementos finitos suelen recurrir a la linealización local del problema y al uso de métodos iterativos, como el método de Newton-Raphson (Ansys, 2024), para lidiar con las no linealidades

presentes.

Por ejemplo, el ala Pazy investigada por Riso y Cesnik (2023) fue modelada mediante el método de elementos finitos, como se muestra en la Figura 2.5.

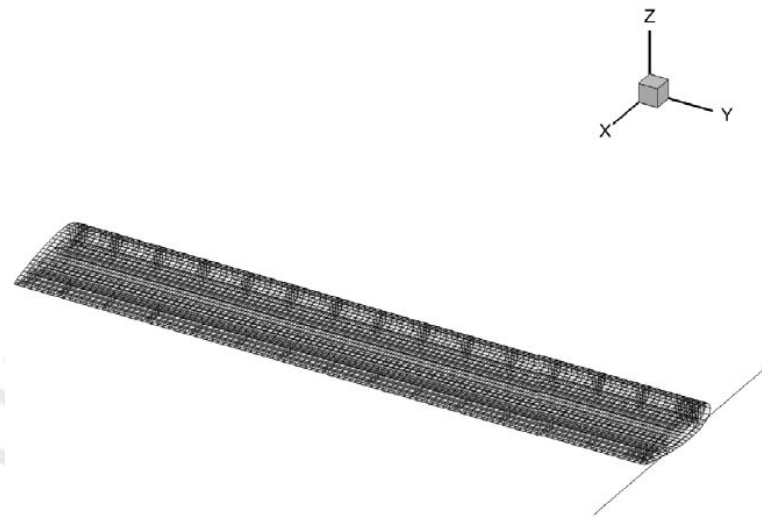


Figura 2.5: Modelo de elementos finitos de ala Pazy. Adaptado de Riso y Cesnik (2023).

El estudio realizado sobre esta ala demostró que las no linealidades cinemáticas han influenciado de manera sustancial la respuesta estática de la estructura, sus frecuencias naturales y los mecanismos de aleteo. El comportamiento no lineal del ala fue simulado mediante el solucionador SOL 400, un solucionador implícito que utiliza el método de Hilber-Hughes-Taylor para resolver las ecuaciones de movimiento en el tiempo (Hexagon, 2022).

Asimismo, Bathe (2008) cita algunos ejemplos que fueron resueltos mediante la integración directa de las ecuaciones de movimiento, así como con el método de Newton-Raphson para lidiar con las no linealidades, principalmente aquellas derivadas de los grandes desplazamientos, deformaciones y la no linealidad de las curvas esfuerzo-deformación de los materiales utilizados. También se consideró la interacción fluido-estructura propia de los ejemplos analizados.

El primer ejemplo utilizado por Bathe (2008) es el análisis de un absorbedor de impacto, en el que menciona que las partes de este equipo sufren grandes desplazamientos y, además, están expuestas a la cinética del fluido en su interior. Este último ha sido tratado mediante el método de elementos finitos, y su malla se puede observar en la Figura ??.

Otro ejemplo del uso de elementos finitos en una interacción fluido-estructura, mencionado por el mismo autor, es la simulación de la cámara de una bomba de combustible, como

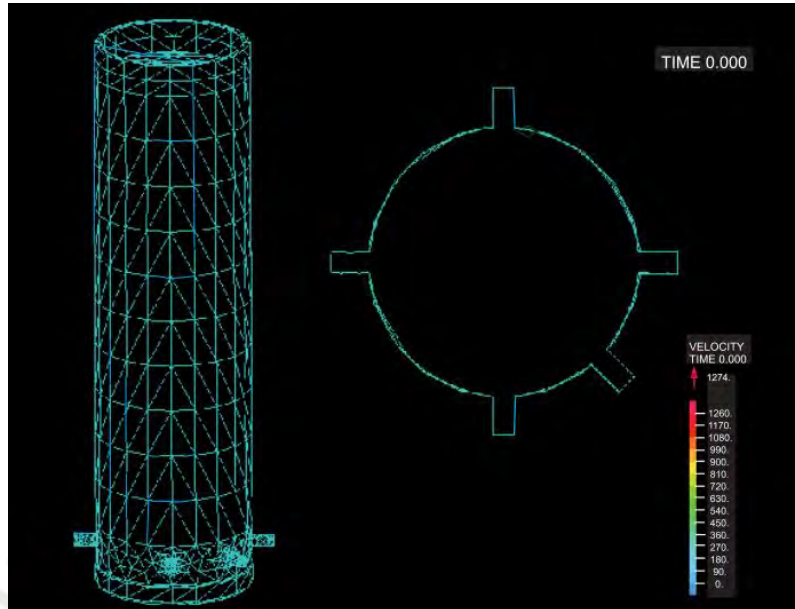


Figura 2.6: Fluido dentro de absorber de impacto (Bathe, 2008).

se observa en la Figura 2.7.

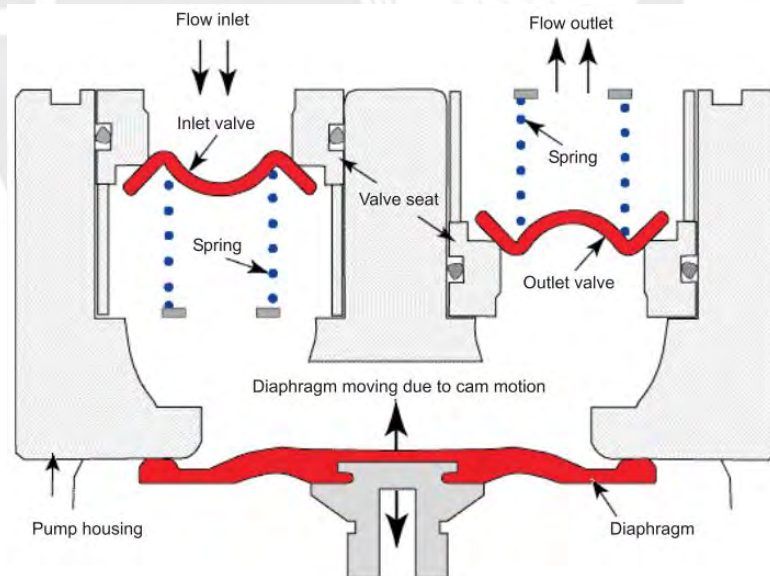


Figura 2.7: Schematic of a fuel pump chamber (Bathe, 2008).

En estos dos ejemplos, el método de elementos finitos no solo debe lidiar con las no linealidades derivadas de los grandes desplazamientos y deformaciones involucrados en el funcionamiento de estos mecanismos, sino también con aquellas que surgen debido a la

interacción del fluido con las partes sólidas.

De los ejemplos y casos mostrados anteriormente, se puede concluir que las no linealidades en sistemas mecánicos son prácticamente inherentes a los fenómenos físicos a los que están expuestos y, por lo tanto, es imprescindible contar con métodos computacionales que puedan capturar estas no linealidades. Ante esta necesidad, el método de elementos finitos emerge como la opción natural para simular estos fenómenos físicos. No obstante, a pesar de que los métodos numéricos tradicionales para resolver las matrices de gran tamaño que suelen aparecer en este método (aún más cuando se evalúa la independencia de malla del modelo) están diseñados para encontrar soluciones de manera eficaz y eficiente, los tiempos de simulación muchas veces resultan inaceptables en la práctica de la ingeniería, especialmente en la solución de sistemas dinámicos no lineales, donde los tiempos pueden ir desde días hasta semanas Ponsioen y cols. (2020).

Es por este motivo que emergen los modelos de orden reducido. Estas técnicas numéricas permiten reducir el tiempo computacional de la resolución de problemas dinámico - estructurales sin sacrificar de manera excesiva la precisión en las variables que se desean calcular. Diversos autores como Cardona (2000), Chung y Jr. (1983), R. Craig y Bampton (1968), Gruber y Rixen (2018), Guyan (1965), Géraudin y Rixen (2018), Haller y Ponsioen (2016), Hasselman (1976), Irons (1965), Kraker y Campen (1994), Ponsioen y cols. (2020), Rixen (2004), Rubin (1975), tak Leung (1978), entre otros, han desarrollado estas técnicas que serán exploradas a fondo en el siguiente capítulo, lo cual dará la base teórica necesaria para el desarrollo de un nuevo método para la reducción de orden de sistemas dinámicos no lineales.

Capítulo III

Estado del Arte

En este capítulo se abordarán los aspectos teóricos más relevantes para este estudio. Se comienza con la descripción del método de elementos finitos clásico para sistemas lineales dinámicos, para luego pasar a los métodos clásicos de resolución de la ecuación fundamental de la dinámica discreta. En seguida, se hace una descripción de los modelos de orden reducido clásicos y, en particular, de los métodos de subestructuramiento existentes. Por otro lado, se realiza una descripción de los modos normales no lineales en sistemas dinámicos y, por último, se presenta un algoritmo para extraer valores y vectores propios.

3.1. La ecuación fundamental del análisis dinámico discreto

Específicamente para el análisis estructural dinámico transitorio, el método de elementos finitos (MEF) discretiza un cuerpo en una serie de elementos y nodos.

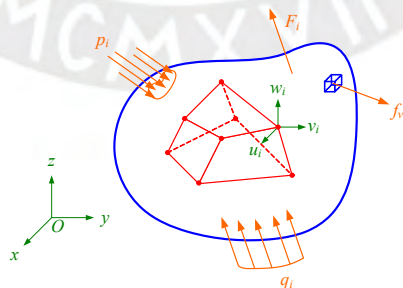


Figura 3.1: Finite Element in Deformable Solid

Un elemento m de un cuerpo deformable con sus respectivos nodos se muestra en la Figura 3.1. En él, F_i es la i -ésima fuerza puntual sobre el cuerpo deformable, q_i es la i -ésima fuerza distribuida por unidad de longitud, p_i es la i -ésima fuerza distribuida por

unidad de área, y f_{v_i} es la i -ésima fuerza volumétrica en el cuerpo. Asimismo, se observa un elemento finito, el cual tiene nodos en sus vértices (aunque también podría tener nodos en los puntos medios de sus aristas). Si se observa el nodo i de dicho elemento, se puede observar que el vector desplazamiento¹ de dicho nodo está dado por:

$$\vec{u}_i^T = [u \ v \ w] \quad (3.1)$$

Asimismo, todos los puntos que se encuentren geoméricamente en el interior y en la frontera del elemento también tendrán desplazamientos. Estos desplazamientos estarán dados por:

$$\vec{U}_m^T = [U_m \ V_m \ W_m] \quad (3.2)$$

El MEF propone que este campo de desplazamientos \vec{U}_m debe ser función de los desplazamientos de cada nodo de los elementos. Es decir, si se define el vector \hat{U}_m de tal manera que contenga los desplazamientos de los N nodos del elemento m :

$$\hat{U}_m^T = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_N \ v_N \ w_N] \quad (3.3)$$

Entonces el campo de desplazamientos \vec{U}_m estará dado por:

$$\vec{U}_m = H^{(m)}(x, y, z) \hat{U}_m \quad (3.4)$$

Donde $H^{(m)}(x, y, z)$ es una matriz que interpola adecuadamente los desplazamientos nodales para obtener los desplazamientos de todos los puntos dentro y en la frontera del elemento en función de las coordenadas (x, y, z) vistas desde un sistema de referencia global².

Por otro lado, la teoría de elasticidad demuestra que se pueden obtener las deformaciones unitarias a partir del campo de desplazamientos en un sólido deformable (Berrocal, 2005). En particular, para el elemento m :

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{(m)} &= \frac{\partial U_m}{\partial x} & \epsilon_y^{(m)} &= \frac{\partial V_m}{\partial y} & \epsilon_z^{(m)} &= \frac{\partial W_m}{\partial z} \\ \gamma_{xy}^{(m)} &= \frac{\partial U_m}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial x} & \gamma_{yz}^{(m)} &= \frac{\partial W_m}{\partial z} + \frac{\partial V_m}{\partial z} & \gamma_{xz}^{(m)} &= \frac{\partial U_m}{\partial z} + \frac{\partial W_m}{\partial x} \end{aligned}$$

Así, se define el vector de deformación $\vec{\epsilon}_m$ para el elemento m como:

¹En el caso de elementos sólidos tridimensionales, se puede hablar únicamente de desplazamientos. Sin embargo, en caso de elementos superficie o elementos línea, el vector desplazamiento también puede incluir rotaciones nodales.

²Esta matriz $H^{(m)}$ puede escribirse también en términos de coordenadas locales (r, s, t) de cada elemento m para facilitar la escritura de las siguientes matrices.

$$\vec{\epsilon}_m^T = [\epsilon_x^{(m)} \quad \epsilon_y^{(m)} \quad \epsilon_z^{(m)} \quad \gamma_{xy}^{(m)} \quad \gamma_{yz}^{(m)} \quad \gamma_{xz}^{(m)}] \quad (3.5)$$

Se puede deducir que, debido a que las componentes U_m , V_m , y W_m son directamente proporcionales a los desplazamientos nodales, entonces las derivadas parciales tomadas para calcular las deformaciones unitarias también serán proporcionales a dichos desplazamientos nodales, por lo que el vector de deformaciones $\epsilon^{(m)}$ se puede escribir como:

$$\vec{\epsilon}^{(m)} = B^{(m)}(x, y, z) \hat{U} \quad (3.6)$$

Donde la matriz $B^{(m)}(x, y, z)$ convierte los desplazamientos en deformaciones. Las filas y columnas de esta matriz se obtienen derivando y combinando apropiadamente las componentes de la matriz $H^{(m)}(x, y, z)$ (Bathe, 2016).

Asimismo, se conoce que, por la ley generalizada de Hooke, los esfuerzos en cada punto del elemento m se pueden calcular según las ecuaciones de Lamé (Berrocal, 2005):

$$\sigma_x^{(m)} = \lambda e^{(m)} + 2G\epsilon_x^{(m)}$$

$$\sigma_y^{(m)} = \lambda e^{(m)} + 2G\epsilon_y^{(m)}$$

$$\sigma_z^{(m)} = \lambda e^{(m)} + 2G\epsilon_z^{(m)}$$

$$\tau_{xy}^{(m)} = G\gamma_{xy}^{(m)}$$

$$\tau_{yz}^{(m)} = G\gamma_{yz}^{(m)}$$

$$\tau_{xz}^{(m)} = G\gamma_{xz}^{(m)}$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad e = \epsilon_x^{(m)} + \epsilon_y^{(m)} + \epsilon_z^{(m)}$$

Donde E es el módulo de elasticidad del material y ν es la razón de Poisson. Se observa que los esfuerzos resultan de la combinación lineal de las deformaciones unitarias, por lo que se define el vector de esfuerzos como:

$$\vec{\sigma}_m^T = [\sigma_x^{(m)} \quad \sigma_y^{(m)} \quad \sigma_z^{(m)} \quad \tau_{xy}^{(m)} \quad \tau_{yz}^{(m)} \quad \tau_{xz}^{(m)}] \quad (3.7)$$

Este también se puede escribir en términos del vector $\vec{\epsilon}^{(m)}$:

$$\vec{\sigma}_m = C^{(m)} \vec{\epsilon}_m \quad (3.8)$$

Donde $C^{(m)}$ es una matriz que contiene los coeficientes de las ecuaciones de Lamé combinados adecuadamente para obtener el vector de esfuerzos.

Para obtener una ecuación que pueda relacionar efectivamente los esfuerzos y deformaciones en el sólido con los desplazamientos de todos los puntos que lo componen, se puede utilizar el principio de trabajo virtual³. Según este principio, si el sólido está sometido a deformaciones virtuales pequeñas causadas por desplazamientos virtuales, el trabajo total interno es igual al trabajo total externo:

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{U}}^T \vec{f}_V dV + \int_{S_i} \bar{\boldsymbol{U}}_{S_i}^T \vec{p}_i dS + \int_{\ell_i} \bar{\boldsymbol{U}}_i^T \vec{q}_i d\ell + \sum_i \bar{\boldsymbol{U}}^T \vec{F}_i \quad (3.9)$$

Donde $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\bar{\boldsymbol{U}}$ son los vectores de deformaciones virtuales y desplazamientos virtuales en el cuerpo deformable, respectivamente. Cabe resaltar que los desplazamientos virtuales no son los desplazamientos causados por la aplicación de las cargas, sino que más bien son impuestos luego de la aplicación de las mismas. Asimismo, estos desplazamientos virtuales son cinemáticamente compatibles con las condiciones de apoyo o con desplazamientos impuestos sobre el cuerpo deformable, y son de una magnitud tal que causan deformaciones unitarias normales pequeñas en cada punto del cuerpo.

En presencia de desplazamientos virtuales sobre el elemento m , se cumplen las mismas relaciones entre sus desplazamientos nodales (esta vez virtuales) y los desplazamientos en el interior y en la frontera del elemento.

$$\bar{\boldsymbol{U}}_m^T = \boldsymbol{H}^{(m)}(x, y, z) \bar{\boldsymbol{U}} \quad (3.10)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} = \boldsymbol{B}^{(m)}(x, y, z) \bar{\boldsymbol{U}} \quad (3.11)$$

Si se reemplazan estos valores en la ecuación (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{U}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{B}^{(m)T} \boldsymbol{C}^{(m)} \boldsymbol{B}^{(m)} dV \right] \hat{\boldsymbol{U}} = & \bar{\boldsymbol{U}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \boldsymbol{H}^{(m)T} \vec{f}_V dV + \right. \\ & \sum_m \int_{S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \boldsymbol{H}^{(m)T} \vec{p}_i dS + \\ & \sum_m \int_{\ell_1^{(m)}, \ell_2^{(m)}, \dots, \ell_q^{(m)}} \boldsymbol{H}^{(m)T} \vec{q}_i d\ell + \\ & \left. \sum_i \vec{F}_i \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si la suma de todos los grados de libertad de los nodos es n , entonces el vector de desplazamientos virtuales $\bar{\boldsymbol{U}}$ es:

$$\bar{\boldsymbol{U}} = [\delta u_1 \ \delta v_1 \ \delta w_1 \ \delta u_2 \ \delta v_2 \ \delta w_2 \ \dots \ \delta u_n \ \delta v_n \ \delta w_n] \quad (3.13)$$

³También llamado principio de los desplazamientos virtuales.

Como los desplazamientos son arbitrariamente impuestos, entonces se pueden aplicar uno por uno, dando convirtiendo a la ecuación (3.12) en un sistema de ecuaciones $n \times n$ de la forma:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F} \quad (3.14)$$

Siendo:

$$\mathbf{K} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)} \vec{f}_V dV + \sum_m \int_{S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} H^{(m)} \vec{p}_i dS + \\ & \sum_m \int_{\ell_1^{(m)}, \ell_2^{(m)}, \dots, \ell_q^{(m)}} H^{(m)} \vec{q}_i d\ell + \sum_i \vec{F}_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

A la matriz \mathbf{K} se le llama *matriz de rigidez* y al vector \mathbf{F} *vector de fuerzas*.

Nótese que el vector de fuerzas está compuesto por todo tipo de fuerzas: puntuales, distribuidas en una línea, distribuidas sobre superficies y fuerzas volumétricas. Estas últimas son de particular interés, ya que en ellas se puede incluir el efecto de fuerzas inerciales: esto es, fuerzas que, según el Principio de d'Alembert⁴, pueden escribirse como:

$$\mathbf{F}_I = - \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \rho^{(m)} H^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} dV^{(m)} \quad (3.17)$$

Donde $\rho^{(m)}$ denota la densidad del material en el elemento (m) y $\ddot{\mathbf{U}}$ es el vector que contiene las componentes de la aceleración de todos los nodos de los elementos. Si se examina un poco más de cerca la ecuación (3.17), se puede notar que el vector $\ddot{\mathbf{U}}$ es independiente del diferencial de volumen y de la sumatoria, por lo que se puede definir a la *matriz de masa* como:

$$\mathbf{M} = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \rho^{(m)} H^{(m)} dV^{(m)} \quad (3.18)$$

Y con ello, el vector de fuerzas inerciales queda reducido a:

$$\mathbf{F}_I = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} \quad (3.19)$$

⁴El Principio de d'Alembert (Jean Lerond d'Alembert) establece que, debido a que durante el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza F esta tendrá una aceleración a según $F = ma$, donde m es la masa de la partícula, al producto ma se le puede llamar *fuerza inercial*. Así, si la fuerza inercial $F_I = -ma$, entonces la ecuación de movimiento puede ser escrita en términos de equilibrio estático: $F + F_I = 0$ (Gross y cols., 2008).

De manera similar, si se considera dentro del vector de fuerzas \mathbf{F} a fuerzas viscosas de amortiguamiento \mathbf{F}_a proporcionales a la velocidad, estas se pueden escribir de la forma:

$$\mathbf{F}_a = - \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \eta^{(m)} H^{(m)} \dot{\mathbf{U}} dV^{(m)} \quad (3.20)$$

Donde $\eta^{(m)}$ es un parámetro de amortiguamiento y $\dot{\mathbf{U}}$ es el vector que contiene las componentes de la velocidad de todos los nodos de los elementos. Nuevamente, considerando que el vector de velocidad es independiente de la integral y de la sumatoria, se puede definir la *matriz de amortiguamiento* como:

$$\mathbf{C} = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \eta^{(m)} H^{(m)} dV^{(m)} \quad (3.21)$$

Con lo que el vector de fuerzas de amortiguamiento se simplifica:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} \quad (3.22)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, la ecuación (3.14) se puede escribir como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.23)$$

Se observa de esta ecuación que las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} se pueden construir únicamente a partir de las propiedades del material del que está hecho el cuerpo y de las funciones de interpolación usadas para hallar los desplazamientos en cada uno de los elementos con los cuales ha sido discretizado el cuerpo. No obstante, la matriz \mathbf{C} es bastante difícil de calcular, pues el parámetro $\eta^{(m)}$ depende de la cantidad de energía que es disipada en cada elemento durante el movimiento, lo que hace que este parámetro dependa en gran parte de resultados experimentales (Bathe, 2016). A la ecuación (3.23) se le llamará de ahora en adelante la *ecuación fundamental*.

3.2. Métodos clásicos de resolución de la ecuación fundamental

La ecuación fundamental (3.23) requiere ser resuelta no solo en el dominio físico del sólido o sólidos en análisis, sino también en el dominio del tiempo. Este tipo de análisis se les denomina *transitorio* y se han desarrollado diversas técnicas para poder resolverla.

Para resolver la ecuación, se asume que el fenómeno que se intenta simular ocurre desde un tiempo $t = t_0$ hasta un tiempo $t = t_n$. De este punto en adelante, existen diferentes métodos para resolver la ecuación fundamental.

3.2.1. Métodos de Integración Directa

Se observa que para resolver la ecuación fundamental (3.23) se requiere integrarla en el tiempo. Aquellos métodos que no ejecutan ningún tipo de transformación sobre la ecuación fundamental antes de integrarla se les conoce como *métodos de integración directa*. Estos métodos están basados en dos ideas fundamentales (Bathe, 2016): la primera idea es que, en lugar de exigir que la ecuación (3.23) se cumpla de manera continua para todo tiempo t entre t_0 y t_n , esta debe cumplirse solo de manera discreta en intervalos Δt_n . De esta manera, la ecuación dinámica se asemeja a una ecuación de equilibrio estático y puede ser resuelta utilizando métodos clásicos de resolución de este tipo de sistemas. No obstante, aún seguirían apareciendo los términos inerciales que son proporcionales a las aceleraciones y las velocidades, por lo que aparece la segunda idea de esta clase de métodos, la cual consiste en asumir formas establecidas para la variación de velocidades y aceleraciones en función del paso de tiempo Δt_n establecido. La forma en como estas variables están relacionadas entre sí determinará la estabilidad, precisión y el costo computacional de la solución numérica. A continuación, se presentan algunos de los principales métodos de integración directa.

El método de Newmark

Desarrollado y publicado en 1959 por N.M. Newmark⁵ (Newmark, 1959). El método consiste en discretizar el tiempo en $n - 1$ intervalos Δt_i , de tal manera que, si el problema estructural se desarrolla entre los tiempos t_0 y t_n , entonces se cumple que:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.24)$$

Es importante notar que los $n - 1$ subintervalos no son necesariamente uniformes. Si se conocen los valores iniciales de U_0 y \dot{U}_0 , si se usa la ecuación (3.23), se puede calcular el valor de \ddot{U}_0 como:

$$\mathbf{M}\ddot{U}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{U}_0 - \mathbf{K}U_0 \quad (3.25)$$

Una vez obtenido el valor de \ddot{U}_0 , Newmark propone el siguiente esquema de solución:

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + [(1 - \delta)\ddot{U}_i + \delta \ddot{U}_{i+1}]\Delta t \quad (3.26)$$

$$U_{i+1} = U_i + \dot{U}_i\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}_i + \alpha \ddot{U}_{i+1} \right] \Delta t^2 \quad (3.27)$$

Donde los parámetros δ y α son los llamados *parámetros de Newmark* y pueden ser ajustados para ajustar la precisión y estabilidad de la solución (Bathe, 2016).

⁵Nathan Mortimore Newmark, profesor del departamento de ingeniería civil de la Universidad de Illinois, Estados Unidos

Con las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27), el sistema de ecuaciones puede ser resuelto para cada tiempo t_{i+1} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{i+1} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{i+1} \quad (3.28)$$

Se observa que, si el sistema tiene N grados de libertad y el tiempo se discretiza en $n - 1$ subintervalos, entonces el número de ecuaciones que se debe resolver para tener la respuesta dinámica total del sistema es $N \times n$. Asimismo, en cada paso de la solución, múltiples iteraciones pueden ser necesarias para resolver las ecuaciones anteriormente mostradas, en particular si las matrices \mathbf{K} y \mathbf{C} son dependientes de los desplazamientos nodales (es decir, si el problema es no lineal).

El método HHT

El algoritmo de Hilber, Hughes y Taylor (HHT) desarrollado y publicado en 1977 (Hilber, Hughes, y Taylor, 1977) es utilizado para resolver la forma no amortiguada de la ecuación fundamental. Esto es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.29)$$

Para resolver la ecuación, los autores proponen las siguientes ecuaciones complementarias que constituyen la integración de las velocidades y aceleraciones, considerando que $\mathbf{U}_i = d_i$, $\dot{\mathbf{U}}_i = v_i$ y $\ddot{\mathbf{U}}_i = a_i$, y que el paso de tiempo Δt_i es constante e igual a $\Delta t_i = \frac{t_n - t_0}{n}$:

$$\mathbf{M}a_{i+1} + (1 + \alpha)\mathbf{K}d_{i+1} - \alpha\mathbf{K}d_i = \mathbf{F}_{i+1} \quad (3.30)$$

$$d_{i+1} = d_i + \Delta t v_i + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) a_i + \beta a_{i+1} \right] \quad (3.31)$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta t [(1 - \gamma)a_i + \gamma a_{i+1}] \quad (3.32)$$

Donde α , β y γ son constantes cuyos valores pueden ser ajustados según las necesidades de precisión y tiempo computacional que se requiera. Las condiciones iniciales para resolver las ecuaciones (3.30), (3.31) y (3.32) son $d_0 = U_0$, $v_0 = \dot{U}_0$ y $a_0 = \ddot{U}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}d_0)$.

La ventaja que presenta este método es que es incondicionalmente estable, además de que demuestra mejoras en la velocidad de la solución comparado con el método de Newmark. Sin embargo, nuevamente se observa que, si el sistema tiene N grados de libertad y el tiempo se discretiza en $n - 1$ subintervalos, el número de ecuaciones a resolver es $N \times n$. Este método también puede requerir múltiples iteraciones en caso el problema sea no lineal.

3.2.2. El Método Explícito

A diferencia de los métodos implícitos vistos anteriormente, el método explícito de resolución de la ecuación fundamental (3.23) propone no buscar satisfacer condiciones de equilibrio mientras se resuelve el problema, sino que toma los datos del paso de tiempo i y únicamente en base a ellos calcula los datos del paso $i + 1$. La estrategia de solución es la siguiente (Ansys, 2024):

- Los datos iniciales U_0 , \dot{U}_0 y \ddot{U}_0 producen desplazamientos nodales.
- Estos desplazamientos ocasionan deformación en los elementos que discretizan el o los cuerpos en análisis.
- Las deformaciones producen un cambio de volumen en cada elemento.
- La deformación en cada elemento es usada para calcular la deformación unitaria normal en coordenadas locales de cada elemento, así como su deformación angular.
- Mediante las leyes constitutivas, se transforman las deformaciones unitarias normales y las deformaciones angulares en esfuerzos normales y cortantes.
- Los esfuerzos son transformados a fuerzas nodales.
- A las fuerzas nodales se le suman las fuerzas externas, ya sean causadas por cargas directas, contacto con otros cuerpos y restricciones.
- Las fuerzas nodales totales se les divide entre la masa, de tal manera que se calculan las aceleraciones nodales.
- Las aceleraciones son integradas explícitamente en el tiempo para calcular las velocidades nodales.
- Las velocidades son integradas explícitamente en el tiempo para calcular los desplazamientos nodales.
- El proceso se repite hasta alcanzar el tiempo final de simulación.

Como se observa, en este procedimiento no es necesaria ninguna iteración para pasar al siguiente paso de tiempo. Esto es una ventaja a nivel computacional, pues reduce el número de ecuaciones que debe ser efectivamente resuelto. No obstante, presenta una desventaja en cuando a la estabilidad de la solución. Se puede demostrar que, para que la solución sea completamente estable, el paso de tiempo Δt_i debe cumplir con:

$$\Delta t_i \leq f \left(\frac{h}{c} \right) \quad (3.33)$$

Donde f es un factor de estabilidad que se puede ajustar para mejorar la estabilidad de la solución, h es la dimensión característica de un elemento (usualmente, la dimensión característica más pequeña de todos los elementos en los que se ha discretizado el sólido) y c es la velocidad de propagación de una onda mecánica en el material del que está hecho el sólido. Debido a que este paso de tiempo suele ser bastante pequeño, las velocidades y aceleraciones nodales se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\dot{x}_{i+1/2} = \dot{x}_{i-1/2} + \ddot{x}\Delta t_i \quad (3.34)$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_{i+1/2}\Delta t_{i+1/2} \quad (3.35)$$

Y las aceleraciones, en todo momento, se calculan como:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i}{m} + b_i \quad (3.36)$$

Donde F_i son las fuerzas nodales, m_i es la masa asociada a cada nodo y b_i es la componente de aceleración del cuerpo en dicho nodo.

3.3. Modelos de Orden Reducido

Sea la ecuación fundamental (3.23) cuyos nodos tienen n grados de libertad. Para resolverla, ya sea a través de métodos explícitos o implícitos, es necesario un igual número de ecuaciones. Es decir, las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son de orden $n \times n$, y el vector de fuerzas F es de orden $n \times 1$. Los métodos clásicos vistos en la anterior sección, si bien son efectivos en cuanto a la resolución de la ecuación fundamental, la experiencia demuestra que el costo computacional de resolverla es muy alto, de tal manera que muchas veces resulta poco práctico intentar simular fenómenos transitorios en períodos grandes de tiempo con altamente no lineales. De aquí nace la necesidad de reducir el número de grados de libertad del modelo lo máximo posible, para que así el tiempo computacional requerido para resolver el problema dinámico logre ser adecuado según las necesidades del usuario. La idea del modelo de orden reducido (R. R. Craig y Kurdila, 2006) es aproximar el campo de desplazamientos U mediante un vector \tilde{U} , el cual resulta de utilizar un número de grados de libertad reducidos U_r y un espacio vectorial descrito por las columnas de una matriz V , tal que:

$$U \approx \tilde{U} = VU_r \quad (3.37)$$

Como únicamente se están tomando algunos grados de libertad para aproximar los desplazamientos nodales, la igualdad descrita por la ecuación fundamental (3.23) ya no se cumple como tal, sino que más bien existe un error e descrito como:

$$e = \mathbf{M}\dot{V}\ddot{U}_r + \mathbf{C}\dot{V}\dot{U}_r + \mathbf{K}VU_r - \mathbf{F} \quad (3.38)$$

Este error no está contenido en el rango del espacio V , por lo que el espacio vectorial debe ser ortogonal al error:

$$V^T (\mathbf{M}\dot{V}\ddot{U}_r + \mathbf{C}\dot{V}\dot{U}_r + \mathbf{K}VU_r - \mathbf{F}) = 0 \quad (3.39)$$

Donde V^T es la transpuesta de la matriz con la que se representa el espacio vectorial V . Operando, se obtiene:

$$V^T \mathbf{M}\dot{V}\ddot{U}_r + V^T \mathbf{C}\dot{V}\dot{U}_r + V^T \mathbf{K}VU_r - V^T \mathbf{F} = 0 \quad (3.40)$$

Si se definen como la matriz de masa reducida $\mathbf{M}_r = V^T \mathbf{M}\dot{V}$, la matriz de amortiguamiento reducida $\mathbf{C}_r = V^T \mathbf{C}\dot{V}$, la matriz de rigidez reducida $\mathbf{K}_r = V^T \mathbf{K}V$ y el vector de fuerza reducido $\mathbf{F}_r = V^T \mathbf{F}$ la ecuación fundamental quedará escrita en su forma reducida:

$$\mathbf{M}_r \ddot{U}_r + \mathbf{C}_r \dot{U}_r + \mathbf{K}_r U_r = \mathbf{F}_r \quad (3.41)$$

A esta ecuación se le denominará, de ahora en adelante, la *ecuación fundamental reducida*. Varios métodos y enfoques han sido propuestos para seleccionar los grados de libertad reducidos U_r y, por consiguiente, desarrollar el espacio vectorial V .

