PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

Propuesta didáctica para la enseñanza de inecuaciones cuadráticas en el marco funcional

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Aarón Juan Huamán Tafur

Asesor:

Elton John Barrantes Requejo

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Elton John Barrantes Requejo, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado
Propuesta didáctica para la enseñanza de inecuaciones cuadráticas en el marco funcional, del autor Aarón Juan Huamán Tafur, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 10%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 13/07/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: San Miguel, 15 de julio de 2025

<table>
<tr><td colspan="2">Apellidos y nombres del asesor: Barrantes Requejo Elton John</td></tr>
<tr><td>DNI: 40298896</td><td rowspan="2">Firma
</td></tr>
<tr><td>ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2668-9032</td></tr>
</table>

A mi padre, que aunque ya no está físicamente conmigo, su recuerdo, sus enseñanzas y su ejemplo siguen guiando cada uno de mis pasos. Esta meta alcanzada también es tuya.

A mi madre, por su amor incondicional, su fortaleza incansable y por ser mi refugio en los momentos más difíciles. Gracias por enseñarme a no rendirme.

A mis hermanos, por estar siempre a mi lado, por su apoyo constante y por creer en mí aun cuando yo dudaba. Esta tesis es también el reflejo del amor y la unidad que me han dado.

A cada uno de ustedes, con todo mi corazón, gracias.

Agradecimiento

Al culminar esta etapa tan importante de mi formación académica y profesional, deseo expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que, de una u otra manera, hicieron posible la realización de esta tesis.

En primer lugar, mi gratitud al Mg. Elton John Barrantes Requejo, quien me acompañó como asesor durante todo este proceso. Su paciencia, compromiso y dedicación fueron fundamentales para guiarme en el diseño de la secuencia didáctica y en la estructuración general del trabajo. Siempre encontré en sus orientaciones una mirada crítica, constructiva y motivadora, que me permitió avanzar con claridad, precisión y confianza. Gracias por creer en el valor de este proyecto y por impulsarme a dar lo mejor de mí en cada etapa.

Extiendo también mi sincero reconocimiento a las distinguidas miembros del jurado, la Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre y la Dra. Maritza Luna Valenzuela, por sus valiosos aportes durante el proceso de revisión. Sus observaciones y sugerencias no solo enriquecieron el contenido y la presentación de esta tesis, sino que también me ayudaron a definir mejor su rumbo y propósito académico. Agradezco profundamente su tiempo, compromiso y generosidad intelectual.

A mis profesores de la maestría, por haber compartido sus conocimientos con pasión y entrega. Cada curso, cada lectura y cada conversación dejaron huella en mi formación, aportando herramientas teóricas y prácticas que fueron esenciales para el desarrollo de esta investigación. Su acompañamiento y exigencia académica me motivaron a superarme y a comprender con mayor profundidad los desafíos de la educación.

A mis colegas y compañeros de la maestría, con quienes compartí este camino lleno de aprendizajes, desafíos y experiencias significativas. Su compañía, apoyo y espíritu colaborativo hicieron más llevadero este proceso. Las conversaciones, los debates y las ideas compartidas me enriquecieron tanto en lo académico como en lo personal.

Agradezco especialmente a mi centro de trabajo, “Esperanza y Caridad”, por brindarme el espacio, la confianza y el respaldo necesario para llevar a cabo esta investigación. Su apoyo fue clave para implementar la propuesta en un entorno real y significativo.

A mis queridos alumnos del colegio “Esperanza y Caridad”, en especial a las promociones 2024 y 2025, quienes participaron activamente en la implementación de la secuencia didáctica. Gracias por su entusiasmo, su energía y su disposición. Su participación dio vida a esta propuesta y me permitió comprobar, en la práctica, el impacto del trabajo desarrollado. Sin su compromiso, este estudio no habría sido posible.

Finalmente, a todos quienes, de una u otra manera, han contribuido a este logro: gracias. Esta tesis es también reflejo del acompañamiento, la generosidad y el compromiso de muchas personas que creyeron en mí.

Resumen

Esta tesis tiene como objetivo analizar el efecto que tiene, en términos de aprendizaje, la implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas, dirigida a estudiantes de cuarto y quinto año de secundaria. El trabajo se enmarca en la metodología de la ingeniería didáctica y se basa en la teoría de marcos de Régine Douady, pues permite interpretar los cambios de razonamiento que los estudiantes realizan al transitar entre diferentes marcos, en particular el algebraico y el funcional, durante la resolución de problemas matemáticos.

Se diseñó una secuencia didáctica compuesta por nueve actividades, resueltas únicamente con papel y lápiz, en las que se buscó provocar la movilización entre marcos. Las tareas, basadas en funciones lineales y cuadráticas, permitieron representar comparaciones gráficas y construir los conjuntos de solución desde un enfoque visual antes de abordar el tratamiento algebraico formal.

Los resultados mostraron que los estudiantes fueron capaces de activar razonamientos en el marco funcional al analizar gráficas de funciones y que, en muchos casos, lograron realizar transiciones efectivas hacia el marco algebraico. Las actividades favorecieron la comprensión del concepto de conjunto solución a partir de la observación de zonas de intersección o separación entre funciones. No obstante, se identificaron dificultades en la conversión entre marcos, especialmente al interpretar intervalos en relación con la representación gráfica, lo que se sugiere la necesidad de apoyos pedagógicos adicionales en esos puntos críticos.

El análisis posterior a la implementación confirmó una correspondencia significativa entre los comportamientos previstos y los observados, lo que valida la pertinencia del diseño propuesto. Asimismo, la secuencia permitió abordar errores frecuentes en la manipulación algebraica desde una perspectiva estructural. En lugar de considerar estos errores como simples fallos técnicos, se interpretaron como señales de una dificultad para movilizar y articular diferentes marcos de razonamiento. En este sentido, el enfoque teórico adoptado brindó herramientas potentes para promover la flexibilidad cognitiva y una comprensión más profunda del álgebra.

Se concluye que la propuesta didáctica desarrollada no solo resultó eficaz para la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas, sino que representa un modelo potencial de aplicación para otros contenidos del currículo de matemáticas del nivel secundaria. La articulación entre marcos, cuando es promovida mediante tareas cuidadosamente diseñadas, es una vía valiosa para fortalecer el pensamiento algebraico y superar obstáculos persistentes en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

Palabras clave: inecuaciones cuadráticas, cambio de marco, función lineal, función cuadrática

Abstract

This thesis aims to analyze the learning impact of implementing a didactic proposal for teaching quadratic inequalities for fourth- and fifth-year high school students. The work is framed within the methodology of didactic engineering and based on Régine Douady's frame theory, as it allows for the interpretation of the changes in reasoning that students make when moving between different frameworks, particularly algebraic and functional frameworks, when solving mathematical problems.

A teaching sequence was designed consisting of nine activities, solved solely with paper and pencil, which sought to provoke movement between frameworks. The tasks, based on linear and quadratic functions, allowed for graphical comparisons and the construction of solution sets from a visual perspective before addressing the formal algebraic treatment.

The results showed that students were able to activate reasoning within the functional framework when analyzing function graphs and, in many cases, were able to make effective transitions to the algebraic framework. The activities fostered understanding of the solution set concept through the observation of intersection or separation zones between functions. However, difficulties were identified in converting between frameworks, especially when interpreting intervals in relation to graphical representation, suggesting the need for additional pedagogical support at these critical points.

Post-implementation analysis confirmed a significant correspondence between expected and observed behaviors, validating the relevance of the proposed design. Furthermore, the sequence made it possible to address common errors in algebraic manipulation from a structural perspective. Rather than considering these errors as simple technical glitches, they were interpreted as signs of difficulty mobilizing and articulating different reasoning frameworks. In this sense, the theoretical approach adopted provided powerful tools to promote cognitive flexibility and a deeper understanding of algebra.

It is concluded that the developed teaching proposal was not only effective for teaching quadratic inequalities but also represents a potential model for application to other content areas of the secondary mathematics curriculum. The articulation between frameworks, when promoted through carefully designed tasks, is a valuable way to strengthen algebraic thinking and overcome persistent obstacles in the teaching and learning of school algebra.

Keywords: quadratic inequalities, frame shift, linear function, quadratic function

Índice

Lista de tablas

Introducción

La enseñanza de las inecuaciones cuadráticas en la educación secundaria plantea desafíos significativos, desde el punto de vista didáctico como cognitivo. Este contenido matemático suele ser abordado tradicionalmente desde un enfoque puramente algebraico, lo que lleva a los estudiantes a aplicar procedimientos de manera mecánica sin una comprensión profunda del concepto de conjunto solución ni de las relaciones entre las expresiones algebraicas y su representación gráfica. Frente a esta situación, la presente tesis propone una secuencia didáctica basada en la teoría de marcos desarrollada por Régine Douady, cuyo eje principal es fomentar el cambio entre el marco algebraico y el marco funcional para favorecer una comprensión más completa y significativa del objeto matemático en cuestión.

La propuesta se dirige a estudiantes de cuarto y quinto de secundaria. Es un nivel en el que ya se espera un dominio básico del estudio de funciones lineales y cuadráticas. A partir de estos conocimientos previos, se diseñó una secuencia de nueve actividades desarrolladas exclusivamente con papel y lápiz. Estas actividades fueron pensadas para inducir de forma progresiva el tránsito entre marcos, lo que permite a los estudiantes representar y analizar inecuaciones cuadráticas desde el punto de vista simbólico como gráfico. Para llevar a cabo el diseño, la implementación y el análisis de esta propuesta se adoptó como metodología la ingeniería didáctica, lo que permitió estructurar el trabajo en etapas bien definidas y coherentes con los objetivos planteados.

El desarrollo de la tesis se presenta en siete capítulos organizados de manera progresiva. En el primer capítulo, se expone el planteamiento del problema, donde se contextualiza las dificultades observadas en la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas, y se formula la pregunta de investigación junto con los objetivos generales y específicos que guían el estudio. En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico y metodológico, en el que se aborda la teoría de marcos como fundamento conceptual, así como los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos que configuran el enfoque adoptado para el análisis del objeto matemático. En este capítulo se justifica el uso de la ingeniería didáctica como estrategia metodológica para el desarrollo de la propuesta.

En el tercer capítulo, se describe el diseño de la secuencia de actividades y se realiza el análisis a priori en el que se anticipan los tratamientos y conversiones esperados por parte de los estudiantes al enfrentar las tareas. Este análisis se sustenta en los marcos teóricos previamente presentados, y permite prever dificultades potenciales y comportamientos esperados. En el cuarto capítulo, se aborda la implementación de la secuencia en el aula, donde se detallan las condiciones en que se llevó a cabo la experimentación, el perfil de los participantes y los aspectos logísticos del proceso. Se evidencia que todas las actividades fueron realizadas únicamente con papel y lápiz sin uso de entrevistas ni recursos digitales.

En el quinto capítulo, se procede con el análisis y discusión de los resultados obtenidos durante la implementación. Esto implica examinar las producciones de los estudiantes a la luz de las expectativas definidas en el análisis a priori. En el sexto capítulo, se realiza el análisis a posteriori, centrado en los tratamientos y conversiones realizados por los estudiantes, así como en el impacto que tuvo el cambio de marco en su comprensión del concepto de conjunto solución. Finalmente, en el séptimo capítulo, se presentan las conclusiones alcanzadas en función de los objetivos específicos. Se formulan recomendaciones para la práctica docente y se sugieren líneas de investigación futura, lo que destaca el potencial del enfoque de marcos para otros contenidos del currículo de matemáticas.

En su conjunto, esta tesis busca aportar a la didáctica de las matemáticas una propuesta de enseñanza de las inecuaciones cuadráticas que supere el enfoque puramente algorítmico. Por ello, integra marcos diversos que favorezcan la comprensión conceptual, la flexibilidad cognitiva y el sentido matemático. La implementación de esta propuesta permite evidenciar que el tránsito entre marcos no solo mejora el aprendizaje del contenido específico sino que desarrolla en los estudiantes capacidades fundamentales para el pensamiento algebraico.

Capítulo I: Planteamiento del problema

El presente capítulo se enfoca en el análisis del problema que origina esta investigación, centrado en las dificultades que enfrentan los estudiantes al momento de resolver inecuaciones, especialmente aquellas de segundo grado. Para ello, se empieza con el reconocimiento de los errores comunes que se presentan en el aula al abordar estos contenidos y se relaciona con la aplicación mecánica de procedimientos algebraicos que carecen de sentido conceptual. En este marco, se exploran distintos estudios e investigaciones previas que abordan esta problemática desde enfoques diversos, tales como propuestas didácticas basadas en el uso de representaciones gráficas, secuencias diseñadas desde la ingeniería didáctica, entre otros. Este recorrido permite fundamentar la pertinencia de diseñar una propuesta de enseñanza que fomente la conversión entre marcos algebraico y funcional con el objetivo de favorecer una comprensión más profunda de las inecuaciones cuadráticas en estudiantes de secundaria. A lo largo del presente capítulo, se expone el planteamiento del problema, la revisión de investigaciones relevantes, la justificación del estudio y, finalmente, la formulación de la pregunta y los objetivos que guiarán el desarrollo de esta investigación.

1.1 Planteamiento del problema

En la didáctica de las matemáticas, diversos estudios han identificado dificultades recurrentes en la resolución de inecuaciones lineales por parte de los estudiantes. Por ejemplo, Ruiz Carbajal (2019) señala que los alumnos de tercer año de secundaria presentan errores como la confusión entre ecuaciones e inecuaciones, el desconocimiento de las propiedades de las desigualdades y las dificultades en la interpretación de los símbolos matemáticos. Estos errores se deben, en parte, a la tendencia de aplicar procedimientos de resolución de ecuaciones directamente a las inecuaciones sin considerar las particularidades de estas últimas. Además, Gómez (2018) destaca que los materiales didácticos utilizados en la enseñanza secundaria suelen enfocarse en técnicas algebraicas sin abordar adecuadamente los aspectos conceptuales, lo que limita la comprensión profunda de las inecuaciones por parte de los estudiantes. Estas investigaciones subrayan la necesidad de replantear las estrategias de enseñanza para abordar eficazmente las dificultades en el aprendizaje del álgebra.

En particular, la resolución de inecuaciones cuadráticas representa un desafío significativo para el aprendizaje de muchos estudiantes. Desde nuestra experiencia docente, se ha constatado que si solo se usa el álgebra, hay problemas al aplicar algoritmos sin comprensión.

Según la investigación de Vracken et al. (2010) mencionan: “En particular, la interpretación de las inecuaciones como relación entre funciones implica la consideración de argumentos geométricos” (p.65). En este sentido, se observa que representar una inecuación cuadrática o lineal como una comparación de funciones, según el estudio, mejora significativamente la comprensión de los estudiantes y, a su vez, se apoyan en el uso de tecnologías al representar gráficamente cualquier tipo de función. Este enfoque podría adaptarse a las inecuaciones cuadráticas sin la necesidad del uso de algún software para el aprendizaje de los estudiantes.

En las diversas investigaciones sobre inecuaciones que presentaremos en la siguiente sección, se describen propuestas innovadoras para la enseñanza de las inecuaciones lineales en alumnos de últimos años de estudios básicos e inecuaciones cuadráticas en estudiantes de primeros ciclos de estudios superiores. Esto muestra el interés de la comunidad de investigadores en educación matemática para identificar formas alternativas de abordar la enseñanza de estos temas.

1.2 Investigaciones de referencia

Se considera importante revisar los trabajos de investigación realizados sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión de inecuaciones cuadráticas. Para ello, se ha revisado diversos repositorios institucionales como el de la Pontificia Universidad Católica del Perú, la Universidad Católica de Valparaíso, bases de datos, buscadores académicos, entre otros recursos. De estos, se ha extraído revistas indexadas, tesis y reportes de investigación, que se relacionan de forma directa o indirecta con las dificultades a la hora de comprender las inecuaciones, además de brindar soporte a nuestra investigación.

El procedimiento sistemático considerado para localizar, analizar y revisar los artículos de investigación relacionados con los problemas en la comprensión de inecuaciones son identificar las dificultades que enfrentan los estudiantes en su aprendizaje y la enseñanza de este contenido en los niveles de secundaria y primeros cursos universitarios. Esto contribuye al ámbito de la didáctica de las matemáticas. Dentro de este contexto, se ha analizado aspectos específicos como los errores comunes al resolver inecuaciones, los obstáculos epistemológicos y didácticos que interfieren en su adecuada interpretación, así como las estrategias pedagógicas más efectivas para superarlos. Además, la representación gráfica de inecuaciones se ha reconocido como un componente clave en su comprensión conceptual. Con respecto a la población de estudio, se ha centrado principalmente en estudiantes de secundaria y universitarios de nivel introductorio, y las investigaciones se han consultado en español e inglés. Las fuentes relevantes incluyeron tesis, artículos y revistas indexadas disponibles en repositorios institucionales y bases de datos académicas, especialmente aquellas que abordan las inecuaciones desde una perspectiva didáctica. Las palabras clave asociadas a esta línea de investigación fueron errores comunes al resolver inecuaciones e inecuaciones en didáctica de las matemáticas. Estas se han organizado en categorías a priori, pues permitieron organizar la información.

Se consideró los artículos que se encontraron ubicados en revistas on-line. Los artículos que no se ubicaron en las bases de datos registradas on-line fueron proporcionados por colegas u autores de otras instituciones universitarias lo que complementó esta búsqueda.

Sin duda alguna, no son pocas las personas que han trabajado el objeto de las inecuaciones, ya que, a nivel nacional como en el extranjero, cada uno de ellos han encontrado alguna problemática asociada a este objeto.

1.2.1. Dificultades en la comprensión de inecuaciones: primeras observaciones teóricas

Boero (1998) resalta las deficiencias en el enfoque tradicional para enseñar inecuaciones. Por ende, plantea interrogantes sobre si ciertos elementos como los docentes, las políticas educativas o los materiales didácticos contribuyen en la falta de interés lo que dificulta la comprensión de este concepto.

A la luz de estos antecedentes, se plantea articular los diferentes tipos de marcos que conocen los estudiantes de educación superior con énfasis en el marco funcional, dando relevancia al uso de los axiomas de orden del cuerpo de los reales. Al respecto, Barbosa (2006) menciona lo siguiente:

> Un esquema para un concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos y objetos a la que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Las diversas construcciones se encuentran conectadas, conscientemente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo (p.26).

Afirma que se carece de actividades didácticas enfocadas en la interpretación del esquema gráfico de las inecuaciones, lo que genera dificultades en la comprensión de la noción de conjunto solución de una inecuación por parte de los estudiantes

1.2.2. Modelos y propuestas didácticas innovadoras

Se consideró un artículo de investigación dirigido por Maroto (2013), cuyo objetivo fue examinar los conceptos fundamentales del enfoque constructivista y diseñar una secuencia didáctica que permita abordar el estudio de las inecuaciones de primer grado con una incógnita. El autor encontró que, para enseñar inecuaciones, es esencial usar ejemplos reales, considerar el contexto del estudiante, sus conocimientos previos, y fomentar la reflexión y resolución de problemas. Entre los errores encontrados por el autor, halla lo siguiente: (a) No identifican los signos de la desigualdad, pues confunden el "mayor que" por "menor que" o viceversa; (b) El conjunto de solución de una inecuación son números reales, pero los estudiantes solo toman en cuenta a los enteros; y (c) Hay estudiantes que solo comprenden el algoritmo de solución, por tanto, lo confunden con una ecuación, ya que cuando se presenta cambiar la desigualdad no entienden por qué.

