

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Propuesta didáctica para el estudio de la homotecia con base
en las aprehensiones en el registro figural con el apoyo del
software geogebra

Tesis para obtener el grado académico de Magíster en Enseñanza de las
Matemáticas
que presenta:

Arturo Javier Bardales Estela

Asesor:

Katia Vigo Ingar

Lima, 2021

Resumen

En nuestra investigación realizamos el estudio de la noción de homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano a través de una propuesta de secuencia didáctica que nos permite analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural para la construcción de la noción de homotecia como transformación geométrica en el VII ciclo de Educación Básica Regular (EBR). Para que la propuesta de la secuencia didáctica nos permita alcanzar el objetivo descrito, nos apoyamos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1994), específicamente en las Aprehensiones en el Registro Figural. La metodología de investigación es cualitativa porque queremos comprender nuestro objeto de estudio por medio del uso de fuentes secundarias.

El motivo por el cual nuestra investigación no es experimental se debe al confinamiento por la pandemia de la COVID-19, pero esta sí está orientada al logro de aprendizajes en el VII ciclo de EBR. Nuestra secuencia didáctica está compuesta por cuatro actividades, todas ellas respaldadas en el *software* GeoGebra. Las actividades propuestas toman como referencia el trabajo preparatorio sobre las configuraciones homotéticas posibles según Lemonidis (1990), así como la investigación de Lemonidis (1991), donde el autor propone una secuencia didáctica, que busca la adquisición de la noción de homotecia a partir de los diferentes tipos de figuras. Dichas actividades fueron analizadas y nos permitieron comprender los procesos geométricos involucrados de acuerdo con las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994), al desarrollar las actividades relacionadas con la noción de homotecia como una transformación geométrica. Además, las investigaciones relacionadas con la enseñanza de la homotecia como una transformación geométrica en EBR muestran que el estudio de la misma podría permitir la comprensión del teorema de Tales desde una perspectiva dinámica; problema que motivó el desarrollo de nuestra investigación.

Palabras clave: Enseñanza, Geometría, Homotecia, Aprehensiones en el registro figural, Investigación documental.

Abstract

In our research, we have studied the notion of homothety as a geometric transformation of figures in the plane, through a proposed didactic sequence that allows us to analyze the role of apprehensions in the figural register for the construction of the notion of homothety. As a geometric transformation, in the VII cycle of Regular Basic Education (EBR). For the proposal of the didactic sequence to allow us to achieve the objective described, we rely on the Theory of Records of Semiotic Representation (TRRS) by Duval (1994), specifically on the Apprehensions in the Figural Register. The research methodology is qualitative because we want to understand our object of study using secondary sources.

The reason why our research is not experimental is due to the confinement due to the COVID-19 pandemic, but it is oriented to the achievement of learning in the VII cycle of EBR. Our didactic sequence is made up of four activities, all of them supported by the GeoGebra software. The proposed activities take as a reference the preparatory work on the possible homothetic configurations according to Lemonidis (1990), as well as the research of Lemonidis (1991), where the author proposes a didactic sequence, which seeks the acquisition of the notion of homothety from the different types of figures. These activities were analyzed and allowed us to understand the geometric processes involved according to the apprehensions in the figural register according to Duval (1994), when developing the activities related to the notion of homothety as a geometric transformation. Furthermore, research related to the teaching of homothety as a geometric transformation in EBR shows that its study could allow the understanding of Thales' theorem from a dynamic perspective; problem that motivated the development of our research.

Keywords: Teaching, Geometry, Homothety, Apprehensions in the figural register, Documentary research.

Dedicatoria

Dedicado a la memoria de mi madre Olga Estela que guía mi camino desde el cielo y a mi padre Macedonio Bardales por ser un ejemplo de vida y por sus valiosos consejos.

A mi esposa, Carmen y a mis hijos Arturo y Ángela, por su amor incondicional y su comprensión infinita.

A mis hermanos Cesar, Sonia, Pilar y Ana por sus palabras de aliento y apoyo constante.

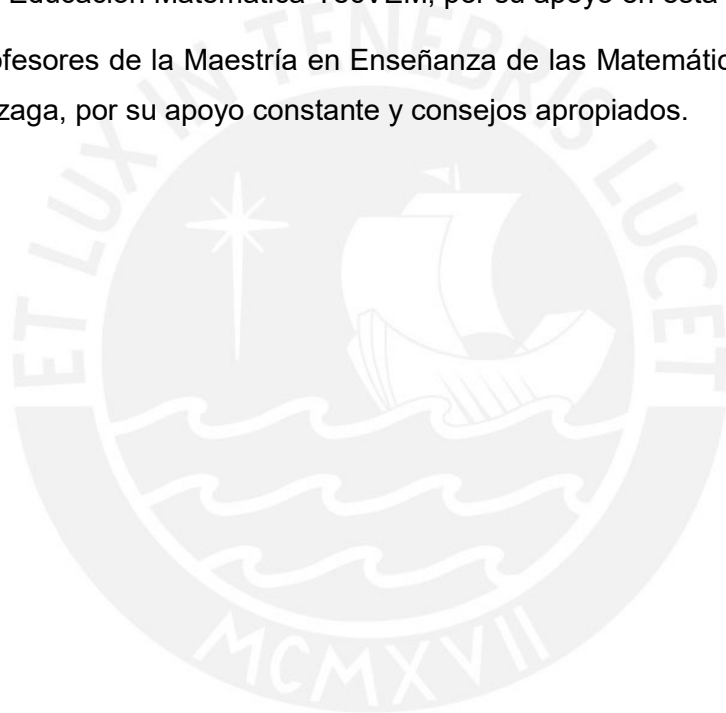
Agradecimientos

A mi asesora, la Dra. Katia Vigo Ingar, por su inquebrantable paciencia, sus valiosas orientaciones, su apoyo continuo para el desarrollo y culminación de esta investigación.

A los miembros del jurado Mg. Mihály Martínez y Mg. Nelson Peñaloza por sus apropiadas sugerencias y valiosos aportes para la mejora de la presente investigación.

A la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática-TecVEM, por su apoyo en esta investigación.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas especialmente al Mg. Miguel Gonzaga, por su apoyo constante y consejos apropiados.



Índice

Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos.....	iv
Lista de Figuras	vi
Lista de Tablas	x
Introducción	11
Capítulo I: Problemática	13
1.1. Antecedentes	13
1.2. Justificación	22
1.3. Teoría de Registros de Representación Semiótica.....	27
1.4. Pregunta y objetivos de la Investigación	34
1.5. Metodología de la Investigación	35
1.6. Procedimientos Metodológicos.....	36
Capítulo II: Aspectos Matemáticos Y Didácticos De La Homotecia	39
2.1. Una mirada histórica de la homotecia	39
2.2. Análisis formal de la homotecia.....	41
2.3. Análisis didáctico de la homotecia.....	57
Capítulo III: Análisis De La Propuesta Didáctica	72
3.1. Análisis de la secuencia de actividades	72
Conclusiones	142
Referencias	146
Anexos.....	149

Lista de Figuras

Figura 1: Figuras con la misma forma y orientación	29
Figura 2: Puesta en perspectiva de dos figuras	29
Figura 3: Aprehensión perceptiva de una configuración homotética	31
Figura 4: Aprehensión discursiva de una configuración homotética	32
Figura 5: Aprehensión secuencial de la construcción de una imagen homotética	33
Figura 6: Modificación óptica del hexágono ABCDEF	33
Figura 7: Ángulos alternos internos.....	41
Figura 8: Rectas paralelas	42
Figura 9: Teorema de Tales.....	45
Figura 10: Consecuencia de Tales.....	46
Figura 11: Pappus para rectas secantes.....	47
Figura 12: Pappus para rectas paralelas 1.....	49
Figura 13: Pappus para rectas paralelas 2.....	50
Figura 14: Pappus para rectas paralelas 3.....	50
Figura 15: Teorema de Desargues	51
Figura 16: Desargues Caso 1-1	52
Figura 17: Desargues Caso 1-2	52
Figura 18: Desargues Caso 1-3	53
Figura 19: Desargues Caso 1-4	53
Figura 20: Desargues Caso 2	54
Figura 21: Recíproco de Desargues.....	55
Figura 22: Desargues para paralelas	56
Figura 23: Construcción de figuras homotéticas	57
Figura 24: Situación de contexto.....	58
Figura 25: Comprendemos el problema	59
Figura 26: Diseñamos una estrategia.....	60
Figura 27: Ejecutamos la estrategia	61
Figura 28: Situación significativa A	62
Figura 29: Situación significativa B	63
Figura 30: Actividad propuesta 1.....	64
Figura 31: Actividad propuesta 2.....	65
Figura 32: Actividad propuesta 3.....	66
Figura 33: Actividad propuesta 4.....	66

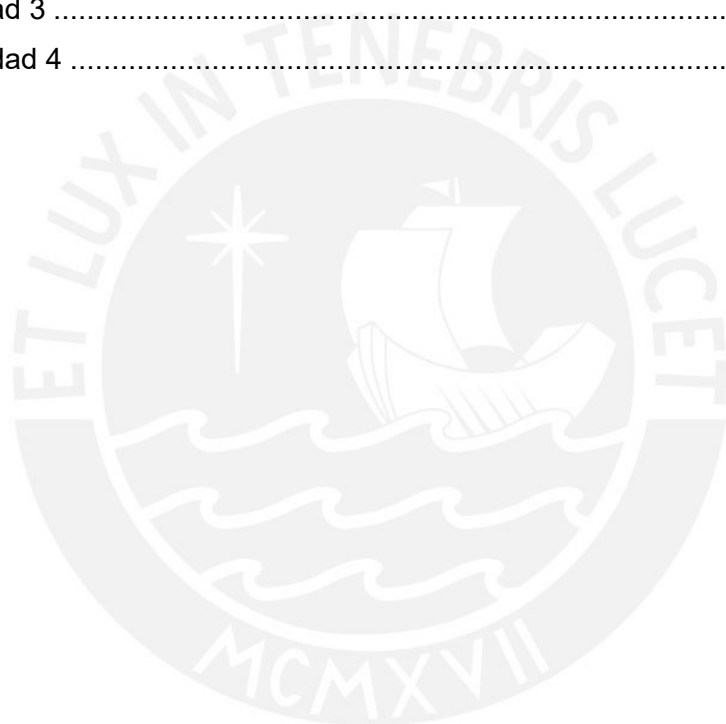
Figura 34: Actividad propuesta 5.....	67
Figura 35: Actividad propuesta 6.....	68
Figura 36: Actividad propuesta 7.....	69
Figura 37: Actividad propuesta 8.....	70
Figura 38: Puntos homólogos en la configuración homotética 1 a.....	74
Figura 39: Rectas secantes en la configuración homotética 1 a.....	74
Figura 40: Unicidad del centro de homotecia exterior 1 a.....	75
Figura 41: Unicidad del centro de homotecia exterior 1 a.....	76
Figura 42: Representación y nombramiento de puntos homólogos 1 a.....	77
Figura 43: Trazado de rectas que pasan por los puntos homólogos 1 a.....	77
Figura 44: Intersección de rectas que pasan por puntos homólogos 1 a.....	78
Figura 45: Puntos homólogos en la configuración homotética 1 b.....	79
Figura 46: Rectas secantes en la configuración homotética 1 b.....	80
Figura 47: Unicidad del centro de homotecia interior 1 b.....	81
Figura 48: Puntos colineales en la configuración homotética 1 b.....	81
Figura 49: Representación y nombramiento de puntos homólogos 1 b.....	82
Figura 50: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos 1 b.....	83
Figura 51: Intersección de rectas que pasan por puntos homólogos 1 b.....	84
Figura 52: Punto de intersección Q_1 entre las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{QQ_1}$	86
Figura 53: Punto de intersección R_1 entre las rectas $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{RR_1}$	86
Figura 54: Punto de intersección S_1 entre las rectas $\overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{SS_1}$	87
Figura 55: Punto de intersección T_1 entre las rectas $\overleftrightarrow{L_4}$ y $\overleftrightarrow{TT_1}$	87
Figura 56: Figura $P_1Q_1R_1S_1T_1$ similar a la figura PQRST.....	88
Figura 57: Identificación y representación del Punto A.....	89
Figura 58: Identificación y representación del Punto B.....	90
Figura 59: Identificación y representación del Punto C.....	90
Figura 60: Identificación y representación del Punto D.....	91
Figura 61: Construcción de figura P_1ABCD similar a la figura PTSRQ.....	92
Figura 62: Punto de intersección Q_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_1}$ y $\overleftrightarrow{QQ_2}$	93
Figura 63: Punto de intersección R_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_2}$ y $\overleftrightarrow{RR_2}$	93
Figura 64: Punto de intersección S_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_3}$ y $\overleftrightarrow{SS_2}$	94
Figura 65: Punto de intersección T_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_4}$ y $\overleftrightarrow{TT_2}$	94
Figura 66: Figura $P_2Q_2R_2S_2T_2$ similar a la figura PQRST.....	95

Figura 67: Punto de intersección E entre las rectas \vec{a} y \vec{TE}	96
Figura 68: Punto de intersección F entre las rectas \vec{b} y \vec{SF}	96
Figura 69: Punto de intersección G entre las rectas \vec{c} y \vec{RG}	97
Figura 70: Punto de intersección H entre las rectas \vec{d} y \vec{QH}	98
Figura 71: Figura P_2EFGH similar a la figura $PTSRQ$	98
Figura 72: Rectas secantes en la configuración homotética de 3 a.....	100
Figura 73: Centro exterior en la configuración homotética de 3 a.....	100
Figura 74: Rectas paralelas en la configuración homotética de 3 a.....	101
Figura 75: Nombramiento de los centros de las circunferencias en 3 a.....	102
Figura 76: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en 3 a	102
Figura 77: Trazado de recta que pasa por los puntos C y G en 3 a	103
Figura 78: Trazado de rectas paralelas \vec{p} y \vec{q} en 3 a	104
Figura 79: Punto de intersección C' entre las rectas \vec{o} y \vec{q} en 3 a.....	105
Figura 80: Rectas secantes en la configuración homotética de 3 b.....	106
Figura 81: Centro interior en la configuración homotética de 3 b.....	106
Figura 82: Rectas paralelas en la configuración homotética de 3 b.....	107
Figura 83: Nombramiento de los centros de las circunferencias en 3 b.....	108
Figura 84: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en 3 b	108
Figura 85: Trazado de la recta que pasa por los puntos C y G en 3 b.....	109
Figura 86: Trazado de rectas paralelas \vec{p} y \vec{q} en 3 b	110
Figura 87: Punto de intersección C' entre las rectas \vec{o} y \vec{q} en 3 b.....	111
Figura 88: Construcción del centro de homotecia exterior en el caso 1.....	113
Figura 89: Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 1	113
Figura 90: Obtención del vector $\vec{O_1A'}$ en el caso 1	114
Figura 91: Obtención del vector $\vec{O_1A}$ en el caso 1	114
Figura 92: Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 1	115
Figura 93: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 1.....	116
Figura 94: Identificación y representación del centro de homotecia exterior en el caso 1...116	116
Figura 95: Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 1	117
Figura 96: Obtención de la longitud del segmento O_1A' en el caso 1	118
Figura 97: Obtención de la longitud del segmento O_1A en el caso 1	118
Figura 98: Obtención de la longitud del segmento $A'A$ en el caso 1	119
Figura 99: Construcción del centro de homotecia exterior en el caso 2.....	120

Figura 100: Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 2	121
Figura 101: Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A'}$ en el caso 2	121
Figura 102: Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A}$ en el caso 2	122
Figura 103: Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 2	123
Figura 104: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 2	123
Figura 105: Identificación y representación del centro de homotecia exterior en el caso 2	124
Figura 106: Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 2	125
Figura 107: Obtención de la longitud del segmento O_1A en el caso 2	126
Figura 108: Obtención de la longitud del segmento O_1A' en el caso 2	126
Figura 109: Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 2	127
Figura 110: Construcción del centro de homotecia interior en el caso 3	128
Figura 111: Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 3	128
Figura 112: Obtención de los vectores $\overrightarrow{O_2A'}$ y $\overrightarrow{O_2A}$ en el caso 3	129
Figura 113: Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 3	130
Figura 114: Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 3	130
Figura 115: Identificación y representación del centro de homotecia interior en el caso 3	131
Figura 116: Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 3	132
Figura 117: Obtención de la longitud de los segmentos O_2A' y O_2A en el caso 3	133
Figura 118: Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 3	134
Figura 119: Construcción del centro de homotecia interior en el caso 4	135
Figura 120: Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 4	135
Figura 121: Obtención de los vectores $\overrightarrow{O_2A'}$ y $\overrightarrow{O_2A}$ en el caso 4	136
Figura 122: Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 4	137
Figura 123: Trazado de rectas que pasan por los puntos homólogos en el caso 4	137
Figura 124: Identificación y representación del centro de homotecia interior en el caso 4	138
Figura 125: Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 4	139
Figura 126: Obtención de la longitud de los segmentos O_2A' y O_2A en el caso 4	140
Figura 127: Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 4	141

Lista de Tablas

Tabla 1: Estándar aprendizaje de la Geometría.....	23
Tabla 2: Matematiza situaciones	24
Tabla 3: Comunica y representa ideas matemáticas.....	25
Tabla 4: Elabora y usa estrategias.....	25
Tabla 5: Razona y argumenta generando ideas matemáticas.....	26
Tabla 6: Estándar de aprendizaje.	26
Tabla 7: Actividad 1	73
Tabla 8: Actividad 2	85
Tabla 9: Actividad 3	99
Tabla 10: Actividad 4	112



Introducción

Nuestro interés por investigar sobre la noción de la homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano se fundamenta en las investigaciones de Hervás (2020), Lemonidis (1991), Mateo (2020) y Moral (2019), quienes sostienen que el estudio de la homotecia como una transformación geométrica, podría permitir la comprensión del teorema de Tales desde una perspectiva dinámica. Dicho problema motivó el desarrollo de nuestra investigación.

Pero la introducción de la noción de homotecia en la enseñanza clásica se caracteriza por la insuficiencia de un trabajo preparatorio sobre las configuraciones homotéticas posibles según Lemonidis (1990). Mientras que en Lemonidis (1991) se propone una secuencia didáctica, que busca la adquisición de la noción de homotecia a partir de los diferentes tipos de figuras.

Además, Castillo (2020), Castillo (2018) y Galvis (2017) en sus respectivas investigaciones refieren que la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1994) permitió la elaboración de una secuencia didáctica, y que los estudiantes abordaron las actividades propuestas a partir de sus aprehensiones (perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria) en el registro figural.

En ese sentido, nuestra investigación tiene como objetivo analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en la construcción de la noción de homotecia en el VII ciclo de la Educación Básica Regular (EBR). Nuestra investigación es cualitativa, siendo secundaria la fuente de nuestros datos.

De acuerdo con nuestros procedimientos metodológicos se indagaron investigaciones de maestrías y doctorados en repositorios de universidades reconocidas como la Pontificia Universidad Católica del Perú, la Universidad Nacional de Colombia, la Universidad de Jaén de España, la Universidad de Zaragoza de España, L'université Louis Pasteur de Francia y artículos de revistas científicas ubicados en la base de Scielo, Science Direct y Scopus en los últimos cinco años; también se realizó una mirada histórica sobre la génesis de la homotecia como una transformación geométrica; así como el análisis de la enseñanza de la homotecia como una transformación geométrica en el libro didáctico aprobado por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) dirigido a estudiantes del VII ciclo de la EBR.

Del mismo modo hemos propuesto una secuencia didáctica que está compuesta por cuatro actividades donde cada actividad está basada en los conocimientos construidos en las actividades que la anteceden, todas ellas referentes a la homotecia como una

transformación geométrica. Dichas actividades implican la realización de tratamientos en el registro figural según las aprehensiones perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria de acuerdo con la TRRS de Duval (1994) y con el apoyo del *software* GeoGebra. Nuestra investigación está compuesta por tres capítulos:

En el primer capítulo presentamos la problemática de la investigación. Entonces, revisamos, describimos y analizamos investigaciones de referencia respecto a la enseñanza y aprendizaje de la homotecia como una transformación geométrica. También, exponemos la justificación y algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS). Asimismo, presentamos la pregunta y los objetivos de la investigación basados en una revisión de fuentes secundarias.

En el segundo capítulo realizaremos un estudio del objeto matemático homotecia según la metodología de la investigación documental. Comenzaremos con una mirada histórica de la homotecia basada en la investigación de Lemonidis (1990), rescatando las contribuciones de Euclides, Desargues, Pappus, Petersen, Poncelet, Stevin, Tales, entre otros. Luego, mostraremos el análisis formal de la homotecia según el libro de Ivorra (s.f.) que desarrolla la homotecia desde la Geometría afin. Asimismo, presentamos el análisis de la ficha 8, aplicamos nuestros aprendizajes con respecto a la homotecia como transformación geométrica del cuaderno de trabajo de Matemática denominado *Resolvamos Problemas Secundaria 3*, contrastándolo con el texto *Resolvamos Problemas Manual para el docente Secundaria 3* del MINEDU edición 2019; correspondientes al VII ciclo de la EBR.

En el tercer capítulo presentaremos el análisis de la propuesta didáctica. También tomamos en cuenta las consideraciones finales de la presente investigación; así como las recomendaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En nuestra experiencia como docentes del área de Matemática en el VII ciclo de la Educación Básica Regular (EBR), en la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización; hemos observado que habitualmente se presenta el teorema de Tales desde una perspectiva estática. Al respecto, Hervás (2020), Lemonidis (1991), Mateo (2020), y Moral (2019) sostienen que el estudio de la noción de homotecia como una transformación geométrica podría permitir la comprensión del teorema de Tales desde una perspectiva dinámica; que genere el conocimiento a partir de la manipulación de figuras geométricas usando términos como reducción o ampliación.

Por tal motivo, en nuestra investigación realizamos el estudio de la noción de homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano para la cual mostramos los antecedentes de referencia, la justificación, la formulación de la pregunta, el objetivo general y los objetivos específicos relacionados.

1.1. Antecedentes

Ahora presentamos investigaciones relacionadas con el objeto de estudio homotecia como una transformación geométrica, las aprehensiones en el registro figural y la enseñanza de la geometría con el uso del *software* dinámico. Para tal fin, realizamos una indagación exhaustiva de investigaciones de maestrías y doctorados ubicados en los repositorios de universidades reconocidas en Perú, Colombia, España y Francia. También, tomamos en cuenta artículos de revistas científicas ubicados en la base de datos de Scielo, *Science Direct* y *Scopus* de los últimos cinco años.

Antecedentes relacionados con nuestro objeto matemático

Hervás (2020) realizó una propuesta de unidad didáctica dirigida a estudiantes del tercer curso (entre catorce y quince años) de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de la asignatura de Matemática. La metodología estuvo conformada por la comparación de libros de texto de Matemática actualmente en uso, el análisis sobre la semejanza en el plano y el análisis de investigaciones relacionadas con los métodos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la Educación Secundaria.

La autora propuso una unidad didáctica compuesta por 11 sesiones, en la sesión 2 se explica la semejanza de triángulos y el teorema de Tales. Luego se realizan actividades propuestas en el libro didáctico y se finaliza la sesión con la realización de una serie de

ejercicios lúdicos utilizando las tecnologías de la información y comunicación (TIC). Resaltamos que el análisis realizado por Hervás (2020) sobre la semejanza en el plano, plantea la relación directa entre la homotecia, la semejanza y el teorema de Tales.

La investigadora sostuvo que el uso de las TIC permitió realizar sesiones más comunicativas y motivadoras, lo que facilitó el aprendizaje de los estudiantes; ya que manifestaron un mayor interés. También, indicó que se observó que los estudiantes cometieron errores, como desconocer las fórmulas del cálculo de áreas; a pesar de haberlas estudiado con anterioridad. Además, recomendó que los futuros docentes aprendan a fusionar la Matemática y la Didáctica para transmitir un conocimiento adecuado y también estar preparados para absolver cualquier dificultad presentada en los estudiantes.

Mateo (2020) realizó una investigación sobre la semejanza en el plano por medio de una secuencia didáctica para la enseñanza de estudiantes entre trece y catorce años. Para esto, tomó en cuenta la definición del objeto matemático semejanza, el análisis del currículo, el análisis de investigaciones sobre la semejanza y el análisis sobre libros de texto. El autor propuso una secuencia didáctica con 4 categorías (relacionadas a las distintas etapas en que se aborda la enseñanza de la semejanza), en la actividad 2 de la categoría 1 denominada “Figuras Semejantes”; e introdujo la noción de homotecia a partir de expresiones como reducción y ampliación. Además, introdujo el estudio del teorema de Tales desde una perspectiva dinámica, lo que complementa la construcción del objeto matemático, homotecia. Dichas actividades se desarrollaron utilizando como medio el *software* GeoGebra.

Moral (2019) elaboró una unidad didáctica dirigida a estudiantes del segundo curso (entre trece y catorce años) de ESO del bloque de Geometría, cuya metodología plantea el análisis de investigaciones relacionadas con la unidad didáctica, la revisión del currículo actual y la comparación de libros de texto relacionados a la semejanza y teorema de Tales. El autor planteó una unidad didáctica con 10 sesiones, pero en las sesiones: 1 “Introducción y motivación del Teorema de Tales”, 2 “Figuras semejantes. Razón de semejanza”, 4 “GeoGebra: Semejanza entre triángulos y construcciones geométricas” y 5 “Teorema de Tales. Aplicaciones”; se realiza un análisis respecto a la relación entre la homotecia, la semejanza y el teorema de Tales.

El investigador sostuvo que la planificación de sesiones de enseñanza y aprendizaje busca la construcción de nuevos conocimientos a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, los cuales pueden conocerse mediante la aplicación de una evaluación inicial.

El conocimiento de las limitaciones de aprendizaje, permiten anticiparse a posibles dificultades y no esperar hasta la evaluación final. Moral (2019) circunscribió que la unidad didáctica de la semejanza y el teorema de Tales deben cumplir los objetivos y contenidos del currículo básico de la ESO. Asimismo, manifestó que se debe tener conocimiento sobre estrategias y metodologías tanto presenciales como en línea a partir del uso de las TIC.

Además, el investigador indicó que el análisis y uso de libros de texto, investigaciones y artículos académicos permiten fundamentar las actividades, tareas y trabajos. Del mismo modo, sostuvo que la unidad didáctica planteada debe propiciar el conocimiento de los contenidos del currículo y contener actividades de modelización, uso de las TIC, de razonamiento crítico y comprensivo, y aprendizaje colaborativo. También, planteó que el docente tiene un compromiso académico, educativo y social, y se le confía la educación de las futuras generaciones.

Fernández (2018) desarrolló una unidad didáctica para los estudiantes de octavo grado que les permitió evidenciar las propiedades de la multiplicación de números reales mediante el uso del concepto de homotecia, utilizando estrategias de aprendizaje significativo. Presentó una propuesta didáctica para evidenciar las propiedades de los números reales a partir de las homotecias. Dicha propuesta estuvo dirigida al octavo grado (trece y catorce años) de la Educación Básica. Según el autor, la enseñanza tradicional de las propiedades de la multiplicación de los números reales se limita a enunciarlas y a realizar las respectivas comprobaciones a partir de un listado de ejemplos, pero dichas propiedades no se justifican, lo que genera en los estudiantes confusión al no poder comprenderlas ni diferenciarlas. Para el diseño e implementación de esta unidad didáctica, se recurre al Aprendizaje Significativo de Ausubel como referente teórico.

El autor circunscribió que los aportes históricos, epistemológicos y teóricos permitieron una visión más amplia para la construcción, el desarrollo y el aprendizaje de la homotecia. También, sostuvo que los aspectos metodológicos, didácticos y pedagógicos desarrollados en la investigación permitieron diseñar una secuencia didáctica de acuerdo a la estructura cognitiva de los estudiantes lo que posibilitó trabajar elementos geométricos como puntos, rectas, rectas paralelas, rectas secantes, segmentos, punto medio de un segmento, triángulos y cuadriláteros. De igual manera, demostró la relación existente entre la multiplicación de los números reales y la composición de homotecias de igual centro. Los estudiantes mostraron mucho interés y se sintieron motivados al percatarse que geoméricamente se evidenciaban las propiedades del producto de los números reales.

Salazar (2017) diseñó una estrategia didáctica con la finalidad de que los estudiantes del sexto grado (once y doce años) de Educación Básica aprendan sobre las transformaciones geométricas, en particular, las homotecias. Las actividades didácticas planteadas, buscan aproximar a los estudiantes hacia conceptos como la semejanza y las teselaciones del plano que están relacionadas con el área por recubrimiento. Por teselación entendemos a un arreglo de formas que cubre completamente un plano sin huecos.

La autora se basó en el modelo de Van Hiele, referente en el desarrollo del pensamiento geométrico y en la forma de enseñanza de la Geometría; la utilización del *software* GeoGebra en la elaboración y desarrollo de las actividades responde, al análisis de su influencia en la enseñanza de la geometría. Se realiza también un estudio respecto a lo que plantean los estándares básicos de competencias, los derechos básicos de aprendizaje y los lineamientos curriculares acerca de la enseñanza de las transformaciones geométricas, en particular, sobre las homotecias en el plano.

Puesto que la investigación está dirigida a estudiantes de sexto grado de educación básica, la investigadora indicó que los niveles de Van Hiele se adaptan en forma conveniente y estarán presentes hasta el nivel 2 (nivel de análisis) donde las justificaciones de los procedimientos y resultados planteados por los estudiantes no son necesariamente formales. Además, la autora sostiene que los aprendizajes de la Geometría se basan en el estudio memorístico de áreas y volúmenes por parte de los estudiantes.

La investigadora justificó el uso del *software* GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la homotecia, puesto que permitió la exploración de propiedades, la observación de patrones y regularidades, la realización de conjeturas y demás actividades relacionadas con dicho proceso. Del mismo modo, sostuvo que el aprendizaje de la homotecia se dio a partir del trabajo sistemático de los estudiantes y la orientación del profesor, así las actividades didácticas propuestas deben permitir la manipulación, el desarrollo de la inventiva y el descubrimiento. Además, que el análisis del desarrollo histórico de la noción de homotecia, nos permite conocer las innovaciones en la enseñanza de la homotecia.

Lemonidis (1991) realizó un análisis epistemológico del objeto matemático homotecia, el desarrollo de las concepciones geométricas se determinó según una relación intrafigural, se refiere a la correspondencia entre elementos de una figura y otra similar, sin considerar la transformación de una figura en otra; la transformación geométrica como herramienta, se considera a una transformación como una aplicación de puntos del plano en

el mismo plano y la transformación geométrica como objeto matemático, busca la transformación resultante a partir de la composición de dos o más transformaciones. En este sentido, coincidimos con Lemonidis (1991) cuando afirma que la introducción de la noción de homotecia en la enseñanza clásica, se caracteriza por la insuficiencia de un trabajo preparatorio sobre las posibles configuraciones homotéticas.

El investigador propuso una secuencia didáctica que buscó la adquisición de la noción de homotecia a partir de los diferentes tipos de figuras. Respecto a la enseñanza, planteó un orden de presentación que privilegia la homotecia figural, transformación de una figura en otra figura, y consideró la homotecia puntual como un caso particular. La elección de las configuraciones homotéticas propuestas a los estudiantes, se eligieron según la clasificación planteada por el investigador.

La investigación de Lemonidis (1991) tiene como objetivo utilizar y reforzar la percepción visual de los estudiantes, lo que les permitirá descubrir aspectos de la homotecia. Se propusieron actividades con respecto a una relación numérica y las configuraciones homotéticas. Esta investigación sobre configuraciones homotéticas estuvo dirigida a 38 estudiantes del segundo curso (quince y dieciséis años) de la Educación Básica Secundaria. El autor desarrolló una secuencia didáctica que permitió la construcción del centro de homotecia, la determinación de los puntos homólogos, la determinación de la dirección homotética y la obtención de la razón de homotecia.

Antecedentes relacionados con el marco teórico

Castillo (2020) analizó los procesos de visualización y fomentó diferentes tipos de aprehensiones figurales en la construcción del concepto de área de regiones sombreadas. Para esto, identificó y determinó las aprehensiones en el registro figural movilizados por los estudiantes al abordar una secuencia didáctica respecto al objeto matemático, área de regiones sombreadas. Dicha investigación se enmarcó en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval y como metodología, aspectos de la ingeniería didáctica de Michelle Artigue.

El autor demostró que los estudiantes, a partir de sus aprehensiones perceptivas y operatorias avanzaron en la adquisición de nuevos conocimientos relacionados con el área de regiones sombreadas. También, que la coordinación de al menos dos registros de representación, registro figural y lengua natural, potencian el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas durante la enseñanza básica.

Además, Castillo (2020) sostuvo que las transformaciones geométricas en el registro figural permitieron que los estudiantes vieran las figuras como rompecabezas; así, a partir de una reconfiguración de la figura inicial se generaron figuras más sencillas de abordar. Por reconfiguración entendemos a la operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra figura (Duval, 2004). Luego, Castillo (2020) destacó que las aprehensiones perceptivas y operatorias emergieron cuando los estudiantes demostraron ser capaces de realizar transformaciones geométricas a partir del trabajo con las figuras.

El autor analizó el proceso de reconfiguración de una figura realizada por los estudiantes para determinar la medida de área de polígonos. Dicha investigación se realizó con estudiantes de segundo grado (trece y catorce años) de Educación Básica, teniendo como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica y como metodología aspectos de la Ingeniería Didáctica. La autora refiere que los estudiantes mediante sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva, hicieron uso de la reconfiguración de tipo homogénea y heterogénea para construir diferentes figuras con el Tangram. Del mismo modo, sostuvo que los estudiantes trabajaron con una malla cuadrículada y mediante sus aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva hicieron uso de la reconfiguración de tipo heterogénea para determinar la medida del área de diferentes polígonos. Luego, la investigadora afirma que los estudiantes realizaron reconfiguraciones con el Tangram y la malla cuadrículada y comunicaron sus resultados por medio de registros de representación semiótica.

Galvis (2017) identificó en la construcción de conocimiento geométrico en el aula, algunas formas de aprehensión que movilizan los estudiantes de grado octavo en los registros figurales, en la conceptualización de las relaciones pitagóricas en su investigación presenta elementos relacionados con la identificación de las aprehensiones en el registro figural, que emergen en los estudiantes de octavo grado (trece y catorce años) de Educación Básica, al abordar actividades didácticas relacionadas al teorema de Pitágoras. En dicha investigación se propuso una secuencia de actividades diseñada a partir de la TRRS.

El autor resaltó que la potencialidad de las transformaciones geométricas, los tratamientos y las conversiones en el registro figural permiten que los estudiantes comprendan y movilicen sus aprehensiones en el registro figural. Además, indica que las justificaciones mediante el discurso evidencian el desarrollo de los procesos de

comparación, razonamiento y enunciación de los estudiantes a partir de su aprehensión perceptiva. Así la aprehensión perceptiva cumple una función heurística con respecto a la reconfiguración de figuras. Del mismo modo, plantea que el desarrollo de las actividades didácticas por los estudiantes, a partir de sus aprehensiones operatorias, permitieron la construcción de las relaciones pitagóricas. Así los tratamientos figurales son una herramienta heurística que posibilita la transformación de una figura de partida en una de llegada, a través de cambios posicionales y posteriormente en una reconfiguración.

También, Galvis (2017) indicó que a partir del desarrollo de la secuencia didáctica se destaca la dependencia de la aprehensión discursiva con la aprehensión perceptiva, dicha dependencia determinó la entrada geométrica en cada actividad y permitió el desarrollo de los procesos de comparación, razonamiento y enunciación. Se evidenció, entonces, la articulación de las aprehensiones discursiva y perceptiva. Asimismo, el autor coincide con Duval (2004) cuando afirmó que una secuencia didáctica en Geometría debe generar la coordinación de por lo menos dos registros de representación, como el registro en lengua natural y el figural que guían los tratamientos que movilizan los estudiantes. Y que les permita comprender que dos o más figuras guardan la misma relación matemática. Además, manifiesta que una representación en el registro figural con el uso del software, debe estar acompañada de un discurso claro que indique lo que se debe ver en la figura; esto posibilita que los estudiantes realicen tratamientos en el registro figural y puedan hacer emerger sus aprehensiones en dicho registro.

Antecedente relacionado con el software GeoGebra

Álvarez, Cordero, González, y Sepúlveda (2019) diseñaron una secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial de los estudiantes de cuarto y sexto grado (nueve a doce años) de Educación Básica con el uso del *software* GeoGebra. Las herramientas teóricas consideradas en el diseño de la secuencia didáctica fueron el enfoque Onto semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, mientras que la Teoría de las situaciones Didácticas referenció el análisis de las sesiones de clase. Se utilizaron instrumentos como el diario de campo, la entrevista, los testimonios, el análisis *a priori* y *a posteriori* de la unidad didáctica con la finalidad de analizar el uso de la tecnología en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

A partir del diagnóstico, los lineamientos y mallas curriculares, los procesos y competencias geométricas para el cuarto y sexto grado de educación básica, los investigadores diseñaron una secuencia didáctica que permitió fortalecer las competencias

geométricas. Utilizaron el *software* GeoGebra como medio para lograr el aprendizaje y se basaron en la Teoría de Situaciones Didácticas. Además, observaron que el uso de las TIC se relaciona con los aprendizajes previos, situaciones cotidianas y actividades extracurriculares de los estudiantes; así al abordar situaciones propias del contexto con el *software* GeoGebra, se evidenció un aprendizaje más significativo de la geometría.

Entonces el uso del *software* GeoGebra en el aula de clase permitió, según los investigadores, el fortalecimiento de las competencias geométricas y ayudó a plantear conjeturas que posteriormente pueden ser verificadas. Para los autores, las TIC pueden considerarse como un instrumento que permitió al profesor organizar y programar los procesos de enseñanza y el aprendizaje de la geometría, también permitió la incorporación de recursos como apoyo y complemento para los estudiantes. Además, las TIC crean nuevas formas de interacción entre el profesor y los estudiantes favoreciendo la comunicación y la participación.

Según manifestaron Álvarez et al. (2019), las TIC permitieron que los estudiantes trabajen de forma activa y organizada en el desarrollo de sus tareas y estén atentos a los requerimientos de sus compañeros. Así el profesor pasa de ser un trasmisor a un facilitador y orientador de conocimientos; ya que organiza la estrategia, estructura los temas, diseña las actividades, absuelve las dudas al desarrollar los temas y crea espacios para que los estudiantes utilicen los recursos informáticos que (enriquecen sus conocimientos y desarrollan habilidades); por tanto, el profesor es el mediador entre los conocimientos que ofrece la tecnología y sus estudiantes, además de ser un planificador y diseñador de actividades que hace uso de las TIC con un sentido pedagógico.

Para concluir presentamos algunas coincidencias que los investigadores citados, en nuestros antecedentes, dieron a conocer en sus respectivas investigaciones y nosotros deseamos subrayar.