3.3.1. Métodos de descomposición modal

Estos métodos están basados en las frecuencias naturales y modos de vibración de un cuerpo o un sistema de cuerpos. Dependiendo si se considera el amortiguamiento o no, se clasifican en análisis real y análisis complejo.

Análisis modal real

El teorema de expansión (Geradin y Rixen, 2015) expresa que el vector de desplazamientos de un cuerpo deformable puede ser obtenido a partir de una interpolación de la matriz modal y de las coordenadas modales. Es decir:

$$U = \sum_{j=1}^{n_r} \phi_j \eta_j \quad (3.42)$$

Donde n_r es el número de modos de vibración que se ha extraído del cuerpo o del sistema de cuerpos deformables. Si se expande esta suma, se tendrá:

$$U = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \dots \phi_{n_r}] \eta \quad (3.43)$$

$$U = \phi \eta \quad (3.44)$$

En este caso, el espacio vectorial V sería la matriz modal ϕ y los grados de libertad reducido U_r sería el vector de coordenadas modales η . Adicionalmente, la matriz modal tiene la propiedad de ser ortogonal tanto a matriz de masa como a la matriz de rigidez. Esto es:

$$\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i^T = m_j, \text{ si } j = i, \text{ y } \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i^T = 0, \text{ si } j \neq i \quad (3.45)$$

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i^T = m_j, \text{ si } j = i, \text{ y } \phi_j^T \mathbf{K} \phi_i^T = 0, \text{ si } j \neq i \quad (3.46)$$

Asimismo, si se considera un amortiguamiento de Rayleigh [5], es decir, si la matriz de amortiguamiento se puede escribir como:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.47)$$

Donde α y β son escalares reales, entonces la matriz modal también será ortogonal a la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} . Así, la ventaja de este método es que transforma a la ecuación fundamental reducida (3.41) en n_r ecuaciones desacopladas de la forma:

$$m_j \ddot{\eta}_j + c_j \dot{\eta}_j + k_j \eta_j = \phi_j^T f_j \quad (3.48)$$

Donde m_j , c_j y k_j son los valores de la posición j de la diagonal de las matrices reducidas de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Asimismo, f_j es la componente j del vector de fuerzas.

Análisis modal complejo

Si la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} no es proporcional, es decir, no cumple con la ecuación (3.47), entonces es necesario un análisis en el campo complejo para reducir el orden del modelo computacional. Recurriendo a una representación espacio - estado de la ecuación (3.23), se definen la siguientes matrices (Rodriguez-Sanchez, Buchschmid, y Müller, 2016):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Los valores propios y vectores propios de la matriz \mathbf{A} pueden calcularse mediante la ecuación:

$$\lambda_k \hat{\phi}_k = \mathbf{A} \hat{\phi}_k \quad (3.50)$$

Debido a que la matriz \mathbf{A} es no simétrica, los valores y vectores propios de ella pueden ser reales o complejos. Esto ocasiona que, si bien los valores propios λ_k de la matriz \mathbf{A} son iguales a los de la matriz \mathbf{A}^T , los vectores propios de \mathbf{A} no son ortogonales a ella. Sin embargo, los vectores propios de ambas matrices sí cumplen con una relación de biortogonalidad (Meirovitch, 2001). Esta propiedad permite tomar n_r vecto-

res propios $\hat{\phi} = [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{n_r}]$ de \mathbf{A} como el espacio vectorial V , a n_r vectores propios $\hat{\xi} = [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_{n_r}]^T$ de \mathbf{A}^T como V^T y a las coordenadas modales:

$$\hat{\xi}_k(i\omega) = \frac{\hat{\psi}^T \mathbf{Bf}(i\omega)}{i\omega - \lambda_k} \quad (3.51)$$

Como los n_r grados de libertad reducidos U_r , donde ω es la frecuencia definida según la transformada de Fourier aplicada a la ecuación fundamental (3.23).

3.3.2. Métodos de Condensación

La idea principal detrás de los métodos de condensación es expresar el número total de grados de libertad U como una combinación de dos tipos de desplazamiento: uno activo U_a y otro dependiente U_d . Estos son llamados así porque estos métodos asumen una relación lineal entre ambos tipos de grados de libertad. Esto es:

$$U_d = \mathbf{T}U_a \quad (3.52)$$

Donde \mathbf{T} es una matriz de transformación. Así, los grados de libertad totales del modelo discreto pueden ser expresados como:

$$U = \begin{bmatrix} U_d \\ U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ I \end{bmatrix} U_a \quad (3.53)$$

Queda claro que, si se compara la ecuación (3.53) con la ecuación (3.37), el espacio vectorial V es:

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ I \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Y los grados de libertad U_a serán los n_r grados de libertad reducidos. Existen diversos métodos en cuanto a cómo determinar dichos grados de libertad y la matriz de transformación \mathbf{T} .

Método de Guyan - Irons

También llamado método de condensación estática ((Guyan, 1965), (Irons, 1965)), basa la reducción del modelo en solo considerar la componente estática de la ecuación fundamental (3.23). Al ignorar los términos inerciales, la ecuación queda reducida a:

$$\mathbf{K}U = \mathbf{F} \quad (3.55)$$

Si se considera que U contiene grados de libertad activos y también grados de libertad dependientes, entonces la ecuación puede quedar escrita de manera simbólica de la siguiente manera (Guyan, 1965):

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{da} \\ K_{ad} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_a \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Para lograr la dependencia lineal entre U_d y U_a , se puede tomar la primera fila del sistema de ecuaciones de la ecuación (3.56) y despejar U_d :

$$U_d = -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} U_a + \mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{f}_d \quad (3.57)$$

Se propone en este método que los grados de libertad dependientes no tengan fuerzas nodales aplicadas directamente a ellos, por lo que $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$. Si este es el caso, entonces la matriz de transformación \mathbf{T} queda definida por:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \quad (3.58)$$

Y por lo tanto, el espacio vectorial \mathbf{V} y los grados de libertad reducidos U_r son:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{da} \\ I \end{bmatrix} U_r = U_a \quad (3.59)$$

Si bien ahora las matrices \mathbf{M}_r y \mathbf{C}_r pueden ser calculadas, en la práctica solo se utiliza:

$$\mathbf{M}_r = M_{aa} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{C}_r = C_{aa} \quad (3.61)$$

Esto con el objetivo de ahorrar tiempo computacional (Guyan, 1965). La ventaja de este método es que ofrece una reducción de orden bastante eficiente en casos en los que las fuerzas inerciales son relativamente pequeñas en comparación con las deformaciones, es decir, en aquellos problemas donde las velocidades de deformación son bajas.

Método de Reducción Dinámica

Parte de los efectos inerciales también puede ser incorporado en la reducción de orden del modelo. Para ello, se debe hacer una transformada de Fourier a la ecuación fundamental (3.23) para escribirla en el dominio de la frecuencia y así eliminar las derivadas, obteniendo:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) U(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.62)$$

Despreciando el término de amortiguamiento (tak Leung, 1978), la ecuación (3.62) queda escrita como:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) U(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.63)$$

El término entre paréntesis se puede trabajar como una impedancia $\mathbf{Z}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$. Si se considera nuevamente un juego de grados de libertad activo y otro dependiente, la ecuación (3.63) se escribe como:

$$\begin{bmatrix} Z_{dd} & Z_{da} \\ Z_{ad} & Z_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d(\omega) \\ U_a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d(\omega) \\ \mathbf{f}_a(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Siguiendo un procedimiento muy similar al método de condensación estática, se puede obtener el espacio vectorial \mathbf{V} y los grados de libertad reducidos U_r :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_{dd}^{-1}\mathbf{Z}_{da} \\ I \end{bmatrix} \quad U_r = U_a(\omega) \quad (3.65)$$

Con ello, se pueden encontrar las matrices \mathbf{M}_r y \mathbf{C}_r . Con este método se puede encontrar una respuesta más adecuada a sistemas poco amortiguados donde las aceleraciones juegan un papel importante en la respuesta dinámica.

3.3.3. Métodos de Subestructuramiento

Durante la década de 1960, los primeros métodos de subestructuramiento fueron desarrollados ante la creciente necesidad de resolver problemas utilizando el método de elementos finitos con mallas compuestas de decenas de nodos. Debido a la limitada capacidad computacional de la época, no era posible resolver todo el modelo computacional en un tiempo razonable, por lo que se comenzó a buscar la manera de agregar una capa adicional de descomposición al problema ya discretizado, naciendo así las *subestructuras* como subconjuntos de nodos y elementos. El objetivo de la creación de subestructuras dentro del modelo de elementos finitos es estudiar y representar la dinámica de cada una de ellas de manera aproximada, para luego utilizar estas formulaciones en la resolución de problema total (Allen y cols., 2020). Las técnicas de subestructuramiento se siguieron desarrollando entre las décadas de 1980 y 1990, impulsadas por el desarrollo de computadoras con múltiples procesadores, para que cada CPU pueda recibir la suficiente información para resolver el problema dinámico en un subdominio de manera independiente a los demás y luego usar dicha información para encontrar la solución global mediante iteraciones (Toselli y Widlund, 2005). Por último, desde comienzos del último siglo se han seguido desarrollando técnicas de subestructuramiento que incluyen mediciones experimentales, gracias al avance en la tecnología de sensores que hoy en día permiten la medición de parámetros dinámicos en tiempo real.

El método de Craig - Bampton

Como se mencionó anteriormente, el método de Craig - Bampton (también llamado el método de Hurty/Craig-Bampton) (R. Craig y Bampton, 1968) se desarrolla de la siguiente manera: dada la ecuación dinámica para una subestructura:

$$\mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)}\dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} \quad (3.66)$$

Donde el superíndice (s) indica que todas las matrices y vectores están referidos a una subestructura en particular. Las fuerzas $\mathbf{f}^{(s)}$ se pueden dividir en las fuerzas externas sobre la subestructura $\mathbf{f}_i^{(s)}$ y las fuerzas de interacción en la frontera (con otras subestructuras o con el modelo general) $\mathbf{f}_f^{(s)}$, las cuales se pueden observar en la Figura 3.2.

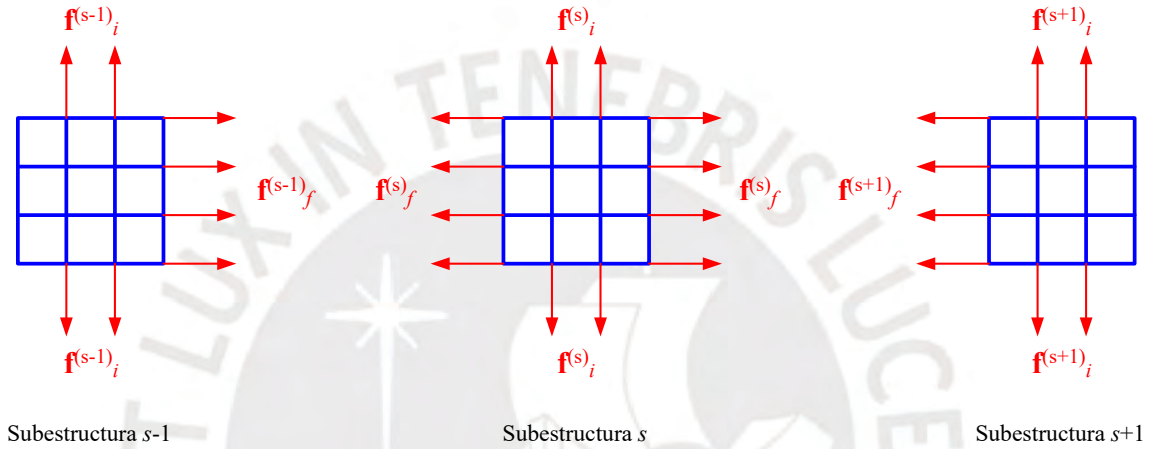


Figura 3.2: Fuerzas en una subestructura

Asimismo, los nodos de la subestructura también pueden presentar grados de libertad en el interior de la misma $u_i^{(s)}$ y grados de libertad en la frontera $u_f^{(s)}$. Así, la ecuación (3.66) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{if} \\ \mathbf{C}_{fi} & \mathbf{C}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_f \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Asumiendo de que no existen fuerzas en el interior de la subestructura (esto es, la subestructura no recibe fuerzas externas de ningún tipo), el término $\mathbf{f}_i = 0$. Si se desprecia el amortiguamiento, la ecuación anterior queda reducida a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{(s)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_f^{(s)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_f^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_f^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

De aquí, el método de síntesis de modos de componentes (R. R. Craig y Kurdila, 2006) asume que la parte dinámica de la ecuación (3.68) no tiene mayor aporte en la respuesta de la subestructura, por lo que toda la ecuación queda reducida a su componente estática:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{(s)} \\ \mathbf{u}_f^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_f^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Tomando la primera fila de la ecuación (3.69) y resolviendo para $u_i^{(s)}$:

$$\mathbf{K}_{ii}u_i^{(s)} + \mathbf{K}_{if}u_f^{(s)} = 0$$

$$u_i^{(s)} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if}u_f^{(s)} \quad (3.70)$$

De esta manera, los grados de libertad de toda la subestructura quedan expresado únicamente en función de los grados de libertad en la frontera $u_f^{(s)}$:

$$u^{(s)} = \begin{bmatrix} u_i^{(s)} \\ u_f^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} u_f^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}^{(s)} u_f^{(s)} \quad (3.71)$$

Donde a la matriz $\boldsymbol{\Psi}^{(s)}$ se le conoce como la matriz de modos componentes. Si bien este método ayuda a eliminar todos los grados de libertad interiores $u_i^{(s)}$, no captura los efectos dinámicos dentro de la subestructura. Para ello, se obtienen los modos de vibración del interior de la subestructura considerando fijos los grados de libertad de la frontera. Así:

$$\left(\mathbf{K}_{ii}^{(s)} - \omega_i^2 \mathbf{M}_{ii}^{(s)}\right) \phi_{i,r}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (3.72)$$

Los modos de vibración $\phi_{i,r}^{(s)}$ se eligen normalizados con la masa, es decir:

$$\phi_{i,r}^{(s)T} \mathbf{M}_{ii} \phi_{i,r}^{(s)} = 1 \quad (3.73)$$

Asimismo, se pueden definir las coordenadas modales \mathbf{q}_i de tal manera que cumplan con la siguiente relación con los grados de libertad interiores $u_i^{(s)}$:

$$u_i^{(s)} = \phi_{i,r} \mathbf{q}_{i,r}^{(s)} \quad (3.74)$$

Se define la matriz $\boldsymbol{\Phi}^{(s)}$ como:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(s)} = \begin{bmatrix} \phi_{i,1}^{(s)} \cdots \phi_{i,m}^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Así, se define la matriz de transformación según Craig-Bampton como:

$$\mathbf{T}^{(s)} = [\boldsymbol{\Phi}^{(s)} \boldsymbol{\Psi}^{(s)}] \quad (3.76)$$

De tal manera que:

$$\begin{bmatrix} u_i^{(s)} \\ u_f^{(s)} \end{bmatrix} \approx T^{(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^{(s)} \\ u_f^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Con lo que los grados de libertad originales $u_i^{(s)}$ de la subestructura quedan reducidos,

mientras que los grados de libertad de la frontera $u_f^{(s)}$ se mantienen invariantes cuando se multiplican por la matriz de transformación por la izquierda.

El método de Craig-Bampton dual

El método anterior también es conocido como el *método primal*, pues usa los desplazamientos en las interfaces para compatibilizar el ensamble total. No obstante, el enfoque dual (Rixen, 2004) plantea que, en lugar de utilizar los desplazamientos, sean las fuerzas en las interfaces las que deben ser compatibilizadas con el resto de subestructuras y con el modelo completo.

Si se considera la ecuación (3.66), pero esta vez considerando la partición de $\mathbf{f}^{(s)}$ en $\mathbf{f}_i^{(s)}$ y $\mathbf{f}_f^{(s)}$, de tal manera que se tenga:

$$\mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)}\dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)} \quad (3.78)$$

Las fuerzas $\mathbf{f}_f^{(s)}$ son las fuerzas en la frontera de la subestructura, las cuales son las fuerzas de interconexión con el modelo completo o con otra subestructura. Si estas fuerzas son expresadas en términos de los multiplicadores de Lagrange λ , la ecuación (3.78) puede ser expresada como:

$$\mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)}\dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(s)T}\lambda \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_i^{(s)} \quad (3.79)$$

Donde $\mathbf{b}^{(s)}$ es una matriz Booleana, la cual se utilizar para localizar los nodos de una subestructura con respecto de otra. Esta matriz Booleana debe cumplir con la condición que, una vez que se ensamblan todas las subestructuras, todos los grados de libertad de la frontera u_b deben compatibilizarse. Es decir:

$$\sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{b}^{(s)} u_b^{(s)} = 0 \quad (3.80)$$

Para realizar el ensamble de las N_s subestructuras, se deben sumar todas las ecuaciones (3.79). Para simplificar la notación, se utilizará:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}^{(N_s)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

El amortiguamiento se despreciará y, además, los vectores de desplazamiento y fuerzas se escribirán como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N_s)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Asimismo, se puede definir la matriz Booleana general \mathfrak{B} como

$$\mathfrak{B} = \left[\mathfrak{B}^{(1)} \ \mathfrak{B}^{(2)} \ \dots \ \mathfrak{B}^{(N_s)} \right] \quad (3.83)$$

Donde:

$$\mathfrak{B}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(s)T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

De esta manera, se puede realizar la suma de todas las ecuaciones dinámicas, resultando en la ecuación del sistema completo ensamblado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathfrak{B}^T \\ \mathfrak{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

La cual es la ecuación del sistema ensamblado de manera dual. En este método la subestructura puede ser vista como si estuviera excitada a través de las fuerzas en la frontera, por lo que, a diferencia del método de Craig - Bampton primal, las interfaces no necesitan estar totalmente restringidas para el cálculo de los modos de vibración. Es más, para este método, se consideran las interfaces como libres. El problema de esto último es que la subestructura, al considerarse libre en sus interfaces, puede estar “flotando”.

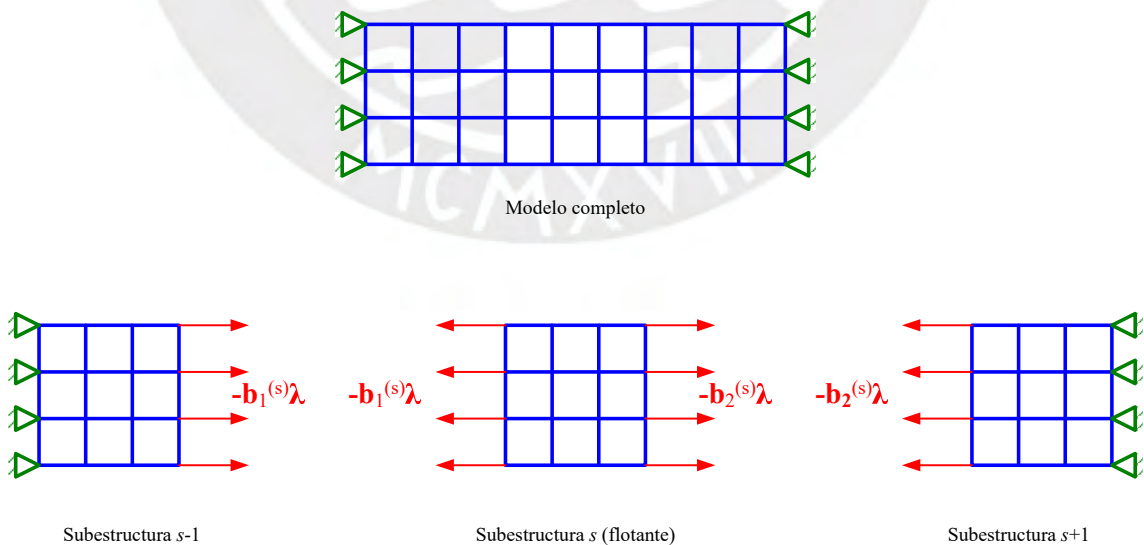


Figura 3.3: Subestructura flotante

Se considera que la subestructura con interfaces libres tiene $n^{(s)}$ grados de libertad y $m^{(s)}$ modos de cuerpo rígido. El método propone que los desplazamientos de la subestructura $u^{(s)}$ sean calculados con una parte estática $u_{est}^{(s)}$ y una parte que proviene de los modos de vibración con interfaces libres sin considerar los modos de cuerpo rígido de la subestructura:

$$u^{(s)} = u_{est}^{(s)} + \sum_{r=1}^{n^{(s)}-m^{(s)}} \theta_r^{(s)} \eta_r^{(s)} \quad (3.86)$$

Donde $\theta_r^{(s)}$ son los modos de vibración de la subestructura considerando las interfaces libres y $\eta_r^{(s)}$ son las coordenadas modales de la subestructura. Los desplazamientos estáticos son calculados de la siguiente manera:

$$u_{est}^{(s)} = -\mathbf{K}^{(s)+} \mathfrak{B}^{(s)T} \lambda + \sum_{i=1}^{m^{(s)}} \mathbf{R}_i^{(s)} \alpha_i^{(s)} \quad (3.87)$$

Donde $\mathbf{K}^{(s)+}$ es la inversa de la matriz de rigidez $K^{(s)}$ de la subestructura. No obstante, si la subestructura no tiene las condiciones de borde suficientes para no ser flotante, entonces $\mathbf{K}^{(s)+}$ es la matriz inversa generalizada de Moore - Penrose (Penrose, 1955). Asimismo, la matriz $\mathbf{R}_i^{(s)}$ contiene en sus columnas los $m^{(s)}$ modos de cuerpo rígido de la subestructura y $\alpha_i^{(s)}$ son las amplitudes de los modos de cuerpo rígido. Los desplazamientos de la subestructura son aproximados considerando únicamente los $n_{\theta}^{(s)}$ modos de vibración libres (sin considerar los modos de cuerpo rígido en caso de subestructuras flotantes), dando así:

$$u^{(s)} \approx -\mathbf{K}^{(s)+} \mathfrak{B}^{(s)T} \lambda + \mathbf{R}^{(s)} \alpha^{(s)} + \Theta^{(s)} \eta^{(s)} \quad (3.88)$$

Donde la matriz $\Theta^{(s)}$ contiene en sus columnas los $n_{\theta}^{(s)}$ modos de vibración libres seleccionados. Como se muestra en [22,23], la matriz $\mathbf{K}^{(s)+}$ tiene una expansión espectral:

$$\mathbf{K}^{(s)+} = \sum_{r=1}^{n^{(s)}-m^{(s)}} \frac{\theta_r^{(s)} \theta_r^{(s)T}}{\omega_r^{(s)2}} \quad (3.89)$$

Así, se puede definir la matriz de flexibilidad local residual $\mathbf{G}_{res}^{(s)}$ como:

$$\mathbf{G}_{res}^{(s)} = \mathbf{K}^{(s)+} - \sum_{r=1}^{n_{\theta}^{(s)}-m^{(s)}} \frac{\theta_r^{(s)} \theta_r^{(s)T}}{\omega_r^{(s)2}} \quad (3.90)$$

De esta manera, la ecuación (3.88) se puede escribir como:

$$u^{(s)} = -\mathbf{G}_{res}^{(s)} \mathfrak{B}^{(s)T} \lambda + \mathbf{R}^{(s)} \alpha^{(s)} + \Theta^{(s)} \eta^{(s)} \quad (3.91)$$

Reacomodando la ecuación (3.91), se obtiene la matriz de reducción \mathbf{T}_{dual} para todo el sistema ensamblado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{dual} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(1)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(1)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(2)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}^{(N_s)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(N_s)} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Donde:

$$\mathbf{T}_{dual} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(1)}\boldsymbol{\Theta}^{(1)} & & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{res}^{(1)}\boldsymbol{\mathfrak{B}}^{(1)T} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{R}^{(N_s)}\boldsymbol{\Theta}^{(N_s)} & -\mathbf{G}_{res}^{(N_s)}\boldsymbol{\mathfrak{B}}^{(N_s)T} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Con la ecuación (3.93), se pueden construir las matrices reducidas M_r y K_r según Rixen (2004).

El método de Rubin

Rubin (Rubin, 1975) propone una variación del método de Craig-Bampton dual: una vez que se tiene la matriz dual de transformación, se propone volver a un ensamble primal a nivel de desplazamientos en la frontera. Para ello, es necesario aplicar una segunda transformación.

Se sabe que los grados de libertad de la frontera de la subestructura pueden ser localizados a través de la matriz Booleana $\mathbf{A}^{(s)}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} \quad (3.94)$$

Así, los desplazamientos únicamente de la frontera de la subestructura $\mathbf{u}_f^{(s)}$ pueden ser aproximados como:

$$\mathbf{u}_b^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} = -\mathbf{G}_{res_f}^{(s)}\mathbf{B}^{(s)T}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{R}_f^{(s)}\boldsymbol{\alpha}^{(s)} + \boldsymbol{\Theta}_f^{(s)}\boldsymbol{\eta}^{(s)} \quad (3.95)$$

Donde $\mathbf{G}_{res_f}^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{G}_{res}^{(s)}$, $\mathbf{R}_f^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\mathbf{R}^{(s)}$ y $\boldsymbol{\Theta}_f^{(s)}\boldsymbol{\eta}^{(s)} = \mathbf{A}^{(s)}\boldsymbol{\Theta}^{(s)}\boldsymbol{\eta}^{(s)}$. De esta manera, las fuerzas de restricción asociadas con los multiplicadores de Lagrange pueden ser transformadas en términos de los desplazamientos de la frontera:

$$-\mathbf{B}^{(s)T} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}_{res_f}^{(s)-1} \left(\mathbf{u}_b^{(s)} - \mathbf{R}_f^{(s)} \boldsymbol{\alpha}^{(s)} - \boldsymbol{\Theta}_f^{(s)} \boldsymbol{\eta}^{(s)} \right) \quad (3.96)$$

De esta manera, la matriz de transformación de fuerzas en la frontera $\mathbf{f}_f = -\mathbf{B}^{(s)T} \boldsymbol{\lambda}$ en los desplazamientos en la frontera es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_{res_f}^{(s)-1} \mathbf{R}_f^{(s)} & -\mathbf{G}_{res_f}^{(s)-1} \boldsymbol{\Theta}_f^{(s)} & \mathbf{G}_{res_f}^{(s)-1} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Con esta matriz definida, la aproximación que propone el método es:

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{T}_{dual} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(s)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(s)} \\ \mathbf{u}_f^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

El método de Craig-Bampton para sistemas no clásicamente amortiguados

En la ecuación fundamental (3.23), existe un término que no se puede determinar completamente de manera analítica: la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} . Gran parte de los valores de esta matriz deben ser obtenidos de manera experimental o según bibliografía adecuada, por lo que su determinación para una subestructura constituye un reto para el método que se desarrollará.

Rayleigh propone lo que se conoce como *amortiguamiento proporcional*, el cual consiste en expresar la matriz de amortiguamiento como una combinación lineal de las matrices de rigidez \mathbf{K} y la matriz de masa \mathbf{M} , siendo:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.99)$$

Donde los valores de α y β son ajustados de manera que la respuesta del modelo discreto coincida, con cierto grado de aproximación aceptable, con la respuesta obtenida de manera experimental.

La idea detrás del amortiguamiento proporcional es que, al resolver el problema dinámico de n grados de libertad:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (3.100)$$

Las ecuaciones queden desacopladas. El teorema de superposición modal [5] permite escribir los desplazamientos \mathbf{U} como:

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i r_i(t) \quad (3.101)$$

Donde ϕ_i es el i -ésimo modo de vibración del sistema, representado por el vector propio que da solución al problema de vibración libre no amortiguada:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = 0 \quad (3.102)$$

Donde ω_i es la i -ésima frecuencia natural del sistema. Si se define la matriz $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$, entonces se puede demostrar que:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.103)$$

Asimismo, si se define la matriz $\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$, entonces se puede demostrar que:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2 \quad (3.104)$$

La ecuación (3.101) también se puede escribir como:

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i r_i(t) = \Phi R(t) \quad (3.105)$$

Si en la ecuación (3.100) se reemplaza la ecuación (3.105) y se premultiplica por Φ^T , resulta en:

$$\ddot{R}(t) + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{R} + \Omega^2 R(t) = \Phi^T F(t) \quad (3.106)$$

Se observa que en el sistema descrito por la ecuación (3.106), el término $\Omega^2 R(t)$ es enteramente diagonal, por lo que, si se desprecia el amortiguamiento, se tendría un sistema de ecuaciones desacopladas.

El término $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ no es necesariamente diagonal. Pero si se asume un amortiguamiento proporcional $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$, entonces se observa que este término es:

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha \mathbf{I} + \beta \Omega^2 \quad (3.107)$$

Por lo que el término de amortiguamiento queda diagonalizado y, por consiguiente, las ecuaciones dinámicas quedan desacopladas.

No obstante, según diversos autores (Hasselmann (1976), Chung y Jr. (1983), Béliveau

y Soucy (1985), R. R. Craig y Chung (1982)), este tipo de amortiguamiento no es adecuado para muchos sistemas mecánicos reales ya que el amortiguamiento depende de diversos factores, como la resistencia del aire, la fricción entre los componentes de un sistema, presencia de elementos amortiguadores externos, entre otros. Esto hace que si se considera una matriz de amortiguamiento no diagonalizada (esto es, no en la forma de Rayleigh), entonces los métodos de reducción de orden estudiados hasta el momento no pueden lidiar con ella directamente. Sin embargo, Gruber y Rixen (Gruber y Rixen, 2018) describieron un método para adaptar el método de Craig-Bampton dual a sistemas sin amortiguamiento proporcional.

Si se considera la ecuación fundamental para una subestructura (3.78), se realiza el siguiente cambio de variable para conseguir la representación espacio-estado de la misma:

$$z^{(s)} = \begin{bmatrix} u^{(s)} \\ v^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Donde $v^{(s)} = \dot{u}^{(s)}$. Con este cambio de variable, la ecuación (3.78) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}^{(s)} \dot{z}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} z^{(s)} = \mathbf{Q}^{(s)} \quad (3.109)$$

Donde:

$$\mathbf{A}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \\ \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

La idea central del método de Craig-Bampton dual es aproximar la respuesta del sistema mediante una parte estática y una parte dinámica. En este caso en particular, lo que se tiene que aproximar es el espacio estado $z^{(s)}$. Por ello, se considerará la aproximación de la ecuación (3.111):

$$z^{(s)} = z_{est}^{(s)} + z_{din}^{(s)} \quad (3.111)$$

A la ecuación (3.111) le corresponde el problema de valores y vectores propios mostrado en la ecuación (3.112):

$$\left(\sigma_j^{(s)} \mathbf{A}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \right) \theta_{ss,j}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

Así como en el método de Craig-Bampton dual, también pueden aparecer subestructuras flotantes con este método, por lo que se tiene que tener en consideración la existencia de $m_r^{(s)}$ modos físicos de cuerpo rígido (esto es, referidos a la ecuación (3.66)). La existencia de estos $m_r^{(s)}$ modos físicos de cuerpo rígido implican la existencia de un número $n_r^{(s)}$ de modos de cuerpo rígido de la ecuación de espacio-estado e igual número de valores

propios $\sigma_j^{(s)}$ iguales a 0, con $m_r^{(s)} \leq n_r^{(s)} \leq 2m_r^{(s)}$ (Kraker y Campen, 1994). Si $\mathbf{r}_j^{(s)}$ son los vectores propios correspondientes a los modos de cuerpo rígido y estos son ordenados en una matriz $\mathbf{R}^{(s)}$, donde en cada columna de esta matriz se encuentra uno de los vectores $\mathbf{r}_j^{(s)}$, entonces se cumplirá la ecuación (3.113):

$$\mathbf{K}^{(s)}\mathbf{R}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (3.113)$$

Gruber y Rixen (2018) mostraron de que si ocurren modos de cuerpo rígido, entonces pueden ocurrir dos situaciones:

1. Si $\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{r}_j^{(s)} = \mathbf{0}$, entonces el valor propio $\sigma_j^{(s)}$ tiene multiplicidad dos y genera un vector propio regular $\mathbf{r}_{ss,j,reg}^{(s)}$ y un vector propio generalizado $\mathbf{r}_{ss,j,gen}^{(s)}$ ⁶, ambos correspondientes a la ecuación de espacio-estado. Estos dos vectores corresponden al modo físico de cuerpo rígido $\mathbf{r}_j^{(s)}$. Asimismo, se debe observar que la matriz $\Sigma^{(s)} = \Phi_{ss}^{(s)T} \mathbf{B} \Phi_{ss}^{(s)}$ (las columnas de la matriz $\Phi_{ss}^{(s)}$ están conformadas por los vectores $\mathbf{r}_{ss,j,gen}^{(s)}$) no es diagonal, pero tiene la forma normal de Jordan (matriz con entradas en la diagonal principal y en la diagonal inmediatamente por encima o por debajo de la diagonal principal, llamadas superdiagonal y subdiagonal, respectivamente.). A este sistema se le llama defectivo.
2. Si $\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{r}_j^{(s)} \neq \mathbf{0}$ el sistema es no defectivo para el modo físico de cuerpo rígido $\mathbf{r}_j^{(s)}$ y únicamente existe un vector propio regular $\mathbf{r}_{j,ss}^{(s)}$ para el valor propio $\sigma_j^{(s)} = 0$, el cual tiene multiplicidad igual a uno. El vector propio $\mathbf{r}_{j,ss}^{(s)}$ se corresponde únicamente con el vector \mathbf{r}_j del modo físico de cuerpo rígido y la matriz $\Sigma^{(s)}$ es diagonal.