Por otra parte, es importante indicar que el grupo de investigación estuvo constituido por estudiantes de educación secundaria, aunque no especifica las edades. En las conclusiones, se puede indicar que para el aprendizaje de las inecuaciones es fundamental que los docentes diseñen diversas situaciones que faciliten a los estudiantes la comprensión del concepto, la formulación del procedimiento para resolverlas, así como su aplicación y análisis en distintos contextos (Maroto, 2013). Finalmente, manifiesta que es necesario la enseñanza de las inecuaciones, y se debe realizar analizando los símbolos y el mismo procedimiento. Para ello, indica que es importante emplear situaciones de la vida real.

Por otro lado, Sánchez (2012) plantea una aplicación y análisis de una secuencia didáctica destinada a superar las dificultades que enfrentan los estudiantes al comprender los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas y resolver problemas que requieren el uso de este objeto matemático.

La ingeniería didáctica fue el proceso metodológico utilizado para concebir, realizar, observar y analizar la situación didáctica al enfrentar los comportamientos esperados y observados en la experimentación con los estudiantes de estudios superiores. Los conocimientos previos necesarios sobre desigualdades, la importancia de la motivación con problemas contextualizados y el uso de la función cuadrática como apoyo fueron considerados al organizar la secuencia didáctica. En esa investigación, participaron veintiséis estudiantes de la Escuela de Artes & Diseño Gráfico Empresarial de la Universidad Señor de Sipán. Para ello, se utilizó la secuencia didáctica con el fin de recopilar datos relevantes durante el proceso de aprendizaje de este tema matemático.

Las actividades aplicadas ayudaron a lograr los objetivos de que los estudiantes comprendan los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas y cómo se pueden utilizar para resolver problemas contextualizados. En la secuencia, se hizo uso de gráficas de funciones como herramienta de enseñanza de inecuaciones. Esto permitió obtener resultados favorables, ya que los estudiantes se adaptaban de una mejor manera en el desarrollo de la misma.

1.2.3. Enfoques basados en conversiones y el uso de tecnología

El estudio de Vrancken y Engler (2010) resalta la complejidad del aprendizaje de las inecuaciones lineales y menciona las dificultades que los alumnos de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral presentan. Resalta la necesidad de que los estudiantes puedan diferenciar y combinar las distintas formas en que estos conceptos se manifiestan.

Este estudio aborda la enseñanza de inecuaciones algebraicas a través de una secuencia de actividades diseñadas para trabajar con los alumnos, que pretende que ellos trabajen en la interpretación, resolución y representación de inecuaciones algebraicas. Para esto, utilizan diversos sistemas de representación tales como el gráfico, algebraico y conjuntista. Se afirma que la interacción entre distintos tratamientos favorece la comprensión de los conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. A continuación, se detalla la actividad propuesta para este estudio:

Enunciado actividad

Sea la inecuación $-x^2 - 5x - 4 < 0$.

En esta inecuación, los estudiantes deben realizar diferentes tareas:

- Representar gráficamente las funciones
- Encontrar los puntos de intersección de las gráficas
- Indicar los valores para los cuales se cumple la desigualdad
- Escribir el conjunto solución de la inecuación en lenguaje coloquial, en notación conjuntista y como intervalo

Esta actividad proporciona la resolución de inecuaciones cuadráticas desde diferentes perspectivas, lo que contribuye a la comprensión de la notación de conjunto solución. La metodología incluyó trabajo en grupos seguido de lo individual con presentación de informes escritos. Se observó que los estudiantes optaban por recurrir a la resolución algebraica en lugar de explorar otras opciones, lo que sugiere resistencia a la diversificación de enfoques. Asimismo, resalta la importancia de permitir diferentes perspectivas y el fomento de la interacción en el aula, la búsqueda de soluciones alternativas y la argumentación para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Por último, en las conclusiones tradicionales caracterizadas por soluciones estrictamente algebraicas de este estudio, menciona que la metodología resultó más efectiva que las formas de enseñanza previas, lo que permite una integración de contenidos y un amplio manejo gráfico que enriqueció el significado atribuido por los estudiantes a este tema matemático. El uso reflexivo de software matemático facilitó la comprensión de conceptos y promovió un enfoque dinámico y visual en el aprendizaje. Además, la experiencia permitió a los docentes reflexionar sobre su práctica pedagógica, ya que resalta la importancia de permitir diferentes enfoques y promover un aprendizaje significativo a través de la interacción en el aula, la búsqueda de soluciones alternativas y la argumentación. En resumen, se resalta los beneficios de la propuesta de enseñanza de inecuaciones algebraicas, y enfatiza la integración de contenidos y el uso de software matemático para favorecer el aprendizaje.

En relación con la investigación de Garrido (2017), desarrollada en Chile, aborda un problema común de los estudiantes al iniciar una carrera relacionada con las ciencias, específicamente con el tema de inecuaciones. Se ha reconocido que los estudiantes de primer año de educación superior tratan a las inecuaciones como ecuaciones, lo cual se evidencia cuando resuelven inecuaciones racionales formadas por expresiones de primer grado. Al respecto, Barboza (2008) no estaría de acuerdo debido a la falta de esquemas gráficos al resolverlo con un esquema netamente algebraico.

Garrido (2017) realizó un análisis descriptivo de los tratamientos utilizados por los estudiantes, lo que le llevó a investigar cómo llegaron a encontrar el conjunto solución de este tipo de inecuaciones.

Al mismo tiempo, implementó la metodología del estudio de clases. Esto le permitió una reflexión sobre las prácticas que llevaron a cabo en el aula, que aborda la planificación hasta la observación y revisa cómo los docentes entregan las herramientas a sus alumnos para trabajar el objeto de las inecuaciones. Se planearon diversas actividades para evaluar cómo los alumnos resolvían las ecuaciones. Luego, en forma individual, los estudiantes desarrollaron nuevas ideas.

A partir de los resultados obtenidos al abordar situaciones sobre inecuaciones lineales, cuadráticas y racionales, se pudo observar que se requieren de varios prerrequisitos (Números reales, Operaciones básicas, Álgebra básica, Ecuaciones lineales de una variable, Propiedades de las desigualdades, Representación gráfica en la recta numérica) para que el estudiante pueda visualizar correctamente la gráfica que representará la solución de la inecuación en cuestión.

En la experiencia desarrollada, se observó que era necesario que el docente guiara paso a paso a los estudiantes con la finalidad de que relacionen la gráfica de la función con la inecuación dada y a partir de ello, puedan reconocer la solución de la inecuación solicitada. Con este trabajo, se logró que la mayoría de estudiantes visualizara el conjunto solución. Hoy en día existen muchas alternativas tecnológicas que podrán servir de apoyo para graficar funciones, sin duda alguna, el desafío se encuentra en realizar tratamientos.

Así mismo, Bucurú (2019), en su trabajo de investigación para optar el grado de magíster en enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Pereira – Colombia, tuvo como objetivo determinar si el programa MOOC, creación de secuencias didácticas utilizando el internet, tiene un efecto positivo en la enseñanza aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones en la institución educativa Nueva Granada con estudiantes del undécimo grado.

El autor adoptó una metodología cualitativa de enfoque descriptivo-interpretativo, orientada en su sentido más amplio a la investigación que genera datos descriptivos. Esto incluye las palabras expresadas por las personas, ya sean habladas o escritas, grabaciones de audio, hojas de respuestas y cuadros de trabajo de los estudiantes. Posteriormente, él procedió a describir, analizar y relacionar esta información en función de los fenómenos que se desarrollan de manera natural en el aula durante la aplicación del MOOC sobre desigualdades e inecuaciones.

El grupo elegido para la investigación fue de treinta estudiantes, entre 15 y 19 años, quienes estudian en la institución educativa Nueva Granada. El procedimiento de la aplicación de la propuesta presenta cinco etapas:

- La primera etapa consiste en realizar el diagnóstico de la problemática de enseñanza. Esto implica analizar los resultandos de las evaluaciones tomadas a los estudiantes.
- En la segunda etapa, se recopila la información bibliográfica sobre los MOOC, las TICs, el enfoque socio constructivista, el conectivismo, teorías de aprendizaje y del objeto matemático inecuaciones y desigualdades.
- La tercera etapa se encarga de diseñar o construir los recursos y actividades sobre inecuaciones que se implementarán en el MOOC. Para ello, se utiliza la plataforma wix.
- En la cuarta etapa, se aplica el MOOC como una herramienta pedagógica en la plataforma wix a cuatro secciones del décimo primer grado para el objeto matemático inecuaciones y desigualdades.
- En la quinta etapa, se evalúa la utilización de la herramienta MOOC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial del objeto inecuaciones y desigualdades.

Entre las principales conclusiones de esta investigación, se destaca que una condición esencial para comprender las inecuaciones es la representación del objeto matemático en múltiples formas facilitada por el uso del MOOC. Por esta razón, esto es importante para el docente, porque le permite crear y evidenciar dichas representaciones con la ayuda del MOOC sobre las desigualdades e inecuaciones de la secuencia didáctica. Por lo tanto, esta investigación es importante, porque permite desarrollar el objeto matemático inecuaciones lineales por medio de las TIC en este caso un MOOC.

1.2.4. Problemas específicos en la comprensión y resolución de inecuaciones

En la investigación de Iparraguirre (2021), se observa que los estudiantes son capaces de resolver inecuaciones lineales mediante la aplicación de procedimientos prácticos, lo que evidencia una familiaridad básica con el tema. Sin embargo, en muchos casos, dicha resolución se realiza de forma mecánica, sin una comprensión profunda de los fundamentos conceptuales que justifican cada paso. Esto refleja una brecha en la comprensión conceptual de las inecuaciones, especialmente en lo referente al significado de las desigualdades y las reglas que rigen su manipulación. El estudio se distingue por un análisis detallado de las formas en que los estudiantes abordan tanto problemas algebraicos como situaciones que implican el planteamiento de inecuaciones. Asimismo, destaca la relevancia de las inecuaciones lineales como contenido clave que sirve de base para otros temas matemáticos como el dominio y rango de funciones, programación lineal, sistemas de inecuaciones, inecuaciones cuadráticas, etc.

1.3 Justificación de la investigación

Considerando que el Currículo Nacional del Perú contempla las inecuaciones lineales, así como las funciones lineales y cuadráticas, se puede recurrir a estos contenidos como base para introducir, de manera progresiva, la noción de inecuaciones cuadráticas en los niveles de cuarto y quinto de secundaria. Aunque dicho tema no se menciona de forma explícita en el currículo, su abordaje puede facilitarse a través de una interpretación gráfica que favorezca la comprensión conceptual por parte del estudiante.

Las investigaciones de Barboza (2003) evidencia la existencia de problemas en el entendimiento de las inecuaciones cuadráticas. Por esta razón, se ha propuesto la tarea de encontrar o elaborar una serie de recursos didácticos para facilitar dicho propósito e implementarlo con estudiantes de secundaria aprovechando los conocimientos que ellos hayan adquirido.

En las conclusiones de Garrido (2017), se pudo observar que, pese a la implementación de gráficas de funciones al momento de enseñar inecuaciones de segundo grado, se evidencian dos problemas: a la hora de factorizar y el cómo interpretar las gráficas de funciones al momento de hacer uso de las tecnologías.

Ante ello, este trabajo de investigación busca aportar en el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de inecuaciones cuadráticas. Se priorizará el desarrollo de problemas que pueden ser abordados a través de cambios de marco, lo que permitirá analizar el conjunto solución de las inecuaciones cuadráticas a partir de la gráfica de funciones.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

El presente trabajo se plantea la siguiente pregunta de investigación:
¿Cuál es el efecto que tiene, en términos de aprendizaje, la implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de inecuaciones cuadráticas, basada en actividades que demanden el cambio del marco algebraico al marco funcional y la conversión entre diversos registros de representación?
Para responder a esta pregunta se plantea los siguientes objetivos de investigación:

1.4.1 Objetivo general

Analizar el efecto que tiene en términos de aprendizaje la implementación de una propuesta didáctica para la enseñanza de inecuaciones cuadráticas apoyada en el marco funcional y que demande la conversión entre diversos registros de representación semiótica.

1.4.2 Objetivos específicos

Con el fin de cumplir con el objetivo general, se propone alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las variables didácticas, tipo de función y conjunto solución, que serán útiles para la elaboración de actividades
- Diseñar una propuesta didáctica que integre actividades con las variables didácticas, orientadas a resolver inecuaciones cuadráticas a partir del estudio gráfico de funciones lineales y cuadráticas
- Identificar tratamientos y conversiones que deberían realizar los estudiantes al realizar inecuaciones cuadráticas
- Describir y analizar los tratamientos, y conversiones que realizan los estudiantes al resolver problemas sobre inecuaciones cuadráticas
- Analizar en qué medida, la realización de las tareas sobre inecuaciones cuadráticas en el marco funcional contribuyó a la comprensión de este tipo de situaciones

Capítulo II: Marco teórico y metodológico

En el presente capítulo, se aborda los fundamentos de la Teoría de Cambio de Marcos que es base para el diseño de la propuesta didáctica que luego será valorada para que a través de un marco apropiado (funcional) puedan tener una mayor comprensión al analizar el conjunto solución de una inecuación cuadrática. Así mismo, se presenta la ingeniería didáctica como metodología de investigación que nos permitirá diseñar, aplicar, observar y analizar las secuencias de enseñanza y validar la presente investigación.

2.1 Marco teórico

La presente investigación se sustenta en la Teoría de Marcos presentada por Regine Douady (1986).

Según Douady (1995), los conceptos matemáticos tienen un carácter no unitario e identifica en ellos dos polos o dimensiones principales. Por un lado, está el aspecto objeto, plasmado en definiciones. Por otro lado, están las propiedades características del aspecto instrumental, que permiten a una persona emplearlo al llevar a cabo una tarea en un momento específico.

Por otra parte, un marco es un dominio de las matemáticas que se encuentra delimitado por los objetos que lo constituyen, por las relaciones que se establecen entre dichos objetos y por los tipos de representaciones y tratamientos que se pueden movilizar en su interior. Al respecto, Douady (1984) menciona lo siguiente:

> Escogemos para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos, unos problemas en los cuales estos conocimientos intervienen en al menos dos marcos. Privilegiamos los marcos (en realidad los problemas) en los cuales el error en la correspondencia es creador de desequilibrios que deben ser compensados (p.18).

Según Douady (1986), estas presentaciones han sido tratadas utilizando distintas nociones surgidas en el campo didáctico a través de un cambio de marco o "jeux de cadres" lo cual indica que el cambio de marcos es la herramienta que usa el estudiante para trabajar un mismo problema y que a su vez facilita la comprensión del mismo.
Del mismo modo, se detalla lo siguiente:

- El marco funcional sirve para esquematizar y entender una expresión algebraica que cumple ciertos parámetros para que esta se pueda representar a través de una gráfica de función.

Características

- Usa letras (variables), números y signos de operaciones como +, −, ×, ÷.
- Se enfoca en manipulación simbólica: resolver ecuaciones, simplificar expresiones, factorización, etc.
- Favorece el razonamiento lógico y la deducción formal.
- Es útil para encontrar soluciones exactas.

● El marco algebraico consiste en que los estudiantes ya conocen sobre las ecuaciones, es decir, ellos pueden plantear el problema mediante la organización de los datos y las incógnitas.

Características

- Se centra en la relación entre una variable dependiente y una independiente.
- Utiliza múltiples representaciones de funciones:
  a) Tablas de valores
  b) Expresiones algebraicas
  c) Gráficas
- Diagramas de flechas
- Permite interpretar el comportamiento de una función: crecimiento, decrecimiento, continuidad, etc.
- Promueve el análisis cualitativo y cuantitativo de las relaciones.

Tabla 1

Diferencias y relación entre el marco algebraico y el marco funcional

Característica	Marco Algebraico	Marco Funcional
Representación central	Ecuaciones, expresiones simbólicas	Relaciones entre variables (funciones)
Foco principal	Resolución y manipulación simbólica	Comprensión de relaciones y variaciones
Herramientas típicas	Igualdades, operaciones	Tablas, gráficas, dependencia funcional
Tipo de razonamiento	Deductivo y formal	Analítico, visual e interpretativo

Nota.- Elaboración propia

En nuestra propuesta, el cambio de marcos será de suma importancia, ya que se pretende que el estudiante pueda tener una mejor percepción de la comparación de funciones. Para ello, debe pasar del marco algebraico al marco funcional en las distintas tareas que realizaremos.

- Transferencia e interpretación: Los alumnos son enfrentados a un problema formulado en un marco algebraico. Para ello, se toma en cuenta sus conocimientos y sus procedimientos. El análisis que hacen del problema los lleva a traducir a un marco coloquial, pues interpreta en él las preguntas planteadas. Ante las dificultades presentadas en algunos alumnos, se da paso al marco funcional con el fin de poder encontrar en qué intervalos se cumple la desigualdad.

- Correspondencias imperfectas: La insuficiencia en los conocimientos previos de los estudiantes provoca correspondencias imperfectas entre los marcos conceptuales involucrados. Esta situación constituye una fuente de desequilibrio cognitivo, que puede evidenciarse en las dificultades o incertidumbres que surjan durante el desarrollo de actividades relacionadas con el estudio de las inecuaciones. Esto se debe a que se trata de la primera ocasión en la que los estudiantes se enfrentan a este tipo de situaciones matemáticas.

2.1.1. Descripción del tema

En base a lo anteriormente mencionado, se ha decidido diseñar un conjunto de actividades que permitan al estudiante comprender cómo determinar el conjunto solución de cualquier tipo de inecuación cuadrática. A partir del desarrollo del problema, se busca que, mediante actividades cuidadosamente elaboradas, los estudiantes logren un entendimiento más profundo al evaluar el conjunto solución. Para garantizar un análisis adecuado, se utilizará la teoría de marcos, lo que nos permitirá visualizar cómo se representa dicho conjunto en la recta real con el apoyo de gráficas de funciones.

2.1.2 Importancia del marco teórico

En una investigación en didáctica de las matemáticas, el marco teórico cumple una función esencial al proporcionar una base conceptual y metodológica que orienta el análisis del fenómeno educativo estudiado. En este caso, la implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas dirigida a estudiantes de cuarto y quinto de secundaria exige una fundamentación teórica sólida. Esto les permitirá comprender las dificultades de aprendizaje asociadas a este contenido y sustentar las decisiones didácticas tomadas en el diseño de la propuesta.

Asimismo, el marco teórico articula la aplicación de la metodología de la ingeniería didáctica, un enfoque propio de la investigación en didáctica de las matemáticas que propone un ciclo estructurado de análisis, diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas (Artigue, 1995). En este sentido, el marco teórico no solo contextualiza el problema en el campo disciplinar, sino que guía el desarrollo metodológico del estudio y proporciona criterios para interpretar los resultados observados en el aula.