Salazar (2017) sostiene que el análisis del desarrollo histórico de la noción de homotecia nos permite conocer las innovaciones en la enseñanza de la homotecia. Asimismo, Hervás (2020), Mateo (2020), Moral (2019), Fernández (2018), Salazar (2017) y Lemonidis (1991), al realizar un análisis histórico de la noción de semejanza en sus respectivas investigaciones, coinciden en la relación existente entre la homotecia, la semejanza y el teorema de Tales.

Mientras que, Mateo (2020) destaca que las homotecias generan figuras semejantes y considera la utilización del entorno dinámico de *software* GeoGebra para que el estudiante desarrolle la visualización de dichas figuras; sostiene, además, que las ampliaciones y reducciones de las figuras por medio del *software* GeoGebra, permitieron la construcción del conocimiento en los estudiantes. Desde la posición de Fernández (2018), los estudiantes al interactuar en un ambiente de lápiz y papel incurrieron en errores al momento de realizar mediciones con el uso de la regla. Aunado a esto, Lemonidis (1991) recomienda que las construcciones geométricas a partir de trazos y las justificaciones de dichas construcciones sean exploradas y así aprovechar las propiedades heurísticas de las diferentes figuras.

Más aún, como afirma Mateo (2020), en la exploración de las propiedades heurísticas de la figura dar preferencia a la relación dada por una razón externa—se obtienen al comparar una misma magnitud en dos figuras distintas—en lugar de una interna—que se obtienen al comparar magnitudes distintas de una figura—puesto que, dicha exploración es más rica desde el punto de vista cognitivo. Esta preferencia parece surgir, según el autor, desde el currículo cuando se hace mención del cálculo de la razón de semejanza al referirse a las figuras semejantes. La ausencia de la razón interna está relacionada con la falta de congruencias y movimientos en el plano (transformaciones que preservan la razón interna).

Castillo (2020), Castillo (2018) y Galvis (2017) refieren que el desarrollo de las aprehensiones perceptivas y operatorias de los estudiantes facilitó la adquisición de nuevos conocimientos respecto a las áreas de regiones sombreadas, a su reconfiguración y a la determinación del área de diferentes polígonos. También, destacaron la dependencia de la aprehensión discursiva con la aprehensión perceptiva, dicha dependencia permitió el desarrollo de los procesos de comparación, razonamiento y enunciación.

De igual forma Álvarez et al. (2019) sostienen que el uso del *software* GeoGebra en el aula permite el fortalecimiento de las competencias geométricas y ayuda a plantear conjeturas que posteriormente pueden ser verificadas. Asimismo, Salazar (2017) justificó el uso del *software* GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la homotecia porque permite la exploración de propiedades, la observación de patrones y regularidades y la realización de conjeturas.

Galvis (2017) destacó que una representación en el registro figural con el uso del *software* GeoGebra debe estar acompañada de un discurso que describa lo que se debe ver en la figura; esto posibilita que los estudiantes realicen tratamientos en el registro figural y puedan emerger sus aprehensiones en dicho registro. Además, ratificó que las

justificaciones mediante el discurso evidencian el desarrollo de los procesos de comparación, razonamiento y enunciación por los estudiantes a partir de su aprehensión perceptiva. Así la aprehensión perceptiva cumple una función heurística con respecto a la reconfiguración de figuras. De esta manera, los tratamientos figurales son una herramienta heurística que posibilita la transformación de una figura de partida en una de llegada a través de cambios posicionales y posteriormente en una reconfiguración.

En suma, afirmamos a partir del análisis de las actividades propuestas en las investigaciones de referencia, que no todas las actividades propuestas permiten evidenciar el papel heurístico de las figuras. Es por esto, que nuestro propósito es analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en la construcción de la noción de homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano en el VII ciclo de la EBR desde una propuesta de secuencia didáctica de actividades que nos permita comprender la importancia de las figuras geométricas; así como identificar y realizar tratamientos que nos ayuden a desarrollar las actividades propuestas con el apoyo del *software* GeoGebra.

Dadas las consideraciones antes mencionadas, ahora presentamos la justificación de nuestra investigación.

1.2. Justificación

En esta sección mostramos la justificación de nuestra investigación de acuerdo con las investigaciones de referencia relacionadas con nuestro objeto matemático la homotecia como transformación geométrica en el plano, la clasificación de las figuras geométricas que determinan una configuración homotética según Lemonidis (1990), así como documentos del Ministerio de Educación del Perú (MINEDU), lo que nos permite investigar y proponer una secuencia didáctica relacionada con el aprendizaje de la noción de homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano con la finalidad de desarrollar los procesos cognitivos que permitan el logro de aprendizajes en Geometría resaltando el apoyo del *software* GeoGebra en dichos aprendizajes.

Hervás (2020), Mateo (2020) y Moral (2019) afirman que, respecto a la homotecia en los libros de texto analizados, por ellos, no se aprovecha su potencial dinámico para la comprensión de la congruencia, semejanza, teorema de Tales, etc. Luego, los investigadores refirieron que se puede absolver dicha dificultad con representaciones

gráficas; lo que sería más intuitivo y adecuado para los estudiantes. Asimismo, los autores sostuvieron que a pesar de, plantearse en el currículo y tener conocimiento de que la tecnología representa un recurso muy beneficioso ésta continúa siendo inexistente en los libros de texto y tampoco se trabaja la homotecia en forma integrada con los demás contenidos del currículo.

En los Mapas de Progreso del Aprendizaje del MINEDU (2013) se “describen con precisión lo que los estudiantes deben saber, saber hacer y valorar de manera graduada en cada ciclo de la educación básica y se ofrecen criterios claros y comunes para monitorear y evaluar dichos aprendizajes” (p. 5).

Respecto al Aprendizaje de la Geometría, estos Mapas subrayan que “es importante que el aprendizaje de la Geometría favorezca el desarrollo de habilidades para visualizar, comunicar, dibujar, argumentar y modelar” (p. 9). En la Tabla 1 presentamos el estándar de aprendizaje de la Geometría del VII ciclo.

Tabla 1

Estándar de aprendizaje de la Geometría

Estándar de aprendizaje de la Geometría	
VII ciclo (3°,4° y 5° de secundaria)	Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales considerando propiedades, relaciones métricas, relaciones de semejanza y congruencia entre formas. Clasifica formas geométricas estableciendo relaciones de inclusión entre clases y las argumenta. Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución y distancias inaccesibles usando relaciones métricas y razones trigonométricas, evaluando la pertinencia de realizar una medida exacta o estimada. Interpreta y evalúa rutas en mapas y planos para optimizar trayectorias de desplazamiento. Formula y comprueba conjeturas relacionadas con el efecto de aplicar dos transformaciones sobre una forma bidimensional. Interpreta movimientos rectos, circulares y parabólicos mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano.

Fuente: Adaptado de Mapas de progreso, MINEDU, 2013, p. 9.

Como se puede ver la idea central de este estándar es formular y comprobar conjeturas relacionadas con el efecto de aplicar dos transformaciones sobre una forma bidimensional. De acuerdo con la competencia “Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización” respecto al VII ciclo, las Rutas del Aprendizaje del MINEDU (2015) plantean “una matriz que muestra de manera integrada el estándar de aprendizaje (mapa de progreso), así como los indicadores de desempeño de las capacidades para el desarrollo de la competencia en el ciclo” (p. 51). Esta matriz

comprende cuatro capacidades las cuales aluden, de modo indirecto, la transformación geométrica homotecia.

En la Tabla 2 se presenta la capacidad: Matematiza situaciones.

Tabla 2

Matematiza situaciones

Capacidad	Indicadores de logro		
	3°	4°	5°
Matematiza situaciones	<ul style="list-style-type: none"> • Selecciona información para organizar elementos y propiedades geométricas al expresar modelos que combinan transformaciones geométricas (considerar la homotecia). • Compara y contrasta modelos que combinan transformaciones geométricas (considerar la homotecia) al plantear y resolver problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoce relaciones geométricas al expresar modelos que combinan traslación, rotación y reflexión de figuras geométricas. • Examina propuestas de modelos que combinan traslación, rotación y reflexión de figuras respecto a un eje de simetría. 	<ul style="list-style-type: none"> • Genera nuevas relaciones y datos basados en expresiones analíticas para reproducir movimientos rectos, circulares y parabólicos. • Examina propuestas de modelos analíticos para reproducir movimientos de acuerdo a un propósito contextualizado.

Fuente: Adaptado de Rutas de aprendizaje, MINEDU, 2015, p. 52.

Para la capacidad: Comunica y representa ideas matemáticas, presentamos el siguiente Tabla 3.

Tabla 3*Comunica y representa ideas matemáticas*

Capacidad	Indicadores de logro		
	3°	4°	5°
Comunica y representa ideas Matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> Describe características de sistemas dinámicos y creación de mosaicos con figuras poligonales que aplican transformaciones geométricas (considerar la homotecia). Grafica la composición de transformaciones de figuras geométricas planas que combinen isométricas y la homotecia en un plano cartesiano. 	<ul style="list-style-type: none"> Describe características de transformaciones geométricas sucesivas de formas bidimensionales empleando terminologías matemáticas. Expresa transformaciones que permitan cambiar las formas de triángulos equiláteros, paralelogramos y hexágonos regulares en figuras de animales (pájaros, peces, reptiles y otros) para embaldosar un plano. 	<ul style="list-style-type: none"> Describe empleando transformaciones geométricas, en sistemas articulados de mecanismos. Usa expresiones simbólicas para expresar transformaciones geométricas con figuras geométricas simples y compuestas.

Fuente: Adaptado de Rutas de aprendizaje, MINEDU, 2015, p. 53.

Con respecto con la capacidad: *Elabora y usa estrategias*, presentamos el siguiente Tabla 4.

Tabla 4*Elabora y usa estrategias*

Capacidad	Indicadores de logro		
	3°	4°	5°
Elabora y usa estrategias	<ul style="list-style-type: none"> Realiza proyecciones y composición de transformaciones geométricas (considerar la homotecia), con polígonos en un plano cartesiano al resolver problemas, con recursos gráficos y otros. 	<ul style="list-style-type: none"> Realiza proyecciones y composición de transformaciones de traslación, rotación, reflexión y de homotecia con segmentos, rectas y formas geométricas en el plano cartesiano al resolver problemas, con recursos gráficos y otros. 	<ul style="list-style-type: none"> Realiza proyecciones y composición de transformaciones de traslación, rotación, reflexión y homotecia al resolver problemas relacionados a sistemas dinámicos y mosaicos, con recursos gráficos y otros.

Fuente: Adaptado de Rutas de aprendizaje, MINEDU, 2015, p. 54.

Y para la capacidad: Razona y argumenta generando ideas matemáticas, se presenta el Tabla 5.

Tabla 5

Razona y argumenta generando ideas matemáticas

Capacidad	Indicadores de logro		
	3°	4°	5°
Razona y argumenta generando ideas matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> Justifica la combinación de proyecciones y composiciones de transformaciones geométricas (considerar la homotecia) con polígonos en un plano cartesiano. 	<ul style="list-style-type: none"> Justifica que una figura de dos dimensiones es similar o congruente a otro considerando el plano cartesiano y transformaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> Justifica el efecto de transformaciones respecto a líneas verticales u horizontales o un punto empleando puntos de coordenadas y expresiones simbólicas.

Fuente: Adaptado de Rutas de aprendizaje, MINEDU, 2015, p. 55.

En cuanto a los estándares de aprendizaje de la competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización para el nivel 7 el Currículo Nacional (2016) declara, entre otras transformaciones geométricas, a la homotecia, tal como se muestra en la Tabla 6

Tabla 6

Estándar de aprendizaje

Estándar de aprendizaje de la competencia	
Nivel 7, esperado al final del VII ciclo	Resuelve problemas en los que modela las características de objetos con formas geométricas compuestas, cuerpos de revolución, sus elementos y propiedades, líneas, puntos notables, relaciones métricas de triángulos, distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y parábola; la ubicación, distancias inaccesibles, movimiento y trayectorias complejas de objetos mediante coordenadas cartesianas, razones trigonométricas, mapas y planos a escala. Expresa su comprensión de la relación entre las medidas de los lados de un triángulo y sus proyecciones, la distinción entre transformaciones geométricas que conservan la forma de aquellas que conservan las medidas de los objetos, y de cómo se generan cuerpos de revolución, usando construcciones con regla y compás. Clasifica polígonos y cuerpos geométricos según sus propiedades, reconociendo la inclusión de una clase en otra. Selecciona, combina y adapta variadas estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, perímetro, área o volumen de formas compuestas, así como construir mapas a escala, homotecias e isometrías. Plantea y compara afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales de las propiedades de las formas geométricas; justifica, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos o propiedades geométricas.

Fuente: Adaptado de Currículo Nacional, 2016, p. 149.

Según los documentos del MINEDU: Mapas de Progreso del Aprendizaje (2013), Rutas del Aprendizaje (2015) y Currículo Nacional (2016), se pone de manifiesto la propuesta de abordar la homotecia como una transformación geométrica a partir del desarrollo de las cuatro capacidades relacionadas a la competencia “Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización”. Igualmente, en las investigaciones de referencia, los autores recomiendan abordar la noción homotecia como una transformación geométrica apoyada con el *software* GeoGebra pues, permite la comprensión de los conceptos geométricos. Aunado a esto, nos apoyamos en Lemonidis (1990) cuando refiere que la introducción de la noción de homotecia en la enseñanza clásica se caracteriza por la insuficiencia de un trabajo preparatorio sobre las posibles configuraciones homotéticas. El autor propone una clasificación de estas configuraciones homotéticas: las que se pueden ver en tres dimensiones, las que son perceptivamente ambiguas—se pueden ver en dos o tres dimensiones—y finalmente las que solo pueden verse en dos dimensiones. En este sentido, consideramos importante estudiar la homotecia porque de acuerdo con Duval (2012) es posible y necesario desarrollar una enseñanza de la homotecia que lleve al alumno a apropiarse de los medios de tratamiento de la representación figural, y esta apropiación resulta eficaz no sólo para la comprensión de la homotecia, sino para su entrada en el planteamiento de otras nociones matemáticas, por ejemplo, baricentro, teorema de Tales etc.

Por ende, es relevante realizar una investigación respecto al objeto matemático homotecia como una transformación geométrica a partir de una propuesta de secuencia didáctica con apoyo del *software* GeoGebra lo que permitiría el logro de aprendizajes y la comprensión de las aprehensiones inmersas en las actividades propuestas relacionadas con la noción de homotecia como una transformación geométrica en el VII ciclo de la EBR.

A continuación, presentamos la teoría que fundamenta nuestra investigación.

1.3. Teoría de Registros de Representación Semiótica

Ahora presentamos algunos aspectos del marco teórico de nuestra investigación que se basan en la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1994, 2004, 2012).

1.3.1 Los Registros de Representación Semiótica

Duval (2012) sostiene que las representaciones mentales se refieren a las conceptualizaciones que tiene un individuo con respecto a un objeto, una situación y todo lo referido a dicho objeto o situación. Mientras que las representaciones semióticas son producciones formadas por signos que pertenecen a un sistema de representación con funcionamiento y significado propio.

El autor denomina “semiosis” a la aprehensión o producción de una representación semiótica y “noesis” a la aprehensión conceptual de un objeto, considerando a la “noesis” inseparable de la “semiosis”. Asimismo, sostiene que “la utilización de diferentes registros de representación parece ser una condición necesaria para que los objetos matemáticos no se confundan con sus representaciones y para que los objetos sean reconocidos a partir de dichas representaciones” (Duval, 2012, p. 268).

Conforme con el autor para que un sistema semiótico sea un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas: **la formación de una representación identificable**, que debe respetar las reglas de uso, de identificación, de reconocimiento de la representación y la posibilidad de su uso para los tratamientos; **el tratamiento**, que es la transformación de una representación “inicial” en otra representación “final” dentro del mismo registro de representación, y **la conversión**, que es la transformación de una representación en otro registro de representación manteniendo todo o parte del contenido de la representación “inicial”.

1.3.2 Registro figural

Duval (2004) indica que la existencia de una figura está referida al contraste sobre una hoja de papel, la pantalla de un ordenador, la pizarra de un aula, etc. Este contraste se manifiesta como la implantación de una mancha visible, dicha mancha es susceptible a las variaciones visuales de dimensión: 0 (para un punto), 1 (para una línea) así como 2 (para un área), y variaciones visuales cualitativas: de forma (una línea recta o curva, un contorno abierto o cerrado), de tamaño, de orientación, de granulación, de color, etc.

El autor indica que toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales (dimensional y cualitativa). Respecto a las unidades figurales elementales afirma que “toda figura combina dos tipos de variación; el cruce de los valores de esta variable visual cualitativa con la variable de dimensión, nos permite definir

las unidades figurales elementales para el registro de las representaciones geométricas” (Duval, 2004, p. 158).

De acuerdo con el autor ver “en tres dimensiones” dos figuras geométricas de la misma forma, la misma orientación y cuyos tamaños pueden variar; representa la operación de puesta en perspectiva. Por ejemplo, en la Figura 1, se observan dos cuadrados diferentes uno al lado del otro.

Figura 1.

Figuras con la misma forma y orientación



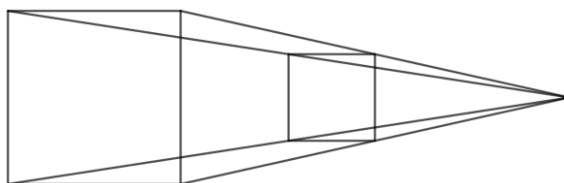
Fuente: Duval, 2004, p.166.

Dicha operación permite ver superpuestas dos figuras geométricas en el que una de ellas puede considerarse como imagen de la otra. Y al unir sus respectivos puntos homólogos mediante rectas, se tiene una representación en el espacio de una configuración homotética plana (Duval, 2004).

Además, la puesta en perspectiva al posibilitar una percepción en tres dimensiones de una representación plana “constituye la productividad heurística del registro figural en relación con el discurso matemático tan útil para la comprensión de la homotecia” (Duval, 2004, p.167). Conforme se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Puesta en perspectiva de dos figuras.



Fuente: Duval, 2004, p. 167.

Veremos ahora una descripción de las diferentes aprehensiones del registro figural

1.3.3 Las Aprehensiones en el registro figural

Duval (1994) afirma que “existen cuatro tipos de aprehensión posible de una figura en un proceso geométrico: aprehensión perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria.” (p. 122).

1.3.3.1 Aprehensión perceptiva

Duval (1994) sostiene que la aprehensión perceptiva permite identificar o reconocer en el acto una forma o un objeto; ya sea en el plano (2D) o espacio (3D). Dicha identificación se realiza según las leyes “gestálticas” de organización o según los indicadores intrafigurativos.

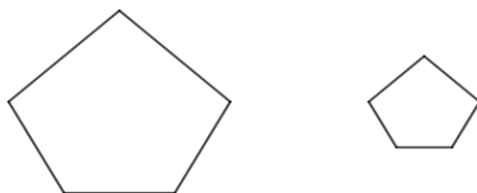
Por leyes gestálticas, Duval (2004) refiere que “cuando un estímulo posee un contorno simple y cerrado es separado como formando un todo. Así, un cuadrado es percibido como una figura única y no como la reunión de cuatro segmentos opuestos” (p. 158).

Además, Duval (1994) asevera que “las diferencias de tamaño u orientación entre determinadas unidades figurales que componen una imagen nos dan la idea de indicadores intrafigurativos” (p. 124). Por ejemplo, un triángulo pequeño inscrito en otro triángulo grande, donde los vértices del pequeño son los puntos medios de los lados del grande, permite ilustrar indicadores intrafigurativos.

La función epistemológica de la aprehensión perceptiva consiste en identificar objetos en dos o tres dimensiones, a partir de un procesamiento cognitivo que se realiza en forma inconsciente y automática (Duval 1994). Así mismo, el autor indica que “desde el primer golpe de vista, reconocemos la forma de una figura, o las que la componen, y tal reconocimiento se mantiene estable” (p. 124). Un ejemplo de aprehensión perceptiva de una configuración homotética se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Aprehensión perceptiva de una configuración homotética



Fuente: Elaboración propia (2021).

Por la aprehensión perceptiva se identifican dos pentágonos de diferente tamaño y con la misma orientación.

1.3.3.2 Aprehensión discursiva

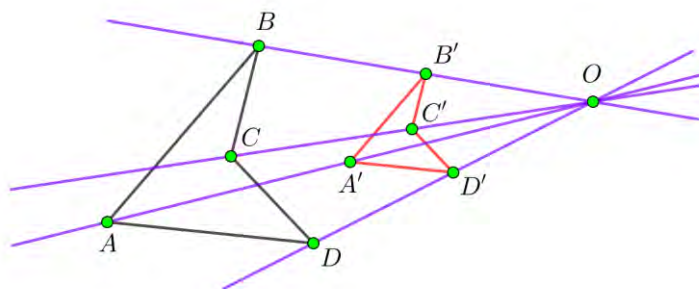
Para Duval (1994), una figura se observa en relación a “una leyenda o una hipótesis que fija explícitamente algunas propiedades. Porque nunca se puede decir que una propiedad matemática aparezca en la figura” (p. 124). Por ejemplo, no es posible determinar el paralelismo de dos rectas por simple estimación perceptiva, debido a que pueden verse como paralelas entre sí, como no paralelas o como casi paralelas.

El autor afirma que “la aprehensión discursiva de una figura corresponde a una explicitación de las otras propiedades matemáticas de una figura que las indicadas por la leyenda o hipótesis. Este proceso se realiza en forma deductiva” (p. 124). Es decir, dar a conocer en forma clara y lógica propiedades matemáticas de la figura que no se indicaron en la leyenda o hipótesis.

La función epistemológica de la aprehensión discursiva es la demostración. Así, los ejercicios elementales de aplicación de teorías o definiciones se basan únicamente en la aprehensión discursiva (Duval, 1994). Por ejemplo, por la aprehensión discursiva se puede explicar alguna propiedad de la figura, conforme se muestra en la Figura 4.

Figura 4

Aprehensión discursiva de una configuración homotética



Fuente: Elaboración propia (2021).

Se tiene un cuadrilátero $ABCD$, la imagen homotética $A'B'C'D'$ y el centro de homotecia exterior " O ". Por la aprehensión discursiva se puede conjeturar que "dos puntos homólogos y el centro de homotecia son colineales".

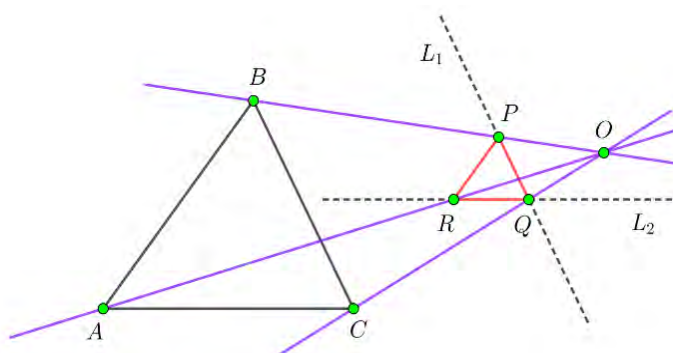
1.3.3.3 Aprehensión secuencial

Duval (1994) refiere que la aprehensión secuencial está relacionada con el orden secuencial de construcción de una figura que depende de las propiedades matemáticas de la figura a construir y de las limitaciones técnicas de los instrumentos utilizados (los comandos de un *software*). Además, el autor sostiene que para tener éxito en la construcción de una figura es necesario un tratamiento específico; el cual tiene dos características: la intención (lo que se piensa o se propone hacer) y la instrucción (caudal de conocimientos adquiridos); la brecha entre ellas aparece en la ejecución instrumental, la cual siempre es confiable. Así, los resultados obtenidos en una construcción pueden diferir de lo que se esperaba obtener.

La modelización es la función epistemológica de la aprehensión secuencial, dicha función surge con el apoyo de ciertos programas informáticos de construcción (Duval, 1994). Es decir, las acciones realizadas en una representación figural permiten modificar el conocimiento respecto al objeto matemático representado. Por ejemplo, por la aprehensión secuencial se puede detallar las acciones a realizar para la construcción de una imagen homotética de la figura, conforme se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Aprehensión secuencial de la construcción de una imagen homotética



Fuente: Elaboración propia (2021).

Como parte de las acciones para la construcción de la imagen homotética consideramos:

A partir del triángulo representado por ABC , el centro de homotecia exterior "O" y las rectas: \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} y \overrightarrow{OC} ubicamos el punto "P" en la recta \overrightarrow{OB} . Luego se traza la recta $L_1 \parallel \overline{BC}$ que pasa por el punto "P". Se intersecan la recta representada por L_1 y la recta \overrightarrow{OC} , determinando el punto "Q". También, se traza la recta $L_2 \parallel \overline{AC}$ que pasa por el punto "Q", se intersecan las rectas L_2 y \overrightarrow{OA} , obteniendo el punto "R". Finalmente, trazamos los segmentos representados por \overline{RP} , \overline{PQ} y \overline{QR} lo que permite construir el triángulo RPQ , que es la imagen homotética (reducida) del triángulo ABC .

1.3.3.4 Aprehensión operatoria

Según Duval (1994), la aprehensión operatoria de una figura se manifiesta a partir de sus diferentes modificaciones en otras figuras. Así, son tres las modificaciones de dicha aprehensión: **mereológicas**, se basan en la división de una figura en sub-figuras que pueden recombinarse formando una nueva figura; **ópticas**, se fundamentan en la ampliación, reducción o deformación de una figura, y **posicional**, se sustentan en el desplazamiento de una figura en el plano o en la inclinación del plano de la figura respecto del plano fronto-paralelo (plano paralelo y vertical al plano que contiene la figura).

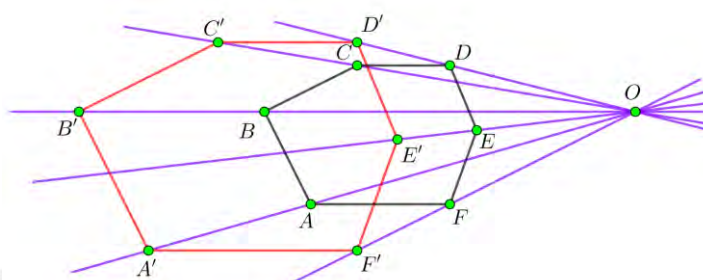
El autor refiere que las modificaciones tienen sus propios tratamientos y que pueden llevarse a cabo en forma mental o material. Además, afirma que "una figura proporciona una

ayuda heurística cuando una de sus posibles modificaciones muestra la idea de una solución” (Duval, 1994, p. 126).

La función epistemológica de esta aprehensión es la exploración heurística, la cual es invocada con frecuencia para justificar el uso de figuras en un problema geométrico (Duval, 1994). Por ejemplo, por la aprehensión operatoria (modificación óptica) se puede ampliar la figura, tal como se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Modificación óptica del hexágono ABCDEF



Fuente: Elaboración propia (2021).

La figura $A'B'C'D'E'F'$ es una imagen homotética (ampliada) del hexágono $ABCDEF$.

1.4. Pregunta y objetivos de la Investigación

Al trabajar en el ámbito de la geometría a partir de las figuras, deseamos poner en manifiesto las propiedades heurísticas de las figuras, las cuales pueden ser representadas de diferente forma y la intención de la secuencia didáctica es suponer anticipadamente las aprehensiones en el registro figural que desarrollarían los estudiantes a partir de sus conocimientos previos. Es por esto que nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el papel de las aprehensiones en el registro figural en la construcción de la noción de homotecia como una transformación geométrica en el VII ciclo de la Educación Básica Regular?

Objetivo General:

Analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en la construcción de la noción de homotecia como una transformación geométrica en el VII ciclo de la enseñanza básica regular.

Objetivos Específicos:

- Identificar las nociones matemáticas involucradas en las actividades como la identificación de puntos correspondientes, trazado de rectas por dos puntos correspondientes, intersección de rectas, puntos colineales, rectas paralelas y relación numérica.
- Determinar anticipadamente las interpretaciones de las propiedades de la figura que el estudiante realiza al interactuar con las diferentes representaciones en el registro figural, con el uso del *software* GeoGebra.

1.5. Metodología de la Investigación

Según Creswell (2013) la investigación cualitativa:

Comienza con supuestos y el uso de marcos interpretativos/teóricos que informan el estudio de problemas de investigación que abordan el significado que los individuos o grupos atribuyen a un problema social o humano. Para estudiar este problema, los investigadores cualitativos utilizan un enfoque cualitativo emergente para la indagación, la recopilación de datos en un entorno natural sensible a las personas y lugares bajo estudio, y un análisis de datos que es tanto inductivo como deductivo y establece patrones o temas. El informe o presentación final escrito incluye las voces de los participantes, la reflexividad del investigador, una descripción e interpretación compleja del problema y su contribución a la literatura o un llamado al cambio (p. 44).

Además, el autor detalla características de la investigación cualitativa como: entorno natural, se recoge información hablando con las personas, observando cómo se comportan y actúan en un determinado contexto; investigador como instrumento clave, se recopilan datos a partir del análisis de documentos, la observación del comportamiento y la entrevista con los participantes; múltiples métodos, se reúne información de entrevistas, observaciones y documentos; razonamiento complejo mediante lógica inductiva y deductiva,

se construyen patrones, categorías y temas, organizando los datos en forma inductiva, también, de manera deductiva se construyen temas que son confrontados con los datos, este proceso lógico inductivo-deductivo representa el razonamiento complejo; significados de los participantes, se enfoca en aprender el significado que los participantes tienen sobre el problema, no el que el aporta el investigador, ni los autores de la literatura relacionada con al tema; diseño emergente, el plan inicial de la investigación no permanece constante y las fases del proceso pueden cambiar; reflexividad, el investigador comunica sus antecedentes, su interpretación de la información en un estudio y lo que se rescata del estudio; cuenta holística, el investigador intenta desarrollar una idea general del problema de estudio.

Presentamos ahora las razones para realizar una investigación cualitativa: compromiso con un trabajo extenso, el investigador dedica tiempo a la recolección de datos y a los problemas generados por la obtención de información; participación en el análisis de datos, abordar una base de datos conformado por textos e imágenes complejas; escritura de extensos informes, incorporar citas respecto a las perspectivas de los participantes y participación en una investigación, planificar una investigación y someterse a la crítica.

En el marco de la pandemia debido a la COVID-19 y en vista de las restricciones en la que estamos inmersos, nuestra investigación no es experimental y buscamos nuestros datos en fuentes secundarias. Entonces, nos apoyamos en la revisión de investigaciones de maestrías y doctorados, de artículos publicados en revistas científicas y de libros didácticos que nos permitan plantear una secuencia didáctica de actividades y que anticipadamente nos permita, conjeturar las posibles acciones de los sujetos de nuestra investigación; y lograr responder la pregunta de nuestra investigación.

1.6. Procedimientos Metodológicos

La presente investigación nos brindará los procesos para comprender los aprendizajes que se lograrán al plantear una secuencia didáctica de actividades para los estudiantes del 3er grado de secundaria de la Educación Básica Regular (EBR) y realizar el análisis de lo esperado en cada una de las actividades didácticas propuestas y poder responder la pregunta de investigación; así como lograr los objetivos tomando en cuenta los antecedentes, el marco teórico y la revisión del libro de texto utilizado por los estudiantes.

A continuación, presentamos los procesos de acuerdo con nuestro objeto de investigación:

La introducción (problema, preguntas, recolección de datos, análisis, productos), para ello la investigación propone responder la pregunta:

¿Cuál es el papel de las aprehensiones en el registro figural en la construcción de la noción de homotecia como una transformación geométrica en el VII ciclo de la Educación Básica Regular?

Responderemos dicha pregunta a partir del desarrollo de una secuencia didáctica de actividades con respecto a la noción de homotecia como una transformación geométrica. Esto nos permitirá analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural; es decir, analizar las aprehensiones perceptivas, secuenciales, discursivas y operatorias (modificación óptica y posicional) con el apoyo del *software* GeoGebra.

Tomando como referencia el trabajo preparatorio sobre las configuraciones homotéticas posibles según (Lemonidis, 1990) y la investigación de Lemonidis (1991), donde el autor propone una secuencia didáctica que busca la adquisición de la noción de homotecia a partir de los diferentes tipos de figuras complementado con el desarrollo heurístico de las figuras que se movilizan a partir de las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994), en los estudiantes del 3er grado de secundaria de la Educación Básica Regular (EBR). Las actividades propuestas plantean:

- Construir el centro de homotecia a partir de la identificación de puntos homólogos y el trazado de rectas que contienen dichos puntos e intersección de las rectas trazadas usando el *software* GeoGebra.
- Construir la imagen homotética de una figura trazando rectas paralelas a los lados de la figura inicial, intersectando dichas rectas con las trazas de la configuración homotética y uniendo dichos puntos de intersección con segmentos de recta usando el *software* GeoGebra.
- Construir la imagen homotética de un determinado punto trazando rectas que unen puntos homólogos, intersectando dichas rectas trazando una recta que contenga dos puntos de la figura inicial trazando una recta paralela a la recta antes mencionada, así como la intersección de la recta paralela y una traza de la configuración para la obtención de la imagen homotética de un determinado punto usando el *software* GeoGebra.

- Obtener la razón homotética identificando puntos homólogos, trazando rectas que contengan dichos puntos, intersectando las rectas; midiendo y comparando las longitudes de los lados de las figuras homotéticas y las longitudes de las líneas intermedias utilizando el *software* GeoGebra

Elaboraremos una propuesta de secuencia didáctica que aborde los indicadores de desempeño correspondientes a las actividades propuestas, analizaremos las posibles soluciones matemáticas que se involucran, así como un análisis de acuerdo con las aprehensiones en el registro figural que nos permitan responder la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos propuestos.

Presentaremos ahora el estudio del objeto matemático homotecia.



CAPÍTULO II: ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS DE LA HOMOTECIA

2.1. Una mirada histórica de la homotecia

En esta sección presentamos el análisis epistemológico de la homotecia apoyados en la investigación de Lemonidis (1990).

La conservación de la relación de longitudes a partir del paralelismo se conoce desde la antigüedad. Esta propiedad se le atribuye a Tales a partir del cálculo de la altura de las pirámides de Egipto.

La conservación de la proporción sigue una evolución, formando parte de la base de muchas construcciones matemáticas. Se realiza entonces un análisis epistemológico al respecto, según:

1. La evolución histórica de las transformaciones centrada en la semejanza y homotecia.
2. La evolución del aspecto numérico, su dialéctica y oposición con el aspecto figural.
3. La situación correspondiente a la educación.

Con respecto a la evolución histórica de las transformaciones se presentan los períodos:

- **Período griego.**

Edificación de las relaciones:

Euclides: Razón de magnitudes y cociente de enteros (separación entre ambos).

Pappus: Relación armónica.

En este período no existen las transformaciones como tal. Aquí nos encontramos en una etapa llamada intrafigural de transformaciones: figuras semejantes y casos de semejanza.

- **Período comprendido entre los siglos XVI y XVIII.**

Los pintores y arquitectos del Renacimiento establecieron las transformaciones y su aplicación. Así la semejanza y la homotecia (figuras semejantes) se manifiestan como una aplicación de una figura desde un centro de semejanza.

- **Período de estructuración y algebrización de la geometría (siglos XIX y XX).**

La noción de transformación respecto a su significado actual es la base de la nueva geometría que se desarrolló durante el siglo XIX.

En los dos primeros períodos se abordó la noción de transformación.

En estos dos períodos, la homotecia aparece en forma “estática” según figuras homotéticas (o semejantes) fijas.

Mientras que su aspecto dinámico se evidenció durante la segunda mitad del siglo XIX.

Respecto a la evolución histórica de los aspectos numéricos y algebraicos, la articulación de los aspectos numéricos (razón) y figurativos representó un obstáculo epistemológico hasta el siglo XIX (geometría orientada). Dicho obstáculo se presentó de acuerdo:

- Durante la época griega, en las relaciones de las magnitudes, no se consideraban los números. Euclides en los “Elementos” no considera la adición de cocientes.
- A finales del siglo XVI, Stevin unificó el concepto de número positivo con los decimales.
- Poncelet estableció el significado de los segmentos haciendo corresponder un signo al número que representa la longitud de un segmento sobre un eje.

En cuanto a la situación correspondiente en la educación.

- La educación tradicional se basa en la geometría euclidiana. La semejanza se define a partir de las propiedades de las figuras semejantes y los casos de semejanza.
- Petersen utilizó las transformaciones como herramienta para resolver problemas geométricos después de la enseñanza tradicional continua en un período en el que las transformaciones se presentan en forma de grupos algebraicos.

Con respecto a la “Matemática Moderna” en la educación, el contenido matemático de la enseñanza de la geometría cambia radicalmente. La homotecia se presenta en forma estructural, ya sea como aplicación lineal o como aplicación afín sin importar las figuras geométricas.

- En la enseñanza actual no interesa una determinación estructural de la homotecia, entonces se presenta la noción de homotecia en dos contextos matemáticos

diferentes, el vectorial y el analítico. Con esto las figuras geométricas retornan en la enseñanza.

2.2. Análisis formal de la homotecia

A partir de Ivorra (s.f.) presentamos el análisis formal de la homotecia por ende las notaciones utilizadas en esta sección se fundamentan en la geometría afín. Resaltamos que utilizaremos la misma notación que usó Ivorra (s.f.) en su libro. Asimismo, se presenta la definición de homotecia en el plano según la investigación de Moral (2019), sólo utilizamos la definición de Moral (2019).

Axioma 1 Por dos puntos diferentes pasa una única recta.

Axioma 2 Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela.

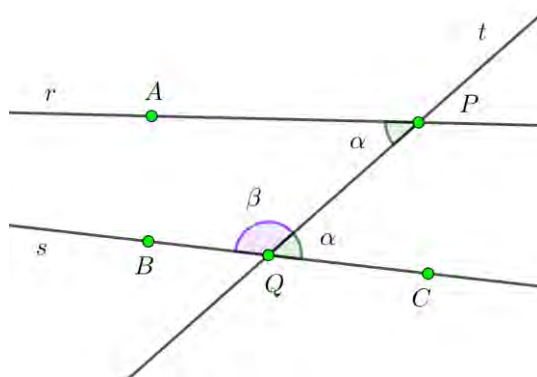
Teorema 1 Sean las rectas r y s que cortan a la recta t en los puntos P y Q , determinando ocho ángulos. Entonces r y s son paralelas si y solo si los ángulos alternos internos son iguales.

Demostración

(\leftarrow) Supongamos que los ángulos alternos internos APQ y PQC son iguales, luego dos ángulos internos BQP y PQC del mismo lado respecto a la recta t son suplementarios. Entonces las rectas r y s no son secantes, pues si lo fueran, el tercer ángulo del triángulo determinado sería nulo. Por tanto, las rectas r y s son paralelas tal como se muestra en la Figura 7.

Figura 7

Ángulos alternos internos

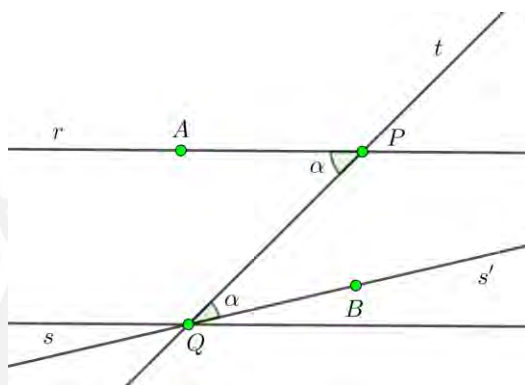


Fuente: Elaboración propia (2021).