Hecha esta salvedad acerca de los modos de cuerpo rígido y su influencia sobre la matriz de amortiguamiento, se procede a examinar la parte dinámica de la aproximación.

Si se calculan los $n^{(s)}$ valores propios de la subestructura $\sigma_j^{(s)}$, $j = 1, \dots, n^{(s)}$ (incluyendo los modos de cuerpo rígido) se obtiene:

$$\boldsymbol{\theta}_{ss,j}^{(s)} = \begin{bmatrix} \theta_{ss,j,u}^{(s)} \\ \theta_{ss,j,v}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{ss,j,u}^{(s)} \\ \sigma_j^{(s)} \theta_{ss,j,u}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

⁶Un vector propio regular $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ asociado a un valor propio λ es aquel que, dada una matriz A de tamaño $n \times n$, \mathbf{u} cumple con la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y donde además, los n vectores propios \mathbf{u} son linealmente independientes. Sin embargo, si los n vectores propios \mathbf{u} no son linealmente independientes, entonces existen n vectores propios generalizados \mathbf{u}_{gen} que sí son linealmente independientes (algunos de ellos pueden ser vectores propios regulares). Un vector propio generalizado de rango m cumple con $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \mathbf{u}_{gen} = \mathbf{0}$ pero $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{m-1} \mathbf{u}_{gen} \neq \mathbf{0}$. También es posible deducir que si un valor propio λ tiene multiplicidad μ , entonces existen μ vectores generalizados \mathbf{u}_{gen} .

Algunos de estos vectores propios se pueden utilizar para generar un subespacio que aproxime el comportamiento de la subestructura mediante la ecuación de espacio-estado (3.109). Aquí resulta importante resaltar que, si la matriz $\mathbf{R}_{ss}^{(s)}$ únicamente se compone de vectores propios regulares, entonces las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} quedan automáticamente diagonalizadas. Si esto no se cumple, es decir, existen valores propios $\sigma_j^{(s)} = 0$ que generan vectores propios generalizados, entonces la matriz $\Sigma^{(s)}$ no queda diagonalizada, pero queda en forma de Jordan. De cualquier manera, se producen $n^{(s)}$ vectores propios del espacio estado y $n_r^{(s)}$ vectores propios de modos de cuerpo rígido del espacio estado. Se define la matriz $\Theta_{ss}^{(s)}$ cuyas columnas son los $n^{(s)} - n_r^{(s)}$ vectores propios del espacio estado $\theta_{ss,j}^{(s)}$, los cuales corresponden a los valores propios $\sigma_j^{(s)} \neq 0$. Se cumple con las siguientes relaciones:

$$\Theta_{ss}^{(s)T} \mathbf{A}^{(s)} \Theta_{ss}^{(s)} = \mathbf{I}, \quad \Theta_{ss}^{(s)T} \mathbf{B}^{(s)} \Theta_{ss}^{(s)} = -\sum^{(s)} = -diag(\sigma_1^{(s)}, \sigma_2^{(s)}, \dots, \sigma_{n-n_r}^{(s)}) \quad (3.115)$$

Si se retienen $n_\theta^{(s)}$ modos normales $\theta_{ss,j}^{(s)}$ como base de reducción de las subestructuras, entonces se obtiene una aproximación de la parte dinámica del sistema. Esta es:

$$\mathbf{z}_{din}^{(s)} = \sum_{j=1}^{n_\theta^{(s)}} \theta_{ss,j}^{(s)} \mathbf{p}_j^{(s)} = \Theta_{ss}^{(s)} \mathbf{p}_j^{(s)} \quad (3.116)$$

Asimismo, también se debe obtener la parte estática de la solución. Esta solución puede ser aproximada si en la ecuación (3.109) la variable $\dot{z}^{(s)} = 0$. La ecuación que queda con esta consideración es de una condición estática:

$$\mathbf{B}^{(s)} z_{est}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Si no se han identificado modos de cuerpo rígido en el espacio estado, entonces la solución estática se obtiene rápidamente al calcular la inversa de la matriz $\mathbf{B}^{(s)}$:

$$z_{est}^{(s)} = \mathbf{B}^{(s)-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(s)-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{(s)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

La ecuación (3.118) puede también quedar escrita en términos de los multiplicadores de Lagrange λ , considerando que $\mathbf{f}_f^{(s)} = -\mathbf{b}^{(s)T} \lambda$ (donde $\mathbf{b}^{(s)T}$ es la transpuesta de la matriz booleana de la subestructura). De esta manera, la ecuación (3.118) se convierte en:

$$z_{est}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(s)-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{(s)-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(s)T} \lambda \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

La condición de compatibilidad en las interfaces debe ser escrita también en formato de espacio estado:

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{b}_{ss}^{(s)} z^{(s)} = \sum_{s=1}^N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{ss,u}^{(s)} & \mathbf{b}_{ss,v}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(s)} \\ v^{(s)} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \quad (3.120)$$

No obstante, la condición de compatibilidad de la ecuación fundamental exige que:

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{b}^{(s)} u^{(s)} = \mathbf{0} \quad (3.121)$$

Comparando las ecuaciones (3.121) y (3.120), se obtiene que:

$$\mathbf{b}_{ss,u}^{(s)} = \mathbf{b}^{(s)} u^{(s)}, \quad \mathbf{b}_{ss,v}^{(s)} = \mathbf{0} \quad (3.122)$$

Por lo que finalmente, la solución estática estará dada por:

$$z_{est}^{(s)} = -\mathbf{B}^{(s)-1} \mathbf{b}_{ss}^{(s)T} \lambda \quad (3.123)$$

Como se mencionó al comienzo de este trabajo de tesis, este método tiene especial relevancia debido a que es uno de los pilares en los cuales se basará la propuesta de esta investigación. Es por ello que se tomó como referencia la prueba de concepto que Gruber y Rixen (2018) utilizaron para validar la propuesta del método de Craig-Bampton dual para sistemas no proporcionalmente amortiguados.

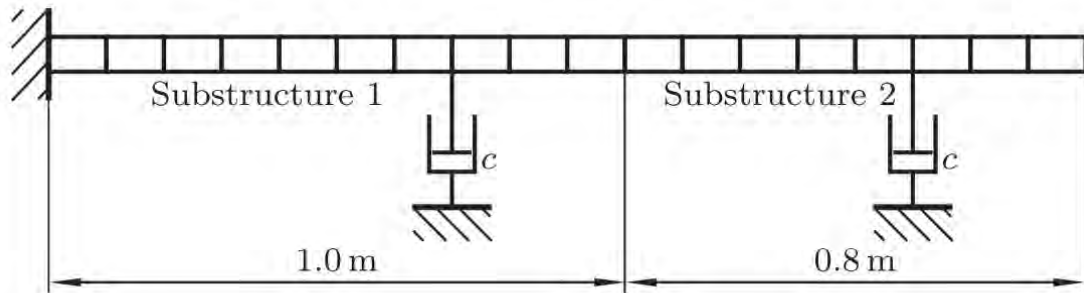


Figura 3.4: Viga en voladizo con amortiguadores. Adaptado de Gruber y Rixen (2018)

Esta prueba consistió en considerar una viga en voladizo con amortiguadores a lo largo de ella, como se muestra en la Figura 3.4. La viga fue simulada utilizando 18 elementos viga con nodos en sus extremos, dando como resultado 36 grados de libertad. Asimismo, se consideró que la sección transversal de la viga fue de $9,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y un momento de inercia en el eje de flexión de $7,0 \times 10^{-8} \text{ m}^4$. Los autores toman dos subestructuras para resolver el problema: una de 1,0 m de largo y otra de 0,8 m, respectivamente. Para evaluar si el modelo captará adecuadamente los efectos dinámicos a los que puede estar

sometida la viga, se realiza un segundo estudio de sus 20 modos de vibración mediante un análisis modal amortiguado. A estos 20 modos de vibración le corresponden 20 frecuencias naturales complejas, las cuales se pueden observar en la Figura 3.5.

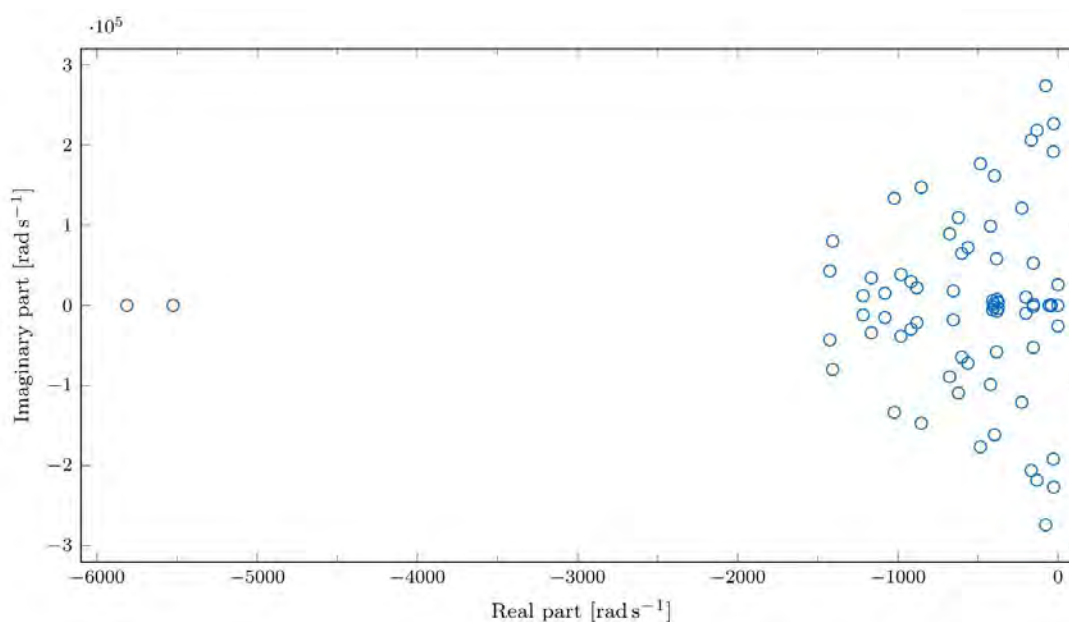


Figura 3.5: Frecuencias naturales complejas de la viga estudiada por Gruber y Rixen (2018)

Los resultados de resolver un análisis modal amortiguado utilizando el método de Craig-Bampton (CB) y el método de Craig-Bampton dual (DCB) propuesto se pueden observar en la Figura 3.6. Se puede observar una gran precisión del método de Craig-Bampton dual en la predicción de las frecuencias naturales complejas del sistema dinámico, a pesar de haber reducido los grados de libertad de este. Por ello, Gruber y Rixen (2018) concluyen que el método reproducirá con exactitud los efectos dinámicos que puedan ocurrir en la viga debido a cargas que puedan aparecer sobre ella. Sin embargo, como ya se observó, este método está limitado a una ecuación de movimiento lineal. El método ha sido desarrollado únicamente bajo la consideración de que la ecuación de movimiento es lineal, por lo que se concluye que este método no es aplicable en caso aparezca alguna no linealidad.

Otros Métodos de Subestructuramiento

Otro método de subestructuramiento basado en las frecuencias naturales y modos de vibración ha sido estudiado por Gérardin y Rixen (2018), el cual consiste en una técnica basada en impulsos en un sistema de referencia flotante para simulación de sistemas dinámicos flexibles de alta frecuencia. El método consiste en sustituir el término de segundo orden de la ecuación diferencial de movimiento de un sólido flexible por una ecuación de

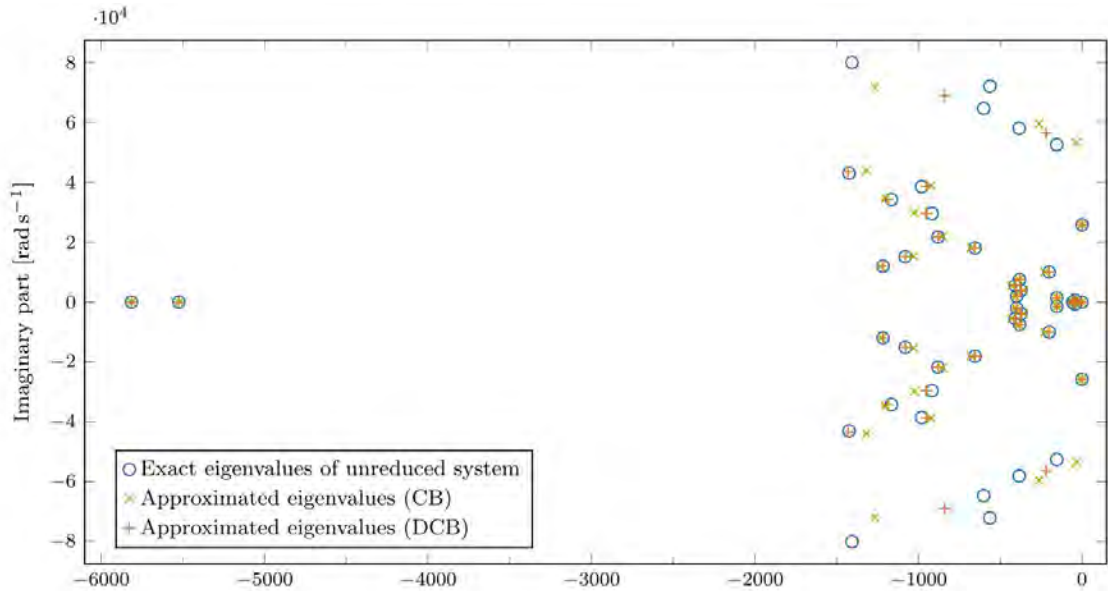


Figura 3.6: Resultados del análisis modal amortiguado del sistema considerando las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez reducidas según el método de Craig-Bampton en sus formas primal y dual (Gruber y Rixen, 2018)

impulso. Los autores concluyen de que una de las más grandes ventajas de este método es que permite separar los grados de libertad elásticos de los rígidos, y así se evita que la parte flexible del problema quede dentro del esquema de integración numérica del sistema de ecuaciones no lineal. Sin embargo, esta metodología solo es aplicable si es que los efectos de rigidización geométrica (grandes deformaciones) son despreciables. Asimismo, el método requiere calcular la respuesta elástica en cada paso de tiempo, por lo que aún se están investigando técnicas para reducir el costo computacional de este método.

El concepto de sistemas de referencia flotantes también ha sido estudiado por Cardona (2000). En su estudio, propone el uso de un sistema de referencia flotante para el cálculo de la matriz de masa y rigidez reducida de las subestructuras, cuya ubicación se basa en los desplazamientos y rotaciones de los nodos que se encuentran en la frontera de la subestructura, pero que a la vez se encuentra lo más cerca posible del centro de masa de la subestructura. Se concluye que este método, con el cálculo de la energía cinética de la subestructura adecuado, convierte a los resultados en completamente independientes de la ubicación del sistema de referencia flotante en cada subestructura.

Los métodos de subestructuramiento revisados, así como otros métodos que aparecen en la literatura, tienen en general algunas o todas de las siguientes características:

- Se basa en encontrar las frecuencias naturales y modos de vibración como base del método de subestructuramiento.
- Los casos de estudio presentados donde se prueban las técnicas encontradas se centran en aproximar correctamente las frecuencias naturales y modos de vibración (amortiguados o no amortiguados) de los sistemas estudiados y qué tan lejos estos se encuentran de los resultados utilizando el modelo completo.
- No lidian directamente con no linealidades presentes en los modelos de elementos finitos, o asumen que las no linealidades están alejados de las zonas de subestructuramiento.

La tabla 3.1 resume los métodos descritos hasta el momento. La intención de esta tabla es que el lector pueda comparar los diferentes enfoques que se tienen para resolver un problema transitorio. Es por ello que primero se especifica el tipo de método, el método mencionado en el estado del arte, la formulación general que utiliza y las observaciones que se pueden hacer en torno a las fortalezas y carencias de cada método.

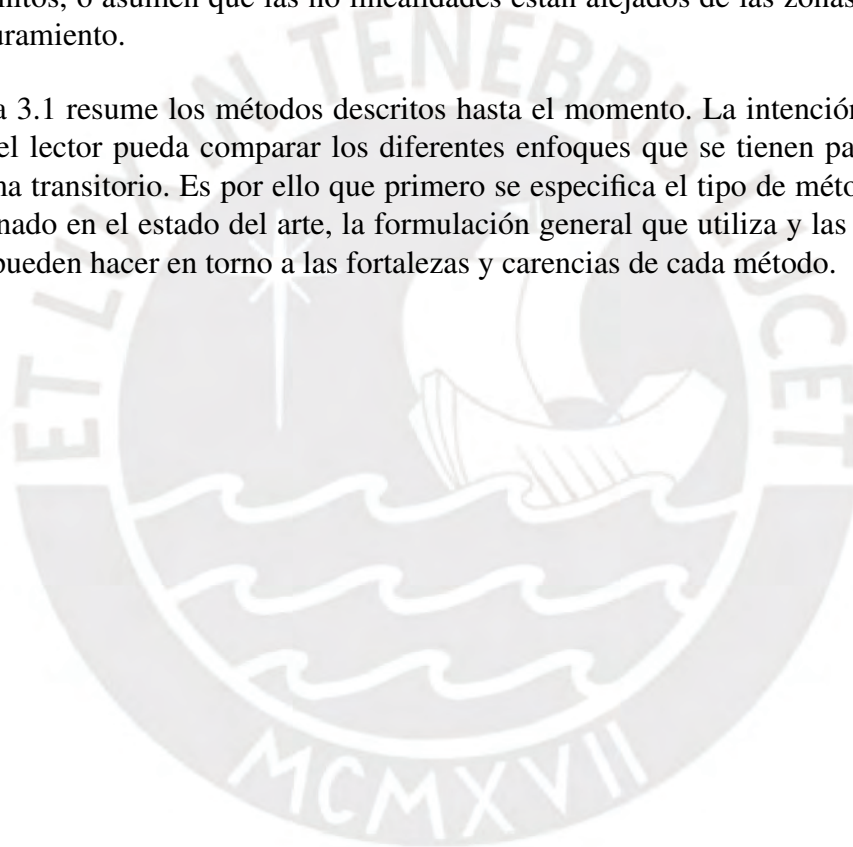


Tabla 3.1: Metodos para resolucion del problema dinámico

Tipo de Método	Método	Formulación	Observaciones
Métodos Clásicos	Newmark	Método clásico implícito de integración directa. Depende de la calibración de los parámetros de Newmark para asegurar convergencia y precisión. Incondicionalmente estable.	Métodos incondicionalmente estables que lidian con todos los grados de libertad del modelo dinámico. No obstante, la cantidad de ecuaciones e iteraciones que requieren para solucionar el equilibrio dinámico en cada paso de tiempo pueden volver el problema computacionalmente poco práctico o inviable.
	HHT	Método optimizado que mejora la velocidad del método de Newmark. No obstante, para el cálculo de las aceleraciones nodales, ignora el término de amortiguamiento. Incondicionalmente estable.	
	Explícito	Método que no requiere iteraciones en la solución del mismo. Sin embargo, no garantiza la estabilidad de la solución. Se debe tomar un paso de tiempo adecuado y muy pequeño para garantizar la convergencia de la misma.	Método condicionalmente estable que permite una solución más rápida del problema dinámico. No obstante, no garantiza el equilibrio dinámico en todos los pasos de tiempo, por lo que este último debe ser lo suficientemente pequeño para garantizar la estabilidad y precisión de la solución. Al ser generalmente bastante pequeño, se usa para resolver problemas estructurales que se producen en espacio de tiempo muy reducidos.
Métodos de Descomposición Modal	Análisis Real	Modelo de Orden Reducido basado en el teorema de expansión modal que permite aproximar los desplazamientos mediante el uso de coordenadas modales y la matriz modal. Supone una relación de proporcionalidad de la matriz de amortiguamiento con las matrices de masa y rigidez.	Métodos basados en el teorema de expansión que resultan muy acertados cuando el fenómeno dinámico ocurre a frecuencias muy cercanas a las frecuencias naturales. Sin embargo, en la práctica, la necesidad de un análisis modal previo para extraer los valores y vectores propios del problema puede ser computacionalmente problemático, pues los factores de participación de masa pueden ser muy bajos para las primeras frecuencias naturales.
	Análisis Complejo	Modelo de Orden Reducido también basado en el teorema de expansión modal, pero esta vez en el dominio de los números complejos, al suponer que la matriz de amortiguamiento es no proporcional.	
Métodos de Condensación	Guyan - Irons	Modelo de Orden Reducido que supone que la dependencia entre grados de libertad activos y dependientes está únicamente influenciada por la matriz de rigidez.	Métodos que efectivamente reducen el orden del problema únicamente con una buena preselección de los grados de libertad activos. No obstante, pueden presentar problemas en problemas dinámicos que son regular o severamente amortiguados.
	Reducción Dinámica	Modelo de Orden Reducido que toma en cuenta el término de fuerza inercial debido a la aceleración para establecer la dependencia entre los grados de libertad activos y dependientes.	
Métodos de Subestructuramiento	Craig - Bampton primal	Modelo de Orden Reducido basado en subestructuras y en el teorema de expansión, el cual utiliza los desplazamientos para compatibilizar las interfaces de las mismas.	Métodos que reducen el orden del problema al estudiar dinámicamente partes del mismo para luego ensamblar la solución total. Tienen un gran potencial cuando se combinan con procesamiento en paralelo, pues cada procesador puede solucionar una parte del problema y mediante diversas iteraciones construir la solución total. Sin embargo, todavía existe bastante investigación en cuanto al balance entre precisión y tiempo computacional requerido comparado con los métodos clásicos de solución del problema dinámico.
	Craig - Bampton dual	Modelo de Orden Reducido basado en subestructuras y en teorema de expansión, el cual utiliza las fuerzas en las interfaces para compatibilizar las mismas.	
	Géradin - Rixen	Modelo de Orden Reducido basado en subestructuras y en técnicas basadas en impulsos y un sistema de referencia flotante en la subestructura. Es usado en sistemas dinámicos flexibles de alta frecuencia.	
	Cardona	Modelo de Orden Reducido basado en subestructuras y en un sistema de referencia flotante, cuya ubicación depende de los desplazamientos y rotaciones de la interfaz, pero que a su vez se encuentra lo más cerca posible del centro de gravedad de la subestructura.	

3.4. Algunos métodos matemáticos para la resolución de problemas estructurales

3.4.1. Modos normales no lineales

Uno de los más importantes problemas con los que los modelos de orden reducido deben lidiar es con las no linealidades que aparecen en el modelo dinámico. Estas no linealidades suelen ser locales y, por lo tanto, son en su mayoría de veces ignoradas por los métodos de orden reducido.

No obstante, en muchos sistemas mecánicos estas no linealidades no pueden ser ignoradas. Por ejemplo, las estructuras utilizadas en las alas de muchos aviones actuales tienen un comportamiento multilineal en lugar del clásico comportamiento según Hooke, por lo que la no linealidad en el material no puede ser localizada en alguna parte en particular de dicha estructura ni tampoco sus efectos despreciados (Bramsiepe, Klimmek, Krüger, y Tichy, 2022).

Haller y Ponsioen (Haller y Ponsioen, 2016) proponen el uso de modos normales no lineales como subespacio para la reducción de orden del sistema, los cuales han sido definidos por Rosenberg (Rosenberg, 1962) como oscilaciones periódicas que alcanzan sus valores máximos en todas las coordenadas modales al mismo tiempo en un sistema conservativo. No obstante, son Shawn y Pierre (Hasselmann, 1976) quienes proveen una revisión más profunda y definen los modos normales no lineales como una variedad invariante del sistema dinámico.

Un conjunto invariante en un sistema dinámico se define como un subconjunto del espacio de fases S tal que si las condiciones iniciales para el sistema están contenidas en S , entonces la solución del sistema dinámico con esas condiciones iniciales también está contenido en S . Si se considera un sistema que ya está discreto de N grados de libertad, entonces la ecuación de vibración libre amortiguada lineal tiene la forma de la ecuación (3.124).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.124)$$

Los modos normales de esta ecuación se pueden encontrar realizando un análisis modal complejo según lo descrito en las ecuaciones (3.50) y (3.51). Algunos de estos modos pueden ser utilizados para reducir el orden del sistema siguiendo el principio de superposición de efectos. No obstante, esto ya no es válido si intervienen componentes no lineales en la ecuación (3.124). Por ejemplo, si se consideran fuerzas que dependen de los desplazamientos y velocidades de una manera no lineal (lo que por ejemplo sucede al modelar la resistencia de un fluido sobre un sólido, en cuyo caso la dependencia se da con el cuadra-

do de las velocidades), entonces las ecuaciones de espacio - estado del sistema dinámico se pueden escribir según la ecuación (3.125):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= f_i(u, v)\end{aligned}\tag{3.125}$$

Así, si el sistema tiene N grados de libertad, entonces la ecuación (3.125) representa en total $2N$ ecuaciones.

Se espera que los modos normales no lineales mantengan algunas de las propiedades de los modos normales de un sistema lineal. En particular, Shaw y Pierre (1993) sugieren que una de las propiedades características de los sistemas lineales es que los desplazamientos en un modo normal son proporcionales a un desplazamiento base (e igualmente con las velocidades). Por ello, y sin pérdida de generalidad, se sugiere que todos los desplazamientos y velocidades sean proporcionales a aquellos de los primeros grados de libertad:

$$\begin{aligned}x_1 &= u \\ y_1 &= v\end{aligned}\tag{3.126}$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x_1 &= u \\ y_1 &= v \\ x_i &= F_{x_i}(u, v) \\ y_i &= F_{y_i}(u, v)\end{aligned}\tag{3.127}$$

Con $i = 2, 3 \dots N$. La ecuación (3.127) implica la existencia de una variedad (para los fines de esta investigación, se considerará diferenciable) en el espacio de fases $2N$ -dimensional. Esta variedad, de dimensión 2 y co-dimensión $2N - 2$, tiene dos propiedades importantes: pasa por un punto de equilibrio del sistema y, en ese punto, es tangente al plano del espacio propio (generado por los vectores propios del sistema linealizado).

Si bien pueden haber muchas maneras de hallar las funciones $F_{x_i}(u, v)$ y $F_{y_i}(u, v)$, lo más sencillo es considerar series de Taylor para aproximarlas de manera polinomial alrededor de una posición de equilibrio del sistema dinámico. Esto implica que las funciones se pueden escribir según la ecuación (3.128):

$$\begin{aligned}
F_{x_i}(u, v) &= a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + a_{6i}u^3 + \dots \\
F_{y_i}(u, v) &= b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + b_{6i}u^3 + \dots
\end{aligned}
\tag{3.128}$$

El objetivo será calcular los coeficientes a_{ij} y b_{ij} , en donde el coeficiente i depende de la cantidad de términos de la expansión de Taylor que se utilice, mientras que los coeficientes j corresponden con los N grados de libertad del sistema dinámico. Este sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma mostrada a continuación:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(u, v) + \mathbf{m}_2(u, v)] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
\tag{3.129}$$

Donde:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m}_0 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} \\ b_{1N} & b_{2N} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{32}u + a_{42}v & a_{52}v \\ b_{32}u + b_{42}v & b_{52}v \\ \vdots & \vdots \\ a_{3Nu} + a_{4Nv} & a_{5Nv} \\ b_{3Nu} + b_{4Nv} & b_{5Nv} \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{62}u^2 + a_{82}v^2 & a_{72}u^2 + a_{92}v^2 \\ b_{62}u^2 + b_{82}v^2 & b_{72}u^2 + b_{92}v^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{6Nu}^2 + a_{8Nv}^2 & a_{7Nu}^2 + a_{9Nv}^2 \\ b_{6Nu}^2 + b_{8Nv}^2 & b_{7Nu}^2 + b_{9Nv}^2 \end{bmatrix}
\tag{3.130}$$

Las ecuaciones mostradas en (3.129) contiene el aporte lineal de los modos normales lineales en el término \mathbf{m}_0 , mientras que los demás términos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 representan el aporte de las no linealidades (aquí representadas hasta un orden cúbico, pero podría expandirse la serie de Taylor tanto como sea necesario). Esto permite capturar las no linealidades presentes en el modelo y replicar, de cierta manera, el principio de superposición utilizado en el teorema de expansión modal para aproximar el movimiento de sistemas lineales.

Los términos mostrado en la ecuación (3.129) son cada uno de tamaño $2N \times 2$. Si se repite el mismo procedimiento para todos los pares de coordenadas (x_k, y_k) , entonces se pueden obtener las matrices \mathbf{M}_0 , $\mathbf{M}_1(\mathbf{w})$ y $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$, cada una de tamaño $2N \times 2N$, siendo \mathbf{w} las coordenadas modales con pares ordenados (u_k, v_k) , $k = 1, 2, \dots, N$. Así, se puede escribir

la transformación entre las coordenadas físicas \mathbf{z} y las coordenadas modales \mathbf{w} según la ecuación (3.131):

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{M}(\mathbf{w})\} \mathbf{w} \quad (3.131)$$

Donde $\mathbf{M}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})\}$.

3.4.2. Algoritmo de Lanczos en bloque desplazado para cálculo de valores y vectores propios

Una parte central del método de subestructuramiento consiste en el cálculo de los valores y vectores propios de la subestructura. Para ello, es necesario resolver la ecuación (3.132):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = \mathbf{0} \quad (3.132)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{M} es la matriz de masa, ω es una frecuencia natural y el vector ϕ es el modo de vibración correspondiente a la frecuencia natural ω .

No obstante, no son requeridos todos los modos de vibración de la subestructura. De hecho, una componente importante de la reducción de grados de libertad consiste en no utilizar todos los modos de vibración, sino solo aquellos que se consideren convenientes para el método (que pueden incluir modos de cuerpo rígido).

Para calcular las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema, es necesario un algoritmo que permita extraer de manera eficiente dichas cantidades. Uno de los algoritmos más utilizados para dicho fin es el de Lanczos (Golub y Underwood, 1977). No obstante, este algoritmo solo se utiliza para resolver problemas donde las matrices de masa y rigidez son simétricas y positivas definidas. Por ello, la versión de este algoritmo de que se utilizará para el desarrollo del método será el de bloque desplazado [27], el cual se describirá a continuación.

Sea la matrix A de tamaño $m \times m$, cuyos valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$. Se puede probar (Sauer, 2012) que los valores propios de la matrix *desplazada* una cantidad real s , esto es $A - sI$, son $\lambda_1 - s, \lambda_2 - s, \lambda_3 - s, \dots, \lambda_m - s$, y que además los vectores propios de la matrix A son también aquellos de la matrix desplazada $A - sI$. Asimismo, se puede probar que los valores propios de la matrix inversa A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1}$ y que sus vectores propios son los mismos.

Si la búsqueda de valores y vectores propios está referida al problema vibratorio descrito en la ecuación (3.132), entonces dicha ecuación se puede transformar a:

$$\mathbf{K}\phi = \lambda\mathbf{M}\phi \quad (3.133)$$

Con $\lambda = \omega^2$. Se define la *transformación espectral* (Ericsson y Ruhe (1980), Newman y Flanagan (1976)) del problema vibratorio como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{K} - s\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\phi = \mu\mathbf{M}\phi \quad (3.134)$$

Donde las matrices de rigidez \mathbf{K} y de masa \mathbf{M} tienen tamaño $n \times n$ y además:

$$\mu = \frac{1}{\lambda - s} \quad (3.135)$$

Para resolver el problema de valores y vectores propios de la ecuación (3.134), (Grimes, Lewis, y Simon, 1994) propone que se defina un número p , el cual es el *tamaño de bloque*. Luego, para $j = 1, 2, \dots, p$, se definen las matrices \mathbf{Q}_j , \mathbf{U}_j y \mathbf{R}_j , las cuales tienen tamaño $n \times p$. Asimismo, se definen las matrices \mathbf{A}_j y \mathbf{B}_j de tamaño $p \times p$.

