

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Una Representación tipo Weierstrass para
superficies mínimas en el grupo de Heisenberg

\mathcal{H}_3 .

Tesis para optar el grado académico de Maestro en Matemáticas
que presenta:

Lic. John Alexander Córdova Cochachin.

Asesor:

Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo.

Lima, 2025.

Informe de Similitud

Yo, Christiam Figueroa Serrudo, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado

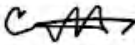
Una representación tipo Weierstrass para superficies mínimas en el grupo de Heisenberg H3....., del autor John Córdova Cochachin

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 15%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 22/08/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel, 22 de agosto de 2025

Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: Figueroa Serrudo Christiam Bernardo	
DNI: 06443602	Firma 
ORCID: 0000-0003-3587-9273	



... A Dios, a mis padres y a toda mi familia quien me impulsa a ser mejor cada día y me ayuda a levantarme en cada caída ...

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por bendecirme, por guiarme, por ser mi principal apoyo y fortaleza en momentos de dificultad y debilidad; por darme el don de saber que siempre está a mi lado y por permitirme concluir un proyecto más en la vida.

En segundo lugar, agradezco a mis padres, quienes siempre me han brindado su apoyo incondicional para alcanzar mis objetivos personales y académicos. Ellos, con su cariño, me han impulsado constantemente a perseguir mis metas y no abandonarlas frente a las adversidades. También me han proporcionado el soporte material y económico necesario para concentrarme plenamente en mis estudios.

En tercer lugar, agradezco muy profundamente al Dr. Roland Rabanal Montoya (director de la Maestría en Matemáticas) y a mi asesor, el Dr. Christiam Bernardo Figueroa Serrudo, por su dedicación y paciencia. Sin sus palabras y correcciones precisas, no habría podido llegar a esta tan anhelada etapa.

Agradezco también a cada uno de los docentes que he conocido a lo largo de este viaje, especialmente a:

- Percy Braulio Fernandez Sanchez.
- Christiam Bernardo Figueroa Serrudo.
- Sergio Julio Chion Aguirre.
- Arturo Ulises Fernandez Perez.
- Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.
- Jonathan Samuel Farfán Vargas.

- Jesús Abad Zapata Samanez.
- Alfredo Bernardo Poirier Schmitz.
- Rubén Ángel Agapito Ruiz.
- Andrés William Beltran Cortez.
- Elton John Barrantes Requejo.
- Liliana Puchuri Medina.
- Alberto Alonso Castillo Garcia.
- Miguel Ángel Gonzaga Ramirez.
- Jorge Luis Crisóstomo Parejas.
- José Luis Henostroza Gamboa.
- Hernán Neciosup Puicán.
- Norberto Jaime Chau Perez.
- Juan Eduardo Casavilca Silva.
- Richard Santiago Quispe Rivas.
- María Iris Flores Quesquén.
- Diana Karina Bances Vento.
- Wilson Edwar Diaz Cajó.
- Joel Mendoza Jimenez.

y muchos más, quienes con su amistad y su experiencia me han servido de soporte en mi desarrollo académico, profesional y laboral en esta prestigiosa universidad.

Por último quiero agradecer a todos mis compañeros en las diferentes facultades y estudios generales de la PUCP. Gracias por las horas compartidas, los trabajos realizados en conjunto y las historias vividas. En especial a la escuela de Posgrado, EEGGCC, EEGLL, la FACI y la FAD por permitirme mediante la docencia, poder adquirir aún más conocimientos para mi provechosa formación.

Resumen

El propósito de esta tesis es representar las superficies mínimas en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 usando la aplicación normal de Gauss. Para ello veremos y estudiaremos como se resolvió el problema para superficies en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada y verificar que se puede replicar este estudio, de alguna manera, al caso de superficies mínimas en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . Finalmente se dará algunos ejemplos aplicativos que ilustren este trabajo de forma práctica y sencilla.

Palabras clave: Primera y segunda forma fundamental de una superficie, Aplicación normal de Gauss, Superficies mínimas, Ecuaciones de Mainardi - Codazzi, Grupos y Álgebras de Lie, Traslaciones, Métrica y Campos invariantes a izquierda, Conexión de Levi - Civita, Fórmula de Koszul, Operador de Weingarten, Ecuación de Beltrami.

Abstract

The purpose of this thesis is to represent minimal surfaces in the Heisenberg group \mathcal{H}_3 using the Gauss normal map. To this end, we will examine how the problem has been addressed for surfaces with a given mean curvature H , and verify that this approach can, in some sense, be adapted to the case of minimal surfaces in the Heisenberg group \mathcal{H}_3 . Finally, several illustrative examples will be provided to demonstrate the practical applications of this study.

Key words. First and second fundamental form of a surface, Gauss normal application, Minimal surfaces, Mainardi - Codazzi equations, Groups and Lie Algebras, Translations, Metrics and Left invariant vector fields, Levi - Civita connection, Koszul formula, Weingarten Operator, Beltrami Equation.

Índice general

Introducción	1
1 Geometría Diferencial de Superficies en \mathbb{R}^3	3
1.1 Primera forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3	3
1.1.1 Forma local de la primera forma fundamental	3
1.1.2 Aplicaciones fundamentales de la primera forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3	4
1.2 La aplicación normal de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^3	5
1.2.1 El diferencial de la aplicación normal de Gauss como un operador lineal autoadjunto	6
1.3 Segunda forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3	6
1.3.1 Forma local de la segunda forma fundamental	7
1.4 Representación matricial de la diferencial de la aplicación normal de Gauss	8
1.4.1 Curvatura gaussiana y curvatura media de una superficie en \mathbb{R}^3	9
1.4.2 La Helicoide	9
1.5 Superficies mínimas en \mathbb{R}^3	10
1.6 Ecuaciones de compatibilidad de una superficie en \mathbb{R}^3	12
1.6.1 Símbolos de Christoffel de una superficie en \mathbb{R}^3	12
1.6.2 Ecuaciones de compatibilidad de una superficie en \mathbb{R}^3	14
1.6.3 Teorema fundamental de la teoría local de superficies en \mathbb{R}^3 de Pierre Bonnet	14
2 Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada	16

2.1	Coordenadas isotérmicas de una superficie en \mathbb{R}^3	16
2.2	Una ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathbb{R}^3	19
2.3	Fórmula de Weierstrass para una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada no nula	36
2.3.1	Caso especial (La aplicación normal de Gauss como una aplicación armónica)	44
2.4	Ejemplos ilustrativos	46
3	El grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3	50
3.1	Grupos de Lie y Álgebras de Lie	50
3.1.1	Grupos de Lie	50
3.1.2	Traslaciones a izquierda y derecha sobre un grupo de Lie .	51
3.1.3	Campos invariantes sobre un grupo de Lie	51
3.1.4	Álgebras de Lie	51
3.2	El grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3	54
3.3	El corchete de Lie en \mathfrak{h}_3 y la conexión Riemanniana en \mathcal{H}_3	58
4	Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies mínimas en \mathcal{H}_3	60
4.1	Coordenadas isotérmicas de una superficie en \mathcal{H}_3	60
4.2	La aplicación normal de Gauss en \mathcal{H}_3	65
4.3	Una ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathcal{H}_3	72
4.4	Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies mínimas en \mathcal{H}_3	84
4.5	Ejemplos aplicativos	93
	Bibliografía	99

Introducción

La importancia de este estudio comienza con la teoría de superficies en \mathbb{R}^3 , y en particular con el estudio de las superficies mínimas. Este último surge cuando el matemático francés Joseph Louis Lagrange, en el año 1762, buscaba una solución al problema de encontrar una superficie de área mínima, distinta del plano y de la catenoide, que estuviera delimitada por una curva simple con borde en \mathbb{R}^3 . Así, en el año 1741 mediante el uso del Cálculo Variacional y junto a Leonhard Euler lograron representar localmente este tipo de superficies como el gráfico de una función $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ que además cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0.$$

En el año 1776, el matemático francés Jean Meusnier descubrió que la helicoides es otra superficie en \mathbb{R}^3 que también satisfacía la ecuación diferencial anterior. De manera formal, logró demostrar que en esta superficie la suma de las curvaturas principales se anulaba en cada uno de sus puntos. A dicha semisuma la denominó, a partir de trabajos realizados junto con su colega, la matemática y física francesa Sophie Germain, como la ****curvatura media**** de la superficie. A partir de este hallazgo, nace formalmente el estudio de superficies con curvatura media dada. Posteriormente, en el año 1979, el matemático japonés Katsuei Kenmotsu propuso una fórmula de representación de superficies del tipo Weierstrass con curvatura media dada y distinta de cero en \mathbb{R}^3 , lo cual constituye un punto de partida para el desarrollo de la presente tesis.

Por otro lado el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 equipado con la métrica invariante a izquierda es uno de los ocho modelos fundamentales en las geometrías de Thurston y por ello es interesante considerar el estudio de una teoría de superficies en este nuevo espacio y así proponer una fórmula de representación tipo Weierstrass para superficies mínimas en \mathcal{H}_3 , el cual será el objetivo principal de la presente tesis.

Para ello se tendrá en cuenta la siguiente metodología:

- En el capítulo 1 se presentarán algunos tópicos conocidos de superficies en \mathbb{R}^3 desde un punto de vista local, a través de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, para así introducir el concepto de la aplicación normal de Gauss, muy útil para el estudio y desarrollo del segundo y cuarto capítulo de la presente tesis. Me basaré en algunas notas del libro de [Car76].
- En el capítulo 2, a partir de las coordenadas isotérmicas de una superficie en \mathbb{R}^3 y de algunas relaciones auxiliares que involucran la aplicación normal de Gauss y la curvatura media, se presentará una fórmula de representación tipo Weierstrass para esta superficie en el caso en que la curvatura media sea distinta de cero. Al final se presentarán algunos ejemplos que ilustren lo visto en este capítulo. Me basaré en los artículos de [Fig09] y [Ken79] así como del libro de [Ahl78].
- En el capítulo 3 se presentarán algunos tópicos acerca de los grupos y álgebras de Lie para facilitar el estudio del grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . Aquí se demostrará que existe un isomorfismo entre el espacio \mathbb{R}^3 y el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 con una nueva operación $*$. Es decir, el modelo que usaremos para ello será $(\mathbb{R}^3, *)$. Me basaré en algunas notas de los libros de [DC15] y [War83].
- Finalmente en el capítulo 4 se expondrá una representación de superficies mínimas en \mathcal{H}_3 a partir de su aplicación normal de Gauss. Para ello haremos uso de los campos invariantes a izquierda. Con lo cual el proceso de obtención de esta representación es similar al de la fórmula de representación para superficies en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 con la métrica euclidiana y con curvatura media dada. Para finalizar el capítulo se presentarán algunos ejemplos aplicativos, cumpliendo así con el objetivo principal del presente estudio. Me basaré en los artículos de [Fig09] [Fig07], [Fig96], [Rip91], [Ino08] y el libro de [DC15].

El autor.

Capítulo 1

Geometría Diferencial de Superficies en \mathbb{R}^3

1.1 Primera forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y dado $p \in S$ dotamos del producto interno euclidiano al espacio tangente $T_p S$ mediante la aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \langle w_1, w_2 \rangle = w_{11}w_{21} + w_{12}w_{22} + w_{13}w_{23},$$

para cada $w_1, w_2 \in T_p S$. Luego a la forma bilineal y simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le asociamos una forma cuadrática de la siguiente forma:

$$I_p: T_p S \longrightarrow \mathbb{R}; \quad I_p(w) = \|w\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2, \quad \forall w \in T_p S,$$

el cual recibe el nombre de *primera forma fundamental* de la superficie S en el punto p .

1.1.1 Forma local de la primera forma fundamental

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada por x y sea la curva diferenciable C^∞ dado por:

$$\alpha:]-\varepsilon; \varepsilon[\subset \mathbb{R} \longrightarrow S; \quad \alpha(t) = x(u(t), v(t)), \quad t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$$

Luego dado $w \in T_p S$, haciendo $\alpha(0) = x(u_0, v_0) = p$, con $\alpha'(0) = w$ cuya base asociada a la parametrización regular x es el conjunto $\{x_u, x_v\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) = \langle x_u u'(0) + x_v v'(0), x_u u'(0) + x_v v'(0) \rangle_p \\ &= \langle x_u, x_u \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle x_u, x_v \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle x_v, x_v \rangle_p (v'(0))^2 \end{aligned}$$

Del cual si hacemos $E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \langle x_v, x_v \rangle$, tenemos que

$$I_p(w) = E(p) \cdot (u'(0))^2 + 2F(p) \cdot u'(0)v'(0) + G(p) \cdot (v'(0))^2,$$

donde E, F y G reciben el nombre de *coeficientes de la primera forma fundamental* de la superficie S en el punto p y haciendo variar el punto p en un entorno abierto, se obtienen aplicaciones $E, F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ .

1.1.2 Aplicaciones fundamentales de la primera forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3

El estudio de la primera forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3 nos permite hacer mediciones de una forma más simple. Veamos:

- Sea $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular en \mathbb{R}^3 . Luego la longitud de arco de la curva α , en términos de la primera forma fundamental asociada a una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a dicha curva esta dada por

$$\mathcal{S}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt, \quad \forall t \in I$$

- Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada, además sean las aplicaciones $\alpha, \beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ curvas regulares contenidas en S tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in I$. El ángulo θ (en sentido antihorario) que forman α y β esta determinado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_0)\|}$$

En particular, el ángulo que forman las curvas coordenadas dada la base asociada a la parametrización x (es decir $\{x_u, x_v\}$) en el punto $p \in S$, en virtud de los coeficientes de la primera forma fundamental asociada se

obtiene a partir de las siguientes relaciones:

$$\cos \theta = \frac{\langle x_u, x_v \rangle}{\|x_u\| \cdot \|x_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

- Por último, si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular localmente parametrizada por la aplicación $x: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, se sabe que el área de una región $R \subset S$ tal que $x(D) = R$, queda determinado por

$$A(R) = \iint_D \|x_u \times x_v\| dudv$$

Notemos en virtud del item anterior que

$$\|x_u \times x_v\|^2 + \langle x_u, x_v \rangle^2 = (\|x_u\| \cdot \|x_v\| \sin \theta)^2 + (\|x_u\| \cdot \|x_v\| \cos \theta)^2 = \|x_u\|^2 \|x_v\|^2$$

Expresando en términos de E, F, G tenemos que:

$$\|x_u \times x_v\|^2 = EG - F^2$$

Dado que S es una superficie regular entonces x_u y x_v son linealmente independientes, del cual tenemos que $EG - F^2 \neq 0$ y de allí concluimos que

$$A(R) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

1.2 La aplicación normal de Gauss de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada por x , provista del producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, siendo $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria centrada en el origen, se define de forma local la aplicación normal de Gauss de S como:

$$\gamma: S \rightarrow S^2; \gamma(p) = N(p) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \Big|_{(u,v)}, \text{ con } x(u, v) = p,$$

donde N es la representante local de la aplicación normal de Gauss en el entorno coordenado de p . En particular se cumple que $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$.

1.2.1 El diferencial de la aplicación normal de Gauss como un operador lineal autoadjunto

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada por x . Dado que $T_p S$ y $T_{\gamma(p)} S^2$ son planos, entonces el diferencial de la aplicación de Gauss es un operador lineal de la forma $d\gamma(p): T_p S \rightarrow T_{\gamma(p)} S^2 \cong T_p S$.

Ahora para demostrar que el operador lineal $d\gamma_p$ es autoadjunto sobre $T_p S$ bastará demostrar que es autoadjunto en una base asociada a $T_p S$. En efecto sea $\{x_u, x_v\}$ la base asociada a la parametrización x y sea $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ una curva diferenciable sobre S tal que $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, con $\alpha(0) = p \in S$ y $\alpha'(0) = w \in T_p S$. De donde:

$$d\gamma_p(w) = \left. \frac{d(\gamma \circ \alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(N \circ \alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dN(u(t), v(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Del cual se tiene que

$$d\gamma_p(x_u)u'(0) + d\gamma_p(x_v)v'(0) = N_u u'(0) + N_v v'(0)$$

Por tanto:

$$d\gamma_p(x_u) = N_u \text{ y } d\gamma_p(x_v) = N_v. \quad (1.1)$$

y dado que $\langle N, x_u \rangle = \langle N, x_v \rangle = 0$, derivando respecto a u y v se verifica que:

$$\langle N_u, x_v \rangle = \langle N_v, x_u \rangle = -\langle N, x_{uv} \rangle \quad (1.2)$$

Reemplazando (1.1) en (1.2) se concluye que

$$\langle d\gamma_p(x_u), x_v \rangle = \langle x_u, d\gamma_p(x_v) \rangle \text{ por tanto } d\gamma_p \text{ es autoadjunto.}$$

1.3 Segunda forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada por x , orientada y provista del producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para cada $p \in S$. Al igual que para la primera forma fundamental, al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le asociamos una nueva

forma cuadrática definida por:

$$II_p: T_pS \longrightarrow \mathbb{R}; \quad II_p(w) = - \langle dN_p(w), w \rangle, \quad \forall w \in T_pS$$

conocida como la *segunda forma fundamental* de la superficie S en el punto p . Geometricamente dado $p \in S$, el valor de la segunda forma fundamental II_p para un vector unitario $v \in T_pS$ es el valor de la curvatura de una sección normal a una curva regular contenida en la superficie S que pasa por p y es tangente al vector v .

1.3.1 Forma local de la segunda forma fundamental

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada y localmente parametrizada por x . Dado $p \in S$ y la base asociada $\{x_u, x_v\}$ a la parametrización x . Haciendo $w = x_u u'(0) + x_v v'(0)$, tenemos:

$$II_p(w) = -(u'(0))^2 \langle N_u, x_u \rangle - u'(0)v'(0) (\langle N_u, x_v \rangle + \langle N_v, x_u \rangle) - (v'(0))^2 \langle N_v, x_v \rangle$$

Ahora en vista de que $x_{uv} = x_{vu}$ al ser x de clase C^∞ entonces de lo visto en (1.2), los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie S denotados por e, f, g se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{cases} e = - \langle N_u, x_u \rangle = \langle N, x_{uu} \rangle \\ f = - \langle N_u, x_v \rangle = - \langle N_v, x_u \rangle = \langle N, x_{uv} \rangle \\ g = - \langle N_v, x_v \rangle = \langle N, x_{vv} \rangle \end{cases} \quad (1.3)$$

En otras palabras, en la base asociada $\{x_u, x_v\}$ a la parametrización x de la superficie S , tenemos que

$$II_p(w) = -e \cdot (u'(0))^2 - 2f \cdot u'(0)v'(0) - g \cdot (v'(0))^2 \langle N_v, x_v \rangle,$$

donde II_p es la segunda forma fundamental de la superficie S en el punto p (para cada $p \in S$).

Finalmente, haciendo variar $p \in S$ en un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a p , obtenemos de manera similar que para el caso de la primera forma fundamental, aplicaciones $e, f, g: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ .

1.4 Representación matricial de la diferencial de la aplicación normal de Gauss

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular localmente parametrizada por x , orientada y provista del producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sabiendo que

$$\langle N, N \rangle = 1 \quad \text{entonces} \quad \langle N_u, N \rangle = \langle N_v, N \rangle = 0$$

Por tanto $N_u, N_v \in T_p S$. Ahora expresando los campos coordenados N_u y N_v en términos de la base $\{x_u, x_v\}$ asociada a la parametrización x , tenemos

$$N_u = -h_{11}x_u - h_{21}x_v, \quad N_v = -h_{12}x_u - h_{22}x_v \quad (1.4)$$

Dado que $d\gamma_p$ es un operador lineal, siendo γ la aplicación normal de Gauss de la superficie S , podemos obtener la matriz de su diferencial de la siguiente forma:

Como los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie S están dados por $E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \langle x_v, x_v \rangle$. De lo visto en (1.3) y (1.4), tenemos que

$$\begin{aligned} -e = \langle N_u, x_u \rangle &= -h_{11}E - h_{21}F, & -f = \langle N_u, x_v \rangle &= -h_{11}F - h_{21}G, \\ -f = \langle N_v, x_u \rangle &= -h_{12}E - h_{22}F, & -g = \langle N_v, x_v \rangle &= -h_{12}F - h_{22}G. \end{aligned}$$

En otras palabras

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Dado que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular, entonces $EG - F^2 \neq 0$, por tanto

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Del cual se desprenden las *ecuaciones de Weingarten de la superficie S*:

$$\begin{aligned} -h_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & -h_{12} &= \frac{gF - Gf}{EG - F^2}, \\ -h_{21} &= \frac{eF - Ef}{EG - F^2}, & -h_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Luego la matriz $(-h_{ij})$ obtenida representa al diferencial de la aplicación normal de Gauss de la superficie S , cuyas entradas nos serán útiles para estudiar algunas funciones escalares en los siguientes capítulos. En particular si la base asociada $\{x_u, x_v\}$ al espacio tangente $T_p S$ es una base ortonormal, entonces $(-h_{ij})$ es una matriz simétrica (Ver [Car76]).

1.4.1 Curvatura gaussiana y curvatura media de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada y localmente parametrizada por x , provista del producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea γ su aplicación normal de Gauss. Entonces, las funciones $K, H: S \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$K = \det(-h_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{-\text{Traz}(-h_{ij})}{2} = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)}, \quad (1.6)$$

representan respectivamente la curvatura gaussiana y la curvatura media de la superficie S .

1.4.2 La Helicoide

Sea $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^3$ una hélice, el cual es una curva regular dada por la parametrización:

$$\mathbb{H}(u) = (\cos u, \sin u, u), \quad u \in]-\epsilon; \epsilon[$$

Al trazar en cada punto de \mathbb{H} una recta paralela al plano XY y que a la vez intercepte al eje Z , la superficie reglada generada recibe el nombre de *helicoide*, dada por la siguiente parametrización:

$$\mathcal{H}:]-\epsilon; \epsilon[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \mathcal{H}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u); \quad u \in]-\epsilon; \epsilon[, \quad v \in \mathbb{R}$$

cuya gráfica es una superficie regular localmente parametrizada por \mathcal{H} . En efecto \mathcal{H} es de clase C^∞ es inyectiva. Por otro lado se observa que

$$\mathcal{H}_u \times \mathcal{H}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v \sin u & v \cos u & 1 \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix} = (-\sin u, \cos u, -v) \neq \vec{0},$$

para cada $(u, v) \in \text{Dom} \mathcal{H}$. Luego los coeficientes de su primera forma fundamental

en cada punto $p \in S$ son respectivamente:

$$E = \langle \mathcal{H}_u, \mathcal{H}_u \rangle = v^2 (\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{cos}^2 u) + 1 = v^2 + 1.$$

$$F = \langle \mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v \rangle = -v \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u + v \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u + 0 = 0, \quad \forall (u, v) \in \operatorname{Dom} \mathcal{H}.$$

$$G = \langle \mathcal{H}_v, \mathcal{H}_v \rangle = \operatorname{cos}^2 u + \operatorname{sen}^2 u + 0 = 1.$$

Al mismo tiempo, el campo normal unitario a la superficie S esta dado por:

$$N = \frac{\mathcal{H}_u \times \mathcal{H}_v}{\|\mathcal{H}_u \times \mathcal{H}_v\|} = \left(\frac{-\operatorname{sen} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right); \quad \forall (u, v) \in \operatorname{Dom} \mathcal{H}.$$

Luego los coeficientes de su segunda forma fundamental en cada punto $p \in S$ son:

$$\begin{aligned} e = \langle \mathcal{H}_{uu}, N \rangle &= \left\langle (-v \operatorname{cos} u, -v \operatorname{sen} u, 0); \left(\frac{-\operatorname{sen} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) \right\rangle \\ &= \frac{v \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{v \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}} + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \langle \mathcal{H}_{uv}, N \rangle &= \left\langle (-\operatorname{sen} u, \operatorname{cos} u, 0); \left(\frac{-\operatorname{sen} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{\operatorname{cos}^2 u}{\sqrt{1+v^2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \end{aligned}$$

$$g = \langle \mathcal{H}_{vv}, N \rangle = \left\langle (0, 0, 0); \left(\frac{-\operatorname{sen} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\operatorname{cos} u}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}} \right) \right\rangle = 0$$

1.5 Superficies mínimas en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y orientada, entonces se dice que S es una *superficie mínima* si y solo si la curvatura media es nula en cada punto de la superficie ($H \equiv 0$).