(\rightarrow) Supongamos que las rectas r y s son paralelas, trazamos la recta s' que pasa por el punto Q y consideramos el ángulo APQ igual al ángulo PQB donde B es un punto de la recta s' . Entonces las rectas r y s' son paralelas, de acuerdo a la demostración anterior. Luego las rectas s y s' son coincidentes, pues son paralelas y contienen al punto Q . Por ende, los ángulos alternos internos APQ y PQC son iguales tal como se muestra en la figura 8.

Figura 8

Rectas paralelas



Fuente: Elaboración propia (2021).

En consecuencia, el teorema se demuestra.

Definición 1 Un espacio afín de dimensión n es una terna $(E, \vec{E}, +)$, donde E es un conjunto no vacío, a cuyos elementos se les llama puntos, \vec{E} es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y $+$ es una aplicación $E \times \vec{E} \rightarrow E$ que cumple las propiedades siguientes:

1. Para cada par de puntos P, Q , existe un único vector \vec{v} tal que $Q = P + \vec{v}$, y se le representa por $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$,
2. $P + \vec{0} = P$,
3. $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$.

Definición 2 Sea E un espacio afín sobre un cuerpo K . La homotecia de centro $O \in E$ y razón $k \in K^* = K \setminus \{0\}$ es la aplicación $H(O, k)$ dada por

$$H(O, k)(P) = O + k\overrightarrow{OP}$$

Llamaremos $H(O, E)$ al grupo de todas las homotecias de centro O en E . Dos conjuntos son homotéticos si uno es la imagen del otro por una homotecia.

Definición 3 Dado un espacio afín E , llamaremos $H(E)$ al conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de E en sí mismo que transforman cada recta en una paralela. Es claro que $H(E)$ es un grupo con la composición de aplicaciones. Un elemento de $H(E)$ es una homotecia si tiene al menos un punto fijo.

Teorema 2 Si dos elementos de $H(E)$ coinciden en dos puntos distintos cualesquiera, entonces son iguales.

Demostración

Sean P y Q dos puntos de E y $f \in H(E)$. Veamos que la imagen de cualquier otro punto R está determinada por las de P y Q .

Supongamos que R no está en la recta PQ .

Entonces $f[PR]$ es una recta paralela a PR , que pasa por $f(P)$. En forma similar $f[QR]$ es la recta paralela a QR que pasa por $f(Q)$.

Como PR y QR no son paralelas entre sí, las rectas $f[PR]$ y $f[QR]$ tampoco lo son. En particular no son coincidentes, pero tienen en común el punto $f(R)$. Por lo tanto $f(R)$ es necesariamente la intersección de la paralela a PR por $f(P)$ con la paralela a QR por $f(Q)$, lo cual sólo depende de $f(P)$ y $f(Q)$. Por tanto, se prueba que dos elementos cualesquiera de $H(E)$ que coincidan sobre PQ han de coincidir sobre E salvo quizá la recta PQ .

Tomando una recta paralela a PQ , sobre la que ya tenemos que coinciden, aplicando el mismo razonamiento se prueba que también coinciden en PQ .

En particular cada homotecia distinta de la identidad tiene un único punto fijo, al que llamaremos centro de homotecia.

Definición 4 Una traza de $f \in H(E)$ es una recta r tal que $f[r] = r$. Tres hechos obvios sobre trazas son los siguientes:

1. Las trazas de la identidad son todas las rectas.
2. Si $f \in H(E)$, entonces cada punto P que no sea un punto fijo para f está en una única traza, a saber en la recta $Pf(P)$.
3. Si dos trazas se cortan en un punto, entonces éste es un punto fijo.

Un haz de rectas concurrentes es el conjunto de todas las rectas (del espacio o de un plano) que pasan por un mismo punto.

Teorema 3 Las trazas de una homotecia distinta de la identidad son el haz de rectas que pasan por su centro.

Demostración

Si f es una homotecia de centro P , entonces toda recta PQ es una traza, pues $f[PQ] = Pf(Q)$ ha de ser una recta paralela a PQ , luego ha de ser PQ . Recíprocamente, si QR es una traza pero no coincide con PQ , que también es una traza, entonces $f(Q) = Q$, luego $f(P) = P$, luego $Q = P$. En cualquier caso, la recta QR pasa por P . Luego el teorema queda demostrado.

Axioma 3 (para un punto P) Para todo par de puntos Q, R tales que P, Q, R estén alineados y sean distintos, existe una homotecia de centro P que envía Q a R .

Definición 5 Si P, Q, R y S son cuatro puntos colineales en un espacio afín sobre un cuerpo K y $P \neq Q$, entonces $\overrightarrow{RS} = \alpha \overrightarrow{PQ}$, para un único $\alpha \in K$. Por lo tanto, podemos definir

$$\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}} = \alpha.$$

Podemos pensar que esta relación expresa (en un contexto muy abstracto) que el segmento RS mide α si tomamos PQ como unidad de longitud. No obstante, hay que tener presente que si K es un cuerpo ordenado, entonces α puede ser positivo o negativo, por lo que en realidad contiene algo más de información que la mera comparación de longitudes.

El problema es que así solo podemos comparar las longitudes (y orientaciones) de segmentos colineales (o, un poco más en general, paralelos), pero si tenemos tres puntos no colineales P, Q, R en un espacio afín, no tenemos ningún criterio para comparar la longitud de PR respecto a la de PQ . Pese a ello, podemos demostrar el teorema de Tales.

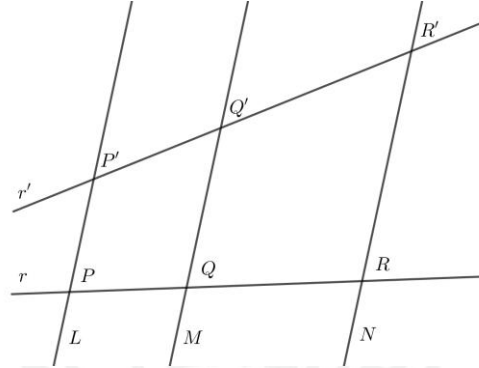
Teorema 4 (teorema de Tales) Sean L, M, N tres hiperplanos paralelos en un espacio afín E . Si r es cualquier recta no paralela a estos hiperplanos, entonces la razón

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PR}}, \text{ donde } r \cap L = \{P\}, r \cap M = \{Q\}, r \cap N = \{R\},$$

es independiente de r . De acuerdo a lo mostrado en la figura 9.

Figura 9

Teorema de Tales



Fuente: Ivorra, s.f., p. 116.

Demostración

Sea r' otra recta no paralela a L, M, N que los corte en los puntos P', Q', R' .

Supongamos que $P \neq P'$ y $R \neq R'$ (en caso contrario, la demostración es más simple)

Entonces las rectas PP' y RR' son paralelas, luego $\overrightarrow{RR'} = \lambda \overrightarrow{PP'}$, para $\lambda \in K$.

Sea $\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PR}}$, luego $Q = P + \alpha \overrightarrow{PR}$ y sea $Q'' = P' + \alpha \overrightarrow{P'R'}$. Bastará probar que $Q'' = Q$, lo cual equivale a que $Q = Q''$ o bien a que la recta QQ'' sea paralela a PP' . Esto equivale a que $\overrightarrow{QQ''}$ sea múltiplo de $\overrightarrow{PP'}$.

Veamos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QQ''} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q''} = -\alpha \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PP'} + \alpha \overrightarrow{P'R'} \\ &= -\alpha (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R'} + \overrightarrow{R'R}) + \overrightarrow{PP'} + \alpha \overrightarrow{P'R'} \\ &= -\alpha \overrightarrow{PP'} + \alpha \lambda \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{PP'}, \text{ pues } \overrightarrow{R'R} = -\overrightarrow{RR'} \\ &= (\alpha \lambda - \alpha + 1) \overrightarrow{PP'}. \end{aligned}$$

De modo que el teorema queda demostrado.

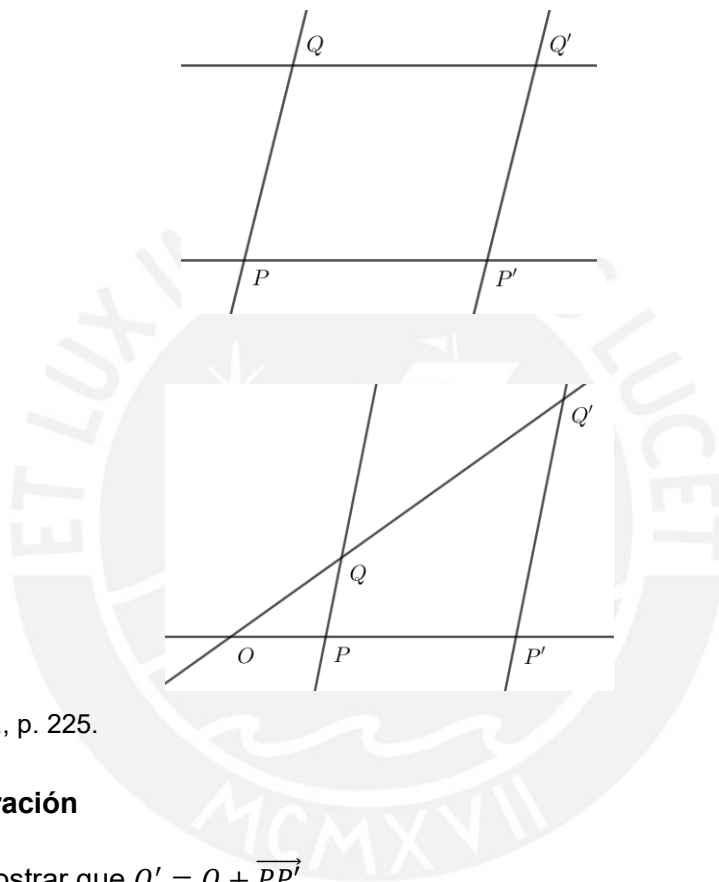
Teorema 5 (consecuencia de Tales) Sean P, Q, P', Q' puntos distintos de un espacio afín tales que las rectas PQ y $P'Q'$ sean paralelas.

1. Si las rectas PP' y QQ' son paralelas, entonces $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$, con $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$.
2. Si las rectas PP' y QQ' se cortan en O , entonces $Q' = H(O, k)(Q)$, donde $k = \overrightarrow{OP'} / \overrightarrow{OP}$.

Tal como se muestra en la figura 10.

Figura 10

Consecuencia de Tales



Fuente: Ivorra, s.f., p. 225.

Demostración

1. Por demostrar que $Q' = Q + \overrightarrow{PP'}$.

Veamos, $Q + \overrightarrow{PP'}$ está en la recta QQ' y además

$$Q + \overrightarrow{PP'} = P + Q - P + \overrightarrow{PP'} = P + \overrightarrow{PQ} + P' - P = P' + \overrightarrow{PQ},$$

está en la recta $P'Q'$, luego se demuestra lo pedido, pues Q' es el punto de intersección entre $Q + \overrightarrow{PP'}$ y $P' + \overrightarrow{PQ}$.

2. Por demostrar que $Q' = O + k\overrightarrow{OQ}$.

Por el teorema de Tales (considerando la recta paralela a PQ que pasa por O), se tiene:

$$\frac{\overrightarrow{OQ'}}{\overrightarrow{OQ}} = k \leftrightarrow \overrightarrow{OQ'} = k\overrightarrow{OQ} \leftrightarrow Q' = O + k\overrightarrow{OQ}.$$

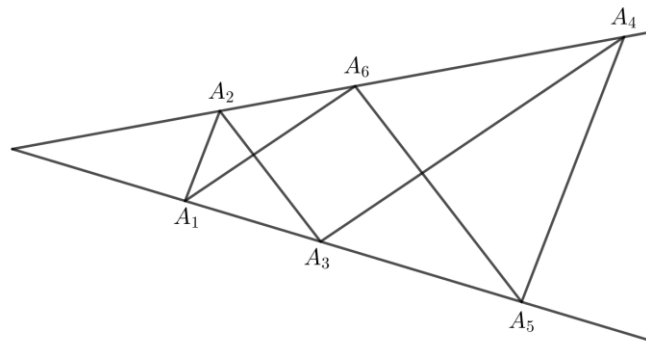
En consecuencia, el teorema se demuestra.

Definición 6 Un hexágono es un conjunto de seis puntos ordenados $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Llamaremos lados del hexágono a las seis rectas $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$. Dos lados de un hexágono son contiguos si tienen un vértice en común, y en caso contrario son opuestos.

Teorema 6 (Teorema de Pappus–Pascal “para rectas secantes”) Sean r y s dos rectas secantes y consideremos un hexágono tal que los vértices A_1, A_3, A_5 están sobre r y A_2, A_4, A_6 están sobre s (todos ellos distintos del punto de intersección). Si dos pares de lados opuestos son paralelos, el tercer par también lo es. Como se evidencia en la Figura 11.

Figura 11

Pappus para rectas secantes



Fuente: Ivorra, s.f., p. 280.

Demostración

Realizaremos la demostración en dos partes

Primera parte

Por demostrar que K es conmutativo, supongamos que se cumple el teorema de Pappus-Pascal.

Sean r y s dos rectas que se cortan en un punto P .

Sea A_1 un punto sobre r distinto de P . Y f una homotecia arbitraria de centro P (no trivial). Entonces $f(A_1) = A_3 \neq A_1$ está en r y eligiendo la homotecia apropiada podemos hacer que sea cualquier punto de r prefijado.

Tomemos otra homotecia no trivial g de centro P y un punto A_2 en s distinto de P . Sea $A_6 = g(A_2) \neq A_2$, que también estará en s y es un punto arbitrario si elegimos g .

Sean $A_5 = g(f(A_1)) = g(A_3)$ y $A_4 = f(g(A_2)) = f(A_6)$. Luego A_1A_6 es paralela a $f(A_1)f(A_6) = A_3A_4$ y A_2A_3 es paralela a $g(A_2)g(A_3) = A_6A_5$. Por el teorema de Pappus también A_1A_2 es paralela a A_4A_5 .

La conmutatividad $gf = fg$ equivale a que $f(g(A_1)) = g(f(A_1))$ Asimismo, equivale a que $f(g(A_1)) = A_5$, podríamos analizar también con A_2 .

Puesto que $f(g(A_1))$ es el punto donde la paralela a A_1A_2 pasa por $f(g(A_2)) = A_4$ y corta a r , en el punto A_5 . Por consiguiente, se demuestra el teorema.

Segunda parte

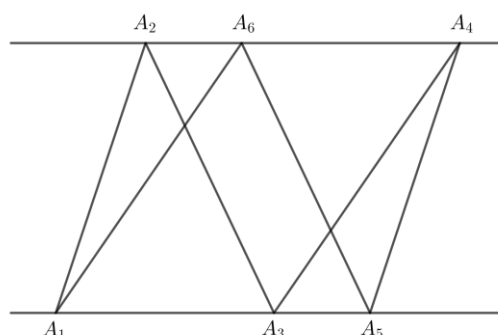
Por demostrar el teorema de Pappus-Pascal, supongamos que K es conmutativo.

Supongamos que A_1A_6 es paralela a A_3A_4 y que A_2A_3 es paralela a A_6A_5 , consideramos la homotecia f de centro P que cumple $f(A_1) = A_3$ y la homotecia g de centro P que cumple $g(A_2) = A_6$. Sabemos que $fg = gf$ concluimos que A_1A_2 es paralela a A_4A_5 . En consecuencia, el teorema queda demostrado.

Teorema 7 (Teorema de Pappus-Pascal “para rectas paralelas”) Sean r y s dos rectas paralelas y consideremos un hexágono tal que los vértices A_1, A_3, A_5 están sobre r y A_2, A_4, A_6 están sobre s (todos ellos distintos del punto de intersección). Supongamos que las rectas A_1A_2 y A_4A_5 son paralelas, al igual que A_1A_6 y A_3A_4 , y tenemos que probar que A_2A_3 y A_5A_6 también lo son. Tal como se muestra en la Figura 12.

Figura 12

Pappus para rectas paralelas 1



Fuente: Elaboración propia (2021).

Demostración

Realizaremos la demostración en dos partes

Primera parte

Supongamos que dos de los puntos A_1, A_3, A_5 son iguales:

Si $A_3 = A_5$, entonces $A_2 = A_6$. Luego $A_2A_3 = A_6A_5$, así las rectas A_2A_3 y A_5A_6 son paralelas en forma trivial.

Si $A_1 = A_5$, entonces $A_2 = A_4$. Luego $A_2A_3 = A_3A_4$ y $A_5A_6 = A_1A_6$, así las rectas A_2A_3 y A_5A_6 son paralelas, pues las rectas A_1A_6 y A_3A_4 son paralelas por hipótesis.

Si $A_1 = A_3$. Procedemos en forma análoga.

Luego, de acuerdo a los tres casos posibles, se demuestra el teorema.

Segunda parte

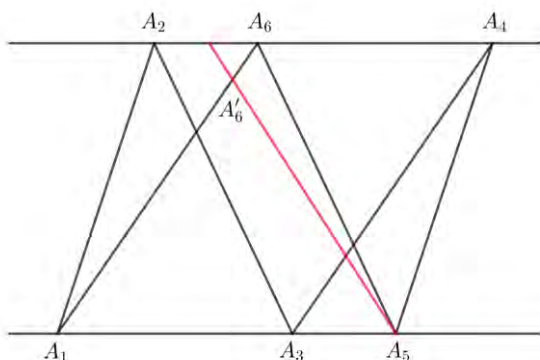
Supongamos que dos de los puntos A_1, A_3, A_5 son distintos dos a dos:

Por simetría, tenemos que A_2, A_4, A_6 son distintos dos a dos.

Sea r la paralela a A_2A_3 que pasa por A_5 . Entonces r debe cortar a A_1A_6 en un punto A'_6 , pues en caso contrario A_2A_3 sería paralela a A_1A_6 . Así A_2A_3 sería paralela a A_3A_4 y $A_2 = A_4$, luego r corta a A_1A_6 en el punto A'_6 . Bastará probar que $A'_6 = A_6$. Supongamos lo contrario, de acuerdo a lo mostrado en la Figura 13.

Figura 13

Pappus para rectas paralelas 2



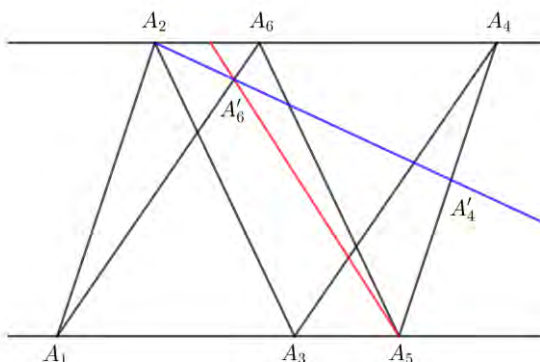
Fuente: Elaboración propia (2021).

No es posible que $A'_6 = A_2$, pues entonces $A_2 \in A_1A_6$. Entonces se cumpliría que $A_2 = A_6$.

Sea $s = A_2A'_6 \neq A_2A_6$. Entonces s corta a A_1A_6 en A'_6 y a A_3A_4 en digamos $A'_4 \neq A_4$, pues A_1A_6 y A_3A_4 son paralelas. Asimismo, s cortará a A_1A_3 en un punto O , como se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Pappus para rectas paralelas 3



Fuente: Ivorra, s.f., p. 281.

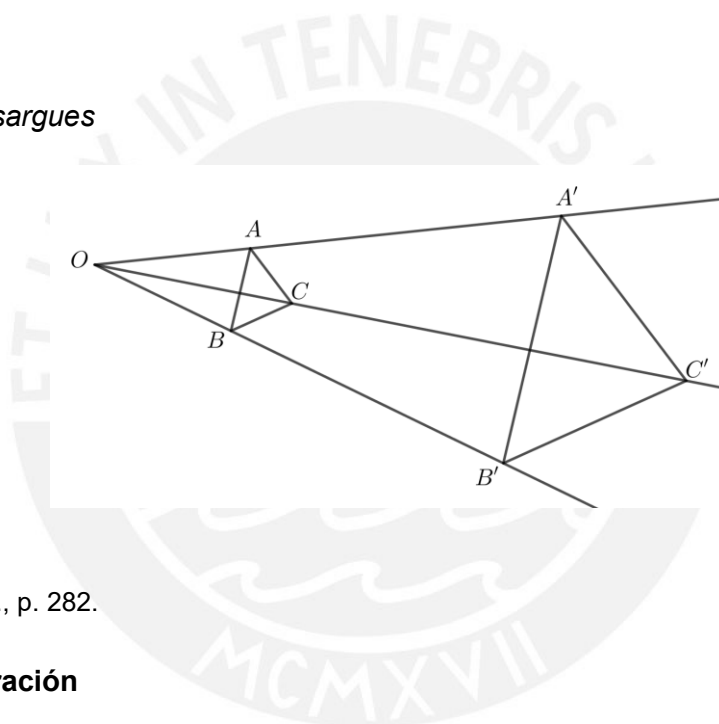
Luego los puntos A_1, A_3, A_5 y A_2, A'_4, A'_6 cumplen las hipótesis del teorema de Pappus-Pascal para rectas secantes. Ahora, como $A_5A'_6$ es paralela a A_2A_3 y $A_1A'_6$ es paralela a $A_3A'_4$ entonces $A_5A'_4$ es paralela a A_1A_2 .

Luego $A_5A'_4 = A_5A_4$, y el punto de corte de esta recta con A_3A_4 es $A_4 = A'_4$, lo cual es una contradicción. Por tanto, se demuestra el teorema.

Teorema 8 (Teorema de Desargues) Según la imagen, supongamos que las tres rectas concurrentes en el punto O son distintas dos a dos, que los tres pares de puntos son distintos de O y que las rectas AB y $A'B'$ son paralelas, al igual que las rectas AC y $A'C'$, entonces las rectas BC y $B'C'$ son paralelas de acuerdo a lo mostrado en la Figura 15.

Figura 15

Teorema de Desargues



Fuente: Ivorra, s.f., p. 282.

Demostración

Supongamos que el punto O pertenece a la recta AB , entonces la recta OA sería igual a la recta OB , lo cual es una contradicción, pues la recta OA es distinta a la recta OB . Por tanto, el punto O no pertenece ni a la recta AB , ni a la recta AC , ni a la recta BC . Veamos los siguientes casos:

Caso 1 La recta OB no es paralela a la recta AC .

Luego la recta paralela a la recta OB que pasa por el punto A no es la recta AC , y tampoco es paralela a la recta $A'C'$, entonces la corta en un punto L .

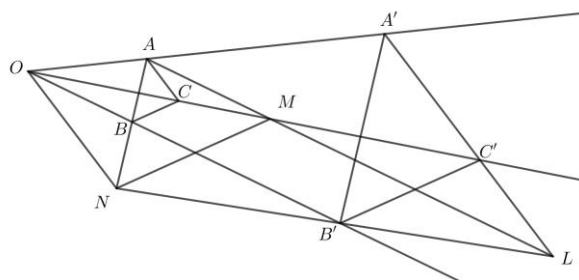
Sea M el punto de corte entre las rectas OC y AL (como la recta OC corta a la recta OB , también debe cortar a su paralela AL).

Sea N el punto de corte entre las rectas $B'L$ y AB . Si no existiera el punto N , la recta $B'L$ sería paralela a la recta AB que pasa por el punto B' , así las rectas $B'L$ y $A'B'$ serían iguales. Luego los puntos L y A' serían iguales también, ya que el punto de corte entre las rectas $B'L$ y $A'C'$ es L , y el punto de corte entre las rectas $A'B'$ y $A'C'$ es A' .

Luego la recta $AL = AA'$ no sería paralela a la recta OB , lo que contradice la hipótesis. Luego la recta AL es paralela a la recta OB , tal como se evidencia en la Figura 16.

Figura 16

Desargues Caso 1-1



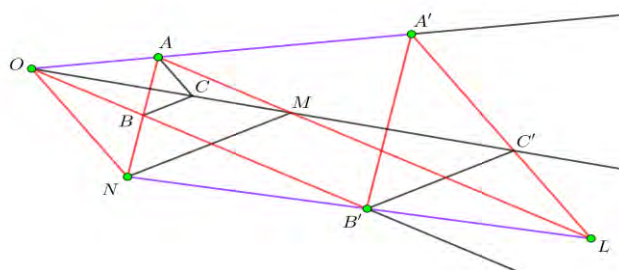
Fuente: Ivorra, s.f., p. 282.

Por el teorema de Pappus-Pascal en el hexágono formado por los puntos N, B', L y OAA' . (Las rectas que contienen dichos puntos podrían ser paralelas o secantes, el teorema se cumple en ambos casos).

Sabemos que la recta $AN = AB$ es paralela a la recta $A'B'$ y que la recta AL es paralela a la recta $OB = OB'$, entonces la recta ON es paralela a la recta $A'L = A'C'$. Por tanto, la recta ON es paralela a la recta AC como se presenta en la Figura 17.

Figura 17

Desargues Caso 1-2

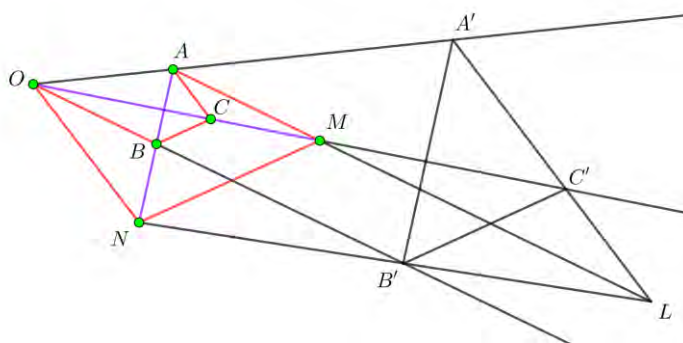


Fuente: Elaboración propia (2021).

En el hexágono formado por los puntos N, B, A y O, C, M . Sabemos que la recta $AM = AL$ es paralela a la recta OB y que la recta ON es paralela a la recta AC . Por ende, la recta MN es paralela a B como se muestra en la Figura 18.

Figura 18

Desargues Caso1-3

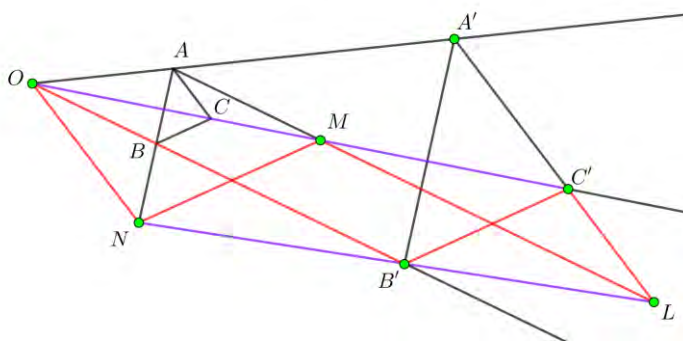


Fuente: Elaboración propia (2021).

Finalmente, en el hexágono formado por O, M, C' y N, B', L . Sabemos que la recta ON es paralela a la recta LC' y que la recta $ML = AL$ es paralela a la recta OB' , luego la recta MN es paralela a la recta $B'C'$ de acuerdo a lo mostrado en la Figura 19.

Figura 19

Desargues Caso1-4



Fuente: Elaboración propia (2021).

Así pues, la recta BC es paralela a la recta MN y por tanto es paralela a la recta $B'C'$. Por todo lo anterior se demuestra el teorema.

Caso 2 La recta OB es paralela a la recta AC .

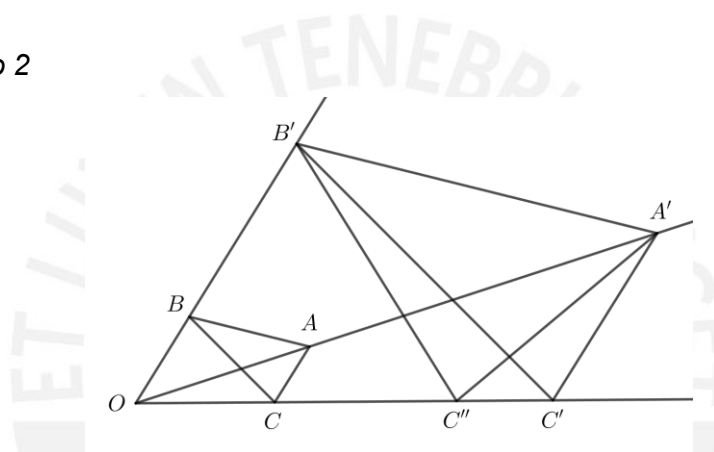
Por reducción al absurdo

Supongamos que la recta BC no es paralela a la recta $B'C'$. Entonces, una de las dos rectas, BC o $B'C'$, no es paralela a la recta OA . Por simetría, no perdemos generalidad si suponemos que es la recta BC .

La paralela a la recta BC que pasa por el punto B' tiene que cortar a la recta OC en un punto C'' , porque la recta OC corta a la recta BC , y a sus paralelas. Además, el punto $C'' \neq C'$, porque estamos suponiendo que la recta $B'C'$ no es paralela a la recta BC . Según se presenta en la Figura 20.

Figura 20

Desargues Caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

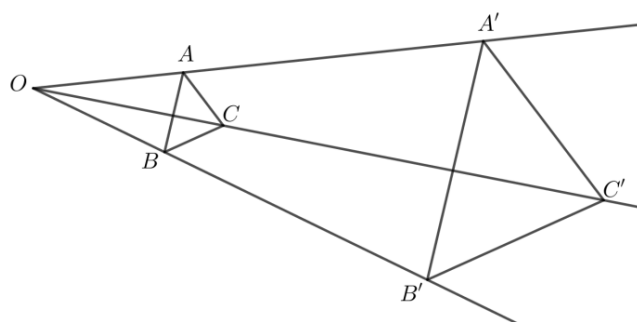
Ahora los puntos B, A, C y B', A', C'' cumplen las condiciones del **Caso 1** en lugar de A, B, C y A', B', C' , porque la recta OA no es paralela a la recta BC . Entonces la recta AC es paralela a la recta $A'C''$, luego la recta $A'C'$ es paralela a la recta $A'C''$ (pues, por hipótesis las rectas AC y $A'C'$ son paralelas), así el punto $C' = C''$, lo cual es una contradicción. De modo que el teorema queda demostrado.

Nos falta probar el teorema de Desargues para rectas paralelas. Primero se demostrará, el recíproco del teorema de Desargues para rectas concurrentes.

Teorema 9 (Recíproco del Teorema de Desargues) Ahora suponemos que los lados de ambos triángulos son paralelos dos a dos (pero sobre rectas distintas) y que las rectas AA' y BB' se cortan en el punto O , y vamos a probar que la recta CC' también pasa por el punto O de acuerdo a lo mostrado en la Figura 21.

Figura 21

Recíproco de Desargues



Fuente: Ivorra, s.f., p. 283.

Demostración

Como la recta OC corta a la recta BC , también corta a su paralela $B'C'$ en un punto C'' .

Puesto que los puntos A, B, C y A', B', C'' cumplen las condiciones del teorema de Desargues, con la recta BC paralela a la recta $B'C'' = B'C'$ y la recta AB paralela a la recta $A'B'$. Entonces la recta AC es paralela a la recta $A'C''$.

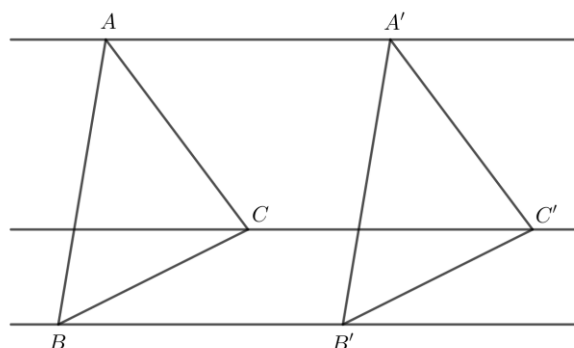
Luego la recta $A'C''$ es la paralela a la recta AC que pasa por el punto A' , pero ésta es la recta $A'C'$ (pues, por hipótesis la recta AC es paralela a la recta $A'C'$), así el punto $C'' = C'$, pues ambos son el punto de corte de la recta $A'C' = A'C''$ con la recta $B'C'$, finalmente la recta $CC' = OC''$ pasa por el punto O . En consecuencia, se demuestra el recíproco del teorema de Desargues.

Supongamos que las rectas AA' y BB' son paralelas, demostremos que la recta CC' también es paralela a ambas. En efecto, si la recta CC' no fuera paralela a la recta AA' , ambas rectas se cortarían en un punto O , y por el teorema que acabamos de probar. La recta BB' también pasaría por O , lo cual es una contradicción. Así pues, el teorema de Desargues para rectas paralelas queda demostrado.

Teorema 10 (Teorema de Desargues “para rectas paralelas”) Si las tres rectas AA' , BB' y CC' son paralelas distintas dos a dos, AB es paralela a $A'B'$ y AC es paralela a AC' , entonces BC es paralela a $B'C'$. Según se muestra en la Figura 22.

Figura 22

Desargues para paralelas



Fuente: Ivorra, s.f., p. 283.

Demostración

Por reducción al absurdo

Supongamos que la recta BC no es paralela a la recta $B'C'$, podemos considerar la paralela a la recta BC que pasa por el punto C' , que cortará a la recta BB' en un punto B'' , pero entonces los puntos A, B, C y A', B', C'' cumplen las condiciones del resultado anterior.

Entonces la recta BB'' es paralela a la recta AA' , luego la recta BB'' es la paralela a la recta CC' que pasa por el punto B , luego es la recta BB' , así el punto $B' = B''$ y tenemos que la recta BC sí que es paralela a la recta $B'C'$, lo cual es una contradicción. De modo que el teorema queda demostrado.

Homotecia en el plano

Es la transformación geométrica de puntos, líneas y figuras, en sus respectivos correspondientes similares (imágenes homotéticas), a partir de un punto fijo (centro de homotecia) y una razón dada (razón de homotecia).

Dado O un punto del plano y k un real diferente de cero. Se define como homotecia de centro O y razón k , a la aplicación $H_{O,k}$ que hace corresponder a un punto A otro similar A' talque:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

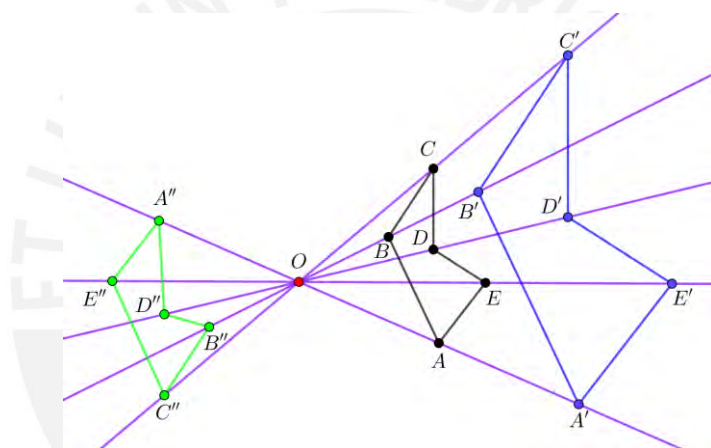
Denominamos imagen homotética de A al punto A' , luego:

$$H_{O,k}(A) = A'$$

- La homotecia es directa si $k > 0$, donde A y A' se ubican al mismo lado respecto de O ,
- La homotecia es inversa si $k < 0$, donde A y A' se ubican en lados diferentes respecto de O ,
- La homotecia es idéntica si $k = 1$, donde A y A' son coincidentes,
- La homotecia es una simetría central respecto de O , si $k = -1$.

Figura 23

Construcción de figuras homotéticas



Fuente: Adaptado de Moral, 2019, p. 33.

Las figuras $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son homotéticas exteriores.

Las figuras $ABCDE$ y $A''B''C''D''E''$ son homotéticas interiores.

2.3. Análisis didáctico de la homotecia

En esta sección presentamos el desarrollo de la transformación geométrica de homotecia en la enseñanza relacionada con las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994). Para ello analizamos la ficha 8: Aplicamos nuestros aprendizajes con respecto a la transformación geométrica homotecia del texto cuaderno de trabajo de Matemática *Resolvamos Problemas* Secundaria 3, contrastándola con el texto *Resolvamos*

Problemas Manual para el docente Secundaria 3 del MINEDU edición 2019; correspondientes al VII ciclo de la Educación Básica Regular.

Cabe indicar que el texto analizado no muestra la definición de homotecia.

A continuación, se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.

Figura 24

Situación de contexto



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 107.

Se presenta la fase, Comprendemos el problema.

Figura 25

Comprendemos el problema

Comprendemos el problema

1. ¿Qué objetos tienen las dos imágenes que se presentan en la situación significativa?

2. ¿Qué hizo Teresa con los objetos de su dormitorio?

3. Describe las características de los objetos de ambas imágenes completando la siguiente tabla:

Objeto	Imagen inicial	Imagen final
Cama	Tiene forma de rectángulo	<ul style="list-style-type: none">• Tiene la forma inicial.• El tamaño es el mismo de la imagen inicial.• Está en otra posición.

4. ¿Qué nos pide determinar la pregunta de la situación significativa?

Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 108.

Pregunta 1 De acuerdo con el manual los estudiantes pueden identificar los siguientes objetos: la cama, la cómoda, el ropero, el escritorio, la silla, las pantuflas y la alfombra.

Pregunta 2 Según el manual los estudiantes pueden identificar movimientos de rotación, traslación y simetría axial. Sin embargo, en la situación planteada se pueden identificar también hasta cinco homotecias interiores de razón $k = -1$ con respecto a la cama, la mesa de noche, el escritorio, la silla y la alfombra.

Pregunta 3 A partir del manual, los estudiantes pueden identificar las figuras iniciales de la situación planteada con figuras geométricas estudiadas previamente y realizar una descripción de las propiedades de las figuras obtenidas, por algún movimiento realizado.

Pregunta 4 El manual sostiene que los estudiantes deben determinar los movimientos realizados a los objetos.

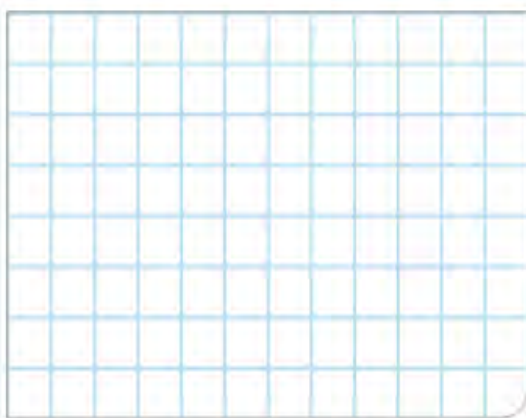
Presentamos la fase, Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan.

Figura 26

Diseñamos una estrategia

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

- 1.** Describe el procedimiento que te ayudará a dar respuesta al desafío de la situación significativa.