El algoritmo se inicializa al definir $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$ y al elegir una matriz \mathbf{R}_1 , de tal manera de que se *ortonormalizan* sus columnas para obtener \mathbf{Q}_1 , de tal manera que $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$.

Los siguientes términos del algoritmo se calculan de la siguiente manera: para cada $j = 1, 2, \dots, p$, se calcula la matriz:

$$\mathbf{U}_j = (\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})^{-1} (\mathbf{M}\mathbf{Q}_j) - \mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{B}_j^T \quad (3.136)$$

Seguidamente, se calcula la matriz \mathbf{A}_j :

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{U}_j^T (\mathbf{M}\mathbf{Q}_j) \quad (3.137)$$

Luego, se calcula la matriz \mathbf{R}_{j+1} :

$$\mathbf{R}_{j+1} = \mathbf{U}_j - \mathbf{Q}_j\mathbf{A}_j \quad (3.138)$$

Finalmente, se calculan las matrices \mathbf{Q}_{j+1} y $(\mathbf{M}\mathbf{Q}_{j+1})$ de tal manera que:

$$\mathbf{Q}_{j+1}\mathbf{B}_{j+1} = \mathbf{R}_{j+1} \quad (3.139)$$

Y:

$$\mathbf{Q}_{j+1}^T (\mathbf{M}\mathbf{Q}_{j+1}) = \mathbf{I} \quad (3.140)$$

Una vez que se tienen calculados todos los vectores \mathbf{Q}_j , es posible calcular la matriz tridiagonal T_j de tamaño $p \times p$:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{Q}_j^T \mathbf{M} (\mathbf{K} - \sigma \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_j \quad (3.141)$$

Los valores y vectores propios de la matriz \mathbf{T}_j son aproximadamente los mismos que los de la transformación espectral (3.134). En este punto, se puede aplicar un algoritmo clásico para encontrar los valores y vectores propios de la matriz \mathbf{T}_j como es el QR (Sauer (2012), Burden y Faires (2010)).



Capítulo IV

Método de Subestructuramiento basado en Craig - Bampton dual utilizando modos normales no lineales

En este capítulo se describe el desarrollo del método propuesto por esta investigación. Este método tiene las siguientes características:

1. El método puede resolver no linealidades presentes en las subestructuras, siempre y cuando estas se puedan modelar como funciones polinómicas en los desplazamientos y/o velocidades nodales.
2. Asimismo, las subestructuras pueden presentar amortiguamiento proporcional o no.
3. El subestructuramiento está basado en el método de Craig - Bampton dual (compatibilidad de fuerzas en la frontera de las subestructuras), pero la parte dinámica de la aproximación está basada en la teoría de modos normales no lineales de Shaw y Pierre (1993).

Estos tres puntos serán explorados a profundidad luego del desarrollo del método.

4.1. Método de subestructuramiento basado en Craig - Bampton dual utilizando modos normales no lineales

Considérese un cuerpo como el mostrado en la Figura 4.1, el cual estará sometido a cargas dinámicas y cuyo comportamiento ante ellas podría resultar en no linealidades. Este cuerpo se dividirá en subestructuras. La Figura 4.2 muestra únicamente 3 divisiones, pero en general, el cuerpo se podría dividir en n subestructuras.

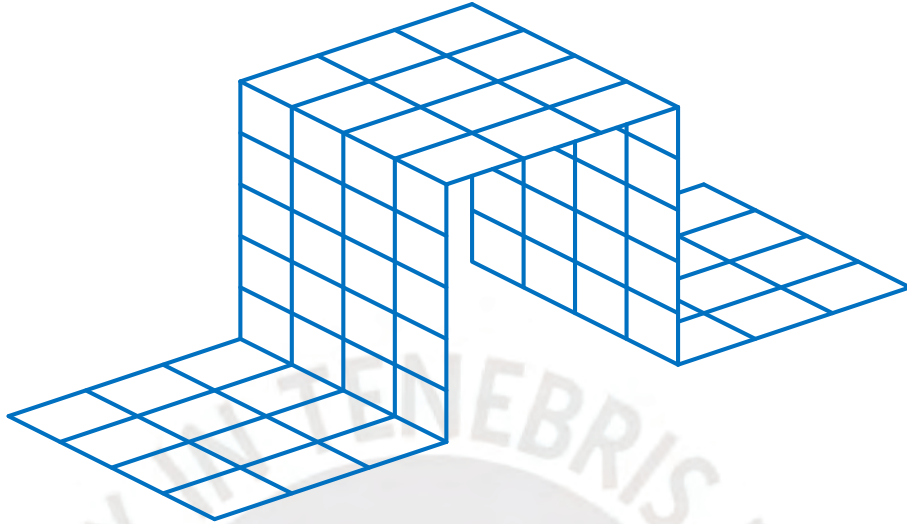


Figura 4.1: Cuerpo inicial

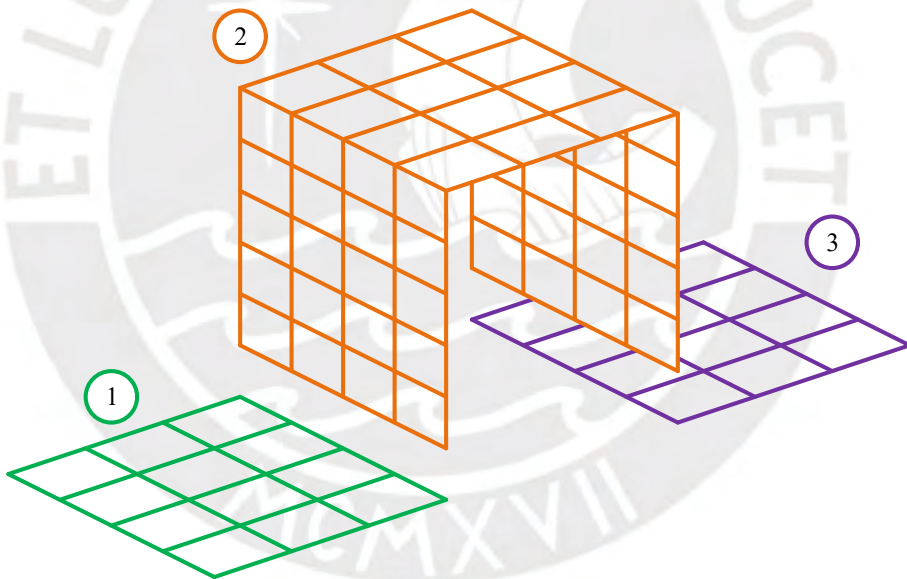


Figura 4.2: División en subestructuras del cuerpo inicial

Se considera la ecuación de una subestructura con un término no lineal, como se muestra en la ecuación (4.1):

$$\mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)}\dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)}\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{u}^{(s)k}, \dot{\mathbf{u}}^{(s)k}) = \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)} \quad (4.1)$$

Donde el término $\mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{u}^k, \dot{\mathbf{u}}^k)$ representa las fuerzas no lineales actuando dentro de la subestructura. Para el presente análisis, se asumirá de que no se transmiten fuerzas de naturaleza no lineal entre las interfaces de la subestructura. Es decir, las fuerzas no lineales

únicamente están presentes en el interior de la subestructura.

Se define el vector \mathbf{w} como aquel que transforma la ecuación (4.1) en su forma de espacio estado. Es decir:

$$\mathbf{z}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(s)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(s)} \\ \mathbf{y}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Asimismo, se considerará que aparecen q fuerzas no lineales y que estas son de naturaleza polinómica con respecto a los desplazamientos de los nodos. Es decir:

$$\mathbf{F}^{(s)}(u^k, \dot{u}^k) = \sum_{i=1}^q \mathbf{K}_i^{(s)} u^{(s)i} \quad (4.3)$$

Con esta consideración, la ecuación (4.1) queda escrita como:

$$\mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)} \dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} + \sum_{i=1}^q \mathbf{K}_i^{(s)} u^{(s)i} = \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)} \quad (4.4)$$

Transformando la ecuación (4.4) a espacio-estado:

$$\mathbf{A}^{(s)} \dot{\mathbf{z}}^{(s)} + \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{z}^{(s)} = \mathbf{Q}^{(s)} \quad (4.5)$$

Donde:

$$\mathbf{A}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(s)} & \mathbf{M}^{(s)} \\ \mathbf{M}^{(s)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Q}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^q \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(s)i}$$

La aproximación se dará de tal manera que la solución para $\mathbf{z}^{(s)}$ se divida en una parte estática $\mathbf{z}_e^{(s)}$ y una parte dinámica $\mathbf{z}_d^{(s)}$. Así:

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{z}_e + \mathbf{z}_d \quad (4.7)$$

Estas dos partes serán exploradas a continuación.

4.1.1. Parte dinámica de la aproximación

A diferencia del método de Craig-Bampton dual propuesto por Gruber y Rixen (2018), se utilizarán los modos normales no lineales de las subestructuras para la parte dinámica de la aproximación. Se considerará la vibración libre y amortiguada del sistema no lineal. Es

decir, no se considerarán las fuerzas que aparecen en la frontera de la subestructura ni las fuerzas que aparecen al interior de esta.

$$\mathbf{A}^{(s)} \dot{\mathbf{z}}_d^{(s)} = -\mathbf{B}^{(s)} \mathbf{z}_d^{(s)} - \sum_{j=1}^q \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(s)i} \quad (4.8)$$

Se escribe la ecuación anterior de la forma:

$$\dot{\mathbf{z}}_d^{(s)} = -\mathbf{A}^{(s)-1} \mathbf{B}^{(s)} \mathbf{z}_d^{(s)} - \mathbf{A}^{(s)-1} \sum_{j=1}^q \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(s)i} \quad (4.9)$$

Tomando como referencia el desplazamiento y la velocidad del nodo 1, los modos normales pueden quedar expresados como:

$$\mathbf{z}_d = \{ \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(x_1, y_1) + \mathbf{m}_2(x_1, y_1) \} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Como se vio anteriormente, este procedimiento se repite para cada par de coordenadas (x_k, y_k) , con lo cual se puede generar el vector modal $\mathbf{w} = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N]^T$. La ecuación describe la relación entre las coordenadas físicas \mathbf{z}_d y las coordenadas modales \mathbf{w} . No obstante, ya que el cálculo de todos los modos normales no lineales para todos los grados de libertad del modelo de elementos finitos puede ser un proceso costoso computacionalmente, se toma una cantidad r de modos, siendo $r < N$. Esto implica que las coordenadas físicas de la subestructura únicamente quedarán aproximadas por los r modos normales no lineales.

$$\mathbf{z}_d^{(s)} \approx \{ \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w}) \} \mathbf{w} = \{ \mathbf{M}(\mathbf{w}) \} \mathbf{w} \quad (4.11)$$

Siendo $\mathbf{M}(\mathbf{w})$ una matriz de tamaño $2N \times 2r$, debido a que únicamente se seleccionan r modos normales no lineales. Asimismo, el vector \mathbf{w} es de tamaño $2r \times 1$.

Asimismo, en el caso que la subestructura no se encuentre restringida adecuadamente, esta se considerará flotante y habrá que realizar una extracción de sus modos de cuerpo rígido. Estos no tomarán en cuenta la parte no lineal de la subestructura y pueden quedar extraídos en la matriz $\mathbf{R}^{(s)}$, la cual contiene en sus columnas a los modos de cuerpo rígido de la subestructura.

Por otro lado, queda la cuestión acerca de los r modos que se considerarán para la aproximación de la parte dinámica. Debido al método que se está utilizando, se deben elegir el par de coordenadas (x_i, y_i) adecuadas para la aproximación. Debido a que se asume que la subestructura únicamente está excitada a través de sus interfaces, las coordenadas que se elegirán para obtener los modos normales no lineales serán aquellas que se encuentren en la frontera de la subestructura. Las coordenadas de este tipo estarán denotadas por

(x_{i_f}, y_{i_f}) . Al conjunto de estas coordenadas en un vector fila se le llamará \mathbf{w}_f y, por lo tanto, la aproximación de la respuesta dinámica de la subestructura quedará escrita como:

$$\mathbf{z}_d^{(s)} \approx \{\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}_f) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w}_f)\} \mathbf{w}_f = \{\mathbf{M}(\mathbf{w})_f\} \mathbf{w}_f \quad (4.12)$$

Los nodos elegidos para realizar el cálculo de los modos normales no lineales se muestran en la Figura 4.3

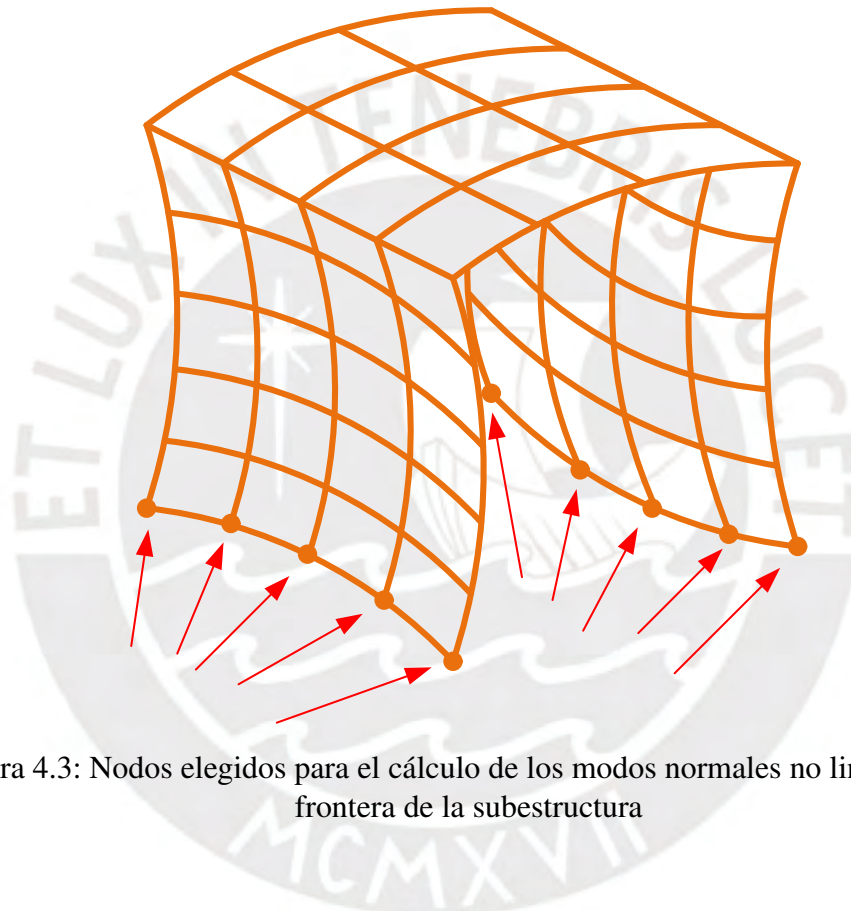


Figura 4.3: Nodos elegidos para el cálculo de los modos normales no lineales en la frontera de la subestructura

4.1.2. Parte estática de la aproximación

Para esta parte, los términos dinámicos $\dot{z}_e^{(s)}$ se desprecian, de tal manera que la ecuación (4.4) queda reducida a:

$$\mathbf{B}^{(s)} \mathbf{z}_e^{(s)} = \mathbf{Q}^{(s)} \quad (4.13)$$

Siguiendo el método de Craig-Bampton dual, se asumirá que únicamente las fuerzas en la frontera de la subestructura excitarán la parte estática, por lo que:

$$\mathbf{B}^{(s)} \mathbf{z}_e^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^{(s)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Se observa que, al asumir de que no existen fuerzas de naturaleza no lineal en la frontera de la subestructura, entonces la aproximación resultante de la parte estática de la respuesta del sistema será idéntica a la descrita por el método de Craig - Bampton dual en la ecuación (3.87).

$$\mathbf{z}_e^{(s)} \approx -\mathbf{K}^{(s)+} \mathbf{B}^{(s)T} \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=1}^{m^{(s)}} \mathbf{R}_i^{(s)} \alpha_i^{(s)} \quad (4.15)$$

4.1.3. Aproximación completa de la respuesta dinámica de la subestructura

La aproximación total de los grados de libertad del espacio - estado se logra sumando las aproximaciones dinámica y estática. Esto resulta en:

$$\mathbf{z}^{(s)} \approx \mathbf{z}_d^{(s)} + \mathbf{z}_e^{(s)} = \{\mathbf{M}(\mathbf{w})_f\} \mathbf{w}_f - \mathbf{K}^{(s)+} \mathbf{B}^{(s)T} \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=1}^{m^{(s)}} \mathbf{R}_i^{(s)} \alpha_i^{(s)} \quad (4.16)$$

4.2. Discusión acerca del método propuesto

A continuación, se exponen algunos puntos de importancia acerca del impacto, el uso y las limitaciones del método tal como ha sido desarrollado en este trabajo de investigación

4.2.1. Mejoras en cuanto al estado del arte

El método de Craig-Bampton dual ya mostraba una muy buena aproximación a las características de sistemas dinámicos (en particular, a las frecuencias amortiguadas), tal como lo mostraron Gruber y Rixen (2018). No obstante, este método aún carecía de la posibilidad de lidiar directamente con no linealidades que podrían aparecer dentro de las subestructuras, para lo cual la matemática desarrollada, en particular en la parte dinámica de la aproximación, ya no era válida.

Si bien es posible utilizar métodos iterativos para poder realizar la aproximación de un fenómeno no lineal, como lo hacen los códigos comerciales actuales de elementos finitos, no existía ningún término en las ecuaciones de aproximación que permitiera capturar las no linealidades de manera directa. Es decir, si se utilizara el método de Craig-Bampton dual en su forma lineal para aproximar fenómenos no lineales, lo que se estaría haciendo

es proyectar el comportamiento no lineal del sistema en un espacio lineal, lo cual evidentemente es una fuente de error en la respuesta del sistema aproximado.

La gran ventaja del método propuesto con respecto a la formulación lineal del método de Craig-Bampton dual es que proporciona las herramientas necesarias para tener un modelo de orden reducido exacto para sistemas dinámicos no lineales, en la medida que las no linealidades presentes en el sistema se puedan modelar en forma de series de potencia en las ecuaciones de movimiento (se tocará este punto con mayor detalle en las siguientes secciones).

4.2.2. Uso del método y limitaciones del método

El método es aplicable a sistemas que presenten no linealidades que puedan quedar expresadas en las ecuaciones de movimiento como series de potencias en los desplazamientos o velocidades nodales. Toda vez que las no linealidades puedan ser representadas de esta manera, se puede optar por el método propuesto para realizar la reducción de orden del modelo.

Es importante notar también que el número de modos normales no lineales a utilizar, así como la selección de aquellos nodos que se utilizarán como base para el cálculo de las matrices de aproximación dinámica, es dependiente en última instancia del usuario del método. Sin embargo, es importante dar las siguientes recomendaciones:

1. Para sistemas de pocos grados de libertad, es posible encontrar todos los modos normales no lineales asociados a todos los nodos de las fronteras de la subestructura en tiempos computacionales razonables. Si, por el contrario, la subestructura tiene un vasto número de nodos (y por consiguiente, de grados de libertad), entonces es posible que el cálculo de los modos normales no lineales asociados a todos los nodos en la frontera de una sola subestructura puede tomar incluso más tiempo que si la resolución del sistema dinámico se hubiera hecho mediante algún método de integración directa. Resulta importante entonces anticipar qué nodos son los que probablemente transfieran la mayor cantidad de carga hacia la subestructura para centralizar los esfuerzos computacionales en el cálculo de los modos normales no lineales asociados a esos nodos.
2. En cuanto a la selección de las subestructuras, lo más óptimo sería que las no linealidades anticipadas puedan quedar limitadas al interior de las subestructuras. En otras palabras, no es conveniente que los efectos de una no linealidad se den demasiado cerca de la frontera de las subestructuras. Esto debido a que no hay garantía de una continuidad del fenómeno no lineal en estas fronteras.
3. Este método es aplicable tanto a subestructuras que presentan no linealidades como a aquellas que únicamente presentan fenómenos lineales. Shaw y Pierre (1993)

demonstraron que los modos normales no lineales convergen hacia los modos normales usuales si es que no existen ninguna no linealidad en el sistema dinámico. No obstante, el hecho de calcular los coeficientes de los términos de orden superior de los polinomios que definen los modos normales no lineales de todas maneras toma tiempo y recursos computacionales, aunque estos den como resultado valores iguales a cero. Es por ello que se recomienda el uso del método cuando se tiene la certeza o al menos se tiene una alta probabilidad que existan fenómenos no lineales en las subestructuras elegidas. De no ser así, se puede optar por el método de Craig-Bampton dual en su forma lineal para poder resolver el problema dinámico.

Otra limitación importante para el método desarrollado proviene de los tipos de no linealidades que es posible modelar. A continuación, se describe esto en detalle.

4.3. Comportamiento no lineal de sistemas de cuerpos

Los tipos de no linealidades más comunes que aparecen en los modelos de elementos finitos usualmente tienen tres fuentes: no linealidades en la curva esfuerzo - deformación de los materiales involucrados en la simulación, grandes desplazamientos y/o grandes deformaciones unitarias, y no linealidades de contacto entre cuerpos (Bathe, 2016). La Tabla 4.1 especifica algunos aspectos técnicos que los modelos de elementos finitos toman en cuenta para incluir estas no linealidades en las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico.

Si ocurre al menos una de estas condiciones en el sistema de cuerpos en análisis, entonces la matriz de rigidez \mathbf{K} se vuelve una función de los desplazamientos U . Es decir:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(U) \quad (4.17)$$

Además de las no linealidades ya mencionadas, un sistema puede exhibir no linealidades externas, como fuerzas elásticas F_{elast} (resortes) no proporcionales a la deformación, o fuerzas de amortiguamiento F_{am} no proporcionales a la velocidad. Estas formas de no linealidad se pueden expresar como una serie de potencias en sus respectivos argumentos, como muestra la ecuación 4.18.

$$F_{elast} = \sum_{i=1}^n k_i \delta^i$$

$$F_{am} = \sum_{i=1}^n c_i v^i \quad (4.18)$$

Donde k_i y c_i son constantes en las series de potencias, δ es la deformación del resorte, y v es la velocidad de deformación del amortiguador.

Tabla 4.1: Clases de no linealidades

Tipo de no linealidad	Descripción
No linealidad de material	La única no linealidad está presente en la relación esfuerzo vs. deformación
Grandes desplazamientos, grandes rotaciones, deformaciones unitarias pequeñas	Los desplazamientos y las rotaciones de las fibras de los cuerpos son grandes, pero las deformaciones unitarias siguen siendo pequeñas. La relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria puede ser lineal o no lineal.
Grandes desplazamientos, grandes deformaciones, deformaciones unitarias grandes	Los desplazamientos y las rotaciones de las fibras de los cuerpos son grandes, así como también las deformaciones unitarias. La relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria puede ser lineal o no lineal
No linealidad de contacto	La no linealidad se da debido a la pérdida de contacto parcial o total entre dos cuerpos. También se puede dar debido a dos cuerpos que entran en contacto entre sí.

El método propuesto en este trabajo de investigación puede resolver no linealidades que tengan la forma descrita en la ecuación (4.18). Esto es posible gracias a la representación en series de potencias de los modos normales no lineales. Sin embargo, hay que realizar algunas precisiones en cuanto a las no linealidades descritas en la Tabla 4.1.

4.3.1. No linealidad de materiales

Este tipo de no linealidad aparece debido a la falta de proporcionalidad entre el esfuerzo normal y la deformación unitaria normal (o en su defecto, entre el esfuerzo cortante y la deformación angular). Este fenómeno ocurre comúnmente cuando los materiales presentan un comportamiento inelástico, aunque también puede aparecer en la zona elástica para determinado tipo de materiales.

En cualquiera de estos casos, las deformaciones no guardan una relación lineal con los esfuerzos. Es decir, la matriz $C^{(m)}$ de la ecuación (3.8) no es una matriz de coeficientes constantes, sino que depende de los desplazamientos U . En particular, si es posible que la relación entre los esfuerzos y las deformaciones queden expresadas como series de potencias, como se muestra en la ecuación (4.19), entonces el método propuesto podrá resolver

las no linealidades que generarían este tipo de relaciones.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (4.19)$$

Es importante en este punto resaltar una limitación del método propuesto: estas relaciones deben describir una relación elástica entre el esfuerzo y la deformación del material. De no hacerlo, la aproximación mediante el método propuesto no está diseñada para distinguir entre deformaciones elásticas y deformaciones plásticas, por lo que cualquier fenómeno de endurecimiento por deformación o, en general, cualquier otro efecto debido a la plasticidad no podrá ser tomado en cuenta durante la aproximación de la solución dinámica.

4.3.2. Grandes desplazamientos

Los grandes desplazamientos pueden ocurrir considerando deformaciones unitarias y angulares pequeñas o no. Esto significa que las fibras que componen un cuerpo pueden desplazarse de manera considerable (con respecto a las dimensiones originales del cuerpo) pero el tamaño de dichas fibras o el ángulo que forman entre ellas se mantiene pequeño o, en su defecto, también pueden variar en tamaños y ángulos considerables.

Cualquiera sea el caso que se analice, los grandes desplazamientos causan una dependencia de la matriz de rigidez \mathbf{K} con los desplazamientos U , lo cual exige que el solucionador utilizado para resolver el problema dinámico tenga que iterar múltiples veces hasta conseguir la convergencia de la solución.

Para el método de subestructuramiento desarrollado, se asumirá que las subestructuras podrían estar sujetas a grandes desplazamientos y que, además, las deformaciones unitarias normales y angulares tendrían podrían tener magnitudes grandes. Esto asegura de que la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(s)}$ de una subestructura no se mantendrá constante durante todo el tiempo de simulación. Asimismo, las partes del modelo total que no sean tomadas en cuenta para el subestructuramiento también podrían estar sujetas a este tipo de desplazamientos.

Las no linealidades causadas por grandes desplazamientos pueden ser incluidas dentro de la ecuación de movimiento del sistema según la ecuación (4.20), considerando un comportamiento elástico lineal del material, el segundo esfuerzo de Piola - Kirchhoff, la deformación unitaria de Green - Lagrange, y considerando que el modelo ha sido discretizado utilizando elementos sólidos tridimensionales (Touzé y cols., 2021).

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{C}\dot{U} + \mathbf{K}U + \mathbf{G}(U, U) + \mathbf{H}(U, U, U) = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Donde los términos no lineales $\mathbf{G}(U, U)$ y $\mathbf{H}(U, U, U)$ son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(U, U) &= \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \mathbf{G}_{rs} U_r U_s \\
\mathbf{H}(U, U, U) &= \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbf{H}_{rst} U_r U_s U_t
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Donde U_r , U_s y U_t son los vectores de desplazamiento de los nodos r , s y t . Asimismo, las matrices \mathbf{G}_{rs} y \mathbf{H}_{rst} contienen a los coeficientes de los términos no lineales. Como se puede observar en las ecuaciones (4.21), las no linealidades que provienen de los grandes desplazamientos generan polinomios de orden superior en las ecuaciones de movimiento, por lo que el método es adaptable a la solución de problemas que involucren grandes desplazamientos.

4.3.3. Cambio en las condiciones de rigidez

Otra manera en que la matriz de rigidez global de un sistema de cuerpos \mathbf{K} podría depender de los desplazamientos U es si, durante el tiempo de simulación, las condiciones de contacto entre los cuerpos cambian, ya sea porque algunas caras del sistema de cuerpos entran en contacto unas con otras o porque dejan de estarlo (ocurre separación). Esto implica que la matriz de rigidez depende nuevamente del vector de desplazamientos U , pues dependiendo de la magnitud de los mismos, los contactos originales entre las caras de un sistema de cuerpos pueden cerrarse o abrirse.

Otra limitación del método desarrollado es que no resolverá este tipo de no linealidades. Se asumirá que las condiciones de contacto entre las partes de los cuerpos que se encuentran dentro de la misma subestructura no variarán. Es decir, las subestructuras no entrarán en contacto con ninguna otra cara del sistema de cuerpos con la que no hayan estado en contacto inicialmente. Asimismo, tampoco exhibirán separación ni parcial ni total de ninguna cara que se haya encontrado en contacto inicialmente. Esto se hace debido a que habría que considerar un nuevo cálculo de los modos normales no lineales (y en general, de toda la aproximación de las ecuaciones de movimiento) cada vez que exista un cambio en las condiciones de rigidez, lo cual podría incluso aumentar el costo computacional de la solución comparado con un solucionador de integración directa.

4.4. Acerca del amortiguamiento

En el método de subestructuramiento propuesto, se asumirá que las subestructuras podrían tener amortiguamiento proporcional. Con ello, se podría considerar el amortiguamiento propio de la subestructura simplemente al encontrar los parámetros α y β apropiados. No

obstante, el amortiguamiento también podría ser no proporcional y, en tal sentido, la matriz de amortiguamiento podría ser no diagonal.

El método propuesto está preparado para resolver ambos tipos de amortiguamiento, debido a que está basado en la versión del método de Craig - Bampton dual para sistemas que no se encuentran proporcionalmente amortiguados.



Capítulo V

Implementación del Método de Subestructuramiento

El método de subestructuramiento utilizando modos normales no lineales se implementó utilizando MATLAB®. Esto se realizó de acuerdo a los siguientes pasos:

1. El código lee las matrices de masa \mathbf{M} , amortiguamiento \mathbf{C} y rigidez \mathbf{K} de un mallador o código de elementos finitos comercial (en el caso de este trabajo, se utilizó el software ANSYS®). Con estas matrices también se identifican las posiciones nodales.
2. Se realiza la partición de las subestructuras. Se define la matriz booleana $\mathfrak{B}^{(s)}$ para cada subestructura, así como los grados de libertad interiores y los de la frontera.
3. Se hace la transformación de la ecuación de movimiento de la subestructura a su forma de espacio-estado.
4. **Parte dinámica de la aproximación:** Se hallan los modos normales no lineales de la subestructura del tipo Shaw y Pierre (1993) hasta una aproximación cúbica. Estos modos están basados en los desplazamientos que se encuentran en la frontera de la subestructura.
5. **Parte estática de la aproximación:** Se desprecian los términos no lineales y se realiza la aproximación según el método de Craig-Bampton dual para un amortiguamiento general (Rixen, 2004).
6. Se ensambla la ecuación de movimiento completa de la subestructura como una suma de las aproximaciones dinámica y estática.
7. Se vuelve a ensamblar el modelo completo a partir de todas las subestructuras creadas.

8. Se resuelve el sistema de ecuaciones mediante el método HHT.

A continuación, se presentan tres diagramas de flujo principales, los cuales resumen el proceso para resolver un sistema dinámico con el método propuesto.

5.1. Programa Principal

La Figura 5.1 muestra el diagrama de flujo para el programa principal del método propuesto.

Como se puede observar, este programa tiene dos subprogramas principales una vez que entra dentro de la iteración con la variable i :

- Parte dinámica de la aproximación.
- Parte estática de la aproximación.

5.1.1. Parte dinámica de la aproximación

En esta parte dinámica de la aproximación se hallan los modos normales no lineales con base en los grados de libertad de la frontera de la subestructura. La Figura 5.2 muestra el diagrama de flujo de este proceso. Es importante resaltar que los modos normales no lineales son calculados en la forma sugerida por Shaw y Pierre (1993).

5.1.2. Parte estática de la aproximación

En esta parte estática de la aproximación se suprimen los efectos no lineales de la subestructura y se utiliza el método de Craig - Bampton dual. Es importante resaltar que dentro de este método se deben calcular modos de cuerpo rígido. Estos modos de cuerpo rígido aparecerán si la subestructura es flotante, según la definición de Rixen (2004) y se pueden calcular a partir de la ecuación de espacio-estado de la subestructura sin considerar no linealidades también. La extracción de modos de los modos de vibración tiene como base el algoritmo de bloque de Lanczos desplazado (Golub y Underwood, 1977). La Figura 5.3 muestra el diagrama de flujo para esta parte del código.