Una propiedad muy útil de las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 es la siguiente:

PROPOSICIÓN 1 (Superficie mínima en \mathbb{R}^3 vista como el gráfico de una función)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular el cual puede ser representado por el gráfico de una función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) S es una superficie mínima.
- (b) Para cada punto de S se cumple la ecuación de Euler - Lagrange:

$$(1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{uu} = 0 \quad (1.7)$$

Demostración:

(a) \rightarrow (b)

Parametrizamos la superficie S como $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$, entonces tenemos:

$$x_u = (1, 0, f_u), \quad x_v = (0, 1, f_v), \quad N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}.$$

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental, obtenemos

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2. \quad (1.8)$$

De manera análoga, calculando los coeficientes de la segunda forma fundamental bajo esta parametrización, obtenemos:

$$e = \langle x_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \langle x_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad (1.9)$$

$$g = \langle x_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Como S es una superficie mínima, obtenemos en virtud de (1.6) que:

$$Eg - 2Ff + eG = 0; \quad \forall p \in S.$$

Reemplazando lo obtenido en (1.8) y (1.9) de la página anterior tenemos

$$(1 + f_u^2) \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} - 2f_u f_v \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} + (1 + f_v^2) \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = 0$$

Del cual, para cada $(u, v) \in \text{Dom}f$, demostramos que:

$$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu} = 0$$

(b) \longrightarrow (a)

Como E, F, G, e, f, g son los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de la superficie S respectivamente (que son los mismos obtenidos en la parte (1)) se sabe por (1,6) que la curvatura media H esta dada por

$$H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)}, \text{ en todo } S. \quad (1.10)$$

Reemplazando los valores de estos coeficientes obtenidos en (1.8) y (1.9), en la relación (1.10) tenemos que:

$$H = \frac{\left(\frac{(1 + f_u^2) f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)}{2(EG - F^2)}, \text{ en todo } S$$

Ahora como por hipótesis $S \subset \mathbb{R}^3$ ya es una superficie regular entonces los denominadores en la expresión anterior son distintos de cero. Al mismo tiempo en todo punto de la superficie S ya se cumple la ecuación de Euler-Lagrange. Por tanto, la curvatura media H de la superficie S esta dado por:

$$H = \frac{\left(\frac{0}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \right)}{2(EG - F^2)} = 0$$

con lo cual se demuestra que la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es mínima. \square

1.6 Ecuaciones de compatibilidad de una superficie en \mathbb{R}^3

1.6.1 Símbolos de Christoffel de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada y localmente parametrizada por la aplicación $x: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con N como su aplicación normal de Gauss. Expresando las derivadas parciales de x_u y x_v en términos de la base asociada

$\{x_u, x_v\}$, obtenemos las 4 siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_1 N \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N \\ x_{vu} = \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + L_3 N \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_4 N \end{cases} \quad (1.11)$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) que ahora vamos a obtener, se les conoce con el nombre de *símbolos de Christoffel de la superficie S* respecto a la parametrización x . Luego como $x_{uv} = x_{vu}$, deducimos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Ahora si efectuamos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de las 4 primeras relaciones con el campo unitario N , obtenemos

$$\begin{aligned} e &= \langle \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + L_1 N, N \rangle = L_1 \\ f &= \langle \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + L_2 N, N \rangle = L_2 \\ f &= \langle \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + L_3 N, N \rangle = L_3 \\ g &= \langle \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + L_4 N, N \rangle = L_4 \end{aligned}$$

Luego, para determinar los símbolos de Christoffel, bastará con efectuar el producto interno de las cuatro primeras relaciones de (1.11) con x_u y x_v , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle x_{uu}, x_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, & \langle x_{uu}, x_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \langle x_{uv}, x_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, & \langle x_{uv}, x_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ \langle x_{vv}, x_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, & \langle x_{vv}, x_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Por otro lado, también se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_u &= \langle x_{uu}, x_u \rangle, & F_u - \frac{1}{2} E_v &= \langle x_{uu}, x_v \rangle, \\ \frac{1}{2} E_v &= \langle x_{uv}, x_u \rangle, & \frac{1}{2} G_u &= \langle x_{uv}, x_v \rangle, \\ F_v - \frac{1}{2} G_u &= \langle x_{vv}, x_u \rangle, & \frac{1}{2} G_v &= \langle x_{vv}, x_v \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Así, al comparar las relaciones de (1.12) y (1.13), se obtienen los símbolos de Christoffel de cualquier superficie regular localmente parametrizada en \mathbb{R}^3 en

términos de los coeficientes de su primera forma fundamental. Todo ello nos permite presentar el objetivo principal de este primer capítulo.

1.6.2 Ecuaciones de compatibilidad de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, orientada y localmente parametrizada por la aplicación $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces siendo $F = \langle x_u, x_u \rangle$ y K la curvatura Gaussiana, se cumple que:

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (1.14)$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (1.15)$$

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 \quad (1.16)$$

donde e, f y g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de dicha superficie y los coeficientes Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) son los símbolos de Christoffel correspondientes (Para mayor detalle véase las páginas 237, 238 y 239 de [Car76]).

Luego a las igualdades (1.14) y (1.15) se les conoce como las *ecuaciones de Mainardi - Codazzi* de la superficie S y a la igualdad (1.16) como la *ecuación de Gauss* de la superficie S (respecto a x). En particular, ésta última igualdad (1.16) induce el *teorema Egregium de Gauss*; el cual menciona que la curvatura Gaussiana K de una superficie en \mathbb{R}^3 es invariante frente a cualquier isometría local, es decir que solo dependerá de la métrica euclidiana (Ver página 238 del libro de [Car76]).

En conclusión, a las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) se les conoce como las *ecuaciones de compatibilidad de la superficie S* , que son muy importantes para el desarrollo del siguiente capítulo.

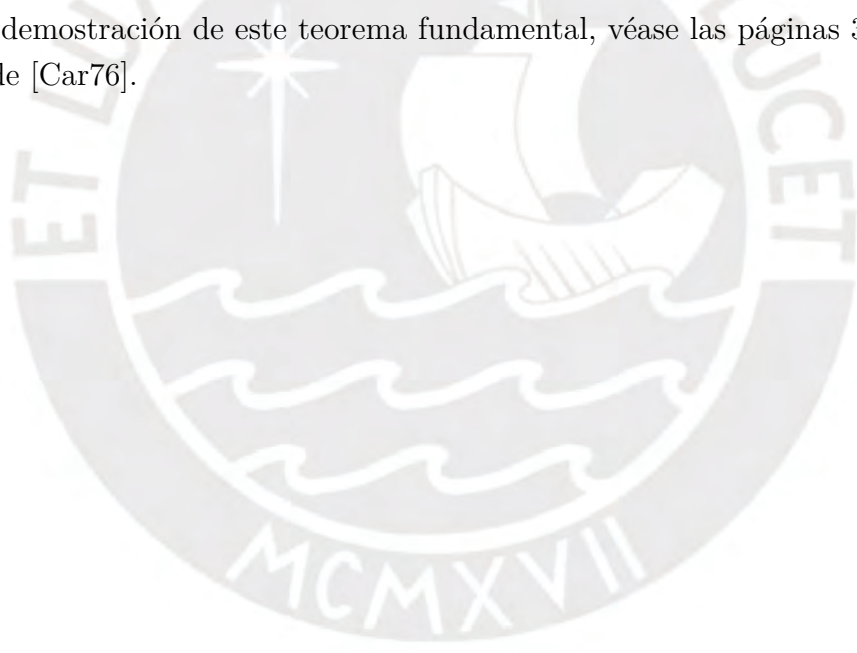
1.6.3 Teorema fundamental de la teoría local de superficies en \mathbb{R}^3 de Pierre Bonnet

Sean $E, F, G, e, f, g: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones C^∞ definidas sobre un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^2$ de tal forma que $E, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$. Luego si estas

6 aplicaciones satisfacen las relaciones (1.14),(1.15) y (1.16) donde las funciones Γ_{ij}^k se expresan en términos de las funciones E, F y G , entonces se cumple que:

- (a) Para cada $p \in V$ existe un entorno abierto $U \subset V$ de p y un difeomorfismo de la forma $x: U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^3$ de tal manera que $x(U) = S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular.
- (b) Las aplicaciones E, F, G y e, f, g definidas anteriormente son para la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, los coeficientes de su primera y segunda forma fundamental respectivamente.
- (c) Si V fuese conexo y si existiese otro difeomorfismo $\hat{x}: U \rightarrow \hat{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ que satisface las mismas condiciones (a) y (b) del teorema, entonces existe una traslación T y una transformación lineal ortogonal y propia Q en \mathbb{R}^3 , de tal manera que $\hat{x} = T \circ Q \circ x$.

Para una demostración de este teorema fundamental, véase las páginas 312–315 del libro de [Car76].



Capítulo 2

Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada

2.1 Coordenadas isotérmicas de una superficie en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, dotada del producto interno euclidiano en cada $T_p S$ y sea $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización asociada a la superficie S de coordenadas x_1, x_2, x_3 , entonces decimos que x es una parametrización en coordenadas isotérmicas, si y solosi:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle = G = \lambda^2 \neq 0, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle = 0 \quad (2.1)$$

donde E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental y la métrica inducida esta dado por:

$$ds^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2),$$

siendo $\lambda > 0$ el factor de escala. Ahora, si para cada $p \in S$ definimos los campos vectoriales unitarios

$$e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad e_3 = e_1 \times e_2 = N, \quad (2.2)$$

entonces e_3 vendría a ser la aplicación normal de Gauss de la superficie S . Así $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal respecto a la parametrización x , para el espacio de campos vectoriales definidos sobre la superficie S . En particular, siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ de (2.2), tenemos que:

$$e_3 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v}, \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \quad (2.3)$$

Por otro lado como $x = (x_1, x_2, x_3)$, de (2.1), tenemos

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 = \lambda^2 \\ F &= \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0 \\ G &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 = \lambda^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Y como el diferencial de la aplicación normal de Gauss e_3 es autoadjunto, siendo $(-h_{ij})$ la matriz que lo representa; entonces en la base $\{x_u, x_v\}$ asociada a la parametrización x , se verifica que $h_{ij} = h_{ji}$. Ahora en virtud de lo visto en (1.4), expresando los campos $\frac{\partial e_3}{\partial u}$ y $\frac{\partial e_3}{\partial v}$ en términos de esta base, tenemos que:

$$\frac{\partial e_3}{\partial u} = -h_{11} \frac{\partial x}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial e_3}{\partial v} = -h_{12} \frac{\partial x}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x}{\partial v}. \quad (2.5)$$

Luego, al expresar las derivadas parciales de los campos x_u, x_v en términos de la base asociada $\{x_u, x_v\}$, en virtud de lo aprendido en la sección (1.6.1) en el capítulo 1; hallando los símbolos de Christoffel y los coeficientes L_i , tenemos expresiones para las segundas derivadas parciales de la parametrización x , dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + h_{11} \lambda^2 e_3, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + h_{12} \lambda^2 e_3, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + h_{22} \lambda^2 e_3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$e = h_{11}\lambda^2$, $f = h_{12}\lambda^2$, $g = h_{22}\lambda^2$: **Coef. de la segunda forma fundamental.**

Dada una superficie orientada $S \subset \mathbb{R}^3$. Siendo H la curvatura media y $(-h_{ij})$ la matriz que representa al diferencial de la aplicación normal de Gauss, entonces la curvatura Gaussiana K puede expresarse como $K = H^2 - \|\phi\|^2$, donde:

$$H = -\frac{1}{2}\text{Traz}(-h_{ij}) = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}), \quad \phi = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12} \quad (2.7)$$

En efecto, se observa que:

$$H^2 - \|\phi\|^2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \det \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{pmatrix} = K$$

PROPOSICIÓN 2 (Teorema del vector curvatura media de una superficie en \mathbb{R}^3)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por coordenadas isotérmicas x , con campo normal, unitario y continuo N . Si H es la curvatura media de la superficie S y HN es el vector curvatura media, entonces:

$$\Delta x = 2\lambda^2 HN$$

donde $\Delta x = x_{uu} + x_{vv}$ es el laplaciano de la parametrización x .

Demostración:

Como la superficie S esta localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas de lo visto en (2.1) se sabe que

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle = G = \lambda^2 \text{ y } F = \langle x_u, x_v \rangle = 0.$$

Luego, derivando la primera igualdad doble respecto a v , y la segunda igualdad respecto de u , obtenemos que:

$$\begin{aligned} \langle x_{vu}, x_u \rangle + \langle x_u, x_{vu} \rangle &= \langle x_{vv}, x_v \rangle + \langle x_v, x_{vv} \rangle, \\ \langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_u, x_{uv} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como $x_{uv} = x_{vu}$ y por la simetría del producto interno, tenemos que:

$$2\langle x_u, x_{uv} \rangle = 2\langle x_v, x_{vv} \rangle, \quad \langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_u, x_{uv} \rangle = 0$$

De donde $\langle x_u, x_{uv} \rangle = \langle x_v, x_{vv} \rangle = -\langle x_{uu}, x_v \rangle$ entonces $\langle x_v, x_{uu} + x_{vv} \rangle = 0$. Ahora intercambiando u por v y repitiendo los mismos pasos, se verifica que

$$\langle x_u, x_{uu} + x_{vv} \rangle = 0 \quad \text{luego} \quad \langle x_{uu} + x_{vv}, N \rangle = h_{11}\lambda^2 + h_{22}\lambda^2 = 2H\lambda^2$$

Con lo cual se verifica que: $x_{uu} + x_{vv} = 2\lambda^2 HN$. □

2.2 Una ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathbb{R}^3

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas x , y sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria centrada en el origen y cubierta por las proyecciones estereográficas (U_1, Ψ_1^*) y (U_2, Ψ_2^*) , donde:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad \text{en todo } U_1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\} \\ \Psi_2^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}, \quad \text{en todo } U_2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\} \end{aligned}$$

Dado que la aplicación normal de Gauss de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ esta dado por γ el cual coincide con el campo vectorial $e_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$. En virtud de la biyección natural que existe entre \mathbb{R}^2 y el plano complejo \mathbb{C} . Al considerar la composición:

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{U} \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{\rho} & U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{x} & S & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\Psi_r^*} & \text{Plano } w_r \\ z = u + iv & \mapsto & (u, v) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (e_{31}, e_{32}, e_{33}) & \mapsto & \Psi_r^*(e_{31}, e_{32}, e_{33}) \end{array}$$

se tiene que $\Psi_r = \Psi_r^* \circ \gamma \circ x \circ \rho$ (con $r = 1, 2$) es un representante de la aplicación normal de Gauss de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ en coordenadas complejas, dada por:

$$\Psi_1(z) = \frac{e_{31}(z) + ie_{32}(z)}{1 - e_{33}(z)} \quad \text{ó} \quad \Psi_2(z) = \frac{e_{31}(z) - ie_{32}(z)}{1 + e_{33}(z)}, \quad (2.8)$$

para cada $z \in \widehat{U}$ y en adelante denotamos por Ψ a la aplicación normal de Gauss de la superficie S , donde $\Psi = \Psi_1$ (ó Ψ_2) en el dominio correspondiente. Ahora

recordemos algunos resultados elementales sobre funciones complejas:

PROPOSICIÓN 3 (Derivadas de Wirtinger)

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de variables independientes u e v , haciendo $z = u + iv$ donde i es la unidad imaginaria, y considerando que:

$u = \operatorname{Re}(z)$: Parte real de z , $v = \operatorname{Im}(z)$: Parte imaginaria de z ,

tenemos que $u = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, donde \bar{z} : Conjugado de z . Luego este cambio de variable permite identificar a la función real $f(u, v)$ como una función compleja f de variables independientes z y \bar{z} . Del cual tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial v}; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (2.9)$$

conocidas como las *derivadas de Wirtinger*, y que cumplen:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad (2.10)$$

En el caso en el que $\operatorname{Im} f = 0$, las relaciones de (2.10) se reducen a

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.11)$$

PROPOSICIÓN 4 (Teorema de la extensión analítica de Riemann en \mathbb{C})

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, sea $a \in \Omega$. Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación analítica en $\Omega - \{a\}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) f tiene una extensión analítica a Ω . Es decir, existe una aplicación $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en Ω tal que $g(z) = f(z)$, para todo $z \neq a$.
- (b) f tiene una extensión continua en Ω . Es decir, existe una aplicación $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω tal que $h(z) = f(z)$, para todo $z \neq a$. En particular existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.
- (c) f es acotada en un entorno reducido de $a \in \Omega$ y $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.

Para una demostración de este último teorema veamos las páginas 127 y 128 del libro de [Ahl78].

OBSERVACIÓN

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ definida en un conjunto abierto U . Haciendo $z = x + iy$ y aplicando las derivadas de Wirtinger, tenemos que:

- Si $f(x, y) = c \in \mathbb{C}$ constante, entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- Si $f(x, y) = g(x)$ entonces $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$.
- Si $f(x, y) = h(y)$ entonces $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in i\mathbb{R}$.

En consecuencia, si $f(x, y)$ depende de ambas variables independientes x e y , su derivada compleja no necesariamente es real. Por ejemplo:

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = \bar{z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ y no son siempre reales.

Ahora presentamos los lemas y teoremas que nos conducirán a la fórmula de representación tipo Weierstrass para superficies en \mathbb{R}^3 . Para ello demostraremos los resultados para el caso específico donde la aplicación normal de Gauss (en coordenadas complejas) es Ψ_1 . Los mismos resultados para Ψ_2 se demuestran de manera similar. Veamos:

LEMA 1

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$. Si Ψ_1 es la aplicación de Gauss definida anteriormente en (2.8), H es la curvatura media y ϕ es la aplicación compleja de (2.7), entonces Ψ_1 cumple las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{H}{2} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -\frac{\phi}{2} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + i \frac{\partial x_2}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

Demostración: En virtud de (2.8) y (2.9) y simplificando las derivaciones en los cálculos se llega a obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2(1 - e_{33})^2} \left\{ \left(\frac{\partial e_{31}}{\partial u} + i \frac{\partial e_{32}}{\partial u} + i \frac{\partial e_{31}}{\partial v} - \frac{\partial e_{32}}{\partial v} \right) (1 - e_{33}) \right. \\ \left. + (e_{31} + i e_{32}) \left(\frac{\partial e_{33}}{\partial u} + i \frac{\partial e_{33}}{\partial v} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ahora como en este caso la matriz del diferencial de la aplicación normal de Gauss $(-h_{ij})$ de la superficie S es simétrica en la base asociada $\{x_u, x_v\}$ de la parametrización, tenemos que:

$$\frac{\partial e_3}{\partial u} = -h_{11} \frac{\partial x}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x}{\partial v} \text{ entonces } \begin{cases} \frac{\partial e_{31}}{\partial u} = -h_{11} \frac{\partial x_1}{\partial u} - h_{21} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial e_{32}}{\partial u} = -h_{11} \frac{\partial x_2}{\partial u} - h_{21} \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial e_{33}}{\partial u} = -h_{11} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{21} \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial e_3}{\partial v} = -h_{12} \frac{\partial x}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x}{\partial v} \text{ entonces } \begin{cases} \frac{\partial e_{31}}{\partial v} = -h_{12} \frac{\partial x_1}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial e_{32}}{\partial v} = -h_{12} \frac{\partial x_2}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial e_{33}}{\partial v} = -h_{12} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{cases} \quad (2.16)$$

Reemplazando en (2.14) lo obtenido en (2.15) y (2.16) y factorizando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2(1 - e_{33})^2} \left\{ \left(-h_{11} \frac{\partial x_1}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) (1 - e_{33}) + e_{31} \left(-h_{11} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right. \\ + i \left[\left(-h_{11} \frac{\partial x_2}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) (1 - e_{33}) + e_{32} \left(-h_{11} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{12} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right] \\ + i \left[\left(-h_{12} \frac{\partial x_1}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) (1 - e_{33}) + e_{31} \left(-h_{12} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right] \\ \left. - \left[\left(-h_{12} \frac{\partial x_2}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) (1 - e_{33}) + e_{32} \left(-h_{12} \frac{\partial x_3}{\partial u} - h_{22} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

para luego expresarlo en la forma:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \hat{A}h_{11} + \hat{B}h_{12} + \hat{C}h_{22}, \text{ donde:}$$

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \frac{1}{2(1-e_{33})^2} \left[\left(-\frac{\partial x_1}{\partial u} + e_{33} \frac{\partial x_1}{\partial u} - e_{31} \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) - i \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} - e_{33} \frac{\partial x_2}{\partial u} + e_{32} \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \right] \\ \widehat{B} &= \frac{1}{2(1-e_{33})^2} \left[(e_{33}-1) \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} + i \frac{\partial x_2}{\partial v} + i \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad \left. - (e_{31} + i e_{32}) \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} + i \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) \right] \\ \widehat{C} &= \frac{1}{2(1-e_{33})^2} \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial v} - e_{33} \frac{\partial x_2}{\partial v} + e_{32} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) - i \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} - e_{33} \frac{\partial x_1}{\partial v} + e_{31} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right].\end{aligned}$$

De los cuales, al usar las relaciones (2.3), (2.4) y (2.9), se verifica que:

$$\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{-1}{(1-e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \text{ y } \widehat{B} = 0; \forall p \in S,$$

y siendo la curvatura media $H = -\frac{\text{Traz}(-h_{ij})}{2} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$, tenemos que:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{h_{11} + h_{22}}{(1-e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{-2H}{(1-e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2.18)$$

Como $e_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$ (que coincide con la aplicación normal de Gauss γ de la superficie S) es un campo vectorial normal unitario, entonces tenemos que $\langle e_3, e_3 \rangle = e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = 1$.

Ahora usando la representación de Ψ_1 en coordenadas complejas vista en (2.8) se verifica que:

$$(1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})(1 - e_{33}) = 2 \quad (2.19)$$

Reemplazando (2.19) en (2.18) y simplificando se llega a verificar la primera igualdad de este lema. Para la segunda igualdad, es decir:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -\frac{\phi}{2} (1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right),$$

se verifica de forma similar, usando la definición de la aplicación ϕ vista en (2.7).

NOTA: Para el caso en el que la aplicación normal de Gauss de la superficie S sea la aplicación Ψ_2 , se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} = -\frac{H}{2} (1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = -\frac{\phi}{2} (1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2.21)$$

Los cuales se demuestran de forma similar que en el caso Ψ_1 ya estudiado y teniendo en cuenta la validéz de la siguiente relación:

$$(1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})(1 + e_{33}) = 2. \quad (2.22)$$

el cual se verifica usando (2.8) y el hecho que $e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = 1$. \square

TEOREMA 1 (Ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathbb{R}^3)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas $x = (x_1, x_2, x_3)$ y con aplicación de Gauss en coordenadas complejas Ψ vista en (2.8). Si ϕ es la aplicación compleja vista en (2.7) y H es la curvatura media, entonces se cumple:

$$H \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} = \phi \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{z}}; \quad i = 1, 2 \quad (2.23)$$

Demostración: De las relaciones (2.12) y (2.13) del lema 1 (para el caso Ψ_1) y las relaciones (2.3) y (2.21) del lema 1 (para el caso Ψ_2) se verifica que:

$$H \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} = -\frac{H\phi}{2} (1 + \Psi_i \overline{\Psi_i})^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = \phi \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{z}}; \quad i = 1, 2.$$

\square

LEMA 2

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ y con curvatura media H . Si Ψ es la aplicación normal de Gauss ya vista en (2.8), entonces:

$$H \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \overline{\Psi_1}^{-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right\} = 0 \quad (2.24)$$

$$H \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \overline{\Psi_2}^{-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right\} = 0 \quad (2.25)$$

Demostración: Si la superficie S es mínima ($H = 0$), el lema se verifica de forma inmediata. En el caso en que $H \neq 0$ en toda la superficie S , de (2.8) y usando el

hecho de que $e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = 1$ se tiene que $\Psi_1 \Psi_2 = 1$. Esto implica que

$$\Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} + \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = 0; \quad \Psi_1 \bar{\Psi}_1 = \frac{1 + e_{33}}{1 - e_{33}}; \quad \Psi_2 \bar{\Psi}_2 = \frac{1 - e_{33}}{1 + e_{33}} \quad (2.26)$$

Multiplicando por Ψ_1 a ambos lados de (2.20) y por Ψ_2 a ambos lados de (2.12), obtenemos:

$$\Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} = -\frac{H}{2} (1 + \Psi_2 \bar{\Psi}_2)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \Psi_1 \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 \quad \text{donde} \quad \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 = 1$$

$$\Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{H}{2} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \Psi_2 \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 \quad \text{donde} \quad \bar{\Psi}_2 \bar{\Psi}_1 = 1$$

Ahora usando (2.19) y (2.22), tenemos:

$$\Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{-2H}{(1 - e_{33})(1 + e_{33})} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \bar{\Psi}_2 \quad \text{en todo} \quad U_1 \cap U_2$$

$$\Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{-2H}{(1 - e_{33})(1 + e_{33})} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \bar{\Psi}_1 \quad \text{en todo} \quad U_1 \cap U_2$$

Al sumar ambas relaciones obtenidas anteriormente y simplificando se obtiene

$$H \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \bar{\Psi}_2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \bar{\Psi}_1 \right\} = 0 \quad \text{en todo} \quad U_1 \cap U_2. \quad (2.27)$$

En virtud de que $\bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 = 1$, al multiplicar por $\bar{\Psi}_1$ a ambos miembros de la igualdad anterior se obtiene la relación (2.24) y al multiplicar por $\bar{\Psi}_2$ a ambos miembros de la misma igualdad (2.27) se obtiene la relación (2.25) y dado que:

$$U_1 - (U_1 \cap U_2) = \{(0, 0, -1)\} \quad \text{y} \quad U_2 - (U_1 \cap U_2) = \{(0, 0, 1)\} \quad \text{son unitarios.}$$

entonces debido a la proposición 4 concluimos que este lema se cumple tanto para Ψ_1 (en U_1) como para Ψ_2 (en U_2), garantizando así su validez. \square

El siguiente lema proporciona relaciones auxiliares muy útiles que cumple toda superficie en \mathbb{R}^3 localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas, y que serán de suma utilidad para llegar al objetivo de este capítulo.