- 2.** ¿Con qué conocimiento matemático se relacionan los movimientos de los objetos de la imagen inicial para obtener la imagen final?



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 108.

Pregunta 1 Según el manual, los estudiantes pueden describir el procedimiento a seguir a partir de la comparación de imágenes.

Pregunta 2 De acuerdo con el manual, los estudiantes pueden identificar los movimientos mencionados con las transformaciones geométricas.

Se muestra la fase; Ejecutamos la estrategia o plan.

Figura 27

Ejecutamos la estrategia

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Compara la cama de la imagen inicial con la de la imagen final, dibuja y describe la transformación geométrica que se observa.



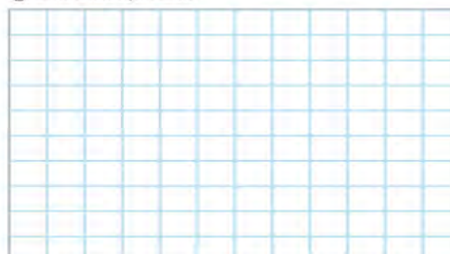
2. Compara el ropero de la imagen inicial con la de la imagen final, dibuja y describe la transformación geométrica aplicada.



3. Compara la cómoda de la imagen inicial con la de la imagen final, dibuja y determina la transformación geométrica aplicada.



4. Describe la alfombra de la imagen inicial y la de la imagen final, dibuja y determina la transformación geométrica aplicada.



5. Responde al desafío de la situación significativa.



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 109.

Pregunta 1 Según el manual, los estudiantes pueden observar una rotación y traslación; sin embargo, la transformación geométrica correspondiente es la de una homotecia interior de razón $k = -1$.

Pregunta 2 De acuerdo con el manual, los estudiantes pueden describir una traslación y una rotación de 90° .

Pregunta 3 En el manual se establece que los estudiantes pueden determinar una rotación y traslación, pero la transformación apropiada es la de una homotecia interior de razón $k = -1$.

Pregunta 4 Según el manual, los estudiantes pueden observar una traslación y rotación; sin embargo, la transformación geométrica acorde es la de una homotecia interior de razón $k = -1$.


Pregunta 5 Con respecto a la silla y al escritorio se determinan una homotecia interior de razón $k = -1$.

Presentamos la situación significativa A.

Figura 28

Situación significativa A

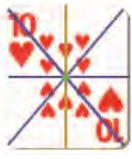
Situación significativa A
Observa las barajas de naipes y responde qué transformaciones presentan.




Resolución
Se tiene una carta de la baraja. Sobre ella se trazan dos ejes que se cortan en un centro y se evidencia que:

- Si la mitad de abajo se rota 180° , será igual a la de arriba, por lo que hay rotación.
- Si se trazan líneas que pasan por el centro, se comprueba la simetría central generada por una rotación de 180° .

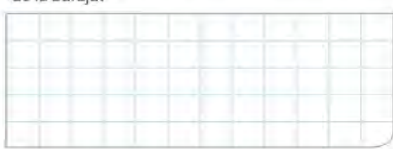
Respuesta: Las barajas de naipes presentan las siguientes transformaciones geométricas: rotación, simetría central y ampliación.




1. Para determinar que la imagen de las cartas tiene simetría central, ¿qué realizaste?



2. ¿Qué transformación se ha realizado con el número de la baraja?



3. ¿Qué transformaciones se observan en esta carta?



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 110.

Pregunta 1 Según el manual, los estudiantes pueden determinar una simetría central a partir del trazo de ejes de simetría.

Pregunta 2 De acuerdo con el manual, los estudiantes pueden realizar una rotación de 180° , pero la transformación geométrica apropiada es la de una homotecia interior de razón $k = -1$.

Pregunta 3 En el manual se establece que los estudiantes pueden observar una simetría, rotación y reducción; sin embargo, las transformaciones correspondientes son la de una homotecia interior de razón $k = -1$, una homotecia exterior de reducción y una homotecia exterior de ampliación.

Se presenta la situación significativa B.

Figura 29

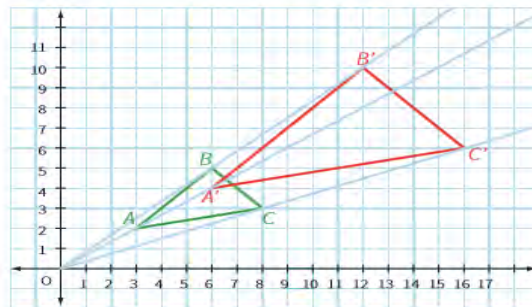
Situación significativa B

Situación significativa B

Grafica la homotecia con centro en el origen de coordenadas y razón igual a 2 de un triángulo de vértices A (3;2), B (6;5) y C (8;3).

Resolución

- Se traza un diagrama cartesiano.
- Se grafica el triángulo en el plano cartesiano a partir de sus vértices A (3;2), B (6;5) y C (8;3).
- Desde el centro de homotecia (origen de coordenadas), se trazan rectas proyectadas hacia cada vértice del triángulo. Luego, como $k = 2$, se duplica la distancia que hay entre el centro de homotecia y cada vértice para obtener el nuevo triángulo. De este modo:



1. ¿Qué estrategia heurística permitió dar respuesta a la pregunta de la situación significativa?

2. Compara el triángulo ABC y el triángulo A'B'C', describe qué propiedades comunes tienen y qué propiedades los diferencian.

Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 111.

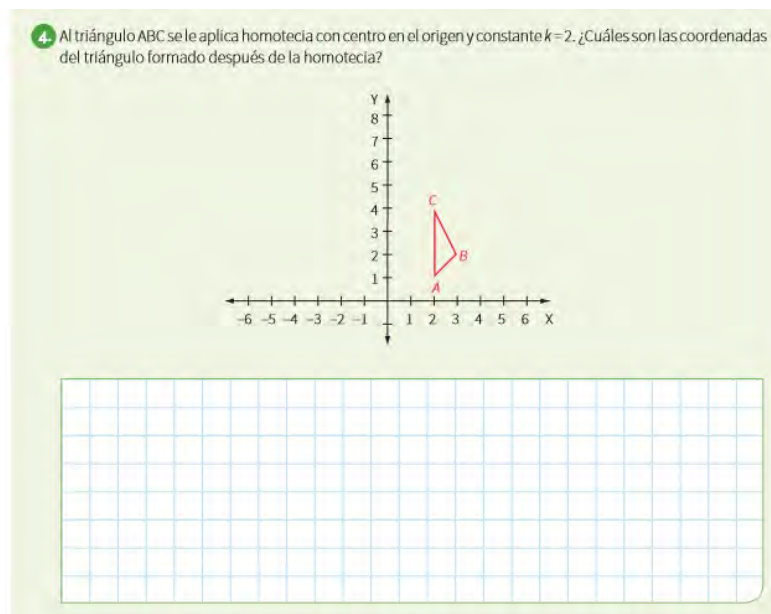
Pregunta 1 Según el manual, los estudiantes podrían graficar el plano cartesiano de referencia, trazar líneas que pasan por el centro de dicho plano y los vértices de la figura ABC , y finalmente, duplicando las distancias de los vértices de la figura ABC al centro del plano, obtener la figura $A'B'C'$.

Pregunta 2 De acuerdo con el manual, los estudiantes podrían indicar que las figura ABC y $A'B'C'$ tienen la misma forma, pero tamaños diferentes.

Presentamos la actividad 1.

Figura 31

Actividad propuesta 2



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 114.

De acuerdo con el manual, los estudiantes podrían plantear hasta tres posibles respuestas:

Respuesta adecuada: Los estudiantes comprenden la situación, grafican correctamente e indican las coordenadas pedidas.

Respuesta parcial: Los estudiantes grafican solo la homotecia.

Respuesta inadecuada: Los estudiantes no comprenden la actividad y realizan gráficos incorrectos.


Se plantea la actividad 3.

Figura 32

Actividad propuesta 3

5. Se podría decir que la homotecia de una figura con $k=-1$ y centro en el origen de coordenadas es similar a:

- a) una simetría axial con respecto a una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- b) una simetría central con centro en el origen.
- c) una rotación con ángulo de 180° respecto al origen.
- d) b y c



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 115.

Según el manual, los estudiantes podrían indicar como correcta, a la opción d).

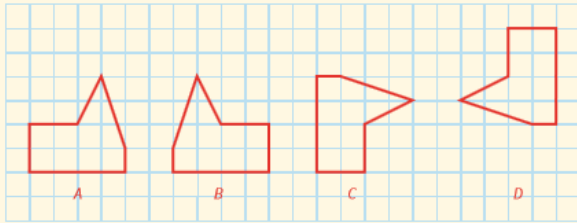
Esta situación se comentó en la actividad 1.

Se muestra la actividad 4.

Figura 33

Actividad propuesta 4

6. Observa las figuras A, B, C y D. ¿Qué relación existe entre ellas?



- a) Simetría central, rotación, simetría axial
- b) Simetría axial, traslación, rotación
- c) Simetría axial, rotación, simetría central
- d) Simetría central, traslación, simetría axial

Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 116.

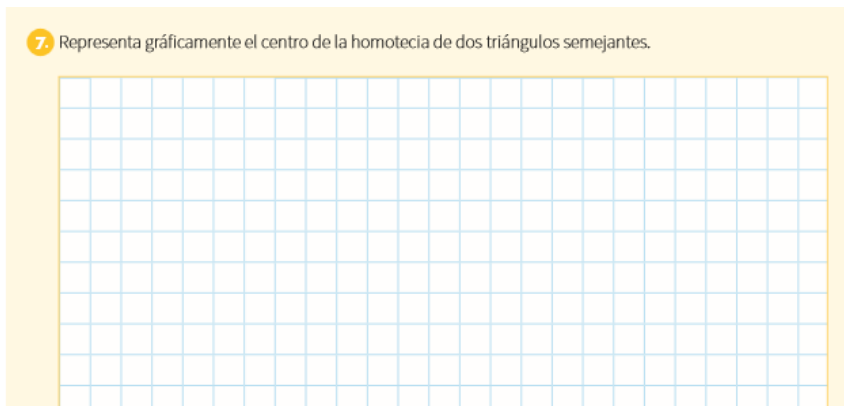
Según el manual, los estudiantes podrían indicar como correcta, a la opción c).

En esta actividad se produjeron una simetría axial (entre A y B), una rotación de 90° en sentido horario (entre B y C), y una homotecia interior de razón $k = -1$ (entre C y D).

Presentamos la actividad 5.

Figura 34

Actividad propuesta 5



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 116.

De acuerdo con el manual, los estudiantes podrían plantear hasta tres posibles soluciones:

Respuesta adecuada: Los estudiantes trazan líneas por cada vértice donde la intersección de ellas sería el centro.

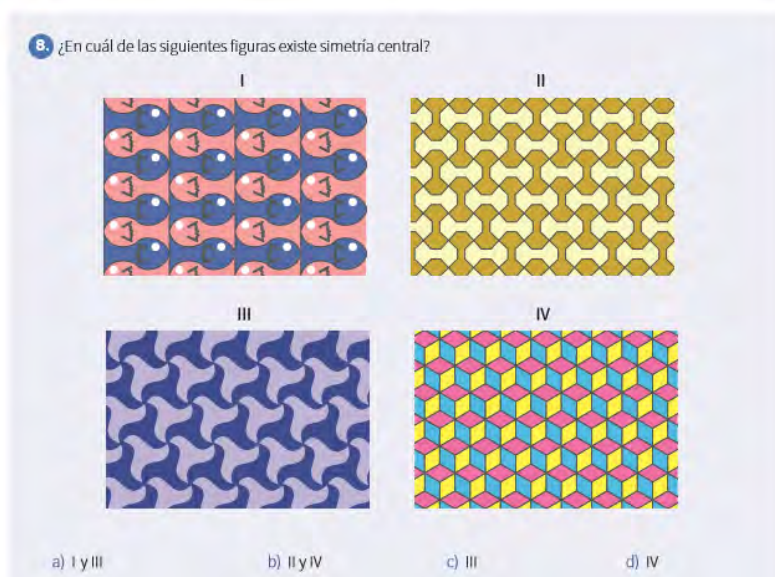
Respuesta parcial: Los estudiantes no especifican como obtener el centro. Reconociendo solo las características de los triángulos semejantes.

Respuesta inadecuada: Los estudiantes plantean otras respuestas.

Se propone la actividad 6.

Figura 35

Actividad propuesta 6



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 117.

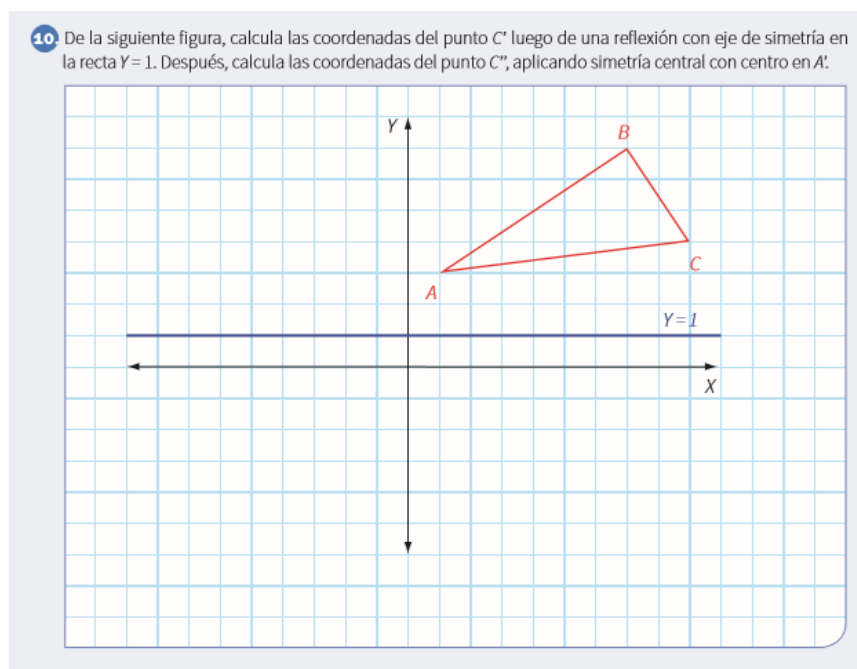
Según el manual, los estudiantes podrían indicar como correcta la opción b).

Cabe resaltar que, tanto en la figura II como en la figura IV, si elegimos dos figuras idénticas (del mismo color) se puede concluir que se produjo una homotecia interior de razón $k = -1$.

Presentamos la actividad 7.

Figura 37

Actividad propuesta 8



Fuente: Resolvamos Problemas 3, 2019, p. 118.

De acuerdo con el manual, los estudiantes podrían plantear hasta tres posibles soluciones:

Respuesta adecuada: Graficando correctamente, los estudiantes obtienen las coordenadas pedidas.

Respuesta parcial: Los estudiantes no grafican, pero indican correctamente las coordenadas solicitadas.

Respuesta inadecuada: Los estudiantes calculan coordenadas diferentes a lo pedido y no realizan ningún gráfico.

Según el análisis realizado a las actividades propuestas, concluimos que no se proponen actividades relacionadas con la construcción del centro de homotecia a partir del trazado de rectas que pasan por los puntos homólogos de dos figuras similares en una configuración homotética. De igual manera, no se plantean actividades que les permitan a los estudiantes la construcción de la imagen homotética de una figura a partir del trazado de

rectas paralelas. Tampoco se proponen actividades donde los estudiantes construyan el punto homólogo de un determinado punto de la figura inicial en una configuración homotética. Asimismo, no se presentan actividades relacionadas con la obtención de la relación numérica de homotecia. A partir de las longitudes de los lados de las figuras homotéticas y las longitudes de las líneas intermedias entre ellas creemos que las actividades deberían presentar configuraciones homotéticas con figuras no convexas y no solo con figuras convexas como se realiza tradicionalmente.

Consideramos que una propuesta en la cual se plantee una secuencia didáctica que aborde estas conclusiones planteadas permitiría el desarrollo heurístico de las figuras geométricas en una configuración homotética.

Así, los estudiantes, según su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos, podrían identificar figuras geométricas y el desarrollo de la aprehensión discursiva les permitiría a los estudiantes, relacionar dichas figuras con propiedades específicas. También a partir de su aprehensión secuencial, los estudiantes podrían plantear los pasos a seguir, en las construcciones geométricas realizadas. Finalmente, los estudiantes, según su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional), podrían identificar una ampliación, una reducción, una ampliación y rotación de 180° con respecto al centro de homotecia, una reducción y rotación de 180° con respecto al centro de homotecia o solo una rotación de 180° con respecto al centro de homotecia.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo presentamos una propuesta didáctica compuesta por cuatro actividades. Recomendamos ser desarrollada en parejas porque permitiría la interacción entre ellas al momento de desarrollar la actividad. Las actividades propuestas se realizaron con el apoyo del *software* GeoGebra. Presentamos el análisis, los objetivos, los conocimientos que los estudiantes pondrían en juego, las acciones del profesor y una posible solución matemática como parte de la organización del análisis matemático.

La propuesta de secuencia didáctica está dirigida a estudiantes del VII ciclo de EBR, especialmente al tercer grado de secundaria (catorce y quince años), en vista de la existencia de la propuesta del MINEDU, Lemonidis (1991) de abordar la homotecia como una transformación geométrica. Resaltamos que nuestras actividades propuestas en esta secuencia están construidas desde el punto de vista Lemonidis (1991) cuando subraya la importancia de la introducción de la noción de homotecia a partir de la construcción de puntos homólogos, trazado de rectas que pasan por puntos homólogos, centro de homotecia y determinación de razones de homotecia. Lo que permitiría, de acuerdo con Duval (1994), explorar las propiedades heurísticas de la figura y así interactuar con ella y realizar interpretaciones.

3.1. Análisis de la secuencia de actividades

A continuación, presentamos el análisis de la secuencia didáctica conformada por las cuatro actividades, que contemplan una posible solución matemática y posibles soluciones esperadas de los estudiantes.

Actividades

Presentamos las cuatro actividades.

Tabla 7

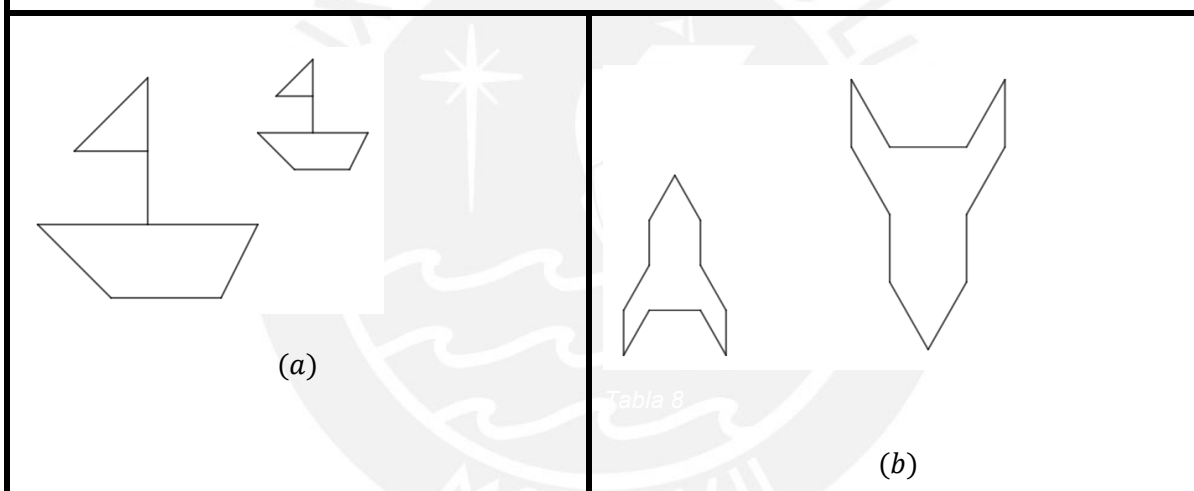
Se presenta la actividad 1

Actividad 1 Con apoyo del software GeoGebra

Respecto a la figura (a):

- Nombra todos los pares de puntos que ocupan el mismo lugar en la figura de la izquierda y la derecha, dichos puntos se denominan puntos homólogos.
- Traza rectas por cada par de puntos homólogos, a estas rectas las denominamos trazas.
- Ubica el punto de intersección de todas las rectas trazadas, dicho punto es denominado centro de homotecia.

Ahora, respecto a la figura (b) realizar las mismas instrucciones.



Fuente: Adaptado de Lemonidis, 1990, p. 173.

Objetivo de la actividad 1: Construir el centro de homotecia de las configuraciones (a) y (b) respectivamente con el uso del software GeoGebra.

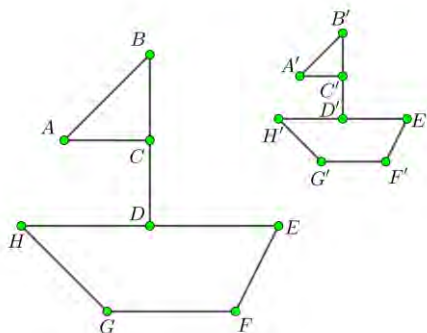
Posible solución Matemática de la actividad 1 (a)

Se observan dos figuras con la misma forma y orientación, pero de tamaños diferentes; se reconocen además sus respectivos puntos homólogos, considerando a la figura de la izquierda como la figura inicial y a la de la derecha como la figura similar. Los vértices de las figuras determinan los siguientes puntos homólogos representados por:

(A y A'), (B y B'), (C y C'), (D y D'), (E y E'), (F y F'), (G y G') y finalmente (H y H'), de acuerdo con lo presentado en la Figura 38.

Figura 38

Puntos homólogos en la configuración homotética 1 (a)

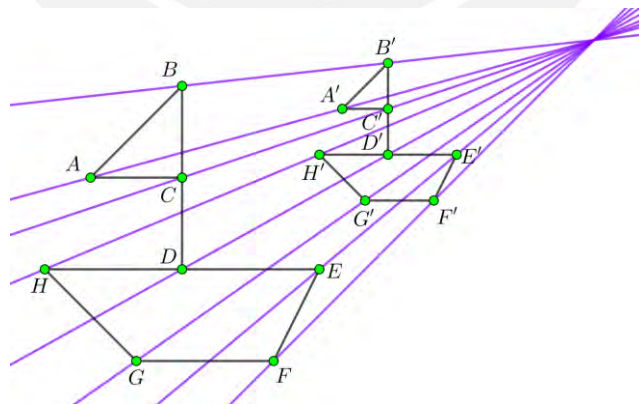


Fuente: Elaboración propia (2021).

Los lados homólogos \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ son paralelos, ya que las figuras de 1 (a) tienen la misma orientación. De acuerdo con el axioma 1, se trazan las rectas que unen los puntos homólogos representados por: (A y A'), (B y B'), (C y C'), (D y D'), (E y E'), (F y F'), (G y G') y finalmente (H y H'), como se evidencia en la Figura 39.

Figura 39

Rectas secantes en la configuración homotética 1 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).

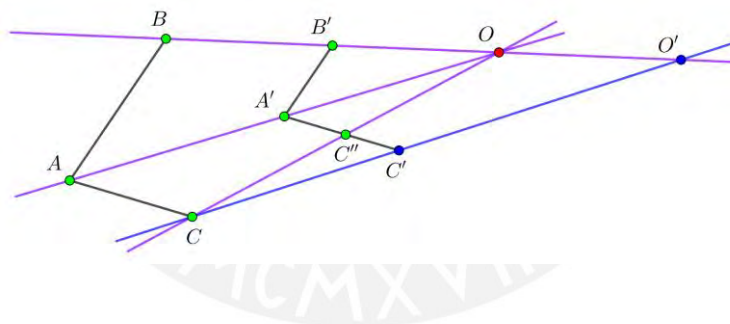
Dichas rectas se intersectan en un único punto " O " denominado centro de homotecia exterior.

Se demuestra la existencia del punto de intersección “ O ”, por reducción al absurdo. Suponiendo que las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son paralelas; se tendría que $AB = A'B'$ lo cual sería una contradicción, pues inicialmente las figuras se consideraron de tamaños diferentes. Ya que la elección de las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ se realizó arbitrariamente, se concluye que existe el punto de intersección “ O ”.

Se demuestra la unicidad del punto de intersección “ O ”, por reducción al absurdo. Suponiendo que las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ se intersectan en $O' \neq O$. Además, los lados homólogos \overline{AC} y $\overline{A'C'}$ son paralelos, pues las figuras de 1 (a) tienen la misma orientación. Se traza la recta \overline{OC} que intersecta al segmento $\overline{A'C'}$ en el punto $C'' \neq C'$. Luego por el teorema 5 (consecuencia de Tales) $C'' = H(O, k)(C)$ es decir C'' es el punto homólogo a C entonces $C'' = C'$, lo cual es una contradicción. Por tanto, las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ se intersectan en “ O ” y por la elección arbitraria de las mismas, se concluye que el punto de intersección “ O ” es único, según se presenta en la Figura 40.

Figura 40

Unicidad del centro de homotecia exterior 1 (a)

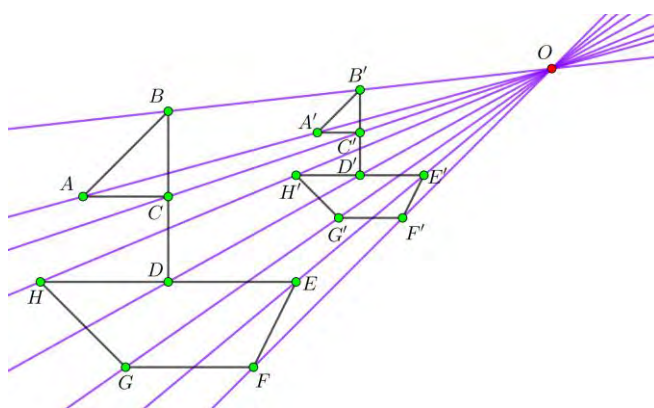


Fuente: Elaboración propia (2021).

Finalmente se puede afirmar que los puntos homólogos y el centro de homotecia exterior son colineales, tal cual se manifiesta en la Figura 41.

Figura 41

Puntos colineales en la configuración homotética 1 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Se procede en forma análoga, al considerar a la figura de la derecha como la figura inicial y a la de la izquierda como la figura similar.

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 1 (a)

La actividad se presenta en un fondo blanco del *software* GeoGebra, para realizar tratamientos en el registro figural y también, utilizar colores para diferenciar las unidades figurales que se van construyendo. Se propone en la actividad figuras no convexas, ya que su utilización se fundamenta en el DCN y los libros didácticos analizados.

Se espera que los estudiantes identifiquen barquitos, triángulos y cuadriláteros (con la misma forma, pero tamaños diferentes) y segmentos diferentes (como parte de rectas), por medio de su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos. Los estudiantes mediante su aprehensión secuencial, podrían realizar algunas consideraciones respecto a la construcción del centro de homotecia exterior, tales como:


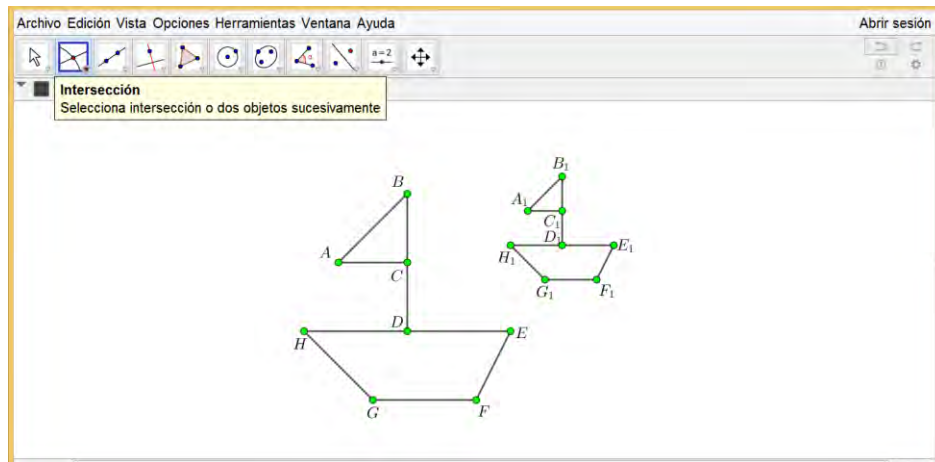
Usarían el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos en la figura de la izquierda y sus respectivos puntos homólogos en la figura de la derecha, esto es: A con A_1 , B con B_1 , C con C_1 , D con D_1 , E con E_1 , F con F_1 , G con G_1 y H con H_1 , conforme se muestra en la Figura 42.

Figura 42

Representación y nombramiento de puntos homólogos 1 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).


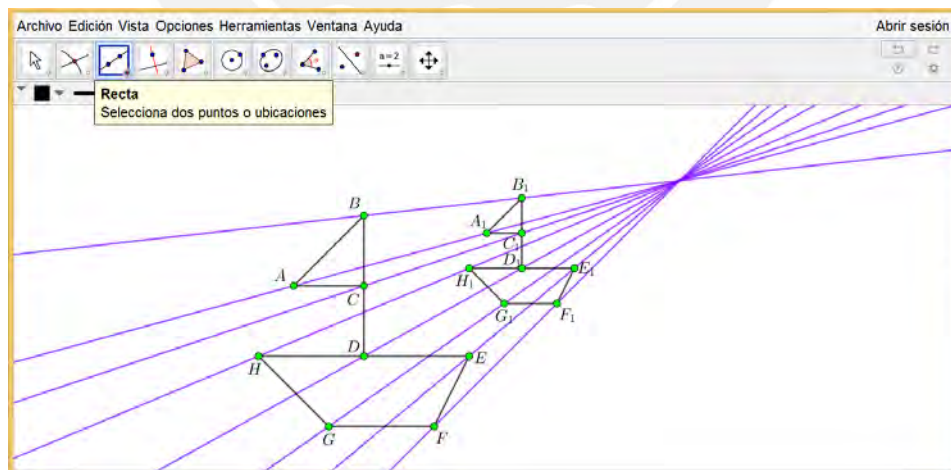
Los estudiantes con el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el icono ; trazarían las rectas que pasan por: A y A₁, B y B₁, C y C₁, D y D₁, E y E₁, F y F₁, G y G₁, y finalmente, por H y H₁, tal cual se evidencia en la Figura 43.

Figura 43

Trazado de rectas que pasan por los puntos homólogos 1 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).



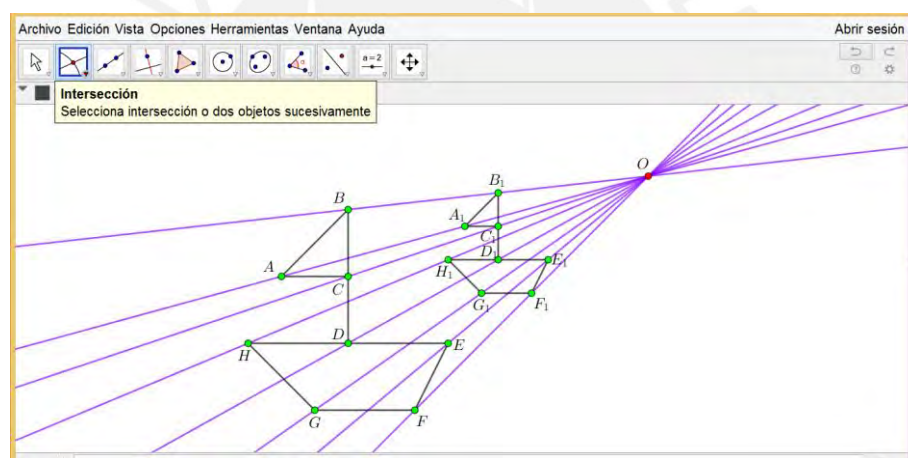
Por su aprehensión discursiva los estudiantes podrían conjeturar que “las rectas que pasan por sus respectivos puntos homólogos se intersectan en un único centro de homotecia exterior”. Justificarían su conjetura al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono . Asimismo, por su aprehensión discursiva conjeturarían que “dos puntos homólogos y el centro de homotecia exterior se ubican en una misma recta”. Mientras que la justificación sería posible con la utilización del comando “recta” del *software* GeoGebra representado con . Se espera también, que por su aprehensión operatoria (modificación óptica) los estudiantes identifiquen a la figura de la derecha como una figura similar (reducida) a la figura inicial de la izquierda, de acuerdo a lo presentado en la Figura 44.

Figura 44

Intersección de rectas que pasan por puntos homólogos 1 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Se espera que los estudiantes procedan en forma análoga, al considerar a la figura de la derecha como la figura inicial y a la de la izquierda como la figura similar.

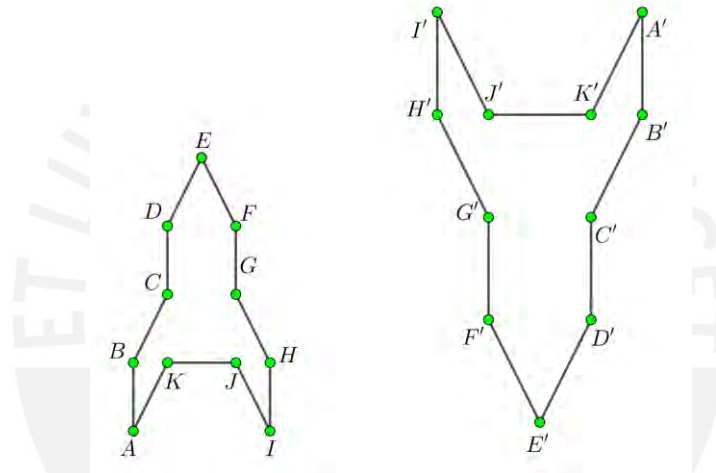
La intervención del docente sería por medio de preguntas a los estudiantes, generando que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “puntos homólogos”. El docente al término de la actividad, realizaría una socialización y expondría a los estudiantes las propiedades: de que el centro de homotecia exterior es único, y también, de que dos puntos homólogos y el centro de homotecia exterior están en una misma recta.

Posible solución Matemática de la actividad 1 (b)

Se presentan dos figuras con la misma forma, tamaños y orientaciones diferentes, ya que una de ellas ha rotado 180° respecto de la otra; se reconocen además sus respectivos puntos homólogos, considerando a la figura de la izquierda como la figura inicial y a la de la derecha como la figura similar. Los vértices de las figuras determinan los siguientes puntos homólogos representados por: $(A$ y $A')$, $(B$ y $B')$, $(C$ y $C')$, $(D$ y $D')$, $(E$ y $E')$, $(F$ y $F')$, $(G$ y $G')$, $(H$ y $H')$, $(I$ y $I')$, $(J$ y $J')$ y finalmente $(K$ y $K')$, según se presenta en la Figura 45.

Figura 45

Puntos homólogos en la configuración homotética 1 (b)

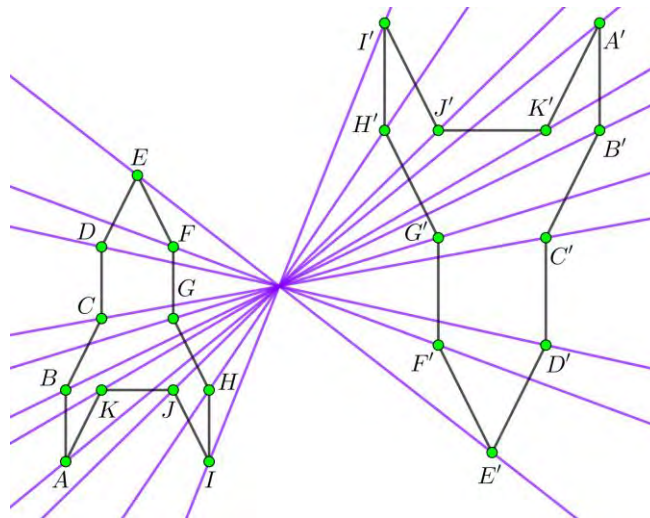


Fuente: Elaboración propia (2021).

Los lados homólogos \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ son paralelos, ya que una de las figuras de 1 (b) a rotado un ángulo de 180° respecto de la otra. Según el axioma 1, se trazan las rectas que unen dos puntos homólogos representados por: $(A$ y $A')$, $(B$ y $B')$, $(C$ y $C')$, $(D$ y $D')$, $(E$ y $E')$, $(F$ y $F')$, $(G$ y $G')$, $(H$ y $H')$, $(I$ y $I')$, $(J$ y $J')$ y finalmente $(K$ y $K')$, como se pone de manifiesto en la Figura 46.

Figura 46

Rectas secantes en la configuración homotética 1 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).

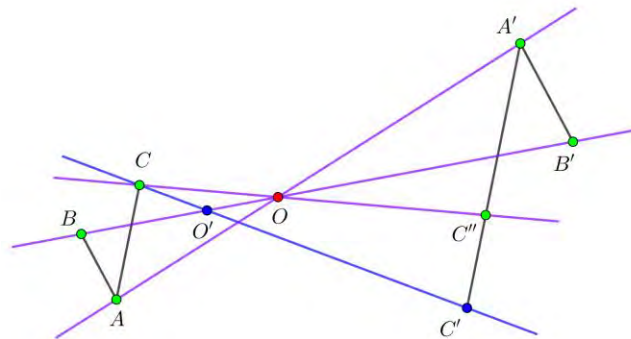
Las rectas trazadas se intersectan en un único punto “*O*” denominado centro de homotecia interior.

Se prueba la existencia del punto de intersección “*O*”, por reducción al absurdo. Suponiendo que las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ sean paralelas; se tendría que $AB = A'B'$ lo que sería una contradicción, pues al inicio las figuras se consideraron de diferente tamaño. Así pues, por la arbitrariedad en la elección de las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$, se concluye que existe el punto de intersección “*O*”.

Se demuestra la unicidad del punto de intersección “*O*”, por reducción al absurdo. Suponiendo que las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ se intersectan en $O' \neq O$. Además, los lados homólogos \overline{AC} y $\overline{A'C'}$ son paralelos, puesto que las figuras de 1 (b) tienen diferente orientación, ya que una de ellas a rotado un ángulo de 180° respecto de la otra. Se traza la recta $\overleftrightarrow{OC'}$ que intersecta al segmento $\overline{A'C'}$ en el punto $C'' \neq C'$. Luego por el teorema 5 (consecuencia de Tales) $C'' = H(O, k)(C)$ es decir C'' es el punto homólogo a C entonces $C'' = C'$, lo cual es una contradicción. Por tanto, las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ se intersectan en “*O*” y por la elección arbitraria de las mismas, se concluye que el punto de intersección “*O*” es único, tal como se presenta en la Figura 47.

Figura 47

Unicidad del centro de homotecia interior 1 (b)

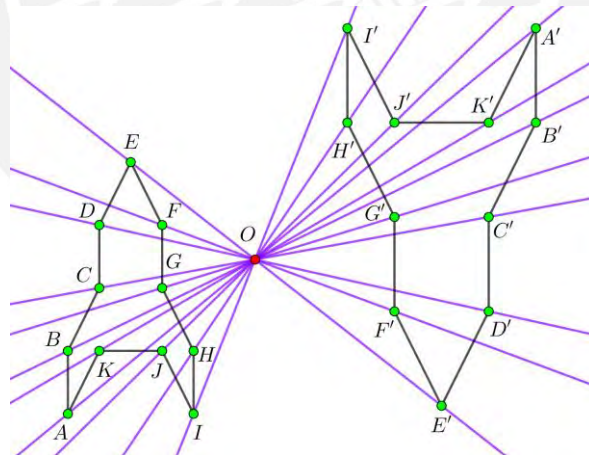


Fuente: Elaboración propia (2021).