Desde una perspectiva metodológica general, Hernández-Sampieri, Fernández-Collado y Baptista-Lucio (2014) señalan que el marco teórico permite sustentar el estudio con base en conocimientos ya consolidados. Esto consiste en identificar antecedentes relevantes, formular hipótesis y delimitar el campo de estudio. Por tanto, en el contexto de esta investigación, el marco teórico no solo orienta las decisiones didácticas y metodológicas, sino que legitima la propuesta desde una postura científica fundamentada.

2.1.3 Elementos metodológicos

Según Douady (1995), el término ingeniería didáctica se refiere a un conjunto de secuencias de clase que han sido planificadas, organizadas y articuladas de manera coherente por un profesor-ingeniero para llevar a cabo un proyecto de aprendizaje dirigido a una población específica de estudiantes. Dicho proyecto evoluciona en función de las reacciones de los estudiantes y de las decisiones que el docente realiza durante las interacciones en el aula. De esta manera, la ingeniería didáctica es tanto un producto que surge de un análisis previo como un proceso en el que el profesor implementa dicho producto. Ello implica una adaptación a la dinámica de la clase si es necesario.

La investigación se desarrollar bajo un paradigma cualitativo, pues los objetivos definidos determinan el enfoque metodológico a seguir (Martínez, 2006). En este caso, el diseño, la aplicación y el análisis de una secuencia didáctica constituyen los objetivos generales y específicos del estudio, y esto motivó la elección de elementos del método de ingeniería didáctica como base para su implementación.

De los diversos métodos cualitativos aplicables a la Educación Matemática, se opta por la ingeniería didáctica, porque permite abordar rigurosamente la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. En primer lugar, la ingeniería didáctica, desarrollada principalmente en el marco de la Didáctica de las Matemáticas francesa, permite establecer una articulación coherente entre teoría y práctica. Es un aspecto especialmente relevante cuando se abordan contenidos que suelen generar dificultades cognitivas y epistemológicas en los estudiantes como son las inecuaciones cuadráticas.

El proceso cíclico de la ingeniería didáctica está conformado por las fases de análisis preliminar, concepción y elaboración, experimentación y validación o análisis a posteriori.

Este proceso permite un diseño didáctico fundamentado en teorías del aprendizaje tales como la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Esto asegura que la propuesta responda a necesidades didácticas reales y, al mismo tiempo, esté sustentada en marcos teóricos pertinentes.

En el caso particular de las inecuaciones cuadráticas, la ingeniería didáctica permite considerar aspectos claves como la construcción del significado de desigualdad en distintos marcos (tanto algebraico como funcional), las dificultades comunes derivadas del paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico, y la comprensión del signo de la expresión cuadrática en distintos intervalos del eje real. Además, la ingeniería didáctica facilita el diseño de situaciones didácticas que promueven la desestabilización y posterior reconstrucción de los esquemas de pensamiento de los estudiantes, lo que favorece un aprendizaje más profundo y duradero.

Finalmente, el enfoque de la ingeniería didáctica permite evaluar y ajustar la propuesta en función de los resultados obtenidos durante la experimentación, lo que la convierte en una herramienta valiosa no solo para la intervención educativa, sino también para la investigación en el campo de la enseñanza de las matemáticas. Por lo tanto, se considera que la ingeniería didáctica contribuirá significativamente a planificar, organizar y articular las actividades en las que se propicie el uso del marco funcional, así como a evaluar la interacción de los estudiantes con los contenidos presentados.

2.2 Fases de la ingeniería didáctica

Las fases de la ingeniería didáctica en nuestro trabajo son las siguientes:

2.2.1 Análisis preliminar

De acuerdo con Artigue et al. (1995), esta fase abarca el análisis epistemológico de los contenidos, el estudio de las concepciones de los estudiantes sobre el objeto de estudio, junto con las dificultades y obstáculos asociados. Además, aborda la evaluación de las restricciones del contexto donde se desarrollará la situación didáctica. Este análisis se lleva a cabo en tres dimensiones.

2.2.1.1 Epistemológica

El estudio de las inecuaciones cuadráticas tiene raíces en la resolución de problemas prácticos desde la antigüedad, aunque inicialmente no existía la formalización del lenguaje algebraico. Civilizaciones como la babilónica resolvían problemas de áreas y longitudes, que hoy podrían expresarse mediante inecuaciones, utilizando técnicas geométricas. Fue en el

Renacimiento, con el desarrollo del álgebra simbólica, que las desigualdades comenzaron a tratarse formalmente (Katz, 2009).

La representación gráfica de soluciones de funciones cuadráticas ha sido el resultado de un proceso histórico gradual que refleja el desarrollo de conceptos fundamentales en el pensamiento matemático. Este recorrido, desde sus orígenes aritméticos y geométricos hasta su formalización analítica y didáctica, permite comprender el surgimiento de las herramientas actuales utilizadas en la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas. En el ámbito de la didáctica de las matemáticas, el rescate de este desarrollo histórico no solo permite contextualizar los conceptos sino humanizar el conocimiento matemático y promover un aprendizaje más significativo (Radford, 2006). En la Antigüedad, las civilizaciones como la babilónica resolvían problemas que hoy se reconocen como ecuaciones cuadráticas. Para ello, utilizaban procedimientos equivalentes al método de completar el cuadrado, aunque sin una formulación simbólica generalizada (Robson, 2007). En el período Helenístico, matemáticos griegos como Euclides abordaron problemas de segundo grado a través de construcciones geométricas. Para ello, estableció las bases de una representación visual de estas relaciones (Heath, 1956).

Durante la Edad de Oro islámica, el matemático persa Al-Juarismi sistematizó los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas en su obra Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala, donde se presentan procedimientos algebraicos que, aunque aún ligados a lo geométrico, sentaron las bases del álgebra como disciplina (Al-Khwarizmi, 1986). Posteriormente, en la India, Bhāskara II introdujo métodos algebraicos y fórmulas generales para ecuaciones cuadráticas, lo que contribuyó significativamente al avance del simbolismo matemático (Joseph, 2011).

El Renacimiento europeo marcó un punto de inflexión con la introducción de la notación simbólica por François Viète. Permitió una mayor generalización en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Más tarde, John Wallis abordó la parábola desde una perspectiva analítica en su Treatise on Conic Sections (1655). Ello contribuyó a que exista un vínculo entre geometría y álgebra (Katz, 2009). En los siglos XVIII y XIX, el desarrollo del análisis matemático y el concepto formal de función promovieron la representación gráfica como una herramienta fundamental para el estudio de relaciones entre variables. Matemáticos como Euler, Lagrange y Gauss consolidaron el tratamiento algebraico de funciones y su visualización mediante gráficos cartesianos. Durante este periodo, las funciones cuadráticas comenzaron a enseñarse con un enfoque gráfico, lo que facilitó la comprensión de sus propiedades como vértice, eje de simetría y concavidad (Kline, 1990; Boyer & Merzbach, 2011).

La institucionalización del concepto de función en el siglo XIX, junto con el avance en la formalización del álgebra y el análisis, permitió que las funciones cuadráticas fueran integradas de forma sistemática en los programas escolares. La representación gráfica, en particular, se consolidó como una herramienta central en la enseñanza de las matemáticas, no solo para resolver ecuaciones, sino para interpretar y resolver inecuaciones a partir de la forma geométrica de la parábola (Artigue, 1995).

Desde una perspectiva didáctica, este recorrido histórico permite recuperar aspectos epistemológicos esenciales para la enseñanza de las funciones cuadráticas como el papel de la visualización, el tránsito de lo concreto a lo simbólico, y la integración del razonamiento geométrico y algebraico. La inclusión de elementos históricos en la enseñanza puede favorecer el desarrollo de una comprensión más profunda del conocimiento matemático y su evolución (Fauvel & Van Maanen, 2000).

2.2.1.2 Cognitiva

En el plano cognitivo, se observan diversas dificultades comunes en estudiantes al enfrentarse a inecuaciones cuadráticas. Entre ellas se destacan lo siguiente: interpretar la inecuación como una ecuación, dando solo las raíces como respuesta; no tener en cuenta el signo del coeficiente principal al interpretar la forma de la parábola; y no comprender que la solución es un conjunto de intervalos y no un valor único (Barbé et al., 2005).

Además, muchos estudiantes presentan dificultades al cambiar entre distintos marcos de referencia. Un ejemplo de ello es al pasar del marco algebraico al gráfico o al contextual. Según la Teoría de Marcos propuesta por Douady (1985), estos cambios requieren que el estudiante reconozca no solo las herramientas propias de cada marco sino las reglas y significados que en ellos operan. Las dificultades pueden surgir cuando el estudiante permanece anclado en un único marco, por ejemplo, el algebraico. Esto se debe a que no activa los conocimientos necesarios del marco gráfico o no establece correspondencias entre ellos. Esta rigidez puede limitar la comprensión global del problema y obstaculizar la resolución de inecuaciones cuadráticas en contextos significativos.

Desde el punto de vista lógico y algebraico, una inecuación cuadrática, en la variable x, puede representarse en su forma general como se observa en la siguiente imagen:

$$ax^2 + bx + c \begin{cases} > \\ < \\ \geq \\ \leq \end{cases} 0$$

Donde se busca determinar el conjunto de valores de la variable x que hacen verdadera la desigualdad. La resolución de esta expresión implica una serie de nociones matemáticas fundamentales cuya articulación es clave para su adecuada comprensión y enseñanza en el aula.

Es esencial que el estudiante comprenda el concepto de función cuadrática, definida por la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, y reconozca sus propiedades gráficas: vértice, eje de simetría, concavidad y puntos de corte con el eje x. Este conocimiento gráfico no solo refuerza la interpretación algebraica, sino que proporciona una visualización inmediata del signo que toma la función en distintos intervalos del dominio (Artigue, 1995; Kieran, 2007).

Para resolver una inecuación cuadrática, se suele proceder determinando las raíces de la ecuación asociada $ax^2 + bx + c$. Esto puede hacerse mediante factorización, fórmula general o completando el cuadrado. Estas raíces, cuando existen, dividen la recta real en intervalos, dentro de los cuales la función cuadrática conserva su signo debido a su carácter continuo (Tall & Vinner, 1981). La continuidad de la función cuadrática, propiedad que asegura que su gráfica no presenta saltos ni discontinuidades, permite inferir que los cambios de signo solo pueden ocurrir en los puntos donde $f(x) = 0$, es decir, en sus raíces reales.

Cuando se han identificado estos intervalos, se realiza un análisis de signos. Para ello, se evalúa el valor de la función en un punto representativo de cada intervalo. Aquí, la comprensión del signo del coeficiente principal a cobra especial relevancia: si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y los valores de la función serán negativos entre las raíces y positivos fuera de ellas; si $a < 0$, ocurre lo contrario. Esta comprensión geométrica permite justificar las soluciones a la inecuación en función de la posición relativa de la parábola respecto al eje x (Sierpinska, 1992).

2.2.1.3. Didáctica

En la actualidad, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en la educación escolar, las inecuaciones cuadráticas se resuelven mediante diversos métodos que combinan enfoques gráficos, algebraicos y analíticos. Estos métodos permiten al estudiante comprender el comportamiento del trinomio cuadrático y determinar los intervalos en los cuales se verifica la desigualdad propuesta. A continuación, se describen los principales enfoques utilizados.

2.2.1.3.1 Método gráfico

Este método se basa en la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ asociada a la inecuación. El análisis consiste en identificar los intervalos del eje x donde la parábola se encuentra por encima o por debajo del eje horizontal, según la desigualdad planteada (Larson & Hodgkins, 2016). De esta forma, la resolución se apoya en la interpretación geométrica del signo del trinomio cuadrático y favorece la comprensión visual del problema.

2.2.1.3.2. Método algebraico (análisis de signos)

Este método, comúnmente enseñado en el álgebra secundaria y universitaria básica, consiste en resolver la ecuación cuadrática asociada para encontrar sus raíces reales y analizar el signo de la expresión en los intervalos definidos por estas soluciones (Sánchez, 2020). El procedimiento general comprende los siguientes pasos:

- Resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por factorización o utilizando la fórmula general.
- Determinar los puntos críticos (raíces) y dividir el dominio real en intervalos.
- Evaluar el signo del trinomio en cada intervalo mediante valores de prueba.
- Identificar los intervalos que satisfacen la inecuación original.

Este enfoque es ampliamente difundido por su carácter sistemático y su eficacia en contextos algebraicos puros.

2.2.1.3.3. Método del producto de factores

Cuando la expresión cuadrática es factorizable, se puede aplicar directamente el análisis del signo del producto. Por ejemplo, una inecuación como $(x - r_1)(x - r_2) > 0$ se resuelve determinando en qué intervalos el producto es positivo o negativo. Para esto, se considera el signo de cada factor (Baldor, 2006). El criterio aplicado es el siguiente:

- El producto es positivo si ambos factores son positivos o ambos son negativos.
- El producto es negativo si uno de los factores es positivo y el otro negativo.

Este método evita el desarrollo completo de la parábola y es especialmente útil cuando se trabaja con expresiones algebraicamente simples.

2.2.2 Concepción y análisis a priori

El investigador establece las variables didácticas relevantes para el problema en estudio. Para ello, utiliza la información que se ha recopilado en esta investigación en la sección denominada *Análisis preliminar*. Según Artigue et al. (1995), existen dos tipos de variables. En primer lugar, están las variables Macro-didácticas o globales que se asocian a la organización global de la ingeniería. En segundo lugar, están las micro-didácticas o locales. Estas están asociadas a la organización de una secuencia.

El objetivo de esta etapa es prever que las variables seleccionadas permitirán predecir qué es lo que los estudiantes podrán contestar en las actividades, que luego serán validados en la cuarta fase. Por lo tanto, el análisis a priori se compone de una sección descriptiva y otra predictiva, que incluye las siguientes actividades:

- Describir las variables micro-didácticas y las características de la situación didáctica.
- Analizar qué podría estar en juego, en términos de las posibilidades de acción, formulación y validación que el alumno tendrá durante la situación.
- Prever la interacción de los estudiantes frente a las actividades, en términos de respuestas y/o dificultades que presentará el estudiante durante la situación.

2.2.3 Experimentación

Según Artigue et al. (1995), en esta etapa, se realiza la situación planificada en el análisis a priori y se recopilan datos para describir los fenómenos identificados en el análisis previo. Luego, se empieza con las actividades diseñadas y detalladas con exactitud que se desarrollará en el apartado denominado *Duración y cronograma* de la presente investigación.

2.2.4 Análisis a posteriori y validación

Según Artigue et al. (1995), se recopila toda la información obtenida en la etapa anterior sobre las observaciones realizadas sobre la propuesta didáctica y las producciones de los estudiantes, seguido de una observación por cada ítem y un comentario de toda la actividad en cada una de ellas. Finalmente, se incluye la comparación del análisis previo y posterior, pues analiza cada ítem. Para esto, realiza comentarios y destaca los errores mayoritarios cometidos en cada actividad.

2.2.5 Logros esperados

Se espera que, al aplicar la propuesta didáctica diseñada en el marco de la Ingeniería Didáctica, los estudiantes serán capaces de resolver inecuaciones cuadráticas con apoyo en el marco funcional, lo que moviliza de forma integrada los conocimientos gráficos y algebraicos de funciones lineales y cuadráticas. Asimismo, se anticipa que los estudiantes serán capaces de identificar y utilizar adecuadamente variables didácticas como el tipo de función y el conjunto solución en contextos de resolución de problemas.

Durante la implementación de las tareas, se espera que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones pertinentes entre distintos marcos de trabajo (algebraico y funcional), lo cual permitirá describir y analizar los procesos cognitivos implicados en la comprensión de las inecuaciones cuadráticas. Finalmente, se prevé que el análisis de las producciones estudiantiles permita evaluar en qué medida la propuesta favorece el aprendizaje conceptual de este contenido matemático, lo que promueve una comprensión más profunda del significado de las soluciones en contextos funcional.

Capítulo III: Diseño y análisis a priori

En el presente capítulo, se detallará las condiciones a tener en cuenta previo a la experimentación, así como la presentación de las variables didácticas y la propuesta didáctica a través de nueve actividades.

3.1 Variables micro didácticas de la investigación

La propuesta didáctica fue diseñada a partir de un conjunto de variables didácticas. Su construcción se centró en la comparación de funciones como eje articulador con el propósito de favorecer el análisis y la resolución de inecuaciones cuadráticas desde una perspectiva funcional.

Asimismo, se ha tomado en cuenta algunas variables para estudiar las condiciones que permitan construir el conocimiento matemático considerado y que el control, manipulación o variación de esas condiciones reproduzca y optimice los procesos que se realizarán. Estas fueron consideradas a partir del análisis de cómo evolucionan las tareas sobre inecuaciones cuadráticas, donde se determinó algunas dificultades en la interpretación del signo de la desigualdad y la manipulación del trinomio cuadrático. Esto sirvió para elegir las siguientes variables, teniendo en cuenta que estas no son las únicas que existen.

a) Variable didáctica 1: signo de la desigualdad

- Inecuación cuadrática con desigualdades: $<, >, \leq y \geq$.

b) Variable didáctica 2: tipo de inecuación cuadrática teniendo en cuenta su discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):

- Factorizable en $\mathbb{R}$, donde su conjunto solución estará definido en los reales
- Factorizable en $\mathbb{R}$ con una raíz de multiplicidad doble
- No factorizable en $\mathbb{R}$

c) Variable didáctica 3: orientación de la función lineal "$f(x) = -bx + c$" teniendo la inecuación cuadrática simplificada de la forma "$ax^2 + bx + c = 0$":

- Cuando la gráfica de la función es horizontal ($b = 0$).
- Cuando la gráfica de la función es oblicua ($b \neq 0$).

Tabla 2

Variación de las variables didácticas y soluciones en relación a los ítems concatenados

	Variable Didáctica 1	Variable Didáctica 2	Variable Didáctica 3	Solución
Ítem a	g es menor que f	Factorizable en ℝ, donde su conjunto solución estará definido en los reales	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	El conjunto solución se encontrará entre los puntos de corte con intervalos abiertos.
Ítem b	g es mayor que f	Factorizable en ℝ, donde su conjunto solución estará definido en los reales	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	El conjunto solución se encontrará en las zonas externas a los puntos de corte con intervalos abiertos.
Ítem c	g es menor o igual que f	Factorizable en ℝ, donde su conjunto solución estará definido en los reales	Cuando la recta es horizontal (b=0).	El conjunto solución se encontrará entre los puntos de corte con intervalos cerrados.
Ítem d	g es mayor o igual que f	Factorizable en ℝ con una raíz de multiplicidad doble.	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	El conjunto solución será todo el conjunto de números reales.
Ítem e	g es menor que f	Factorizable en ℝ con una raíz de multiplicidad doble.	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	No tendrá conjunto solución en el conjunto de números reales.
Ítem f	g es mayor que f	Factorizable en ℝ con una raíz de multiplicidad doble.	Cuando la recta es horizontal (b=0).	El conjunto solución será todo el conjunto de números reales a excepción del número 0.
Ítem g	g es menor o igual que f	No factorizable en ℝ.	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	No tendrá conjunto solución en el conjunto de números reales.
Ítem h	g es mayor o igual que f	No factorizable en ℝ.	Cuando la recta es oblicua (b≠0).	El conjunto solución será todo el conjunto de números reales.
Ítem i	g es mayor a igual que g	No factorizable en ℝ.	Cuando la recta es horizontal (b=0).	El conjunto solución será todo el conjunto de números reales.