LEMA 3 (Relaciones auxiliares I)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ donde $e_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$ es la aplicación normal de Gauss, entonces:

$$(a) \quad 4 \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = 2\lambda^2(1 - e_{33}) - \left\| \frac{\partial x_3}{\partial u} + i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right\|^2$$

$$(b) \quad \left\| \frac{\partial x_3}{\partial u} + i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right\|^2 = \lambda^2 (e_{31}^2 + e_{32}^2)$$

$$(c) \quad 4 \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = \lambda^2(1 - e_{33})^2$$

Demostración:

(a) En virtud de (2.9) tenemos que

$$4 \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = 4 \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} + i \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \right\|^2$$

Luego en virtud de las relaciones (2.3) y (2.4) tenemos que el segundo miembro de la igualdad anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + 2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ &= \lambda^2 - \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 + \lambda^2 - \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 - 2\lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \right] \\ &= 2\lambda^2 - \left(\left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 \right) - 2\lambda^2 e_{33} = 2\lambda^2(1 - e_{33}) - \left\| \frac{\partial x_3}{\partial u} + i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right\|^2 \end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra la relación (a).

(b) Usando (2.3), observamos que:

$$\begin{aligned} \lambda^2 (e_{31}^2 + e_{32}^2) &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right] \end{aligned}$$

Factorizando esta última expresión, tenemos:

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 - 2 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - 2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right]$$

Con lo cual reemplazando (2.4) en la última expresión anterior y reduciendo, el segundo miembro de la igualdad a demostrar se reduce a:

$$= \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 - \frac{2}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 + \left(-\frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right].$$

$$= \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 = \left\| \frac{\partial x_3}{\partial u} + i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right\|^2.$$

Verificándose así la relación (b).

- (c) Reemplazando en (a), lo obtenido en (b); y dado que $e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = 1$ se verifica fácilmente este ítem (c). \square

De este mismo lema se sigue que si $S \subset \mathbb{R}^3$ esta parametrizada en coordenadas isotérmicas y H, Ψ, ϕ son la curvatura media, la aplicación normal de Gauss y la aplicación vista en (2.7), entonces:

$$\left\| \frac{\partial \Psi_r}{\partial \bar{z}} \right\| = \frac{\lambda |H|}{2} (1 + \Psi_r \bar{\Psi}_r), \quad \left\| \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} \right\| = \frac{\lambda \|\phi\|}{2} (1 + \Psi_r \bar{\Psi}_r), \quad r = 1, 2 \quad (2.28)$$

Se verificará la validez de ambas relaciones para el caso Ψ_1 , para el caso Ψ_2 se hace de manera similar.

Para ello, tomando módulo al cuadrado en ambos miembros de las relaciones (2.12) y (2.13) del lema 1, tenemos:

$$\left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = \frac{H^2}{4} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4 \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right\|^2 = \frac{\|\phi\|^2}{4} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4 \left\| \frac{\partial x_1}{\partial z} + i \frac{\partial x_2}{\partial z} \right\|^2$$

Usando la relación (c) del lema 3 y por (2.19) obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = \frac{\lambda^2 H^2}{(1 - e_{33})^2} = \frac{\lambda^2 H^2 (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2}{4}.$$

$$\left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right\|^2 = \frac{\lambda^2 \|\phi\|^2}{(1 - e_{33})^2} = \frac{\lambda^2 \|\phi\|^2 (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2}{4}.$$

Del cual extrayendo raíz cuadrada en ambos extremos de cada relación se verifica ambas relaciones de (2.28) tanto para el caso Ψ_1 como para el caso Ψ_2 . \square

OBSERVACIÓN

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas y sea Ψ su aplicación de Gauss vista en (2.8). De lo demostrado en la primera relación de (2.28) concluimos que:

S es mínima si y solo si su aplicación de Gauss Ψ es holomorfa. (2.29)

TEOREMA 2

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$. Supongamos que la aplicación normal de Gauss Ψ_1 definida en (2.8) es no holomorfa en todo punto de su dominio y que la curvatura media H es no nula en todo punto de S , entonces:

$$H \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = - \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \quad (2.30)$$

$$H \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = \frac{i(1 + \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \quad (2.31)$$

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = - \frac{2\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \quad (2.32)$$

Demostración: A partir de la relación (2.24) del lema 2, se tiene que:

$$H(1 + \bar{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = iH(1 - \bar{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \quad (2.33)$$

Para la primera igualdad (2.30) se presentan las siguientes situaciones:

- Si $1 - \overline{\Psi}_1^2 = 0$ en algún punto $p_0 \in S$, entonces de (2.33) se tiene que:

$$H(1 + \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en dicho punto } p_0,$$

y como $1 + \overline{\Psi}_1^2 = 2$ en p_0 , entonces de la relación anterior se tiene que $H \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = 0$ en dicho punto. Del cual se verifica la primera igualdad (2.30).

- Si $1 - \overline{\Psi}_1^2 \neq 0$ para todo $p \in S$, a partir de la relación (2.12) del lema 1 y usando la relación (2.33) obtenida anteriormente, se observa que:

$$\begin{aligned} - \frac{1 - \overline{\Psi}_1^2}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{H}{2} (1 - \overline{\Psi}_1^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \frac{H}{2} (1 - \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + \frac{iH}{2} (1 - \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{H}{2} (1 - \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + \frac{H}{2} (1 + \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = H \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad (2.31) se presentan las siguientes situaciones:

- Si $1 + \overline{\Psi}_1^2 = 0$ en algún punto $p_0 \in S$, entonces de (2.33) se tiene que:

$$iH(1 - \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en dicho punto } p_0,$$

y como $1 - \overline{\Psi}_1^2 = 2$ en p_0 , entonces de la relación anterior se tiene que $H \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = 0$ en dicho punto. Del cual se verifica la segunda igualdad (2.31).

- Si $1 + \overline{\Psi}_1^2 \neq 0$ para todo $p \in S$, a partir de la relación (2.12) del lema 1 y usando la relación (2.33) una vez más, se observa que:

$$\begin{aligned} \frac{i(1 + \overline{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} &= - \frac{iH}{2} (1 + \overline{\Psi}_1^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= - \frac{iH}{2} (1 + \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + \frac{H}{2} (1 + \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{H}{2} (1 - \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{H}{2} (1 + \overline{\Psi}_1^2) \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = H \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Para demostrar la tercera igualdad (2.32), como Ψ_1 no es holomorfa, entonces

$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \neq 0$ en todo punto de su dominio. A partir de ello afirmamos que:

$$\frac{\partial x_3}{\partial z} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = \lambda^2 \frac{\Psi_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \quad (2.34)$$

En efecto, siendo $z = u + iv$, por (2.9) tenemos

$$4 \frac{\partial x_3}{\partial z} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{4\lambda^2 \Psi_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} = \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} - i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_1}{\partial v} + i \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) - \frac{4\lambda^2 \Psi_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \quad (2.35)$$

De (2.8) y (2.19) el segundo miembro de la expresión anterior se reduce a:

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial u} - i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_1}{\partial v} + i \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) - \lambda^2 (1 - e_{33})(e_{31} + i e_{32}) \quad (2.36)$$

Para mayor comodidad separaremos la parte real de la parte imaginaria. Así, la parte real de la expresión anterior se reduce a

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial x_3}{\partial v} \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) - \lambda^2 (1 - e_{33}) e_{31}.$$

Teniendo en cuenta lo visto en (2.3) y reduciendo algunos términos, se verifica que la expresión anterior se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u} \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right]$$

Usando (2.4), reduciendo términos semejantes y una vez más en virtud de (2.3) la expresión anterior se simplifica a:

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) + \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \right] = 0$$

Por tanto la parte real de (2.36) se reduce a cero, esto implica que la parte imaginaria de (2.36) se reduce a una expresión de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial x_3}{\partial v} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial x_3}{\partial u} \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) - \lambda^2(1 - e_{33})e_{32}$$

De manera similar que en la parte real, se verifica que la parte imaginaria también se reduce a cero. Así, (2.36) se reduce a cero y como (2.36) es equivalente al segundo miembro de (2.35), entonces se verifica que:

$$4 \frac{\partial x_3}{\partial z} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{4\lambda^2 \Psi_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} = 0$$

Con lo cual se demuestra inmediatamente la relación (2.34). Ahora sí, retomando la demostración de la tercera igualdad (2.32) del teorema 2, teniendo en cuenta la derivación compleja vista en (2.9), aplicamos conjugada compleja a ambos miembros de la igualdad (2.34) hasta llegar a obtener que

$$\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \overline{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + i \frac{\partial x_2}{\partial z} \right)} = \lambda^2 \frac{\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2}$$

Multiplicamos ambos miembros de la relación anterior por $H \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right)$ obtenemos que:

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\|^2 = \frac{H \lambda^2 \bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right)$$

Usando la relación (c) del lema 3 y dado que por hipótesis del teorema, la curvatura media $H \neq 0$ en toda la superficie S , despejando $\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}$ y $\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}$ de las relaciones (2.30) y (2.31) ya demostradas, tenemos:

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \frac{\lambda^2(1 - e_{33})}{4} = \frac{H \lambda^2 \bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \left(\frac{-2}{H(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right)$$

Dado que $H, \lambda^2 \neq 0$ y $(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 \neq 0$ en toda la superficie S , entonces:

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \frac{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 (1 - e_{33})^2}{4} = - \frac{2 \bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}$$

Y usando (2.19) se llega a verificar la validez de la tercera igualdad (2.32). \square

NOTA: En el caso en el que la aplicación normal de Gauss de la superficie S sea la aplicación Ψ_2 , se cumplirán las siguientes relaciones:

$$H \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = - \frac{1 - \bar{\Psi}_2^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}}, \quad (2.37)$$

$$H \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = - \frac{i(1 + \bar{\Psi}_2^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_2)^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}}, \quad (2.38)$$

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{\Psi}_2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_2)^2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}}, \quad (2.39)$$

los cuales se demuestran de manera similar que para el caso de la aplicación Ψ_1 .

NOTA: El teorema 2 ya demostrado también es válido para toda superficie en \mathbb{R}^3 en la que la aplicación normal de Gauss es holomorfa en algún punto de dicha superficie, pues siendo la curvatura media $H = 0$ en este punto (por la observación previa al teorema 2) entonces las relaciones (2.30), (2.31) y (2.32) se verifican de forma inmediata.

LEMA 4 (Relaciones auxiliares II)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ donde H es la curvatura media y $(-h_{ij})$ es la matriz del diferencial de la aplicación normal de Gauss. Si ϕ es la aplicación vista en (2.7), entonces se cumple:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\phi} (e_{31} + i e_{32})$$

$$(b) \quad H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[(h_{11} + i h_{12}) \frac{\partial x_3}{\partial u} + i (h_{22} - i h_{12}) \frac{\partial x_3}{\partial v} \right]$$

$$(c) \quad \frac{\partial (\lambda^2 \phi)}{\partial \bar{z}} = \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z}$$

Demostración:

Primero se probará la relación (a). Veamos:

(a) En virtud de la derivación compleja vista en (2.9), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} \right) + \frac{i}{4} \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

Ahora usando (2.6) y dado que $\frac{\partial \ln \lambda}{\partial u} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}$ y $\frac{\partial \ln \lambda}{\partial v} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}$, factorizando y teniendo en cuenta (2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) &= 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} (h_{11} - h_{22}) + \frac{i}{2} h_{12} \right] \lambda^2 (e_{31} + i e_{32}) \end{aligned}$$

Finalmente de la definición de ϕ vista en (2.7) se verifica este ítem.

Ahora se probará la relación (b). Veamos:

(b) De la definición de curvatura media H y de la definición de ϕ vistas en (2.7), obtenemos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \phi \frac{\partial x_3}{\partial z} &= \frac{1}{2} (h_{11} + h_{22}) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} (h_{11} + h_{22}) - i h_{12} \right] \left(\frac{1}{2} \frac{\partial x_3}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones en el segundo miembro de la igualdad anterior, reduciendo términos semejantes y factorizando adecuadamente se llega a verificar el ítem (b) de este lema.

Finalmente se verificará la relación (c). Veamos:

(c) En virtud de (2.6) los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie S están dados por: $e = \lambda^2 h_{11}$, $f = \lambda^2 h_{12}$ y $g = \lambda^2 h_{22}$ y los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

De las ecuaciones de Mainardi - Codazzi vistas en (1.14) y (1.15), se tiene:

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= \lambda^2 h_{11} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) - \lambda^2 h_{22} \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = 2\lambda H \frac{\partial \lambda}{\partial v} = H \frac{\partial \lambda^2}{\partial v}. \\ f_v - g_u &= \lambda^2 h_{11} \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) - \lambda^2 h_{22} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) = -2\lambda H \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -H \frac{\partial \lambda^2}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) &= -\frac{1}{2}H \frac{\partial \lambda^2}{\partial u} + \frac{i}{2}H \frac{\partial \lambda^2}{\partial v} = -H \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial v} \right). \\ &= -H \frac{\partial \lambda^2}{\partial z} = \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial(\lambda^2 H)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) + \frac{\partial(\lambda^2 H)}{\partial z} = \lambda^2 \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (2.42)$$

Ahora de la definición de ϕ vista en (2.7) y lo obtenido en (2.41) tenemos que

$$\lambda^2 \phi = \frac{1}{2} (\lambda^2 h_{11} - \lambda^2 h_{22}) - i\lambda^2 h_{12} = \frac{1}{2}(e - g) - if$$

De lo anterior, en virtud de (2.9), siendo la curvatura media:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$$

y los valores de los coeficientes e , f y g vistos en la página anterior se verifica que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda^2 \phi)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(e_u + g_u) - \frac{i}{2}(e_v + g_v) \right] \\ &= \frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}(e + g) \\ &= \frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}(\lambda^2 h_{11} + \lambda^2 h_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(f_v - g_u) + \frac{i}{2}(e_v - f_u) + \frac{\partial(\lambda^2 H)}{\partial z} \end{aligned}$$

Así, al comparar la relación (2.42) obtenida con esta última relación obtenida se demuestra el ítem (c) de este lema. \square

LEMA 5

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas $x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ donde H es la curvatura media, e_3 es el campo normal unitario a la superficie S y Ψ_1 es la representante de la aplicación normal de Gauss en coordenadas complejas visto en (2.8). Si ϕ es la aplicación vista en (2.7) y H es no nula en todo S , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2} = & \frac{4H}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{2\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \\ & - \frac{H\lambda^2 \bar{\phi} \Psi_1}{1 - e_{33}} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Demostración:

De la relación (2.12) del lema 1 y (2.19), tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{-2H}{(1 - e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right)$$

Derivando el producto de funciones, usando (2.7) y la relación (a) del lema 4, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2} = & \frac{2H}{(1 - e_{33})^3} \left[(h_{11} + ih_{12}) \frac{\partial x_3}{\partial u} + i(h_{22} - ih_{12}) \frac{\partial x_3}{\partial v} \right] \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \\ & - \frac{4H}{(1 - e_{33})^2} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{H\lambda^2 \bar{\phi}}{(1 - e_{33})^2} (e_{31} + ie_{32}) \\ & - \frac{2}{(1 - e_{33})^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

De lo visto en (2.8) y por la relación (b) del lema 4; dado que $H \neq 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2} = & \frac{4H}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \\ & + 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \left[\frac{-2H}{(1 - e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right] - \frac{H\lambda^2 \bar{\phi} \Psi_1}{1 - e_{33}} \\ & + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \left[\frac{-2H}{(1 - e_{33})^2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right] \end{aligned}$$

Finalmente usando (2.19) y la relación (2.12) del lema 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2} = & \frac{4H}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{2 \partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \\ & - \frac{H \lambda^2 \bar{\phi} \Psi_1}{1 - e_{33}} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}. \quad \square \end{aligned}$$

2.3 Fórmula de Weierstrass para una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada no nula

TEOREMA 3 (Condición de integrabilidad)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas x . Supongamos que la aplicación de Gauss Ψ dada en (2.8) es no holomorfa en cada punto de S y que la curvatura media H es no nula en todo punto de S , entonces se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2 \bar{\Psi}_i}{1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{z}}; \quad i = 1, 2. \quad (2.44)$$

Demostración: Por propiedades de la derivación compleja se verifica que:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z} \partial z}$$

Dado que la curvatura media $H \neq 0$, por el teorema 1 tenemos que

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\phi}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\phi}{H} \right) \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\phi}{H} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \bar{z}^2}$$

Efectuando las derivadas y usando la relación (2.43) del lema 5, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = & \frac{1}{H} \left[\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial (\lambda^2 \phi)}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial \bar{z}} \phi \right] \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\phi}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \\ & + \frac{\phi}{H} \left[\frac{4H}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{H \lambda^2 \bar{\phi}}{1 - e_{33}} \Psi_1 + \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right] \end{aligned}$$

Usando la relación (c) del lema 4 y reduciendo algunos términos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = & \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\phi}{H} \left[\frac{4H}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{H \lambda^2 \bar{\phi}}{1 - e_{33}} \Psi_1 + \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right] - \frac{\phi}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Ahora de (2.34) y (2.19), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{4\phi}{(1 - e_{33})^3} \left(H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right)$$

En virtud de la relación (2.32) del teorema 2, tenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{4\phi}{(1 - e_{33})^3} \left(- \frac{2\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right)$$

Factorizando tenemos que:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{16\bar{\Psi}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}}{(1 - e_{33})^3 (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4} \left[- \frac{\phi}{2} (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) \right].$$

Nuevamente por (2.19) y la relación (2.13) del lema 1, tenemos que:

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2\bar{\Psi}_1}{1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}.$$

Para el caso Ψ_2 la demostración se hace de manera similar. \square

En otras palabras, el sistema de relaciones del teorema 2 cumple la relación (2.44) del teorema 3, que es conocida como la *condición de integrabilidad* de dicho sistema. Con lo cual presentamos el objetivo principal de este capítulo, el cual se presentará en la siguiente página.

TEOREMA 4 (Fórmula de representación tipo Weierstrass para una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura media dada distinta de cero)

Sean $H: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi_1: \widehat{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aplicaciones de clase C^∞ donde U es un abierto simplemente conexo y \widehat{U} es la identificación de U en el plano complejo. Suponga que Ψ_1 no es holomorfa y H no se anula en todo punto de U . Si H y Ψ_1 satisfacen la ecuación (2.44) entonces existe una aplicación $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ cuya imagen $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie parametrizada regular tal que

(a) Las coordenadas de x están dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re} \int_0^z -\frac{1}{H} \frac{1 - \Psi_1^2}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} dz + c_1 \\ x_2 &= \operatorname{Re} \int_0^z -\frac{i}{H} \frac{1 + \Psi_1^2}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} dz + c_2 \\ x_3 &= 2 \operatorname{Re} \int_0^z -\frac{1}{H} \frac{\Psi_1}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} dz + c_3 \end{aligned}$$

(b) x es una parametrización en coordenadas isotérmicas.

(c) La curvatura media y la aplicación normal de Gauss están dadas por H y Ψ_1 , respectivamente.

Demostración:

Primero se probará la relación (a). Veamos:

(a) Afirmamos que las aplicaciones x , H y Ψ_1 satisfacen las relaciones (2.30), (2.31) y (2.32) del teorema 2. Para ello planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} &= -\frac{(1 - \overline{\Psi_1^2})}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} &= \frac{i(1 + \overline{\Psi_1^2})}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} &= -\frac{2\overline{\Psi_1}}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi_1})^2} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Decir que este sistema tiene solución equivale a verificar que

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.46)$$

ya que en caso contrario usando (2.9) tendríamos que:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} \right) + i \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.47)$$

Dado que por suposición $\frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}}, \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial z \partial \bar{z}} \notin \mathbb{R}$, de lo obtenido en (2.47), se tendría que:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} \neq \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u}, \quad i = 1, 2, 3$$

Y por tanto no existirían aplicaciones x_1, x_2, x_3 de clase C^∞ , por ende el sistema (2.45) planteado sería incompatible, lo cual es una contradicción a lo que se desea de este sistema. Por ende verifiquemos lo afirmado en (2.46). En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-\left(1 - \bar{\Psi}_1^2\right)}{H \left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right] &= \frac{1}{H} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \left[\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right] \\ &- \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \left(1 - \bar{\Psi}_1^2\right)}{\partial z} \frac{1}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \frac{\partial \left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2}{\partial z} \\ &- \frac{1}{H} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Como por hipótesis ya se cumple la relación (2.44) del teorema 3, el segundo miembro de la igualdad anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2 \bar{\Psi}_1}{1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right] \\ &+ \frac{2}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} \frac{\bar{\Psi}_1}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} + \frac{2}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^3} \frac{\partial \left(\Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)}{\partial z} \\ &- \frac{1}{H} \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\left(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1\right)^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z \partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Notemos que se cancelan el primer y último término de la expresión anterior,

luego el segundo miembro de la igualdad (2.48) se reduce a:

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{H} \frac{\bar{\Psi}_1 (1 - \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^3} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{2}{H} \frac{\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial \bar{z}} \\
& + \frac{2}{H} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \frac{(1 - \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^3} \left(\Psi_1 \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} + \bar{\Psi}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Una vez más, simplificando los términos extremos de la expresión anterior, teniendo en cuenta que la curvatura media $H \neq 0$ es una función real, tenemos que:

$$\text{Existe } \frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{-(1 - \bar{\Psi}_1^2)}{H(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right] = \frac{4\text{Re}(\Psi_1)}{H(1 + \|\Psi_1\|^2)^3} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2$$

De manera similar se verifica que:

$$\begin{aligned}
\text{Existe } \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{4\text{Im}(\Psi_1)}{(1 + \|\Psi_1\|^2)^3} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2 \text{ y} \\
\text{Existe } \frac{\partial^2 x_3}{\partial z \partial \bar{z}} &= - \frac{2}{H} \frac{1}{(1 + \|\Psi_1\|^2)^2} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2 + \frac{4}{H} \frac{\|\Psi_1\|^2}{(1 + \|\Psi_1\|^2)^3} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right\|^2
\end{aligned}$$

Con lo cual se verifica que $\frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2 x_3}{\partial z \partial \bar{z}}$ son funciones reales y por tanto el sistema de ecuaciones (2.45) es compatible como se quería demostrar.

Ahora dado el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo que es la identificación de $\hat{U} \subset \mathbb{C}$, se deduce de lo demostrado anteriormente que existen funciones $x_1, x_2, x_3: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , de tal manera que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} &= \text{Re} \left(- \frac{1}{H} \frac{(1 - \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right) \\
\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} &= \text{Re} \left(\frac{i}{H} \frac{(1 + \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right) \\
\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} &= \text{Re} \left(- \frac{2}{H} \frac{\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Finalmente, aplicando conjugada compleja a cada miembro de cada igualdad de (2.49), reduciendo e integrando respecto de z se verifica este item mencionado.