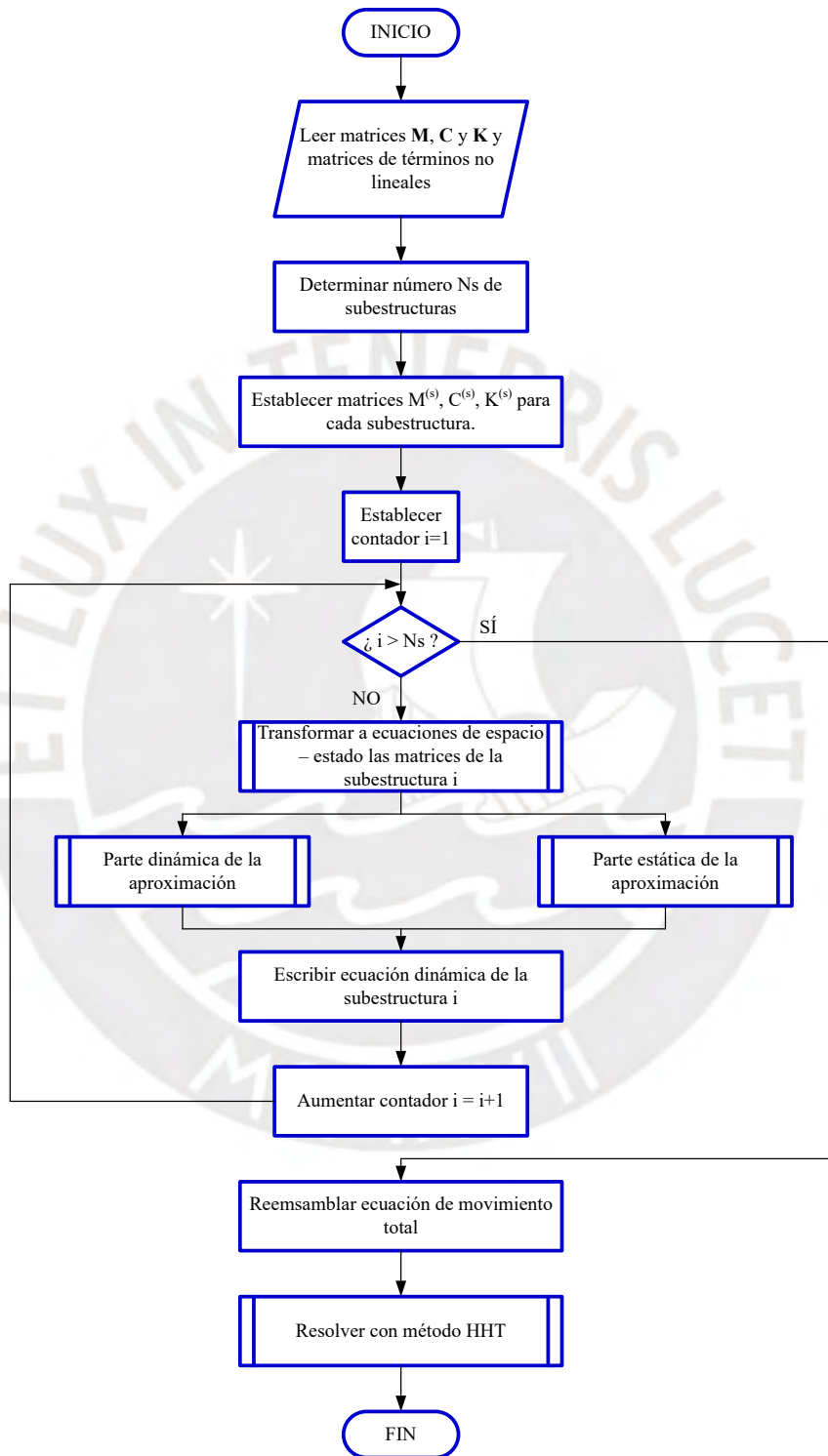


Figura 5.1: Programa principal del método propuesto

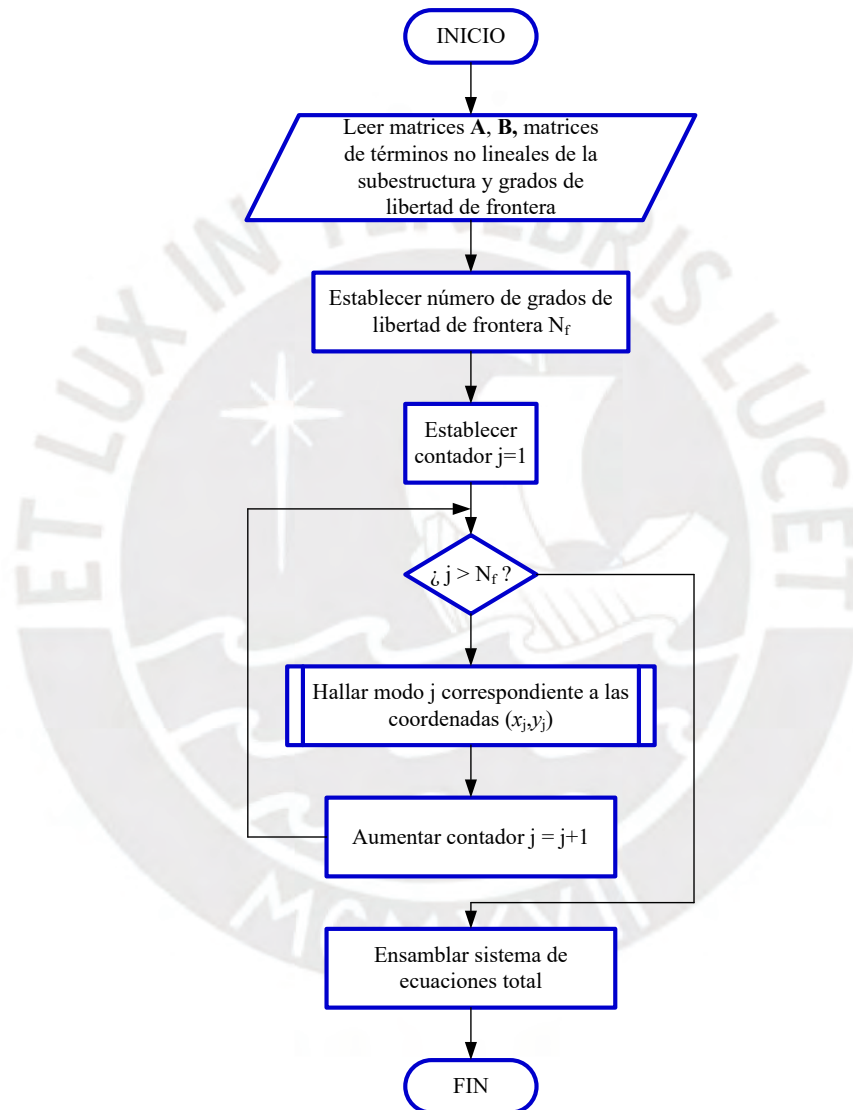


Figura 5.2: Parte dinámica de la aproximación del método propuesto

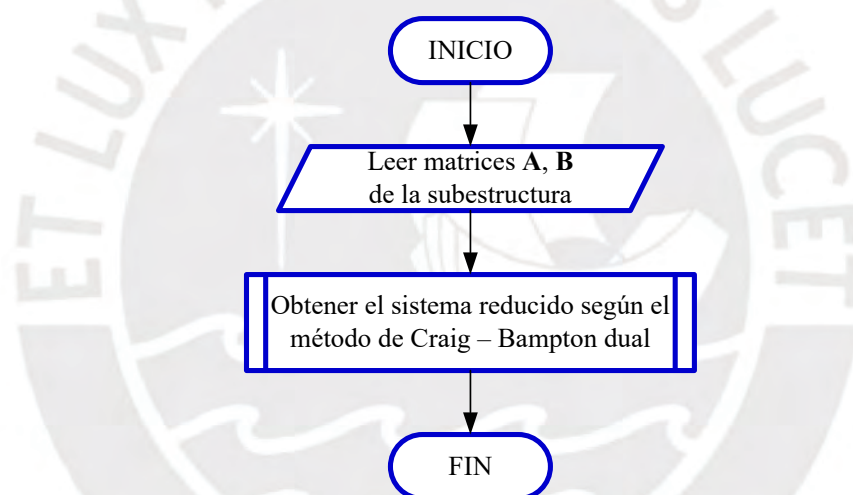


Figura 5.3: Parte estática de la aproximación del método propuesto

Capítulo VI

Comparación del método de subestructuramiento frente a métodos clásicos en elementos finitos para resolución de problemas transitorios estructurales

A continuación se presentan algunos casos de estudio donde se probó el método de subestructuramiento utilizando modos normales no lineales implementado en el capítulo anterior. Se compararon los resultados obtenidos mediante métodos clásicos de resolución de problemas de elementos finitos (método HHT, extracción de valores y vectores propios reales y complejos, entre otros) con aquellos obtenidos con el método de subestructuramiento propuesto. Las principales variables tomadas en cuenta para las comparaciones fueron la precisión de los resultados y el tiempo de procesamiento para resolver el sistema dinámico.

Todas las simulaciones fueron realizadas con un único núcleo de un procesador Intel® Core™ i9-14900KF a 5.0 GHz.

6.1. Caso de estudio: Viga Bernoulli con amortiguadores

6.1.1. Descripción general del caso de estudio

El primer caso de estudio se basa en aquel propuesto originalmente por Kraker y Campen (1996) y posteriormente utilizado por Gruber y Rixen (2018) para validar el método de Rubin y el método de Craig-Bampton dual para sistemas sin amortiguamiento proporcional, respectivamente. La viga tiene las siguientes características geométricas y propieda-

des mecánicas:

Tabla 6.1: Características de la viga utilizada por Kraker y Campen (1996) y Gruber y Rixen (2018).

Característica	Valor	Unidad
Largo total	1,8	<i>m</i>
Sección Transversal	$9,0 \times 10^{-4}$	m^2
Momento de Inercia	$7,0 \times 10^{-8}$	m^4
Módulo de Elasticidad	$2,1 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
Densidad	$7,8 \times 10^3$	$kg \cdot m^{-3}$

Este caso de estudio incluyó un análisis modal amortiguado de la viga para evaluar si el método propuesto podía calcular correctamente las frecuencias amortiguadas, de manera similar a lo realizado por Gruber y Rixen (2018). El objetivo de este análisis fue verificar que el método propuesto converge hacia el método de Craig-Bampton dual para sistemas con amortiguamiento no proporcional.

6.1.2. Mallado

El mallado consistió en 18 elementos de tipo viga, tal como se realizó en las propuestas originales anteriormente citadas. El mallado se puede observar en la Figura 6.1.

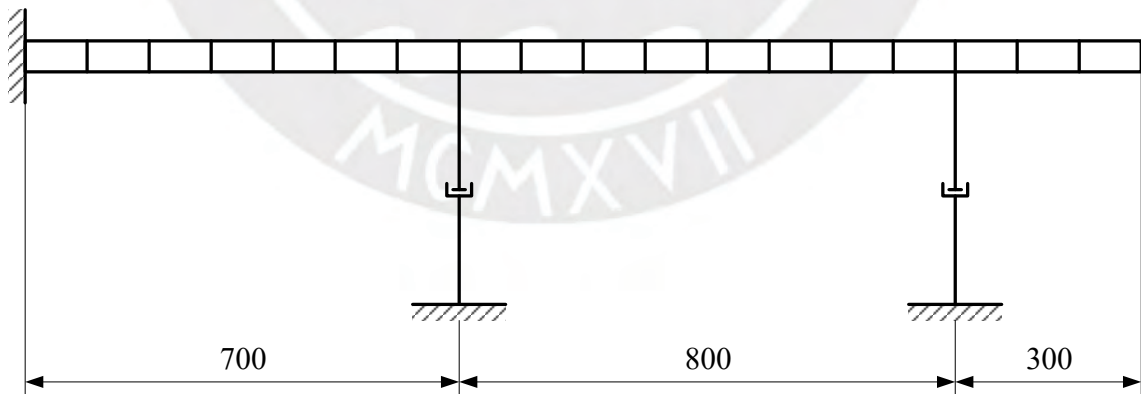


Figura 6.1: Mallado de viga

6.1.3. Condiciones de apoyo

Se consideró que el nodo del extremo izquierdo de la viga estaba completamente fijo. Es decir, sus grados de libertad de traslación y el grado de libertad de rotación quedaron completamente bloqueados. Asimismo, se consideró que la viga se encuentra apoyada sobre dos amortiguadores: uno de ellos colocado a 700 mm del extremo fijo de la viga, y otro colocado a 1500 mm del mismo extremo. Se consideró una constante de amortiguamiento igual a $1,0 \times 10^4\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ para ambos amortiguadores.

6.1.4. Análisis modal amortiguado

Se utilizaron dos subestructuras para la simulación de la viga. Una subestructura de longitud 1000 mm medidos desde la parte izquierda de la viga, y otra subestructura de longitud 800 mm . Estas subestructuras son las mismas que las utilizadas en los estudios mencionados al comienzo de esta sección.

6.1.5. Discusión de los resultados obtenidos en el caso de estudio

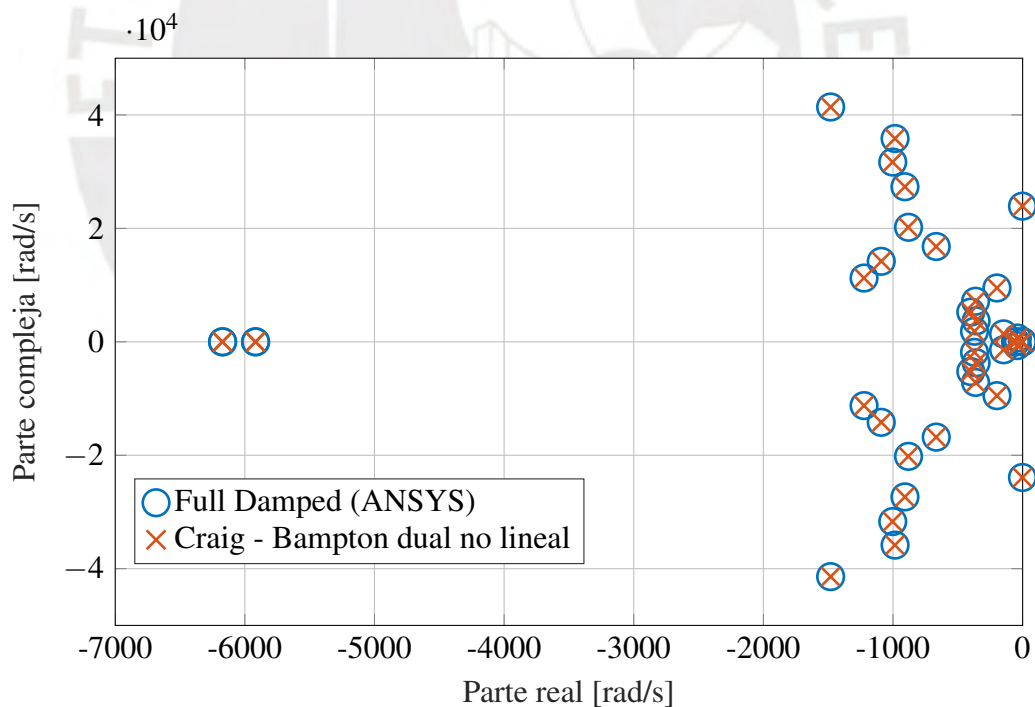


Figura 6.2: Resultados del análisis modal amortiguado

Como se observa en la Figura 6.2, los resultados del análisis modal amortiguado con el método *Full Damped* y con el método de subestructuramiento propuesto son muy simila-

res. Este hecho es un resultado esperable debido a que ninguna de las dos subestructuras contiene no linealidades, por lo que los coeficientes de los términos de orden superior de la ecuación de movimiento de ambas subestructuras son nulos. Es decir, en cada una de las subestructuras se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(s)}\ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)}\dot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{u}^{(s)k}, \dot{\mathbf{u}}^{(s)k}) &= \mathbf{f}_i^{(s)} + \mathbf{f}_f^{(s)}, \quad k = 2, 3, \dots \\ \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{u}^{(s)k}, \dot{\mathbf{u}}^{(s)k}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Shaw y Pierre (1993) demostraron que, en estos casos, los modos normales no lineales convergen hacia los vectores propios del sistema lineal. Por lo tanto, cuando las ecuaciones de movimiento de las subestructuras no contienen términos no lineales, el método de subestructuramiento propuesto converge hacia el método de Craig-Bampton dual con amortiguamiento no proporcional.

Por otro lado, al igual que Gruber y Rixen (2018), se examinó el error relativo entre las partes reales \mathcal{E}_{real} y complejas \mathcal{E}_{comp} de los modos de vibración encontrados. Estos errores se evaluaron según las ecuaciones .

$$\mathcal{E}_{real} = \frac{|\Re(\sigma_{jfull}) - \Re(\sigma_{jred})|}{|\Re(\sigma_{jfull})|} \quad \mathcal{E}_{comp} = \frac{|\Im(\sigma_{jfull}) - \Im(\sigma_{jred})|}{|\Im(\sigma_{jfull})|} \quad (6.2)$$

Donde los operadores \mathcal{R} y \mathcal{C} extraen la parte real y compleja del j -ésimo modo de vibración σ_j . Los resultados de los errores relativos tanto para la parte real como para la parte compleja se encuentran por debajo de $2 \cdot 10^{-3}$, con excepción de la parte real del modo 16, como se muestra en la Figura 6.3.

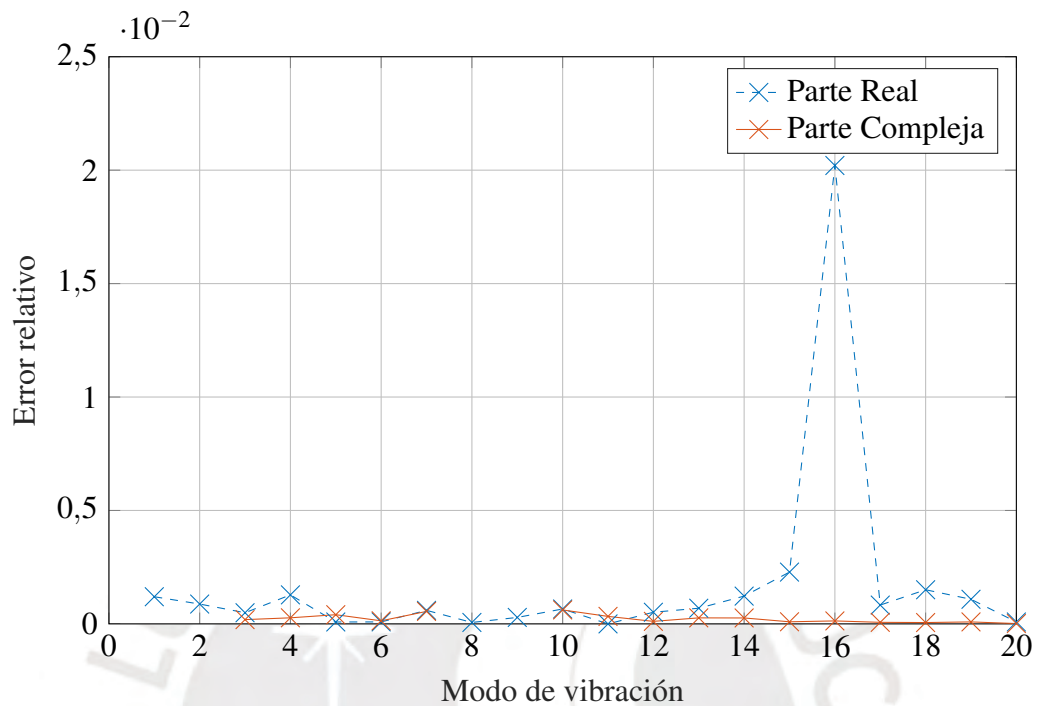


Figura 6.3: Errores relativos de las partes real y compleja de los modos de vibración hallados

Aún así, el error relativo de la parte real de este modo se encuentra por debajo del 3%, magnitud que es normalmente aceptada en la práctica de la ingeniería. Esto demuestra la efectividad de la reducción de orden del sistema mediante el método propuesto en cuanto a la precisión al realizar un análisis modal amortiguado.

6.2. Caso de estudio: Viga Bernoulli sometida a carga sinusoidal apoyada sobre un resorte con no linealidad cúbica

6.2.1. Descripción general del caso de estudio

Aquí se replicó la geometría del caso de estudio de Ponsioen y cols. (2020), el cual consistió en una viga con las características mostradas en la Tabla 6.2. Asimismo, para esta viga se consideró amortiguamiento proporcional, por lo que los factores α y β también fueron definidos.

Tabla 6.2: Características de la viga utilizada por Ponsioen y cols. (2020)

Característica	Valor	Unidad
Longitud total	2700	mm
Peralte	10	mm
Ancho	10	mm
Módulo de Elasticidad	45×10^6	kPa
α	$1,25 \times 10^{-4}$	s^{-1}
β	$2,5 \times 10^{-4}$	s
Densidad	$1,78 \times 10^3$	$kg \cdot m^{-3}$

Asimismo, la fuerza en el resorte no lineal F_{res} se rige por la ecuación (6.3).

$$F_{res} = \kappa \delta^3 \quad (6.3)$$

Donde $\kappa = 4 \times 10^6 N/m^3$ y δ es la elongación del resorte en m . La geometría para este caso de estudio se puede ver en la Figura 6.4.

6.2.2. Mallado

Al igual que en una de las variantes descritas por Ponsioen y cols. (2020), se utilizaron 500 elementos viga para esta simulación.

6.2.3. Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo

Como se mencionó anteriormente, se consideró que la arista vertical izquierda de la viga se encuentra empotrada, mientras que en el extremo libre se conectó un resorte vertical no

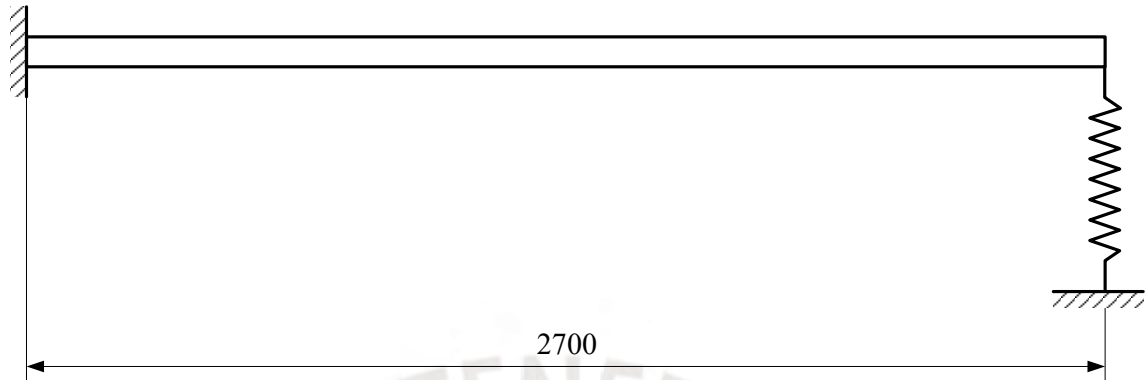


Figura 6.4: Geometría del segundo caso de estudio

lineal. En el mismo extremo, se consideró también una fuerza vertical $F_v(t) = P \cos(\Omega t)$, donde P es la amplitud de la fuerza en N , Ω es la frecuencia de la fuerza en rad/s y t es el tiempo en s . Los valores de estos parámetros para la simulación realizada se pueden ver en la Tabla 6.3

Tabla 6.3: Características de la carga utilizada por Ponsioen y cols. (2020)

Característica	Valor	Unidad
Magnitud de la fuerza P	1	N
Frecuencia Ω	7	rad/s

La frecuencia de $7 rad/s$ fue elegida debido a que un análisis modal previo mostró que esta era la frecuencia a la que correspondía el modo de vibración que probablemente se activaría durante la aplicación de la carga.

En este punto, se difiere del estudio original en el siguiente sentido: Ponsioen y cols. (2020) lograron un modelo de orden reducido para determinar la amplitud máxima de desplazamiento del extremo libre de la viga en función de la frecuencia. Su objetivo era comparar su modelo de orden reducido con los métodos de colocación y balance armónico. Sin embargo, este no es el propósito de la presente investigación, por lo que no se reproducirán las mismas simulaciones o cálculos. En su lugar, se resolverán las ecuaciones de movimiento mediante el método de integración directa HHT y se compararán estos resultados con los obtenidos mediante el método de subestructuramiento propuesto.

6.2.4. Resultados utilizando el método HHT

El paso de tiempo inicial para resolver las ecuaciones de movimiento fue de $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$, siendo este paso de tiempo variable según un algoritmo adaptativo propio del software

ANSYS ®. El tiempo de simulación para resolver las ecuaciones de movimiento al discretizar el problema mediante el método de elementos finitos fue de 445 s y se utilizó 50 MB de memoria RAM. Los resultados del desplazamiento vertical del extremo libre de la viga se pueden ver en la Figura 6.5.

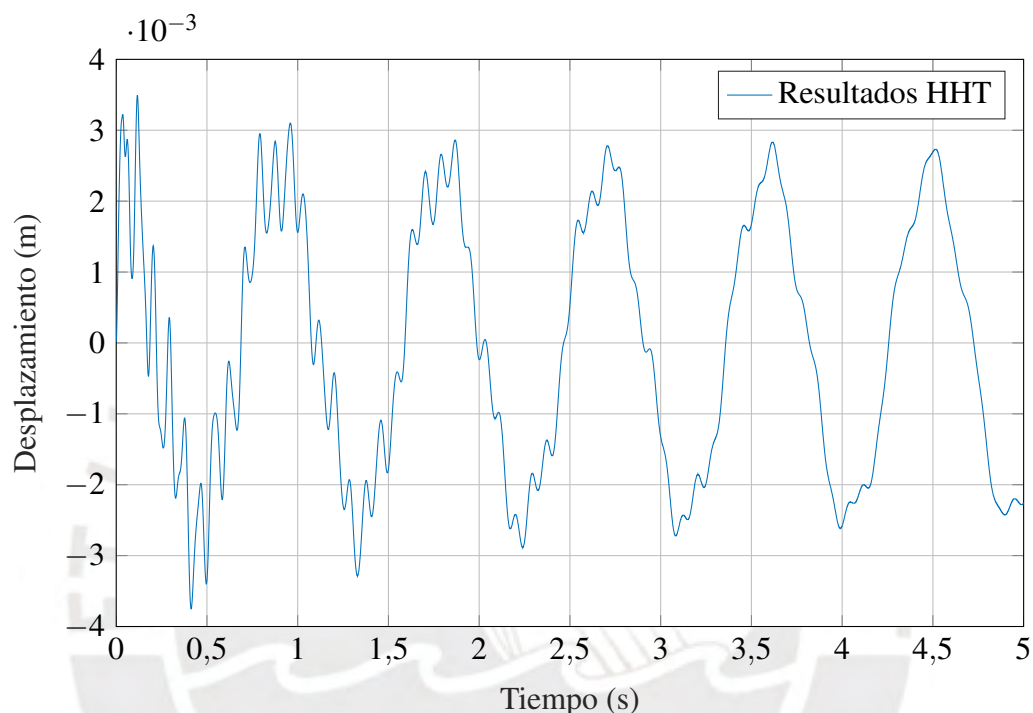


Figura 6.5: Amplitud de desplazamiento del extremo libre de la viga con el método HHT

6.2.5. Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado

Esta viga se dividió en dos subestructuras, cada una de longitud 1350 mm. En la subestructura izquierda, se observó que los modos normales no lineales carecieron de términos de orden superior, debido a que no existieron no linealidades en esa parte de la subestructura. No obstante, en la subestructura de la derecha se encontraba el resorte no lineal, por lo que sí se observó la presencia de términos de orden superior en esta parte. Luego de haber hecho la reducción en el orden del modelo, se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 6.6. Cabe resaltar que en esa figura se han superpuesto los resultados obtenidos mediante el método HHT con los obtenidos mediante el método de subestructuramiento propuesto. Utilizando el mismo paso de tiempo que en la simulación con el método HHT (sin el algoritmo adaptativo) y utilizando el método de Newmark para resolver el sistema de ecuaciones que resulta luego de haber hecho la reducción de orden del modelo,

se obtuvo un tiempo de simulación de 23 s, utilizando 10 MB de memoria RAM en el proceso.

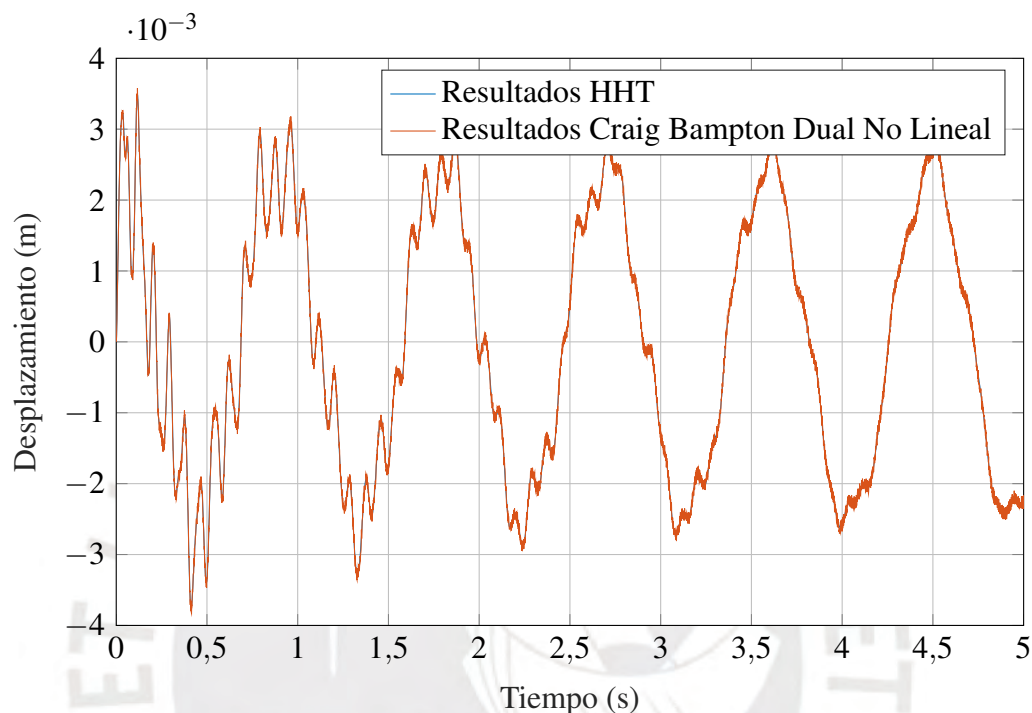


Figura 6.6: Amplitud de desplazamiento del extremo libre de la viga con el método HHT

6.2.6. Discusión de los resultados

Los resultados en cuanto a tiempo de simulación y uso de recursos computacionales (memoria RAM) son claramente favorables al método de subestructuramiento propuesto. En cuanto al error relativo entre los desplazamientos obtenidos mediante el método HHT y el método de Craig-Bampton Dual no lineal, este se puede observar en la Figura 6.7. Los errores relativos no superan el 1% en el peor de los casos, lo que indica que los resultados obtenidos con el método de subestructuramiento propuesto son aceptables dentro de la práctica de la ingeniería, proporcionando una buena aproximación a los resultados que se obtendrían mediante métodos de integración directa.

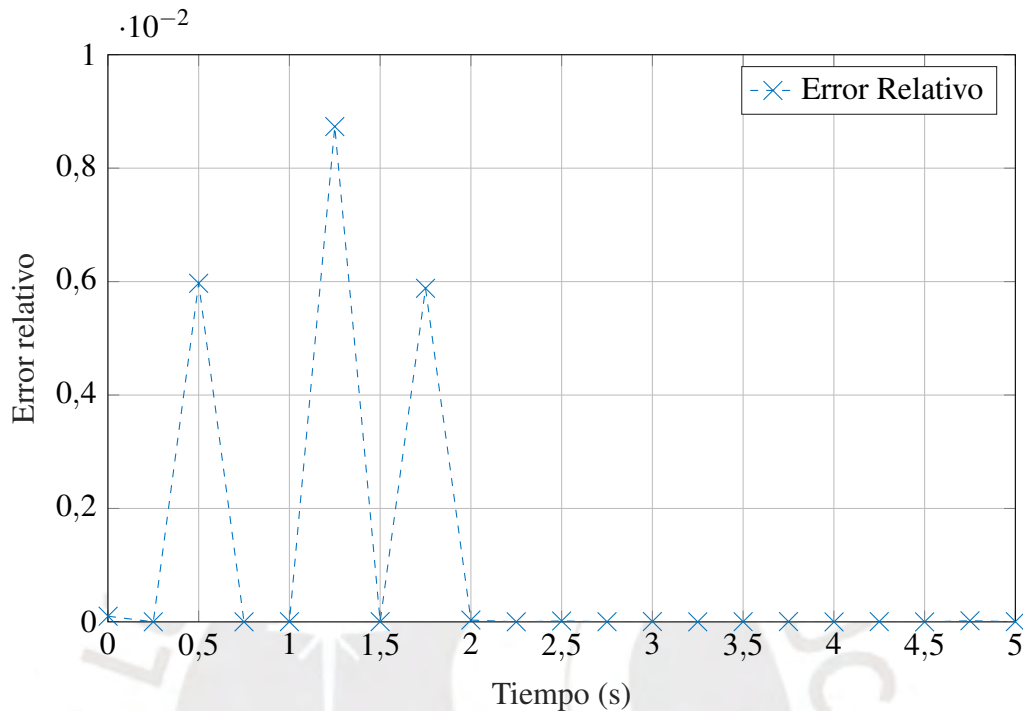


Figura 6.7: Errores relativos del desplazamiento vertical del extremo libre de la viga entre el método HHT y el método de Craig-Bampton dual no lineal

6.3. Caso de estudio 3: Armadura con resortes no lineales

6.3.1. Descripción general del caso de estudio

En los ejemplos anteriores, se había probado el método propuesto en un único cuerpo discretizado sometido a cargas. No obstante, este método también puede ser empleado para sistemas de cuerpos. A continuación, se propone la simulación de una armadura con resortes no lineales que está sometida a cargas sinusoidales. El objetivo de este estudio es encontrar los desplazamientos en el tiempo de los nodos con mayor amplitud de vibración. Las propiedades mecánicas del material utilizado para la armadura, la constante k del resorte no lineal (cuya fuerza corresponde a una no linealidad cúbica en la deformación δ de la forma $F = k\delta^3$), así como las constantes de amortiguamiento proporcional α y β , se encuentran en la Tabla 6.4. La geometría se basó en una armadura con las características geométricas mostradas en la Figura 6.8. En esta figura también se observa la dirección y puntos de aplicación de las cargas sinusoidales, así como las localizaciones de las articulaciones tanto fijas como deslizantes en la armadura.