Nota.- Elaboración propia

3.2 Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica fue diseñada con el objetivo de que los estudiantes analicen e interpreten la resolución de inecuaciones cuadráticas. Para ello, se propone cambios de marco que favorezcan una mejor comprensión del conjunto solución. Esta propuesta se compone de nueve actividades descritas en el apartado denominado *Diseño de la secuencia didáctica* de la presente investigación. En esa sección, se explica la inducción para trabajar con distintos marcos epistémicos, principalmente el algebraico y el funcional. La secuencia fue analizada desde la Teoría de Marcos, que distingue entre tratamientos (transformaciones dentro de un mismo marco) y conversiones (cambios entre marcos distintos) (Sensevy, 2011).

Se identificaron tratamientos en tareas como hallar el discriminante, simplificar ecuaciones y aplicar la fórmula general, todas dentro del marco algebraico. Por otro lado, se reconocieron conversiones en actividades que implican la transición entre lo simbólico y lo gráfico como graficar funciones, colorear soluciones en el eje x o determinar conjuntos solución a partir de gráficas. Estas conversiones exigen al estudiante movilizar saberes diversos y adaptarse a nuevas reglas del juego didáctico, lo que contribuye al desarrollo de una comprensión más amplia de inecuaciones cuadráticas.

En la tabla 02, se muestran las variables consideradas para cada una de las actividades de aprendizaje de la secuencia didáctica.

Con respecto al desarrollo de la secuencia de actividades y la justificación de cada ítem, se procede a explicar en los siguientes párrafos.

El material de trabajo para las actividades se evidencia en la Ficha de Trabajo. La actividad consta de 11 preguntas con 11 ítems cada una, en los cuales se tiene la misma inecuación en cada ítem de cada actividad. La finalidad es que los alumnos se familiaricen con la gráfica.

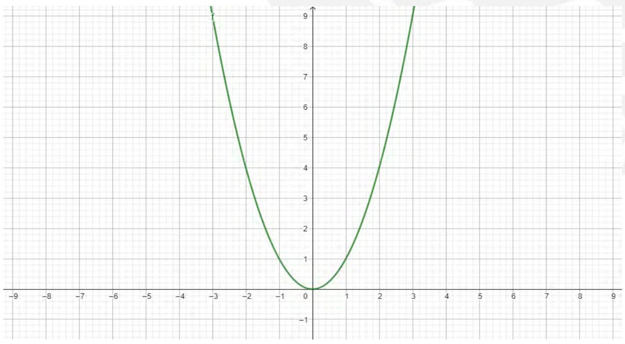
En la tabla 3, se muestran las actividades de la parte individual de la Ficha de trabajo y además se explica el objetivo de cada actividad.

Tabla 3

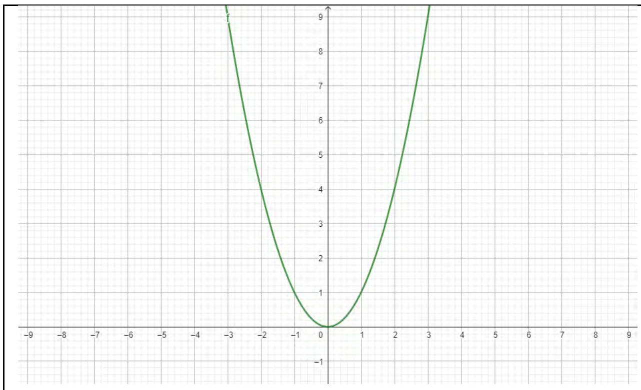
Detalle de las actividades de la propuesta didáctica

Actividad	Marco en el que se aborda	Tratamientos y conversiones propuestas
1) Encontrar el discriminante en las siguientes ecuaciones cuadráticas: a) $x^2+2x-2=0$ b) $x^2+5x+4=0$	Marco Algebraico	Tratamientos -El estudiante reconoce la forma general de la ecuación cuadrática

c) $x^2 - 4 = 0$ d) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $x^2 + 6x + 9 = 0$ f) $x^2 = 0$ g) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ h) $x^2 + 2x + 4 = 0$ i) $x^2 + 9 = 0$		$ax^2 + bx + c = 0$ -Identifica los coeficientes a, b y c aplica la fórmula del discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$
2) Simplificar las siguientes ecuaciones cuadráticas a la forma "$ax^2 + bx + c = 0$" y encontrar el discriminante: a) $2x^2 + x + 5 = 6$ b) $3x^2 - x + 5 = 7$ c) $2x^2 - 10 = -2$ d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$ e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$ f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$ g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$ h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$ i) $7x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 2x - 11$	Marco Algebraico	Tratamientos -Transposición de términos -Simplificación de expresiones -Reducción a la forma estándar de una ecuación cuadrática
3) Use los discriminantes de la actividad 2 para hallar la o las soluciones las cuales hacen a la ecuación verdadera.	Marco Algebraico	Tratamientos -El estudiante aplica una técnica algebraica conocida (fórmula general) usando valores concretos de a , b y el discriminante Δ.
4) En los siguientes casos, despeja el término "x^2" de modo que quede de la forma: "$x^2 = mx + n$" a) $2x^2 + x + 5 = 6$ b) $3x^2 - x + 5 = 7$ c) $2x^2 - 10 = -2$ d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$ e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$	Marco Algebraico	Tratamientos -El estudiante aplica reglas algebraicas convencionales: transposición de términos, simplificación y despeje.

f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$ g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$ h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$ i) $7x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 2x - 11$		
5) En cada uno de los siguientes ítems, realiza lo solicitado: I. Con la ecuación lineal obtenida al despejar la ecuación de la forma "$x^2 = mx + n$" en cada ítem de la actividad anterior, graficar la función lineal "$f(x) = mx + n$" en el siguiente plano, en el que ya se tiene la gráfica de $g(x) = x^2$. II. Con las soluciones $\{x_1, x_2\}$ obtenidas en la actividad 3, graficar las líneas verticales: $x = x_1$ y $x = x_2$. III. Colorear de color azul las proyecciones de los interceptos de ambas gráficas sobre el eje x, de color verde los valores de x que hagan que $g(x)$ sea mayor que $f(x)$y de color rojo los valores de x que hagan que $f(x)$ sea mayor que $g(x)$. 	Marco Algebraico Marco Funcional	**Parte I** Conversiones -Se cambia del marco algebraico (trabajo con ecuaciones) al marco funcional. -Cambia la naturaleza de la tarea de manipulación simbólica a análisis geométrico. **Parte II** Tratamiento -Se sigue en el mismo marco funcional, utilizando coordenadas concretas. -No se modifica el tipo de saber; es una extensión directa del procedimiento gráfico anterior. **Parte III** Conversiones -Aquí se requiere interpretar gráficamente relaciones funcionales (desigualdades entre funciones). -Implica un cambio de marco epistémico: del trazo gráfico a un análisis comparativo de funciones. -El estudiante debe comprender cómo se relacionan ambas funciones en diferentes intervalos.

6) De los gráficos obtenidos en la figura anterior, para cada gráfico, responde las siguientes preguntas en la tabla: I. Determine el punto o los puntos, en caso existan, donde se intersecan la gráfica de la función cuadrática con la gráfica de la función lineal. II. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ se encuentra por encima de la gráfica de la función lineal $f(x)$? III. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ se encuentra por debajo de la gráfica de la función lineal $f(x)$? IV. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ es mayor o igual que $f(x)$? V. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ es menor o igual que $f(x)$?	Marco Algebraico Marco Funcional	Conversiones **-**Se pasa del marco gráfico al marco algebraico. Exige razonar sobre condiciones de igualdad entre funciones. -Aunque puede observarse gráficamente, requiere una interpretación de la relación funcional. Se transita del gráfico a un análisis de desigualdades. **-**Se pasa del gráfico como objeto a la generalización de comportamientos funcionales en intervalos de x.
7) En las siguientes desigualdades, despejar la expresión x^2. a) $2x^2 + x + 5 < 6$ b) $3x^2 - x + 5 > 7$ c) $2x^2 - 10 \leq -2$ d) $4x^2 - x + 5 \geq 4 - 5x$ e) $x^2 + 5x - 2 < 3x - 3$ f) $2x^2 - x + 3 > 3 - x$ g) $4x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 2x - 1$ h) $7x^2 - 2x + 1 \geq 3x^2 + x - 6$ i) $7x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 - 2x - 11$	Marco Algebraico	Esta tarea constituye un tratamiento, dado que se opera exclusivamente dentro del marco algebraico. Las transformaciones realizadas son suma o resta de términos, simplificación de desigualdades y agrupación de coeficientes semejantes.
8) Con la gráfica obtenida en la actividad 5, coloree los valores de "x" en el eje x que cumplen la desigualdad solicitada.	Marco Algebraico Marco Funcional	Conversiones El alumno transita del marco algebraico, donde se expresa la desigualdad al marco funcional, en el que se reconocen visualmente los intervalos que

		representan su solución. Este proceso implica interpretar gráficamente una condición simbólica y no simplemente transformar o manipular expresiones dentro del mismo tipo de representación.
9) En las gráficas de la actividad anterior, identifique para qué valores de “x” se cumplen las desigualdades solicitadas en la actividad 7 y complete la tabla.	Marco Algebraico Marco Funcional	Esta actividad constituye una conversión, ya que implica un cambio de marco: se pasa del marco gráfico, en el cual se reconocen visualmente las soluciones, al marco simbólico, en el que se formaliza el conjunto solución mediante notación matemática.

Nota.- Elaboración propia

3.3 Comportamientos esperados

ACTIVIDAD 1

Comportamientos esperados
De cara al diseño de la actividad 1, centrada en el cálculo del discriminante en ecuaciones cuadráticas, se anticipan diversos errores recurrentes que podrían presentar los estudiantes. Estos posibles errores se clasifican en procedimentales, conceptuales e interpretativos, y su identificación resulta clave para orientar el diseño y ajuste de la propuesta didáctica. En primer lugar, se considera probable que algunos estudiantes presenten dificultades en la identificación de los coeficientes a, b y c, especialmente cuando las ecuaciones no se presentan en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Por ejemplo, ante expresiones como $x^2 - 4 = 0$ o $x^2 = 0$, es posible que no reconozcan que $b = 0$ o $c = 0$, lo cual podría llevar a errores en la sustitución de valores en la fórmula del discriminante. En segundo lugar, se prevén errores asociados al cálculo algebraico como la incorrecta elevación al cuadrado del término b, la omisión de la jerarquía de operaciones o el uso

inadecuado de la fórmula del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Una situación hipotética podría presentarse con la ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$, cuyo discriminante correcto es $\Delta = 0$, pero que podría ser calculado erróneamente como $\Delta = 12$ por una mala aplicación de la fórmula o por una sustitución inexacta de los coeficientes.

Además, se contempla la posibilidad de que existan dificultades en la interpretación del valor del discriminante. Aunque los estudiantes llegaran a calcular correctamente Δ, podrían no comprender su significado. Por ejemplo, podrían interpretar un valor negativo como “no hay solución”, sin tener en cuenta que se refiere a soluciones complejas. Del mismo modo, podrían no diferenciar entre $\Delta = 0$ y $\Delta > 0$, lo que llevaría a confundir una raíz doble con dos raíces reales distintas.

Por último, se estima que podría surgir una tendencia a la mecanización del procedimiento, especialmente si la actividad adquiere un enfoque lúdico sin espacios para la reflexión. En estos casos, la repetición de ejercicios con el objetivo de obtener puntos o mejorar tiempos podría fomentar una automatización que limite la comprensión conceptual.

La previsión de estos errores justifica la inclusión de estrategias didácticas que favorezcan no solo la aplicación operativa de la fórmula del discriminante sino la comprensión de su papel en la estructura de una ecuación cuadrática y en la naturaleza de sus soluciones. Por tanto, se sugiere que el diseño de actividades lúdicas contemple momentos de análisis colectivo, reflexión crítica y justificación oral o escrita de los procedimientos realizados.

ACTIVIDAD 2

Comportamientos esperados
1. Supuestos errores al transponer términos Es posible que algunos estudiantes presenten dificultades al transponer términos para igualar la ecuación a cero, lo cual es un paso necesario antes de aplicar la fórmula del discriminante. Por ejemplo, ante una ecuación como $2x^2 + x + 5 = 6$, podría omitirse la sustracción del término constante del segundo miembro. Esto resulta una ecuación mal estructurada (por ejemplo, $2x^2 + x + 5 = 6$, sin realizar correctamente la operación $5 - 6$). En casos más complejos, como $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$, se anticipa que algunos estudiantes trasladen los términos al primer miembro sin cambiar adecuadamente sus signos, lo que afectaría tanto la estructura algebraica como la aplicación posterior del discriminante. **2. Supuestos errores en la simplificación y combinación de términos semejantes**

Otra dificultad esperada consiste en la incorrecta combinación de términos semejantes. En ecuaciones del tipo $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$, podrían producirse errores al distribuir signos negativos, calcular mal los coeficientes o no agrupar adecuadamente los términos del mismo grado. Tales fallos pueden alterar los coeficientes a, b y c, lo que compromete la validez del cálculo del discriminante.

3. Supuestos errores en la resolución de ecuaciones con términos en ambos miembros

Se anticipa que algunos estudiantes no trasladen correctamente todos los términos al mismo miembro al resolver ecuaciones como $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$. Es probable que trasladen solo los términos cuadráticos, lo que deja sin mover los términos lineales o constantes. Esto daría lugar a ecuaciones incompletas o incoherentes. Ello afecta la posterior identificación de los coeficientes.

4. Supuestos errores en la identificación de coeficientes para aplicar el discriminante

Aun después de simplificar correctamente la ecuación, podrían surgir errores en la identificación de los coeficientes a, b y c, especialmente si alguno es negativo, fraccionario o igual a cero. Estos errores podrían deberse a una simplificación incorrecta en etapas anteriores o a una falta de atención a los signos, lo que repercutiría directamente en la aplicación de la fórmula del discriminante.

5. Supuestos errores en la interpretación del discriminante

Se estima que algunos estudiantes podrían presentar dificultades para interpretar el valor del discriminante una vez calculado. Entre los errores más frecuentes que se anticipan, se incluyen lo siguiente:

- Interpretar $\Delta < 0$ como “no hay solución”, sin comprender que esto implica la existencia de soluciones complejas.
- No reconocer que $\Delta = 0$ indica una raíz real doble.
- Asumir que $\Delta > 0$ garantiza soluciones enteras cuando en realidad solo asegura que son reales y distintas.

6. Supuesta automatización sin comprensión del procedimiento

Se prevé una tendencia a la mecanización del procedimiento, especialmente en actividades con formato lúdico como el “juego de marcos”. La repetición de pasos sin reflexión puede llevar a que los estudiantes ejecuten operaciones sin validar sus resultados ni comprender el

sentido de cada transformación algebraica. Esta automatización puede ocasionar errores encadenados, particularmente si la simplificación inicial contiene fallos. La identificación anticipada de estos errores permite orientar el diseño de estrategias pedagógicas que fomenten la comprensión profunda del proceso algebraico y del significado del discriminante.

ACTIVIDAD 3

Comportamientos esperados
1. Supuesta confusión entre el discriminante y las soluciones Se anticipa que algunos estudiantes podrían interpretar erróneamente el valor del discriminante como si se tratara de una solución directa de la ecuación. Por ejemplo, ante un discriminante $\Delta = 9$, podrían asumir incorrectamente que $x = 9$. Ello omite la aplicación de la fórmula general para encontrar las raíces. Este error revela una confusión entre el rol del discriminante como indicador del tipo y número de soluciones, y las soluciones propiamente dichas. **2. Supuesta aplicación incorrecta de la fórmula general** El uso de la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ también podría representar un foco de errores. Entre los más probables se encuentran lo siguiente: • Omitir el signo negativo delante del coeficiente b. • No considerar adecuadamente el símbolo $\pm$, lo cual llevaría a calcular solo una de las soluciones cuando $\Delta > 0$. • No dividir correctamente entre $2a$, especialmente cuando $a \neq 1$, lo que afecta el resultado final. **3. Supuestas dificultades con raíces no exactas o soluciones complejas** Cuando el discriminante no es un cuadrado perfecto (por ejemplo, $\Delta = 5$) o es negativo (por ejemplo, $\Delta = -4$), podrían surgir varias dificultades: • Intenta resolver la raíz cuadrada de un número negativo sin reconocer la existencia de números complejos.

- Omite por completo la solución, afirmando que “no se puede resolver” o que “no tiene solución”.
- El no simplificar correctamente expresiones irracionales genera resultados imprecisos o incorrectos.

4. Supuestos errores de interpretación de la solución

Incluso en los casos en que los cálculos sean correctos, es posible que algunos estudiantes no interpreten adecuadamente las soluciones obtenidas. Se propone dos ejemplos:

- No verifican si las soluciones satisfacen la ecuación original, lo cual resulta fundamental, pues es importante saber si existieron errores en pasos previos.

- Confunden el número de soluciones con el valor del discriminante, como suponer que “una solución doble” implica dos soluciones diferentes, sin comprender que se trata de una raíz con multiplicidad dos.

5. Supuesta ausencia de verificación o análisis del resultado

Finalmente, se prevé que, debido a la dinámica repetitiva o lúdica de ciertas actividades, los estudiantes podrían centrarse exclusivamente en obtener un resultado sin realizar una verificación final que les permita identificar errores previos. Esta situación se agrava si no se incluyen instancias de reflexión, análisis crítico o justificación del procedimiento seguido.

La identificación de estos posibles errores pone de relieve la importancia de diseñar estrategias didácticas que fomenten una comprensión integral del procedimiento de resolución de ecuaciones cuadráticas, lo que promueve tanto el dominio técnico como la interpretación conceptual del discriminante y sus implicaciones en el contexto algebraico.

ACTIVIDAD 4

Comportamientos esperados
1. Supuesto error en el aislamiento del término cuadrático x^2 Uno de los errores más recurrentes que podría observarse es la dificultad para aislar correctamente el término x^2. En ecuaciones como $2x^2 + x + 5 = 6$, es probable que algunos estudiantes intenten reorganizar la ecuación sin efectuar la división necesaria. Por ende, obtienen expresiones incorrectas como $2x^2 = x + 1$, sin completar el paso hacia la forma canónica $x^2 = mx + n$. También, podrían limitarse a reordenar términos superficialmente, sin

aplicar las operaciones requeridas, lo que evidenciaría dificultades en la comprensión del principio de igualdad y en la manipulación de expresiones algebraicas.