Ahora se probará la relación (b). Veamos:

(b) En virtud del producto hermitiano, usando el sistema de relaciones (2.45) además de las propiedades de la derivación compleja vistas en (2.11) tenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial x}{\partial z}; \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z} \right); \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \overline{\left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{z}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{H^2} \frac{(1 - \Psi_1^2)^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4} \frac{\overline{\partial \Psi_1^2}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{H^2} \frac{(1 + \Psi_1^2)^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4} \frac{\overline{\partial \Psi_1^2}}{\partial \bar{z}} \\ &\quad + \frac{4}{H^2} \frac{\Psi_1^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4} \frac{\overline{\partial \Psi_1^2}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

Factorizando y reduciendo fracciones homogéneas tenemos

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial z}; \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \left(\frac{(1 - \Psi_1^2)^2 - (1 + \Psi_1^2)^2 + 4\Psi_1^2}{H^2 (1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^4} \right) \frac{\overline{\partial \Psi_1^2}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.50)$$

Por otro lado, de (2.9), el mismo producto hermitiano anterior, se reduce a

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial z}; \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 \right] - \frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}. \quad (2.51)$$

Así, al comparar (2.51) con (2.50), afirmamos para cada $p \in S$ que:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 \neq 0$$

Pues en caso contrario para algun $p \in S$, se tendría que:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v} \right)^2 = 0,$$

lo cual implicaría que $\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Esto implicaría, en virtud del sistema compatible (2.45) demostrado en (a) que $\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = 0$

y siendo $H \neq 0$ por hipótesis, que:

$$0 = - \frac{(1 - \overline{\Psi}_1^2)}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{i(1 + \overline{\Psi}_1^2)}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = - \frac{2\overline{\Psi}_1}{H (1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}},$$

y esto implicaría que $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = 0$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis del teorema se sabe que Ψ_1 es no holomorfa en todo punto de \widehat{U} . Con lo cual se concluye que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 &= \lambda^2 \neq 0, \\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 &= \lambda^2 \neq 0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

que en virtud de (2.1) y (2.4) al ser equivalentes se demuestra el ítem (b) de este teorema. Es decir $x(U) = S$ es una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas.

Finalmente se verificará el ítem (c). Veamos:

(c) Como la superficie S obtenida en (b) ya presenta coordenadas isotérmicas, siendo $\widehat{\mathbf{H}}$ y μ_1 la curvatura media y la aplicación normal de Gauss respectivamente; tenemos que la superficie S ya cumple el teorema 2, el cual junto con el sistema compatible (2.45) ya demostrado, y siendo H nuestra aplicación no nula, tenemos:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{H}} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = - \frac{(1 - \overline{\mu}_1^2)}{(1 + \mu_1 \overline{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}} \\ \widehat{\mathbf{H}} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = \frac{i(1 + \overline{\mu}_1^2)}{(1 + \mu_1 \overline{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}} \\ \widehat{\mathbf{H}} \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = - \frac{2\overline{\mu}_1}{(1 + \mu_1 \overline{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}} \end{cases} \text{ y } \begin{cases} H \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = - \frac{(1 - \overline{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \\ H \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = \frac{i(1 + \overline{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \\ H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = - \frac{2\overline{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \overline{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \end{cases}$$

Como $\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \neq 0$ (pues Ψ_1 es una aplicación no holomorfa) y en virtud del

sistema (2.45), observamos que:

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}}} = \frac{-\frac{1 - \bar{\mu}_1^2}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}}}{\frac{1 + \bar{\mu}_1^2}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}}} = \frac{-\frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}}{\frac{1 + \bar{\Psi}_1^2}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}}$$

Esto implica que:

$$\frac{1 - \bar{\mu}_1^2}{1 + \bar{\mu}_1^2} = \frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{1 + \bar{\Psi}_1^2}.$$

lo cual lleva a concluir que $\bar{\Psi}_1 = \pm \bar{\mu}_1$, y por tanto, $\Psi_1 = \pm \mu_1$. De manera similar, como $\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \neq 0$ (pues Ψ_1 es no holomorfa), tenemos:

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}}} = \frac{-\frac{1 - \bar{\mu}_1^2}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}}}{-\frac{2\bar{\mu}_1}{(1 + \mu_1 \bar{\mu}_1)^2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \bar{z}}} = \frac{-\frac{(1 - \bar{\Psi}_1^2)}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}}{-\frac{2\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}}$$

Luego: $\frac{1 - \bar{\Psi}_1^2}{\bar{\Psi}_1} = \frac{1 - \bar{\mu}_1^2}{\bar{\mu}_1}$ por tanto $(\mu_1 - \Psi_1)(\mu_1 \Psi_1 + 1) = 0$.

Con lo cual se concluye que $\Psi_1 = \mu_1$. En otras palabras Ψ_1 resulta ser la aplicación normal de Gauss de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, lo cual implica que:

$$H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = -\frac{2\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{H}} \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = -\frac{2\bar{\Psi}_1}{(1 + \Psi_1 \bar{\Psi}_1)^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}}, \quad \forall p \in S$$

Por tanto $H \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = \hat{\mathbf{H}} \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}}$, esto implica que $(H - \hat{\mathbf{H}}) \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = 0, \forall p \in S$

Una vez más, dado que la superficie S satisface el sistema de relaciones (2.45) y Ψ_1 es no holomorfa en todo punto de \hat{U} , entonces:

$$\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} \neq 0, \quad \forall p \in S \quad \text{por ende} \quad H = \hat{\mathbf{H}}, \quad \forall p \in S$$

Y por tanto, H es la curvatura media de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, demostrándose así el ítem (c) de este teorema. \square

NOTA: En el enunciado del teorema 4, podemos reemplazar $\Psi = \Psi_1$ por $\Psi = \Psi_2$ y manteniendo todas las hipótesis se tendrán ahora las siguientes relaciones para el ítem (a):

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re} \int_0^z -\frac{1}{H} \frac{1 - \Psi_2^2}{(1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})^2} \frac{\overline{\partial \Psi_2}}{\partial \bar{z}} dz + c_1 \\ x_2 &= \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{H} \frac{1 + \Psi_2^2}{(1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})^2} \frac{\overline{\partial \Psi_1}}{\partial \bar{z}} dz + c_2 \\ x_3 &= 2 \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{H} \frac{\Psi_2}{(1 + \Psi_2 \overline{\Psi_2})^2} \frac{\overline{\partial \Psi_2}}{\partial \bar{z}} dz + c_3 \end{aligned}$$

Luego los ítems (b) y (c) del teorema se mantienen solo cambiando Ψ_1 por Ψ_2 y se demuestran de manera similar que para el caso de la aplicación $\Psi = \Psi_1$.

2.3.1 Caso especial (La aplicación normal de Gauss como una aplicación armónica)

Sean M, N 2 superficies orientables en \mathbb{R}^3 y sea $\Psi: M \rightarrow N$ una inmersión de clase C^∞ . Luego la métrica inducida en la superficie M esta dado por:

$$ds_M^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2) = \lambda^2(z, \bar{z}) dz d\bar{z}.$$

Decimos que una inmersión $\Psi: M \rightarrow N$ es una aplicación armónica si y sólo si se cumple:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{\Psi \Psi}^\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = 0,$$

donde el *símbolo de Christoffel complejo* en coordenadas del dominio de Ψ puede escribirse en función de los símbolos de Christoffel reales obtenidos en (2.40), y esta dado por:

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{1}{4} \left[(\Gamma_{11}^1 - 2i\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1) + i(\Gamma_{11}^2 - 2i\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) \right]. \quad (2.52)$$

Luego, si $M \subset \mathbb{R}^3$ es localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas y su aplicación normal de Gauss Ψ se expresa en coordenadas complejas (vista en (2.8)). De lo obtenido en (2.40) y reemplazando en (2.52) tenemos que:

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{i}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{2\partial(\ln \lambda)}{\partial z}. \quad (2.53)$$

En el caso particular en el que la curvatura media $H \neq 0$ en toda la superficie M , de lo visto en (2.28) tenemos que:

$$\lambda = \frac{2}{|H|(1 + \Psi\bar{\Psi})} \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}} \right\| = \frac{\lambda_*}{|H|} \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}} \right\|, \quad \text{donde } \lambda_* = \frac{2}{1 + \Psi\bar{\Psi}}.$$

Luego si ds_M^2 es la métrica inducida en la superficie M y N es la esfera unitaria S^2 centrada en el origen, entonces la métrica en S^2 inducida por la aplicación de Gauss Ψ esta dada por:

$$ds_{S^2}^2 = \lambda_*^2(\Psi, \bar{\Psi}) d\Psi d\bar{\Psi}.$$

Así, en virtud de lo visto en (2.52), (2.53) y la aplicación de Gauss Ψ de la superficie M , el símbolo de Christoffel complejo de la esfera S^2 , e inducido por esta métrica $ds_{S^2}^2$, esta dado por:

$$\Gamma_{\Psi\Psi}^{\Psi} = \frac{2\partial(\ln \lambda_*)}{\partial\Psi} = \frac{2\partial(\ln 2 - \ln(1 + \Psi\bar{\Psi}))}{\partial\Psi} = -\frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi\bar{\Psi}}. \quad (2.54)$$

Ahora si la curvatura media H fuese no nula y constante en todo M , la condición de integrabilidad vista en (2.44) se reduce a:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z \partial\bar{z}} - \frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi\bar{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}} = 0,$$

el cual de lo obtenido en (2.54) se verifica que:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z \partial\bar{z}} + \Gamma_{\Psi\Psi}^{\Psi} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}} = 0.$$

En otras palabras, en este caso particular, la aplicación de Gauss Ψ es armónica.

Una consecuencia importante de este caso especial es que si la curvatura media de una superficie en \mathbb{R}^3 localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas es constante y no nula, entonces la aplicación de Gauss de esta superficie no depende de la métrica inducida en dicha superficie, sino unicamente de la estructura diferenciable definida sobre ella.

2.4 Ejemplos ilustrativos

(1) **La esfera S^2 :** Sean H, Ψ aplicaciones de clase C^∞ definidas por

$$\Psi(z) = -\frac{1}{\bar{z}} \text{ y } H(z) = 1; \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Verificaremos que

$$x(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, i \frac{\bar{z} - z}{1 + z\bar{z}}, \frac{-1 + z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right),$$

es una parametrización en coordenadas isotérmicas de la esfera unitaria centrada en el origen de \mathbb{R}^3 , inducida por las aplicaciones H y Ψ .

En efecto, de la definición de Ψ se sigue que:

$$\bar{\Psi} = -\frac{1}{z}, \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}^2}, \Psi \bar{\Psi} = \|\Psi\|^2 = \frac{1}{\|\bar{z}\|^2} \quad (2.55)$$

Ahora verifiquemos que las aplicaciones $H = 1$ y Ψ (el cual no es holomorfo y de clase C^∞ en todo punto de su dominio $\mathbb{C} - \{0\}$ (en virtud de (2.55)) cumplan la ecuación (2.44) del teorema 3. En efecto como $z = u + iv$, en virtud de (2.9), tenemos que:

$$\frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi\bar{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi\bar{\Psi}}(0) \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = 0$$

Luego como $H = 1$, entonces $\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0$. Con lo cual se verifica la relación (2.44) del teorema 7:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi\bar{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = 0$$

por tanto podemos emplear el teorema 4 para obtener la superficie pedida en coordenadas isotérmicas. Ahora dado un conjunto abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, es posible tomar $\Psi = \Psi_1$ o $\Psi = \Psi_2$ sin ningún problema en la elección para iniciar la resolución. Por ejemplo, si hacemos $\Psi = \Psi_1$, por el teorema 4 se tiene que x, Ψ_1 y H ya satisfacen las relaciones (2.30), (2.31) y (2.32) del teorema 2. Así, reemplazando los datos, haciendo

$z = u + iv$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{1 - z^2}{(1 + z\bar{z})^2}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} &= i \frac{1 + z^2}{(1 + z\bar{z})^2}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} &= \frac{2z}{(1 + z\bar{z})^2}.\end{aligned}$$

Integrando respecto a \bar{z} en cada relación, obtenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{z^2 - 1}{z(1 + z\bar{z})} = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} + P(z), \\ x_2 &= \frac{-i(1 + z^2)}{z(1 + z\bar{z})} = \frac{i(\bar{z} - z)}{1 + z\bar{z}} + Q(z), \\ x_3 &= \frac{-2}{1 + z\bar{z}} = \frac{-1 + z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} + R(z),\end{aligned}$$

donde $P(z) = -\frac{1}{z}$ y $Q(z) = -\frac{i}{z}$ son funciones que tienen un polo en el origen y $R(z) = -1$ es constante, por tanto como se desea que x_1 , x_2 y x_3 sean funciones reales de clase C^∞ , sin perder la regularidad de la superficie en estudio, tomamos:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \quad x_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{1 + z\bar{z}}, \quad x_3 = \frac{-1 + z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}.$$

En conclusión la aplicación Ψ satisface la condición de integrabilidad (2.44) del teorema 3 y por tanto:

$$x(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) = \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + \|z\|^2}, i \frac{\bar{z} - z}{1 + \|z\|^2}, \frac{-1 + \|z\|^2}{1 + \|z\|^2} \right),$$

verificándose también que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Por tanto la aplicación x determina una superficie regular en \mathbb{R}^3 parametrizada por coordenadas isotérmicas x en virtud del teorema 4, la cual representa la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 cuyas curvatura media y aplicación normal de Gauss son las funciones $H = 1$ y $\Psi = -\frac{1}{\bar{z}}$ respectivamente. \square

(2) **Un cilindro circular unitario:** Haciendo que $z = u + iv$, sean H, Ψ aplicaciones de clase C^∞ dadas por:

$$\Psi(z) = -\cos u - i \operatorname{sen} u, \quad H(z) = \frac{1}{2}; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Verificaremos que la superficie determinada por H y Ψ es un cilindro circular recto y unitario $C \subset \mathbb{R}^3$.

En efecto, de la fórmula de De Moivre: $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos que $\Psi(z) = -e^{iu}$ y por tanto $\bar{\Psi}(z) = -e^{-iu}$ para cada z . Esto implica que:

$$e^{iu} - e^{-iu} = 2i \operatorname{sen} u, \quad e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cos u$$

$$\Psi = -e^{iu}, \quad \bar{\Psi} = -e^{-iu}, \quad \Psi \bar{\Psi} = 1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = -\frac{ie^{iu}}{2} \quad (2.56)$$

Ahora verifiquemos que H y Ψ (el cual este último es de clase C^∞ y no es holomorfa en todo punto de \mathbb{C} (en virtud de (2.56)) cumplan la ecuación (2.44) del teorema 3. En efecto, veamos por una parte que:

$$H \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{2\bar{\Psi}}{1 + \Psi \bar{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{2e^{-iu}}{2} \left(-\frac{ie^{iu}}{2} \right)^2 \right\} = 0$$

Con lo cual se verifica que H y Ψ cumplen la ecuación (2.44) del teorema 3 y tomando $x:]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $x(u, v) = (x_1, x_2, x_3)$ definido en un conjunto simplemente conexo, podemos nuevamente emplear el teorema 4 para parametrizar localmente la superficie pedida en coordenadas isotérmicas. De manera similar al ejercicio anterior, si hacemos $\Psi = \Psi_1$, en virtud del teorema 4 se tiene que x, Ψ_1 y H ya satisfacen las relaciones (2.30), (2.31) y (2.32) del teorema 2 para el caso Ψ_1 . Y como $z = u + iv$, reemplazando los datos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} &= -\frac{(1 - e^{-2iu})}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} + \frac{i}{2} (0) \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} &= \frac{i(1 + e^{-2iu})}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} + \frac{i}{2} (0) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = \frac{2e^{-iu}}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} + \frac{i}{2} (0) \right)$$

con $\frac{\partial \Psi_1}{\partial u} = -ie^{iu}$, entonces:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} = \frac{i(e^{iu} - e^{-iu})}{4} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} u = \frac{1}{2} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial x_1}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{4} = \frac{1}{2} \cos u = \frac{1}{2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial x_2}{\partial v}.$$

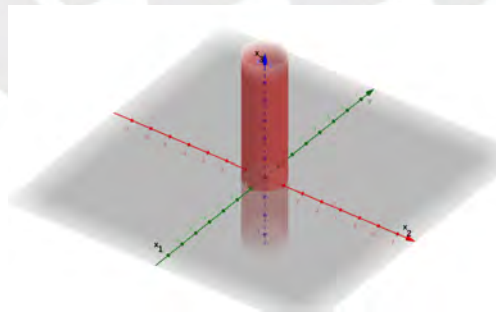
$$\frac{\partial x_3}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial x_3}{\partial v}.$$

Deduciéndose que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\operatorname{sen} u, & \frac{\partial x_2}{\partial u} &= \cos u, & \frac{\partial x_3}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= 0, & \frac{\partial x_2}{\partial v} &= 0, & \frac{\partial x_3}{\partial v} &= -1. \end{aligned}$$

Por tanto: $x_1 = x_1(u, v) = \cos u$, $x_2 = x_2(u, v) = \operatorname{sen} u$, $x_3 = x_3(u, v) = -v$. Finalmente, en vista que u y v son reales, se tiene que $x_3 \in \mathbb{R}$ (arbitrario), verificándose así lo mencionado en este ejemplo. Es decir:

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$



Cilindro circular unitario en \mathbb{R}^3 obtenido de la aplicación Ψ proporcionada.

donde las aplicaciones H y Ψ presentadas, en virtud del teorema 4 son la curvatura media y la aplicación normal de Gauss de esta superficie. ■

Capítulo 3

El grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3

3.1 Grupos de Lie y Álgebras de Lie

3.1.1 Grupos de Lie

Decimos que $(G, *)$ es un *Grupo de Lie* si es un grupo algebraico y al mismo tiempo es una variedad diferenciable (C^∞) de tal manera que la aplicación:

$$\varphi: G \times G \longrightarrow G \text{ tal que } \varphi(x, y) = x * y^{-1} \text{ es de clase } C^\infty.$$

Los ejemplos más conocidos de grupos de Lie son

- $(\mathbb{R}^n, +)$ y $(\mathbb{C} - \{0\}, \bullet)$ con la operación de adición $+$ y la operación de multiplicación compleja \bullet respectivamente.
- El círculo $S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo de Lie con la operación \bullet inducida en $\mathbb{C} - \{0\}$.
- El conjunto de todas las matrices reales no singulares de orden n , denotado por $(GL(n, \mathbb{R}), \bullet)$ con la operación de multiplicación de matrices.
- El producto cartesiano de 2 grupos de Lie (G, \otimes) y (H, \odot) dado por:

$$(G \times H, *) = \{(a, b) * (c, d) = (a \otimes c, b \odot d) ; a, c \in G ; b, d \in H\}.$$

En particular el n -toro $\tau^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ veces}}$ es un grupo de Lie.

3.1.2 Traslaciones a izquierda y derecha sobre un grupo de Lie

Sea G un grupo de Lie y sea $x \in G$ fijo. Las traslaciones a izquierda L_x y traslaciones a derecha R_x correspondientes a x son definidas por:

$$\begin{aligned} L_x: G &\longrightarrow G, & R_x: G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto xy & y &\longmapsto yx \end{aligned}, \quad \forall x, y \in G$$

Estas aplicaciones son difeomorfismos de clase C^∞ debido a que:

$$L_x \circ L_y = L_{xy} \text{ en particular } (L_x)^{-1} = L_{x^{-1}} \text{ y } (R_x)^{-1} = R_{x^{-1}}$$

3.1.3 Campos invariantes sobre un grupo de Lie

Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{X}(G)$ el espacio de campos vectoriales definidos sobre este grupo, entonces:

- Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante a izquierda*, si $(dL_x)(X(y)) = X(L_x(y))$ para todo $x, y \in G$.
- Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante a derecha*, si $(dR_x)(X(y)) = R_x(X(y))$ para todo $x, y \in G$.

3.1.4 Álgebras de Lie

Un espacio vectorial $\tilde{\mathfrak{g}}$ es un *álgebra de Lie* si posee una operación binaria bilineal $[\ , \] : \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ llamado *corchete de Lie*, que satisface las siguientes propiedades:

- $[X, Y] = -[Y, X]$; para todo $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$.
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, para todo $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

A esta propiedad se le conoce como la *identidad de Jacobi*.

Luego, los ejemplos más conocidos de álgebras de Lie son:

- El espacio vectorial \mathbb{R}^3 es un álgebra de Lie, con el producto vectorial canónico, es decir $[x, y] = x \times y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. En efecto este producto

es bilineal y antisimétrica. Además dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ y siendo " \cdot " el producto interno euclidiano en este espacio, y haciendo:

$$R = [[\vec{v}_1, \vec{v}_2], \vec{v}_3] + [[\vec{v}_2, \vec{v}_3], \vec{v}_1] + [[\vec{v}_3, \vec{v}_1], \vec{v}_2]$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} R &= (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 + (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \times \vec{v}_1 + (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \times \vec{v}_2 \\ &= (\vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1) - \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)) + (\vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)) \\ &\quad + (\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3) - \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

verificándose así la identidad de Jacobi. \square

- El espacio vectorial de todas las matrices reales de orden " n ", denotado por M_n es un álgebra de Lie con el siguiente corchete:

$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad (3.1)$$

En efecto, siendo $a, b, k \in \mathbb{R}$ y $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, se verifica el corchete $[,]$ definido en (3.1) es bilineal y antisimétrica. Y una vez más, estando en $M_n(\mathbb{R})$ y de la definición de $[,]$. Haciendo:

$$T = [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B],$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} T &= [AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B]. \\ &= ((AB - BA)C - C(AB - BA)) + ((BC - CB)A - A(BC - CB)) \\ &\quad + ((CA - AC)B - B(CA - AC)). \\ &= (ABC - BAC - CAB + CBA) + (BCA - CBA - ABC + ACB) \\ &\quad + (CAB - ACB - BCA + BAC) = 0, \end{aligned}$$

verificándose la identidad de Jacobi en $M_n(\mathbb{R})$ con el corchete definido. \square

- Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ , entonces el espacio vectorial $\mathfrak{X}(M)$ de los campos vectoriales diferenciables de clase C^∞ sobre M es un

álgebra de Lie con el corchete de campos vectoriales. Es decir:

$$[X, Y] = XY - YX, \text{ para cada } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La demostración es similar al ejemplo del ítem anterior. \square

PROPOSICIÓN 5 (El álgebra de los campos vectoriales sobre un grupo de Lie)

Sea G un grupo de Lie con elemento neutro e y sea \mathcal{E} el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G , entonces se cumple que:

- (a) \mathcal{E} es un espacio vectorial. Por otro lado la aplicación $\zeta: \mathcal{E} \rightarrow T_e G$ dada por $\zeta(X) = X(e)$ es un isomorfismo. En consecuencia, tenemos que $\dim \mathcal{E} = \dim T_e G = \dim G$.
- (b) Para cada $X, Y \in \mathcal{E}$, el corchete de Lie $[X, Y]$ pertenece a \mathcal{E} , donde $[,]$ denota el corchete de campos vectoriales.

Demostración:

Primero se probará el ítem (a). Veamos:

- (a) Para ello será suficiente verificar que \mathcal{E} es un subespacio vectorial del espacio de campos vectoriales sobre el grupo de Lie G . En efecto:

- El campo vectorial nulo $\sigma \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante a izquierda, esto se debe a que:

$$dL_x(\sigma(u)) = dL_x(e) = e = \sigma(L_x(u)), \text{ para cada } x, u \in G$$

- Dados $X, Y \in \mathcal{E}$, como dL_x es un operador lineal para cada $x \in G$, tenemos siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que:

$$\begin{aligned} dL_x(\alpha X + \beta Y)(u) &= dL_x((\alpha X)(u) + (\beta Y)(u)). \\ &= dL_x((\alpha X)(u)) + dL_x((\beta Y)(u)). \\ &= \alpha dL_x(X(u)) + \beta dL_x(Y(u)). \\ &= \alpha X(L_x(u)) + \beta Y(L_x(u)). \\ &= (\alpha X + \beta Y)(L_x(u)) \end{aligned}$$

Por tanto \mathcal{E} es un espacio vectorial. Ahora afirmamos que ζ es una aplicación lineal. En efecto:

- $\zeta(X + Y) = (X + Y)(e) = X(e) + Y(e) = \zeta(X) + \zeta(Y)$; $\forall X, Y \in \mathcal{E}$.
- $\zeta(cX) = (cX)(e) = cX(e) = c\zeta(X)$; $\forall c \in \mathbb{R}$.