Tabla 6.4: Características geométricas y propiedades mecánicas del material de la armadura

Característica	Valor	Unidad
Sección transversal	7854	mm^2
Densidad	7850	kg/m^3
Módulo de elasticidad	$2,1 \times 10^5$	MPa
Razón de Poisson	0,3	
α	$1,25 \times 10^{-4}$	s^{-1}
β	$2,5 \times 10^{-4}$	s

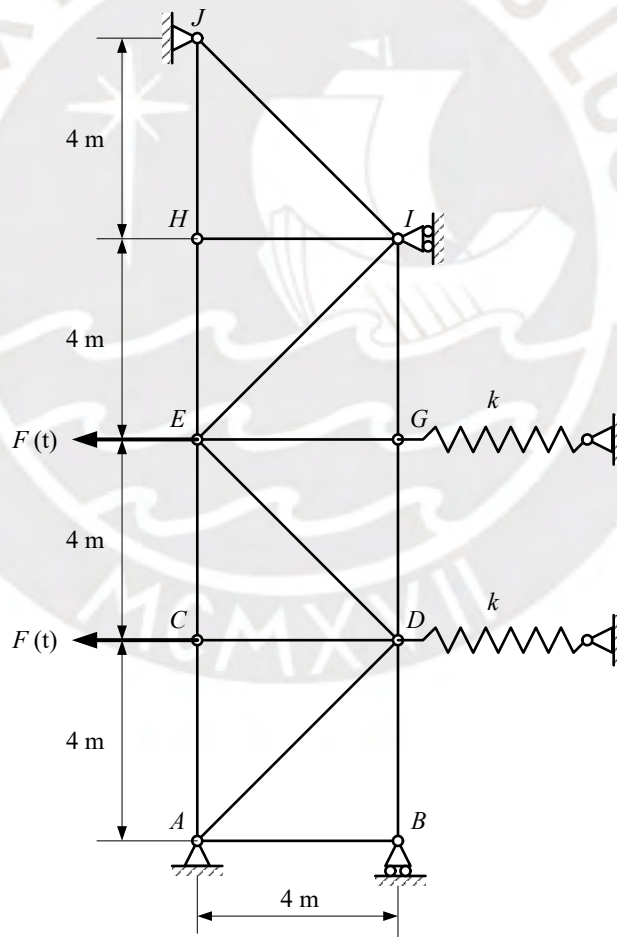


Figura 6.8: Armadura del tercer caso de estudio

6.3.2. Mallado

Esta armadura fue mallada con elementos barra de dos nodos, cada uno con grados de libertad de traslación en el plano. En total, se tuvieron 15 elementos barra y 9 nodos.

6.3.3. Condiciones de apoyo y carga

Se consideraron dos fuerzas de la forma $F(t) = P \cos(\Omega t)$ aplicadas horizontalmente sobre dos nudos de la armadura con las características mostradas en la Tabla 6.5. La fre-

Tabla 6.5: Características de la carga utilizada sobre la armadura

Característica	Valor	Unidad
Magnitud de la fuerza P	10^6	N
Frecuencia Ω	165	rad/s

cuencia de 165 rad/s fue elegida debido a que un análisis modal previo mostró que esta era la frecuencia a la que correspondía el modo de vibración que probablemente se activaría durante la aplicación de la carga. Este modo de vibración se puede observar en la Figura 6.9. Por otro lado, los desplazamientos nodales restringidos se pueden observar en la Figura 6.8, como se mencionó anteriormente.

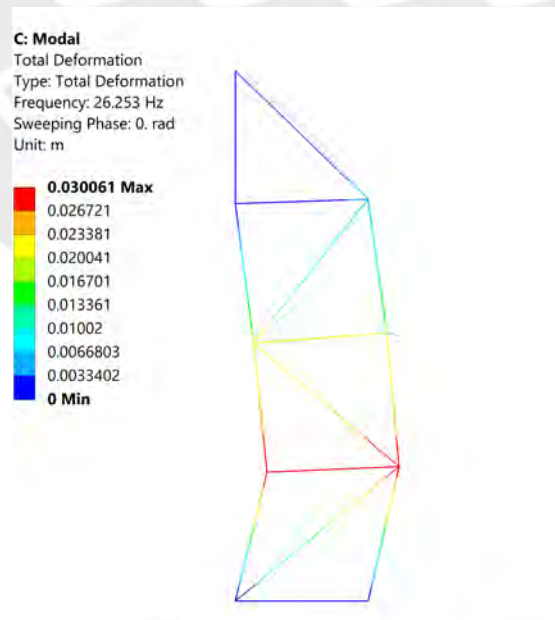


Figura 6.9: Modo de vibración de la armadura a 165 rad/s ($\approx 26,253 \text{ Hz}$)

6.3.4. Resultados utilizando el método HHT

El paso de tiempo inicial para resolver las ecuaciones de movimiento fue de $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ s, siendo este paso de tiempo variable según un algoritmo adaptativo del propio software ANSYS®. El tiempo de simulación para resolver las ecuaciones de movimiento al discretizar el problema mediante el método de elementos finitos fue de 37 s y se utilizó 42 MB de memoria RAM. La Figura 6.10 muestra el desplazamiento horizontal del nudo C de la armadura luego de un análisis transitorio realizado mediante el método HHT.

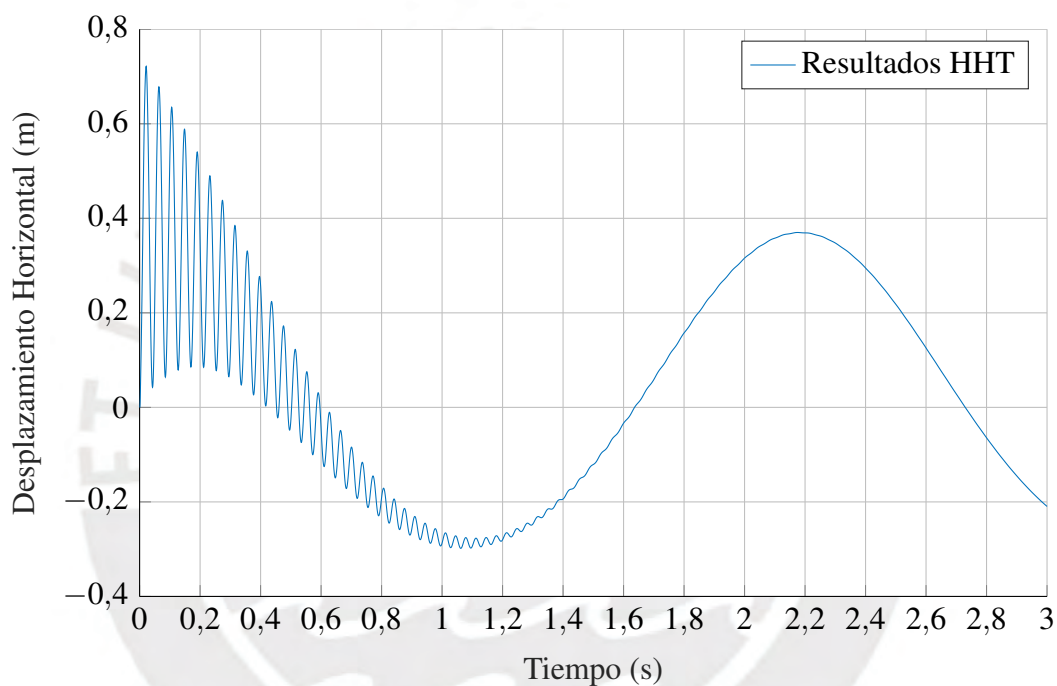


Figura 6.10: Desplazamiento horizontal del nudo C en función del tiempo en segundos

6.3.5. Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado

Esta armadura se dividió en dos subestructuras, que son las que se muestran en la Figura 6.11 y en la Figura 6.12. A diferencia del caso anterior, en cada una de estas subestructuras ahora se tiene un resorte no lineal, lo cual introduce términos de orden superior en las matrices de modos normales no lineales. Se puede observar que la subestructura de la Figura 6.11 es estable, por lo que no presentará modos de cuerpo rígido. Mientras que la subestructura mostrada en la Figura 6.12 es inestable, por lo que esta sí presentará estos modos a 0 Hz.

Se hallaron los modos normales no lineales de ambas estructuras, incluyendo los modos de cuerpo rígido para utilizarlos en la parte estática de la aproximación. En la Figura 6.13 se muestran los resultados para el desplazamiento horizontal del nudo C . Se observa que la aproximación es bastante cercana a la obtenida mediante el método HHT, tanto así que las curvas de ambos resultados se encuentran prácticamente superpuestas. Asimismo, utilizando el mismo paso de tiempo que en la simulación con el método HHT (sin el algoritmo adaptativo) y utilizando el método de Newmark para resolver el sistema de ecuaciones que resulta luego de haber hecho la reducción de orden del modelo, se obtuvo un tiempo de simulación de 14 s, utilizando 7 MB de memoria RAM en el proceso.

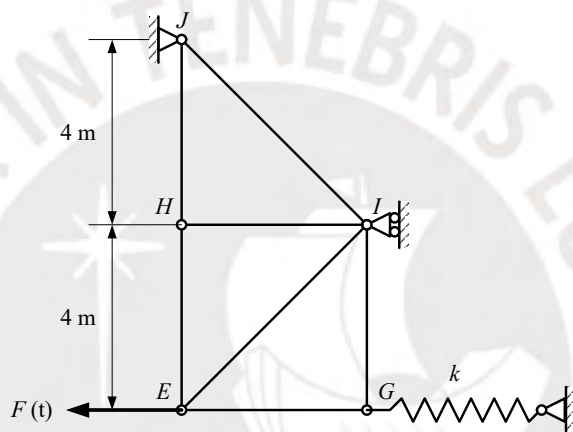


Figura 6.11: Primera subestructura de la armadura

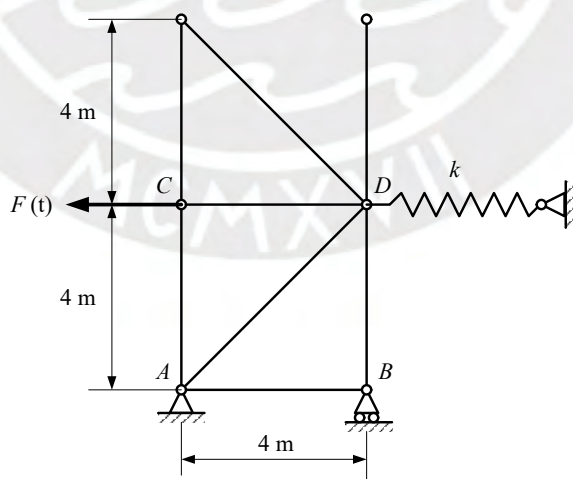


Figura 6.12: Segunda subestructura de la armadura

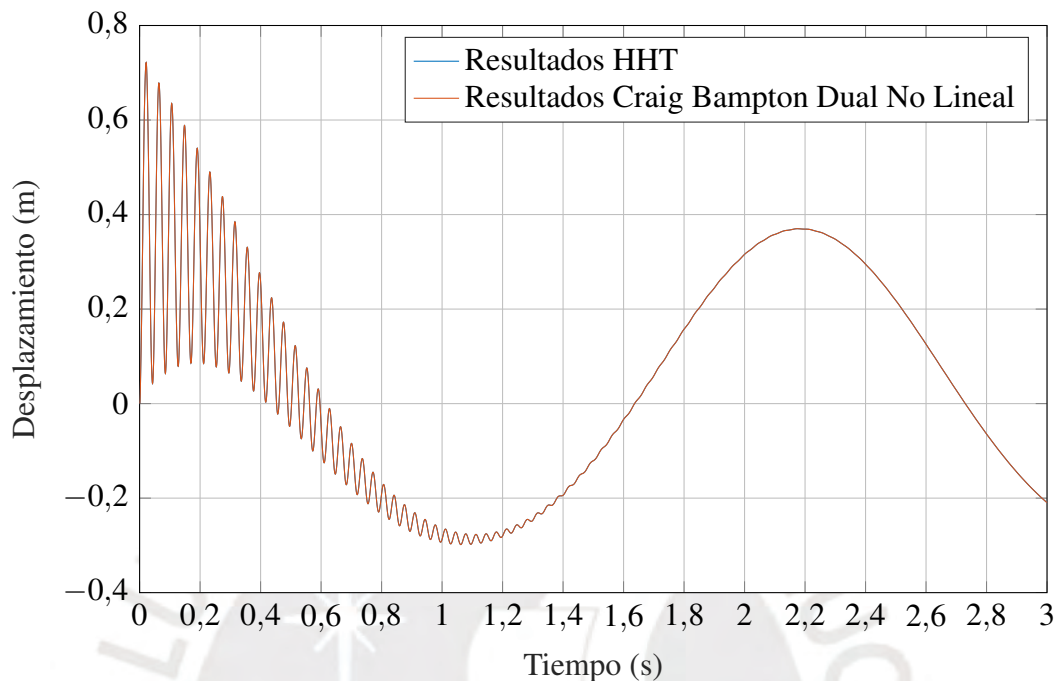


Figura 6.13: Desplazamiento horizontal del nudo C en función del tiempo en segundos

6.3.6. Discusión de Resultados

Tal como se observa en la Figura 6.13, las curvas de respuesta de los desplazamientos del nudo C están bastante cerca una de la otra. Esto se puede observar más claramente en la Figura 6.14. Lo que sí resulta claro es que la reducción de tiempo computacional no fue tan notable como en los otros casos estudiados. Esto se debe a que los grados de libertad del sistema son de un número menor que en los otros casos al tratarse de elementos tipo barra y no viga, siendo estos últimos los que tienen más nodos y más grados de libertad por nodo. Esto hace que la reducción de orden del modelo no sean tan notable como en los casos anteriores y por lo tanto, se tenga finalmente un modelo efectivamente reducido pero con un número de grados de libertad que está en el mismo orden de magnitud que el número de grados de libertad del modelo original.

Otro punto importante es que en este ejemplo se ha considerado un sistema de múltiples cuerpos, en donde los cuerpos se conectan entre sí mediante sus nodos. Es posible resolver este tipo de problemas mediante el método propuesto debido a que no se tienen que realizar modificaciones a ninguna de las matrices (rigidez, amortiguamiento y/o masa) de las ecuaciones de movimiento durante el proceso de subestructuramiento, cálculo de los modos normales no lineales y la resolución de las ecuaciones de movimiento.

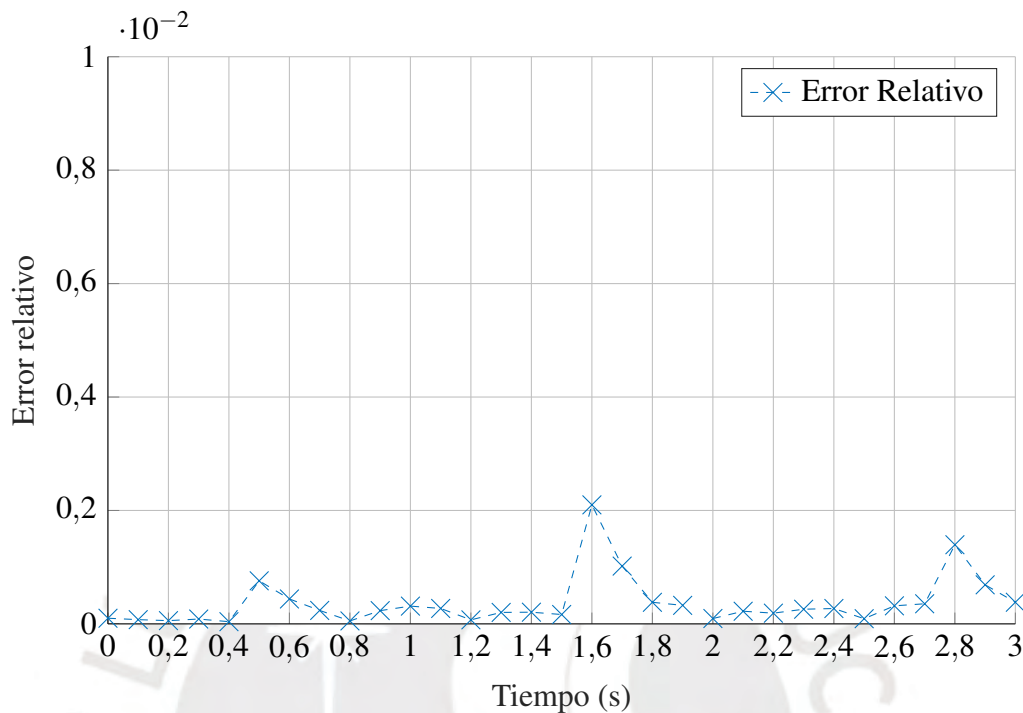


Figura 6.14: Error relativo del desplazamiento horizontal obtenido en el nudo C entre el método HHT y el método de Craig - Bampton dual no lineal

6.4. Caso de estudio 4: Nave industrial sometida a cargas sinusoidales

6.4.1. Descripción general del caso de estudio

A diferencia de los casos anteriores, esta vez se utilizó el método para resolver una estructura metálica correspondiente a una nave industrial cuyas juntas en los pórticos fueron modeladas como resortes torsionales no lineales. Esta estructura fue sometida a cargas sinusoidales horizontales, y el objetivo de esta simulación fue encontrar los desplazamientos horizontales de estos puntos en el tiempo. Las propiedades mecánicas del material utilizado para la estructura, la constante k del resorte torsional no lineal (cuya fuerza corresponda a una no linealidad cúbica en la rotación θ de la forma $M = k\theta^3$), así como las constantes de amortiguamiento proporcional α y β , se encuentran en la Tabla 6.6. Las Figuras 6.15, 6.16 y 6.17, muestran la geometría descrita anteriormente.

Tabla 6.6: Características geométricas y propiedades mecánicas del material de la estructura de la nave industrial

Característica	Valor	Unidad
Alto de columnas	8,5	<i>m</i>
Luz entre columnas	20	<i>m</i>
Altura total del pórtico	10,5	<i>m</i>
Separación entre pórticos	6	<i>m</i>
Densidad	7850	<i>kg/m³</i>
Módulo de elasticidad	$2,1 \times 10^5$	<i>MPa</i>
Razón de Poisson	0,3	
<i>k</i>	10	<i>N/m³</i>
α	$1,25 \times 10^{-3}$	<i>s⁻¹</i>
β	$2,5 \times 10^{-3}$	<i>s</i>

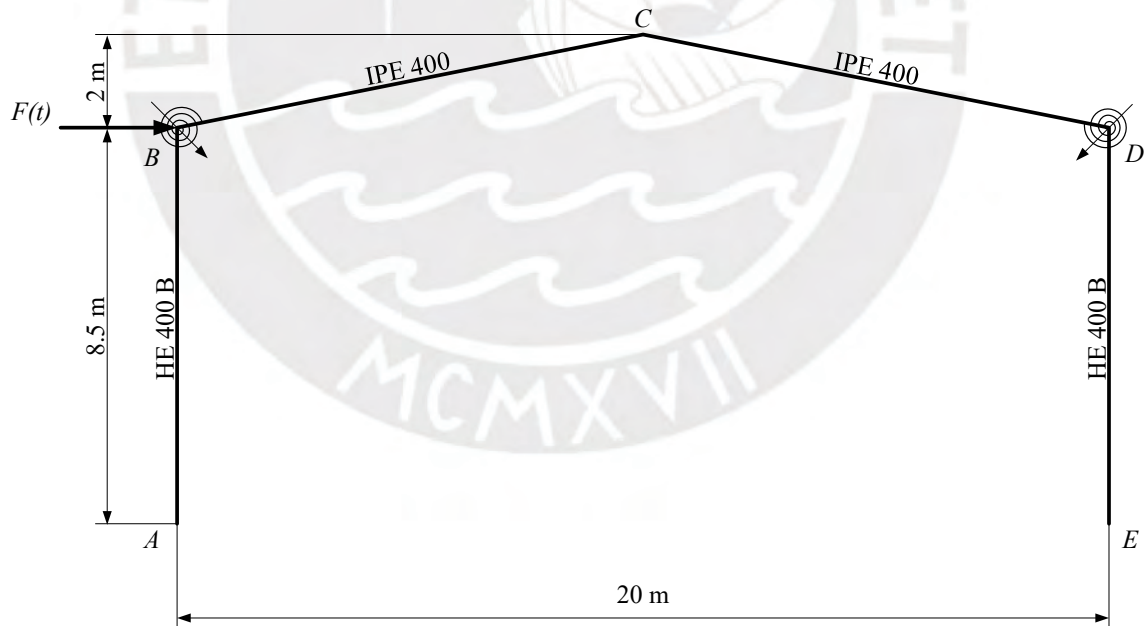


Figura 6.15: Vista frontal del pórtico de la nave industrial

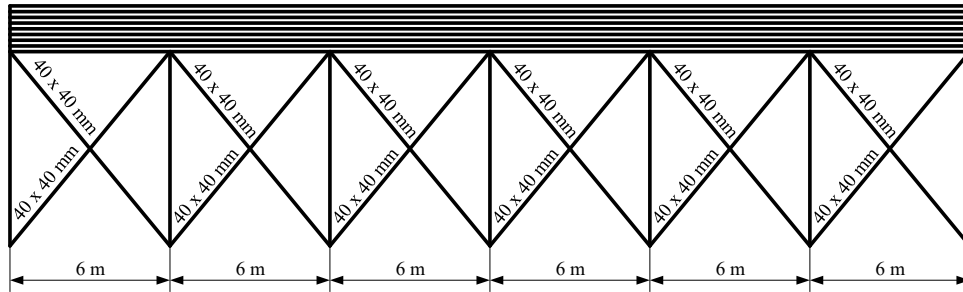


Figura 6.16: Vista lateral del pórtico de la nave industrial

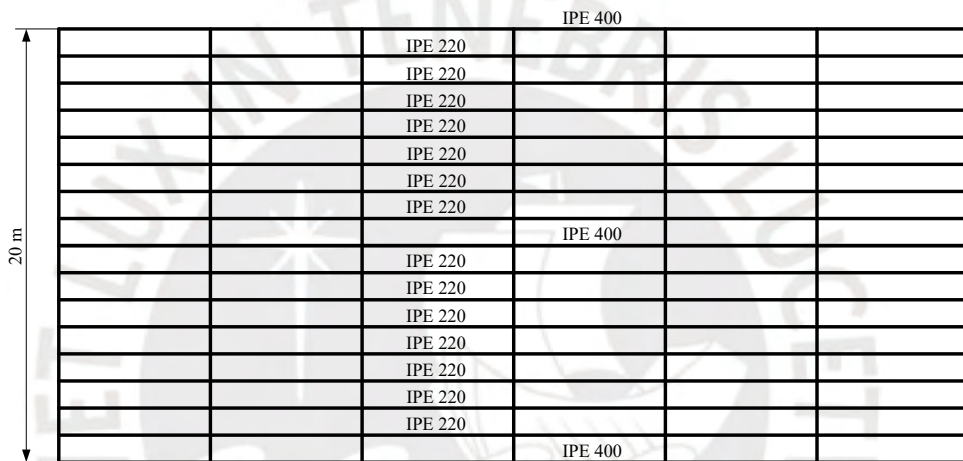


Figura 6.17: Vista superior del pórtico de la nave industrial

6.4.2. Mallado

Se realizó el mallado con elementos tipo viga de tres nodos. En total, se tuvieron 22489 nodos y 11310 elementos. Es importante resaltar que estos elementos cuentan con seis grados de libertad por cada nodo: tres grados de libertad de traslación y tres de rotación.

6.4.3. Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo

Como se mostró en la Figura 6.15, se consideró una fuerza lateral horizontal en el extremo de la columna izquierda de cada pórtico de la forma $F(t) = P \sin(\Omega t)$. Las características de esta fuerza se pueden ver en la Tabla 6.7.

El valor de la frecuencia $\Omega = 16,62 \text{ rad/s}$ proviene de un análisis modal previo, cuyos resultados se pueden ver en la Figura 6.18. En él, se observa que la frecuencia natural más probable de ser excitada debido a fuerzas laterales sobre los extremos de las columnas de los pórticos corresponde al segundo modo de la nave, a una frecuencia de $2,645 \text{ Hz} \approx 16,62 \text{ rad/s}$.

Tabla 6.7: Características de la carga utilizada sobre la armadura

Característica	Valor	Unidad
Magnitud de la fuerza P	10^4	N
Frecuencia Ω	16,62	rad/s

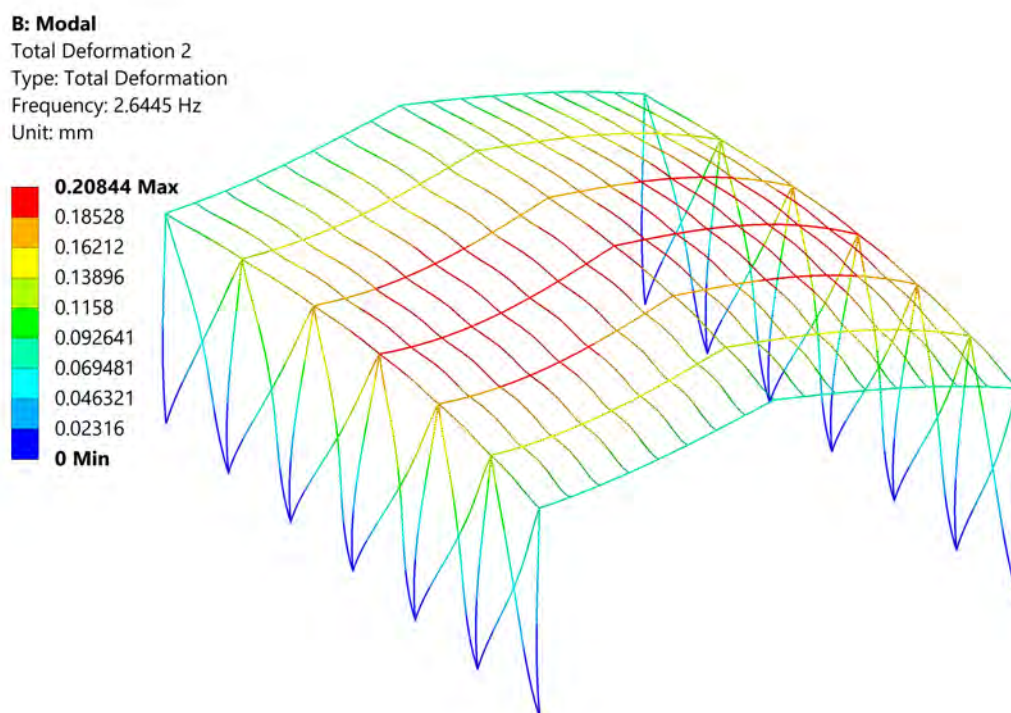


Figura 6.18: Segundo modo de vibración de la nave industrial a 2,645 Hz.

6.4.4. Resultados utilizando el método HHT

El paso de tiempo inicial para resolver las ecuaciones de movimiento fue de $\Delta t = 0,01 s$, siendo este paso de tiempo variable según un algoritmo adaptativo del propio software ANSYS®. El tiempo de simulación para resolver las ecuaciones de movimiento al discretizar el problema mediante el método de elementos finitos fue de 293 s y se utilizó 400 MB de memoria RAM. La Figura 6.19 muestra el desplazamiento horizontal de la junta B del pórtico central de la nave industrial luego de un análisis transitorio realizado mediante el método HHT.

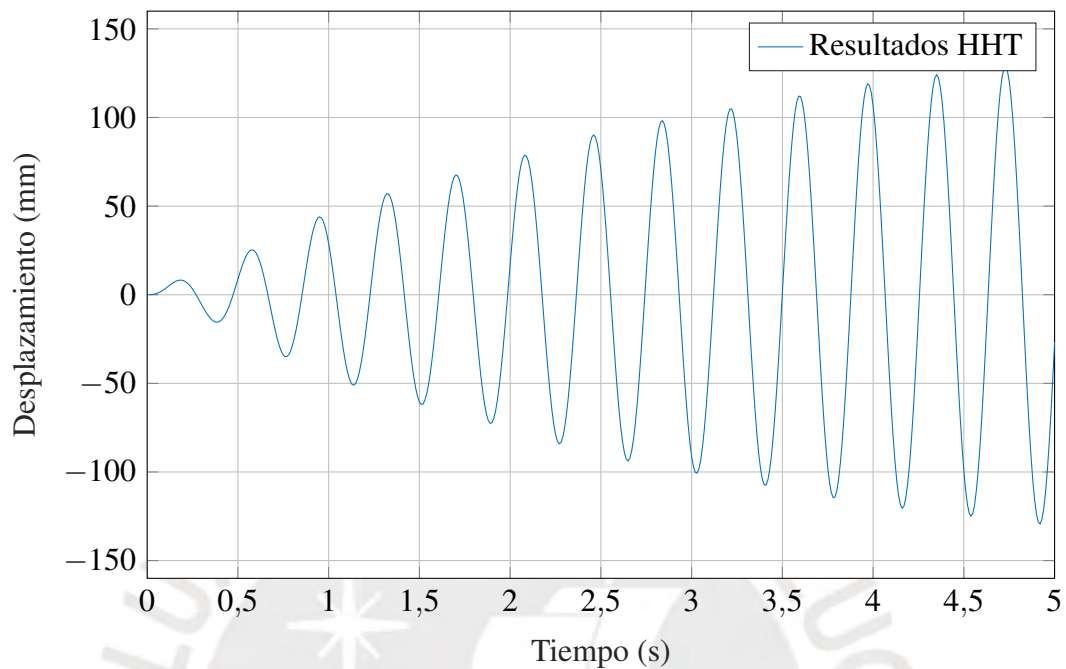


Figura 6.19: Desplazamiento horizontal del nudo B del pórtico central en función del tiempo en segundos

6.4.5. Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado

En esta simulación se explotó la potencialidad del método de subestructuramiento, en cuanto se pudo aprovechar el estudiar la repetición de una misma subestructura para reducir el tiempo computacional que tomó encontrar la respuesta de la nave con el método HHT. La estrategia de subestructuramiento consistió en aislar los pórticos intermedios de la nave, como se muestra en la Figura 6.20. Esta subestructura se muestra en la Figura 6.21.

Los modos normales no lineales se calcularon con respecto del grado de libertad de rotación de los nodos B y C en el plano del pórtico, debido a que los resortes torsionales no lineales en estos nodos tienen como parámetro principal estos grados de libertad de rotación. Por otro lado, el resto de la nave se tomó como otra subestructura. Esta se puede observar en la Figura 6.22.

Es importante resaltar que los modos normales no lineales encontrados en la subestructura del resto de la nave no contienen términos de orden superior, por lo que coinciden con los modos lineales que se hubieran encontrado si se hubiera realizado un análisis modal

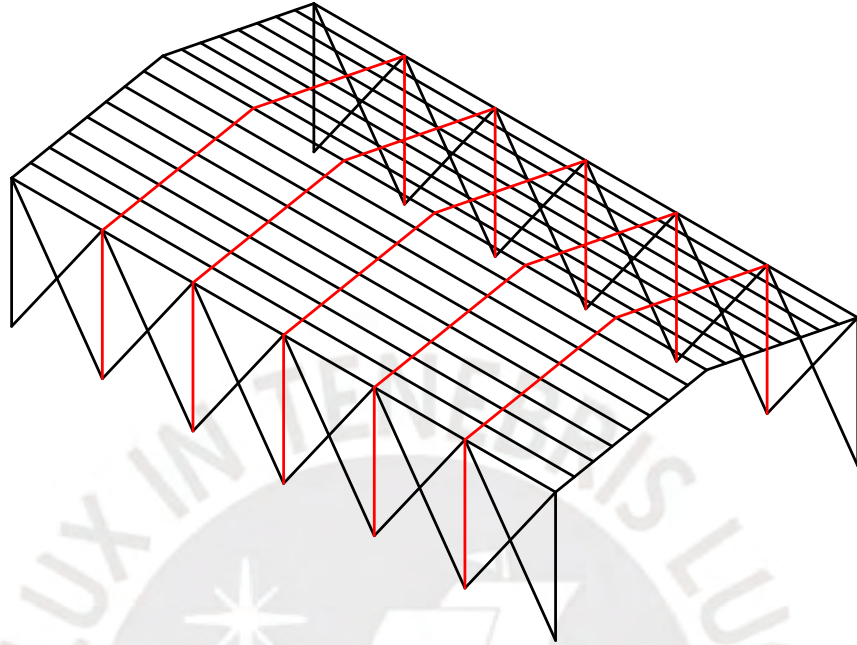


Figura 6.20: Estrategia de subestructuramiento a utilizar. Los pórticos que se tomarán como subestructuras se muestran en rojo.