2. Supuestos errores en la transposición de términos

En ecuaciones con expresiones algebraicas en ambos miembros, como $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$, se anticipa que algunos estudiantes podrían trasladar términos sin cambiar correctamente su signo o combinar inadecuadamente los términos semejantes. Este tipo de error también se podría observar en ecuaciones como $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$, donde la presencia de múltiples términos cuadráticos podría conducir a cancelaciones erróneas o simplificaciones incorrectas. Ello impide la obtención de una forma compatible con el formato solicitado.

3. Supuesto error en la división para aislar x^2

Tras reorganizar la ecuación, es probable que algunos estudiantes omitan dividir por el coeficiente del término cuadrático cuando este no sea 1. Por ejemplo, ante una expresión como $2x^2 = 3x + 1$, podrían no dar el paso hacia $x^2 = \frac{3x+1}{2}$. Incluso cuando realizan dicha división, podrían cometer errores al distribuir correctamente la operación. Por ende, escriben expresiones como $x^2 = 3x + \frac{1}{2}$en lugar de aplicar adecuadamente la propiedad distributiva de la división.

4. Supuesto uso incorrecto de operaciones inversas

Al tratarse de una actividad centrada en el aislamiento del término cuadrático, algunos estudiantes podrían intentar aplicar operaciones inversas inadecuadas como "pasar el x" dividiendo o extraer la raíz cuadrada prematuramente. Estas acciones indicarían una falta de comprensión de la estructura de la ecuación y del orden lógico de operaciones necesarias.

5. Supuestas dificultades con fracciones y signos

Se prevé que puedan surgir errores en la gestión de fracciones y signos negativos, especialmente en expresiones como $x^2 = -\frac{1}{2}x + 4$. Entre los errores esperables se encuentran lo siguiente:

- Omiten o colocan incorrectamente el signo negativo.
- No simplifican fracciones.

- Escriben fracciones sin el uso adecuado de paréntesis, lo que provoca ambigüedad en la interpretación algebraica.

6. Supuesto error conceptual respecto al objetivo de la actividad

Finalmente, es posible que algunos estudiantes no comprendan con claridad el objetivo de "despejar x^2", y en lugar de ello intenten resolver la ecuación completa o factorizarla. Este tipo de error podría deberse tanto a instrucciones poco precisas como a una escasa familiaridad con formas algebraicas no habituales, lo que sugiere la necesidad de reforzar las metas y el lenguaje específico de la actividad.

ACTIVIDAD 5

Comportamientos esperados
Existen posibles errores en la transición algebraica a la representación funcional y gráfica. Se prevé que, durante la transición de la forma algebraica a la representación funcional y gráfica, los estudiantes puedan cometer diversos errores que obstaculicen la correcta interpretación de los conceptos involucrados. Uno de los errores anticipados es el despeje inadecuado o incompleto del término x^2, lo que impide la correcta obtención de una expresión de la forma $f(x) = mx + n$. Esta dificultad afecta directamente la identificación de la función resultante como una función lineal, ya que algunos estudiantes podrían no reconocer la estructura de dicha expresión e incluso intentar graficarla como una parábola debido a la presencia inicial de un término cuadrático. Además, al momento de graficar la función $f(x) = mx + n$, podrían surgir errores como la no identificación de los parámetros m (pendiente) y n (intersección con el eje y), el trazado incorrecto de la recta (ya sea por curvatura, pendiente mal representada o puntos mal ubicados) y el uso inadecuado de herramientas auxiliares como la tabla de valores. También, es probable que algunos estudiantes no logren establecer de manera precisa los puntos de intersección entre la recta y la parábola $g(x) = x^2$, lo cual resulta clave para interpretar la relación entre ambas funciones. Respecto al trazado de líneas verticales $x = x_1$ y $x = x_2$, que marcan las raíces de la ecuación cuadrática, se anticipa la posibilidad de errores como graficar líneas diagonales en lugar de verticales, confundir las líneas con puntos individuales o ubicar incorrectamente dichas raíces en el eje x, especialmente si estas no fueron calculadas correctamente en fases previas.

Asimismo, pueden presentarse dificultades en la interpretación gráfica mediante el uso del color. Aunque la consigna indique colorear regiones del plano en función de la desigualdad $g(x) > f(x)$, es posible que algunos estudiantes inviertan los colores asignados, no coloreen intervalos completos o lo hagan sin una comprensión adecuada del comportamiento relativo de ambas funciones.

En la comparación gráfica entre $f(x)$ y $g(x)$, se podrían observar errores vinculados a una representación imprecisa, desconocimiento de cómo interpretar gráficas en el contexto de desigualdades o dificultades para identificar los puntos de intersección como fronteras entre los intervalos donde una función se encuentra por encima de la otra.

Finalmente, se anticipa una posible ausencia de validación o justificación del trabajo gráfico, particularmente en contextos donde predomine un enfoque lúdico o visual. Esto puede reflejarse en la falta de comprobación de puntos de intersección, en el trazado incorrecto de líneas verticales o en la ausencia de argumentación sobre la relación entre las funciones representadas. Estas dificultades subrayan la necesidad de incorporar instancias de reflexión y análisis que fortalezcan la comprensión conceptual y el razonamiento matemático.

ACTIVIDAD 6

Comportamientos esperados

1. Identificación incorrecta de puntos de intersección

Los estudiantes suelen presentar dificultades al identificar correctamente los puntos donde las gráficas de $g(x)$ y $f(x)$ se cruzan. Los errores más comunes incluyen lo siguiente:

- Confunden los puntos de intersección con vértices o interceptos.
- Leen mal los valores de intersección sobre los ejes, especialmente si no están claramente marcados.
- No reconocen ambos puntos de intersección cuando la parábola corta a la recta en dos lugares.
- Asumen que toda parábola intersecta a la recta cuando en realidad pueden no tener puntos en común.

2. Errores en la comparación gráfica de $g(x)$ y $f(x)$

Al analizar qué función está por encima de la otra, algunos errores habituales son los siguientes:

Evalúan solo puntos aislados sin considerar el comportamiento global de ambas funciones.
Invierten las desigualdades, por ejemplo, afirman que $g(x) > f(x)$ cuando visualmente es $g(x) < f(x)$.
No identifican correctamente las zonas de cruce entre las gráficas.
No aplican bien el uso de extremos abiertos o cerrados en la notación de intervalos.

3. Confusión entre funciones y sus imágenes
Una dificultad conceptual frecuente es no diferenciar entre dominio y rango.

- Responden intervalos en el eje y cuando se les pide describirlos en términos de x.
- Asumen que un punto de intersección es un valor único y absoluto sin entender que se trata de un cambio de comportamiento a lo largo de un intervalo.

4. Dificultades al completar la tabla o justificar respuestas
En la actividad, los estudiantes a menudo realizan lo siguiente:

- Dan respuestas vagas como "cuando se cruzan" sin precisar valores de x.
- Usan descripciones verbales poco matemáticas como "cuando la parábola gana".
- Evitan usar la notación formal de intervalos o la escriben incorrectamente.

5. Falta de conexión entre la gráfica y las ecuaciones
Incluso con los gráficos correctos, algunos estudiantes no vinculan lo visual con lo algebraico.

- No asocian los puntos de intersección con las soluciones de $x^2 = mx + n$.
- No entienden que $g(x) = f(x)$ representa la igualdad de ambas funciones, es decir, sus intersecciones.
- No aprovechan la gráfica para verificar o corregir los resultados algebraicos previos.

ACTIVIDAD 7

Comportamientos esperados

1. Tratamiento erróneo de la desigualdad como una ecuación

Descripción del error

Los estudiantes aplican procedimientos propios de ecuaciones (igualdades) como factorizar directamente o igualar a cero sin considerar las particularidades de una desigualdad. Un ejemplo típico es el siguiente:

Aplicar factorización a $2x^2 + x + 5 < 6$ sin primero despejar x^2.

Consecuencia didáctica

Esto refleja confusión entre los procesos de resolución y el objetivo específico de despejar la variable cuadrática, porque no resuelven la desigualdad.

2. Despeje incorrecto del término x^2

Entre los errores frecuentes, son los siguientes:

- No agrupan todos los términos del mismo lado de la desigualdad.
- Los cambios de signo son incorrectos al transponer términos.
- Eliminan u "olvidan" términos al simplificar.

Un ejemplo de ello es el siguiente:

$$2x^2 + x + 5 < 6 \Rightarrow 2x^2 + x < 1 \Rightarrow x^2 < \cdots$$

Observación didáctica

Aquí el estudiante podría olvidar restar el 5 o no dividir toda la desigualdad por 2. Esto indica una comprensión incompleta de la simplificación de expresiones.

3. Dividir por coeficientes negativos sin invertir el signo

Descripción del error

Cuando se divide por un número negativo, el signo de la desigualdad debe invertirse. Esto suele ser omitido por muchos estudiantes. Un ejemplo de ello es el siguiente:

$-2x^2 + 3x > 6 \Rightarrow x^2 < \cdots$(incorrecto si no se invierte la desigualdad)

Comentario didáctico

Este error revela desconocimiento de una regla clave en desigualdades y es un punto crítico que debe reforzarse explícitamente.

4. Mal manejo de expresiones algebraicas con términos en ambos lados

Entre los errores típicos, se ha identificado lo siguiente:

- No reagrupan todos los términos en un solo lado.
- Simplifican incorrectamente expresiones con signos mixtos.
- No reorganizan adecuadamente la desigualdad después de reagrupar.

Un ejemplo de ello es el siguiente:

$$4x^2 - x + 5 \geq 4 - 5x$$

Resultado esperado

Reorganizan cómo $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ antes de cualquier intento de despeje.

5. Confusión entre desigualdad algebraica y gráfica

Descripción del error

Algunos estudiantes comienzan a resolver o interpretar gráficamente la desigualdad cuando la tarea solo pedía reescribirla aislando x^2.

Causa probable

Se evidencia falta de claridad en la consigna o una tendencia a anticipar pasos posteriores (resolución o graficación).

6. Uso inadecuado de operaciones inversas

Entre los errores típicos, se ha identificado lo siguiente:

- Dividen solo algunos términos (no toda la desigualdad).
- Aplican la propiedad distributiva de forma incorrecta.

Un ejemplo de ello es el siguiente:

De $2x^2 = 3x + 1$, derivar erróneamente $x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ en vez de $x^2 = \frac{3x+1}{2}$.

7. **Dificultad para mantener la forma objetivo $\boldsymbol{x^2 < mx + n}$**

Descripción del error

Muchos estudiantes presentan resultados desorganizados o no simplificados, sin llegar a la forma canónica solicitada.

Consecuencia didáctica
Esto puede reflejar una escasa comprensión del objetivo del ejercicio o una falta de habilidades para reordenar y simplificar expresiones algebraicas con claridad.

ACTIVIDAD 8

Comportamientos esperados
Uno de los errores más frecuentes es la confusión entre el eje x y el eje y, ya que algunos estudiantes colorean áreas incorrectas en el plano cartesiano o marcan valores de $f(x)$ o $g(x)$ en lugar de los valores correspondientes de x. Esto revela una dificultad para transitar del análisis algebraico al gráfico. Además, muchos olvidan diferenciar entre desigualdades estrictas y no estrictas. Asimismo, no utilizan puntos abiertos o cerrados para indicar si los extremos del intervalo están incluidos. Ello refleja una débil comprensión del lenguaje simbólico-visual. También, es común que interpreten incorrectamente los intervalos de solución en la gráfica, eligiendo el intervalo inadecuado o invirtiendo los extremos. Esto evidencia dificultades por parte de los estudiantes para relacionar el dominio común con la comparación de valores de las funciones. Algunos generalizan incorrectamente los casos, pues asumen que toda parábola tiene dos puntos de intersección con la recta o colorean regiones sin verificar si la desigualdad se cumple realmente. Esto denota una aplicación mecánica sin contraste gráfico. Asimismo, varios estudiantes no comprenden que la solución debe representarse sobre el eje x. Esto se evidencia cuando ellos colorean regiones del plano o marcan soluciones en las gráficas, lo que no responde a la consigna. Finalmente, algunos omiten completamente la representación gráfica, ya sea por inseguridad o desconocimiento. Se limitan a escribir el intervalo en notación simbólica, evidenciando dificultades en la transición entre el marco algebraico y el gráfico.

ACTIVIDAD 9

Comportamientos esperados
En el análisis preliminar se asumen diversos errores que podrían afectar la interpretación y resolución de desigualdades mediante gráficas de funciones y expresiones algebraicas. En primer lugar, se supone que los estudiantes podrían confundir el comportamiento gráfico con la solución algebraica de la desigualdad. Esto se debe a que consideran que los puntos donde las curvas se cruzan o se acercan representan siempre la solución, sin interpretar correctamente el significado de las desigualdades como $f(x) < g(x)$ o $f(x) \geq g(x)$. Esto puede manifestarse al momento de registrar únicamente los puntos de intersección como solución. Por ende, omiten los intervalos entre raíces donde efectivamente se cumple la

desigualdad. Además, se presume dificultad para leer con precisión las intersecciones en el eje x, lo que implica problemas para localizar los puntos de intersección entre $f(x) = mx + n$ y $g(x) = x^2$, así como para identificar los valores de x donde una función supera a la otra, con el riesgo de incluir valores incorrectos u omitir casos válidos en las tablas. Se prevé también confusión entre los ejes x e y. Esto se evidencia cuando los estudiantes registran valores en el eje y en lugar del eje x, o interpretan mal la consigna enfocándose en puntos de la gráfica sin identificar los intervalos sobre el dominio. Otro supuesto error es la representación exclusiva de soluciones puntuales en vez de intervalos. Ello refleja una falta de comprensión de que las desigualdades pueden tener como solución conjuntos continuos y no solo puntos aislados. Asimismo, se considera probable la existencia de inconsistencias entre las gráficas de funciones y las tablas de resultados, por dificultades para interpretar colores, líneas o marcas, o por cambiar el sentido de la desigualdad durante el traslado del análisis visual al marco algebraico. Se asume que la tabla puede no completarse correctamente debido a las omisiones, errores en la notación o inversión de límites en los intervalos expresados. Finalmente, se plantea que podría faltar la justificación o verificación adecuada de las respuestas, evidenciada en la ausencia de argumentos que respalden las afirmaciones sobre los intervalos donde se cumple la desigualdad o en la falta de contraste entre la tabla y la gráfica. Esto conduce a conclusiones sin sentido matemático.

Capítulo IV: Detalles de la Implementación

El presente capítulo describe el proceso de implementación de la propuesta didáctica orientada al tratamiento de las inecuaciones cuadráticas en estudiantes de cuarto y quinto grado de secundaria. Se detallan el contexto educativo donde se desarrollaron las sesiones, la organización del medio y de los recursos, así como los objetivos que guiaron la intervención. Además, se presenta el cronograma de actividades y se analiza el rol del docente como mediador del conocimiento. Esto incluye aspectos claves como la gestión del aula, el acompañamiento durante la resolución de tareas y la evaluación formativa. La estructura del capítulo permite comprender cómo se articuló la teoría con la práctica pedagógica con el fin de favorecer el aprendizaje significativo de contenidos matemáticos mediante estrategias activas, colaborativas y reflexivas.

4.1. Contexto educativo

La propuesta fue implementada en los grados cuarto y quinto de secundaria en una institución pública de nivel secundaria ubicada en Lima Metropolitana. Los estudiantes, que oscilan entre 15 y 17 años, contaban con conocimientos previos sobre ecuaciones cuadráticas, pero mostraban dificultades al enfrentarse a situaciones de comparación e interpretación de funciones cuadráticas e inecuaciones. La propuesta se desarrolló completamente utilizando papel y lápiz, sin apoyo de tecnologías digitales, y con un enfoque activo y exploratorio.

4.2 Descripción del medio

Para la aplicación de la secuencia didáctica, se tendrá en cuenta las siguientes consideraciones:

- La organización de los estudiantes será libremente en nueve grupos de tres integrantes y un grupo de cuatro, porque hasta ese momento se cuenta con la presencia de 31 alumnos.
- Será necesario adecuar la formación de grupos de acuerdo con la asistencia de los estudiantes.
- La entrega de material que contiene las situaciones didácticas será al inicio de cada actividad, donde se detallarán las acciones a realizar, tanto individual como grupales.
- Los contenidos considerados como prerrequisitos para el desarrollo de las actividades son inecuaciones de primer grado, función lineal y resolución de ecuaciones cuadráticas.
- El tratamiento del tema fue realizado de acuerdo con los lineamientos curriculares, pues utilizan temas vistos en ciclos anteriores. Esto es considerado para las

actividades de aprendizaje, situaciones concretas que permitan una adecuada comprensión conceptual y un pertinente manejo procedimental. Ello implica que los estudiantes tendrán que ser capaces de realizar un cambio de marco de acuerdo a los cambios hechos en las variables didácticas.

4.3. Objetivos de la Implementación

Los objetivos de la implementación fueron lo siguiente:

- Desarrollar en los estudiantes la comprensión de las inecuaciones cuadráticas mediante procedimientos algebraicos accesibles y actividades secuenciadas
- Fomentar la resolución de problemas contextualizados, que vinculan el análisis algebraico con el razonamiento gráfico en papel
- Estimular la reflexión matemática y el trabajo colaborativo como medios para favorecer la construcción de significados.
- Integrar los marcos teóricos (epistemológico, cognitivo e institucional) en el diseño y ejecución de las actividades, respetando la progresión conceptual del contenido

4.4. Duración y cronograma

La propuesta didáctica se ejecutó en siete sesiones de 90 minutos a lo largo de tres semanas. La distribución fue la siguiente:

Tabla 4

Organización de actividades

Sesión	**Actividad**	**Forma de trabajo**	**Duración**
Sesión 1	Actividad 1	Trabajo Grupal	20 minutos
	Actividad 2	Trabajo Grupal	20 minutos
	Actividad 3	Trabajo Grupal	20 minutos
	Actividad 4	Trabajo Grupal	20 minutos
Sesión 2	Recapitulación 1	Realizada por el profesor	20 minutos
	Actividad 5	Trabajo Grupal	30 minutos
	Actividad 6	Trabajo Grupal	30 minutos
Sesión 3	Recapitulación 2	Realizada por el profesor	20 minutos
	Actividad 7	Trabajo Grupal	20 minutos
	Actividad 8	Trabajo Grupal	20 minutos

	Actividad 9	Trabajo Grupal	20 minutos

Nota.- Elaboración propia

4.5. Recursos utilizados

Todos los materiales fueron de elaboración propia y consistieron en lo siguiente:

- Guías impresas con enunciados organizados en actividades progresivas
- Hojas cuadriculadas para la construcción manual de gráficos
- Lápices de colores para el marcado de regiones en el eje x
- Fichas de trabajo por grupo para facilitar la reflexión posterior

4.6. Rol del docente y evaluación

El rol del docente durante la implementación de la propuesta fue fundamental como mediador del conocimiento matemático, facilitador de la construcción de significados y organizador del proceso didáctico. Su intervención no se limitó a la exposición de contenidos, sino que fue cuidadosamente planificada para acompañar, observar, provocar reflexión y retroalimentar el aprendizaje de los estudiantes en cada momento clave del proceso.