Por último, se puede afirmar que los puntos homólogos y el centro de homotecia interior son colineales, según se evidencia en la Figura 48.

Figura 48

Puntos colineales en la configuración homotética 1 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Se procede en forma análoga, al considerar a la figura de la derecha como la figura inicial y a la de la izquierda como su imagen homotética.

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 1 (b)

La presentación de la actividad se apoya en el uso del *software* GeoGebra, a partir de un fondo blanco; para realizar tratamientos en el registro figural, así como utilizar colores para diferenciar las unidades figurales que se van construyendo. Se propone en la actividad figuras no convexas, puesto que su utilización se fundamenta en el DCN y los libros didácticos analizados.

Se espera que los estudiantes identifiquen dos cohetes de la misma forma, pero con tamaños y orientaciones diferentes, por medio de su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos. Los estudiantes por medio de su aprehensión secuencial, podrían realizar algunas consideraciones respecto a la construcción del centro de homotecia interior, así como:


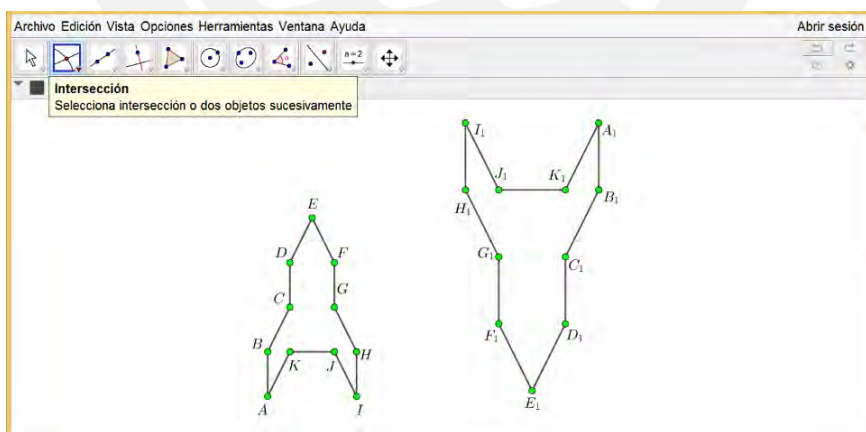

Usarían el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos en la figura de la izquierda y sus respectivos puntos homólogos en la figura de la derecha, es decir: A con A_1 , B con B_1 , C con C_1 , D con D_1 , E con E_1 , F con F_1 , G con G_1 y H con H_1 , de acuerdo a lo mostrado en la Figura 49.

Figura 49

Representación y nombramiento de puntos homólogos 1 (b)



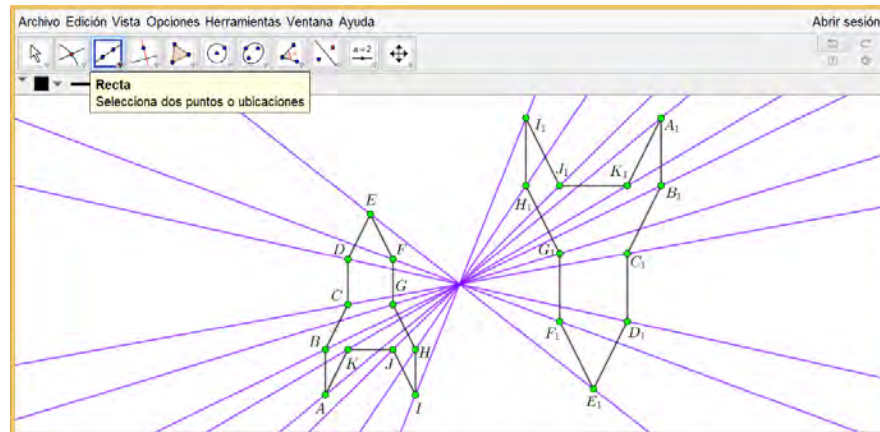
Fuente: Elaboración propia (2021).

Los estudiantes con el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; trazarían las rectas que pasan por: A y A_1 , B y B_1 , C y C_1 , D y D_1 , E y E_1 , F y F_1 , G

y G_1 , H y H_1 , I y I_1 , J y J_1 y finalmente, por K y K_1 , tal como se pone de manifiesto en la Figura 50.

Figura 50

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos 1 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).



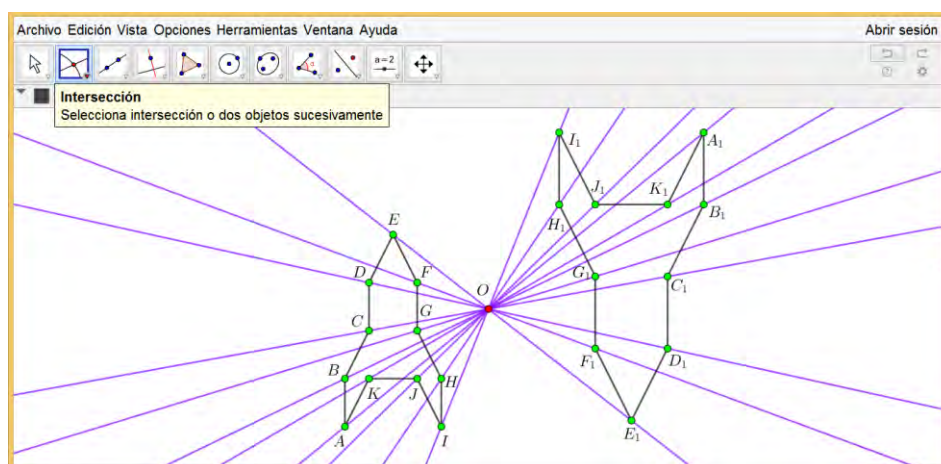
Por su aprehensión discursiva los estudiantes podrían conjeturar que “las rectas que pasan por sus respectivos puntos homólogos se intersectan en un único centro de homotecia interior”. Lograrían justificar su conjetura al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono . Asimismo, por su aprehensión discursiva conjeturarían que “dos puntos homólogos y el centro de homotecia interior se ubican en una misma recta”. Mientras que la justificación se alcanzaría con la utilización del comando “recta” del *software* GeoGebra representado con . Se espera también, que por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional) los estudiantes identifiquen a la figura de la derecha como una figura similar (ampliada y rotada 180°) a la figura inicial de la izquierda, de acuerdo a lo presentado en la Figura 51.

Figura 51

Intersección de rectas que pasan por puntos homólogos 1 (b).



Fuente: Elaboración propia (2021).

Los estudiantes procederían en forma análoga, al considerar a la figura de la derecha como la figura inicial y a la de la izquierda como la figura similar.

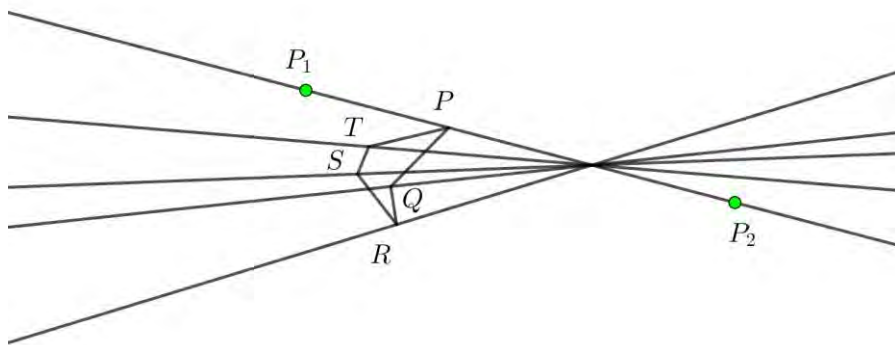
El docente intervendría realizando preguntas dirigidas a los estudiantes, posibilitando que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “puntos homólogos”. De igual manera al término de la actividad, el docente realizaría una socialización y expondría a los estudiantes las propiedades: de que el centro de homotecia interior es único, y también, de que dos puntos homólogos y el centro de homotecia interior están en una misma recta.

Tabla 8:

Se presenta la actividad 2

Actividad 2 Con apoyo del software GeoGebra

Si P_1 es un punto homólogo al punto P entonces construye una figura similar a la figura $PQRST$ que pase por P_1 . Luego realiza lo mismo respecto al punto P_2 ; sabiendo que P_2 también es homólogo a P .



Fuente: Adaptado de Lemonidis, 1990, p. 178.

Objetivo de la actividad 2: Construir las figuras similares a la figura $PQRST$ que pasan por P_1 y P_2 respectivamente, con el uso del software GeoGebra.

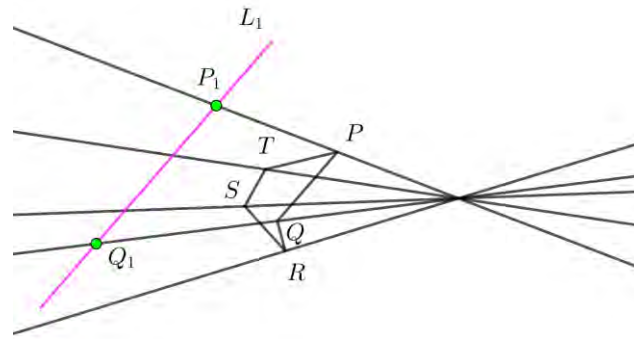
Posible solución Matemática de la actividad 2 (a), figura similar que pasa por P_1

Una figura similar a la figura $PQRST$ que pase por P_1 , donde P_1 sea homólogo a P , debe tener la misma forma y orientación, y tamaño igual o diferente. Por tanto, para construir dicha figura similar debemos trazar rectas paralelas a los lados de la figura inicial.

De acuerdo con el axioma 2, trazamos la recta \vec{L}_1 paralela al segmento \overline{PQ} que pasa por P_1 ; intersectamos ahora la recta \vec{L}_1 con la recta que contiene a Q obteniendo el punto Q_1 , como se pone de manifiesto en la Figura 52.

Figura 52

Punto de intersección Q_1 entre las rectas \vec{L}_1 y \vec{QQ}_1

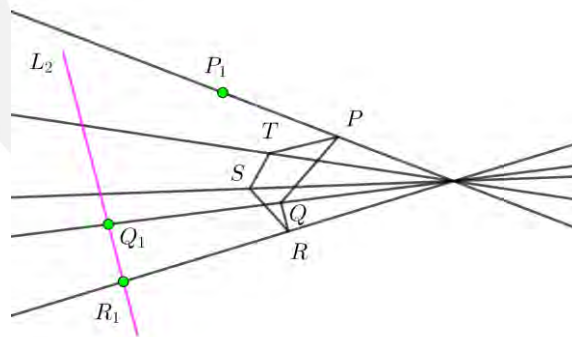


Fuente: Elaboración propia (2021).

Del mismo modo, trazamos la recta paralela \vec{L}_2 al lado \vec{QR} que pasa por Q_1 ; e intersectamos la recta \vec{L}_2 y la recta que contiene a R determinando el punto R_1 , tal cual se presenta en la Figura 53.

Figura 53

Punto de intersección R_1 entre las rectas \vec{L}_2 y \vec{RR}_1

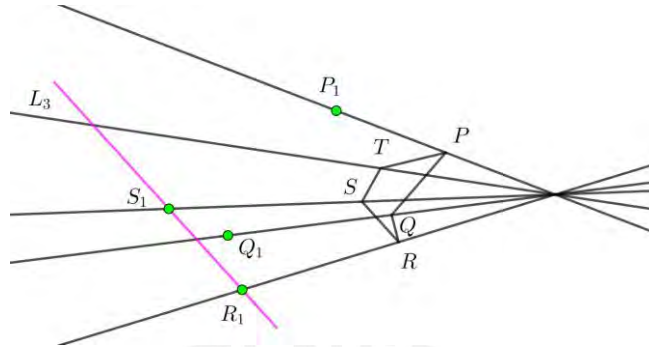


Fuente: Elaboración propia (2021).

Ahora, trazamos la recta paralela \vec{L}_3 al segmento \vec{SR} que pasa por R_1 ; y al intersectar la recta \vec{L}_3 con la recta que pasa por S obtenemos el punto S_1 , de acuerdo a lo mostrado en la Figura 54.

Figura 54

Punto de intersección S_1 entre las rectas \vec{L}_3 y \vec{SS}_1

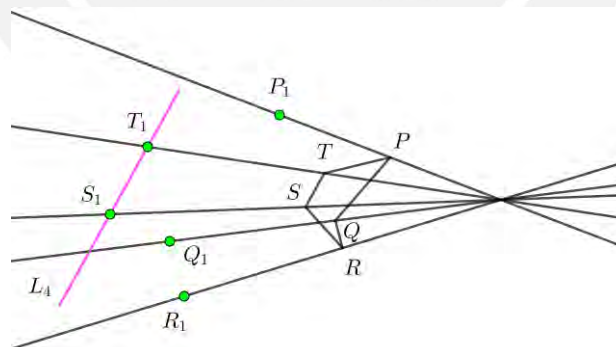


Fuente: Elaboración propia (2021).

Luego trazamos la recta \vec{L}_4 que pasa por S_1 y que es paralela al segmento \vec{ST} ; e intersectamos ahora la recta \vec{L}_4 y la recta que contiene a T determinando el punto T_1 , como se presenta en la Figura 55.

Figura 55

Punto de intersección T_1 entre las rectas \vec{L}_4 y \vec{TT}_1

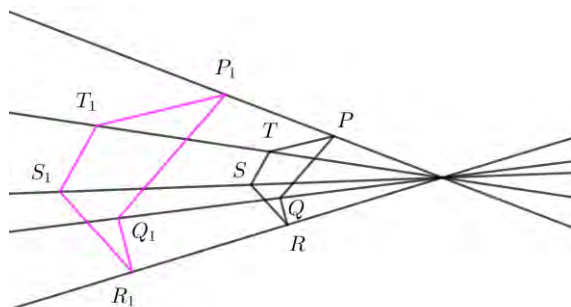


Fuente: Elaboración propia (2021).

Finalmente por el teorema de Desargues: como $\vec{P_1Q_1} \parallel \vec{PQ}$ y $\vec{Q_1R_1} \parallel \vec{QR}$ entonces $\vec{P_1R_1} \parallel \vec{PR}$, además como $\vec{P_1R_1} \parallel \vec{PR}$ y $\vec{R_1S_1} \parallel \vec{RS}$ entonces $\vec{P_1S_1} \parallel \vec{PS}$, también como $\vec{P_1S_1} \parallel \vec{PS}$ y $\vec{S_1T_1} \parallel \vec{ST}$ entonces $\vec{P_1T_1} \parallel \vec{PT}$; así tenemos la figura $P_1Q_1R_1S_1T_1$ similar (ampliada) a la figura inicial $PQRST$, tal cual se evidencia en la Figura 56.

Figura 56

Figura $P_1Q_1R_1S_1T_1$ similar a la figura $PQRST$




Fuente: Elaboración propia (2021).

Procedemos en forma análoga, si realizamos la construcción de la figura similar en sentido anti horario respecto a P_1 .

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 2 (a), figura similar que pasa por el punto P_1

Se propone la actividad con el apoyo del *software* GeoGebra, en un fondo blanco; para la realización de tratamientos a la figura y el uso de colores para diferenciar las unidades figural que emergen en la construcción. Se presenta en la actividad una figura no convexa, de acuerdo con el DCN y los libros didácticos analizados.

Se espera que, por medio de su aprehensión perceptiva, los estudiantes identifiquen un pentágono, rectas secantes y dos puntos, pues según el DCN y los libros didácticos analizados, estos conocimientos se abordaron en grados previos al 3er grado de secundaria, grado en el cual desarrollamos nuestra investigación. En relación con la construcción de la figura similar a la figura $PQRST$, que pase por P_1 , los estudiantes a partir de su aprehensión secuencial mostrarían algunas acciones:

Los estudiantes podrían considerar que, tomando como base a sus conocimientos previos, los lados homólogos entre la figura $PQRST$ y la figura similar son paralelos. Usarían el comando “paralela” del *software* GeoGebra, representado por el ícono ; trazarían una recta, la representarían por \overline{m} paralela al segmento \overline{PT} que pase por el punto P_1 . Además, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra, representado por el ícono


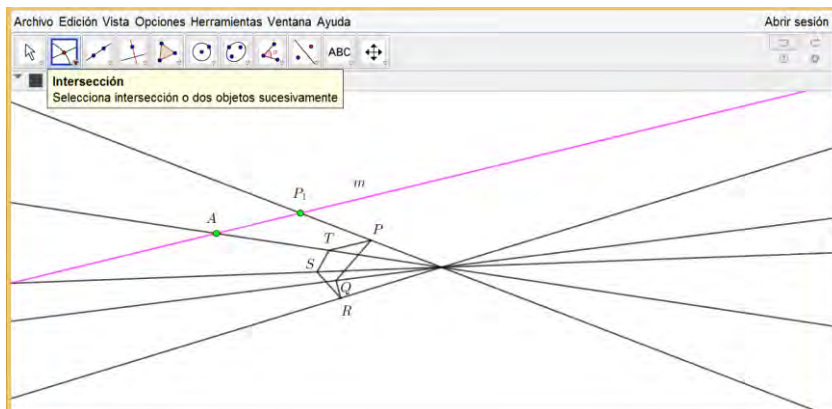
; los estudiantes identificarían y representarían el punto A como “cruz” entre la recta, representada por \vec{m} y la recta que contiene a T , tal cual es presentado en la Figura 57.

Figura 57

Identificación y representación del punto A



Fuente: Elaboración propia (2021).



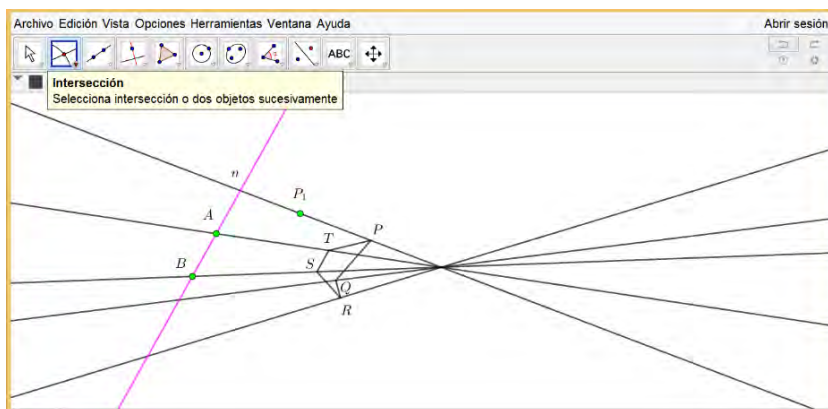
Se espera que con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por el ícono , los estudiantes tracen una recta representada por \vec{n} paralela al segmento \overline{TS} que pasa por el punto representado por A . Identificarían y representarían con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono , el punto B como “cruz” entre la recta representada por \vec{n} y la recta que pasa por S , tal como se evidencia en la figura 58.

Figura 58

Identificación y representación del punto B



Fuente: Elaboración propia (2021).



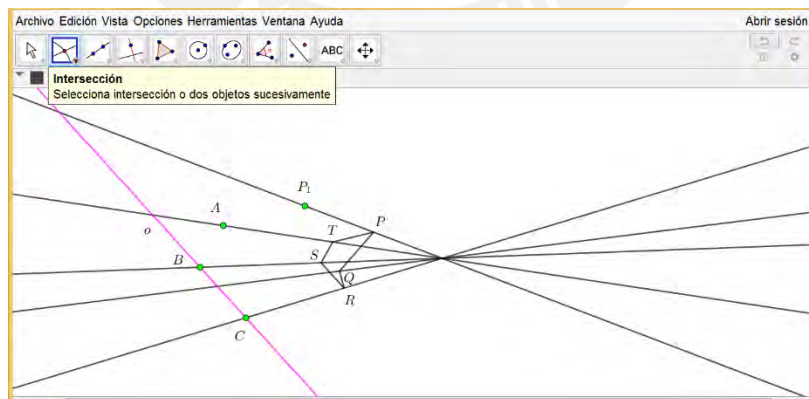
Con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado con , los estudiantes trazarían una recta representada por \vec{o} paralela al segmento \overline{SR} que contenga al punto B. Luego, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con , identificarían y representarían el punto C como “cruz” entre la recta representada por \vec{o} y la recta que pasa por R, tal cual se muestra en la Figura 59.

Figura 59

Identificación y representación del punto C



Fuente: Elaboración propia (2021).



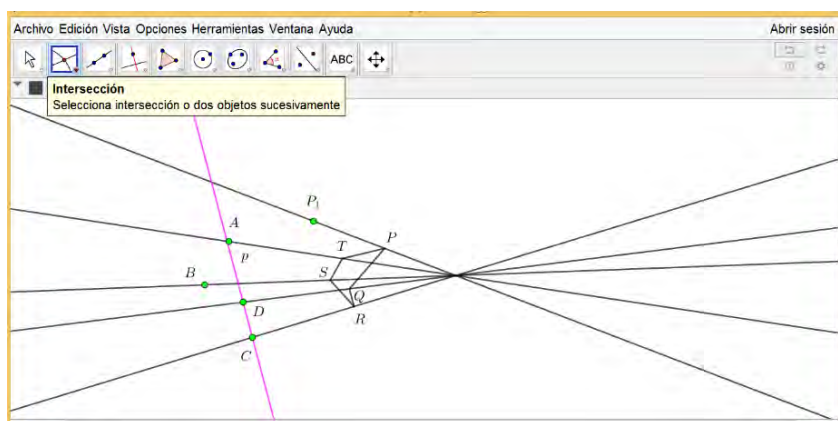
Los estudiantes con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado con , trazarían una recta representada por \vec{p} paralela al segmento \overline{RQ} que pase por el punto C . Además, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con , identificarían y representarían el punto Q como “cruz” entre la recta representada por \vec{p} y la recta que pasa por Q , como se presenta en la Figura 60.

Figura 60

Identificación y representación del punto D



Fuente: Elaboración propia (2021).



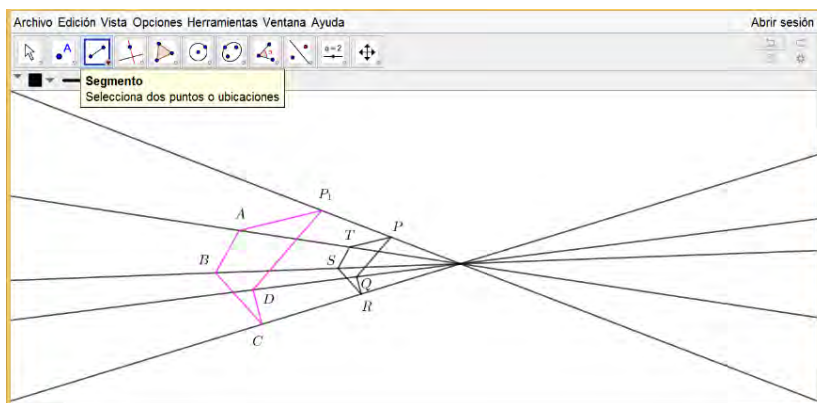
Esperamos que, al unir los puntos P_1 , A , B , C y D mediante los segmentos $\overline{P_1A}$, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y $\overline{DP_1}$ con el comando “segmento” del *software* GeoGebra representado por , los estudiantes construyan la figura P_1ABCD . Luego, los estudiantes por su aprehensión discursiva, conjeturarían que “el segmento $\overline{DP_1}$ es paralelo al segmento \overline{QP} ” y justificarían esta conjetura al utilizar el comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por . Mediante su aprehensión operatoria (modificación óptica) los estudiantes identificarían a la figura P_1ABCD similar (ampliada) a la figura inicial $PTSRQ$, de acuerdo a lo presentado en la Figura 61.

Figura 61

Construcción de la figura P_1ABCD similar a la figura $PTSRQ$



Fuente: Elaboración propia (2021).

Se espera que los estudiantes procedan en forma análoga, si construyen la figura similar a la figura $PTSRQ$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

El docente intervendrá realizando preguntas a los estudiantes, esto permitirá que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “figuras similares”. Asimismo, al término de la actividad el docente realizaría una socialización y expondría a los estudiantes la propiedad de que los lados homólogos en una configuración homotética son paralelos.

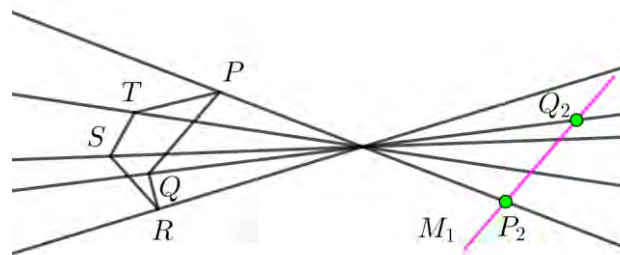
Posible solución Matemática de la actividad 2 (b), figura similar que pasa por P_2

Una figura similar a la figura $PQRST$ que pase por P_2 , donde P_2 sea homólogo ha P , debe tener la misma forma, tamaño igual o diferente y haber rotado 180° . Por tanto, para construir dicha figura similar, debemos trazar rectas paralelas a los lados de la figura inicial.

De acuerdo al axioma 2, trazamos la recta $\overrightarrow{M_1}$ paralela al segmento \overline{PQ} que pasa por P_2 ; intersectamos ahora la recta $\overrightarrow{M_1}$ con la recta que contiene a Q obteniendo el punto Q_2 , como se muestra en la figura 62.

Figura 62

Punto de intersección Q_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_1}$ y $\overleftrightarrow{QQ_2}$

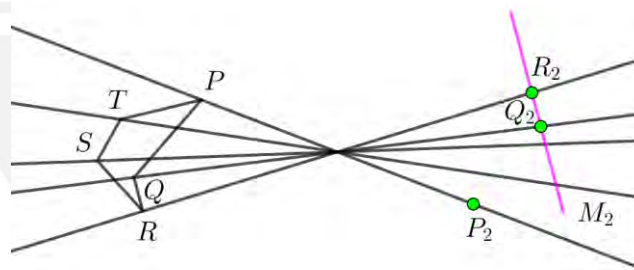


Fuente: Elaboración propia (2021).

Del mismo modo, trazamos la recta paralela $\overleftrightarrow{M_2}$ al lado \overline{QR} que pasa por Q_2 ; e intersectamos la recta $\overleftrightarrow{M_2}$ y la recta que contiene a R determinando el punto R_2 , tal como se muestra en la Figura 63.

Figura 63

Punto de intersección R_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_2}$ y $\overleftrightarrow{RR_2}$

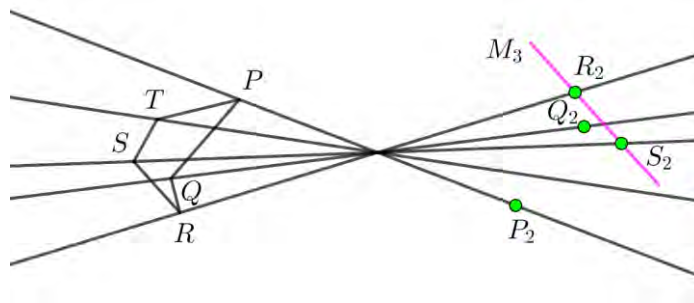


Fuente: Elaboración propia (2021).

Ahora trazamos la recta paralela $\overleftrightarrow{M_3}$ al segmento \overline{RS} que pasa por R_2 ; y al intersectar la recta $\overleftrightarrow{M_3}$ con la recta que pasa por S obtenemos el punto S_2 , como se evidencia en la Figura 64.

Figura 64

Punto de intersección S_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_3}$ y $\overleftrightarrow{SS_2}$

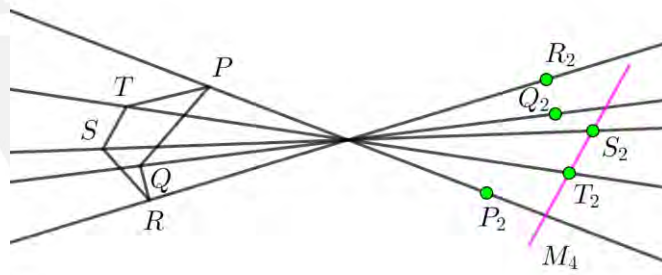


Fuente: Elaboración propia (2021).

Luego trazamos la recta $\overleftrightarrow{M_4}$ que pasa por S_2 y que es paralela al segmento \overline{ST} ; e intersectamos ahora la recta $\overleftrightarrow{M_4}$ y la recta que contiene a T determinando el punto T_2 , según se pone de manifiesto en la Figura 65.

Figura 65

Punto de intersección T_2 entre las rectas $\overleftrightarrow{M_4}$ y $\overleftrightarrow{TT_2}$.

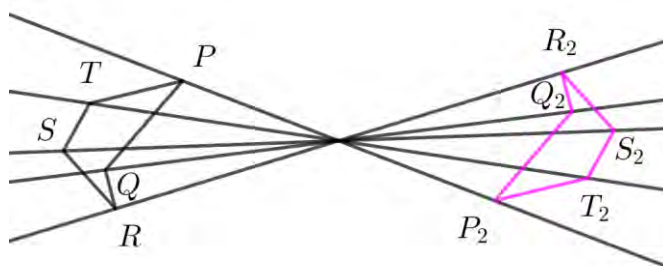


Fuente: Elaboración propia (2021).

Finalmente por el teorema de Desargues: como $\overline{P_2Q_2} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{Q_2R_2} \parallel \overline{QR}$ entonces $\overline{P_2R_2} \parallel \overline{PR}$, además como $\overline{P_2R_2} \parallel \overline{PR}$ y $\overline{R_2S_2} \parallel \overline{RS}$ entonces $\overline{P_2S_2} \parallel \overline{PS}$, también como $\overline{P_2S_2} \parallel \overline{PS}$ y $\overline{S_2T_2} \parallel \overline{ST}$ entonces $\overline{P_2T_2} \parallel \overline{PT}$; así tenemos la figura $P_2Q_2R_2S_2T_2$ similar (rotada 180°) de la figura inicial $PQRST$, De acuerdo a lo mostrado en la Figura 66.

Figura 66

Figura $P_2Q_2R_2S_2T_2$ similar a la figura $PQRST$



Fuente: Elaboración propia (2021).

Procedemos en forma análoga, si realizamos la construcción de la figura similar en sentido anti horario respecto a P_2 .

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 2 (b), figura similar que pasa por P_2 :

Se plantea la actividad en un fondo blanco del *software* GeoGebra, para realizar tratamientos en el registro figural y usar colores para diferenciar las unidades figurales que aparecen en la construcción. Se propone en la actividad una figura no convexa, de acuerdo con el DCN y los libros didácticos analizados.

Se espera que, por medio de su aprehensión perceptiva, los estudiantes identifiquen un pentágono, rectas secantes y dos puntos; puesto que, según el DCN y los libros didácticos analizados, estos conocimientos fueron abordados en los grados precedentes al 3er grado de secundaria, grado en el que realizamos nuestra investigación. Respecto a la construcción de la figura similar a la figura $PQRST$, que pase por P_2 , los estudiantes a partir de su aprehensión secuencial mostrarían algunas acciones:



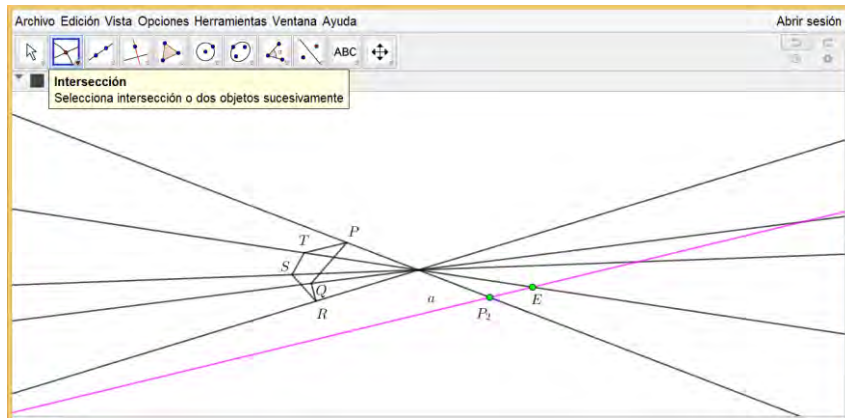
Los estudiantes podrían considerar que, a partir de sus conocimientos previos, los lados homólogos entre la figura $PQRST$ y la figura similar son paralelos. Emplearían el comando “paralela” del *software* GeoGebra, representado por ; trazarían una recta que representarían por \vec{a} , paralela al segmento \overline{PT} y que pase por el punto P_2 . Asimismo, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra, representado por ; los estudiantes identificarían y representarían el punto E como “cruz” entre la recta representada por \vec{a} y la recta que contiene a T , según lo manifestado en la Figura 67.

Figura 67

Punto de intersección E entre las rectas \vec{a} y \overleftrightarrow{TE}



Fuente: Elaboración propia (2021).



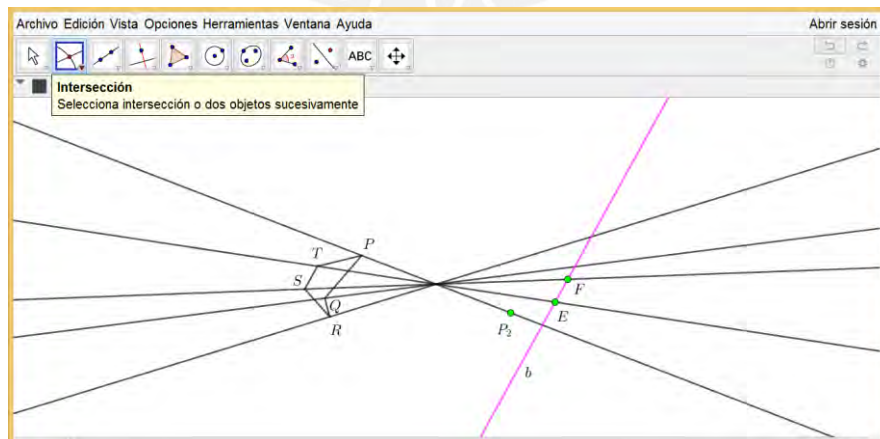
Se espera que, con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por ; los estudiantes tracen una recta representada por \vec{b} , paralela al segmento \overline{TS} y que pase por el punto representado con E . Luego con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por ; identificarían y representarían el punto F como “cruz” entre la recta representada por \vec{n} y la recta que pasa por S , tal como se evidencia en la Figura 68.

Figura 68

Punto de intersección F entre las rectas \vec{b} y \overleftrightarrow{SF}



Fuente: Elaboración propia (2021).



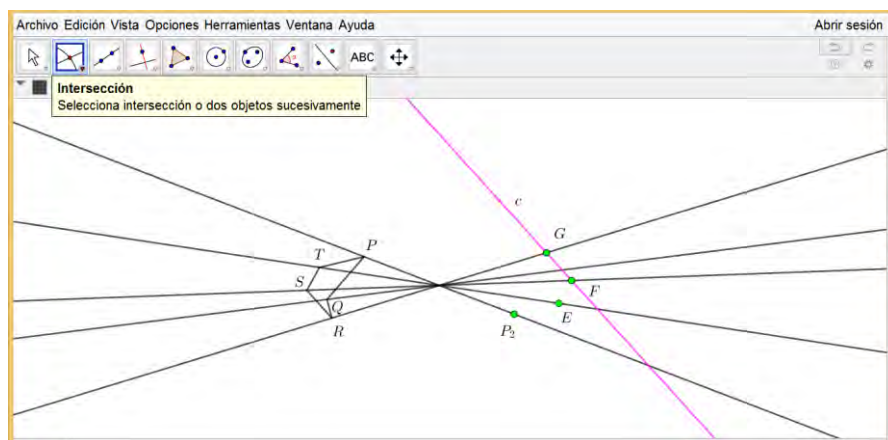
Al emplear el comando “paralela” del *software* GeoGebra representado con ; los estudiantes podrían trazar una recta representada por \vec{c} , paralela al segmento \overline{SR} y que contiene al punto F . También, al emplear el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con ; identificarían y representarían el punto G como “cruz” entre la recta representada por \vec{c} y la recta que pasa por R , como se presenta en la Figura 69.

Figura 69

Punto de intersección G entre las rectas \vec{c} y \overrightarrow{RG}



Fuente: Elaboración propia (2021).



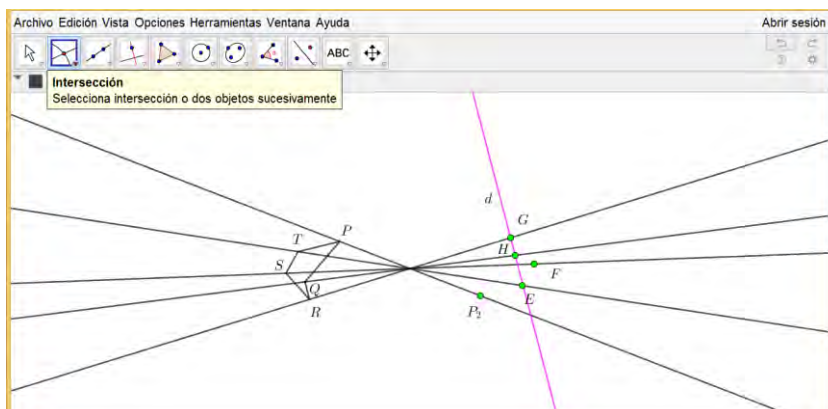
Los estudiantes, al utilizar el comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; trazarían una recta representada por \vec{p} , paralela al segmento \overline{RQ} y que pase por el punto G . Además, al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; identificarían y representarían el punto Q como “cruz” entre la recta representada por \vec{d} y la recta que pasa por Q , según se muestra en la Figura 70.

Figura 70

Punto de intersección H entre las rectas \vec{d} y \vec{QH}



Fuente: Elaboración propia (2021).



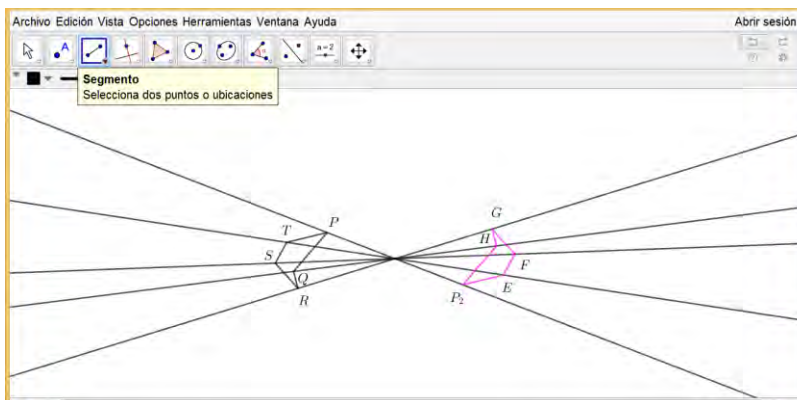
Esperamos que al unir los puntos P_2 , E , F , G y H mediante los segmentos $\overline{P_2E}$, \overline{EF} , \overline{FG} , \overline{GH} y $\overline{HP_2}$ con el comando “segmento” del software GeoGebra representado por ; los estudiantes construyan la figura P_2EFGH . Además, por su aprehensión discursiva conjeturarían que “el segmento $\overline{HP_2}$ es paralelo al segmento \overline{QP} ” y justificarían esta conjetura con el uso del comando “paralela” del software GeoGebra representado por . Mediante su aprehensión operatoria (modificación óptica) los estudiantes podrían identificar a la figura P_2EFGH como similar (rotada 180°) a la figura inicial $PTSRQ$, conforme se muestra en la Figura 71.