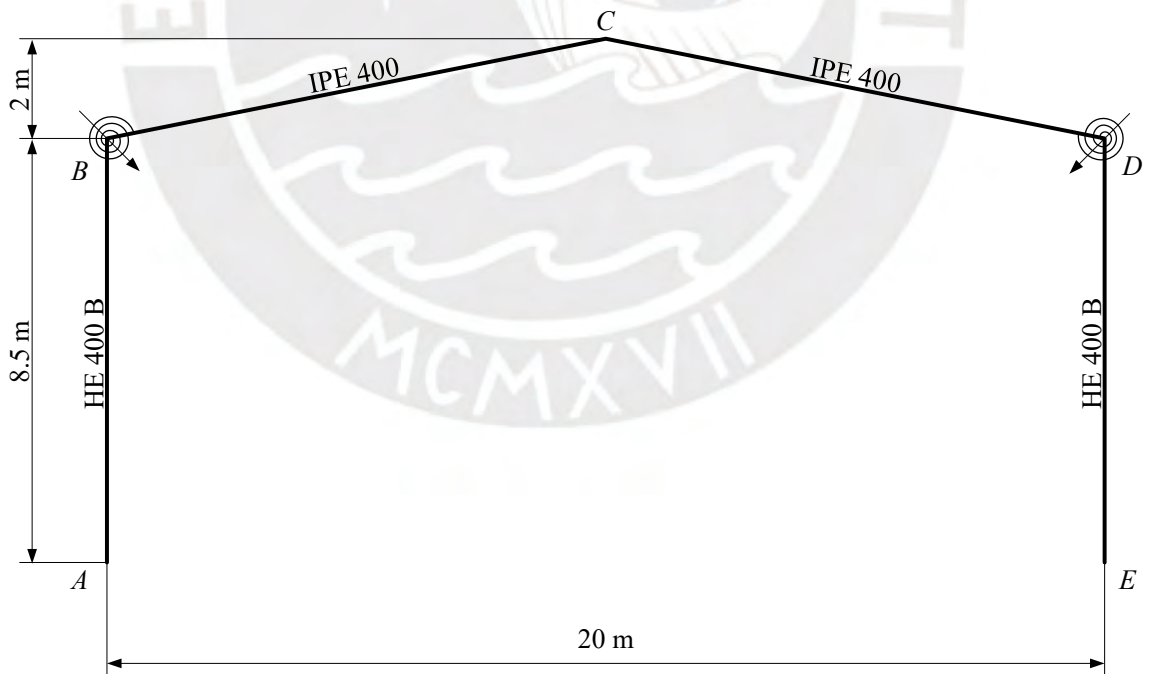


Figura 6.21: Subestructura del pórtico utilizada en la reducción de orden del modelo.

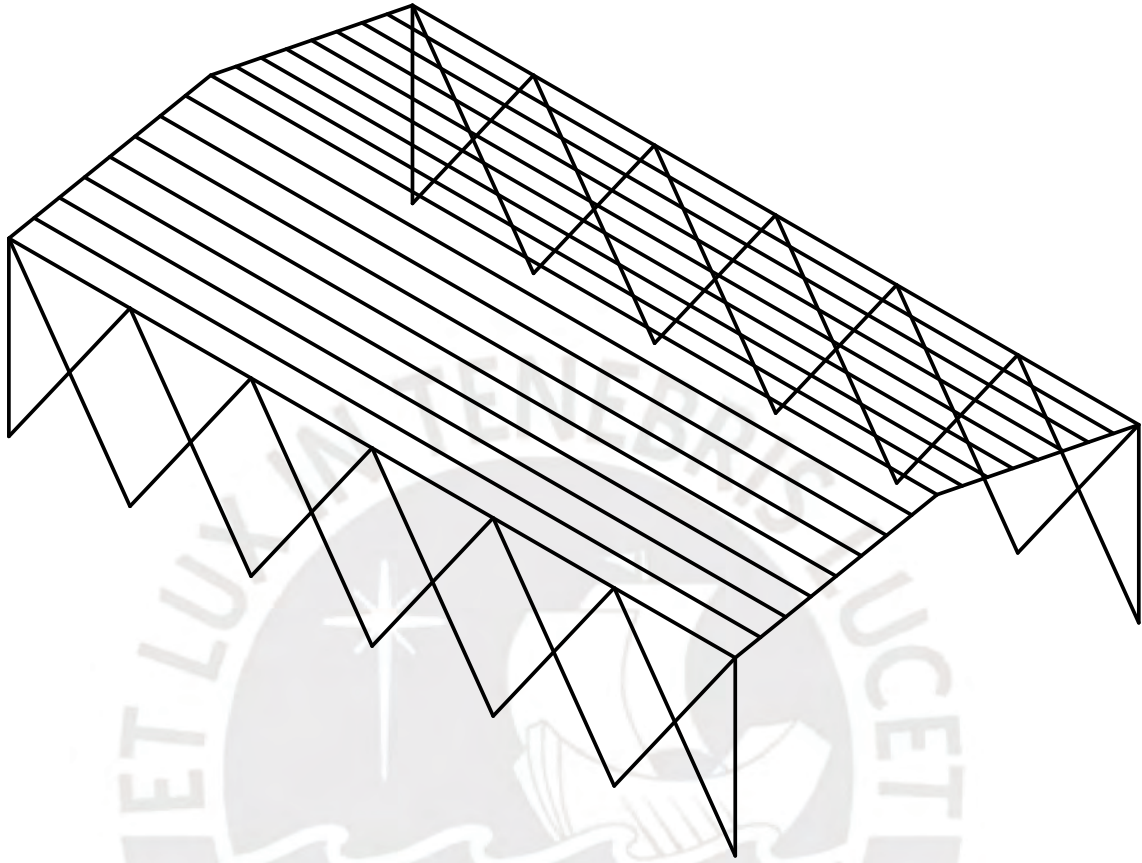


Figura 6.22: Subestructura de la nave

amortiguado. Esto se debe a que únicamente se han considerado que las no linealidades en las juntas pertenecen a los pódicos.

Por otro lado, también resulta importante mencionar que la estrategia de subestructuramiento utilizada no es la única que se pudo haber planteado. Sin embargo, como se puede observar en la Figura 6.21 y en la Figura 6.22, las subestructuras elegidas tienen suficientes restricciones para no ser consideradas flotantes. Esto facilitó en gran medida el proceso de solución, debido a que el cálculo de los modos de cuerpo rígido de cada una de estas subestructuras ya no fue necesario. Los resultados del desplazamiento del nodo B del pódico central se pueden ver en la Figura 6.23.

Como se observa, la curva de respuesta de los desplazamientos del nodo B están nuevamente casi superpuestas con la respuesta del método HHT. Por otro lado, al utilizar el método de Newmark para resolver el sistema de ecuaciones que resulta luego de haber hecho la reducción de orden del modelo, se obtuvo un tiempo de simulación de 94 s utilizando 75 MB de memoria RAM.

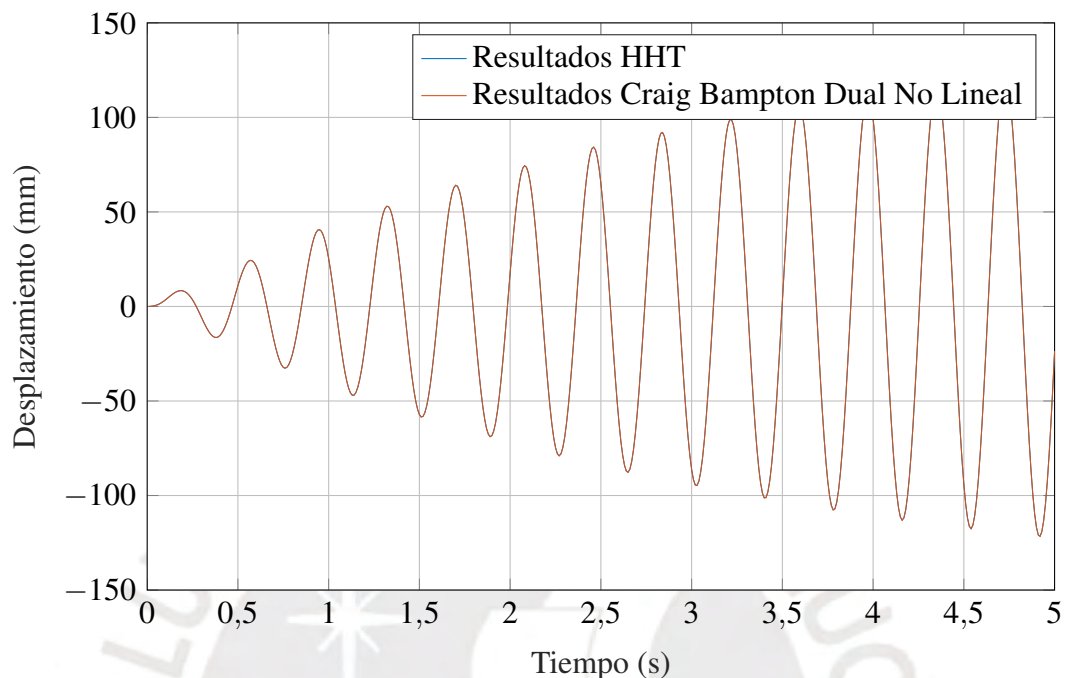


Figura 6.23: Desplazamiento horizontal del nudo B del pórtico central en función del tiempo en segundos utilizando el método de subestructuramiento propuesto

6.4.6. Discusión de los resultados

El ejemplo mostrado anteriormente muestra la eficacia del método en cuanto a encontrar la respuesta de la nave industrial, ya que nuevamente las curvas de ambos métodos están bastante cercanas. La Figura 6.24 muestra el error relativo que existe entre ambas para algunos puntos de tiempo, y se observa que estos errores están por debajo de valores usualmente aceptados en la práctica de la ingeniería. Esta reducción en el tiempo y recursos computacionales para encontrar la respuesta del sistema, en este caso, no se debe únicamente a la reducción de los grados de libertad, sino que también solo ha sido necesario calcular los modos normales no lineales de dos subestructuras: uno de los pórticos y la nave (tal cual se muestran en las Figuras 6.21 y 6.22).

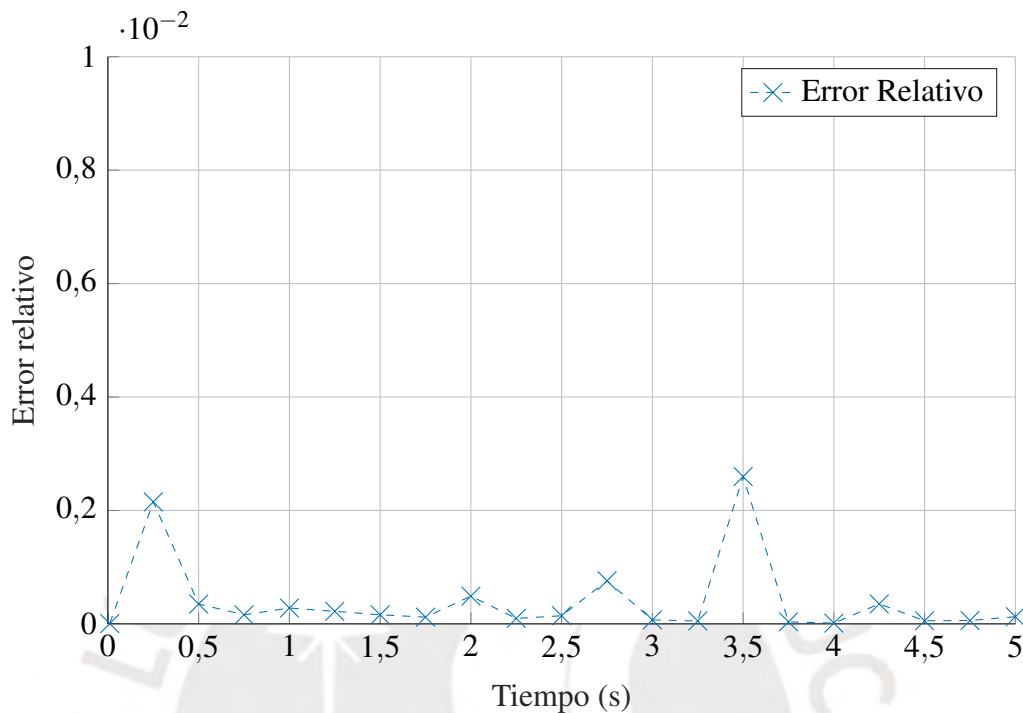


Figura 6.24: Error relativo del desplazamiento horizontal obtenido en el nodo *B* entre el método HHT y el método de Craig-Bampton dual no lineal

6.5. Caso de estudio 5: Ala de avión sometida a presión pulsante

6.5.1. Descripción general del caso de estudio

En este caso se simulará el ala de un avión generada a partir de un perfil NACA 23012 sometida a una presión pulsante pura de amplitud máxima $0,75 \text{ MPa}$. El objetivo de esta simulación fue encontrar los desplazamientos verticales del extremo libre de esta ala. A diferencia de los demás ejemplos, aquí la no linealidad provino de utilizar formulaciones de grandes desplazamientos en las ecuaciones de movimiento. Como se vio anteriormente, esto genera naturalmente no linealidades de orden superior en los desplazamientos, algo que el método de subestructuramiento propuesto podría capturar debido a que las variedades que definen los modos normales no lineales también se dan en formas de polinomios de orden superior. La Figura 6.25 muestra una vista tridimensional de la geometría, mientras que la Figura 6.26 muestra las dimensiones de esta.

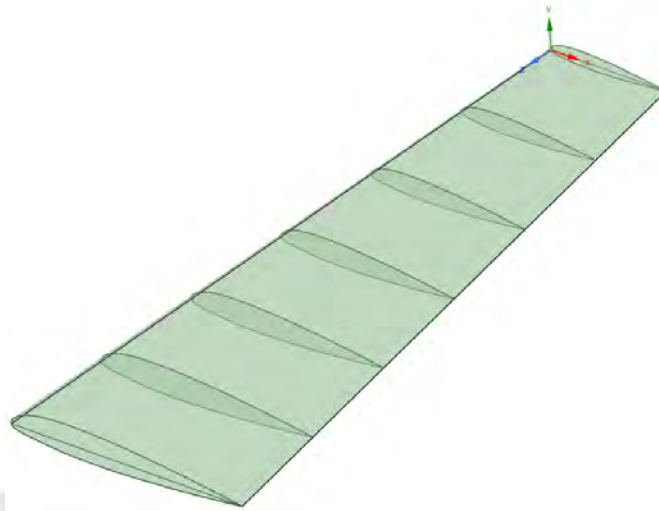


Figura 6.25: Vista tridimensional del ala utilizada en la simulación.

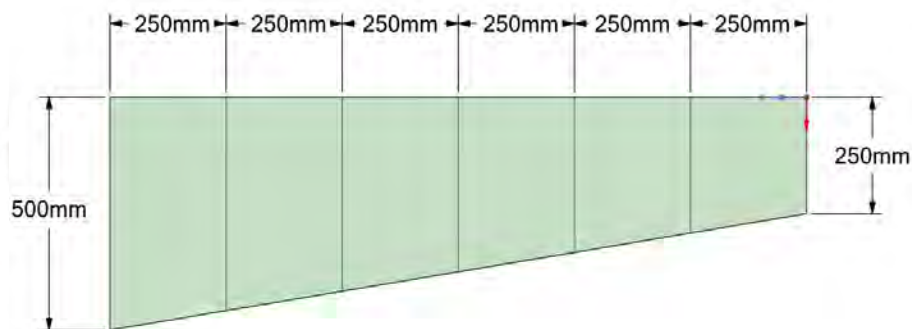


Figura 6.26: Vista tridimensional del ala utilizada en la simulación.

6.5.2. Mallado

El mallado se realizó con elementos superficie de 10 mm de tamaño de arista promedio. La malla consistió en 12333 nodos y 12582 elementos. Es importante resaltar que, por tratarse de elementos de tipo superficie, cada uno de los nodos tiene 6 grados de libertad: tres de rotación y tres de traslación. La Figura 6.27 muestra la malla generada.

6.5.3. Condiciones de apoyo y cargas sobre el modelo

Se asumió que el ala estaba completamente fija (empotrada) en la sección donde la cuerda del perfil NACA medía 500 mm, para simular el hecho que está ensamblada con el resto del fuselaje de la aeronave. Por otro lado, se modeló una presión uniforme sobre toda su superficie en dirección y (según el eje de coordenadas mostrado en la Figura 6.25). La magnitud de esta presión fue modelada por la expresión $p(t) = p_0(1 - \cos(\Omega t))$, lo cual



Figura 6.27: Mallado del Ala

asegura que las fuerzas generadas por la presión sean efectivamente de naturaleza pulsante y siempre se encuentren en comprimiendo la superficie superior. Las características de esta presión se pueden ver en la Tabla 6.8.

Tabla 6.8: Características de la presión sobre el ala

Característica	Valor	Unidad
Magnitud de la presión p_0	0,75	MPa
Frecuencia Ω	182	rad/s

El valor de la frecuencia $\Omega = 182 \text{ rad/s}$ proviene de un análisis modal previo, cuyos resultados se pueden ver en la Figura 6.28. En él, se observa que la frecuencia natural más probable de ser excitada debido a la presión vertical corresponde al primer modo de vibración del ala, a una frecuencia de $29,01 \text{ Hz} \approx 182 \text{ rad/s}$. La Figura 6.29 muestra las condiciones de apoyo y carga sobre el ala.

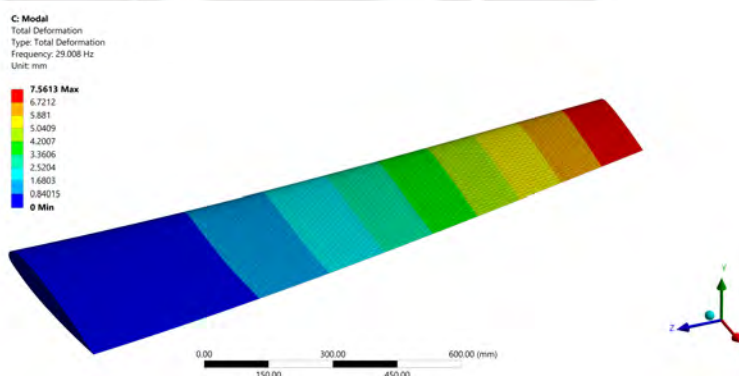


Figura 6.28: Primer modo de vibración del ala a 29,01 Hz.

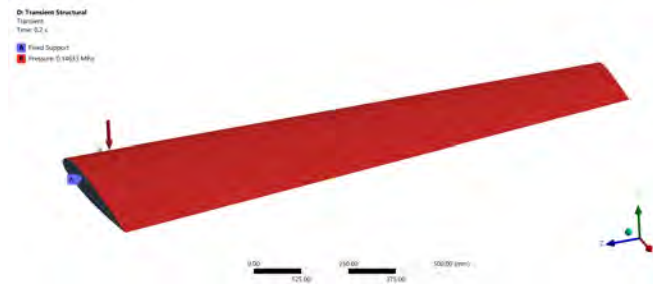


Figura 6.29: Empotramiento (fixed support) y presión en la dirección y sobre la superficie superior del ala.

6.5.4. Resultados utilizando el método HHT

El paso de tiempo inicial para resolver las ecuaciones de movimiento fue de $\Delta t = 1,7 \times 10^{-6} s$ y se simularon 0,2 s de movimiento. Este paso de tiempo fue variable según un algoritmo adaptativo del propio software ANSYS®. El tiempo de simulación para resolver las ecuaciones de movimiento al discretizar el problema mediante el método de elementos finitos fue de 3840 s y se utilizó 507 MB de memoria RAM.

La Figura 6.30 muestra el desplazamiento vertical de uno de los nodos del extremo libre

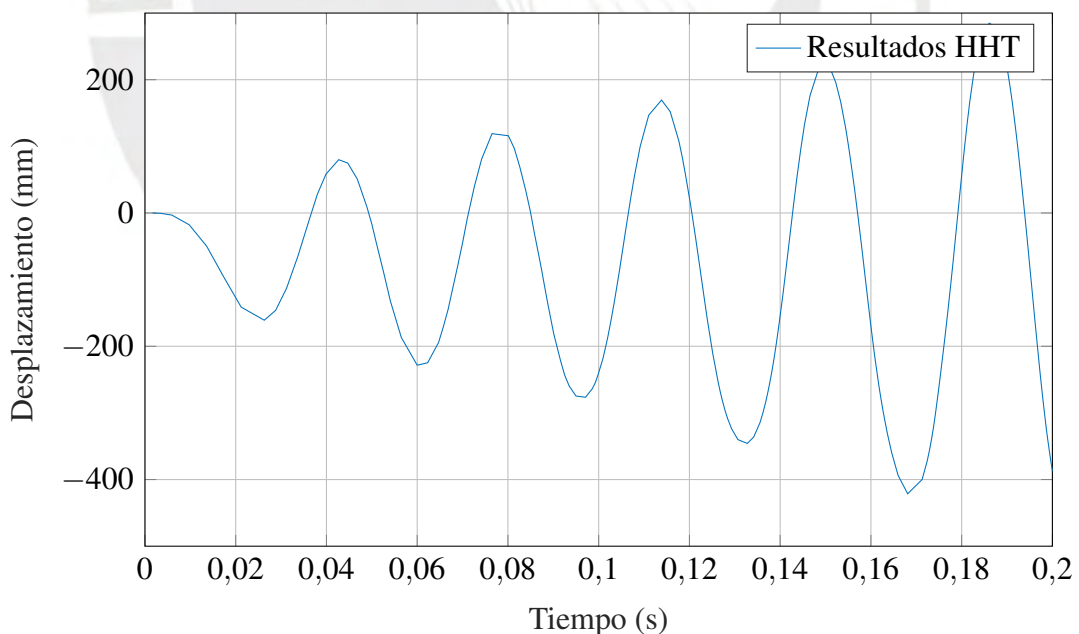


Figura 6.30: Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método HHT

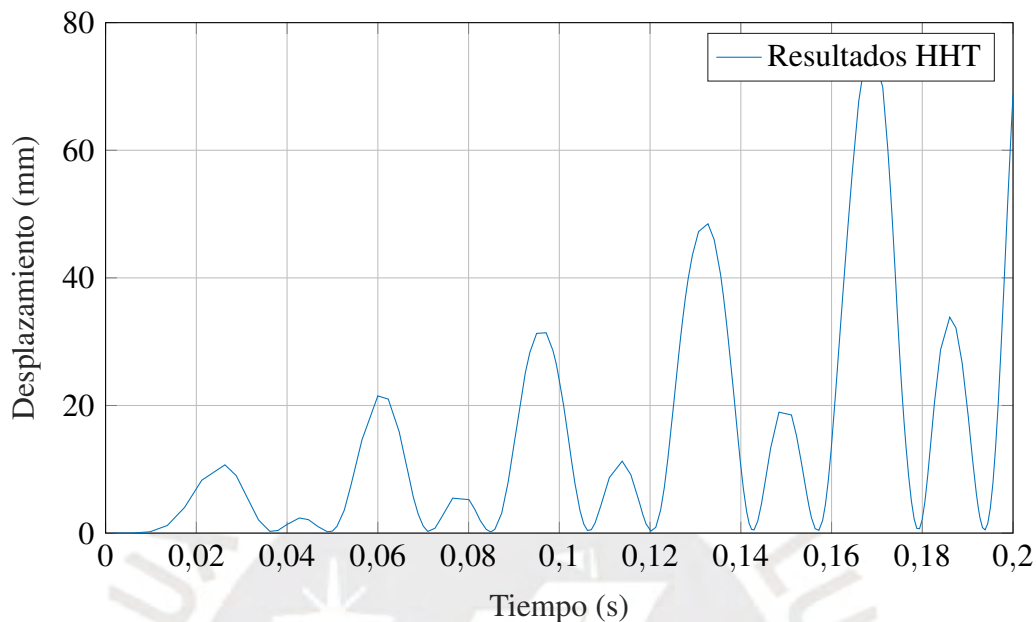


Figura 6.31: Desplazamiento horizontal de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método HHT

del ala, así como también la figura 6.31 muestra el desplazamiento horizontal del mismo punto. Se observa que los valores de desplazamiento obtenidos son relativamente grandes a la longitud del ala, por lo que esta situación física demostró ser un caso de grandes desplazamientos.

6.5.5. Resultados utilizando el método de subestructuramiento implementado

La metodología para resolver las ecuaciones de movimiento en este caso de estudio difiere de las demás, debido a la presencia de grandes desplazamientos en la simulación y a que las interfaces de las subestructuras tuvieron muchos más grados de libertad que en el resto de ejemplos.

Para empezar, se identificaron tres subestructuras a ser utilizadas con el método propuesto, las cuales se muestran en la Figura 6.32. En estas subestructuras, a diferencia de los casos anteriores, se debieron elegir los grados de libertad a partir de los cuales se calcularían los modos normales no lineales. Debido al movimiento que podría presentar el ala según la presión, se escogieron los nodos mostrados en las Figuras 6.33 en cada una de las subestructuras seleccionadas. Debido a que estos nodos tienen varios grados de libertad cada uno, se eligieron aquellos de traslación en y , z y rotación en x .

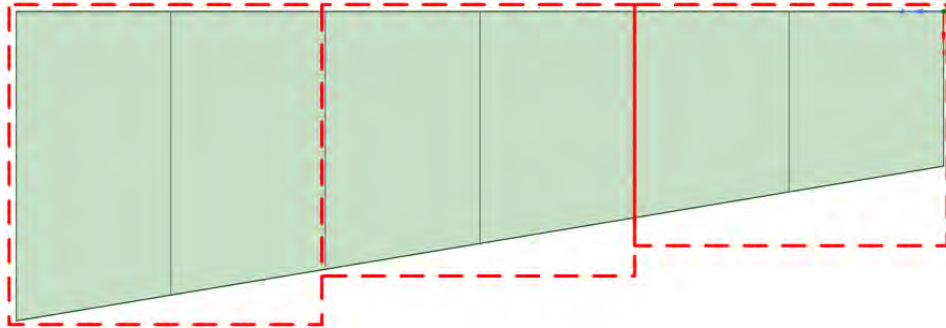


Figura 6.32: Subestructuras seleccionadas para la reducción de orden del modelo.

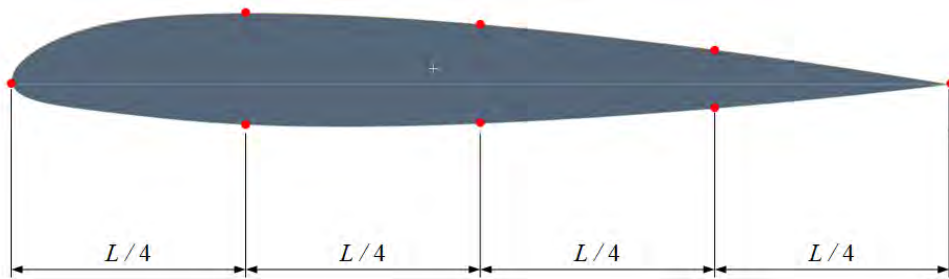


Figura 6.33: Ubicaciones de los nodos seleccionados para el cálculo de los modos normales no lineales en cada subestructura. La ubicación de los nodos es aproximada, pues esta dependió de la localización real del nodo en la malla generada por ANSYS®

Asimismo, a diferencia de los demás ejemplos presentados en este trabajo, en este caso de estudio se tuvo que reescribir la ecuación de movimiento considerando grandes deformaciones. Esto se realizó según las ecuaciones presentadas por Touzé y cols. (2021) utilizando los vectores de desplazamiento estándar para elementos tipo superficie. Bathe (2016) demostró que no es necesario algún cambio en las formulaciones de estos tipos de elemento para poder incluir el cálculo de grandes desplazamientos, por lo que únicamente bastó con realizar la incorporación de los términos no lineales descritos en la ecuación (4.21).

Una vez realizado el cálculo de los términos no lineales, se procedió con el cálculo de los modos normales no lineales para los nodos especificados en la Figura 6.33. Los resultados del desplazamiento del mismo nodo utilizada para visualizar los resultados del método HHT se pueden ver en la Figura 6.34 y en la Figura 6.35. Utilizando el método propuesto, el tiempo de simulación fue de 565 s y se utilizaron 210 MB de memoria RAM.

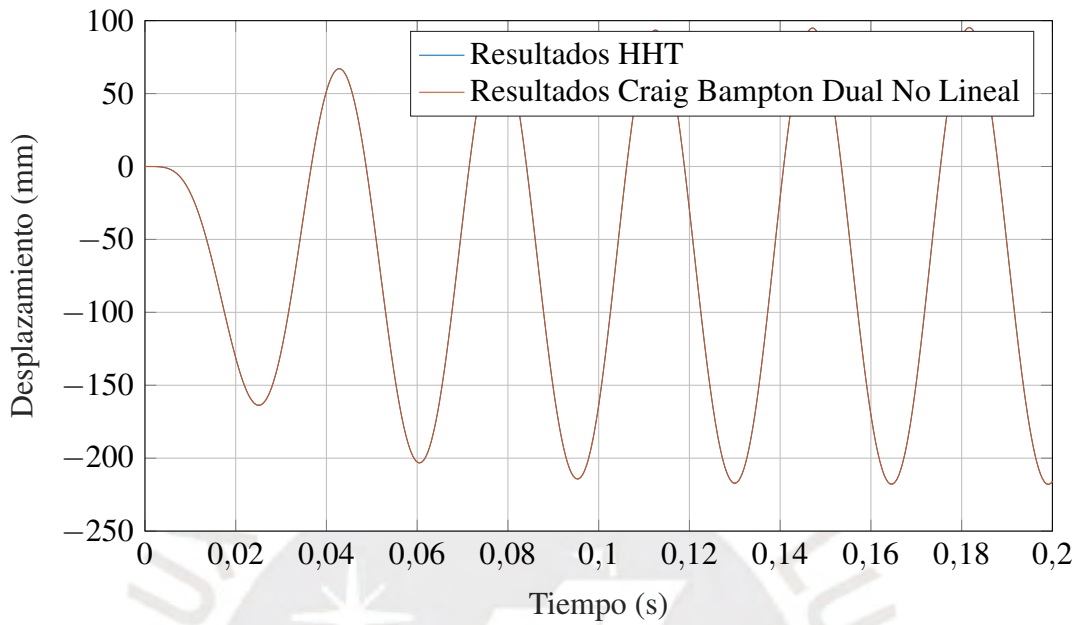


Figura 6.34: Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto

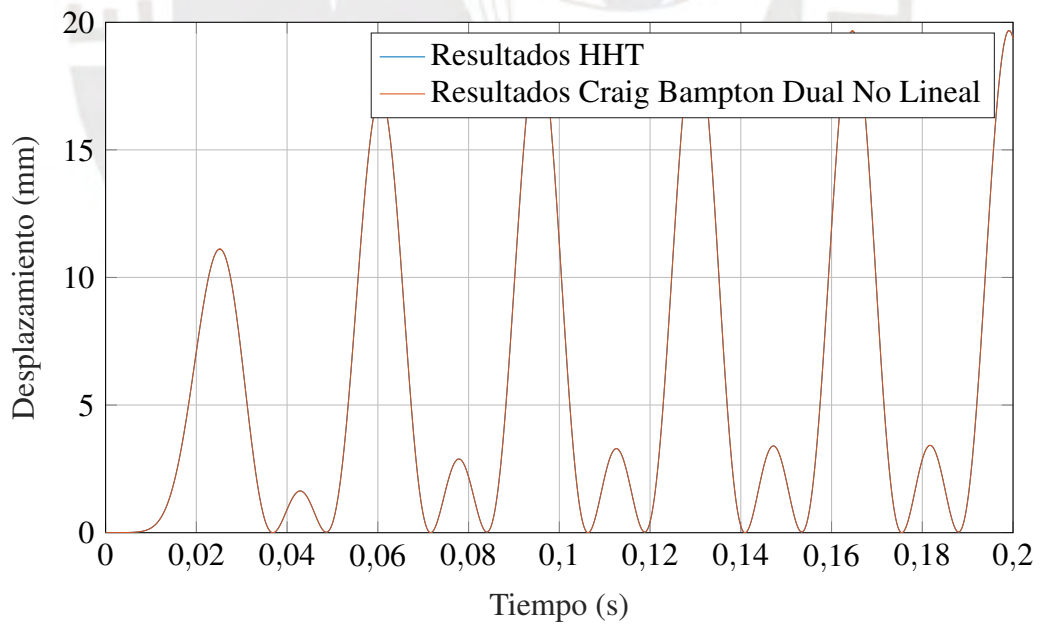


Figura 6.35: Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto

6.5.6. Discusión de los resultados

En este caso de estudio se requirió mucho más trabajo para poder aplicar el método propuesto debido al uso de elementos de tipo superficie. Estos, al tener 6 grados de libertad en cada nodo (se utilizaron elementos de 4 nodos, cada uno en los vértices del elemento), significaron un incremento considerable en los grados de libertad totales del modelo. Asimismo, otra de las principales dificultades encontradas fue que se tuvo que calcular primero los coeficientes no lineales de la ecuación de movimiento, previamente a poder calcular los modos normales no lineales. Esto fue necesario debido a que no existen no linealidades explícitas en el modelo, y si se calcularan los modos normales no lineales únicamente considerando las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento del ala, únicamente se obtendrían los modos lineales. Son los términos no lineales en desplazamientos y rotaciones en las ecuaciones de movimiento que consideran grandes desplazamientos las que proveen la información necesaria para el cálculo de los términos de orden superior de las variedades que definen los modos normales no lineales.