Ademas ζ es inyectiva, pues si $\zeta(X) = \zeta(Y)$ entonces $X(e) = Y(e)$. Del cual tenemos que:

$$X(u) = (X \circ L_u)(e) = d(L_u)X(e) = d(L_u)Y(e) = (Y \circ L_u)(e) = Y(u)$$

Por otro lado si definimos el campo vectorial $X(x) = dL_x(v)$, se puede observar que este campo es invariante a izquierda y al mismo tiempo se observa que $X(e) = v$, lo cual implica que ζ es sobreyectiva. Por tanto ζ es un isomorfismo, de donde $\dim \mathcal{E} = \dim T_e G = \dim G$.

Ahora se probará el item (b). Veamos:

- (b) Siendo X e Y campos invariantes a izquierda de G , siendo $[,]$ el corchete de campos vectoriales C^∞ , por la propiedad del pushforward, se observa que:

$$\begin{aligned} dL_x[X, Y](f) &= [X, Y](f \circ L_x) = X(dL_x Y)(f) - Y(dL_x X)(f) \\ &= XY(f) - YX(f) = (XY - YX)(f) = [X, Y](f) \end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra que, si $X, Y \in \mathcal{E}$, entonces $[X, Y] \in \mathcal{E}$. En particular, \mathcal{E} es el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie G . \square

3.2 El grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3

Dado $M_3(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas (reales) de la siguiente forma:

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ P = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R}),$$

cuyas matrices de este conjunto son de orden 3. Además es facil ver que es un subespacio vectorial del conjunto de matrices $M_3(\mathbb{R})$, el cual al dotarlo con el corchete de Lie definido por $[P, Q] = PQ - QP$ es un álgebra de Lie conocido

como el *álgebra de Heisenberg* \mathfrak{h}_3 (de dimensión 3) con orden de nilpotencia 2. Y como las matrices de \mathfrak{h}_3 son de orden 3, la función exponencial está dado por:

$$\exp: \mathfrak{h}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_3 \text{ tal que } \exp(P) = I + P + \frac{P^2}{2}, \forall P \in \mathfrak{h}_3.$$

Es decir:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Con lo cual obtenemos el siguiente conjunto de matrices de orden 3 de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con la operación de multiplicación de matrices, este grupo es conocido como el *grupo de Heisenberg* \mathcal{H}_3 de dimensión 3 asociado al álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 . Ahora mediante la identificación de \mathbb{R}^3 con \mathfrak{h}_3 dada por la siguiente biyección:

$$\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{h}_3; \phi(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se puede dotar a \mathbb{R}^3 de un producto mediante la composición $\widehat{\phi} = \exp \circ \phi$ de tal forma que $\widehat{\phi}$ resulte ser un isomorfismo de grupos como sigue:

$$\begin{aligned} (x, y, z) * (a, b, c) &= \widehat{\phi}^{-1}(\widehat{\phi}(x, y, z) \bullet \widehat{\phi}(a, b, c)). \\ &= \widehat{\phi}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+c - \frac{ay}{2} + \frac{bx}{2} + \frac{(x+a)(y+b)}{2} \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(x+a, y+b, z+c - \frac{ay}{2} + \frac{bx}{2} \right) \end{aligned}$$

donde \bullet es la multiplicación estándar de matrices. De esta manera consideraremos a $(\mathbb{R}^3, *)$ como un modelo del grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . En este modelo tenemos:

- $(0, 0, 0)$ es el *elemento neutro* de \mathcal{H}_3 (respecto a $*$).
- $(-a, -b, -c)$ es el *elemento inverso* en \mathcal{H}_3 para (a, b, c) .

En particular, como \mathbb{R}^3 ya es un grupo de Lie con la operación ”+” y un álgebra de Lie con la operación del producto vectorial canónico; de las definiciones de $\widehat{\phi}$ y ϕ se sigue que \mathbb{R}^3 es isomorfo a \mathcal{H}_3 y \mathfrak{h}_3 respectivamente y considerando el producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{R}^3 , definimos el siguiente producto interno en \mathfrak{h}_3 , dado por:

$$\langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle \phi^{-1}(\widehat{u}), \phi^{-1}(\widehat{v}) \rangle_{\mathbb{R}^3}; \quad \forall u, v \in \mathfrak{h}_3. \quad (3.2)$$

Ahora los campos invariantes a izquierda y la métrica Riemanniana invariante a izquierda (que serán de suma utilidad para el desarrollo del próximo capítulo) se obtendrán de la siguiente forma:

Dado $(x, y, z) \in \mathcal{H}_3$ arbitrario, la traslación a izquierda sobre \mathcal{H}_3 esta dada por:

$$L_{(x,y,z)}(a, b, c) = (x, y, z) * (a, b, c) = \left(x + a, y + b, z + c - \frac{ay}{2} + \frac{bx}{2} \right)$$

cuyo diferencial $(dL_{(x,y,z)})_{(0,0,0)}: T_{(0,0,0)}\mathcal{H}_3 \longrightarrow T_{(x,y,z)}\mathcal{H}_3$ esta dado por

$$(dL_{(x,y,z)})_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Como por la proposición 5 se sabe que $T_{(0,0,0)}\mathcal{H}_3 = \mathfrak{h}_3$ y \mathfrak{h}_3 es isomorfo a \mathbb{R}^3 (via ϕ), a partir de ello definimos los siguientes campos vectoriales invariantes a izquierda sobre este álgebra de Lie, dados por $E_i: \mathcal{H}_3 \longrightarrow T\mathcal{H}_3$, tales que:

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= (dL_{(x,y,z)})_{(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_2(x, y, z) &= (dL_{(x,y,z)})_{(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \\ E_3(x, y, z) &= (dL_{(x,y,z)})_{(0,0,0)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ son los campos coordenados canónicos de \mathbb{R}^3 . Ahora

considerando el producto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{R}^3 donde la base canónica es ortonormal, definimos el siguiente producto interno en \mathcal{H}_3 , dado por:

$$\langle u, v \rangle_{(x,y,z)} = \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})u, (dL_{(x,y,z)^{-1}})v \rangle_{(0,0,0)}; \quad \forall u, v \in T_{(x,y,z)}\mathcal{H}_3. \quad (3.4)$$

En particular:

$$\begin{aligned} \langle E_1, E_1 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_1, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_1 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1, \\ \langle E_1, E_2 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_1, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_2 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ \langle E_1, E_3 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_1, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_3 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_1, e_3 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ \langle E_2, E_2 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_2, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_2 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_2, e_2 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1, \\ \langle E_2, E_3 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_2, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_3 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ \langle E_3, E_3 \rangle_{(x,y,z)} &= \langle (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_3, (dL_{(x,y,z)^{-1}})E_3 \rangle_{\mathfrak{h}_3} = \langle e_3, e_3 \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Además:

$$\langle E_i, E_j \rangle_{(x,y,z)} = \langle E_j, E_i \rangle_{(x,y,z)}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad (3.6)$$

Con lo cual, los campos $\{E_1, E_2, E_3\}$ constituyen una base del espacio de los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre \mathcal{H}_3 . Además, en cada punto $p \in \mathcal{H}_3$, el conjunto $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ forma una base ortonormal de $T_p\mathcal{H}_3$ con respecto a la métrica invariante a izquierda definida en (3.4). Luego, las componentes de ésta métrica sobre \mathcal{H}_3 quedan determinados por:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle E_1(x, y, z) + \frac{y}{2}E_3(x, y, z), E_1(x, y, z) + \frac{y}{2}E_3(x, y, z) \right\rangle_{(x,y,z)} = 1 + \frac{y^2}{4} \\ g_{12} &= \left\langle E_1(x, y, z) + \frac{y}{2}E_3(x, y, z), E_2(x, y, z) - \frac{x}{2}E_3(x, y, z) \right\rangle_{(x,y,z)} = -\frac{xy}{4} \\ g_{13} &= \left\langle E_1(x, y, z) + \frac{y}{2}E_3(x, y, z), E_3(x, y, z) \right\rangle_{(x,y,z)} = \frac{y}{2} \\ g_{22} &= \left\langle E_2(x, y, z) - \frac{x}{2}E_3(x, y, z), E_2(x, y, z) - \frac{x}{2}E_3(x, y, z) \right\rangle_{(x,y,z)} = 1 + \frac{x^2}{4} \\ g_{23} &= \left\langle E_2(x, y, z) - \frac{x}{2}E_3(x, y, z), E_3(x, y, z) \right\rangle_{(x,y,z)} = -\frac{x}{2} \\ g_{33} &= \langle E_3(x, y, z), E_3(x, y, z) \rangle_{(x,y,z)} = 1 \end{aligned}$$

Y como el producto interno en $T_{(x,y,z)}\mathcal{H}_3$ cumple la propiedad de la simetría, entonces se verifica que las aplicaciones $g_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^∞ . En

particular:

$$g_{21} = g_{12} = -\frac{xy}{4}, \quad g_{31} = g_{13} = \frac{y}{2}, \quad g_{32} = g_{23} = -\frac{x}{2}.$$

Con lo cual se obtiene la métrica Riemanniana invariante a izquierda sobre \mathcal{H}_3 denotado por g asociada a este producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en $T_{(0,0,0)}\mathcal{H}_3$ y cuya forma cuadrática esta dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

3.3 El corchete de Lie en \mathfrak{h}_3 y la conexión Riemanniana en \mathcal{H}_3

El corchete de Lie en el espacio vectorial de campos invariantes a izquierda de \mathcal{H}_3 , es decir \mathfrak{h}_3 , quedará determinado por el corchete de Lie entre los elementos de la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$. Así, teniendo en cuenta lo visto en (3.3), obtenemos:

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} = E_3 = - [E_2, E_1] \end{aligned} \quad (3.7)$$

De manera similar se verifica que:

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right] = E_3 = - [E_2, E_1]. \\ [E_1, E_3] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \vec{0} = [E_3, E_1]. \\ [E_2, E_3] &= \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \vec{0} = [E_3, E_2]. \\ [E_i, E_i] &= \vec{0}; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora la métrica invariante a izquierda inducida por (3.4) determina una única conexión afín invariante a izquierda que es de Levi-Civita en \mathcal{H}_3 . Con respecto a esta conexión, y tomando la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$, tenemos por la fórmula de Kozsul que:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, E_k \rangle_p &= \frac{1}{2} \{ E_i \langle E_j, E_k \rangle_p + E_j \langle E_i, E_k \rangle_p - E_k \langle E_i, E_j \rangle_p + \langle [E_i, E_j], E_k \rangle_p \\ &\quad - \langle [E_i, E_k], E_j \rangle_p - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle_p \}, \end{aligned}$$

para $i, j, k = 1, 2, 3$ y como $E_i \langle E_j, E_k \rangle = 0$, la fórmula anterior se reduce a:

$$\langle \bar{\nabla}_{E_i} E_j, E_k \rangle_p = \frac{1}{2} \{ \langle [E_i, E_j], E_k \rangle_p - \langle [E_i, E_k], E_j \rangle_p - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle_p \}$$

Por ende solo bastará conocer como es la conexión entre los elementos de esta base. Luego de (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) y la relación anterior arriba, los términos $\bar{\nabla}_{E_i} E_j$ para $i, j = 1, 2, 3$ se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_1 \rangle_p &= \frac{1}{2} \{ \langle [E_1, E_2], E_1 \rangle_p - \langle [E_1, E_1], E_2 \rangle_p - \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle_p \} = 0 \\ \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_2 \rangle_p &= \frac{1}{2} \{ \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle_p - \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle_p - \langle [E_2, E_2], E_1 \rangle_p \} = 0 \\ \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_3 \rangle_p &= \frac{1}{2} \{ \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle_p - \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle_p - \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle_p \} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + \frac{1}{2} E_3 = \frac{1}{2} E_3.$$

Y continuando con los demás casos, la conexión ∇ sobre \mathcal{H}_3 en la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ queda totalmente determinada por:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2} E_3, & \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2} E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= -\frac{1}{2} E_3, & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2} E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= -\frac{1}{2} E_2, & \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= \frac{1}{2} E_1, & \bar{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0, \end{aligned}$$

facilitando el cálculo de la conexión Riemanniana ∇ para cualquier par de campos vectoriales sobre \mathcal{H}_3 . Por ende \mathcal{H}_3 es una variedad Riemanniana de dimensión 3, con la operación $*$ y la métrica invariante a izquierda (3.4) ■

Capítulo 4

Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies mínimas en \mathcal{H}_3

Con todo lo visto en los capítulos anteriores presentamos el estudio de las superficies en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . En particular el estudio de las superficies mínimas para así poder llegar al objetivo de la presente tesis.

4.1 Coordenadas isotérmicas de una superficie en \mathcal{H}_3

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por la aplicación $\mathcal{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $\mathcal{X}(u, v) = (x, y, z)$. Al expresar los campos coordenados \mathcal{X}_u y \mathcal{X}_v en términos de los campos $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$ de \mathbb{R}^3 , se obtiene:

$$\mathcal{X}_u = x_u \frac{\partial}{\partial x} + y_u \frac{\partial}{\partial y} + z_u \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathcal{X}_v = x_v \frac{\partial}{\partial x} + y_v \frac{\partial}{\partial y} + z_v \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1)$$

donde $x, y, z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^∞ . Ahora debido a que en \mathcal{H}_3 se está empleando la métrica invariante a izquierda, debemos expresar los campos \mathcal{X}_u y \mathcal{X}_v en términos de la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$. Por tanto de (3.3), despejando y reemplazando en las relaciones de (4.1), obtenemos que

$$\mathcal{X}_u = x_u E_1 + y_u E_2 + \alpha E_3 \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{y}{2} x_u - \frac{x}{2} y_u + z_u \quad (4.2)$$

$$\mathcal{X}_v = x_v E_1 + y_v E_2 + \beta E_3 \quad \text{donde} \quad \beta = \frac{y}{2} x_v - \frac{x}{2} y_v + z_v \quad (4.3)$$

Tenemos que \mathcal{X} es una parametrización en *coordenadas isotérmicas* si y solo si:

$$\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle_p = \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle_p = \lambda^2 \neq 0; \quad \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle_p = 0, \quad \forall p \in S$$

Luego, por lo visto en las relaciones (4.2) y (4.3), esto equivale a verificar que:

$$x_u^2 + y_u^2 + \alpha^2 = x_v^2 + y_v^2 + \beta^2 = \lambda^2 \neq 0 \quad \text{y} \quad x_u x_v + y_u y_v + \alpha \beta = 0 \quad (4.4)$$

Y debido a que la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ es ortonormal con el producto interno en \mathcal{H}_3 definido en el capítulo anterior, se sigue que el campo normal unitario a la superficie S (respecto a \mathcal{X}) está dado por:

$$\eta = \frac{\mathcal{X}_u}{\|\mathcal{X}_u\|} \times \frac{\mathcal{X}_v}{\|\mathcal{X}_v\|} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x_u & y_u & \alpha \\ x_v & y_v & \beta \end{vmatrix}$$

Es decir:

$$\eta = \frac{1}{\lambda^2} [(\beta y_u - \alpha y_v) E_1 + (\alpha x_v - \beta x_u) E_2 + (x_u y_v - x_v y_u) E_3]. \quad (4.5)$$

En particular, si a cada una de las coordenadas del campo normal unitario η en la base referencial ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ las denotamos por A, B y C respectivamente, entonces se cumple que:

$$A = \frac{1}{\lambda^2} (\beta y_u - \alpha y_v), \quad B = \frac{1}{\lambda^2} (\alpha x_v - \beta x_u), \quad C = \frac{1}{\lambda^2} (x_u y_v - x_v y_u) \quad (4.6)$$

En particular $\langle \eta, \eta \rangle = A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Además usando (4.4) se cumple que

$$\lambda^2 (A^2 + B^2) = \alpha^2 + \beta^2 \quad (4.7)$$

De manera general, sean S y \bar{M} variedades Riemannianas de dimensión 2 y 3 respectivamente, con conexiones de Levi-Civita ∇ y $\bar{\nabla}$. Consideremos una inmersión isométrica $f: S \rightarrow \bar{M}$, entonces por la fórmula de Gauss la componente tangencial de $\bar{\nabla}_X Y$ es precisamente $\nabla_X Y$ y la componente normal de $\bar{\nabla}_X Y$ es dada por:

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

donde \bar{X} y \bar{Y} son extensiones locales de X e Y que son campos de \bar{M} , es la llamada *segunda forma bilineal* con $B(X, Y) \in TM^\perp$. Dado $p \in S$ y η el campo normal y unitario de S definimos la siguiente forma bilineal:

$$H_\eta: T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H_\eta(v, w) = \langle B(v, w), \eta \rangle, \forall v, w \in T_p S$$

Y a partir de ello se define la forma cuadrática asociada a la forma bilineal H_η como: $II(v) = \langle H_\eta(v, v), \eta \rangle$, $\forall v \in T_p S$. Además H_η induce una aplicación lineal autoadjunta dada por:

$$\mathcal{S}_\eta: T_p S \longrightarrow T_p S \quad \text{tal que} \quad \langle \mathcal{S}_\eta(v), w \rangle = H_\eta(v, w)$$

En particular, si $\bar{\eta}$ es una extensión local del vector normal η , siendo ∇ y $\bar{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita sobre las variedades S y \bar{M} respectivamente, se cumple que:

$$\mathcal{S}_\eta(v) = - (\bar{\nabla}_v \bar{\eta})^T \quad (4.8)$$

donde \mathcal{S}_η es conocida como la *aplicación de Weingarten* u *operador forma*.

PROPOSICIÓN 6 (Teorema del vector curvatura media en una variedad Riemanniana \bar{M})

Sea $S \subset \bar{M}$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} , con campo vectorial normal unitario η . Si H es la curvatura media de la superficie S , entonces:

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v = 2\lambda^2 H\eta, \quad H\eta: \text{Vector curvatura media.} \quad (4.9)$$

Demostración: Como \mathcal{X} está en coordenadas isotérmicas, entonces sabemos que: $\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = \lambda^2$ y $\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0$.

Al igual que en el caso de superficies en \mathbb{R}^3 , derivando la primera igualdad respecto a v y la segunda igualdad respecto de u , se tiene:

$$\mathcal{X}_v \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = \mathcal{X}_v \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle, \quad \mathcal{X}_u \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0.$$

Dado que en la superficie S se cumple que $\nabla = \bar{\nabla}^T$, donde $\bar{\nabla}$ es la conexión en la variedad Riemanniana \bar{M} . Por la compatibilidad de la métrica inducida por la

conexión $\bar{\nabla}$, tenemos:

$$\langle \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle + \langle \mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_u \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle + \langle \mathcal{X}_v, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \rangle,$$

$$\langle \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle + \langle \mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_v \rangle = 0.$$

Dado que \mathcal{X}_u y \mathcal{X}_v son campos coordenados, por la simetría de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y en virtud de la conexión de Levi-Civita en la superficie S , tenemos que:

$$\langle \mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_v \rangle = \langle \mathcal{X}_u, \nabla_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_v \rangle = \langle \mathcal{X}_u, \nabla_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_u \rangle = \langle \mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_u \rangle$$

Luego $\langle \mathcal{X}_v, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u \rangle + \langle \mathcal{X}_v, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \rangle = 0$ y por ello $\langle \mathcal{X}_v, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \rangle = 0$.

De manera similar, derivando ahora la primera igualdad respecto a u , y la segunda igualdad respecto de v , obtenemos las siguientes relaciones:

$$\mathcal{X}_u \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = \mathcal{X}_u \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle, \quad \mathcal{X}_v \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0$$

Y reduciendo de manera similar al caso anterior, obtenemos que

$$\langle \mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \rangle = 0.$$

En resumen:

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \perp \mathcal{X}_u \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v \perp \mathcal{X}_v$$

Así $\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v$ es paralelo al campo η , por ende tenemos que:

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v = \rho \eta \tag{4.10}$$

Del cual tenemos que $\langle \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v, \eta \rangle = \langle -\mathcal{X}_u, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \eta \rangle + \langle -\mathcal{X}_v, \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \eta \rangle = \rho$.

Y en virtud de la aplicación de Weingarten visto en (4.8) tenemos que

$$\rho = \langle \mathcal{S}_\eta(\mathcal{X}_u), \mathcal{X}_u \rangle + \langle \mathcal{S}_\eta(\mathcal{X}_v), \mathcal{X}_v \rangle = (h_{11} + h_{22})\lambda^2 = 2\lambda^2 H. \tag{4.11}$$

donde (h_{ij}) es la matriz que representa a \mathcal{S}_η en la base $\left\{ \frac{\mathcal{X}_u}{\lambda}, \frac{\mathcal{X}_v}{\lambda} \right\}$ asociada a la

parametrización de la superficie S . Con lo cual, de (4.10) y (4.11) se verifica que:

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v = 2\lambda^2 H \eta.$$

□

En particular, si \bar{M} es el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 y $S \subset \mathcal{H}_3$ es una superficie mínima ($H \equiv 0$), entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Delta x = -(\alpha y_u + \beta y_v), \quad \Delta y = \alpha x_u + \beta x_v, \quad (4.12)$$

$$\alpha_u + \beta_v = 0 \quad \text{en otras palabras} \quad \frac{y}{2} \Delta x - \frac{x}{2} \Delta y + \Delta z = 0, \quad (4.13)$$

siendo Δf es el laplaciano de la función f . En efecto, del teorema demostrado anteriormente (4.9), tenemos que:

$$\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \mathcal{X}_u + \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \mathcal{X}_v = 2\lambda^2(0)\eta = 0$$

De la relación anterior, usando las expresiones de \mathcal{X}_u y \mathcal{X}_v en términos de los campos invariantes a izquierda E_1, E_2 y E_3 vistas en (4.2) y (4.3) y la conexión Riemanniana entre estos campos vista en (3.3), obtenemos

$$(x_{uu} + x_{vv} + \alpha y_u + \beta y_v)E_1 + (y_{uu} + y_{vv} - \alpha x_u - \beta x_v)E_2 + (\alpha_u + \beta_v)E_3 = 0$$

Por tanto, si $S \subset \mathcal{H}_3$ es una superficie mínima en coordenadas isotérmicas, de lo anterior tenemos que:

$$\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = -(\alpha y_u + \beta y_v), \quad \Delta y = y_{uu} + y_{vv} = \alpha x_u + \beta x_v, \quad \alpha_u + \beta_v = 0$$

Al mismo tiempo, en virtud de (4.2) y (4.3) y la última relación anterior tenemos:

$$\alpha_u + \beta_v = \left(\frac{y}{2} x_u - \frac{x}{2} y_u + z_u \right)_u + \left(\frac{y}{2} x_v - \frac{x}{2} y_v + z_v \right)_v = 0$$

Desarrollando la ecuación anterior obtenemos que:

$$\left(\frac{y_u}{2} x_u + \frac{y}{2} x_{uu} - \frac{x_u}{2} y_u - \frac{x}{2} y_{uu} + z_{uu} \right) + \left(\frac{y_v}{2} x_v + \frac{y}{2} x_{vv} - \frac{x_v}{2} y_v - \frac{x}{2} y_{vv} + z_{vv} \right) = 0$$

Es decir:

$$\frac{y}{2}(x_{uu} + x_{vv}) - \frac{x}{2}(y_{uu} + y_{vv}) + (z_{uu} + z_{vv}) = \frac{y}{2} \Delta x - \frac{x}{2} \Delta y + \Delta z = 0.$$

Con lo cual se demuestra que si $S \subset \mathcal{H}_3$ es una superficie mínima en coordenadas isotérmicas, entonces se verifica (4.12) y (4.13). \square

4.2 La aplicación normal de Gauss en \mathcal{H}_3

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada. Definimos la aplicación normal de Gauss de la superficie S por:

$$\zeta: S \longrightarrow S^2, \quad \zeta(q) = dL_q^{-1}(\eta(q)) = dL_{q^{-1}}(\eta(q)).$$

donde η es el campo vectorial normal unitario definido sobre S y $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es la esfera unitaria centrada en el origen. Luego como la traslación L_p es una isometría sobre \mathcal{H}_3 y se cumple que

$$d\zeta(p)(T_p S) \subset T_{\zeta(p)} S^2 = \{\zeta(p)\}^\perp$$

se tiene que

$$dL_p \circ d\zeta(p)(T_p S) \subset dL_p(\{\zeta(p)\}^\perp) = \{\eta(p)\}^\perp = T_p S \quad (4.14)$$

Luego, podemos considerar a la aplicación $dL_p \circ d\zeta(p)$ como un operador en $T_p S$.