4.6.1. Diseño y preparación del entorno de aprendizaje

Previo al desarrollo de las sesiones, el docente organizó el material didáctico, que incluye guías impresas y hojas cuadriculadas. Además, definió una planificación detallada que articulaba las actividades con los objetivos de aprendizaje, respetando una progresión conceptual basada en los marcos algebraico y funcional. La secuenciación buscó anticipar posibles dificultades y brindar a los estudiantes oportunidades para exploración, reflexión y validación sobre inecuaciones cuadráticas.

4.6.2. Gestión del aula como espacio de diálogo matemático

Durante las sesiones, el docente adoptó un enfoque activo en la gestión del aula. Para ello, promovió la interacción entre pares, el trabajo en grupo y la puesta en común de soluciones diversas. Además, propició una atmósfera de respeto y confianza, en la cual los errores eran valorados como parte del aprendizaje. Asimismo, el docente formulaba preguntas abiertas, incentivaba a los estudiantes a justificar sus respuestas y a comparar estrategias. Este acompañamiento tuvo un carácter formativo y no directivo: más que proporcionar respuestas, el profesor estimulaba el pensamiento autónomo.

4.6.3. Acompañamiento durante la resolución de actividades

En cada actividad, el docente circulaba por el aula y observaba los procedimientos de los estudiantes. Además, identificaba patrones de errores comunes y ofrecía ayuda oportuna cuando detectaba bloqueos conceptuales. Las intervenciones eran breves y orientadoras. Por ejemplo, ante un error en la obtención del discriminante, podía señalar la necesidad de revisar los coeficientes sin resolver directamente el ejercicio. En las tareas gráficas, sugería verificar la simetría de la parábola o comparar valores específicos de las funciones para precisar intersecciones.

4.6.4. Fomento del análisis gráfico y verbalización

Una de las funciones más relevantes del docente fue guiar el tránsito del lenguaje algebraico al análisis gráfico en papel. Para ello, incentivó las observaciones hechas en los gráficos; es decir, los estudiantes eran invitados a explicar, por ejemplo, por qué una región coloreada representaba una solución o qué significado tenía la intersección de dos curvas. En este sentido, el docente ayudó a conectar lo simbólico con lo visual y lo visual con el razonamiento lógico.

4.6.5. Evaluación formativa y retroalimentación continua

La evaluación no fue entendida como un momento aislado sino como un proceso continuo a lo largo de todas las sesiones. El docente empleó rúbricas cualitativas centradas en indicadores como coherencia en los procedimientos algebraicos, claridad en las gráficas de funciones, justificación razonada de respuestas, y participación activa y colaboración.

Al finalizar cada sesión, se realizaron breves momentos de metacognición, donde el docente pedía a los estudiantes identificar qué aprendieron, qué dificultades enfrentaron y cómo las superaron. Este ejercicio fortaleció la reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje.

4.6.6. Adaptación a los ritmos del grupo

Finalmente, cabe destacar que el docente mostró flexibilidad para ajustar el ritmo de las actividades según el avance del grupo. En algunas sesiones, se amplió el tiempo previsto para que los estudiantes pudieran revisar sus gráficos o discutir en grupo antes de responder individualmente. En otras ocasiones, se reformularon ejemplos o se introdujeron variaciones más accesibles para atender a estudiantes que requerían mayor apoyo.

Capítulo V: Análisis y discusión de resultados

La implementación de la secuencia didáctica basada en la teoría de marcos de Régine Douady (1985) tuvo como propósito facilitar la comprensión de las inecuaciones cuadráticas en estudiantes de cuarto y quinto grado de secundaria en una institución educativa peruana. A lo largo de nueve actividades organizadas progresivamente, se buscó fomentar el tránsito entre distintos marcos de representación, principalmente el algebraico y el gráfico. Esto se debe a que promueve la reorganización conceptual y operativa del conocimiento matemático. A continuación, se analizarán los resultados obtenidos, contrastando los comportamientos esperados según el diseño teórico con los observados durante la implementación.

5.1. Actividades 1 a 3: consolidación del marco algebraico

Las tres primeras actividades de la propuesta didáctica estuvieron orientadas a fortalecer el manejo del discriminante como herramienta fundamental en la resolución de ecuaciones cuadráticas. El diseño contempló no solo el desarrollo procedimental sino la comprensión conceptual e interpretación del valor del discriminante. A continuación, se presentan los resultados observados, que son contrastados con los comportamientos esperados anticipados en el diseño y clasificados por tipo de error (procedimental, conceptual e interpretativo).

5.1.1. Actividad 1: introducción al discriminante en ecuaciones cuadráticas

El propósito principal fue que los estudiantes identificaran correctamente los coeficientes a, b y c; aplicaran la fórmula del discriminante y comprendieran su significado en términos de número y tipo de soluciones.

Tabla 5

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 1 – Discriminante en ecuaciones cuadráticas

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Procedimental	Dificultades para identificar coeficientes cuando $b = 0$ o $c = 0$	El 5 % no identificó correctamente en expresiones como $x^2 - 4 = 0$.
Procedimental	Aplicación incorrecta de la fórmula del discriminante, especialmente errores de signo o jerarquía	El 4% cometió errores al elevar al cuadrado b o al multiplicar $4ac$.

Conceptual	Confusión entre el discriminante y las soluciones de la ecuación	El 1 % interpretó el valor de Δ como solución directa.
Interpretativo	Interpretación limitada de Δ: no reconocer $\Delta = 0$ como raíz doble o $\Delta < 0$ como soluciones complejas	El 15 % asoció $\Delta < 0$ con "no hay solución"; el 45 % no distinguió entre $\Delta = 0$ y $\Delta > 0$.
Tendencia mecánica	Riesgo de mecanización por formato lúdico sin reflexión	Un 30 % repitió cálculos sin validar resultados ni explicar procedimientos.

Nota.- Elaboración propia

En concordancia con lo anticipado en el diseño, los errores más comunes fueron de tipo procedimental (errores en la identificación de coeficientes y aplicación de la fórmula). No obstante, los más significativos desde el punto de vista didáctico fueron los errores conceptuales e interpretativos, que evidencian la necesidad de reforzar el sentido matemático del discriminante y su función como indicador, y no como resultado final.

La tendencia a la mecanización fue especialmente evidente cuando las actividades fueron percibidas como un juego de velocidad. Esto refuerza la recomendación del diseño original de integrar momentos de reflexión y justificación.

5.1.2. Actividad 2: reorganización de ecuaciones y cálculo del discriminante

Esta actividad incluyó ecuaciones en las que se requería trasladar términos y simplificar las ecuaciones cuadráticas para obtener la forma general de una ecuación cuadrática antes de aplicar el discriminante. Se evaluó la habilidad para reestructurar algebraicamente y calcular correctamente el valor de Δ.

Tabla 6

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 2 – Reorganización y discriminante

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Procedimental	Dificultades al transponer términos de un miembro a otro	El 5 % omitió cambios de signo o no agrupó todos los términos.
Procedimental	Errores en la combinación de términos semejantes	El 10 % mostró fallos en la distribución de signos o sumas de coeficientes.

Procedimental	Identificación incorrecta de los coeficientes después de reorganizar	El 30 % asignó incorrectamente valores a los coeficientes a, b, c tras simplificar.
Conceptual	Confusión entre el valor del discriminante y el tipo de solución	Persistió un 10 % de confusión en la interpretación de Δ.
Tendencia mecánica	Aplicación automática de la fórmula sin verificar estructura	El 30 % aplicó Δ sin comprobar si la ecuación estaba bien estructurada.

Nota.- Elaboración propia

Los resultados muestran que el desafío más importante fue la manipulación algebraica previa a la aplicación del discriminante. Aunque el diseño anticipó tales dificultades, la frecuencia y variedad de errores indica que esta competencia necesita más trabajo guiado y retroalimentación inmediata. Además, se comprobó que muchos estudiantes aplicaron la fórmula del discriminante a ecuaciones aún no correctamente organizadas, lo que sugiere la importancia de incorporar pasos intermedios obligatorios en las futuras implementaciones.

5.1.3. Actividad 3: aplicación de la fórmula general y análisis de soluciones

En esta actividad se esperaba que los estudiantes interpretaran correctamente el valor del discriminante, aplicaran la fórmula general para obtener las raíces y verificaran sus resultados.

Tabla 7

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 3 – Soluciones y fórmula general

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Conceptual	Confusión entre Δ y las soluciones de la ecuación	El 1 % asumió que $x = \Delta$ sin usar la fórmula general.
Procedimental	Aplicación incorrecta de la fórmula general: omisión de signo negativo o del símbolo $\pm$	El 0 % cometió errores al aplicar la fórmula completa.
Procedimental	Errores al dividir entre $2a$, especialmente si $a \neq 1$	El 5 % resolvió mal la división final.
Conceptual	No reconocer soluciones complejas o irracionales como válidas	El 15 % declaró que ecuaciones con $\Delta < 0$ “no se pueden resolver”.

Interpretativo	No verificar si las soluciones obtenidas satisfacen la ecuación original	El 30 % no realizó verificación alguna, incluso en casos de soluciones erróneas.

Nota.- Elaboración propia

Esta actividad fue decisiva para valorar la comprensión integral del proceso. Los errores persistentes en la aplicación de la fórmula general revelan vacíos en la conexión entre los conceptos de discriminante, solución y forma general. Además, se identificó una marcada resistencia al aceptar soluciones complejas o no exactas, lo que sugiere la necesidad de introducir contextos que justifiquen y normalicen el uso de números complejos e irracionales.

5.1.4. Reflexión general sobre las actividades 1 a 3

Los resultados obtenidos en estas tres primeras actividades evidencian que el tránsito desde una comprensión algorítmica hacia una comprensión conceptual de las ecuaciones cuadráticas requiere un trabajo sistemático y contextualizado. Al respecto, Douady (1986) señala que los obstáculos epistemológicos propios del contenido pueden verse amplificados por dificultades didácticas si no se prevé una articulación clara entre representación, procedimiento y significado.

Si bien el formato lúdico propuesto (basado en el juego de marcos) logró aumentar la motivación y participación, no fue suficiente para garantizar la interiorización de los conceptos sin una mediación docente adecuada. Se recomienda, por tanto, complementar las actividades con momentos explícitos de reflexión y metacognición, que permitan a los estudiantes explicar, argumentar y verificar sus procesos.

5.2. Actividades 4 a 6: alternancia entre el marco gráfico y el algebraico

En esta etapa, se introdujo intencionalmente la alternancia de marcos como estrategia para promover una comprensión profunda del significado de solución de una ecuación. El tránsito entre expresiones algebraicas y su representación gráfica permitió a los estudiantes visualizar conceptos como intersección, mayor o menor valor e igualdad entre funciones cuadráticas y lineales.

5.2.1. Actividad 4: aislamiento del término cuadrático x^2

Esta actividad buscó que los estudiantes reorganizaran ecuaciones cuadráticas para despejar el término x^2 y obtener expresiones de la forma $x^2 = mx + n$ sin resolver completamente la ecuación. El propósito era desarrollar habilidades de manipulación algebraica y fortalecer la comprensión estructural de las ecuaciones cuadráticas.

Tabla 8

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 4 – Aislamiento del término $\boldsymbol{x^2}$

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Procedimental	Dificultades para aislar x^2 correctamente	El 12 % no dividió por el coeficiente del término cuadrático; algunos escribieron expresiones como $2x^2 = x + 1$.
Procedimental	Transposición incorrecta de términos y signos	El 10 % trasladó términos sin cambiar el signo o combinó mal los términos semejantes.
Procedimental	Errores en la división para aislar x^2, especialmente en fracciones	Un 12 % omitió paréntesis o distribuyó mal la división, escribiendo $x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ en lugar de $x^2 = \frac{3x+1}{2}$.
Conceptual	Uso incorrecto de operaciones inversas	Un 10 % intentó pasar términos dividiendo o extrayendo raíces prematuramente sin comprender la secuencia de operaciones.
Conceptual	Confusión sobre el objetivo: resolver la ecuación en lugar de despejar x^2.	El 8 % trató de resolver completamente la ecuación. Para ello, aplicaron la fórmula general o factorización.
Interpretativo	Dificultades con signos y fracciones, y ambigüedad por falta de paréntesis.	Un 10 % presentó errores de notación como expresiones ambiguas o mal estructuradas.

Nota.- Elaboración propia

Análisis

Tal como se anticipó en el diseño, muchos errores procedimentales giraron en torno al manejo de fracciones y la correcta aplicación de operaciones inversas. Sin embargo, los errores más reveladores fueron conceptuales. Esto se evidenció cuando una parte importante del grupo no comprendía el objetivo de despejar x^2, sino que interpretaban la consigna como una invitación a resolver completamente la ecuación.

Esta confusión sugiere una necesidad de trabajar el lenguaje matemático de las consignas. Para esto, se debe reforzar el sentido de "despejar" como parte de una estrategia de análisis y no como resolución final. También, se reafirma la importancia de enseñar el uso adecuado de paréntesis y notación algebraica para evitar ambigüedades.

5.2.2. Actividad 5: representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

Esta actividad consistió en graficar la función cuadrática $g(x) = x^2$ y la función lineal obtenida tras aislar x^2, $f(x) = mx + n$, además de trazar las rectas verticales $x = x_1$ y $x = x_2$ correspondientes a los puntos de intersección. Se pidió también sombrear las regiones solicitadas.

Tabla 9

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 5 – Representación gráfica

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Procedimental	Graficar incorrectamente la función lineal	El 18 % representó líneas curvas o con pendiente errónea; algunos usaron solo un punto.
Procedimental	Errores en la ubicación de las líneas verticales $x = x_1$, $x = x_2$	El 3 % graficó líneas diagonales y las confundió con puntos o las ubicó incorrectamente.
Conceptual	Dificultades para interpretar la relación gráfica entre $g(x)$ y $f(x)$.	El 25 % no logró identificar en qué intervalos $g(x) > f(x)$; algunos colorearon regiones invertidas.
Conceptual	Confusión entre ecuación cuadrática y función cuadrática	Un 25 % no distinguió que $g(x)$ y $f(x)$ representan funciones diferentes que deben analizarse comparativamente.
Interpretativo	Falta de validación o reflexión sobre la representación	El 20 % no justificó su gráfico ni verificó los puntos de intersección entre las funciones.
Interpretativo	Uso incorrecto del color para representar desigualdades	Un 10 % no coloreó los intervalos correspondientes o lo hizo sin criterios claros.

Nota.- Elaboración propia

Análisis

La actividad reveló que muchos estudiantes no establecieron correctamente la transición entre la expresión algebraica y su representación gráfica. La dificultad para graficar la función lineal $f(x)$ indica una comprensión incompleta de la pendiente y la ordenada al origen. Además, hubo una tendencia a representar cualquier ecuación que involucre x^2 como parábola, lo que impide distinguir adecuadamente entre las funciones.

La interpretación gráfica de la desigualdad $g(x) > f(x)$ también presentó dificultades. La falta de precisión en el uso del color y la ausencia de argumentación refuerzan la necesidad de vincular lo gráfico con el razonamiento matemático y de promover la validación de lo representado.

5.2.3. Actividad 6: análisis gráfico de soluciones e intervalos

Esta actividad integró el trabajo gráfico con la interpretación algebraica y el uso de la notación formal de intervalos. Los estudiantes debían identificar los puntos de intersección entre $g(x)$ y $f(x)$, determinar en qué intervalos $g(x) > f(x)$ y registrar sus conclusiones en una tabla.

Tabla 10

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 6 – Interpretación de soluciones e intervalos

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Conceptual	Confusión en la identificación de los puntos de intersección	El 10 % confundió los puntos con vértices o interceptos; un 12 % no reconoció ambos cruces.
Conceptual	Dificultad para interpretar correctamente las desigualdades	El 12 % invirtió la relación: afirmó $g(x) < f(x)$ donde visualmente era $g(x) > f(x)$.
Interpretativo	Confusión entre función y valor de la función (dominio vs rango)	El 10 % usó intervalos del eje y cuando se solicitaban intervalos en x.
Procedimental	Uso incorrecto o ausencia de notación formal de intervalos	El 30 % omitió los signos de extremos abiertos/cerrados o usó corchetes incorrectamente.
Conceptual	Falta de conexión entre soluciones gráficas y resolución algebraica	El 24 % no relacionó los puntos de cruce con las soluciones de $x^2 = mx + n$.

Nota.- Elaboración propia

Análisis

La actividad reveló que una parte significativa del grupo aún no logra integrar plenamente la información gráfica con la formalización algebraica. Muchos estudiantes no reconocen los puntos de intersección como soluciones de una ecuación cuadrática, lo que sugiere un enfoque segmentado entre la resolución algebraica y la representación gráfica.

Asimismo, se observó un uso inadecuado del lenguaje formal de intervalos, lo que limita la capacidad de comunicar matemáticamente sus observaciones. Esto evidencia la necesidad de prácticas explícitas de lectura e interpretación de gráficas, que están vinculadas con el razonamiento algebraico.

5.2.4. Reflexión general sobre las actividades 4 a 6

Las tres actividades evidencian que, si bien se promueve un enfoque visual e interactivo, la comprensión profunda de las ecuaciones cuadráticas y su representación funcional requiere una integración más explícita entre lo algebraico, lo gráfico y lo conceptual.

Desde la teoría de marcos, los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden entenderse como dificultades en el tránsito entre distintos marcos de actividad. En el presente estudio de aula, se observa que muchos estudiantes se desempeñan adecuadamente dentro de un marco específico, pero presentan dificultades al requerirse una articulación con otros marcos como el de formulación o el de validación. Estos cambios no solo exigen una reorganización de los conocimientos activados, sino también una relectura de la situación, lo que constituye un punto crítico en el proceso de aprendizaje (Douady, 1986).

El enfoque lúdico y visual potenció la motivación, pero la falta de espacios sistemáticos de reflexión condujo a errores reiterados. Por tanto, se recomienda implementar fases de metacognición guiada, donde se analicen errores, se argumente el razonamiento detrás de los marcos y se conecten procedimientos con significados.

5.3. Actividades 7 a 9: análisis e interpretación de inecuaciones cuadráticas

Las últimas actividades tuvieron como objetivo consolidar el concepto de inecuación cuadrática a través del uso combinado de los marcos algebraico y gráfico. Se esperaba que los estudiantes lograran interpretar desigualdades no solo mediante el método clásico de prueba de signos, sino mediante el análisis visual de las gráficas de las funciones.

Tal como refleja la Tabla 4, un porcentaje importante de estudiantes logró identificar las regiones del eje x que satisfacían las desigualdades propuestas. Sin embargo, la integración simultánea de ambos marcos (gráfico y algebraico) fue un desafío para la mitad de los estudiantes, quienes requerían apoyo docente para validar sus respuestas mediante diferentes representaciones.

5.3.1. Actividad 7: reescritura de desigualdades cuadráticas

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes reorganizaran correctamente desigualdades cuadráticas para dejar expresado el término cuadrático aislado (forma $x^2 < mx + n$ o similar) como paso previo a su resolución o representación gráfica. Se valoró la habilidad para manipular desigualdades algebraicas, realizar despejes y simplificar expresiones respetando la lógica de la desigualdad.