Figura 71

Figura P_2EFGH similar a la figura $PTSRQ$



Fuente: Elaboración propia (2021).

Los estudiantes procederían en forma análoga, si construyeran la figura similar a la figura $PTSRQ$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

La intervención del docente se daría a partir de la formulación de preguntas dirigidas a los estudiantes, esto posibilitaría que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “figuras similares”. De igual manera, al término de la actividad el docente realizaría una socialización y expondría a los estudiantes la propiedad de que los lados homólogos en una configuración homotética son paralelos.

Tabla 9:

Se presenta la actividad 3.

Actividad 3 Con apoyo del *software* GeoGebra

Dadas las circunferencias, el punto A en la circunferencia de la izquierda, el punto C en el interior de dicha circunferencia y los puntos tanto B como D en la circunferencia de la derecha. Luego:

- (a) Si el punto A tiene como homólogo al punto B entonces ubica el punto homólogo al punto C .
- (b) Si el punto A tiene como homólogo al punto D entonces ubica el punto homólogo al punto C .

Fuente: Adaptado de Lemonidis, 1990, p. 182.

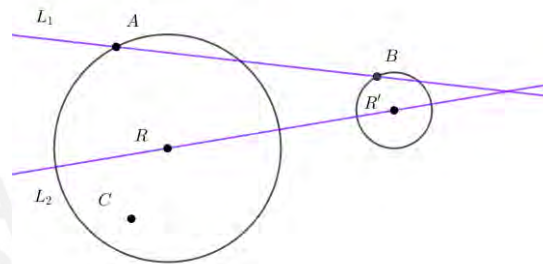
Objetivo de la actividad 3: Construir el punto homólogo del punto C en las configuraciones (a) y (b) respectivamente, con el uso del *software* GeoGebra.

Posible solución Matemática de la actividad 3 (a)

En la actividad 3 (a) se observan dos circunferencias, pero de tamaños diferentes; se reconocen además sus respectivos centros (R y R') como puntos homólogos. De acuerdo al axioma 1, trazamos la recta L_1 que pasa por los puntos homólogos A y B ; de la misma forma trazamos la recta L_2 que pasa por los puntos R y R' , tal como se muestra en la Figura 72.

Figura 72

Rectas secantes en la configuración homotética de 3 (a)

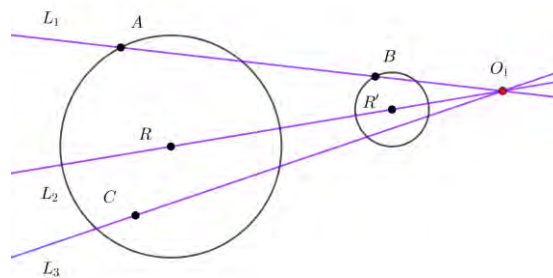


Fuente: Elaboración propia (2021).

Intersectamos las rectas L_1 y L_2 en el punto O_1 denominado centro de homotecia exterior. De acuerdo al axioma 1, trazamos ahora la recta L_3 que pasa por los puntos C y O_1 , según lo mostrado en la Figura 73.

Figura 73

Centro exterior en la configuración homotética de 3 (a)



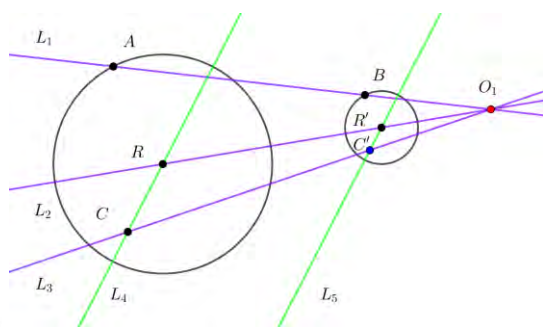
Fuente: Elaboración propia (2021).

De acuerdo con el axioma 1, trazamos la recta L_4 que pasa por los puntos R y C . Luego a partir del axioma 2, trazamos la recta L_5 paralela a la recta L_4 y que pasa por el punto R' . Intersectamos las rectas L_3 y L_5 determinando el punto C' . Por el teorema 5

(consecuencia de Tales) $C' = H(O, k)(C)$ es decir, C' es punto homólogo de C . Además, afirmamos que las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos puntos homólogos en la figura similar son paralelas, como se evidencia en la Figura 74.

Figura 74

Rectas paralelas en la configuración homotética de 3 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 3 (a)

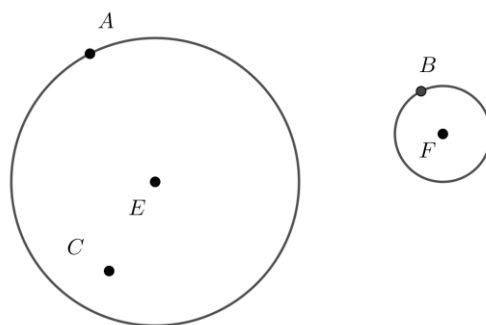
Se propone la actividad con el apoyo del *software* GeoGebra, a partir de un fondo blanco; que permita realizar tratamientos a la figura y utilizar colores para diferenciar las unidades figurales que emergen en la construcción.

Se espera que, por medio de su aprehensión perceptiva los estudiantes identifiquen dos circunferencias de diferente tamaño, puntos sobre dichas circunferencias y sus respectivos interiores; ya que, según el DCN y los libros didácticos analizados, estos conocimientos se plantearon en grados previos al 3er grado de secundaria, grado en el que se desarrolla nuestra investigación. En relación a la construcción del punto homólogo al punto C , los estudiantes según su aprehensión secuencial mostrarían algunas consideraciones:

Los estudiantes afirmarían que, a partir de sus conocimientos previos, los centros de las circunferencias son puntos homólogos. Identificarían y representarían dichos centros por E y F , tal como se evidencia en la Figura 75.

Figura 75

Nombramiento de los centros de las circunferencias en 3 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).



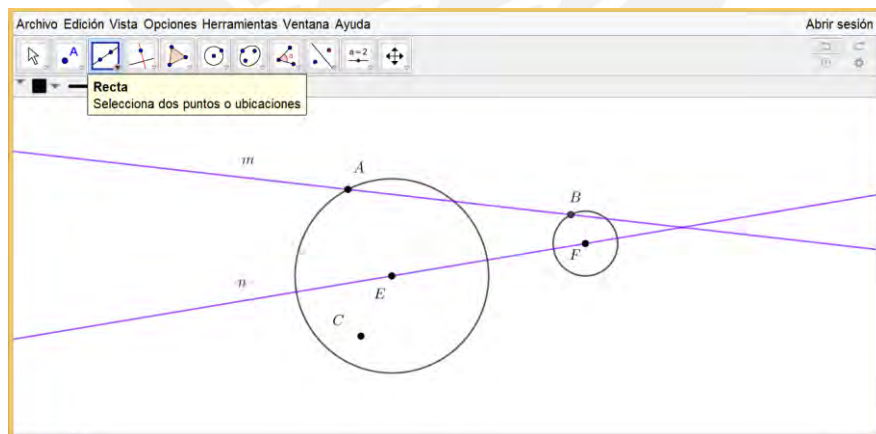
Con el uso del comando “recta” del software GeoGebra representado con el ícono ; los estudiantes podrían trazar una recta representada por \vec{m} que pasa por los puntos A y B . Asimismo, al utilizar el comando “recta” del software GeoGebra representado con el ícono ; trazarían una recta representada por \vec{n} que pasa por los puntos E y F , según se evidencia en la Figura 76.

Figura 76

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en 3 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).



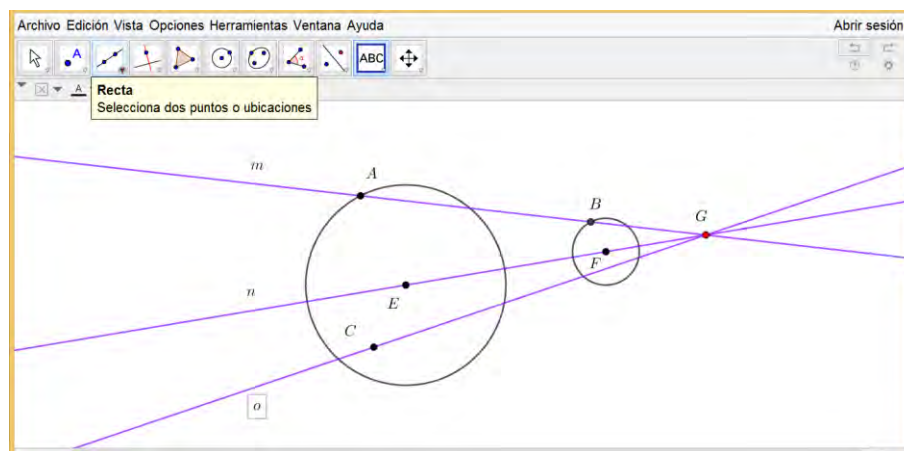
Los estudiantes al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; identificarían y representarían el punto de intersección “G” de las rectas representadas por \vec{m} y \vec{n} . De igual forma, con el uso del comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; trazarían una recta representada por \vec{o} que pasa por los puntos C y G, como se pone de manifiesto en la Figura 77.

Figura 77

Trazado de recta que pasa por los puntos C y G en 3 (a).



Fuente: Elaboración propia (2021).




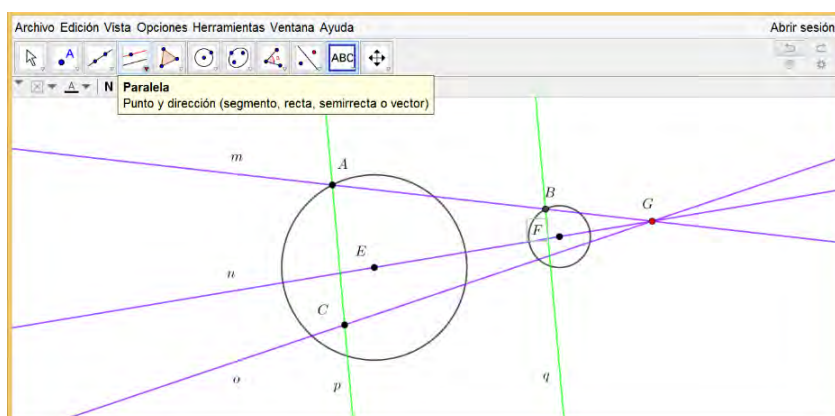
También utilizando el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por ; trazarían una recta representada por \vec{p} que pasa por los puntos A y C. Luego con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por ; podrían trazar una recta representada por \vec{q} que pasa por el punto B, paralela a la recta representada por \vec{p} . Además, por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que “las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas” y justificarían esta conjetura con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por , tal como se muestra en la Figura 78.

Figura 78

Trazado de rectas paralelas \vec{p} y \vec{q} en 3 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).


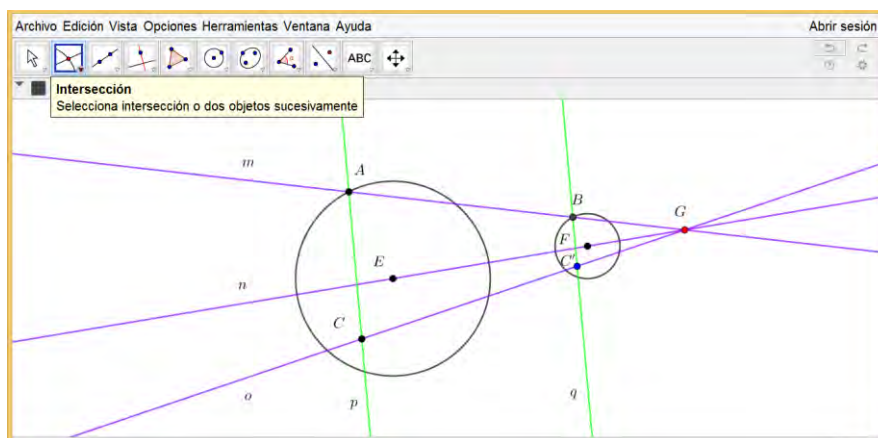



Se espera que los estudiantes al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con ; identificarían y representarían el punto de intersección C' de las rectas representadas por \vec{d} y \vec{q} , donde C' sería el punto homólogo del punto C ; a partir de las conjeturas “las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas” y “dos puntos homólogos y el centro de homotecia exterior están en una misma recta”. Asimismo, por su aprehensión operatoria (modificación óptica) los estudiantes podrían identificar a la figura de la derecha como similar (reducida) de la figura inicial de la izquierda, según se presenta en la Figura 79.

Figura 79

Punto de intersección C' entre las rectas \vec{d} y \vec{q} en 3 (a)



Fuente: Elaboración propia (2021).

En forma análoga utilizando el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por ; los estudiantes trazarían una recta representada por \vec{p} que pasa por los puntos C y E . Luego con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por ; podrían trazar una recta representada por \vec{q} que pasa por el punto F , paralela a la recta representada por \vec{p} . Luego con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con ; identificarían y representarían el punto de intersección C' de las rectas representadas por \vec{d} y \vec{q} , donde C' sería el punto homólogo del punto C .

El docente intervendría realizando preguntas a los estudiantes, esto permitiría que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “puntos homólogos”. De igual manera, al término de la actividad el docente realizaría una socialización y expondría a los estudiantes la propiedad de que las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas.

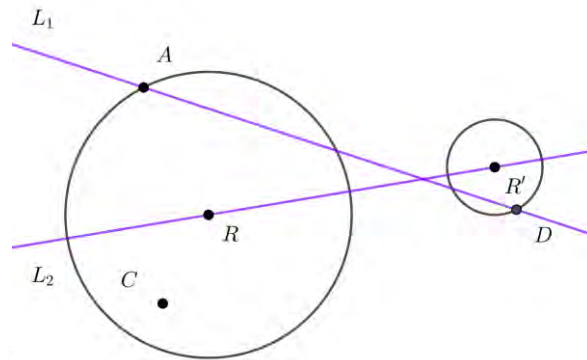
Posible solución Matemática de la actividad 3 (b)

En la actividad 3 (b) se observan dos circunferencias, pero de tamaños diferentes; se reconocen además sus respectivos centros (R y R') como puntos homólogos. De acuerdo con el axioma 1, trazamos la recta L_1 que pasa por los puntos homólogos A y D ; de la

misma forma trazamos la recta L_2 que pasa por los puntos R y R' , De acuerdo con lo mostrado en la Figura 80.

Figura 80

Rectas secantes en la configuración homotética de 3 (b)

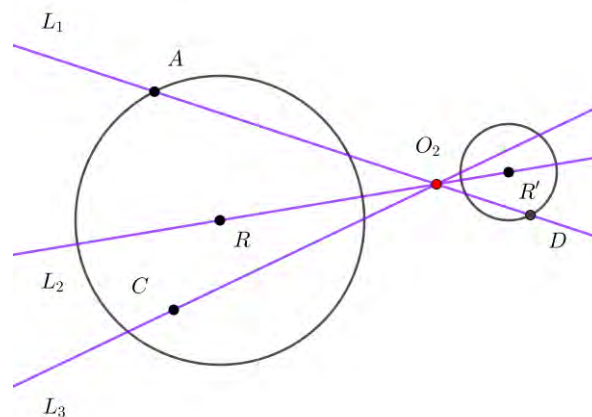


Fuente: Elaboración propia (2021).

Intersectamos las rectas L_1 y L_2 en el punto " O_2 " denominado centro de homotecia interior. De acuerdo al axioma 1, trazamos ahora la recta L_3 que pasa por los puntos C y O_2 , tal cual se presenta en la Figura 81.

Figura 81

Centro interior en la configuración homotética de 3 (b)

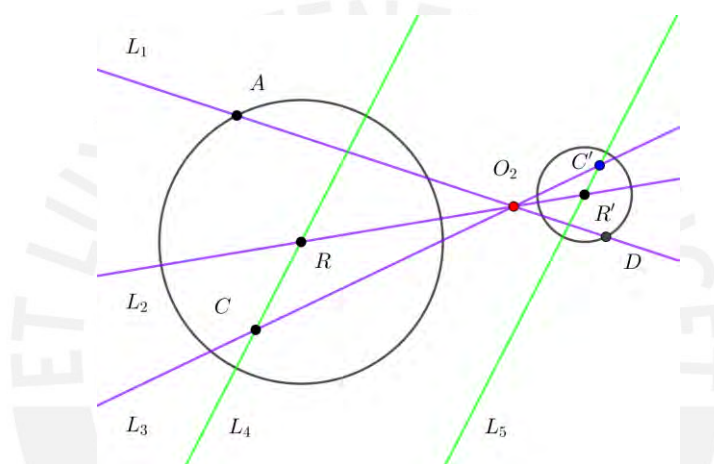


Fuente: Elaboración propia (2021).

De acuerdo con el axioma 1, trazamos la recta L_4 que pasa por los puntos R y C . Luego a partir del axioma 2, trazamos la recta L_5 paralela a la recta L_4 y que pasa por el punto R' . Intersectamos las rectas L_3 y L_5 determinando el punto " C' ". Por el teorema 5 (consecuencia de Tales) $C' = H(O_2, k)(C)$ es decir, C' es punto homólogo de C . Además, afirmamos que las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos puntos homólogos en la figura similar son paralelas, como se pone de manifiesto en la Figura 82.

Figura 82

Rectas paralelas en la configuración homotética de 3 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 3 (b)

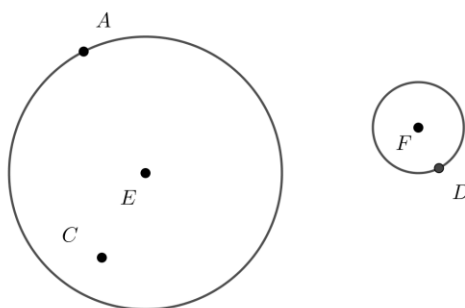
Se plantea la actividad en un fondo blanco del *software* GeoGebra; que posibilita realizar tratamientos en el registro figural y usar colores para diferenciar las unidades figurales que aparezcan en la construcción.

Se espera que, por medio de su aprehensión perceptiva los estudiantes identifiquen dos circunferencias de diferente tamaño, puntos sobre dichas circunferencias y sus respectivos interiores; puesto que, de acuerdo al DCN y los libros didácticos analizados, estos conocimientos se plantearon en grados precedentes al 3er grado de secundaria, grado en el que se desarrolla nuestra investigación. Respecto a la construcción del punto homólogo al punto C , los estudiantes según su aprehensión secuencial mostrarían algunas acciones:

Los estudiantes afirmarían que, a partir de sus conocimientos previos, los centros de las circunferencias son puntos homólogos. Identificarían y representarían dichos centros por E y F , según se presenta en la Figura 83.

Figura 83

Nombramiento de los centros de las circunferencias en 3 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).



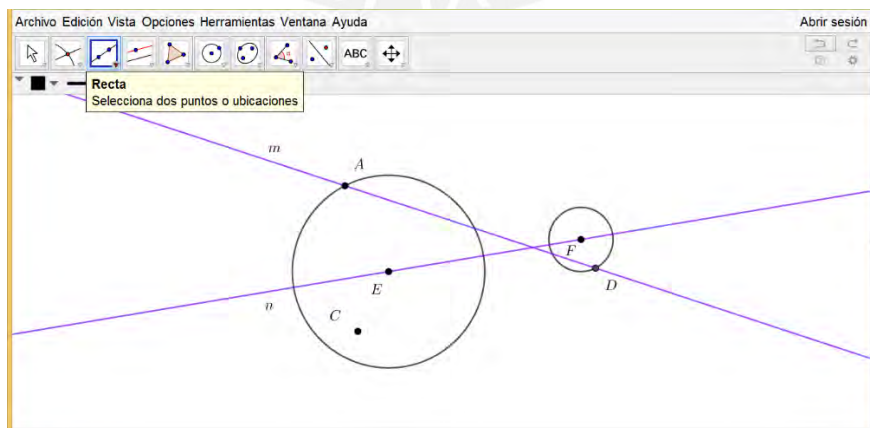
Con el uso del comando “recta” del *software* GeoGebra representado con el ícono ; los estudiantes podrían trazar una recta representada por \vec{m} que pasa por los puntos A y D . Igualmente, al utilizar el comando “recta” del *software* GeoGebra representado con el ícono ; trazarían una recta representada por \vec{n} que pasa por los puntos E y F , tal como se muestra en la Figura 84.

Figura 84

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en 3 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).



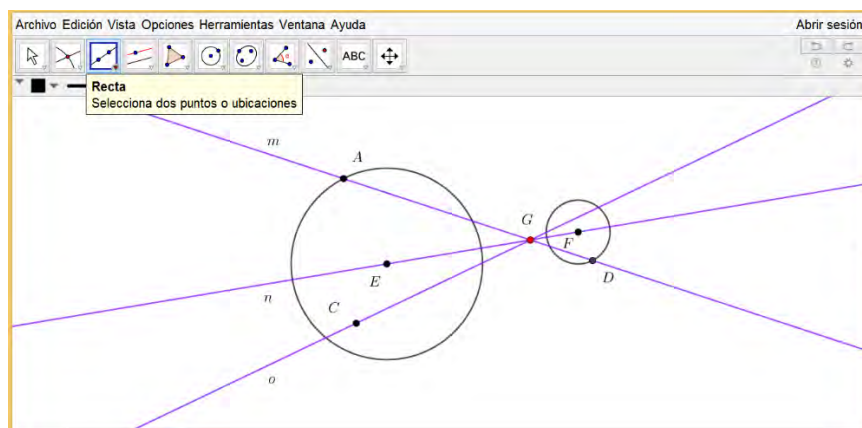
Los estudiantes al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; identificarían y representarían el punto de intersección “ G ” de las rectas representadas por \vec{m} y \vec{n} . De igual forma, con el uso del comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; trazarían una recta representada por \vec{o} que pasa por los puntos C y G , tal como se presenta en la Figura 85.

Figura 85

Trazado de la recta que pasa por los puntos C y G en 3 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).




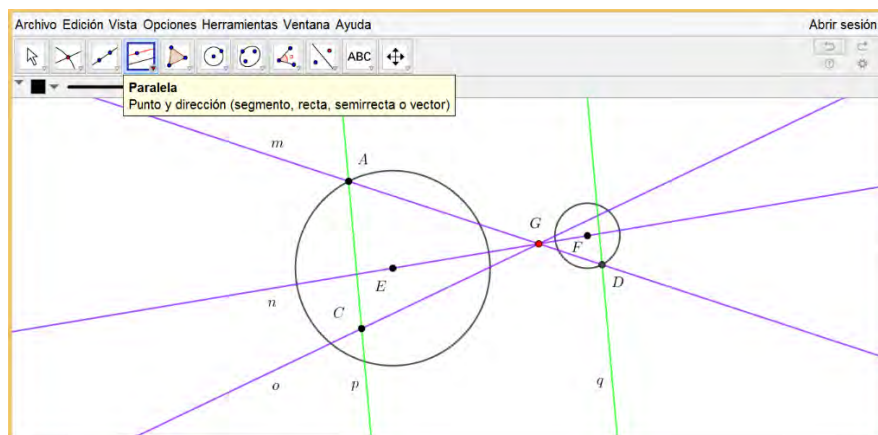
Además, al utilizar el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por ; trazarían una recta representada por \vec{p} que pasa por los puntos A y C . Luego con el uso del comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por ; podrían trazar una recta representada por \vec{q} que pasa por el punto D , paralela a la recta representada por \vec{p} . También por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que “las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas” y justificarían esta conjetura al utilizar el comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por , de acuerdo con lo mostrado en la Figura 86.

Figura 86

Trazado de las rectas paralelas \vec{p} y \vec{q} en 3 (b).



Fuente: Elaboración propia (2021).


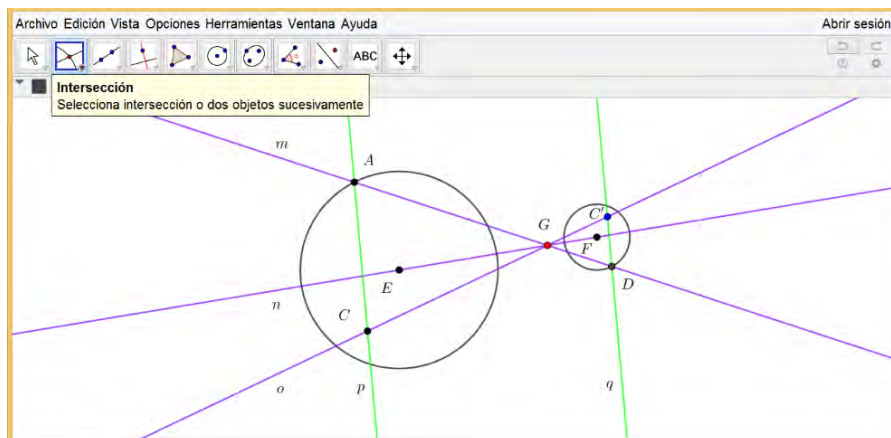



Se espera que los estudiantes al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con ; identificarían y representarían el punto de intersección C' de las rectas representadas por \vec{p} y \vec{q} , donde C' sería el punto homólogo del punto C ; a partir de las conjeturas “las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas” y “dos puntos homólogos y el centro de homotecia interior están en una misma recta”. Además, por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional) los estudiantes identificarían a la figura de la derecha como similar (reducida y rotada 180°) de la figura inicial de la izquierda, como se evidencia en la Figura 87.

Figura 87

Punto de intersección C' entre las rectas \vec{o} y \vec{q} en 3 (b)



Fuente: Elaboración propia (2021).

Análogamente con el uso del comando “recta” del *software* GeoGebra representado por ; los estudiantes podrían trazar una recta representada por \vec{p} que pasa por los puntos C y E . Luego al utilizar el comando “paralela” del *software* GeoGebra representado por ; trazarían una recta representada por \vec{q} que pasa por el punto F , paralela a la recta representada por \vec{p} . Del mismo modo con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado con ; identificarían y representarían el punto de intersección C' de las rectas representadas por \vec{o} y \vec{q} , donde C' sería el punto homólogo del punto C .

El docente formularía preguntas dirigidas a los estudiantes, esto posibilitaría que movilicen sus conocimientos previos respecto a la noción de “puntos homólogos”. Asimismo, al término de la actividad el docente realizaría una socialización y expondría a los estudiantes la propiedad de que las rectas que pasan por dos puntos en la figura inicial y por sus respectivos homólogos en la figura similar son paralelas.

Tabla 10:

Se presenta la actividad 4.

Actividad 4 Con apoyo del *software* GeoGebra

Dados los rectángulos:

- Ubica los posibles centros de homotecia en la figura.
- Establece relaciones numéricas al comparar las longitudes de los lados homólogos en la figura.
- Establece relaciones numéricas al comparar las longitudes de los segmentos obtenidos al trazar las rectas que pasan por puntos homólogos en la figura.



Fuente: Adaptado de Lemonidis (1990).

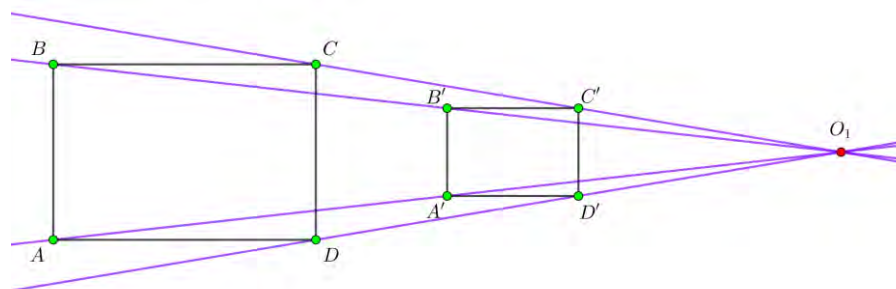
Objetivos de la actividad 4: Construir los posibles centros de homotecia y establecer sus respectivas razones de homotecia.

Posible solución Matemática de la actividad 4 (Caso 1)

Considerando el centro de homotecia exterior, la figura de la izquierda como la inicial y la figura de la derecha como la imagen homotética; identificamos los puntos y sus respectivos homólogos: $(A$ y $A')$, $(B$ y $B')$, $(C$ y $C')$ y $(D$ y $D')$; según el axioma 1 trazamos las rectas que pasan por cada punto y su respectivo homólogo e intersectamos dichas rectas, determinando el centro de homotecia exterior O_1 , tal cual se muestra en la Figura 88.

Figura 88

Construcción del centro de homotecia exterior en el caso 1

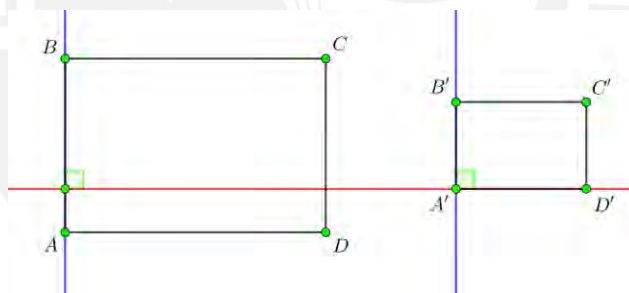


Fuente: Elaboración propia (2021).

Afirmamos que las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ son paralelas. Por el teorema 1, como $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{A'D'} \wedge \overleftrightarrow{A'B'} \perp \overleftrightarrow{A'D'} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, como se evidencia en la figura 89.

Figura 89

Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 1.



Fuente: Elaboración propia (2021).

En forma análoga, se prueba que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{C'D'}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{A'D'}$. Luego por el teorema 5 (consecuencia de Tales); sean A, B, A' y B' puntos distintos del plano Π tal que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, si $\overleftrightarrow{BB'} \wedge \overleftrightarrow{AA'}$ se cortan en O_1 entonces $A' = H(O_1, k)(A)$, donde $\overrightarrow{O_1A'} = k\overrightarrow{O_1A}$.


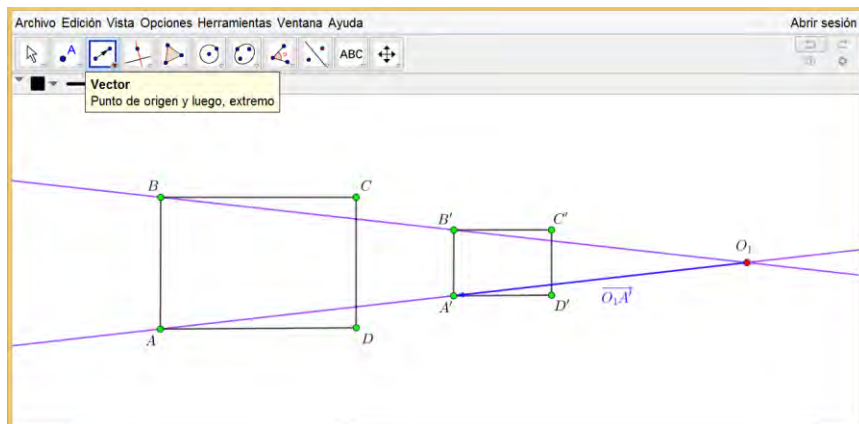
Con el uso del comando “vector” del software GeoGebra representado por el ícono ; se determinan los vectores $\overrightarrow{O_1A'} = (-9, -1)$ y $\overrightarrow{O_1A} = (-18, -2)$, y como $(-9, -1) = \frac{1}{2}(-18, -2)$ entonces la razón de homotecia directa es $k = \frac{1}{2}$, como se pone de manifiesto en las Figuras 90 y 91.

Figura 90

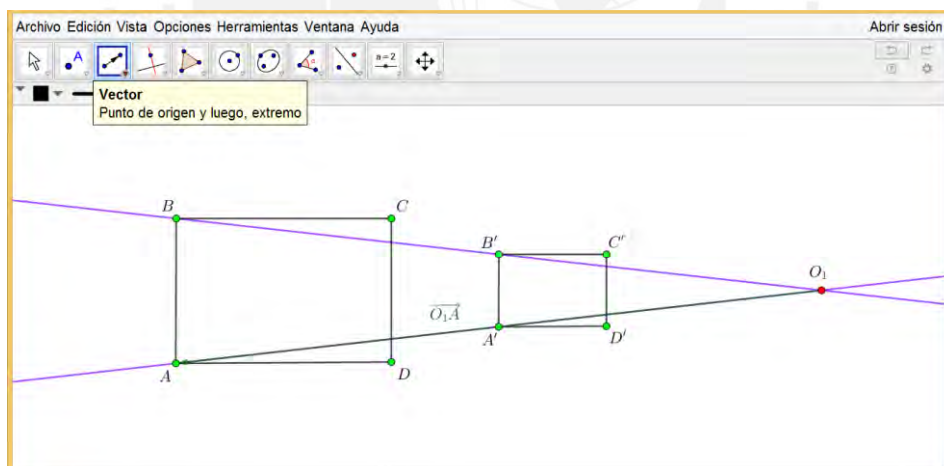
Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A'}$ en el caso 1.



Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 91

Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A}$ en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).

En forma análoga, al hacer el análisis: para B y B' , C y C' o D y D' , obtenemos la misma razón de homotecia directa $k = \frac{1}{2}$.

Conocimientos esperados de los estudiantes en la actividad 4 (Caso 1)

La actividad se presenta en un fondo blanco del *software* GeoGebra; para realizar tratamientos en el registro figural, así como utilizar colores para diferenciar las unidades figurales que van emergiendo en la construcción.

Mediante su aprehensión secuencial y sus conocimientos previos, se espera que los estudiantes identifiquen dos rectángulos con la misma orientación, pero de tamaños diferentes. Por medio de su aprehensión secuencial, los estudiantes podrían realizar algunas consideraciones respecto al establecimiento de las posibles relaciones numéricas, así como:


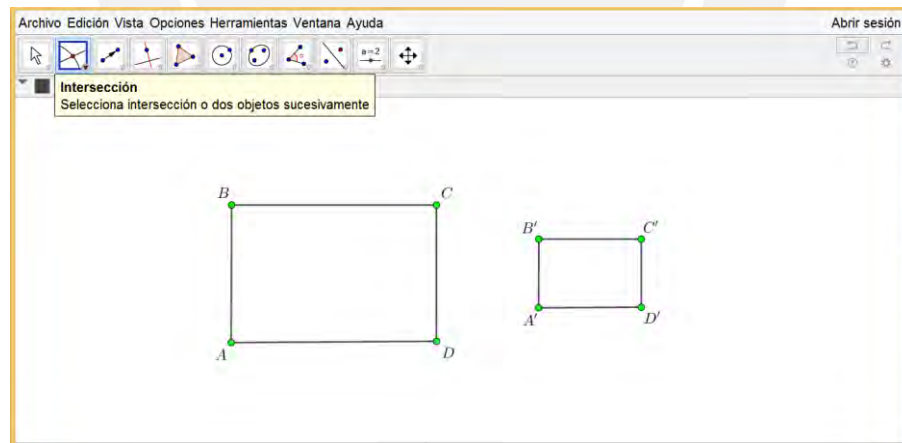
Respecto a un centro de homotecia exterior, considerando a la figura de la izquierda como la inicial y a la figura de la derecha como su imagen homotética. Al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos homólogos, es decir: A con A' , B con B' , C con C' y D con D' , según se muestra en la Figura 92.

Figura 92

Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).


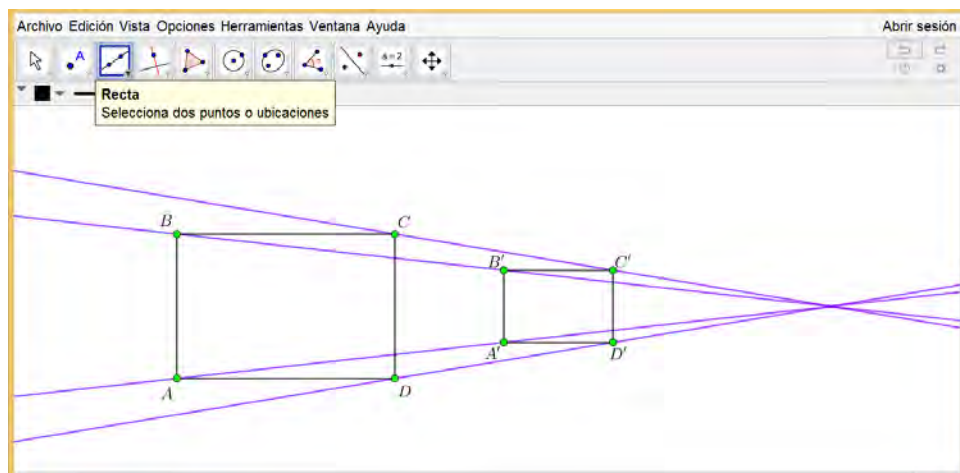
Los estudiantes con el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; trazarían las rectas que pasan por: A y A' , B y B' , C y C' y finalmente, por D y D' , de acuerdo a lo manifestado en la figura 93.

Figura 93

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).


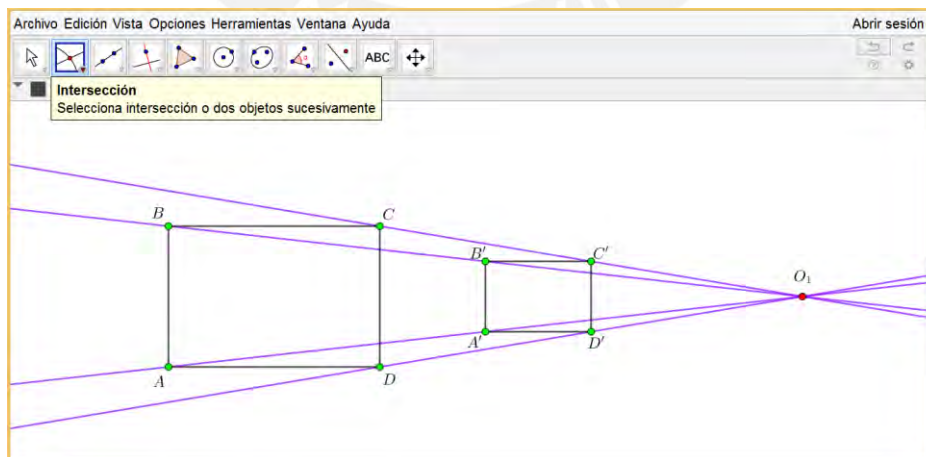
Asimismo, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra, representado por el ícono ; los estudiantes identificarían y representarían el centro de homotecia exterior por O_1 , tal cual se muestra en la figura 94.