PROPOSICIÓN 7

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada con η como su campo normal unitario, sea $\bar{\eta}$ un campo sobre \mathcal{H}_3 invariante a la izquierda tal que $\bar{\eta}(p) = \eta(p)$, y sea $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita en \mathcal{H}_3 . Entonces se cumple:

$$dL_p \circ d\zeta_p(v) = \nabla_v \eta - \bar{\nabla}_v \bar{\eta}; \quad p \in S, \quad \forall v \in T_p S \quad (4.15)$$

donde ζ es la aplicación normal de Gauss y ∇ la conexión inducida en S .

Demostración: Fijemos $\{v_1, v_2, v_3\}$, una base ortonormal de $T_p \mathcal{H}_3$ de manera que $v_1, v_2 \in T_p S$ y $v_3 = \eta(p)$. Sean

$$Z_1(q) = dL_{qp^{-1}}(v_1), \quad Z_2(q) = dL_{qp^{-1}}(v_2) \quad y \quad Z_3(q) = dL_{qp^{-1}}(v_3)$$

los campos invariantes a izquierda generados por v_1, v_2 y v_3 . Debido a que

$v_3 = \eta(p)$, entonces el campo invariante por izquierda generado por $\eta(p)$ es $\bar{\eta} = Z_3$.

Como $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ es un referencial ortonormal, tenemos que

$$\eta(q) = a_1(q)Z_1(q) + a_2(q)Z_2(q) + a_3(q)Z_3(q)$$

Así, de la definición de la aplicación normal de Gauss se obtiene

$$\begin{aligned}\zeta(q) &= dL_{q^{-1}}(\eta(q)) = dL_{q^{-1}}(a_1(q)Z_1(q) + a_2(q)Z_2(q) + a_3(q)Z_3(q)) \\ &= a_1(q)Z_1(e) + a_2(q)Z_2(e) + a_3(q)Z_3(e)\end{aligned}$$

Esto implica que si $\alpha:]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow S$ es una curva diferenciable sobre S , tal que $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = v$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}d\zeta_q(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\zeta \circ \alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [a_1(\alpha(t))Z_1(e) + a_2(\alpha(t))Z_2(e) + a_3(\alpha(t))Z_3(e)] \\ &= v(a_1)Z_1(e) + v(a_2)Z_2(e) + v(a_3)Z_3(e).\end{aligned}$$

Como los campos Z_i son invariantes por izquierda, entonces

$$dL_p \circ d\zeta_p(v) = v(a_1)Z_1(p) + v(a_2)Z_2(p) + v(a_3)Z_3(p) = v(a_1)v_1 + v(a_2)v_2 + v(a_3)v_3$$

Ya que $v_3 = \eta(p)$ y $dL_p \circ d\zeta_p: T_p S \rightarrow T_p S$ entonces sigue que $v(a_3) = 0$ y

$$dL_p \circ d\zeta_p(v) = v(a_1)v_1 + v(a_2)v_2$$

Ahora veamos que sucede con la conexión Riemanniana $\bar{\nabla}_v \eta$ en el punto $p \in S$. Como

$$a_1(p) = a_2(p) = 0 \text{ y } a_3(p) = 1 \text{ pues } Z_3(p) = \eta(p) = \bar{\eta}(p).$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_v \eta &= \bar{\nabla}_v (a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3) \\ &= (v(a_1)Z_1 + a_1 \bar{\nabla}_v Z_1 + v(a_2)Z_2 + a_2 \bar{\nabla}_v Z_2 + v(a_3)Z_3 + a_3 \bar{\nabla}_v Z_3)(p) \\ &= v(a_1)v_1 + v(a_2)v_2 + \bar{\nabla}_v \bar{\eta} = dL_p \circ d\zeta_p(v) + \bar{\nabla}_v \bar{\eta}.\end{aligned}$$

Del cual identificando $\nabla_v \eta$ con la proyección tangencial de $\bar{\nabla}_v \eta$ sobre $T_p S$ se verifica inmediatamente la validez de esta proposición. \square

COROLARIO 1

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada y sea η su campo normal unitario. Sea $\bar{\eta}$ un campo invariante a izquierda sobre \mathcal{H}_3 tal que $\bar{\eta}(p) = \eta(p)$, y sea $\zeta: S \rightarrow S^2$ la aplicación normal de Gauss. Si en un punto $p \in S$ se cumple que $d\zeta_p = 0$, entonces

$dL_p^{-1}(T_p S)$ es una subálgebra de Lie del álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 .

Demostración. Para probar el corolario, basta mostrar que si $Y_1, Y_2 \in dL_p^{-1}(T_p S)$ entonces $[Y_1, Y_2] \in dL_p^{-1}(T_p S)$ en el caso particular en que Y_1 y Y_2 sean ortonormales. En efecto, supongamos que se cumple el caso particular y sean $T_1, T_2 \in dL_p^{-1}(T_p S)$ arbitrarios. Entonces, expresando estos vectores en términos de la base $\{Y_1, Y_2\}$, tenemos:

$$T_1 = a_1 Y_1 + b_1 Y_2, \quad T_2 = a_2 Y_1 + b_2 Y_2, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Por la bilinealidad del corchete en el álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 , se verifica que:

$$\text{Si } T_1, T_2 \in dL_p^{-1}(T_p S), \text{ entonces } [T_1, T_2] \in dL_p^{-1}(T_p S). \quad (4.17)$$

Con lo cual se concluye que $dL_p^{-1}(T_p S)$ es una subálgebra de Lie del álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 .

Para finalizar, probemos el caso particular. Como L_p^{-1} es la traslación a la identidad en \mathcal{H}_3 , existe una base ortonormal $\{X_1, X_2\}$ de $T_p S$ tal que

$$Y_1 = dL_p^{-1} X_1, \quad Y_2 = dL_p^{-1} X_2, \quad \zeta_p(p) = dL_p^{-1} \eta(p) = \eta(e).$$

En virtud de la relación (4.15) de la Proposición 7 y de la hipótesis $d\zeta_p = 0$, tenemos que

$$dL_p \circ d\zeta_p(v) = \nabla_v \eta - \bar{\nabla}_v \bar{\eta} = 0, \quad \forall v \in T_p S.$$

Y como el operador $\nabla \eta$ es autoadjunto, se deduce que el operador $a_{\bar{\eta}}(v) = \bar{\nabla}_v \bar{\eta}$ también lo es al restringirse a $T_p S$. Por consiguiente, se obtiene la simetría de los coeficientes:

$$(\bar{\nabla}_{Y_i} \bar{\eta}, Y_j) = (\bar{\nabla}_{Y_j} \bar{\eta}, Y_i), \quad i, j = 1, 2. \quad (4.18)$$

Como los campos Y_1, Y_2 son ortonormales, teniendo en cuenta la conexión

Riemanniana vista en (3.3) y en virtud de la fórmula de Koszul ya reducida previamente:

$$(\bar{\nabla}_{Y_i} \bar{\eta}, Y_j) = \frac{1}{2} (\langle [Y_i, \bar{\eta}], Y_j \rangle + \langle [Y_j, Y_i], \bar{\eta} \rangle + \langle [\bar{\eta}, Y_j], Y_i \rangle).$$

Empleando (4.18) y la antisimetría del corchete de campos vectoriales en la igualdad anterior, se deduce que

$$\langle [Y_i, Y_j], \eta \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad \text{y } \eta = dL_p(\bar{\eta}).$$

Por tanto:

$$\text{Si } Y_1, Y_2 \in dL_p^{-1}(T_p S), \quad \text{entonces } [Y_1, Y_2] \in dL_p^{-1}(T_p S); \quad (4.19)$$

demostrándose así el caso particular, y por consiguiente el corolario. \square

Esta proposición nos permite presentar el siguiente resultado en el estudio de superficies mínimas en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 .

PROPOSICIÓN 8

El plano vertical es la única superficie mínima en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 en la cual la aplicación normal de Gauss es constante.

Demostración: Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie regular con aplicación de Gauss constante. Localmente podemos considerarla como el gráfico de una función f de clase C^∞ , esto es:

$$\tau(u, v) = (u, v, f(u, v)); \quad (u, v) \in \text{Dom} \tau.$$

cuyos campos coordenados $\tau_u = \frac{\partial}{\partial x} + f_u \frac{\partial}{\partial z}$ y $\tau_v = \frac{\partial}{\partial y} + f_v \frac{\partial}{\partial z}$, en términos de los campos invariantes a izquierda E_1, E_2 y E_3 , usando (3.3), (4.2) y (4.3), están dados por:

$$\tau_u = E_1 + \left(f_u + \frac{v}{2}\right) E_3, \quad \tau_v = E_2 + \left(f_v - \frac{u}{2}\right) E_3.$$

Como la aplicación de Gauss es constante tenemos que $d\zeta_p = 0, \forall p \in S$. Luego por el corolario 1 de la proposición 7 se deduce que $dL_p^{-1}(T_p S)$ es un subálgebra de Lie del álgebra de Heisenberg \mathfrak{h}_3 .

Dado que se cumple (4.14) tenemos que $d\zeta_p(T_pS) \subset dL_p^{-1}(T_pS)$. A partir de ello tenemos en la base $\{\tau_u, \tau_v\}$ asociada a la parametrización que:

$$dL_p \circ d\zeta_p(\tau_u) = a\tau_u + b\tau_v, \quad dL_p \circ d\zeta_p(\tau_v) = c\tau_u + d\tau_v \quad (4.20)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. En particular $dL_p^{-1}(\tau_u)$ y $dL_p^{-1}(\tau_v) \in dL_p^{-1}(T_pS)$

Por otra parte usando el corchete de Lie entre los campos vectoriales invariantes a izquierda E_1, E_2 y E_3 , visto en la sección 3.3 del capítulo 3 y por el corolario 1 de la proposición 7, se puede verificar que

$$dL_p^{-1}[\tau_u, \tau_v] = [dL_p^{-1}(\tau_u), dL_p^{-1}(\tau_v)] = e_3 \in dL_p^{-1}(T_pS)$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 , esto implicaría que $dL_p^{-1}(T_pS)$ es un espacio vectorial de dimensión 3, lo cual es una contradicción.

Por ende, no existen superficies en \mathcal{H}_3 que sean parametrizadas como gráfico de una función y que a la vez su aplicación de Gauss sea una función constante. Así que lo único que quedaría sería ver qué ocurre si $S \subset \mathcal{H}_3$ es una superficie vertical, la cual puede ser parametrizada como una superficie reglada de la forma:

$$\tau(u, v) = (u, \rho(u), v) \text{ tal que } \rho \text{ es de clase } C^\infty.$$

En este caso $\tau_u = \frac{\partial}{\partial x} + \rho'(u)\frac{\partial}{\partial y}$, $\tau_v = \frac{\partial}{\partial z}$. Una vez más usando (3.3) tenemos que:

$$\tau_u = E_1 + \rho'(u) E_2 + \frac{\rho(u) - \rho'(u)u}{2} E_3, \quad \tau_v = E_3. \quad (4.21)$$

Dado que el campo vectorial normal y unitario a la superficie S está dado por:

$$\eta = \frac{\tau_u \times \tau_v}{\|\tau_u \times \tau_v\|}, \text{ entonces } \eta = \frac{\rho'(u)}{\sqrt{1 + (\rho'(u))^2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho'(u))^2}} E_2. \quad (4.22)$$

En particular, si la aplicación de Gauss ζ de la superficie S es constante, como $\zeta = dL_p^{-1}\eta$, usando (3.3) y (4.22) se sigue que:

$$\eta \text{ es constante entonces } \rho'(u) = m \text{ es constante entonces } \rho(u) = mu + n. \quad (4.23)$$

En resumen $\tau(u, v) = (u, mu+n, v)$ y por tanto la superficie S es un plano vertical en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 y con ello se verifica una de las implicancias del teorema.

Para verificar que un plano vertical $\Pi \subset \mathcal{H}_3$ es una superficie mínima recordemos que como \mathcal{H}_3 es isomorfo a \mathbb{R}^3 por lo visto en el capítulo anterior, siendo H la curvatura media del plano Π , tenemos que:

$$\Pi \text{ es mínima si y solo si } H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)} = 0 \text{ en todo } \Pi. \quad (4.24)$$

donde de (4.21) y (4.22) obtenemos que:

$$\begin{aligned} E &= \langle \tau_u, \tau_u \rangle = 1 + (\rho'(u))^2 + \frac{(\rho(u) - \rho'(u)u)^2}{4}, \\ F &= \langle \tau_u, \tau_v \rangle = \frac{\rho(u) - \rho'(u)u}{2}, \\ G &= \langle \tau_v, \tau_v \rangle = 1, \\ e &= \langle \bar{\nabla}_{\tau_u} \tau_u, \eta \rangle = \frac{(\rho(u) - \rho'(u)u)(1 + (\rho'(u))^2) - 2\rho''(u)}{2\sqrt{1 + (\rho'(u))^2}}, \\ f &= \langle \bar{\nabla}_{\tau_u} \tau_v, \eta \rangle = \frac{\sqrt{1 + (\rho'(u))^2}}{2}, \\ g &= \langle \bar{\nabla}_{\tau_v} \tau_v, \eta \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

siendo

E, F, G : Coeficientes de la primera forma fundamental del plano Π .

e, f, g : Coeficientes de la segunda forma fundamental del plano Π .

Reemplazando en (4.24) lo obtenido en (4.23) y (4.25) tenemos que:

$$H = - \frac{\rho''(u)}{2(1 + (\rho'(u))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.26)$$

Y como ρ' es constante por lo visto en (4.23), se verifica que la curvatura media H del plano vertical Π es idénticamente nula, garantizándose así que todo plano

vertical en \mathcal{H}_3 es el único tipo de superficies mínimas en la que su aplicación normal de Gauss es constante. \square

OBSERVACIÓN

En general, si en la demostración anterior para nuestra superficie en estudio, considerásemos la parametrización:

$$\tau(u, v) = (\rho(u), \mu(u), v) \text{ tal que } \rho, \mu \text{ son de clase } C^\infty.$$

y seguimos el mismo razonamiento realizado anteriormente se verifica que:

$$\tau(u, v) = (au + b, cu + d, v); \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

entonces tendríamos que:

$$\tau_u = a \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tau_v = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Luego, la parametrización τ es regular si en particular $(a, c) \neq (0, 0)$. Por tanto en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 , con base ortonormal invariante a izquierda $\{E_1, E_2, E_3\}$, de lo visto en (3.3), los vectores tangentes pueden expresarse como:

$$\tau_u = aE_1 + cE_2 + \frac{1}{2}(cb - ad)E_3, \quad \tau_v = E_3.$$

Obsérvese que E_3 pertenece al plano tangente en todo punto de la superficie, por lo que la dirección vertical está contenida en la misma.

En consecuencia, τ también parametriza un plano vertical en \mathcal{H}_3 , cuya ecuación esta dada por:

$$c(x - b) - a(y - d) = 0.$$

Los casos particulares $a = 0$ o $c = 0$ corresponden, respectivamente, a los planos $x = b$ y $y = d$. El caso $a = c = 0$ es excluido del análisis, pues solo representa a una recta vertical y por ende ya no es una superficie en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 .

4.3 Una ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathcal{H}_3

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada, localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} . Dado $p \in S$ sean η y $\bar{\eta}$ los campos vectoriales que satisfacen las condiciones de la proposición 7 (4.15).

Luego si hacemos

$$A_\eta(v) = -\nabla_v \eta, \quad a_{\bar{\eta}}(v) = \bar{\nabla}_v \bar{\eta}$$

Esto implica que:

$$dL_p \circ d\zeta_p(v) = -(A_\eta(v) + a_{\bar{\eta}}(v)), \quad \text{para todo } v \in T_p S.$$

Ahora denotando por $(h_{ij}), (\hat{h}_{ij})$ a las matrices correspondientes a los operadores lineales A_η y $a_{\bar{\eta}}$ en la base asociada a la parametrización de S , es decir $\{\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v\}$ tendríamos que:

$$dL_p \circ d\zeta_p = -(\gamma_{ij}) = -[(h_{ij}) + (\hat{h}_{ij})] \quad (4.27)$$

donde $a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_u) = \hat{h}_{11}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{21}\mathcal{X}_v$ y $a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_v) = \hat{h}_{12}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{22}\mathcal{X}_v$. Tomando el producto interno con \mathcal{X}_u y \mathcal{X}_v obtenemos:

$$\langle a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_u), \mathcal{X}_u \rangle = \langle \hat{h}_{11}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{21}\mathcal{X}_v, \mathcal{X}_u \rangle = \hat{h}_{11}\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = \hat{h}_{11}\lambda^2 \quad (4.28)$$

$$\langle a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_u), \mathcal{X}_v \rangle = \langle \hat{h}_{11}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{21}\mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = \hat{h}_{21}\langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = \hat{h}_{21}\lambda^2 \quad (4.29)$$

$$\langle a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_v), \mathcal{X}_u \rangle = \langle \hat{h}_{12}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{22}\mathcal{X}_v, \mathcal{X}_u \rangle = \hat{h}_{12}\langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_u \rangle = \hat{h}_{12}\lambda^2 \quad (4.30)$$

$$\langle a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_v), \mathcal{X}_v \rangle = \langle \hat{h}_{12}\mathcal{X}_u + \hat{h}_{22}\mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = \hat{h}_{22}\langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = \hat{h}_{22}\lambda^2 \quad (4.31)$$

Por otra parte se sabe que

$$a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_u)(p) = (\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u} \eta)(p) = \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u}(AE_1 + BE_2 + CE_3)(p) \quad (4.32)$$

$$a_{\bar{\eta}}(\mathcal{X}_v)(p) = (\bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v} \eta)(p) = \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v}(AE_1 + BE_2 + CE_3)(p) \quad (4.33)$$

entonces $A = A(p)$, $B = B(p)$ y $C = C(p) \in \mathbb{R}$ pues $\bar{\eta}$ es un campo invariante a izquierda.

Por tanto, usando (3.3), (4.2), (4.3), (4.4) junto con las últimas 6 relaciones

obtenidas de la página anterior, se logra verificar que:

$$a_{\bar{\eta}} = (\widehat{h}_{ij}) = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} -\alpha\beta & \frac{\lambda^2}{2} - \beta^2 \\ \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{2} & \alpha\beta \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

y expresando $dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_u)$ y $dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_v)$ en términos de la base asociada $\{\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_u) &= -\gamma_{11}\mathcal{X}_u - \gamma_{21}\mathcal{X}_v & (4.35) \\ &= -\gamma_{11}(x_u E_1 + y_u E_2 + \alpha E_3) - \gamma_{21}(x_v E_1 + y_v E_2 + \beta E_3) \\ &= (-\gamma_{11}x_u - \gamma_{21}x_v)E_1 + (-\gamma_{11}y_u - \gamma_{21}y_v)E_2 + (-\gamma_{11}\alpha - \gamma_{21}\beta)E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_v) &= -\gamma_{12}\mathcal{X}_u - \gamma_{22}\mathcal{X}_v & (4.36) \\ &= -\gamma_{12}(x_u E_1 + y_u E_2 + \alpha E_3) - \gamma_{22}(x_v E_1 + y_v E_2 + \beta E_3) \\ &= (-\gamma_{12}x_u - \gamma_{22}x_v)E_1 + (-\gamma_{12}y_u - \gamma_{22}y_v)E_2 + (-\gamma_{12}\alpha - \gamma_{22}\beta)E_3 \end{aligned}$$

Por otra parte usando la proposición 7 tenemos que:

$$\begin{aligned} dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_u) &= \nabla_{\mathcal{X}_u}\eta(p) - \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_u}\bar{\eta}(p). & (4.37) \\ &= (A_u E_1 + A\nabla_{\mathcal{X}_u} E_1 + B_u E_2 + B\nabla_{\mathcal{X}_u} E_2 + C_u E_3 + C\nabla_{\mathcal{X}_u} E_3) \\ &\quad - (A\nabla_{\mathcal{X}_u} E_1 + B\nabla_{\mathcal{X}_u} E_2 + C\nabla_{\mathcal{X}_u} E_3) = A_u E_1 + B_u E_2 + C_u E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dL_p \circ d\zeta_p(\mathcal{X}_v) &= \nabla_{\mathcal{X}_v}\eta(p) - \bar{\nabla}_{\mathcal{X}_v}\bar{\eta}(p) & (4.38) \\ &= (A_v E_1 + A\nabla_{\mathcal{X}_v} E_1 + B_v E_2 + B\nabla_{\mathcal{X}_v} E_2 + C_v E_3 + C\nabla_{\mathcal{X}_v} E_3) \\ &\quad - (A\nabla_{\mathcal{X}_v} E_1 + B\nabla_{\mathcal{X}_v} E_2 + C\nabla_{\mathcal{X}_v} E_3) = A_v E_1 + B_v E_2 + C_v E_3 \end{aligned}$$

Del cual comparando (4.35) con (4.37) y (4.36) con (4.38) obtenemos que:

$$\begin{aligned} A_u &= -\gamma_{11}x_u - \gamma_{21}x_v, & A_v &= -\gamma_{12}x_u - \gamma_{22}x_v, \\ B_u &= -\gamma_{11}y_u - \gamma_{21}y_v, & B_v &= -\gamma_{12}y_u - \gamma_{22}y_v, \\ C_u &= -\gamma_{11}\alpha - \gamma_{21}\beta, & C_v &= -\gamma_{12}\alpha - \gamma_{22}\beta. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Una vez más, dado que la esfera unitaria centrada en el origen $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es cubierta

por las proyecciones estereográficas (U_1, ψ_1^*) y (U_2, ψ_2^*) , donde:

$$\psi_1^*(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}, \quad p \in U_1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$$

$$\psi_2^*(x, y, z) = \frac{x - iy}{1 + z}, \quad p \in U_2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$$

Ahora para $\gamma: S \rightarrow S^2$ que es la aplicación de Gauss de la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$ consideramos la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{U} \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{\rho} & U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{X}} & S & \xrightarrow{\gamma} & S^2 & \xrightarrow{\psi_r^*} & \text{Plano } l_r \\ w = u + iv & \mapsto & (u, v) & \mapsto & (x, y, z) & \mapsto & (A, B, C) & \mapsto & \psi_r^*(A, B, C) \end{array}$$

con lo cual se tiene que $\psi_r = \psi_r^* \circ \gamma \circ \mathcal{X} \circ \rho$ es un representante de la aplicación normal de Gauss de la superficie S en coordenadas complejas, dados por:

$$\psi_1 = \frac{A + iB}{1 - C} \quad \text{ó} \quad \psi_2 = \frac{A - iB}{1 + C}; \quad \forall w \in \widehat{U} \quad (4.40)$$

donde A, B, C son las coordenadas del campo normal y unitario η vistas en (4.6). Así, siendo ψ la aplicación de Gauss donde $\psi = \psi_1$ (ó ψ_2) en el dominio correspondiente, presentamos los lemas y teoremas para el objetivo de esta tesis.