Tabla 11

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 7 – Reescritura de desigualdades cuadráticas

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Procedimental	Tratamiento erróneo de desigualdades como ecuaciones, aplicando técnicas como factorización o igualación a cero sin reorganizar.	El 12 % aplicó directamente factorización o intentó resolver como si fuera una ecuación sin aislar el término cuadrático ni considerar el sentido de la desigualdad.
Procedimental	Errores al despejar x^2 , por ejemplo, no agrupar términos, olvidar restar o dividir parcialmente.	El 17 % no trasladó correctamente todos los términos a un solo lado. El 10 % omitió términos en la simplificación.
Procedimental	Omitir la inversión del signo de desigualdad al dividir por coeficientes negativos	El 18 % de los casos no invirtió el signo al dividir por números negativos, incluso tras advertencias.
Conceptual	Confusión entre simplificación algebraica y resolución de desigualdades	El 15 % interpretó el proceso como resolución completa de la desigualdad o llegó a representar soluciones sin haber aislado adecuadamente x^2.
Interpretativo	Falta de reconocimiento del objetivo final del ejercicio: obtener forma canónica para facilitar su análisis posterior.	Un 20 % presentó resultados sin simplificar, incorrectamente organizados o sin llegar a una expresión tipo $x^2 < mx + n$.

Nota.- Elaboración propia

Análisis y discusión de resultados

Los errores más frecuentes fueron de naturaleza procedimental, especialmente en la reorganización de términos y el manejo de los signos. El hecho de que más de la mitad de los estudiantes trataran la desigualdad como una ecuación revela una confusión conceptual de fondo, posiblemente reforzada por rutinas previas centradas en igualdades.

Resulta crítico notar que el desconocimiento de reglas básicas como la inversión del signo de desigualdad al dividir por números negativos, fue más frecuente de lo anticipado, lo que sugiere una necesidad de revisión explícita y contextualizada de tales propiedades.

La falta de atención a la consigna específica (aislar x^2) y la tendencia a resolver directamente o graficar prematuramente evidencian una anticipación mecánica de pasos posteriores. Esto confirma la importancia de desarrollar habilidades de interpretación y planificación de estrategias matemáticas.

5.3.2. Actividad 8: representación gráfica de desigualdades cuadráticas

Esta actividad se enfocó en que los estudiantes representaran gráficamente soluciones de desigualdades cuadráticas. Para ello, reconoce la diferencia entre desigualdades estrictas y no estrictas, y delimita correctamente los intervalos de solución sobre el eje x.

Tabla 12

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 8 – Representación gráfica

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Conceptual	Confusión entre ejes: identificar que la solución se representa sobre el eje x y no sobre el plano cartesiano.	El 14 % coloreó regiones del plano o marcó puntos en las gráficas en lugar de señalar los intervalos sobre el eje x.
Interpretativo	No diferencia desigualdades estrictas y no estrictas mediante puntos abiertos o cerrados.	Un 18 % utilizó indistintamente puntos abiertos/cerrados o no los representó e incluso cuando la consigna lo exigía explícitamente.
Conceptual	Malinterpretación del intervalo solución: marcar el signo de $f(x)$ o	El 12 % coloreó regiones por debajo o por encima de la gráfica

	$g(x)$ en lugar de observar los valores de x donde se cumple la desigualdad.	sin verificar si correspondía al intervalo deseado.
Interpretativo	Representar casos genéricos sin verificar puntos clave como intersecciones con el eje x.	El 19 % asumió la existencia de dos intersecciones sin comprobarlas o coloreó ambas ramas de la parábola mecánicamente.

Nota.- Elaboración propia

Análisis y discusión de resultados

Esta actividad mostró dificultades significativas en la transición del plano algebraico al gráfico, particularmente en la interpretación de los ejes. Muchos estudiantes no lograron identificar que el eje x es el lugar geométrico adecuado para representar soluciones de desigualdades.

Se identificó una aplicación mecánica de procedimientos gráficos como colorear regiones sin verificación. Esto confirma la necesidad de desarrollar capacidades de interpretación visual con fundamento algebraico. La notación gráfica también fue deficiente: el uso inconsistente de puntos abiertos o cerrados refleja una comprensión parcial del lenguaje simbólico-visual de las matemáticas.

5.3.3. Actividad 9: análisis integrado de desigualdades cuadráticas – representación gráfica y tabular

En esta actividad, los estudiantes debían analizar desigualdades cuadráticas comparando dos funciones y determinar en qué intervalos una función era mayor o menor que otra. Para ello, utiliza gráficas de funciones y tablas de valores.

Tabla 13

Comportamientos esperados y observados en la Actividad 9 – Análisis gráfico y tabular

Tipo de error	Comportamiento esperado	Comportamiento observado
Conceptual	Confusión entre puntos de intersección y solución de la	El 16 % identificó los puntos de corte como la única solución sin considerar los intervalos entre raíces.

	desigualdad (solo registrar raíces)	
Interpretativo	Dificultad para leer correctamente los puntos de intersección sobre el eje x	El 10 % registró valores incorrectos de intersección o los interpretó como coordenadas completas (x, y) y no como valores de x.
Procedimental	Confusión entre ejes x e y al registrar puntos de intersección o soluciones	El 18 % anotó soluciones en función de y o marcó puntos fuera del dominio relevante.
Interpretativo	Representación de soluciones como puntos aislados y no como intervalos continuos	El 25 % escribió soluciones como un conjunto de puntos sueltos sin identificar intervalos de cumplimiento.
Procedimental	Errores en el llenado de la tabla: omisión de datos, inversión de signos o límites mal expresados	El 12 % presentó tablas incompletas con errores en el orden de los intervalos o con notación ambigua e inadecuada.
Conceptual	Falta de verificación entre representación gráfica y tabla de resultados	El 23 % no justificó sus respuestas ni contrastó la tabla con la gráfica, incluso cuando los valores eran inconsistentes.

Nota.- Elaboración propia

Análisis y discusión de resultados

La actividad 9 implicó un mayor grado de complejidad al exigir una integración de distintos marcos. Los errores observados reflejan la dificultad para coordinar información del marco funcional(gráfica) con el marco algebraico (tabla y desigualdad). La tendencia a considerar únicamente los puntos de intersección como soluciones sugiere una comprensión limitada del significado de una desigualdad entre funciones.

La representación de soluciones como puntos aislados y no como intervalos revela una brecha en el entendimiento del carácter continuo de los conjuntos solución. Además, el uso incorrecto o incompleto de las tablas sugiere que los estudiantes aún no dominan esta herramienta como medio de organización y validación de información matemática.

5.3.4. Conclusión general sobre las actividades 7 a 9

Los resultados evidencian que, aunque los estudiantes muestran familiaridad parcial con los procedimientos algebraicos, enfrentan dificultades importantes para integrar distintos marcos de representación: simbólico, gráfico y tabular. La anticipación mecánica de procedimientos, la confusión entre desigualdades y ecuaciones, y la pobre verificación de resultados reflejan la necesidad de enfatizar lo siguiente:

- El significado conceptual de la desigualdad como comparación de funciones.
- Es importante representar intervalos y no solo puntos.
- Existe la necesidad de verificar la consistencia entre gráfica, tabla y notación simbólica.

Para futuras implementaciones, se recomienda introducir secuencias más progresivas, con tareas intermedias de interpretación, momentos explícitos de justificación, y un mayor énfasis en la relación entre estructura algebraica y representación gráfica.

Capítulo VI: Análisis a posteriori

En este capítulo se presenta el análisis a posteriori de la propuesta didáctica aplicada. La finalidad principal es contrastar los comportamientos esperados, formulados durante el análisis a priori, con las conductas observadas en la práctica durante el desarrollo de las actividades con los estudiantes. Este análisis permite valorar la pertinencia y eficacia del diseño didáctico, así como identificar los logros alcanzados y las dificultades emergentes.

A partir de la información recogida, se examina la idoneidad didáctica de la propuesta, su potencial formativo y las oportunidades de mejora a través de ajustes o rediseños. Todo ello se fundamenta en referentes teóricos que orientan la interpretación de los resultados y fortalecen la reflexión sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones cuadráticas en un contexto escolar.

6.1 Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación.

En esta parte se compara los comportamientos esperados que se detallaron por cada una de las preguntas de cada actividad con las conductas reales de los estudiantes observados en la experimentación.

ACTIVIDAD 1

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
Del ítem “a” al ítem “i”	Como se había previsto, los estudiantes lograron utilizar adecuadamente la fórmula del discriminante en algunos casos directamente y en otros identificando previamente los coeficientes antes de reemplazarlos; en el caso de las ítems c, f, i algunos consultaron sobre cómo hacer en el caso de que los coeficiente “b” y “c” no se encuentren presentes en la ecuación. Para ello, se hizo una analogía al caso de divisiones algebraicas y cómo hacían ellos en caso de que faltara algún término. Inmediatamente captaron cómo hacerlo.

ACTIVIDAD 2

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
Del ítem "a" al ítem "i"	Como se había previsto, los estudiantes lograron identificar la ecuación cuadrática simplificada y posteriormente aplicaron la fórmula del discriminante vista previamente. No se presentó ninguna dificultad mayor por lo que fue una actividad que se llevó muy de acuerdo a lo previsto.

ACTIVIDAD 3

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
Del ítem "a" al ítem "i"	Como se había previsto, los estudiantes pudieron encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática con el uso del discriminante obtenido en la actividad anterior. Hubo algunas consultas cuando se usaron los discriminantes negativos, ya que inmediatamente la mayoría se percató que no existía solución, por lo cual su única consulta fue cómo colocar un resultado que no existe. Por ende, se colocó la representación en la pizarra, ya que no intervenía en nuestras posteriores actividades.

ACTIVIDAD 4

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
Del ítem "a" al ítem "i"	Como se había previsto, la mayoría pudo despejar correctamente el término "x^2". Hubo algunos errores de signo menores, sin embargo, la mayoría halló correctamente todas las ecuaciones. En algunos casos hubo dudas acerca de que, si el último ítem estaba bien, ya que el término "x^2" quedaba ubicado al lado izquierdo. Por esta razón, se mencionó la analogía sobre una ecuación lineal y que no siempre la variable debe quedar a la izquierda, sin embargo, aun así, hubo ciertos errores por parte de una minoría.

ACTIVIDAD 5

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los observados
Del ítem "a" al ítem "c"	Como se había previsto, la mayoría pudo dibujar correctamente lo solicitado en cada enunciado y pudo identificar rápidamente que tenía que graficar la función f. Por ende, se tomó dos puntos de paso ubicados en los ejes. Hubo errores debido a la obtención de puntos fraccionarios por la minoría.

Del ítem “d” al ítem “f”	Como se había previsto, la mayoría pudo dibujar correctamente lo solicitado en cada enunciado. No obstante, hubo dudas en cómo ubicar la recta vertical, ya que las dos soluciones eran iguales. Por ello, se respondió que, al haber solución única, entonces debe haber una única recta vertical. Entonces, los estudiantes pudieron comprender que solo tocaría a la función cuadrática en un único punto.
Del ítem “g” al ítem “i”	Como se había previsto, la mayoría pudo dibujar correctamente lo solicitado en cada enunciado. Sin embargo, hubo dudas en cómo ubicar la recta vertical, ya que no había soluciones reales. Por ende, se respondió que, al no ver solución, no era necesario que haya recta vertical. Entonces, los estudiantes pudieron comprender que ambas funciones no se intersecan. Asimismo, hubo algunos errores al momento de graficar la función f en el ítem g, ya que tuvieron problemas al relacionar la fracción con una coordenada.

ACTIVIDAD 6

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
Del ítem “a” al ítem “c”	Como se había previsto, una gran parte de los estudiantes lograron identificar correctamente los conjuntos solicitados en cada enunciado. Sin embargo, algunos no lograron entender la diferencia entre los enunciado II y IV, además de los enunciados III y V, por lo que pusieron los mismos intervalos. En esta actividad, no hubo preguntas considerables.
d-e-f	Como se había previsto, la mayoría de los estudiantes lograron identificar correctamente los conjuntos solicitados en cada enunciado. Sin embargo, algunos confundieron las llaves con los corchetes al colocar un elemento único. En esta actividad, no hubo preguntas considerables.
g-h-i	Como se había previsto, la mayoría de los estudiantes lograron identificar correctamente los conjuntos solicitados en cada enunciado. En esta actividad, no hubo preguntas considerables.

ACTIVIDAD 7

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
Del ítem “a” al	Como se había previsto, la mayoría pudo despejar correctamente el término “x^2”, a pesar de que hubo algunos errores de signo menores. Sin embargo, la mayoría

ítem “i”	despejó correctamente todas las inecuaciones y no hubo dudas relevantes en esta actividad, ya que lo hicieron análogo a la actividad 4.

ACTIVIDAD 8

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
Del ítem “a” al ítem “c”	Como se había previsto, la mayoría pudo identificar las tres secciones del plano cartesiano. En estas se evaluaron cada una de ellas según el tipo de desigualdad. No hubo consultas relevantes.
Del ítem “d” al ítem “f”	Como se había previsto, la mayoría pudo identificar las dos secciones del plano cartesiano. Se evaluaron cada una de ellas según el tipo de desigualdad. Hubo ciertas dudas con respecto al ítem “e”, ya que solo quedaba un punto abierto, lo que causó cierta incertidumbre en los estudiantes.
Del ítem “g” al ítem “i”	Como se había previsto, la mayoría pudo identificar el plano cartesiano como única sección en la que se evaluó según el tipo de desigualdad. Hubo ciertas dudas con respecto al ítem “g”, ya que no observaban que no se debería pintar nada.

ACTIVIDAD 9

Ítem	**Comparación entre los comportamientos esperados y los observados**
Del ítem “a” al ítem “i”	Como se había previsto, la mayoría entendió rápidamente lo que debía hacer y representaron en forma de intervalo el gráfico obtenido con respecto a la actividad anterior. Luego, ellos revisaron la tabla de la actividad 6 y completaron de qué caso se trataba. No hubieron dudas relevantes. Sin embargo, en la hora de seleccionar una de las opciones trabajadas en la actividad seis, hubo una gran cantidad de errores, debido a que los estudiantes quisieron terminar la actividad de manera rápida. Además, se confundieron en el tipo de intervalo (abierto o cerrado).

6.2 Idoneidad, potencial formativo y reajustes desde un análisis a posteriori

6.2.1. Valoración de la idoneidad didáctica

La propuesta didáctica presenta un alto grado de idoneidad epistémica, ya que respeta la estructura conceptual del contenido matemático involucrado. En este caso, las inecuaciones cuadráticas y la forma progresiva de abordarlas parten del análisis del discriminante hasta llegar a la interpretación de soluciones a través de gráficos (Godino et al., 2007). La secuencia de actividades es coherente con el enfoque de resolución de problemas y permite que los estudiantes enfrenten situaciones matemáticas auténticas que exigen una reorganización constante de sus conocimientos previos.

Además, se observa una idoneidad cognitiva al considerar las diversas estrategias que los estudiantes pueden movilizar dentro de un marco dado para resolver las tareas propuestas. La organización de las actividades promueve una comprensión profunda al favorecer la articulación entre distintos marcos de actividad matemática, en particular cuando los estudiantes deben pasar del marco algebraico a otros marcos que requieren interpretación o validación de resultados. Esta dinámica resulta especialmente relevante en procesos como el paso de ecuaciones a desigualdades. Asimismo, el diseño de las tareas permite identificar errores recurrentes y propiciar momentos de reflexión, lo que contribuye al desarrollo de la autonomía y del pensamiento crítico del estudiante (Douady, 1986).

En cuanto a la idoneidad ecológica, el diseño se adapta bien al contexto educativo formal y puede integrarse fácilmente al currículo de secundaria o bachillerato. Para ello, se debe articular contenidos del álgebra con funciones y gráficas. La propuesta incorpora gradualmente elementos tecnológicos (por ejemplo, mediante la sugerencia de herramientas como GeoGebra). Esto facilita la adecuación a contextos escolares actuales que valoran el uso de recursos digitales (Artigue, 2002).

Se reconoce también una idoneidad interaccional moderada. Aunque las actividades están diseñadas principalmente para trabajo individual, pueden ser potenciadas mediante dinámicas de colaboración o discusión en grupo. La idea es que los estudiantes puedan argumentar y confrontar estrategias. Esto último puede fortalecerse con ajustes metodológicos orientados a promover más espacios de intercambio verbal, lo que favorecería una mayor apropiación conceptual.

6.2.2. Potencial formativo y anticipación de dificultades

Las actividades propuestas favorecen el desarrollo del pensamiento matemático cuando se exige al estudiante no solo la aplicación mecánica de procedimientos, sino también la interpretación, justificación y transferencia entre marcos. Esto es coherente con las ideas de Douady (1986), quien plantea que los aprendizajes significativos surgen cuando el alumno es capaz de operar dentro de distintos marcos y modificar su posición en función de la tarea.

No obstante, se identifican las posibles dificultades:

- Comprensión incompleta del concepto de discriminante y su relación con la cantidad y tipo de soluciones.
- Errores al despejar términos cuadráticos o al reordenar ecuaciones a la forma estándar.
- Confusión entre desigualdades y ecuaciones, particularmente al interpretar gráficamente regiones de solución.
- Dificultad en el uso coordinado de distintos marcos: algebraico y funcional.

Estas dificultades fueron previstas parcialmente durante el análisis a priori, pero su aparición en la práctica sugiere que es necesario fortalecer los apoyos didácticos como recursos visuales, andamiajes verbales y trabajo colaborativo.

6.2.3. Sugerencias de ajuste y reajuste del diseño

A partir del análisis a posteriori, se plantean varios ajustes al diseño didáctico, tanto en términos de contenido como de metodología. El objetivo consiste en optimizar el aprendizaje y facilitar el tránsito entre marcos semióticos (Douady, 1986).

6.2.3.1. Introducción de microsecuencias de andamiaje

Antes de abordar actividades complejas con énfasis en identificar errores frecuentes (por ejemplo, en el despeje de ecuaciones o uso incorrecto del discriminante), se puede reforzar la apropiación conceptual y reducir errores sistemáticos (Polya, 1957; Schoenfeld, 1985).

6.2.3.2. Integración de tareas de predicción y estimación previa a la resolución

Hay que anticipar cuántas soluciones tendrá una ecuación antes de resolverla. Esta práctica contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico y refuerza la metacognición (Boero, 2001).

6.2.3.3. Diseño de rúbricas de autoevaluación

Permite a los estudiantes revisar si su resolución está completa y si han usado apropiadamente los diferentes marcos. Estas rúbricas pueden fomentar procesos reflexivos que aumenten la idoneidad personal (Font, Godino & Wilhelmi, 2013).

6.2.3.4. Secuencias específicas de trabajo con GeoGebra

Sirve para modelar visualmente las funciones cuadráticas y lineales, y visualizar las regiones solución de desigualdades. El trabajo con herramientas digitales favorece una mediación instrumental que permite conectar significados abstractos con experiencias manipulables (Artigue, 2002; Rabardel, 1995).

6.2.3.5. Incorporación de actividades cooperativas

Se promueve el debate matemático entre pares, y fomenta la argumentación y el cambio de marco desde una perspectiva dialógica. Esto contribuye a la apropiación de significados más robustos (Sfard, 2001).