Figura 94

Identificación y representación del centro de homotecia exterior en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).


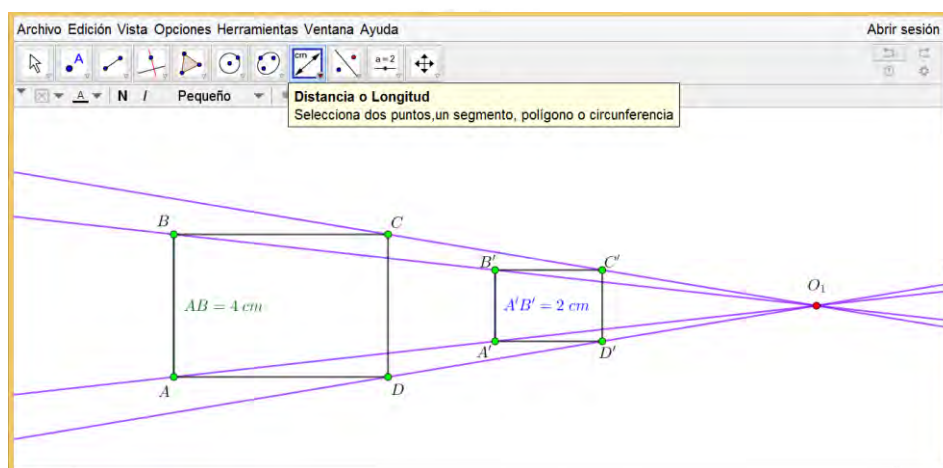
Del mismo modo con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra, representado por el ícono ; los estudiantes determinarían las longitudes de los lados homólogos representados por $AB = 4\text{ cm}$ y $A'B' = 2\text{ cm}$. En seguida podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{A'B'}{AB}$, es decir $r = \frac{1}{2}$. Se espera también que por su aprehensión operatoria (modificación óptica) identifiquen una reducción de tamaño de la figura de la izquierda, como se presenta en la figura 95.

Figura 95

Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).



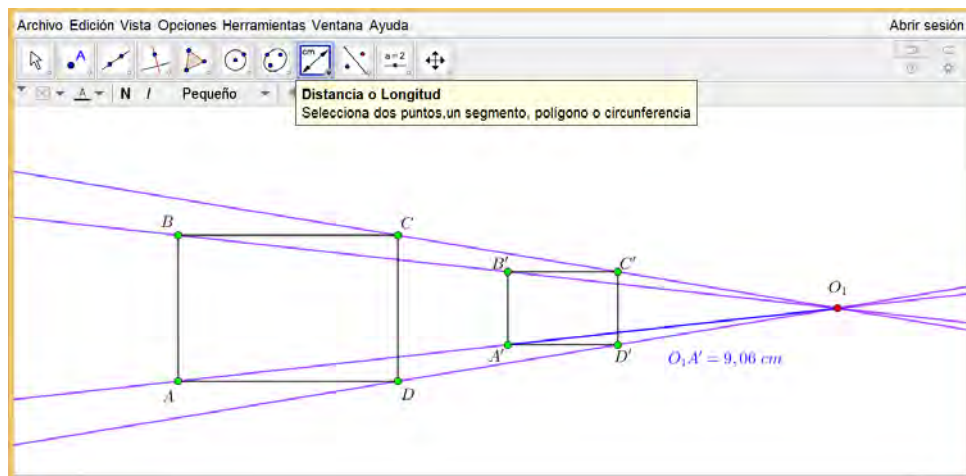
Luego por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que “la relación numérica $r = \frac{1}{2}$; también se obtendría al comparar las longitudes de los lados representados como sigue: $B'C'$ con BC , $C'D'$ con CD o $A'D'$ con AD ” y justificarían esta conjetura al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado por el ícono . De igual manera al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado por el ícono , los estudiantes determinarían las longitudes de los segmentos representados por $O_1A' = 9,06\text{ cm}$ y $O_1A = 18,11\text{ cm}$. Asimismo, podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A'}{O_1A}$ es decir $r = \frac{1}{2}$ (lo que confirmaría la relación numérica obtenida anteriormente). También por su aprehensión operatoria (modificación óptica), los estudiantes podrían identificar una reducción de tamaño de la figura de la izquierda, de acuerdo a lo manifestado en las figuras 96 y 97.

Figura 96

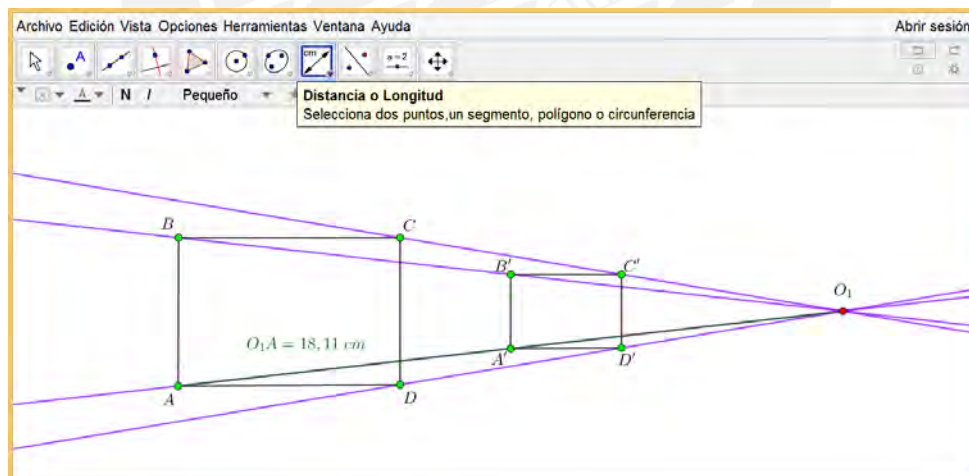
Obtención de la longitud del segmento O_1A' en el caso 1




Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 97

Obtención de la longitud del segmento O_1A en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).

Así pues, por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que “la relación numérica representada por $r = \frac{1}{2}$; también se obtendría al comparar las longitudes de los segmentos representados como sigue: O_1B' con O_1B , O_1C' con O_1C o O_1D' con O_1D ” y podrían justificar esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con el ícono .

En consecuencia, podrían establecer la relación numérica representada por $r = \frac{AB}{A'B'}$ es decir $r = 2$, a pesar de que la figura de la izquierda reduzca su tamaño; esto podría deberse a que no comprenden la relación directa entre, la relación numérica y la reducción de tamaño de la figura. Del mismo modo los estudiantes podrían determinar la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A}{O_1A'}$ es decir $r = 2$ cayendo en la misma incongruencia.


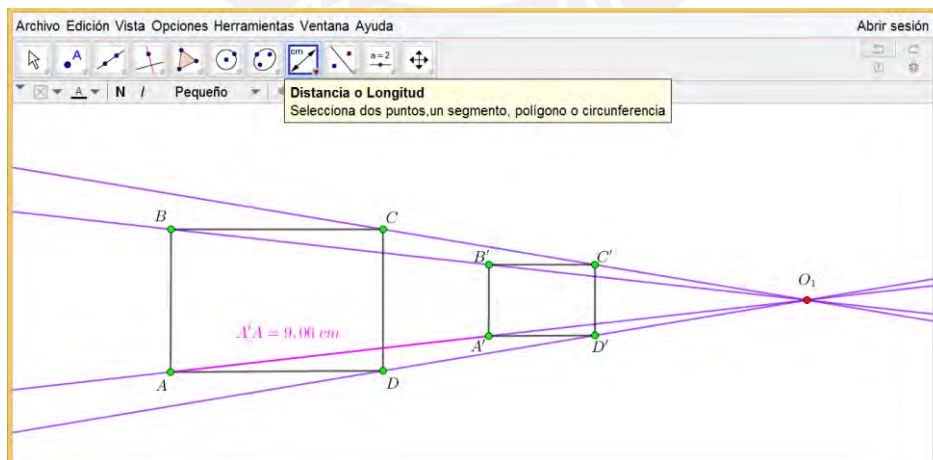
Sin embargo, al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con , los estudiantes podrían determinar la longitud del segmento representado por $A'A = 9,06$ y establecer la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A'}{A'A}$ es decir $r = 1$. Esto probablemente se produzca por la aplicación incorrecta del teorema de Tales. Análogamente los estudiantes podrían determinar las relaciones numéricas representadas como sigue: $\frac{O_1B'}{B'B}$, $\frac{O_1C'}{C'C}$ o $\frac{O_1D'}{D'D}$, tal como se muestra en la Figura 98.

Figura 98

Obtención de la longitud del segmento $A'A$ en el caso 1



Fuente: Elaboración propia (2021).

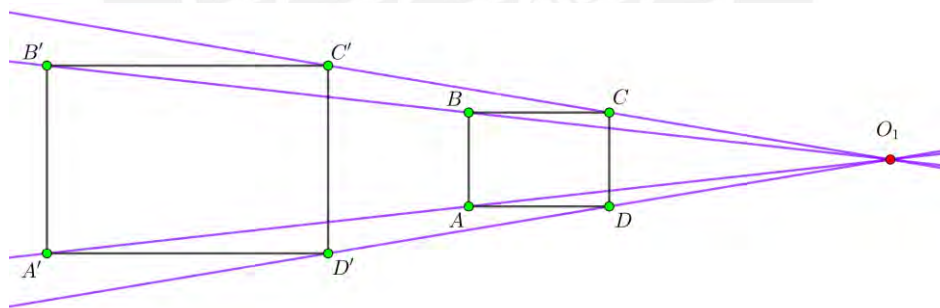
La intervención del docente en el desarrollo de la actividad se pone de manifiesto al realizar preguntas a los estudiantes, permitiendo que movilicen sus conocimientos previos respecto a las nociones: de “centro de homotecia”, de “imagen homotética” y del establecimiento de “relaciones numéricas” entre las longitudes de segmentos determinados en la configuración homotética. Además, al terminar el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes; el docente realizaría una socialización y expondría la relación directa entre, la reducción de tamaño de la figura de la izquierda y el establecimiento de la relación numérica llamada “razón de homotecia directa” representada por “ r ”, donde $0 < r < 1$.

Posible solución Matemática de la actividad 4 (Caso 2)

Considerando el centro de homotecia exterior, la figura de la derecha como la inicial y la figura de la izquierda como su imagen homotética; identificamos los puntos y sus respectivos homólogos: (A y A'), (B y B'), (C y C') y (D y D'); según el axioma 1 trazamos las rectas que pasan por cada punto y su respectivo homólogo e intersectamos dichas rectas, determinando el centro de homotecia exterior O_1 , como se presenta en la Figura 99.

Figura 99

Construcción del centro de homotecia exterior en el caso 2

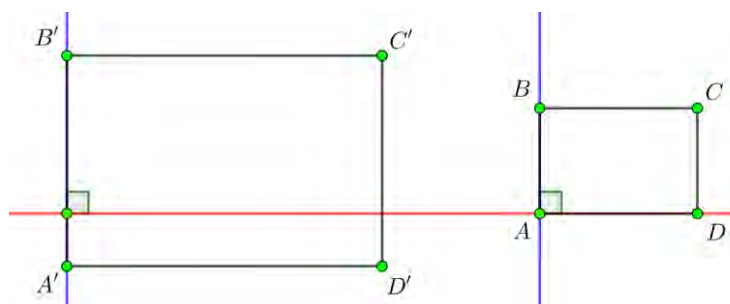


Fuente: Elaboración propia (2021).

Afirmamos que las rectas $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ son paralelas. Por el teorema 1, como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, tal como se muestra en la Figura 100.

Figura 100

Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).


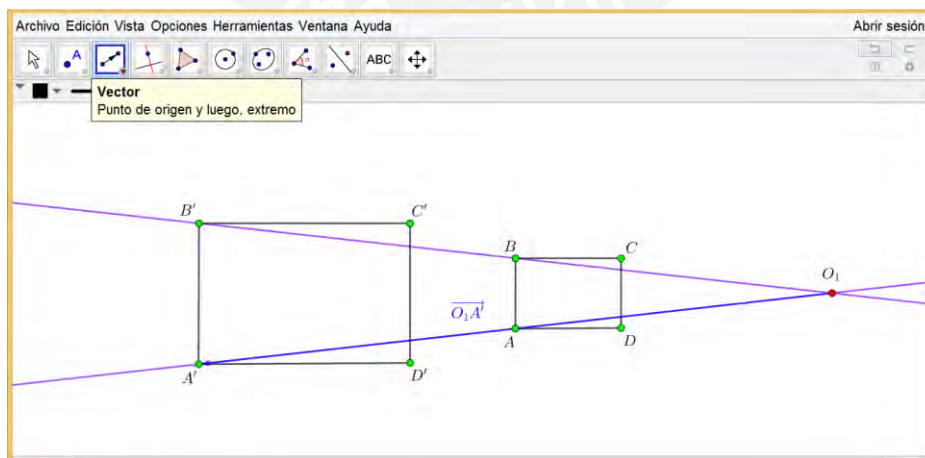
De manera similar, se prueba que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{C'D'}$ y $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{A'D'}$. En seguida por el teorema 5 (consecuencia de Tales); sean A, B, A' y B' puntos distintos del plano Π tal que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, si $\overrightarrow{BB'} \wedge \overrightarrow{AA'}$ se cortan en O_1 entonces $A' = H(O_1, k)(A)$, donde $\overrightarrow{O_1A'} = k\overrightarrow{O_1A}$. Al utilizar el comando “vector” del software GeoGebra representado por el ícono ; se obtienen los vectores $\overrightarrow{O_1A'} = (-18, -2)$ y $\overrightarrow{O_1A} = (-9, -1)$, y como $(-18, -2) = 2(-9, -1)$ entonces la razón de homotecia directa es $k = 2$, según se muestra en las Figuras 101 y 102.

Figura 101

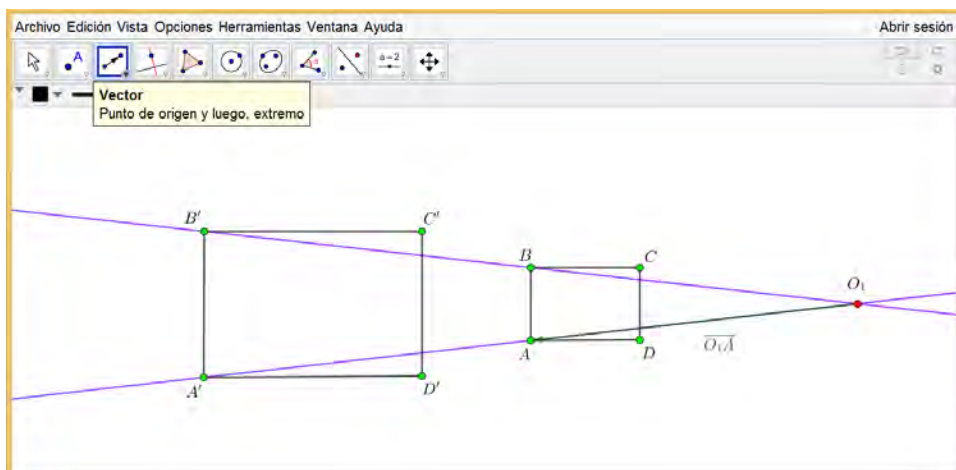
Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A'}$ en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 102

Obtención del vector $\overrightarrow{O_1A}$ en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

Análogamente al analizar para B y B' , C y C' o D y D' , obtenemos la misma razón de homotecia directa $k = 2$.

Conocimientos esperados de los estudiantes en la actividad 4 (Caso 2)

Se plantea la actividad en un fondo blanco del *software* GeoGebra; para la realización de tratamientos en el registro figural, y utilizar colores para diferenciar las unidades figurales que emergen en la construcción.

A través de su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos, se espera que los estudiantes identifiquen dos rectángulos con la misma orientación, pero de tamaños diferentes. Por medio de su aprehensión secuencial, los estudiantes podrían realizar algunas acciones respecto al establecimiento de las posibles relaciones numéricas, así como:


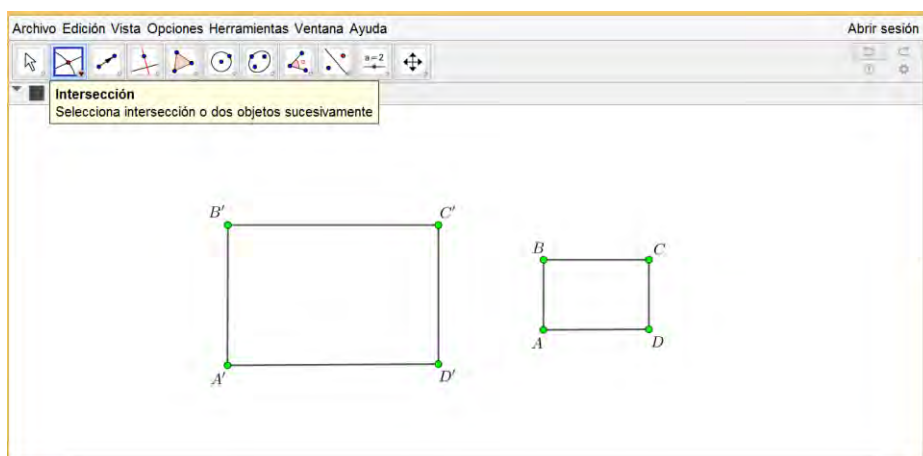
En relación con un centro de homotecia externo, considerando a la figura de la derecha como la inicial y a la figura de la izquierda como su imagen homotética, mediante el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos homólogos, es decir: A con A' , B con B' , C con C' y D con D' , tal como se muestra en la Figura 103.

Figura 103

Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).


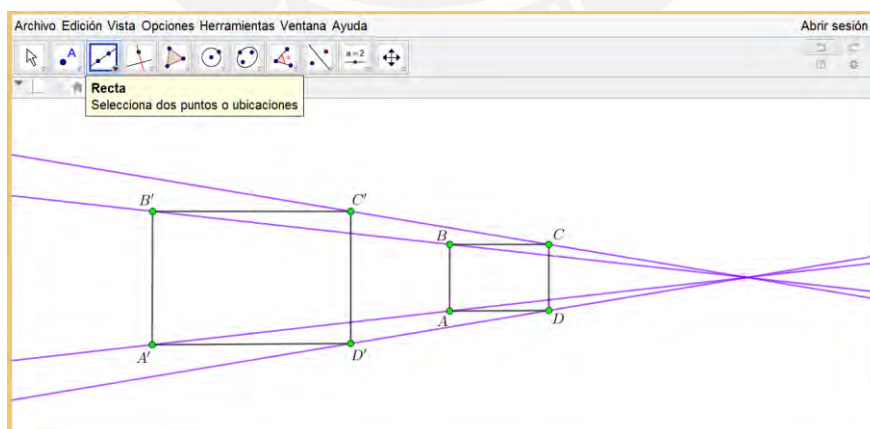
Con uso del comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes trazarían las rectas que pasan por: A' y A , B' y B , C' y C y finalmente, por D' y D , según se muestra en la Figura 104.

Figura 104

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).


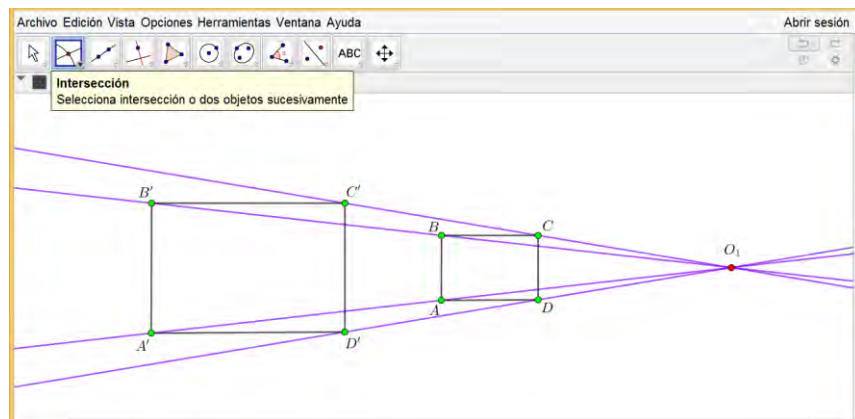
Asimismo, al utilizar el comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes identificarían y representarían el centro de homotecia exterior por O_1 , como se presenta en la figura 105.

Figura 105

Identificación y representación del centro de homotecia exterior en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).


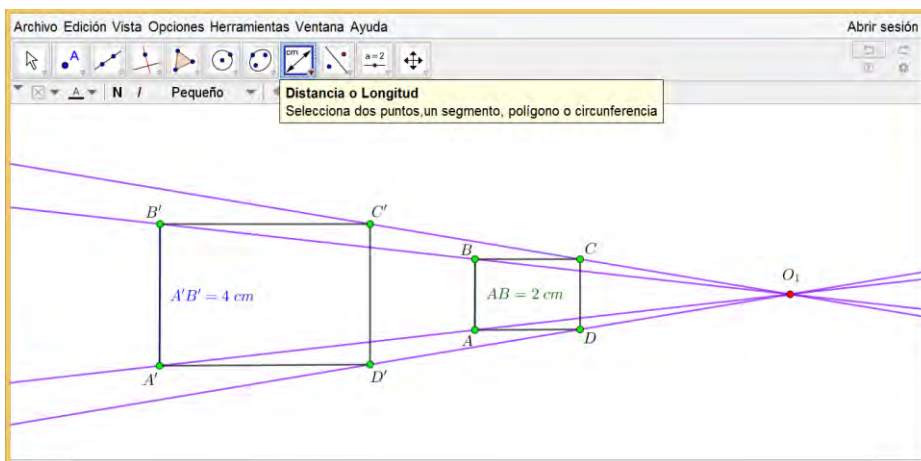
De igual manera con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra, representado con ; los estudiantes obtendrían las longitudes de los lados homólogos representados por $A'B' = 4\text{ cm}$ y $AB = 2\text{ cm}$. Seguidamente podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{A'B'}{AB}$, es decir $r = 2$. Se espera además que por su aprehensión operatoria (modificación óptica) identifiquen una ampliación de tamaño de la figura de la derecha, tal como se presenta en la Figura 106.

Figura 106.

Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).



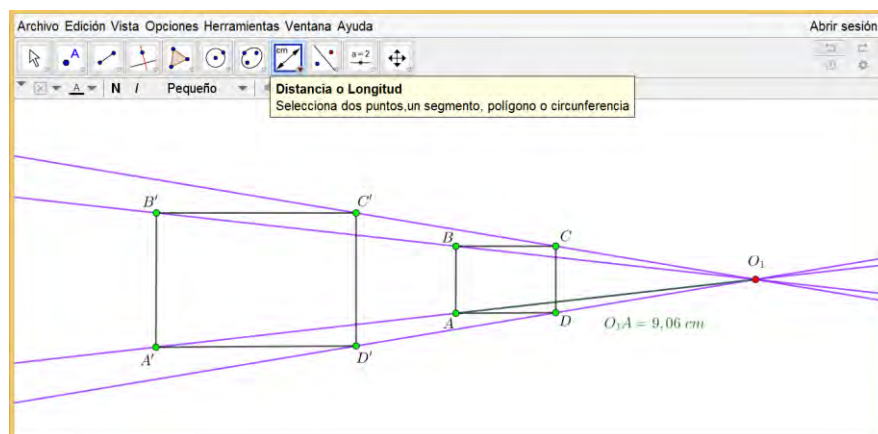
Posteriormente por su comprensión discursiva los estudiantes conjeturarían que “la relación numérica $r = 2$; se podría obtener al comparar las longitudes de los lados representados del siguiente modo: $B'C'$ con BC , $C'D'$ con CD o $A'D'$ con AD ” y justificarían esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con . Del mismo modo al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado por el ícono , los estudiantes obtendrían las longitudes de los segmentos representados por $O_1A' = 18,11 \text{ cm}$ y $O_1A = 9,06 \text{ cm}$. Asimismo, podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A'}{O_1A}$ es decir $r = 2$ (lo que confirmaría la relación numérica obtenida anteriormente). Además, por su comprensión operatoria (modificación óptica), los estudiantes podrían identificar una ampliación de tamaño de la figura de la derecha, tal como se evidencia en las Figuras 107 y 108.

Figura 107

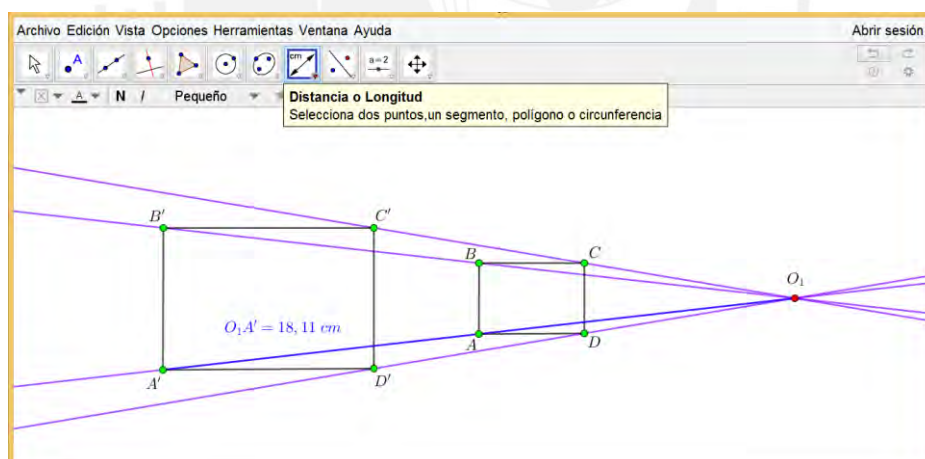
Obtención de la longitud del segmento O_1A en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

Figura 108

Obtención de la longitud del segmento O_1A' en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

Enseguida, por su aprehensión discursiva, los estudiantes podrían conjeturar que “la relación numérica representada por $r = 2$; también se obtendría al comparar las longitudes de los segmentos representados como sigue: O_1B' con O_1B , O_1C' con O_1C o O_1D' con O_1D ” y justificarían esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del **software**

GeoGebra representado con el ícono .

Luego podrían establecer la relación numérica representada por $r = \frac{AB}{A'B'}$ es decir $r = \frac{1}{2}$, a pesar de que la figura de la derecha amplíe su tamaño; esto podría deberse a que no comprenden la relación directa entre, la relación numérica y la ampliación de tamaño de la figura. De igual manera los estudiantes podrían determinar la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A}{O_1A'}$ es decir $r = \frac{1}{2}$ cayendo en la misma incongruencia.


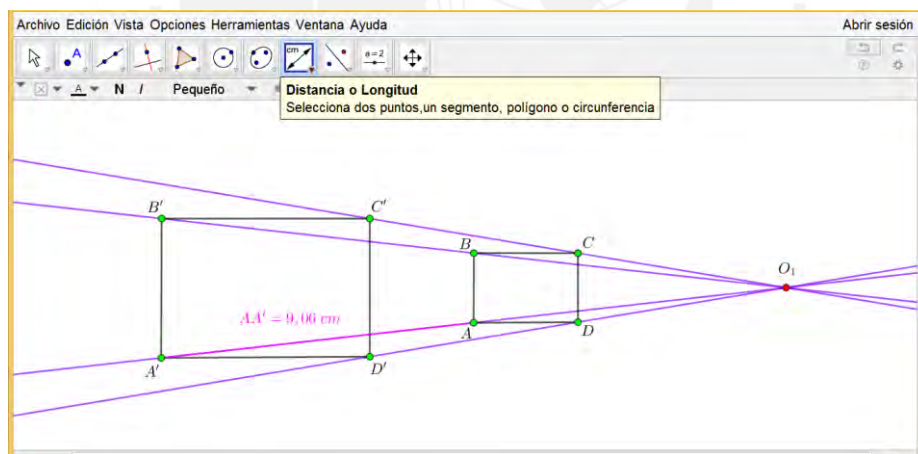
En cambio, con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con , los estudiantes podrían obtener la longitud del segmento representado por $AA' = 9,06$ y establecer la relación numérica representada por $r = \frac{O_1A}{AA'}$ es decir $r = 1$. Esto posiblemente se produzca por la aplicación incorrecta del teorema de Tales. En forma análoga los estudiantes podrían establecer las relaciones numéricas representadas como sigue: $\frac{O_1B}{BB'}$, $\frac{O_1C}{CC'}$ o $\frac{O_1D}{DD'}$, según se presenta en la Figura 109.

Figura 109

Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 2



Fuente: Elaboración propia (2021).

Durante el desarrollo de la actividad propuesta; el docente formula preguntas a los estudiantes, posibilitando que movilicen sus conocimientos previos respecto a las nociones: de “centro de homotecia exterior”, de “imagen homotética” y del establecimiento de las “relaciones numéricas” entre las longitudes de segmentos determinados en la configuración homotética. También al término de la actividad; el docente realizaría una socialización y expondría la relación directa entre, la ampliación de tamaño de la figura de la derecha y el

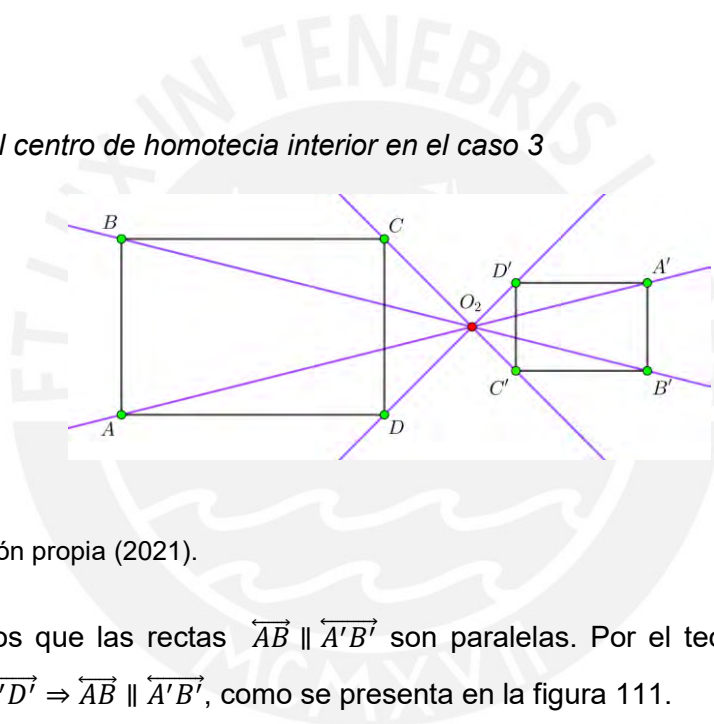
establecimiento de la relación numérica denominada “razón de homotecia directa” representada por “ r ”, donde $r > 1$.

Posible solución Matemática de la actividad 4 (Caso 3)

Considerando el centro de homotecia interior, la figura de la izquierda como la inicial y la figura de la derecha como su imagen homotética; identificamos los puntos y sus respectivos homólogos: (A y A'), (B y B'), (C y C') y (D y D'); según el axioma 1 trazamos las rectas que pasan por cada punto y su respectivo homólogo e intersectamos dichas rectas, determinando el centro de homotecia interior O_2 , tal cual se evidencia en la Figura 110.

Figura 110

Construcción del centro de homotecia interior en el caso 3

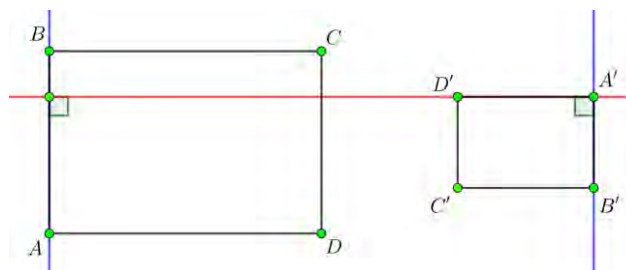


Fuente: Elaboración propia (2021).

Afirmamos que las rectas $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ son paralelas. Por el teorema 1, como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A'D'} \wedge \overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, como se presenta en la figura 111.

Figura 111

Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).


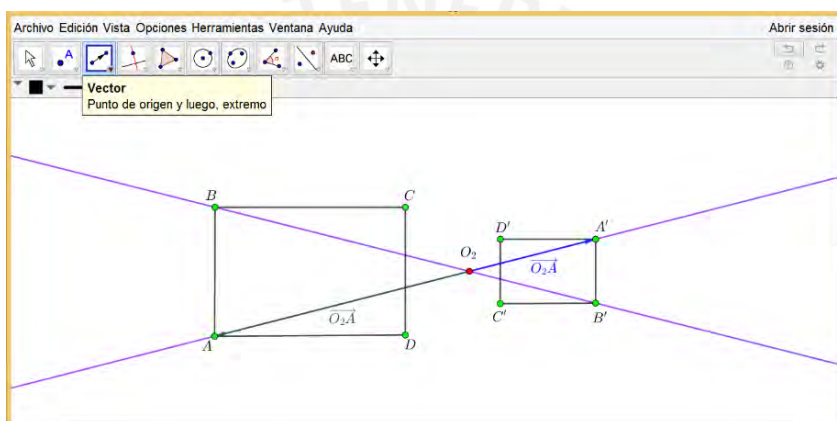
Asimismo, se prueba que $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$. Así pues, por el teorema 5 (consecuencia de Tales); sean A, B, A' y B' puntos distintos del plano Π tal que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, si $\overline{BB'} \wedge \overline{AA'}$ se cortan en O_2 entonces $A' = H(O_2, k)(A)$, donde $\overline{O_2A'} = k\overline{O_2A}$. Con el uso del comando “vector” del *software* GeoGebra representado con ; se determinan los vectores $\overline{O_2A'} = (4,1)$ y $\overline{O_2A} = (-8,-2)$, y como $(4,1) = -\frac{1}{2}(-8,-2)$ entonces la razón de homotecia inversa es $k = -\frac{1}{2}$, de acuerdo a lo presentado en la Figura 112.

Figura 112

Obtención de los vectores $\overline{O_2A'}$ y $\overline{O_2A}$ en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).

Igualmente, al analizar para B y B' , C y C' o D y D' se obtiene la misma razón de homotecia inversa $k = -\frac{1}{2}$.

Conocimientos esperados por los estudiantes en la actividad 4 (Caso 3)

Se propone la actividad con el apoyo del *software* GeoGebra, en un fondo blanco; para realizar tratamientos a la figura y utilizar colores para poder diferenciar las unidades figurales que emergen en la construcción.

Mediante su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos, se espera que los estudiantes identifiquen dos rectángulos con la misma orientación, pero de tamaños diferentes. Por medio de su aprehensión secuencial, los estudiantes podrían realizar algunas consideraciones respecto al establecimiento de las posibles relaciones numéricas, así como:


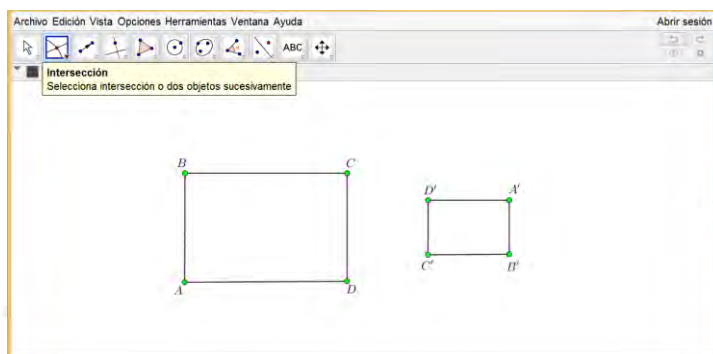
En relación a un centro de homotecia interior, considerando a la figura de la izquierda como la inicial y a la figura de la derecha como su imagen homotética. Con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos homólogos, es decir: A con A' , B con B' , C con C' y D con D' , como se muestra en la Figura 113.

Figura 113

Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).


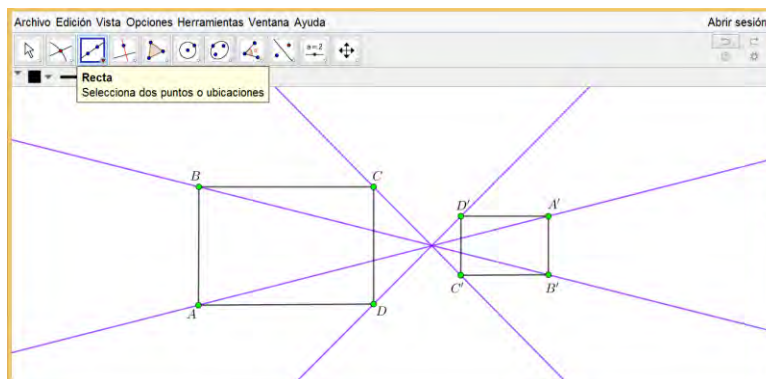
Al utilizar el comando “recta” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes podrían trazar las rectas que pasan por: A y A' , B y B' , C y C' y finalmente, por D y D' , tal como se pone de manifiesto en la Figura 114.

Figura 114

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).


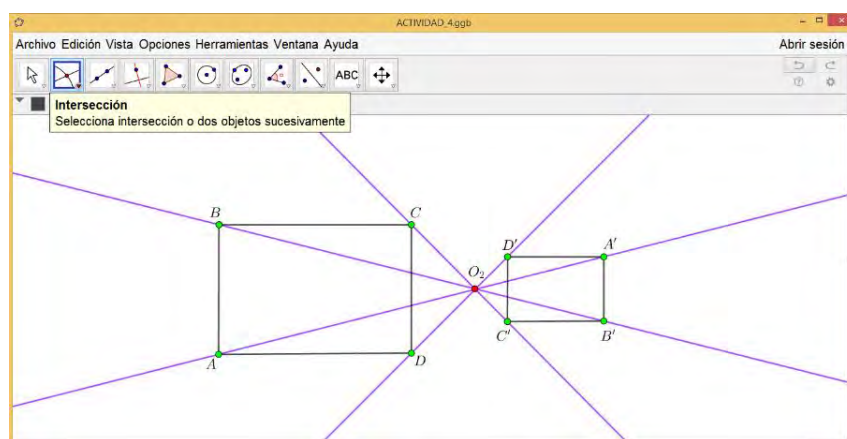
De igual modo con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes identificarían y representarían el centro de homotecia interior por O_2 , según se muestra en la Figura 115.

Figura 115

Identificación y representación del centro de homotecia interior en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).


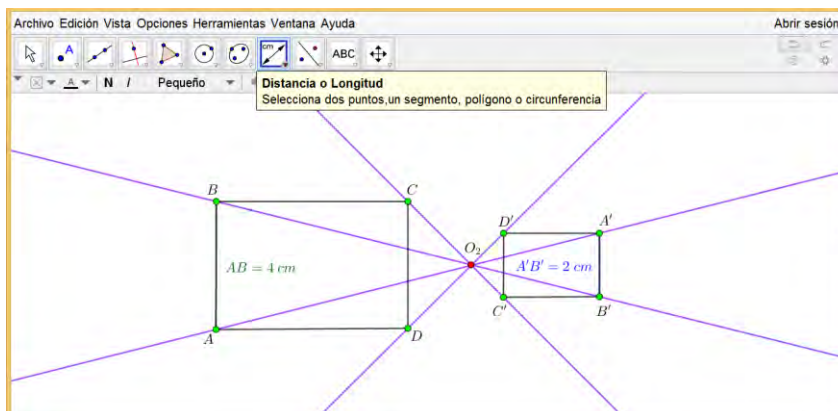
Igualmente, al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra, representado por el ícono ; los estudiantes obtendrían las longitudes de los lados homólogos representados por $A'B' = 2\text{ cm}$ y $AB = 4\text{ cm}$. Seguidamente podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{A'B'}{AB}$, es decir $r = \frac{1}{2}$ (en cuanto a la ausencia del signo “ – “ en dicha relación numérica, posiblemente se deba a que no relacionen el signo con el centro de homotecia interior). Se espera también que por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional) identifiquen una reducción de tamaño y una rotación de 180° de la figura de la izquierda, según se muestra en la Figura 116.