LEMA 6

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} con curvatura media H y sea ψ_1 la aplicación de Gauss definida en (4.40), entonces se cumple:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{w}} = - \left(\frac{H + i\Theta}{2} \right) (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{w}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{w}} \right) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial w} = \left(\frac{\phi + \widehat{\phi}}{2} \right) (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial w} + i \frac{\partial y}{\partial w} \right) \quad (4.42)$$

donde:

$$\Theta = \frac{\widehat{h}_{12} - \widehat{h}_{21}}{2}, \quad \phi = \frac{h_{11} - h_{22}}{2} - ih_{12}, \quad \widehat{\phi} = \frac{(\widehat{h}_{11} - \widehat{h}_{22}) - i(\widehat{h}_{12} + \widehat{h}_{21})}{2} \quad (4.43)$$

Demostración: De (2.9) y de la definición de ψ_1 vista en (4.40), tenemos:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{A + iB}{1 - C} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A + iB}{1 - C} \right)$$

En virtud de (4.4), (4.6) y (4.39), al expresar la relación de arriba en términos de A_u, A_v, B_u, B_v, C_u y C_v se obtiene:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \frac{1}{(1 - C)^2} \{ [(-x_u + y_v) - i(x_v + y_u)] \gamma_{11} - [(x_v + y_u) + i(y_v - x_u)] \gamma_{21} \}$$

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = \frac{1}{(1 - C)^2} \{ [(x_v + y_u) + i(y_v - x_u)] \gamma_{12} + [(-x_u + y_v) - i(x_v + y_u)] \gamma_{22} \}$$

Dado que $-x_u + y_v - i(x_v + y_u) = -i[x_v + y_u + i(y_v - x_u)]$, tenemos que:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2(1 - C)^2} \{ [(\gamma_{12} - \gamma_{21}) - i(\gamma_{11} + \gamma_{22})] [(x_v + y_u) + i(y_v - x_u)] \} \quad (4.44)$$

Como:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} \quad \text{y} \quad \Theta = \frac{\hat{h}_{12} - \hat{h}_{21}}{2}.$$

De los elementos de la matriz (\hat{h}_{ij}) vistos en (4.34) y de (4.27) se verifica que:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} + \gamma_{22} &= \text{Traz}(\gamma_{ij}) = \text{Traz}(h_{ij} + \hat{h}_{ij}) = \text{Traz}(h_{ij}) + \text{Traz}(\hat{h}_{ij}) = 2H \\ \gamma_{12} - \gamma_{21} &= (h_{12} - h_{21}) + (\hat{h}_{12} - \hat{h}_{21}) = 0 + (\hat{h}_{12} - \hat{h}_{21}) = 2\Theta \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.44) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{w}} &= \frac{\Theta - iH}{(1 - C)^2} \{ (x_v + y_u) + i(-x_u + y_v) \} \\ &= \frac{\Theta - iH}{(1 - C)^2} \left\{ -2i \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{w}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{w}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

De la definición de ψ_1 dada en (4.40) y el hecho que $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, se demuestra que

$$(1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)(1 - C) = 2. \quad (4.46)$$

Finalmente, reemplazando (4.46) en (4.45) se verifica este lema. La prueba de la relación (4.42) se realiza de manera similar. \square

NOTA: Para el caso en el que la aplicación normal de Gauss de la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$ sea la aplicación Ψ_2 , se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{\omega}} = - \left(\frac{H + i\Theta}{2} \right) (1 + \psi_2 \bar{\psi}_2)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \omega} = \left(\frac{\phi + \hat{\phi}}{2} \right) (1 + \psi_2 \bar{\psi}_2)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} - i \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) \quad (4.48)$$

PROPOSICIÓN 9 (Relaciones auxiliares de la aplicación Θ)

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas \mathcal{X} , con campo vectorial normal unitario η visto en (4,5) y con aplicación normal de Gauss ψ definida en (4.40). Siendo (\hat{h}_{ij}) la matriz vista en (4,34) y Θ la aplicación del lema 6; entonces se cumple que:

$$\Theta = \frac{C^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi \bar{\psi} - 1}{\psi \bar{\psi} + 1} \right)^2, \quad \text{si } \psi = \psi_1 \text{ o } \psi = \psi_2. \quad (4.49)$$

Luego si la curvatura media $H = 0$ y $\Theta = 0$ en algún $p \in S$, entonces en virtud de la relación (4.41) del lema 6, la aplicación de Gauss ψ es holomorfa en dicho punto $p \in S$. Es decir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = 0, \quad \text{si } \psi = \psi_1 \text{ o } \psi = \psi_2. \quad (4.50)$$

Demostración: Se hará para el caso $\psi = \psi_1$, para el caso $\psi = \psi_2$ se hace de manera similar. En efecto de (4.34), (4.7) y como $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\hat{h}_{12} - \hat{h}_{21}}{2} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda^2}{2} - \beta^2 \right) - \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\lambda^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2\lambda^2} = \frac{\lambda^2 - \lambda^2(A^2 + B^2)}{2\lambda^2} = \frac{\lambda^2 - \lambda^2(1 - C^2)}{2\lambda^2} = \frac{C^2}{2}. \end{aligned}$$

De la definición de ψ_1 vista en (4.40) y el hecho de que $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, tenemos

$$\frac{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1} = \frac{A^2 + B^2 - 1 - C^2 + 2C}{A^2 + B^2 + C^2 + 1 - 2C} = C.$$

Ya que $\Theta = \frac{C^2}{2}$ entonces $\Theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1} \right)^2$. □

LEMA 7

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} y con aplicación de Gauss ψ vista en (4.40). Siendo Θ, ϕ y $\hat{\phi}$ las aplicaciones del lema 6, entonces se cumple que:

$$(a) \quad \left\| \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 = \frac{\lambda^2}{4} (1 - C)^2$$

$$(b) \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} \right\| = \frac{\lambda}{2} \|H + i\Theta\| (1 + \psi \bar{\psi}), \quad \text{si } \psi = \psi_1 \text{ ó si } \psi = \psi_2$$

$$(c) \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} \right\| = \frac{\lambda}{2} \|\phi + \hat{\phi}\| (1 + \psi \bar{\psi}), \quad \text{si } \psi = \psi_1 \text{ ó si } \psi = \psi_2$$

Demostración:

Primero se probará el ítem (a). Veamos:

$$(a) \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{2} [x_u + ix_v + i(y_u + iy_v)] = \frac{1}{2} [(x_u - y_v) + i(x_v + y_u)]$$

Por tanto, usando (4.4), (4.6) y (4.7), se concluye que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{1}{4} [(x_u^2 + y_u^2) + (x_v^2 + y_v^2) - 2(x_u y_v - x_v y_u)] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\lambda^2 - \alpha^2) + (\lambda^2 - \beta^2) - 2\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} (x_u y_v - x_v y_u) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} [2\lambda^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\lambda^2 C] = \frac{1}{4} [2\lambda^2(1 - C) - (\alpha^2 + \beta^2)] \\ &= \frac{1}{4} [2\lambda^2(1 - C) - \lambda^2(A^2 + B^2)] \\ &= \frac{1}{4} [\lambda^2(2 - 2C + C^2 - 1)] = \frac{\lambda^2}{4} (1 - C)^2 \end{aligned}$$

Ahora se probará el ítem (b). Veamos:

(b) La demostración se hará para el caso de la aplicación ψ_1 , para el caso ψ_2 se hace de manera similar. En efecto, de la relación (4.41) del lema 6, se sabe

que:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = - \left(\frac{H + i\Theta}{2} \right) (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right)$$

Por tanto:

$$\left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 = \frac{1}{4} \left\| H + i\Theta \right\|^2 \left\| (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 \right\|^2 \left\| \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2$$

Reemplazando lo obtenido en el item (a), tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{1}{4} \left\| H + i\Theta \right\|^2 (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^4 \frac{\lambda^2 (1 - C)^2}{4} \\ &= \frac{\lambda^2}{16} \left\| H + i\Theta \right\|^2 (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 [(1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)(1 - C)]^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{16} \left\| H + i\Theta \right\|^2 (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 (2)^2 = \frac{\lambda^2}{4} \left\| H + i\Theta \right\|^2 (1 + \psi_1 \bar{\psi}_1)^2 \end{aligned}$$

y al sacar raíz cuadrada en los extremos, se verifica la validez del item (b).

Finalmente se darán sugerencias para la prueba del item (c). Veamos:

(c) Se hará de forma similar al item (b) demostrado, pero ahora considerando la relación (4.42) del lema 6, y con ello se verificará la validez del item (c). \square

Luego, si la aplicación normal de Gauss ψ es constante, entonces, por la proposición 8, se tiene que $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = 0$. Además, en virtud del ítem (b) del lema 7, se concluye que $\Theta = H = 0$, por lo tanto, la superficie S es un plano vertical, el cual es mínima.

TEOREMA 5 (Ecuación tipo Beltrami para superficies en \mathcal{H}_3)

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie orientada, con ψ como su aplicación de Gauss vista en (4.40) y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} . Si H la curvatura media y $\Theta, \phi, \hat{\phi}$ son las aplicaciones definidas en el lema 6, entonces se cumple que:

$$(\phi + \hat{\phi}) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = - (H + i\Theta) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}}; \quad \psi = \psi_1 \quad \text{ó} \quad \psi = \psi_2 \quad (4.51)$$

Demostración: Consideremos la prueba del teorema para el caso $\psi = \psi_1$, ya que la demostración para el caso $\psi = \psi_2$ es análoga. En efecto, a la relación (4.41) del lema 6 la multiplicamos por $(\phi + \hat{\phi})$ y a la relación (4.42) del lema

6 la multiplicamos por $(-H - i\Theta)$. Finalmente comparando ambas expresiones obtenidas se garantiza la validez de este teorema. \square

A partir de ahora consideraremos el estudio de superficies mínimas en \mathcal{H}_3 en el que la aplicación $\Theta \neq 0$ (Aplicación normal de Gauss no holomorfa). Veamos:

LEMA 8

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie mínima, localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} . Luego si la aplicación normal de Gauss ψ vista en (4.40) es no holomorfa en todo S , entonces se cumple que:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) + (\bar{\psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) = 0, \text{ si } \psi = \psi_1 \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) + (\bar{\psi}_2)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) = 0, \text{ si } \psi = \psi_2 \quad (4.53)$$

Demostración:

De la definiciones de ψ_1 y ψ_2 vistas en (4.40), se tiene que:

$$\psi_1\psi_2 = 1 \text{ de donde } \frac{\partial(\psi_1\psi_2)}{\partial \bar{\omega}} = \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial \bar{\omega}} + \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial \bar{\omega}} = 0 \quad (4.54)$$

Así, una vez más por (4.40) también se tiene que:

$$\psi_1\bar{\psi}_1 = \frac{1+C}{1-C}, \quad \psi_2\bar{\psi}_2 = \frac{1-C}{1+C}. \quad (4.55)$$

Por lo demostrado en el ítem (b) del lema 7, como la curvatura media $H = 0$ (pues S es mínima) y la aplicación de Gauss ψ_1 es no holomorfa, entonces $\Theta \neq 0$ en cada punto de S . Luego a la relación (4.41) del lema 6 (con $r = 2$) se multiplica por ψ_1 y a la misma primera relación (con $r = 1$), se multiplica por ψ_2 . Es decir:

$$\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{i\Theta}{2} (1 + \psi_2\bar{\psi}_2)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) \psi_1\overline{\psi_1\psi_2}, \text{ en todo } U_1 \cap U_2$$

$$\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{i\Theta}{2} (1 + \psi_1\bar{\psi}_1)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}\right) \psi_2\overline{\psi_2\psi_1}, \text{ en todo } U_1 \cap U_2$$

De (4.55), lo demostrado en (4.46) y teniendo en cuenta que $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, se observa que:

$$\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-2i\Theta}{(1-C)(1+C)} \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \bar{\psi}_2, \text{ en todo } U_1 \cap U_2$$

$$\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-2i\Theta}{(1-C)(1+C)} \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \bar{\psi}_1, \text{ en todo } U_1 \cap U_2$$

Al sumar ambas relaciones y simplificando se obtiene:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} - i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \bar{\psi}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \bar{\psi}_1 = 0, \text{ en todo } U_1 \cap U_2 \quad (4.56)$$

Dado que $\bar{\psi}_1 \psi_2 = 1$, al multiplicar por $\bar{\psi}_1$ a ambos miembros de la igualdad anterior se obtiene la relación (4.52) y al multiplicar por $\bar{\psi}_2$ a ambos miembros de la misma igualdad se obtiene la relación (4.53) y en vista de que:

$U_1 - (U_1 \cap U_2) = \{(0, 0, -1)\}$, $U_2 - (U_1 \cap U_2) = \{(0, 0, 1)\}$ son conjuntos unitarios.

Entonces como \mathcal{H}_3 es isomorfo a \mathbb{R}^3 y por la proposición 4 del capítulo 2, este lema se cumple tanto para ψ_1 (en U_1) y para ψ_2 (en U_2). \square

TEOREMA 6

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie mínima, localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas $\mathcal{X} = (x, y, z)$. Suponga que la aplicación de Gauss ψ_1 vista en (4.40) es no holomorfa en todo S , entonces se cumple que:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = - \frac{4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \quad (4.59)$$

donde ξ es una aplicación C^∞ con $\xi_u = -\beta$ y $\xi_v = \alpha$ (Ver (4.2) y (4.3)).

Demostración: A partir de la relación (4.52) del lema 8, tenemos que:

$$(1 + \bar{\psi}_1^2) \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = i(1 - \bar{\psi}_1^2) \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \quad (4.60)$$

Luego, para la primera igualdad (4.57) se presentan los siguientes casos:

- Si $1 - \overline{\psi_1}^2 = 0$ en algún punto $p_0 \in S$, entonces de (4.60) se tiene que:

$$(1 + \overline{\psi_1}^2) \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} = 0 \quad \text{en dicho punto } p_0,$$

y como $1 + \overline{\psi_1}^2 = 2$ en p_0 , entonces de la relación anterior se tiene que $\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} = 0$ en dicho punto. Del cual se verifica la igualdad (4.57).

- Si $1 - \overline{\psi_1}^2 \neq 0$ para todo $p \in S$; dado que la curvatura media $H = 0$ (pues S es mínima) entonces $\Theta \neq 0$ en cada punto de S .

Ahora de la relación (4.41) del lema 6 despejamos $\frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}}$ y reemplazamos en la igualdad (4.60) y usando la relación (4.49) de la proposición 9; la igualdad (4.60) queda de la siguiente forma:

$$\left(1 + \overline{\psi_1}^2\right) \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} = i \left(1 - \overline{\psi_1}^2\right) \left[i \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + \frac{4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right] \quad (4.61)$$

Despejando $\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}}$ de la igualdad anterior, se demuestra la igualdad (4.57).

Para la segunda igualdad (4.58) se presentan los siguientes casos:

- Si $1 + \overline{\psi_1}^2 = 0$ en algún punto $p_0 \in S$, entonces de (4.60) se tiene que:

$$i(1 - \overline{\psi_1}^2) \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} = 0 \quad \text{en dicho punto } p_0,$$

y como $1 - \overline{\psi_1}^2 = 2$ en p_0 , entonces de la relación anterior se tiene que $\frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} = 0$ en dicho punto. Del cual se verifica la igualdad (4.58).

- Si $1 + \overline{\psi_1}^2 \neq 0$ para todo $p \in S$; dado que la curvatura media $H = 0$ (pues S es mínima) entonces $\Theta \neq 0$ en cada punto de S .

Luego de la relación (4.41) del lema 6 despejamos ahora $\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}}$ y reemplazamos en la igualdad (4.60). Usando nuevamente la relación (4.49) de la

proposición 9; la igualdad (4.60) queda de la siguiente forma:

$$\left(1 + \overline{\psi_1}^2\right) \left[-i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} - \frac{4}{i(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right] = i \left(1 - \overline{\psi_1}^2\right) \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \quad (4.62)$$

Despejando $\frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}}$ de la igualdad anterior, se demuestra la igualdad (4.58).

Para demostrar la tercera igualdad (4.59) afirmamos que:

$$\frac{1}{2}(\alpha - i\beta) \left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right) - \lambda^2 \frac{\psi_1}{(1 + \psi_1 \overline{\psi_1})^2} = 0 \quad (4.63)$$

En efecto, usando (4.40) y (4.46), el primer miembro de (4.63) se reduce a:

$$\frac{1}{4} [(\alpha - i\beta)(x_u + ix_v + iy_u - y_v) - \lambda^2(1 - C)(A + iB)]$$

De donde:

$$\begin{aligned} \text{Parte real} &= \frac{1}{4} [\alpha x_u - \alpha y_v + \beta x_v + \beta y_u - \lambda^2(1 - C)A] \\ \text{Parte imaginaria} &= \frac{1}{4} [\alpha x_v + \alpha y_u + \beta x_u + \beta y_v - \lambda^2(1 - C)B] \end{aligned}$$

Usando las relaciones (4.4) y (4.6) se verifica que la parte real y la parte imaginaria se reducen a cero, con lo cual se garantiza la validez de la afirmación (4.63). Ahora si, retomando la demostración de la tercera igualdad, aplicando conjugada compleja a ambos miembros de (4.63), se llega a obtener la siguiente relación:

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \overline{\left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right)} = \frac{\lambda^2 \overline{\psi_1}}{(1 + \psi_1 \overline{\psi_1})^2}$$

Y multiplicando a ambos miembros por $\left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right)$, tenemos que:

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \left\| \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 = \frac{\lambda^2 \overline{\psi_1}}{(1 + \psi_1 \overline{\psi_1})^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right)$$

Por la relación (a) del lema 7, se tiene que

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta) \frac{\lambda^2(1 - C)^2}{4} = \frac{\lambda^2 \overline{\psi_1}}{(1 + \psi_1 \overline{\psi_1})^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right)$$

De donde

$$\frac{1}{8}(\alpha + i\beta)(1 + \psi_1\bar{\psi}_1)^2(1 - C)^2 = \bar{\psi}_1 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right)$$

Una vez más, usando (4.46) tenemos que

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta) = \bar{\psi}_1 \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) \quad (4.64)$$

A partir de las 2 primeras igualdades ya demostradas en este teorema, tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} + i \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2i \left(1 - \bar{\psi}_1^2 + 1 + \bar{\psi}_1^2 \right)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = \frac{4i}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \quad (4.65)$$

Reemplazando (4.65) en (4.64), tenemos que:

$$\frac{1}{2}(\alpha + i\beta) = \frac{4i\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \quad \text{por tanto} \quad \frac{1}{2}(-\beta + i\alpha) = \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}$$

Dado que $S \subset \mathcal{H}^3$ es una superficie mínima, por (4.13) sabemos que $\alpha_u + \beta_v = 0$, con lo cual verificamos que:

$$\text{Existe } \xi \text{ de clase } C^\infty \text{ tal que } \xi_u = -\beta, \xi_v = \alpha, \quad (4.66)$$

lo que implica que $\frac{1}{2}(\xi_u + i\xi_v) = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}$, demostrándose así la igualdad (4.59). \square

NOTA: En el caso en el que la aplicación normal de la superficie S coincida con la aplicación ψ_2 , se tendrán ahora las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} &= \frac{2i \left(1 - \bar{\psi}_2^2 \right)}{(\psi_2\bar{\psi}_2 - 1)^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} &= - \frac{2 \left(1 + \bar{\psi}_2^2 \right)}{(\psi_2\bar{\psi}_2 - 1)^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} &= \frac{4\bar{\psi}_2}{(\psi_2\bar{\psi}_2 - 1)^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{\omega}} \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.4 Una fórmula tipo Weierstrass para la representación de superficies mínimas en \mathcal{H}_3

TEOREMA 7 (Condición de integrabilidad)

Sea $S \subset \mathcal{H}_3$ una superficie mínima, localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas \mathcal{X} . Luego si la aplicación normal de Gauss ψ vista en (4.40) es no holomorfa en todo S , entonces se cumple:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}}{\psi\bar{\psi} - 1} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = 0 \quad (4.68)$$

Demostración:

Se demostrará para el caso de la aplicación de Gauss ψ_1 , para el caso de la aplicación de Gauss ψ_2 se hará de manera similar. En efecto, en virtud de las relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6, derivando cada una de las 3 igualdades respecto de ω , tenemos que:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right).$$

$$= \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] - \frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right).$$

$$= \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] - \frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right).$$

$$= \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] + \frac{4(\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2$$

Por otra parte, usando la relación (b) del lema 7 y dado que $\Theta = \frac{\hat{h}_{12} - \hat{h}_{21}}{2}$ es

una función real, se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= -\frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \frac{\lambda^2}{4} (\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)^2 \Theta^2 \\ -\frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= -\frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \frac{\lambda^2}{4} (\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)^2 \Theta^2 \\ \frac{4(\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{4(\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \frac{\lambda^2}{4} (\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)^2 \Theta^2 \end{aligned}$$

En virtud de (4.49), la definición de ψ_1 , el hecho de que $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, además de las relaciones vistas en (4.4) y (4.6), se verifica que:

$$\begin{aligned} -\frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{-(\alpha y_u + \beta y_v)}{4}, \\ -\frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{\alpha x_u + \beta x_v}{4}, \quad \frac{4(\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 = \frac{x_u y_v - x_v y_u}{4}. \end{aligned}$$

Como S es una superficie mínima, dado que $\xi_u = -\beta$, $\xi_v = \alpha$ además de las definiciones de α y β vistas en (4.2) y (4.3) se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{\Delta x}{4} = \frac{\partial^2 x}{\partial\omega\partial\bar{\omega}}, \\ -\frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 &= \frac{\Delta y}{4} = \frac{\partial^2 y}{\partial\omega\partial\bar{\omega}}, \quad \frac{4(\psi_1\bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right\|^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} &= \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right] + \frac{\partial^2 x}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} &= \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right] + \frac{\partial^2 y}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} &= \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{(\psi_1\bar{\psi}_1 - 1)} \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} \right] + \frac{\partial^2 \xi}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} \end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\omega\partial\bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{\psi_1\bar{\psi}_1 - 1} \frac{\partial\psi_1}{\partial\omega} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{\omega}} = 0, \quad \forall \omega = (u, v)$$

Con lo cual se garantiza la validez de este teorema. \square

Así, a la relación (4.68) la conocemos como la *condición de integrabilidad* del sistema de relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6, y de manera similar al caso de superficies en \mathbb{R}^3 se garantiza que $\psi_1: S \rightarrow \mathbb{D}$ es una *aplicación armónica*, donde \mathbb{D} es el disco de Poincaré (Ver [Fig09]).

LEMA 9

Sea $\psi_1: \widehat{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow S^2$ una aplicación C^∞ no holomorfa en todo punto de \widehat{U} , que satisface la ecuación (4.68) del teorema 7, entonces existen 3 nuevas funciones $x, y, \xi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un abierto simplemente conexo (que es la identificación de \widehat{U} en \mathbb{R}^2), de clase C^∞ tales que:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} \int_0^\omega \frac{-2i(1 - \psi_1^2) \overline{\partial \psi_1}}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_1 \\ y = \operatorname{Re} \int_0^\omega \frac{2(1 + \psi_1^2) \overline{\partial \psi_1}}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_2 \\ \xi = \operatorname{Re} \int_0^\omega \frac{-4\psi_1 \overline{\partial \psi_1}}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_3 \end{cases}$$

Además se cumple que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \overline{\omega}} \dots \quad (\operatorname{Im} f : \text{Parte imaginaria de } f). \quad (4.69)$$

Demostración:

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} &= \frac{2i(1 - \overline{\psi_1^2})}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \\ \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} &= \frac{2(1 + \overline{\psi_1^2})}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \overline{\omega}} &= - \frac{4\overline{\psi_1}}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Dado que $\mathcal{H}_3 \cong \mathbb{R}^3$, de manera similar a la demostración del teorema 4 del capítulo 2, este sistema posee solución si y solo si $\frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \bar{\omega}}, \frac{\partial^2 y}{\partial \omega \partial \bar{\omega}}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}}$ son funciones reales.

En efecto, teniendo en cuenta los cálculos iniciales vistos en la demostración del teorema 7, al reducir las derivadas en x, y, ξ ; se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} &= \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] - \frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} &= \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] - \frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} &= \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right] + \frac{4(\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2\end{aligned}$$

Como la aplicación ψ_1 ya satisface la ecuación (4.68) del teorema 7, es decir:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}_1}{\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = 0$$

Entonces tenemos que:

$$\text{Existe } \frac{\partial^2 x}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = - \frac{4i(\psi_1 - \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2, \quad (4.71)$$

$$\text{Existe } \frac{\partial^2 y}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = - \frac{4(\psi_1 + \bar{\psi}_1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 \text{ y} \quad (4.72)$$

$$\text{Existe } \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} = \frac{4(\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2, \quad (4.73)$$

los cuales como se pueden observar son funciones reales. Por tanto dado el conjunto abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ que es la identificación de $\widehat{U} \subset \mathbb{C}$, existen aplicaciones $x, y, \xi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , de tal manera que el sistema planteado (4.70) sea compatible. Así, efectuando las conjugaciones e integrando respecto de ω , se verifica la primera parte del lema mencionado.

NOTA: En el caso de que la aplicación ψ coincida con la aplicación ψ_2 manteniendo todas las hipótesis del lema 9, se tendrán ahora las siguientes

relaciones:

$$\begin{cases} x = Re \int_0^\omega \frac{-2i(1 - \psi_2^2) \overline{\partial \psi_2}}{(\psi_2 \overline{\psi_2} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_1 \\ y = Re \int_0^\omega \frac{-2(1 + \psi_2^2) \overline{\partial \psi_2}}{(\psi_2 \overline{\psi_2} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_2 \\ \xi = Re \int_0^\omega \frac{4\psi_2 \overline{\partial \psi_2}}{(\psi_2 \overline{\psi_2} - 1)^2 \partial \overline{\omega}} d\omega & +c_3 \end{cases}$$

que se demuestran de forma similar al caso en que la aplicación normal de Gauss ψ coincide con la aplicación ψ_1 .