Por otro lado, es importante resaltar que, para obtener resultados adecuados con el método propuesto, se tuvieron que calcular tres modos normales no lineales con respecto de cada nodo elegido tomando como parámetros el desplazamiento y velocidad verticales (dirección y), el desplazamiento y velocidad horizontales (dirección z) y la rotación y velocidad angular fuera del plano yz (alrededor del eje x).

En la Figura 6.36 y la Figura 6.37 se presentan los errores relativos de los desplazamientos vertical y horizontal del mismo nodo que se estudió con el método HHT. Se observa que los errores se encuentran por debajo de rangos aceptables dentro de la práctica de la ingeniería.

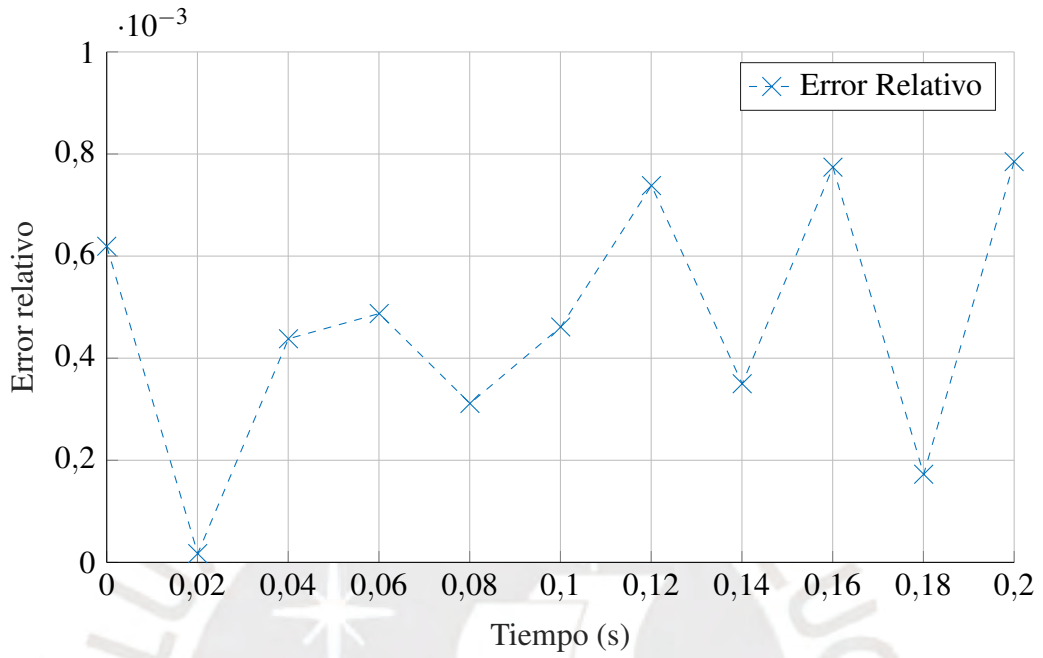


Figura 6.36: Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto

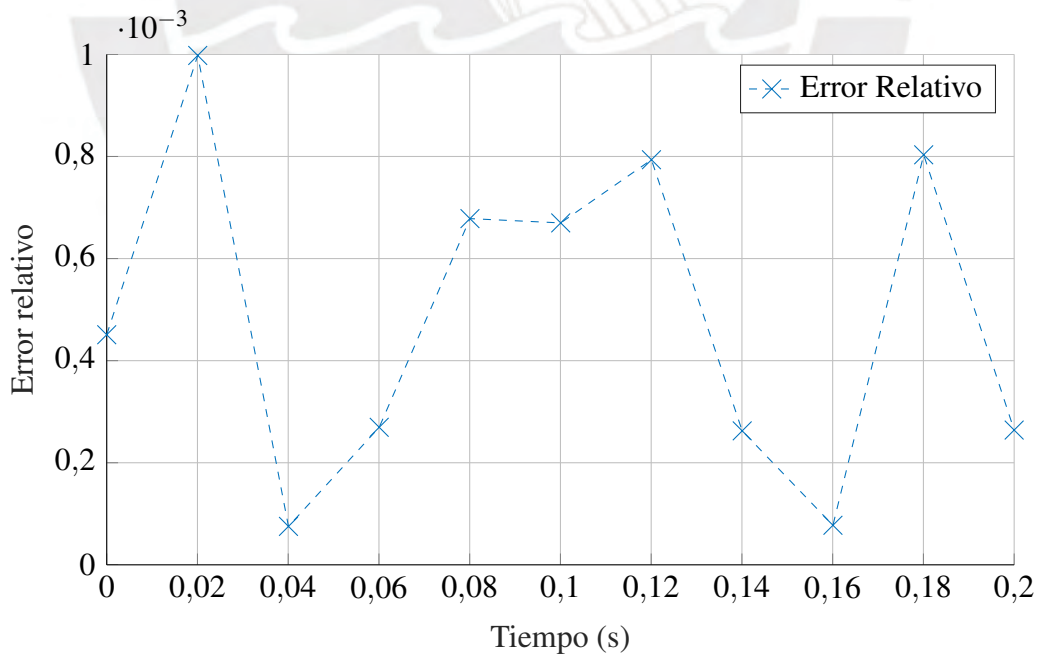


Figura 6.37: Desplazamiento vertical de un nodo del extremo libre del ala utilizando el método propuesto

Conclusiones

La presente investigación fue realizada con el objetivo de proponer un nuevo método de subestructuramiento para la dinámica de sistemas de cuerpos flexibles, en particular aquella que presenta fenómenos de no linealidad dentro de sus ecuaciones de movimiento. Para ello, se investigaron diversos métodos de resolución de sistemas no lineales mediante el uso del método de elementos finitos. Entre los diversos métodos estudiados, se encontró en la teoría de modos normales no lineales una alternativa viable para la reducción de orden de un sistema dinámico no lineal. Esta teoría fue combinada con el método de Craig-Bampton dual originalmente propuesto por Gruber y Rixen (2018) en su versión que también incluye la posibilidad de incluir un amortiguamiento no proporcional en las ecuaciones de movimiento. Este último método, en la parte dinámica de la aproximación, únicamente utilizaba modos de vibración lineales tradicionales, por lo que esta fue la principal parte en la que se trabajó la modificación del método.

El principal aporte de este trabajo de investigación es la utilización de los modos normales no lineales en la parte dinámica de la aproximación del método de Craig-Bampton dual para sistemas que no están clásicamente amortiguados. Para hacer efectiva la reducción de orden, se propuso utilizar únicamente los modos asociados a los grados de libertad de la frontera de la subestructura. Esto permite que el sistema reducido tenga la suficiente flexibilidad para compatibilizar el movimiento y las fuerzas en su frontera con otras subestructuras, además de aproximar de manera adecuada las no linealidades que puedan presentarse en su interior, en particular aquellas que pueden modelarse como funciones polinómicas de orden superior en las ecuaciones de movimiento de la subestructura o del sistema.

Una de las principales razones por las cuales se eligieron estos dos métodos para generar uno nuevo fue que ambos pueden trabajar en el espacio-estado de las ecuaciones de movimiento. Para ello, se tuvo que utilizar la formulación de Shaw y Pierre (1993) para hallar los modos normales no lineales. La teoría de modos normales no lineales había sido mencionada anteriormente por Allen y cols. (2020) como un posible método para mejorar las técnicas de subestructuramiento presentes, pero no había sido implementada con el método de Craig-Bampton dual. Asimismo, si bien la teoría de modos normales no lineales ha sido recientemente refinada por Haller y Ponsioen (2016) y Jain y Haller (2022) para reducir de manera exacta las ecuaciones de un sistema dinámico no lineal, su

planteamiento no es compatible con las técnicas de subestructuramiento utilizadas en la teoría de modelos de orden reducido. Esto se debe a que su enfoque se centra en la parametrización de las variedades subspectrales que definen los modos normales no lineales, lo que permite reducir el orden del modelo y encontrar la respuesta del sistema no lineal de manera analítica, sin necesidad de simulación. Aunque este enfoque es eficiente para resolver sistemas dinámicos pequeños o medianos, en la práctica podría resultar demasiado complejo para sistemas de gran tamaño con millones de grados de libertad. Además, la parametrización utilizada en este enfoque no genera matrices adecuadas para reemplazar las del método de subestructuramiento de Craig-Bampton dual.

Asimismo, Gruber y Rixen (2018) desarrollaron recientemente métodos que permiten reducir el orden de un sistema dinámico lineal mediante el denominado método de Craig-Bampton dual, aplicado a sistemas que no están clásicamente amortiguados (es decir, sin amortiguamiento proporcional o de Rayleigh). Este método dual había demostrado previamente una capacidad superior para predecir la respuesta de las subestructuras en comparación con su predecesor primal y con otros métodos de subestructuramiento basados únicamente en desplazamientos, como el método de Guyan-Irons. Sin embargo, este enfoque no contempla las no linealidades presentes en las ecuaciones de movimiento de la subestructura.

En cuanto a la parte estática de la aproximación del método de Craig-Bampton dual, esta se mantiene tal como la propusieron Gruber y Rixen (2018), con la diferencia que esta vez los modos de cuerpo rígido de las subestructuras flotantes son calculados como parte de la aproximación estática en lugar de como parte de la aproximación dinámica. Es importante resaltar que para el cálculo de estos modos de cuerpo rígido no se considera la presencia de no linealidades, debido a que estas están asociadas principalmente a las deformaciones dentro de las subestructuras.

Se ha demostrado, a través de los ejemplos propuestos y desarrollados en este trabajo de investigación, que el método propuesto reduce efectivamente el tiempo computacional y la memoria RAM utilizada con respecto de los métodos de integración directa iterativos que son usualmente utilizados para la solución de los sistemas no lineales. Asimismo, también se ha comprobado que la precisión de la respuesta del sistema se ha mantenido en un margen aceptable.

La principal ventaja de este método frente a los que existen actualmente es la posibilidad de utilizar el método de Craig-Bampton dual, un método que ha demostrado ser bastante preciso en cuanto a la exactitud de los resultados comparado con los métodos de integración directa a pesar de reducir el número de grados de libertad de las ecuaciones de movimiento, en la solución de problemas que incluyen no linealidades en las ecuaciones de movimiento mediante el uso de modos normales no lineales en la parte dinámica

de la aproximación, los cuales han demostrado un método de reducción de orden bastante preciso (Haller y Ponsioen (2016); Ponsioen y cols. (2020); Jain y Haller (2022)) para sistemas dinámicos que presentan no linealidades de orden superior en sus desplazamientos o velocidades.



Trabajo futuro

Se propone como trabajo futuro la implementación de este método en sistemas de mayor número de grados de libertad (en el orden de los miles o millones), para poder comprobar su escalabilidad y estabilidad ante diferentes situaciones. El hecho de utilizar modos normales no lineales para sistemas dinámicos de estos tamaños ha comenzado a ser explorado por Jain y Haller (2022).

Asimismo, diversos métodos para calcular los modos normales no lineales de una subestructura están siendo actualmente desarrollados o expandidos (Jain y Haller (2022); Piqueira, Mazzilli, Pesce, y Franzini (2024)), por lo que se espera que uno de estos métodos pueda servir como base para reducir aún más los recursos computacionales utilizados.

Por otro lado, Allen y cols. (2020) propone brevemente utilizar los modos normales no lineales como un método compatible con el subestructuramiento. Como trabajo futuro, se puede hacer el estudio de cómo implementar la teoría de modos normales no lineales en otros métodos de subestructuramiento, en especial en aquellos que utilicen la forma de espacio-estado de las ecuaciones de movimiento como parte de la técnica de reducción de orden, como se ha hecho en este trabajo con el método de Craig-Bampton dual.

Por último, para refinar el método propuesto en este trabajo de investigación, se propone estudiar cómo las condiciones de entrada o pérdida de contacto entre dos partes de una subestructura (no linealidad de contactos) se pueden introducir entre las no linealidades que este método puede resolver.

Referencias Bibliográficas

- Allen, M. S., Rixen, D., Seijs, M. V. D., Tiso, P., Abrahamsson, T., y Mayes, R. L. (2020). *Substructuring in engineering dynamics - emerging numerical and experimental techniques* (Vol. 594). Springer Nature Switzerland AG. Descargado de <http://www.springer.com/series/76> doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-0300-25532-9>
- Ansys. (2024). *Ansys mechanical apdl theory reference*.
- Avramov, K. V., y Mikhlin, Y. V. (2013). Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, 65. doi: 10.1115/1.4023533
- Bathe, K.-J. (2008, 7). On finite element methods for nonlinear dynamic response. En *Eurodyn 2008*.
- Bathe, K.-J. (2016). *Finite element procedures* (2.^a ed.). Prentice Hall, Pearson Education.
- Berrocal, L. O. (2005). *Elasticidad* (3rd. ed.). McGraw-Hill.
- Bramsiepe, K., Klimmek, T., Krüger, W. R., y Tichy, L. (2022, 10). Aeroelastic method to investigate nonlinear elastic wing structures. *CEAS Aeronautical Journal*, 13, 939-949. doi: 10.1007/s13272-022-00596-0
- Burden, R., y Faires, D. (2010). *Numerical analysis* (9th. ed.). Brooks/Cole.
- Béliveau, J. G., y Soucy, Y. (1985). Damping synthesis using complex substructure modes and a hermitian system representation. *AIAA Journal*, 23, 1952-1956. doi: 10.2514/3.9201
- Cardona, A. (2000). Superelements modelling in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 4, 245-266.
- Chung, Y.-T., y Jr., R. R. C. (1983, 5). State vector formulation of substructure coupling for damped systems. En *24th structures, structural dynamics and materials conference*. AIAA. doi: 10.2514/6.1983-965
- Craig, R., y Bampton, M. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 6, 1313-1319. Descargado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01537654> doi: 10.2514/3.4741
- Craig, R. R., y Chung, Y. T. (1982). Generalized substructure coupling procedure for damped systems. *AIAA Journal*, 20, 442-444. doi: 10.2514/3.51089

- Craig, R. R., y Kurdila, J. J. A. (2006). *Fundamentals of structural dynamics* (2nd. ed.). John Wiley & Sons. Descargado de www.copyright.com.
- Ericsson, T., y Ruhe, A. (1980, 10). The spectral transformation lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems. *Mathematics of Computation*, *35*, 1251-1268.
- Geradin, M., y Rixen, D. J. (2015). *Mechanical vibrations - theory and applications* (3rd. ed.). John Wiley & Sons.
- Golub, G., y Underwood, R. (1977). The block lanczos method for computing eigenvalues. En (p. 361-377). Elsevier. doi: 10.1016/b978-0-12-587260-7.50018-2
- Grimes, R. G., Lewis, J. G., y Simon, H. D. (1994, 1). A shifted block lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems. *SIAM J. MATRIX ANAL. APPL.*, *15*, 228-272. Descargado de <http://www.siam.org/journals/ojsa.php>
- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., y Wall, W. A. (2008). *Technische mechanik band 3:kinetik* (10th. ed., Vol. 3rd.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-540-68424-4
- Gruber, F. M., y Rixen, D. J. (2018, 10). Dual craig-bampton component mode synthesis method for model order reduction of nonclassically damped linear systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *111*, 678-698. doi: 10.1016/j.ymsp.2018.04.019
- Guyan, R. J. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *AAIA Journal*, *3*, 380.
- Géradin, M., y Rixen, D. J. (2018, 1). Impulse-based substructuring in a floating frame to simulate high frequency dynamics in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, *42*, 47-77. doi: 10.1007/s11044-017-9597-0
- Haller, G., y Ponsioen, S. (2016, 11). Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction. *Nonlinear Dynamics*, *86*, 1493-1534. doi: 10.1007/s11071-016-2974-z
- Hasselman, T. K. (1976). Damping synthesis from substructure tests. *AIAA Journal*, *14*, 1409-1418. doi: 10.2514/3.61481
- Hexagon. (2022). *Sol 400 getting started guide*. Descargado de <http://msc-documentation.questionpro.com>.
- Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., y Taylor, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, *5*, 283-292.
- Howell, L. L. (2013). Compliant mechanisms. En (p. 189-216). Springer London. doi: 10.1007/978-1-4471-4510-3_7
- Irons, B. (1965). Structural eigenvalue problems - elimination of unwanted variables. *AIAA Journal*, *3*, 961-962. doi: 10.2514/3.3027
- Jain, S., y Haller, G. (2022, 1). How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite element models. *Nonlinear Dynamics*, *107*, 1417-1450. doi: 10.1007/s11071-021-06957-4

- Kraker, A. D., y Campen, D. H. V. (1994, 10). Rubin's cms reduction method for general state-space models. *Computers & Structures*, 58, 597-606.
- Kraker, A. D., y Campen, D. H. V. (1996). Rubin's cms reduction method for general state-space models. *Computers & Structures*, 58, 597-606.
- Lacarbonara, W. (2013). *Nonlinear structural mechanics*. Springer Science and Business Media New York.
- Meirovitch, L. (2001). *Leonard meirovitch - fundamentals of vibrations-mcgraw-hill companies (2001)*. McGraw-Hill.
- Newman, M., y Flanagan, P. F. (1976, 8). *Eigenvalue extraction in nastran by the tridiagonal reduction (feer) method - real eigenvalue analysis*.
- Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division - Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 67-94.
- Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51, 406-413. doi: 10.1017/S0305004100030401
- Piqueira, J. R. C., Mazzilli, C. E. N., Pesce, C. P., y Franzini, G. R. (2024). *Lectures on nonlinear dynamics* (J. R. C. Piqueira, C. E. N. Mazzilli, C. P. Pesce, y G. R. Franzini, Eds.). Springer Nature Switzerland. Descargado de <https://link.springer.com/10.1007/978-3-031-45101-0> doi: 10.1007/978-3-031-45101-0
- Ponsioen, S., Jain, S., y Haller, G. (2020, 12). Model reduction to spectral submanifolds and forced-response calculation in high-dimensional mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 488. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115640
- Rega, G. (2020, 1). Nonlinear dynamics in mechanics and engineering: 40 years of developments and ali h. nayfeh's legacy. *Nonlinear Dynamics*, 99, 11-34. doi: 10.1007/s11071-019-04833-w
- Rega, G. (2022). Nonlinear dynamics in mechanics: State of the art and expected future developments. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. Descargado de <https://hal.science/hal-04588376v1> doi: 10.1115/1.4054112
- Riso, C., y Cesnik, C. E. (2023, 7). Geometrically nonlinear effects in wing aeroelastic dynamics at large deflections. *Journal of Fluids and Structures*, 120. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2023.103897
- Rixen, D. J. (2004, 7). A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 383-391. doi: 10.1016/j.cam.2003.12.014
- Rodriguez-Sanchez, R., Buchschmid, M., y Müller, G. (2016). Model order reduction in structural dynamics. *ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2, 4221-4247. doi: 10.7712/100016.2106.9280
- Rosenberg, R. (1962). The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 29, 7-14. Descargado de <https://hal.science/>

hal-01344457v1 doi: 10.1115/1.3636501

- Rubin, S. (1975). Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13, 995-1006. doi: 10.2514/3.60497
- Sauer, T. (2012). *Numerical analysis* (2nd ed.). Pearson Education.
- Shaw, S., y Pierre, C. (1993). Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164, 85-124.
- Leung, A. Y. (1978). An accurate method of dynamic condensation in structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, 1705-1715.
- Toselli, A., y Widlund, O. (2005). *Domain decomposition methods - algorithms and theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Touzé, C., Vizzaccaro, A., Thomas, O., Touzé, C., Vizzaccaro, A., y Thomas, O. (2021, 7). Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques. *Nonlinear Dynamics*, 105, 1141-1190.



Anexo A: Códigos en MATLAB ®

Código para crear las matrices de Craig-Bampton dual

```
1 function [T_s,K_CB,M_CB] = CBDual(b_s,M_s,K_s,k)
2 %Funcion para encontrar las matrices R_s, Theta_s, G_res y
   B_s de una
3 %subestructura y calcular la matriz de transformacion T_s,
   la matriz de
4 %rigidez reducida K_CB y la matriz de masa reducida M_CB
5 % Se utilizan: el vector booleano b_s, la matriz de masa
   de la
6 % subestructura M_s, la matriz de rigidez de la
   subestructura K_s
7 % Se utilizan k modos de vibracion para la subestructura
8
9 %% Tiempo inicial
10 t1=cputime;
11
12 %% Leer matriz de masa y matriz de rigidez de archivo .csv
13 M_s=csvread('MatMD'); %matriz de masa
14 K_s=csvread('MatKD'); %matriz de rigidez
15
16 %% Calculo para encontrar las frecuencias naturales y modos
   de vibracion
17 %Transformacion de la ecuacion [K-w^2M]=0 en problema de
   valores
18 % y vectores propios
19 Omega=zeros(k,1);
20 [V,D]=eigs(K_s,M_s,k,1e-2);
21
22 for i=1:1:k
23     Omega(i,1)=sqrt(D(i,i));
```

```

24 end
25 %FUNCIONA!
26 %Columnas de V: modos de vibraciun normalizados segun la
    masa
27 %Diagonal de D: frecuencias naturales al cuadrado
28 %Omega: Vector que contiene las frecuencias naturales
29
30 %% Extraccion de los modos de cuerpo rigido
31
32 n=size(M_s,2); %Tamano de la matriz de masa
33 p=1; % Inicializaciun de p para ensamblar la matriz Theta
34 m=0; %numero de modos de cuerpo rigido
35 epsilon=1e-2; %numero pequeno para compensar errores de
    aproximacion
36 %Hallando el numero de modos de cuerpo rigido
37
38 for j=1:1:k
39     if D(j,j)<=epsilon
40         m=m+1;
41     end
42 end
43 R=zeros(n,m); %matriz que contiene los modos de cuerpo
    rigido
44 Theta=zeros(n,k-m); %matriz cuyas columnas son los modos de
    vibracion
45 Omega_flex=zeros(k-m,k-m); %vector que contiene los modos
    de vibracion flexibles
46
47 for i=1:1:k
48     if D(i,i)<=epsilon
49         R(:,i)=V(:,i);
50     else
51         Theta(:,p)=V(:,i);
52         Omega_flex(p,p)=Omega(i,1);
53         p=p+1;
54     end
55 end
56 %FUNCIONA!
57 %Se obtiene matriz R de nxn con los modos de cuerpo rigido
    en columnas

```

```

58 %Se obtiene matriz Theta de nxn con los modos de vibracion
    en columnas
59 %Se obtiene la matriz Omega_flex con las frecuencias
    naturales flexibles
60
61 %% Definicion de los vectores alpha y eta
62 % El vector alpha contiene las amplitudes de los modos de
    cuerpo rigido
63 % El vector eta contiene las amplitudes del resto de modos
    de vibracion
64 alpha=zeros(m,1);
65 eta=zeros(k-m,1);
66 for i=1:1:m
67     alpha(i,1)=norm(R(:,i));
68 end
69 for i=1:1:k-m
70     eta(i,1)=norm(Theta(:,i));
71 end
72
73 %FUNCIONA!
74
75 %% Calculo de la matrix de flexibilidad residual G_res
76
77 Cinv=rcond(K_s); %Reciproco del numero de condicion de K_s
78 if Cinv<=epsilon %Matriz singular
79     K_splus=pinv(K_s); % Matriz pseudoinversa de K_s
80 else
81     K_splus=inv(K_s);
82 end
83 T=zeros(n,n); %Inicializacion de matriz T para el calculo
    de G_res
84 for i=1:1:k-m
85     M=Theta(:,i)*Theta(:,i)'/(Omega_flex(i,i)).^2;
86     T=T+M;
87 end
88
89 G_res=K_splus-T;
90
91 %FUNCIONA!!!
92 %Se obtiene la matriz G_res: matriz de flexibilidad
    residual

```

```

93
94 %% Tiempo final y calculo de tiempo CPU
95 t2=cputime;
96
97 Tfinal=t2-t1;
98
99
100 end

```

Código para encontrar los modos normales no lineales

```

1 %% Calculo de Modos Normales no Lineales de sistema de N
  GDL
2 clear
3 close all
4 clc
5
6 M=[1 0;0 2];
7 K=[2 -1;-1 2];
8 alpha=0.1;
9 beta=0.2;
10 C=alpha*M+beta*K;
11
12 M1 = M \ C;
13 M2 = M \ K;
14
15 N=size(M,1);
16
17 %% Definicion de modos no lineales
18 syms x [1 N]
19 syms y [1 N]
20 a = sym('a', [9 N]);
21 b = sym('b', [9 N]);
22
23 % Definir polinomios de modos no lineales
24 for i = 1:N
25     X=sym(zeros(1,N));
26     Y=sym(zeros(1,N));
27     dX_dx=sym(zeros(1,N));
28     dX_dy=sym(zeros(1,N));

```

```

29 dY_dx=sym(zeros(1,N));
30 dY_dy=sym(zeros(1,N));
31 for j=1:N
32     if j~=i
33         X(j)=a(1,j)*x(i)+a(2,j)*y(i)+a(3,j)*x(i)^2+a(4,
           j)*x(i)*y(i)+a(5,j)*y(i)^2+a(6,j)*x(i)^3+a
           (7,j)*x(i)^2*y(i)+a(8,j)*x(i)*y(i)^2+a(9,j)*
           y(i)^3;
34         Y(j)=b(1,j)*x(i)+b(2,j)*y(i)+b(3,j)*x(i)^2+b(4,
           j)*x(i)*y(i)+b(5,j)*y(i)^2+b(6,j)*x(i)^3+b
           (7,j)*x(i)^2*y(i)+b(8,j)*x(i)*y(i)^2+b(9,j)*
           y(i)^3;
35     else
36         X(j)=x(i);
37         Y(j)=y(i);
38     end
39     dX_dx(j) = diff(X(j),x(i));
40     dX_dy(j) = diff(X(j),y(i));
41     dY_dx(j) = diff(Y(j),x(i));
42     dY_dy(j) = diff(Y(j),y(i));
43 end
44 F = -M1*Y.' - M2*X.' + M2*X.^3.';
45 F = simplify(F);
46 for j=1:N
47     P1(j)=dX_dx(j)*y(i)+dX_dy(j)*F(i,1)-Y(j);
48     P2(j)=dY_dx(j)*y(i)+dY_dy(j)*F(i,1)-F(j,1);
49 end
50 P1 = expand(P1);
51 P2 = expand(P2);
52 P1 = collect(P1,[x(i) y(i)]);
53 P2 = collect(P2,[x(i) y(i)]);
54
55 for w=1:N
56
57     [coeffs_P1,terms_P1]=coeffs(P1(w),[x(i) y(i)]);
58     [coeffs_P2,terms_P2]=coeffs(P2(w),[x(i) y(i)]);
59     coeffs_P1=fliplr(coeffs_P1);
60     coeffs_P2=fliplr(coeffs_P2);
61     terms_P1=fliplr(terms_P1);
62     terms_P2=fliplr(terms_P2);
63     coeffs_P1_red=sym(zeros(1,9));

```

```

64     coeffs_P2_red=sym(zeros(1,9));
65
66     for k = 1:length(terms_P1)
67         term = terms_P1(k);
68         if term == x(i)
69             coeffs_P1_red(1)=coeffs_P1(k);
70             continue
71         elseif term == y(i)
72             coeffs_P1_red(2)=coeffs_P1(k);
73             continue
74         elseif term == x(i)^2
75             coeffs_P1_red(3)=coeffs_P1(k);
76             continue
77         elseif term == x(i)*y(i)
78             coeffs_P1_red(4)=coeffs_P1(k);
79             continue
80         elseif term == y(i)^2
81             coeffs_P1_red(5)=coeffs_P1(k);
82             continue
83         elseif term == x(i)^3
84             coeffs_P1_red(6)=coeffs_P1(k);
85             continue
86         elseif term == x(i)^2*y(i)
87             coeffs_P1_red(7)=coeffs_P1(k);
88             continue
89         elseif term == x(i)*y(i)^2
90             coeffs_P1_red(8)=coeffs_P1(k);
91             continue
92         elseif term == y(i)^3
93             coeffs_P1_red(9)=coeffs_P1(k);
94             continue
95         end
96     end
97
98     for m = 1:length(terms_P2)
99         term = terms_P2(m);
100        if term == x(i)
101            coeffs_P2_red(1)=coeffs_P2(m);
102            continue
103        elseif term == y(i)
104            coeffs_P2_red(2)=coeffs_P2(m);

```

```

105     continue
106     elseif term == x(i)^2
107     coeffs_P2_red(3)=coeffs_P2(m);
108     continue
109     elseif term == x(i)*y(i)
110     coeffs_P2_red(4)=coeffs_P2(m);
111     continue
112     elseif term == y(i)^2
113     coeffs_P2_red(5)=coeffs_P2(m);
114     continue
115     elseif term == x(i)^3
116     coeffs_P2_red(6)=coeffs_P2(m);
117     continue
118     elseif term == x(i)^2*y(i)
119     coeffs_P2_red(7)=coeffs_P2(m);
120     continue
121     elseif term == x(i)*y(i)^2
122     coeffs_P2_red(8)=coeffs_P2(m);
123     continue
124     elseif term == y(i)^3
125     coeffs_P2_red(9)=coeffs_P2(m);
126     continue
127     end
128     end
129     end
130
131     coeficientes(w,:)=[coeffs_P1_red coeffs_P2_red];
132     end

```

Anexo B: Códigos en ANSYS®

Código para realizar la extracción de matrices de masa y rigidez

```
*SMAT,MatKS,D,IMPORT,FULL,file.full,STIFF
*PRINT,MatKS,Ksparse.matrix
```

```
*SMAT,MatMS,D,IMPORT,FULL,file.full,MASS
*PRINT,MatMS,Msparse.matrix
```

Código para colocar el resorte con no linealidad cúbica

```
et,_sid,39,0,0,,3
R,_sid, 0,0, 0.1,0.5, 0.2,4, 0.3,13.5, 0.4,32, 0.5,62.5
RMORE, 0.6,108, 0.7,171.5, 0.8,256, 0.9,364.5, 1,500, 1.1,665.5
RMORE, 1.2,864, 1.3,1098.5, 1.4,1372, 1.5,1687.5, 1.6,2048, 1.7,2456.5
RMORE, 1.8,2916, 1.9,3429.5, 2,4000, 2.1,4630.5, 2.2,5324, 2.3,6083.5
RMORE, 2.4,6912, 2.5,7812.5, 2.6,8788, 2.7,9841.5, 2.8,10976, 2.9,12194.5
RMORE, 3,13500, 3.1,14895.5, 3.2,16384, 3.3,17968.5, 3.4,19652, 3.5,21437.5
RMORE, 3.6,23328, 3.7,25326.5, 3.8,27436, 3.9,29659.5, 4,32000, 4.1,34460.5
RMORE, 4.2,37044, 4.3,39753.5, 4.4,42592, 4.5,45562.5, 4.6,48668, 4.7,51911.5
RMORE, 4.8,55296, 4.9,58824.5, 5,62500, 5.1,66325.5, 5.2,70304, 5.3,74438.5
RMORE, 5.4,78732, 5.5,83187.5, 5.6,87808, 5.7,92596.5, 5.8,97556, 5.9,102689.5
RMORE, 6,108000, 6.1,113490.5, 6.2,119164, 6.3,125023.5, 6.4,131072, 6.5,137312
RMORE, 6.6,143748, 6.7,150381.5, 6.8,157216, 6.9,164254.5, 7,171500, 7.1,178955
RMORE, 7.2,186624, 7.3,194508.5, 7.4,202612, 7.5,210937.5, 7.6,219488, 7.7,228200
RMORE, 7.8,237276, 7.9,246519.5, 8,256000, 8.1,265720.5, 8.2,275684, 8.3,285893
RMORE, 8.4,296352, 8.5,307062.5, 8.6,318028, 8.7,329251.5, 8.8,340736, 8.9,352400
RMORE, 9,364500, 9.1,376785.5, 9.2,389344, 9.3,402178.5, 9.4,415292, 9.5,428687
```

RMORE, 9.6,442368, 9.7,456336.5, 9.8,470596, 9.9,485149.5, 10,500000