Figura 116

Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).



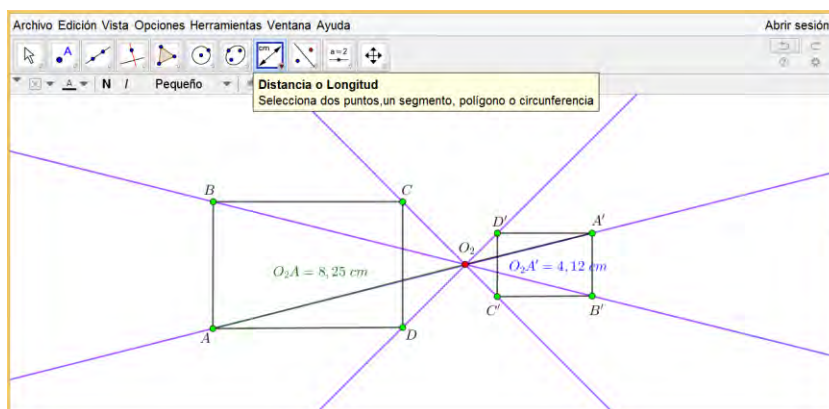
En consecuencia, por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que la relación numérica $r = \frac{1}{2}$ (probablemente sin considerar el signo “-”); se podría obtener al comparar las longitudes de los lados representados de la siguiente manera: $B'C'$ con BC , $C'D'$ con CD o $A'D'$ con AD , y justificarían esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con . De igual forma con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado por el ícono , los estudiantes obtendrían las longitudes de los segmentos representados por $O_2A' = 4,12 \text{ cm}$ y $O_2A = 8,25 \text{ cm}$. Asimismo, podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A'}{O_2A}$ es decir $r = \frac{1}{2}$ (en cuanto a la ausencia del signo “-”, posiblemente se deba a que no relacionen el signo con el centro de homotecia interior). Además, por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional), los estudiantes podrían identificar una reducción de tamaño y una rotación de 180° de la figura de la izquierda, como se muestra en la Figura 117.

Figura 117.

Obtención de la longitud de los segmentos O_2A' y O_2A en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).

Seguidamente por su aprehensión discursiva los estudiantes podrían conjeturar que a relación numérica representada por $r = \frac{1}{2}$ (probablemente con la ausencia del signo “-”); también se podría determinar al comparar las longitudes de los segmentos representados como sigue: O_2B' con O_2B , O_2C' con O_2C o O_2D' con O_2D , y justificarían esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con el ícono



Luego establecerían la relación numérica representada por $r = \frac{AB}{A'B'}$ es decir $r = 2$, a pesar de que la figura de la izquierda reduzca su tamaño y rote 180° ; esto podría deberse a que no comprenden la relación directa entre, estas características y la relación numérica obtenida. De igual manera los estudiantes podrían determinar la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A}{O_2A'}$ es decir $r = 2$ cayendo en la misma incongruencia.


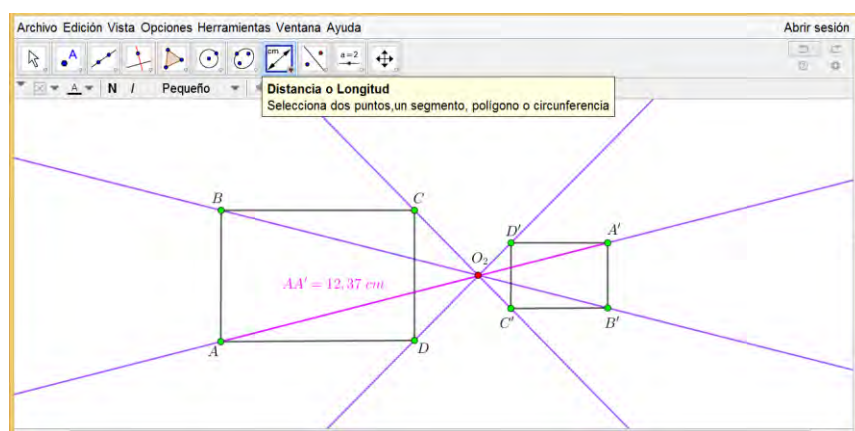
En cambio, con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con , los estudiantes podrían obtener la longitud del segmento representado por $AA' = 12,37$ y establecer la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A'}{AA'}$ es decir $r = \frac{1}{3}$. Esto posiblemente se produzca por la aplicación incorrecta del teorema de Tales. En forma análoga los estudiantes podrían establecer las relaciones numéricas representadas como sigue: $\frac{O_2B'}{BB'}$, $\frac{O_2C'}{CC'}$ o $\frac{O_2D'}{DD'}$, de acuerdo a lo presentado en la Figura 118.

Figura 118

Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 3



Fuente: Elaboración propia (2021).

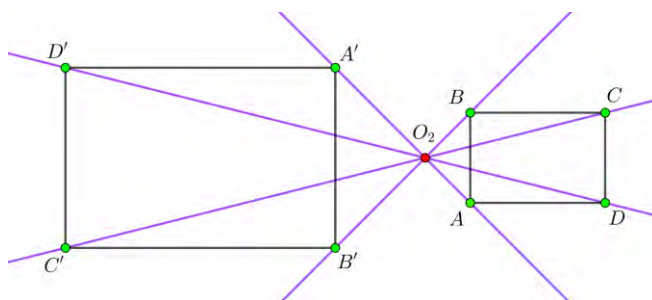
El docente interviene en el desarrollo de la actividad propuesta, realizando preguntas a los estudiantes; esto posibilita que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos respecto a las nociones: de “centro de homotecia interior”, de “imagen homotética” y del establecimiento de las “relaciones numéricas” entre las longitudes de segmentos determinados en la configuración homotética. Además, al finalizar la actividad; el docente realizaría una socialización y expondría la relación directa entre, la reducción y rotación de 180° de la figura de la izquierda y el establecimiento de la relación numérica llamada “razón de homotecia inversa” representada por “ r ”, donde $-1 < r < 0$.

Posible solución Matemática de la actividad 4 (Caso 4)

Considerando el centro de homotecia interior, la figura de la derecha como la inicial, a la figura de la izquierda como su imagen homotética; identificamos los puntos y sus respectivos homólogos: (A y A'), (B y B'), (C y C') y (D y D'); según el axioma 1 trazamos las rectas que pasan por cada punto y su respectivo homólogo e intersectamos dichas rectas, determinando el centro de homotecia interior O_2 , tal como se evidencia en la Figura 119.

Figura 119

Construcción del centro de homotecia interior en el caso 4

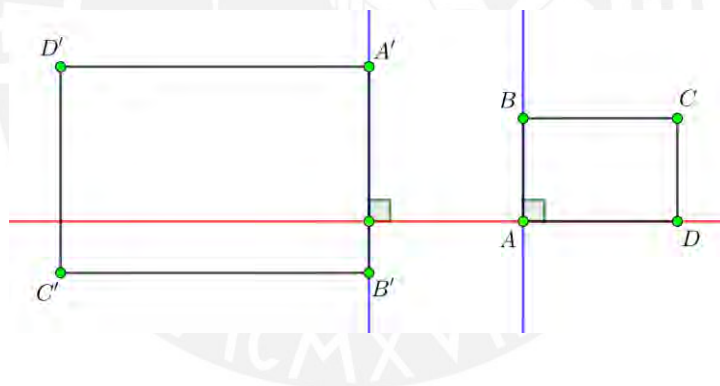


Fuente: Elaboración propia (2021).

Afirmamos que las rectas $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ son paralelas. Por el teorema 1, como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, según se muestra en la Figura 120.

Figura 120

Rectas paralelas en la configuración homotética del caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).


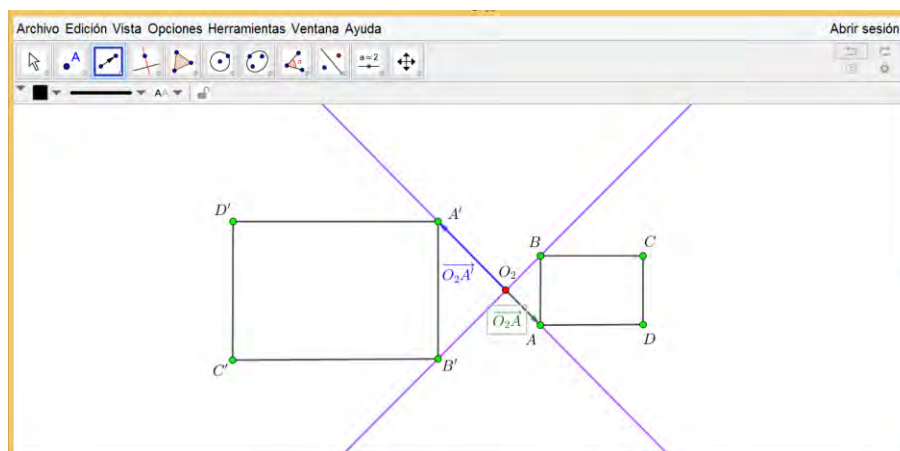
Análogamente se prueba que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{C'D'}$ y $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{A'D'}$. En consecuencia, por el teorema 5 (consecuencia de Tales); sean A, B, A' y B' son puntos distintos del plano Π tal que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$, si $\overrightarrow{BB'} \wedge \overrightarrow{AA'}$ se cortan en O_2 , entonces $A' = H(O_2, k)(A)$, donde $\overrightarrow{O_2A'} = k\overrightarrow{O_2A}$. Al utilizar el comando “vector” del software GeoGebra representado por el ícono ; se determinan los vectores $\overrightarrow{O_2A'} = (-2,2)$ y $\overrightarrow{O_2A} = (1,-1)$, y como $(-2,2) = -2(1,-1)$ entonces la razón de homotecia inversa es $k = -2$, tal como se pone de manifiesto en la Figura 121.

Figura 121

Obtención de los vectores $\overrightarrow{O_2A'}$ y $\overrightarrow{O_2A}$ en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).

Asimismo, al hacer el análisis para B y B' , C y C' o D y D' , se obtiene la misma razón de homotecia inversa $k = -2$.

Conocimientos esperados de los estudiantes en la actividad 4 (Caso 4)

Se plantea la actividad con el apoyo del *software* GeoGebra, en un fondo blanco; para realizar tratamientos en el registro figural y utilizar colores que permitan diferenciar las unidades figurales que emergen en la construcción.

A través de su aprehensión perceptiva y sus conocimientos previos, se espera que los estudiantes identifiquen dos rectángulos con la misma orientación, pero de tamaños diferentes. Mediante su aprehensión secuencial, los estudiantes podrían realizar algunas acciones respecto al establecimiento de las posibles relaciones numéricas, tal como:


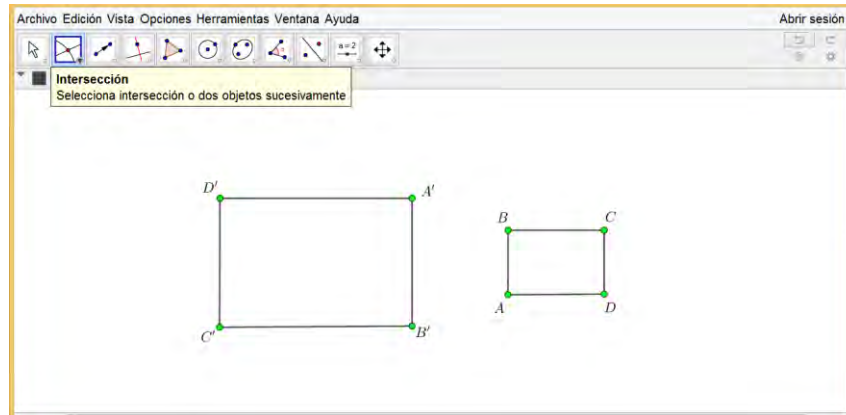
Respecto a un centro de homotecia interior, considerando a la figura de la derecha como la inicial y a la figura de la izquierda como su imagen homotética. A partir del uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; representarían y nombrarían puntos homólogos, es decir: A con A' , B con B' , C con C' y D con D' , según se presenta en la Figura 122.

Figura 122

Representación y nombramiento de puntos homólogos en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).


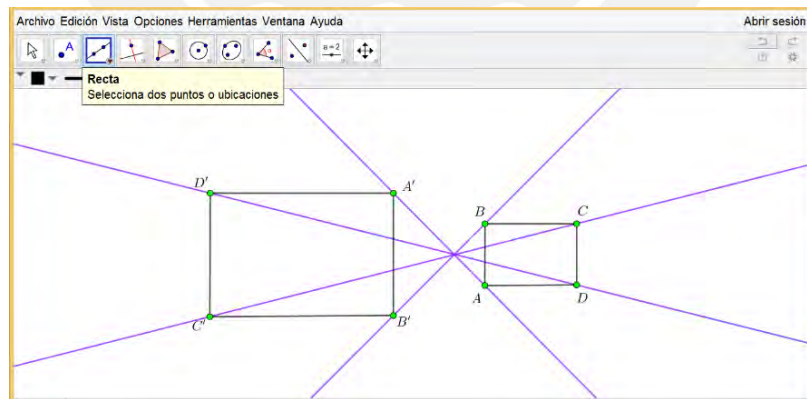
Con el uso del comando “recta” del software GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes trazarían las rectas que pasan por: A y A' , B y B' , C y C' y finalmente, por D y D' , tal como se presenta en la figura 123.

Figura 123

Trazado de rectas que pasan por puntos homólogos en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).


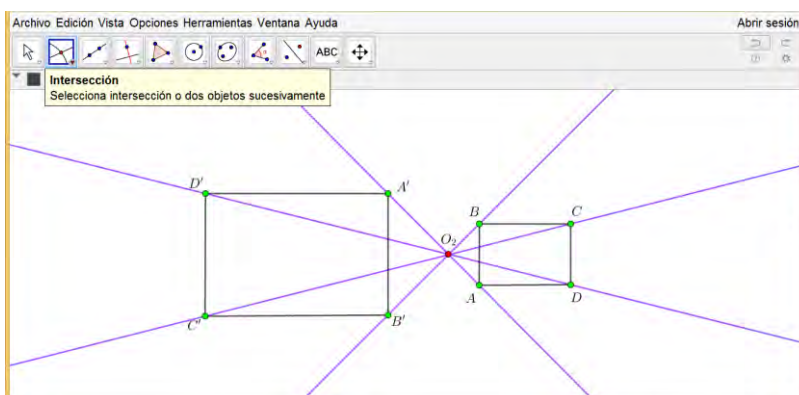
Igualmente, con el uso del comando “intersección” del *software* GeoGebra representado por el ícono ; los estudiantes identificarían y representarían el centro de homotecia interior por O_2 , tal como se evidencia en figura 124.

Figura 124

Identificación y representación del centro de homotecia interior en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).


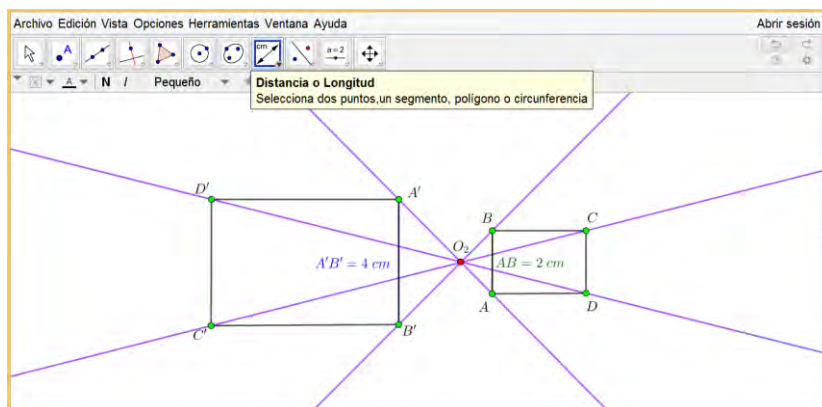
También con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra, representado por el ícono ; los estudiantes podrían determinar las longitudes de los lados homólogos representados por $A'B' = 4\text{ cm}$ y $AB = 2\text{ cm}$. Luego podrían establecer la relación numérica representada por $r = \frac{A'B'}{AB}$, es decir $r = 2$ (en cuanto a la ausencia del signo “-”, posiblemente se deba a que no relacionen el signo con el centro de homotecia interior). Se espera asimismo que por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional) identifiquen una ampliación de tamaño y una rotación de 180° de la figura de la derecha, según lo mostrado en la figura 125.

Figura 125

Obtención de la longitud de los lados homólogos en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).



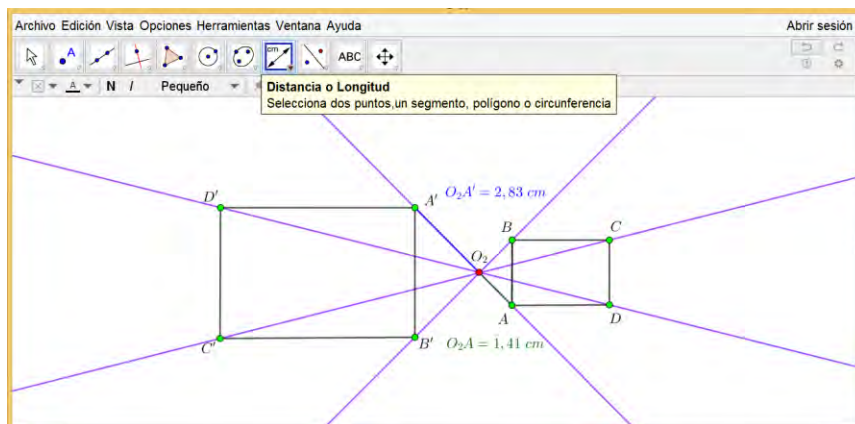
Así pues, por su aprehensión discursiva los estudiantes conjeturarían que la relación numérica $r = 2$ (probablemente con la ausencia del signo “-”); se podría obtener al comparar las longitudes de los lados representados del siguiente modo: $B'C'$ con BC , $C'D'$ con CD o $A'D'$ con AD , y justificarían esta conjetura al utilizar el comando “distancia o longitud” del software GeoGebra representado con . Seguidamente con el uso del comando “distancia o longitud” del software GeoGebra representado por el ícono , los estudiantes determinarían las longitudes de los segmentos representados por $O_2A' = 2,83 \text{ cm}$ y $O_2A = 1,41 \text{ cm}$. Asimismo, podrían identificar la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A'}{O_2A}$ es decir $r = 2$ (en cuanto a la ausencia del signo “-”, posiblemente se deba a que no relacionen el signo con el centro de homotecia interior). A continuación, por su aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional), los estudiantes podrían identificar una ampliación de tamaño y una rotación de 180° de la figura de la derecha, según se muestra en la figura 126.

Figura 126

Obtención de la longitud de los segmentos O_2A' y O_2A en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).

Posteriormente por su comprensión discursiva los estudiantes podrían conjeturar que la relación numérica representada por $r = 2$ (probablemente con la ausencia del signo “-”); también se podría determinar al comparar las longitudes de los segmentos representados como sigue: O_2B' con O_2B , O_2C' con O_2C o O_2D' con O_2D , y justificarían esta conjetura con el uso del comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con el ícono



En consecuencia, podrían establecer la relación numérica representada por $r = \frac{AB}{A'B'}$ es decir $r = \frac{1}{2}$, a pesar de que la figura de la derecha amplíe su tamaño y rote 180° ; esto podría deberse a que no comprenden la relación directa entre, estas características y la relación numérica obtenida. De igual manera los estudiantes podrían determinar la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A}{O_2A'}$ es decir $r = \frac{1}{2}$ cayendo en la misma incongruencia.


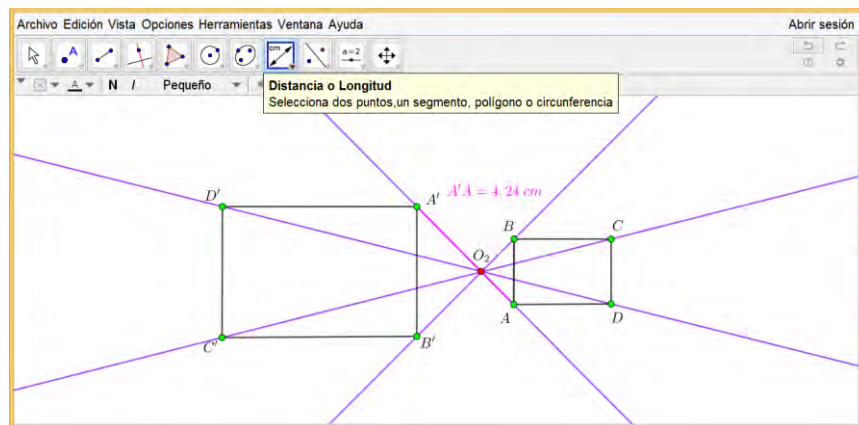
Sin embargo, al utilizar el comando “distancia o longitud” del *software* GeoGebra representado con , los estudiantes determinarían la longitud del segmento representado por $A'A = 4,24$ y determinarían la relación numérica representada por $r = \frac{O_2A'}{A'A}$ es decir $r = \frac{2}{3}$. Esto posiblemente se produzca por la aplicación incorrecta del teorema de Tales. En forma análoga los estudiantes podrían establecer las relaciones numéricas representadas como sigue: $\frac{O_2B'}{B'B}$, $\frac{O_2C'}{C'C}$ o $\frac{O_2D'}{D'D}$, de acuerdo a lo mostrado en la Figura 127.

Figura 127

Obtención de la longitud del segmento AA' en el caso 4



Fuente: Elaboración propia (2021).

Durante el desarrollo de la actividad propuesta, el docente realiza preguntas a los estudiantes; las cuales permiten que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos respecto a las nociones: de “centro de homotecia interior”, de “imagen homotética” y del establecimiento de las “relaciones numéricas” entre las longitudes de segmentos determinados en la configuración homotética. Asimismo, al finalizar la actividad; el docente realizaría una socialización y expondría la relación directa entre, la ampliación y rotación de 180° de la figura de la derecha, y el establecimiento de la relación numérica denominada “razón de homotecia inversa” representada por “ r ”, donde $r < -1$.

Conclusiones

En esta sección, reflexionaremos respecto a los objetivos, el marco teórico, los aspectos metodológicos, nuestra contribución en la enseñanza de la noción de homotecia y las recomendaciones para futuras investigaciones. Nuestro interés por la investigación de la homotecia en la Enseñanza Básica Regular (EBR) nos motivó a la revisión de investigaciones de maestría, doctorado y artículos en países como Perú, Colombia, España y Francia, con respecto a la homotecia en la EBR. Los antecedentes considerados para nuestra investigación muestran las dificultades que presentan los estudiantes con respecto a la homotecia, las aprehensiones en el registro figural y el uso del *software* GeoGebra. A partir de los cuales deseamos verificar el papel heurístico de la figura al abordar la noción de homotecia como una transformación geométrica de figuras en el plano.

Conforme a las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994) y la investigación documental, se pudo comprender la génesis de la homotecia y que a lo largo de la historia sí se aprovechaba el papel heurístico de la figura para resolver problemas, igualmente, con

respecto al análisis del libro didáctico, no se observaron actividades que permitan la movilización de conocimientos previos, tampoco la realización de tratamientos en el registro figural, ni la coordinación de las aprehensiones; todo ello nos sirvió para generar una secuencia didáctica compuesta por cuatro actividades con el propósito de comprender como se desarrollan las aprehensiones en el registro figural mediante una secuencia didáctica para solucionar problemas relacionados a la homotecia en ciclo VII de EBR.

En la primera actividad, se muestran dos figuras geométricas no convexas que determinan una configuración homotética. A partir de dicha configuración, se propone la construcción del centro de homotecia. Luego la aprehensión perceptiva y los conocimientos previos permitirían el reconocimiento de figuras geométricas. De igual manera, la identificación de los puntos homólogos de las figuras, así como el trazado de rectas que contienen dichos puntos y la intersección de las rectas antes mencionadas, sería posible con la utilización del *software* GeoGebra. Asimismo, la aprehensión secuencial permitiría establecer algunas consideraciones respecto a la construcción del centro de homotecia. Del mismo modo, por medio de la aprehensión discursiva se podría relacionar un determinado tratamiento a la figura con una respectiva propiedad; por ejemplo: dos puntos homólogos y el centro de homotecia, son colineales. De igual forma mediante la aprehensión operatoria,

se podría identificar una ampliación, una disminución, una ampliación y rotación de 180° o una disminución y rotación de 180° , de la figura inicial.

En la segunda actividad, se presentan una figura inicial no convexa y un punto de paso perteneciente a una figura similar a la anterior, dicho punto se ubica en una de las trazas de la configuración homotética determinada. De acuerdo a lo planteado, se propone la construcción de la figura similar a la figura inicial, a partir del trazado de rectas paralelas a los lados de la figura inicial. Mediante la aprehensión perceptiva y los conocimientos previos, se podría identificar figuras geométricas. Además, el trazado de rectas paralelas a los lados de la figura inicial, la intersección de dichas rectas paralelas y las trazas en la configuración homotética, así como la determinación de la imagen homotética partiendo de segmentos de recta, sería posible con el uso del *software* GeoGebra. Igualmente, la aprehensión secuencial posibilitaría la realización de algunas acciones con respecto a la construcción de la imagen homotética de la figura inicial. Del mismo modo, la aprehensión discursiva permitiría conjeturar una respectiva propiedad; por ejemplo: dos lados homólogos en la configuración homotética son paralelos. Además, la aprehensión operatoria podría determinar una ampliación o una rotación de 180° , de la figura inicial.

En la tercera actividad, se presentan dos circunferencias, que determinan una configuración homotética. De acuerdo con dicha configuración, se propone la construcción del punto homólogo de un punto de la figura inicial. Por medio de la aprehensión perceptiva y los conocimientos previos, se podría identificar dos circunferencias de diferentes tamaños, puntos sobre dichas circunferencias, un punto interior en la circunferencia inicial y los centros de las circunferencias antes mencionadas. De igual forma, el trazado de rectas que contienen puntos homólogos, la intersección de dichas rectas, el trazado de una recta que une dos puntos en la figura inicial, el trazado de una recta paralela a la recta antes mencionada, así como la intersección de la recta paralela y una traza de la configuración, para la obtención del punto homólogo de un determinado punto en la figura inicial; sería posible con el uso del *software* GeoGebra. Mediante la aprehensión secuencial, se establecería algunas acciones relacionadas con la construcción del punto homólogo a otro determinado en la figura inicial. Asimismo, por medio de la aprehensión discursiva se podría conjeturar una propiedad; por ejemplo: la recta que unen dos puntos en la figura inicial y la recta que une los dos puntos homólogos a los antes mencionados, son paralelas. De igual forma la aprehensión operatoria, permitiría identificar una disminución, así como una disminución y una rotación de 180° , de la figura inicial.

por el MINEDU, se afirma que se proponen situaciones y actividades, respecto a la homotecia como transformación geométrica en el plano. Pero dichas situaciones y actividades no permiten la movilización, por parte de los estudiantes, de saberes previos y no posibilita el desarrollo heurístico de la figura geométrica, tampoco se promueve el uso del *software* GeoGebra, que permite el dinamismo del registro figural, lo que no es posible con el uso del lápiz y papel.

Nos propusimos entonces, realizar una investigación tomando como referencia el trabajo preparatorio sobre las configuraciones homotéticas posibles según Lemonidis (1990) asimismo, la investigación de Lemonidis (1991), donde el autor propone una secuencia didáctica que busca la adquisición de la noción de homotecia a partir de los diferentes tipos de figuras. Complementado con el desarrollo heurístico de las figuras, que se movilizan a partir de las aprehensiones en el registro figural según Duval (1994), en los estudiantes del VII ciclo de la EBR.

A partir de lo expuesto, se alcanzaron los objetivos específicos, y con ello se alcanzó también el objetivo general de nuestra investigación:

Analizar el papel de las aprehensiones en el registro figural utilizadas en la construcción de la noción de homotecia en el VII ciclo de EBR y que nos permitió responder nuestra pregunta de investigación.

RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Para futuras investigaciones consideramos pertinente:

- Sugerimos ampliar esta investigación, al abordar la noción del teorema de Tales, mediante las aprehensiones en el registro figural.
- Realizar una investigación sobre la noción de simetría axial como una homotecia de razón -1 , la noción de congruencia como una homotecia de razón 1 , la noción de semejanza como una homotecia de razón diferente de 1 , mediante las aprehensiones en el registro figural.
- Recomendamos crear actividades didácticas que aprovechen el papel heurístico de las figuras porque esto permitirá la comprensión del objeto matemático en estudio a partir del desarrollo crítico y creativo, estrategias de resolución y uso del *software* GeoGebra en la construcción de figuras.
- Recomendamos el uso del *software* GeoGebra porque gracias a la visualización podemos realizar conjeturas matemáticas que nos ayuden a construir y movilizar nociones matemáticas.

REFERENCIAS

- Álvarez, C., Cordero, J., González, J., Sepúlveda, O. (2019). Software GeoGebra como herramienta en enseñanza y aprendizaje de la Geometría. *Educación y Ciencia*, (22), pp. 387-402. Recuperado de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/view/10059
- Castillo, J. (2020). *Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de Áreas de regiones sombreadas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78328>
- Castillo, M. (2018). *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes del segundo grado de educación secundaria*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12068>
- Creswell, J. (2013). *Qualitative Inquiri and Research Designe Choosing Among Five Approaches* (3rd ed.). University of Nebraska. Lincoln, United States of America.
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Reperes-IREM*, (17), pp.121-138. Recuperado de <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWR97117.htm>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del valle. Cali, Colombia.
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento, *Revista Eletrônica de Educação Matemática. Revemat*, 7(2), pp. 266-297. Recuperado de <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>
- Fernández, F. (2018). *Estrategia didáctica para estudiar las propiedades de la multiplicación de números reales con estudiantes de grado octavo, haciendo uso de homotecias* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/69785>

- Galvis, J. (2017). *Identificación de las formas de aprehensión, desde la visualización de los registros figurales, el caso teorema de Pitágoras* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/60128>
- González, Y., Arias, I. y Picado, M. (2020). La homotecia: análisis conceptual y análisis de contenido. *Clame*, 33 (1), pp. 283-294. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/22405/1/Gonzalez2020La.pdf>
- Hervás, N. (2020). *Semejanza en el plano y Geometría*. (Tesis de maestría). Universidad de Jaén, Jaén, España. Recuperado de <http://tauja.ujaen.es/handle/10111953.1/13483>
- Ivorra, C. (s.f.). *Geometría*. España. Recuperado de <https://www.uv.es/ivorra/Libros/G.pdf>
- Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. L'université Louis Pasteur, Strasbourg, Francia (Tesis doctoral). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/34100113_Conception_realisation_et_resultats_d%27une_experience_d%27enseignement_de_l%27homothetie
- Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.11, (23), pp. 295-324. Recuperado de: <https://www.researchgate.net/publication/247164250>
- Mateo, P. (2020). *Semejanza: una propuesta didáctica para 2 ° de eso* (Tesis de maestría). Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España. Recuperado de <https://zaguan.unizar.es/record/98622?ln=es>
- Moral, S. (2019). *Semejanza y teorema de Tales: una propuesta didáctica para 2 ° de eso* (Tesis de maestría). Universidad de Jaén, Jaén, España. Recuperado de <http://tauja.ujaen.es/jspui/handle/10953.1/13525>
- Perú, Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje VII ciclo, Área Curricular de Matemática*. Lima. Recuperado de <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4425>

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas del aprendizaje VII ciclo, Área Curricular de Matemática*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-secundaria-matematica-vii.pdf>

Salazar, A. (2017). *Estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano cartesiano en el grado sexto* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/64040>



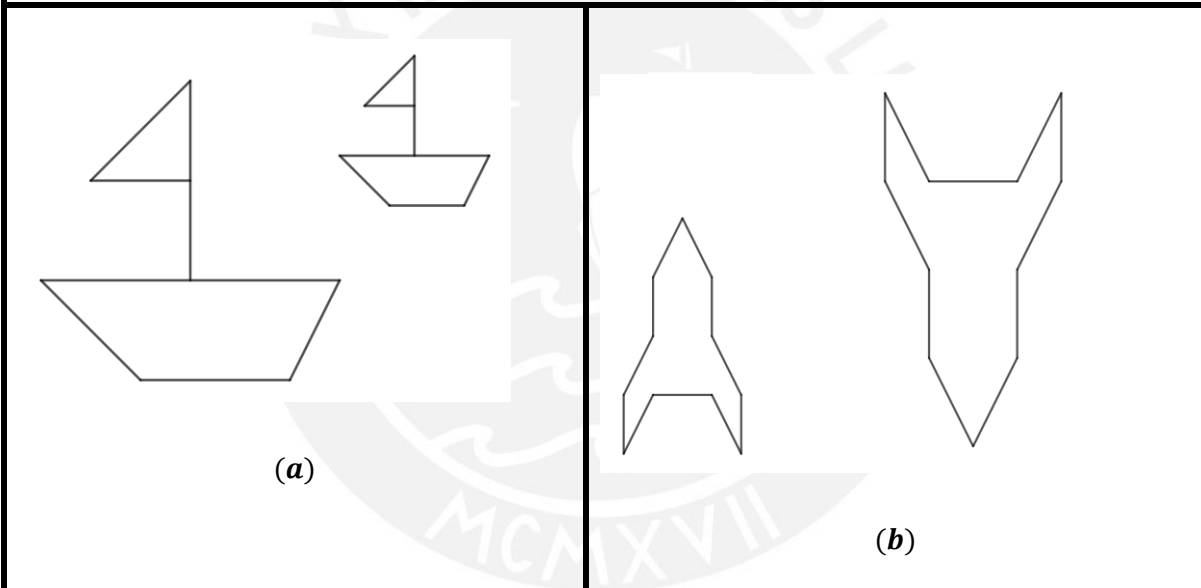
ANEXOS

Actividad 1 Con apoyo del software GeoGebra

Respecto a la figura (a):

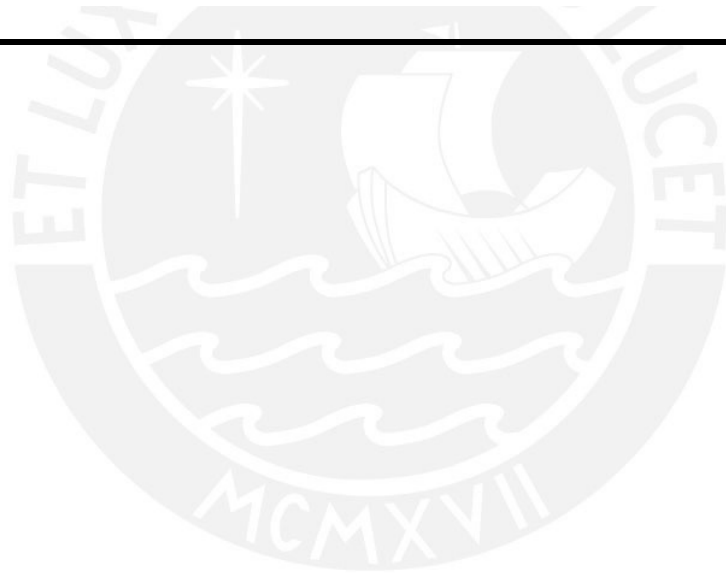
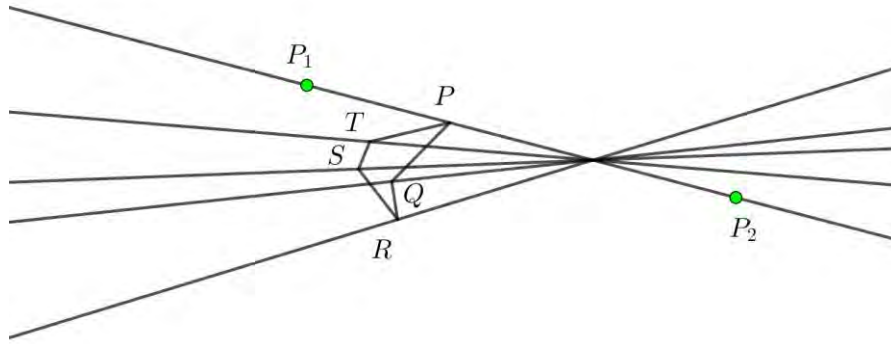
- Nombra todos los pares de puntos que ocupan el mismo lugar en la figura de la izquierda y la derecha, dichos puntos se denominan puntos homólogos.
- Traza rectas por cada par de puntos homólogos, a estas rectas las denominamos trazas.
- Ubica el punto de intersección de todas las rectas trazadas, dicho punto es denominado centro de homotecia.

Ahora, respecto a la figura (b) realizar las mismas instrucciones.



Actividad 2 Con apoyo del *software* GeoGebra

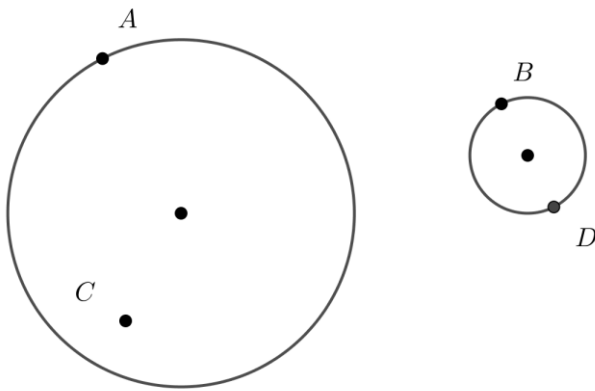
Si P_1 es un punto homólogo al punto P entonces construye una figura similar a la figura $PQRST$ que pase por P_1 . Luego realiza lo mismo respecto al punto P_2 ; sabiendo que P_2 también es homólogo a P .



Actividad 3 Con apoyo del *software* GeoGebra

Dadas las circunferencias, el punto A en la circunferencia de la izquierda, el punto C en el interior de dicha circunferencia y los puntos tanto B como D en la circunferencia de la derecha. Luego:

- (a) Si el punto A tiene como homólogo al punto B entonces ubica el punto homólogo al punto C .
- (b) Si el punto A tiene como homólogo al punto D entonces ubica el punto homólogo al punto C .



Actividad 4 Con apoyo del *software* GeoGebra

Dados los rectángulos:

- Ubica los posibles centros de homotecia en la figura.
- Establece relaciones numéricas al comparar las longitudes de los lados homólogos en la figura.
- Establece relaciones numéricas al comparar las longitudes de los segmentos obtenidos al trazar las rectas que pasan por puntos homólogos en la figura.