Para la segunda parte del lema. De lo demostrado, tambien observamos que:

$$\begin{aligned} Im \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right) &= Im \left(\frac{\partial x}{\partial \overline{\omega}} \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) \quad \dots \text{Pues } x \text{ es función real e } Im \mathcal{X} \in \mathcal{H}_3 \cong \mathbb{R}^3. \\ &= Im \left[\frac{2i(1 - \overline{\psi_1^2})}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \cdot \frac{2(1 + \overline{\psi_1^2})}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \right] \\ &= Im \left[\frac{-2i(1 - \psi_1^2)}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \overline{\psi_1}}{\partial \omega} \cdot \frac{2(1 + \overline{\psi_1^2})}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \omega} \right] \\ &= \frac{-4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^4} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 Im \left[i(1 - \psi_1^2)(1 + \overline{\psi_1^2}) \right] \\ &= \frac{-4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^4} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 Im \left[i(1 - \psi_1^2 \overline{\psi_1^2}) + i(\overline{\psi_1} - \psi_1)(\overline{\psi_1} + \psi_1) \right] \\ &= \frac{-4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^4} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 Im \left[i(1 - \psi_1^2 \overline{\psi_1^2}) - 4Re(\psi_1)Im(\psi_1) \right] \\ &= \frac{-4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^4} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 Im \left[i(1 - \psi_1^2 \overline{\psi_1^2}) \right] \quad y \quad 1 - \psi_1^2 \overline{\psi_1^2} \in \mathbb{R} \\ &= \frac{4}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^4} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 (\psi_1^2 \overline{\psi_1^2} - 1) = \frac{4(\psi_1 \overline{\psi_1} + 1)}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 \end{aligned}$$

En resumen, de la derivación compleja y de (4.73) (Pues x, y ya cumplen las condiciones del lema 9) y lo obtenido anteriormente, concluimos que:

$$\frac{x_u y_v - x_v y_u}{4} = Im \left(\frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial \overline{\omega}} \right) = \frac{4(\psi_1 \overline{\psi_1} + 1)}{(\psi_1 \overline{\psi_1} - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{\omega}} \right\|^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega \partial \overline{\omega}} = \frac{\Delta \xi}{4} \quad (4.74)$$

Así, con todo lo expuesto y demostrado hasta ahora, estamos en condiciones de presentar el objetivo principal de la presente tesis:

TEOREMA 8 (Fórmula de representación tipo Weierstrass para una superficie mínima en \mathcal{H}_3)

Considerando los conjuntos U y \widehat{U} del lema 9, sea $\psi : \widehat{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow S^2$ la aplicación de clase C^∞ no holomorfa en todo punto de \widehat{U} del lema 9, que satisface la ecuación de integrabilidad (4.68) del teorema 7; entonces existe una función $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}^3$ de clase C^∞ de coordenadas x, y, z , de tal manera que:

- (a) $\mathcal{X}(U) = S \subset \mathcal{H}_3$ representa a una superficie regular; con campo normal, unitario η y localmente parametrizada por coordenadas isotérmicas x, y, z .
- (b) S es una superficie mínima.
- (c) ψ es la aplicación normal de Gauss de la superficie S .

Demostración: Se demostrará para el caso $\psi = \psi_1$, para el caso $\psi = \psi_2$ se hará de manera similar.

En efecto, por el lema anterior, las aplicaciones x, y, ξ ya existen y son de clase C^∞ , del mismo lema se sigue que x, y, ξ cumplen las relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6.

Es decir:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}.$$

Ahora para garantizar la existencia de una aplicación z de clase C^∞ , planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z_u &= \xi_v - \frac{yx_u}{2} + \frac{xy_u}{2} \\ z_v &= -\xi_u - \frac{yx_v}{2} + \frac{xy_v}{2} \end{cases} \quad (4.75)$$

Así, para garantizar que el sistema anterior sea compatible se debe verificar que $z_{uv} = z_{vu}$ y con ello probaremos la existencia de una aplicación z de clase C^∞ de tal manera que $\mathcal{X}(U) = S \subset \mathcal{H}_3$ sea una superficie regular y orientada localmente parametrizada por $\mathcal{X} = (x, y, z)$. En efecto, al derivar respecto a v y u de forma correspondiente, se tiene que:

$$\begin{cases} z_{uv} = \xi_{vv} - \frac{y_v x_u}{2} - \frac{y x_{uv}}{2} + \frac{x_v y_u}{2} + \frac{x y_{uv}}{2} \\ z_{vu} = -\xi_{uu} - \frac{y_u x_v}{2} - \frac{y x_{vu}}{2} + \frac{x_u y_v}{2} + \frac{x y_{vu}}{2} \end{cases} \quad (4.76)$$

De lo cual se obtiene que:

$$z_{uv} - z_{vu} = \Delta\xi - (x_u y_v - x_v y_u) \quad (4.77)$$

De lo demostrado en (4.74), se tiene en particular que:

$$\Delta\xi = x_u y_v - x_v y_u \quad (4.78)$$

Finalmente, reemplazando la relación obtenida (4.78) en (4.77), obtenemos que:

$$z_{uv} - z_{vu} = 0 \quad \text{por tanto} \quad z_{uv} = z_{vu}$$

y por tanto tomando el conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ del lema 9, el cual ya es simplemente conexo, garantizamos por el criterio de la función potencial que:

$$\exists z : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{de clase } C^\infty$$

de tal forma que el sistema de ecuaciones (4.75) sea compatible. Luego definimos la aplicación $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{H}_3$ de clase C^∞ de coordenadas x, y, z tal que $\mathcal{X}(U) = S$ es una superficie en \mathcal{H}_3 localmente parametrizada por \mathcal{X} . En particular, haciendo una vez más:

$$\alpha = \frac{y}{2}x_u - \frac{x}{2}y_u + z_u \quad y \quad \beta = \frac{y}{2}x_v - \frac{x}{2}y_v + z_v$$

Al ya cumplirse que ξ de clase C^∞ por hipótesis del teorema, entonces tenemos que $\xi_{uv} = \xi_{vu}$ y con ello, a partir del sistema (4.75) ya compatible, garantizamos que $\alpha_u + \beta_v = 0$. Ahora verificaremos la validez de cada ítem del teorema.

Primero se probará la validez del item (a). Veamos:

(a) En virtud del producto hermitiano, se observa que:

$$P = \left\langle \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}, \frac{\partial y}{\partial \omega}, \frac{\partial(i\xi)}{\partial \omega} \right); \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}}, \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}}, \frac{\partial(i\xi)}{\partial \bar{\omega}} \right) \right\rangle = \frac{\overline{\partial x}^2}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\overline{\partial y}^2}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\overline{\partial(i\xi)}^2}{\partial \bar{\omega}}$$

Del lema 9 tenemos que \mathcal{X} y ψ_1 ya satisfacen las relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6. Por tanto:

$$P = \left[\frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right]^2 + \left[\frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right]^2 + \left[\frac{-4i\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right]^2 = 0$$

Ahora en virtud de la derivación compleja, tenemos que:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{2}(x_u - ix_v) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(y_u - iy_v) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(i\xi_u + \xi_v) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} [(x_u^2 + y_u^2 + \xi_u^2) - (x_v^2 + y_v^2 + \xi_v^2)] - \frac{i}{2}[x_u x_v + y_u y_v - \xi_u \xi_v] \end{aligned}$$

Dado que $P = 0$ se deduce que:

$$\frac{1}{4} [(x_u^2 + y_u^2 + \xi_u^2) - (x_v^2 + y_v^2 + \xi_v^2)] - \frac{i}{2}[x_u x_v + y_u y_v - \xi_u \xi_v] = 0$$

En otras palabras, dado que $\xi_u = -\beta$ y $\xi_v = \alpha$, tenemos:

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 + \xi_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + \xi_v^2 \\ x_u x_v + y_u y_v - \xi_u \xi_v = 0 \end{cases} \quad \text{por tanto} \quad \begin{cases} x_u^2 + y_u^2 + \alpha^2 = x_v^2 + y_v^2 + \beta^2 \\ x_u x_v + y_u y_v + \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

Afirmamos que para cada punto de la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$ se cumple que:

$$x_u^2 + y_u^2 + \alpha^2 \neq 0 \quad \text{y} \quad x_v^2 + y_v^2 + \beta^2 \neq 0$$

En caso contrario, para algún punto $p \in S$ se se tendría que:

$$\begin{aligned} x_u^2 + y_u^2 + \alpha^2 &= 0 \\ x_v^2 + y_v^2 + \beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta una vez más que $\xi_u = -\beta$ y $\xi_v = \alpha$, obtenemos que:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = 0 \quad \text{para dicho punto } p \in S$$

Una vez más, dado que por el lema 9 las aplicaciones \mathcal{X} y ψ_1 ya satisfacen las relaciones (4.57),(4.58) y (4.59) del teorema 6, tendremos que:

$$\frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = 0$$

Esto implicaría que $\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} = 0$; lo cual es una contradicción, pues por hipótesis del teorema se sabe que ψ_1 es no holomorfa en todo \hat{U} . Por tanto dado que:

$$\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = x_u^2 + y_u^2 + \alpha^2, \quad \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle = x_v^2 + y_v^2 + \beta^2, \quad \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + \alpha \beta$$

En virtud de lo obtenido en la página anterior, se verifica que:

$$\langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_u \rangle = \langle \mathcal{X}_v, \mathcal{X}_v \rangle \neq 0, \quad \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0, \quad \forall p \in \mathcal{H}_3$$

y por ende la aplicación \mathcal{X} es una parametrización de la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$ en coordenadas isotérmicas, demostrándose así el item (a).

Ahora se probará la validez del item (b). Veamos:

- (b) En virtud de lo demostrado en la página anterior tenemos que $\alpha_u + \beta_v = 0$. Por otro lado, de la misma demostración de la proposición 6, siendo H la curvatura media de la superficie S , obtenemos que:

$$(x_{uu} + x_{vv} + \alpha y_u + \beta y_v)E_1 + (y_{uu} + y_{vv} - \alpha x_u - \beta x_v)E_2 + (\alpha_u + \beta_v)E_3 = 2\lambda^2 H \eta \quad (4.79)$$

para cada punto p de la superficie S obtenida. Ahora el campo vectorial normal y unitario a la superficie S esta dado por:

$$\eta = \frac{1}{\lambda^2}(\beta y_u - \alpha y_v)E_1 + \frac{1}{\lambda^2}(\alpha x_v - \beta x_u)E_2 + \frac{1}{\lambda^2}(x_u y_v - x_v y_u)E_3$$

entonces:

$$2\lambda^2 H \eta = 2H(\beta y_u - \alpha y_v)E_1 + 2H(\alpha x_v - \beta x_u)E_2 + 2H(x_u y_v - x_v y_u)E_3 \quad (4.80)$$

para cada punto p de la superficie S inducida. Así, de (4.79) con (4.80) se deduce en particular que:

$$(\alpha_u + \beta_v)E_3 = (0)E_3 = 2H(x_u y_v - x_v y_u)E_3, \quad \forall p \in S \quad (4.81)$$

Como x, y, ξ ya satisfacen el lema 9, entonces en particular ya cumplen la relación (4.74), de donde:

$$x_u y_v - x_v y_u = \frac{16(\psi_1 \bar{\psi}_1 + 1)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^3} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \right\|^2 \quad (4.82)$$

y dado que ψ_1 es una aplicación no holomorfa en todo punto de la superficie S obtenida, esto implica que:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}} \neq 0 \text{ en todo } S, \text{ por tanto } x_u y_v - x_v y_u \neq 0 \text{ en todo } S.$$

Finalmente reemplazando este hecho en (4.81) concluimos que $H \equiv 0$ en todo S , con lo cual se demuestra que la superficie $S \subset \mathcal{H}_3$ obtenida es mínima.

Finalmente se demostrará el ítem (c). Veamos:

- (c) Sea $\hat{\psi}_1$ la aplicación normal de Gauss (en coordenadas complejas) de la superficie en estudio, siguiendo los pasos de demostración de manera similar al ítem (c) del teorema 4 del capítulo 2, usando ahora las relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6, se llega a verificar que: $\hat{\psi}_1 = \psi_1$, por ende ψ_1 resulta ser la aplicación normal de Gauss de la superficie S mínima obtenida en \mathcal{H}_3 . \square

4.5 Ejemplos aplicativos

- (1) **Una silla de montar en \mathcal{H}_3 :** Haciendo $\omega = u + iv$, se define una función dada por:

$$\psi(\omega) = \frac{e^{\omega + \bar{\omega}} - 1}{e^{\omega + \bar{\omega}} + 1}; \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

Verificaremos que ψ es la aplicación normal de Gauss de una superficie mínima en \mathcal{H}_3 localmente parametrizada en coordenadas isotérmicas x, y, z

a través de las aplicaciones:

$$\begin{aligned} x(\omega) &= -i(\omega - \bar{\omega}) \cdot \\ y(\omega) &= \frac{1}{2} (e^{\omega+\bar{\omega}} - e^{-(\omega+\bar{\omega})}), \quad \xi(\omega) = -\frac{1}{2} (e^{\omega+\bar{\omega}} + e^{-(\omega+\bar{\omega})}), \end{aligned}$$

donde ξ una aplicación C^∞ , con lo cual quedan determinadas las 2 primeras coordenadas x, y de cada punto de la superficie S . Además verificaremos que la tercera coordenada de dicha parametrización esta dada por:

$$z(\omega) = -\frac{i}{4}(\omega - \bar{\omega}) (e^{\omega+\bar{\omega}} - e^{-(\omega+\bar{\omega})}); \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Por tanto la superficie S mínima en estudio es representado por la siguiente silla de montar en \mathcal{H}_3 de la forma:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{H}_3 ; z = \frac{xy}{2} \right\}$$

En efecto $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2e^{\omega+\bar{\omega}}}{(e^{\omega+\bar{\omega}} + 1)^2} = \frac{2e^{2u}}{(e^{2u} + 1)^2} > 0$

Por tanto ψ es una aplicación no holomorfa. También observamos que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}}{\psi\bar{\psi} - 1} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2e^{\omega+\bar{\omega}} (1 - e^{\omega+\bar{\omega}})}{(e^{\omega+\bar{\omega}} + 1)^3} - \frac{2 \left(\frac{e^{\omega+\bar{\omega}} - 1}{e^{\omega+\bar{\omega}} + 1} \right)}{\left(\frac{e^{\omega+\bar{\omega}} - 1}{e^{\omega+\bar{\omega}} + 1} \right)^2 - 1} \frac{4e^{2(\omega+\bar{\omega})}}{(e^{\omega+\bar{\omega}} + 1)^4} = 0$$

con lo cual se verifica que la aplicación ψ cumple la relación (4.68) del teorema 7 y gracias a ello podemos emplear el teorema 8 para obtener la superficie pedida. Ahora dado que $Dom\psi = \mathbb{C}$, entonces es posible tomar $\psi = \psi_1$ o $\psi = \psi_2$ sin ningún problema en la elección para comenzar la resolución. Por ejemplo si hacemos $\psi = \psi_1$, en virtud del teorema 8 y su demostración, se tiene que \mathcal{X} y ψ_1 ya satisfacen las relaciones (4.57), (4.58) y (4.59) del teorema 6 correspondiente. De las cuales tenemos:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2i \left[1 - \left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)^2 - 1 \right]^2} \frac{2e^{2u}}{(e^{2u} + 1)^2} = i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

Del cual se verifica que $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 2$, del cual obtenemos que:

$$x(\omega) = 2v = -i(\omega - \bar{\omega})$$

De manera similar:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2 \left[1 + \left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)^2 - 1 \right]^2} \cdot \frac{2e^{2u}}{(e^{2u} + 1)^2} = \frac{1}{2} (e^{2u} + e^{-2u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

De donde: $\frac{\partial y}{\partial u} = (e^{2u} + e^{-2u})$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 0$, del cual obtenemos que:

$$y(\omega) = \frac{1}{2} (e^{2u} - e^{-2u}) = \frac{1}{2} (e^{\omega + \bar{\omega}} - e^{-(\omega + \bar{\omega})})$$

Y por último:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-4 \left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)}{\left[\left(\frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} \right)^2 - 1 \right]^2} \cdot \frac{2e^{2u}}{(e^{2u} + 1)^2} = -\frac{1}{2} (e^{2u} - e^{-2u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)$$

De donde: $\frac{\partial \xi}{\partial u} = -(e^{2u} - e^{-2u})$, $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$, del cual obtenemos que:

$$\xi(\omega) = -\frac{1}{2} (e^{2u} + e^{-2u}) = -\frac{1}{2} (e^{\omega + \bar{\omega}} + e^{-(\omega + \bar{\omega})})$$

Nótese de que no es necesario conocer la función ξ , pues bastará conocer solo sus derivadas parciales ξ_u y ξ_v para obtener la coordenada z de la parametrización de nuestra superficie en estudio. Ahora como por hipótesis del teorema 8 se cumple que:

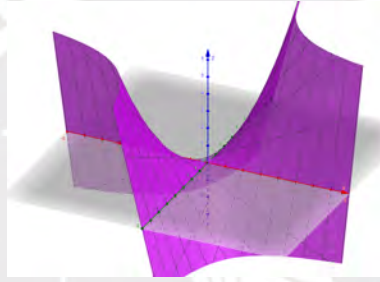
$$\begin{cases} z_u = \xi_v - \frac{yx_u}{2} + \frac{xy_u}{2} \\ z_v = -\xi_u - \frac{yx_v}{2} + \frac{xy_v}{2} \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} z_v = \left(\frac{1}{2} (e^{2u} + e^{-2u}) \right)_u - y \\ z_u = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} (e^{2u} - e^{-2u}) \right)_u \end{cases}$$

Por tanto $z_v = \frac{1}{2}(e^{2u} - e^{-2u})$, $z_u = v(e^{2u} + e^{-2u})$. Luego dada una aplicación $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ tal que $\mathcal{X}(u, v) = (x, y, z)$ entonces por el criterio de la función potencial, siendo \mathbb{R}^2 simplemente conexo, obtenemos que existe:

$$z(\omega) = \frac{v}{2}(e^{2u} - e^{-2u}) = -\frac{i}{4}(\omega - \bar{\omega})(e^{\omega + \bar{\omega}} - e^{-(\omega + \bar{\omega})})$$

Así se verifica que \mathcal{X} es de clase C^∞ y $z(\omega) = \frac{x(\omega)y(\omega)}{2}$. Por ende la superficie mínima S representada en \mathcal{H}_3 es la siguiente silla de montar dada por:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{H}_3 ; z = \frac{xy}{2} \right\}.$$



Superficie mínima en \mathcal{H}_3 a partir de la aplicación normal de Gauss ψ □

(2) **Un plano horizontal en \mathcal{H}_3 :** Haciendo $\omega = u + iv$, sea:

$$\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \psi(\omega) = \bar{\omega},$$

una aplicación de clase C^∞ definida en el disco unitario abierto de \mathbb{C} . Verificaremos que la aplicación ψ induce una superficie mínima en \mathcal{H}_3 cuyas coordenadas isotérmicas están dadas por:

$$\mathcal{X}(\omega) = \left(\frac{2i(\omega - \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, -\frac{2(\omega + \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, z_0 \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{D}.$$

En efecto, dado que $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = 1 \neq 0$, la aplicación ψ no es holomorfa, es de clase C^∞ y cumple con la ecuación (4.68) del teorema 7, ya que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega \partial \bar{\omega}} - \frac{2\bar{\psi}}{\psi\bar{\psi} - 1} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} \right) - 0 = 0.$$

Por tanto, podemos aplicar nuevamente el teorema 8 para obtener la superficie mínima pedida. Ahora como $Dom(\psi) = \mathbb{D}$, es posible tomar indistintamente $\psi = \psi_1$ o $\psi = \psi_2$. Por ejemplo, si hacemos $\psi = \psi_1$, en virtud del teorema 8 y su demostración, se tiene que \mathcal{X} y ψ_1 satisfacen las relaciones del teorema 6, es decir:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2i(1 - \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{\omega}} = \frac{2(1 + \bar{\psi}_1^2)}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\omega}} = \frac{-4\bar{\psi}_1}{(\psi_1 \bar{\psi}_1 - 1)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{\omega}}.$$

Sustituyendo:

$$\psi_1 = \bar{\omega} \text{ y } \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\omega}} = 1$$

en las relaciones anteriores e integrando respecto a $\bar{\omega}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2i(\omega^2 - 1)}{\omega(\omega\bar{\omega} - 1)} = \frac{2i(\omega - \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1} + P(\omega), \\ y &= -\frac{2(1 + \omega^2)}{\omega(\omega\bar{\omega} - 1)} = -\frac{2(\omega + \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1} + Q(\omega), \\ \xi &= \frac{4}{\omega\bar{\omega} - 1}. \end{aligned}$$

donde $P(\omega) = \frac{2i}{\omega}$ y $Q(\omega) = \frac{2}{\omega}$ son funciones que tienen un polo en el origen del disco unitario \mathbb{D} .

Por tanto como se desea que x e y sean funciones reales de clase C^∞ (dado que $\mathcal{H}_3 \cong \mathbb{R}^3$), sin perder la regularidad de la superficie en estudio, tomamos:

$$x = \frac{2i(\omega - \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, \quad y = -\frac{2(\omega + \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, \quad \xi = \frac{4}{\omega\bar{\omega} - 1}.$$

las cuales son de clase C^∞ en el disco unitario \mathbb{D} . Ahora, como por hipótesis del teorema 8 se cumple que:

$$\begin{cases} z_u = \xi_v - \frac{y x_u}{2} + \frac{x y_u}{2} \\ z_v = -\xi_u - \frac{y x_v}{2} + \frac{x y_v}{2} \end{cases}$$

Reemplazando las expresiones previamente obtenidas para $x(u, v)$, $y(u, v)$ y

$\xi(u, v)$, se tiene que:

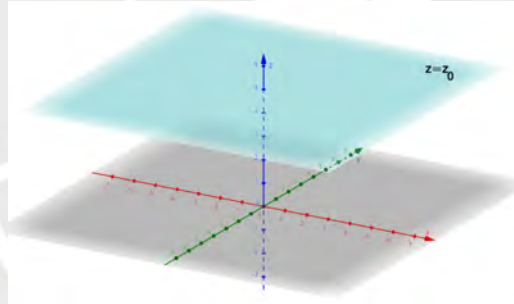
$$\begin{cases} z_u = -\frac{8v}{(u^2 + v^2 - 1)^2} + \frac{16u^2v}{(u^2 + v^2 - 1)^3} - \frac{8v(1 + u^2 - v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3} = 0 \\ z_v = \frac{8u}{(u^2 + v^2 - 1)^2} + \frac{8u(1 - u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^3} - \frac{16uv^2}{(u^2 + v^2 - 1)^3} = 0 \end{cases}$$

Por tanto $z = z(u, v) = z(\omega) = z_0$ constante.

En consecuencia, por el teorema 8, se verifica que ψ es la aplicación de Gauss de una superficie mínima en \mathcal{H}_3 , localmente parametrizada por una aplicación $\mathcal{X}: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{H}_3$ de clase C^∞ dada por:

$$\mathcal{X}(\omega) = (x, y, z) = \left(\frac{2i(\omega - \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, -\frac{2(\omega + \bar{\omega})}{\omega\bar{\omega} - 1}, z_0 \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{D}.$$

el cual representa a un plano horizontal en el grupo de Heisenberg \mathcal{H}_3 . representado de la siguiente forma:



Plano horizontal en \mathcal{H}_3 obtenido a partir de la aplicación de Gauss ψ proporcionada.

concluyendo así con el objetivo del presente estudio. ■

Bibliografía

- [Ahl78] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [Car76] Manfredo P. Do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, IMPA - Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Brasil, 1976.
- [DC15] Manfredo P. Do Carmo, *Geometría riemanniana*, IMPA - Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Brasil, 2015.
- [Fig96] Christiam B. Figueroa, *The gauss map of minimal surfaces in the heisenberg group*, Campinas: UNICAMP-IMECC. Relatório Técnico N° 71 (1996).
- [Fig07] C. Figueroa, *On the gauss map of a minimal surface in the heisenberg group*, Sociedade Brasileira de Matemática **33** (2007), 139–156.
- [Fig09] Christiam B. Figueroa, *Introducción a las aplicaciones armónicas*, Pro Mathematica PUCP **23** (2009), no. 45-46, 113–125.
- [Ino08] Junichi Inoguchi, *Minimal surfaces in the 3-dimensional heisenberg group*, Differ. Geom. Dyn. Syst. **10** (2008), no. 1, 163–169.
- [Ken79] Katsuei Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Mathematische Annalen **245** (1979), 89–99.
- [Rip91] Jaime B. Ripoll, *On hypersurfaces of lie groups*, Illinois Journal of Mathematics **35** (1991), no. 1, 47–55.
- [War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Colección Springer, Berlin, 1983.