6.2.3.6. Revisión de la actividad 6

Amplía el análisis de intersecciones a situaciones con raíces complejas o inexistentes (caso discriminante negativo), lo que permite explorar la noción de solución en diferentes contextos algebraicos y gráficos.

6.3 Resultados finales de la aplicación de la propuesta didáctica

Considerando el análisis a priori, los comportamientos observados durante la experimentación, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos se pueden precisar que la secuencia diseñada, en un principio, aportaría a la comprensión e interpretación del proceso de obtención del conjunto solución de una inecuación cuadrática. Por lo manifestado, en términos generales, la propuesta didáctica ha sido respondida satisfactoriamente por los estudiantes. Por razones de tiempo y por la extensión de la investigación no se realizó otra experimentación de la secuencia didáctica elaborada, que habría dado mayores elementos para hacer los ajustes o el rediseño del caso en la estructura. Por ejemplo, está el hecho de agregar actividades intermedias o volver aplicar la propuesta con distintos casos.

Conclusiones, recomendaciones y aportes

Este capítulo presenta las conclusiones alcanzadas respecto a los objetivos propuestos, se formulan algunas sugerencias y, finalmente, se plantean perspectivas para investigaciones futuras relacionadas con el tema desarrollado, que dio origen a este trabajo.

En primer lugar, a partir del análisis del objeto de estudio desarrollado en el capítulo 3 desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, se logró identificar las variables didácticas, tipos de función y conjuntos solución útiles para la elaboración de actividades. Aunque el Currículo Nacional de Educación Básica Regular no contempla directamente el estudio de inecuaciones cuadráticas en el séptimo ciclo, los estudiantes cuentan con los conocimientos previos necesarios para introducir este contenido de forma accesible mediante un enfoque funcional y gráfico. Resulta fundamental que dominen conceptos previos como el análisis de funciones cuadráticas y lineales, ya que constituyen la base para comprender las inecuaciones cuadráticas. Las funciones cuadráticas $g(x) = x^2$ y lineal $f(x) = ax + b$ fueron identificadas como claves para representar comparaciones gráficas y construir conjuntos solución. Además, el análisis funcional apoyado en la comparación por zonas facilitó el cambio de representación y la transición entre marcos de trabajo algebraico y funcional.

Seguidamente, en lo que respecta al diseño de una propuesta didáctica basada en estas variables, se integraron actividades orientadas a resolver inecuaciones cuadráticas a partir del estudio gráfico de funciones lineales y cuadráticas. Este diseño, fundamentado en el análisis previo del objeto matemático, permitió articular los marcos algebraico y funcional, generando así un espacio donde los estudiantes pudieron comprender las inecuaciones cuadráticas no solo mediante procedimientos simbólicos, sino también a través de representaciones gráficas. Se logró un equilibrio entre elementos gráficos y simbólicos, lo que permitió construir el concepto de conjunto solución desde diversas representaciones. En términos generales, la propuesta demostró ser pertinente y coherente con el nivel cognitivo de los estudiantes del séptimo ciclo, lo cual evidencia su viabilidad en el aula.

Posteriormente, el análisis a priori desarrollado en el capítulo 4 permitió anticipar los tratamientos y conversiones que los estudiantes deberían realizar al abordar las tareas. Se identificaron diversos tratamientos dentro del marco algebraico en las primeras actividades y se evidenciaron conversiones significativas en actividades específicas como la 5, 6, 8 y 9 al pasar de expresiones algebraicas a representaciones gráficas y viceversa. Estos cambios de representación se mostraron esenciales para resolver adecuadamente las inecuaciones cuadráticas, constituyendo un eje central en la construcción de un aprendizaje significativo.

A partir del análisis a posteriori, descrito en los capítulos 5 y 6, se observaron y describieron las estrategias efectivamente utilizadas por los estudiantes. Se encontró una alta correspondencia entre los comportamientos previstos en el análisis a priori y los que realmente se observaron durante la implementación, lo cual valida la pertinencia de las tareas diseñadas. En las primeras actividades, los tratamientos aplicados por los estudiantes fueron mayoritariamente adecuados, con errores mínimos o parciales. No obstante, las conversiones entre marcos funcional y algebraico representaron un punto crítico, sobre todo en tareas que exigían interpretar gráficas como representaciones del conjunto solución. A pesar de ello, el cambio de marco facilitó una mejor comprensión, aunque también evidenció la necesidad de apoyos adicionales para fortalecer esta competencia.

Como resultado de la implementación de la propuesta, también se pudo analizar hasta qué punto la realización de las tareas en el marco funcional contribuyó a la comprensión del contenido. La integración de este marco, mediante el uso de gráficas de funciones cuadráticas y lineales, facilitó una mejor comprensión del concepto de conjunto solución. Se observó una mejora en la capacidad de los estudiantes para visualizar los intervalos que satisfacen la desigualdad, especialmente al realizar comparaciones gráficas entre funciones. Sin embargo, se identificó la necesidad de incorporar una actividad intermedia entre las actividades 6 y 7, que refuerce la conversión entre gráficas e intervalos, pues en ese tramo se presentaron mayores dificultades. Asimismo, se sugieren ajustes en las actividades iniciales que fortalezcan el reconocimiento de coeficientes, tipos de soluciones y segmentación del plano cartesiano, de modo que se facilite una transición más fluida entre marcos.

Derivado de estas conclusiones, se proponen diversas recomendaciones para la docencia. Es recomendable incorporar la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas mediante el uso de funciones, especialmente funciones lineales, dado que son más accesibles para graficar y permiten una comprensión más precisa del conjunto solución desde un enfoque gráfico. Además, se sugiere que los docentes de matemática en educación secundaria integren en su práctica los principios de la teoría de marcos desarrollada por Régine Douady. Particularmente en el estudio de las inecuaciones cuadráticas, iniciar desde el marco funcional permite a los estudiantes visualizar el comportamiento de las funciones involucradas, identificar zonas de intersección o separación y comprender gráficamente el significado del conjunto solución. Desde allí se puede transitar hacia el marco algebraico para formalizar los procedimientos mediante factorización, análisis de signos o uso de propiedades de desigualdades.

También se recomienda incluir actividades que impliquen el paso entre diferentes representaciones, como convertir una gráfica en una inecuación y viceversa. Este cambio de marco promueve la flexibilidad cognitiva, la metacognición y una comprensión conceptual más profunda. El uso de tecnologías como GeoGebra u otros entornos digitales interactivos también es aconsejable para facilitar este tipo de tareas, ya que permiten manipular funciones y observar el impacto de los cambios en sus coeficientes sobre las soluciones.

Es importante destacar que este enfoque basado en el cambio de marcos no se limita únicamente al estudio de inecuaciones cuadráticas. Su aplicación puede extenderse a diversos temas del currículo de matemática en secundaria, como el análisis de funciones lineales y cuadráticas, la geometría analítica al transitar entre ecuaciones y representaciones gráficas, el álgebra al comprender procesos como factorización o simplificación, y la estadística y probabilidad al combinar marcos numéricos, gráficos y simbólicos. También puede implementarse en temas como semejanza de triángulos, proporcionalidad y sistemas de ecuaciones, mediante secuencias didácticas que articulen distintos marcos en la resolución de problemas tanto contextualizados como abstractos.

Finalmente, la propuesta desarrollada en esta investigación responde a una problemática ampliamente documentada en la didáctica del álgebra: las dificultades en la manipulación de expresiones algebraicas, especialmente en el contexto de las inecuaciones cuadráticas. Estas dificultades no deben interpretarse simplemente como carencias en habilidades o conocimientos, sino como manifestaciones de una limitada capacidad para cambiar de marco al enfrentarse a una situación matemática. Desde la perspectiva de la teoría del juego de marcos de Régine Douady, la manipulación algebraica implica un acto de interpretación que requiere movilidad entre marcos.

Las actividades diseñadas en esta propuesta se concibieron precisamente para inducir cambios de marco de forma explícita. De esta manera se promueve el desarrollo de competencias necesarias para transitar entre significados y formas de representación. El aporte central de esta propuesta radica entonces en que los estudiantes no solo aprenden a resolver inecuaciones cuadráticas, sino que desarrollan la capacidad de interpretar el sentido de sus acciones matemáticas desde múltiples marcos. Este enfoque permite abordar errores comunes en álgebra como confusiones con signos, procedimientos mecánicos sin comprensión o dificultades en la interpretación gráfica desde una mirada más profunda y fundamentada. Además, abre un camino para intervenir didácticamente en otros temas del álgebra escolar, como sistemas de ecuaciones, funciones racionales o el estudio de parámetros, donde el juego de marcos ofrece herramientas valiosas para fomentar la comprensión profunda y la flexibilidad cognitiva, aspectos esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Referencias bibliográficas

Al-Khwarizmi. (1986). *Álgebra*. Dover Publications

Artigue, M. (1995). Ingénierie didactique. In A. Mercier, C. Margolinas & M. Brousseau (Eds.). *La didactique des mathématiques* (pp. 143–168). La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (1995). Rapports entre le graphique et le symbolique dans l'enseignement des fonctions. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 65–105.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Eds.). *Nordic Research in Mathematics Education* (pp. 7–16). The Danish University of Education.

Baldor, A. (2006). *Álgebra*. Grupo Patria Cultural.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. RELIME. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 199–220. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092570

Barbosa, K. (2006). *Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* [Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional].Repositorio digital del Instituto Politécnico Nacional https://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11391/1/barbosa.pdf

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1–3), 235–268. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0523-5

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.). *Perspectives on School Algebra* (pp. 99–118). Springer.

Boucourú, J. (2019). *MOOC para la enseñanza de desigualdades e inecuaciones en alumnos de once grado de la institución educativa Nueva Granada del municipio de Dosquebradas* [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira].Repositorio institucional de Pereira. https://repositorio.utp.edu.co/entities/publication/8e0c2672-1dfe-44e4-b103-e156b61529e9

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. Wiley.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.

De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(2). https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6887

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil–objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

Douady, R. (1991). Learning and teaching mathematics: Cognitive processes and didactical situations. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 109–124). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Douady, R. (1991). Tools, objects and knowledge: The didactic approach of mathematics teaching. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 109–130). Springer.

Douady, R. (2005). *Relación enseñanza-aprendizaje: Dialéctica instrumento-objeto. Juego de marcos. Scribd.* https://es.scribd.com/document/264227838

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Kluwer Academic Publishers.

Font, V., Godino, J. D., & Wilhelmi, M. R. (2013). Potencial de aprendizaje y comprensión del conocimiento matemático: Un análisis epistemológico-didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 307–336.

Garrido, P. (2017). *Inecuaciones en educación superior: Una mirada desde la teoría de registros de representaciones semióticas de Raymond Duval* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Repositorio institucional de la PUCP http://repositorio.ucv.cl/handle/10.4151/65255

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–356.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Gómez-Chacón, I. M., & Orozco, D. (2014). *Competencias matemáticas con GeoGebra en bachillerato*. Narcea.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Dover Publications.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.

Iparraguirre, A. (2021). *Representaciones semióticas de inecuaciones lineales: Una propuesta didáctica para tercer grado de educación secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional de la PUCP http://hdl.handle.net/20.500.12404/19818

Joseph, G. G. (2011). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics.* Princeton University Press.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction*. Pearson Education.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester Jr. (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Information Age.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Larson, R., & Hodgkins, L. (2016). *Algebra and trigonometry*. Cengage Learning.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1–3), 87–113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Margolinas, C. (2002). Situaciones didácticas y teoría de los campos conceptuales: Análisis de la articulación. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(1), 73–128.

Maroto, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista de Educación*, 37(2), 1–16. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/educacion/article/view/12924/12251

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 103–129.

Robson, E. (2007). *Mathematics in ancient Iraq: A social history*. Princeton University Press.

Sánchez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital PUCP http://hdl.handle.net/20.500.12404/1641

Sánchez, M. (2020). *Didáctica del álgebra en la educación secundaria*. Ediciones SM.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir: Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Librairie Philosophique J. Vrin.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1–3), 13–57. https://doi.org/10.1023/A:1014097416157

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25–58). Mathematical Association of America.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Valenzuela, G. (2017). *Inecuaciones en educación superior: Una mirada desde la teoría de registros de representaciones semióticas de Raymond Duval* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Repositorio institucional de la Universidad Católica de Valparaíso http://repositorio.ucv.cl/handle/10.4151/65255

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133–170.

Vrancken, S., Müller, D., & Engler, A. (2010). Inecuaciones algebraicas. Una experiencia didáctica articulando diversos sistemas de representación. *Yupana: Revista de Educación Matemáticas de la Facultad de Humanidades y Ciencias. 1*(5), 55–66. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8061468

Zavaleta, A. J. (2021). *Representaciones semióticas de inecuaciones lineales: Una propuesta didáctica para tercer grado de educación secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio digital de la PUCP http://hdl.handle.net/20.500.12404/19818

Anexo 1. Actividades

Apellidos:____

Nombres:____

DNI:________________________

1) Encuentre el discriminante en las siguientes ecuaciones cuadráticas y completa la tabla:

Ecuación cuadrática	Discriminante (Δ)
a) $x^2 + 2x - 2 = 0$	$\Delta=$
b) $x^2 + 5x + 4 = 0$	$\Delta=$
c) $x^2 - 4 = 0$	$\Delta=$
d) $4x^2 + 4x + 1 = 0$	$\Delta=$
e) $x^2 + 6x + 9 = 0$	$\Delta=$
f) $x^2 = 0$	$\Delta=$
g) $2x^2 + 3x + 5 = 0$	$\Delta=$
h) $x^2 + 2x + 4 = 0$	$\Delta=$
i) $x^2 + 9 = 0$	$\Delta=$

2) Simplifique las siguientes ecuaciones cuadráticas a la forma "$ax^2 + bx + c = 0$", encontrar el discriminante y completar la tabla:

Ecuación cuadrática	Ecuación cuadrática simplificada ($ax^2 + bx + c = 0$)	Discriminante (Δ)
a) $2x^2 + x + 5 = 6$		$\Delta =$
b) $3x^2 - x + 5 = 7$		$\Delta =$
c) $2x^2 - 10 = -2$		$\Delta =$
d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$		$\Delta =$
e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$		$\Delta =$
f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$		$\Delta =$
g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$		$\Delta =$
h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$		$\Delta =$
i) $4x^2 - 2x - 11 = 7x^2 - 2x + 1$		$\Delta =$

3) Use los discriminantes de la actividad 2 para hallar la o las soluciones las cuales hacen a la ecuación verdadera y completa la siguiente tabla.

Ecuación cuadrática	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
a) $2x^2 + x + 5 = 6$	$x_1 =$	$x_2 =$
b) $3x^2 - x + 5 = 7$	$x_1 =$	$x_2 =$
c) $2x^2 - 10 = -2$	$x_1 =$	$x_2 =$
d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$	$x_1 =$	$x_2 =$
e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$	$x_1 =$	$x_2 =$
f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$	$x_1 =$	$x_2 =$
g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$	$x_1 =$	$x_2 =$
h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$	$x_1 =$	$x_2 =$
i) $4x^2 - 2x - 11 = 7x^2 - 2x + 1$	$x_1 =$	$x_2 =$

4) En los siguientes casos, despeja el término "x^2" de modo que quede de la forma siguiente: "$x^2 = mx + n$" y completar la tabla.

Ecuación cuadrática	Forma despejada ($x^2 = mx + n$)
a) $2x^2 + x + 5 = 6$	
b) $3x^2 - x + 5 = 7$	
c) $2x^2 - 10 = -2$	
d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$	
e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$	
f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$	
g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$	
h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$	
i) $4x^2 - 2x - 11 = 7x^2 - 2x + 1$	

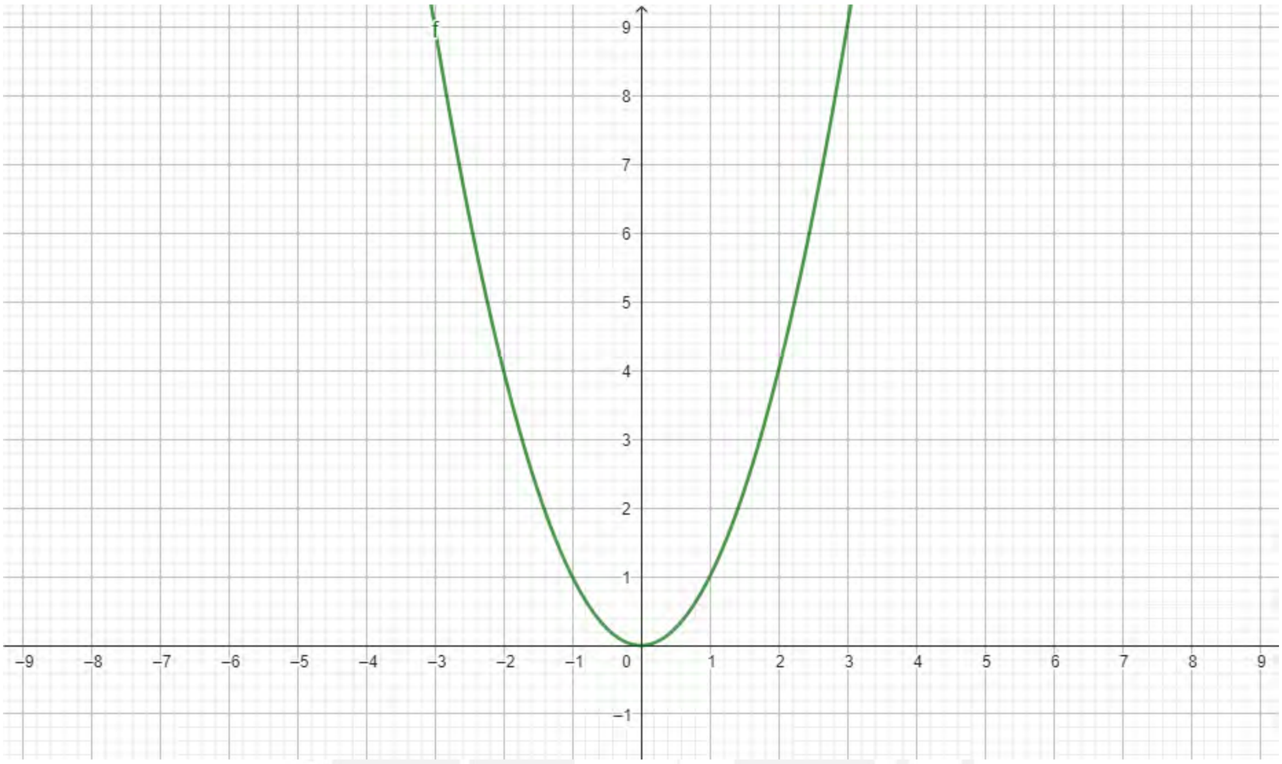
5) En cada uno de los siguientes ítems, realiza lo solicitado:

I. Con la ecuación lineal obtenida al despejar la ecuación de la forma "$x^2 = mx + n$" en cada ítem de la actividad anterior, graficar la función lineal "$f(x) = mx + n$" en el siguiente plano, en el que ya se tiene la gráfica de $g_{(x)} = x^2$.

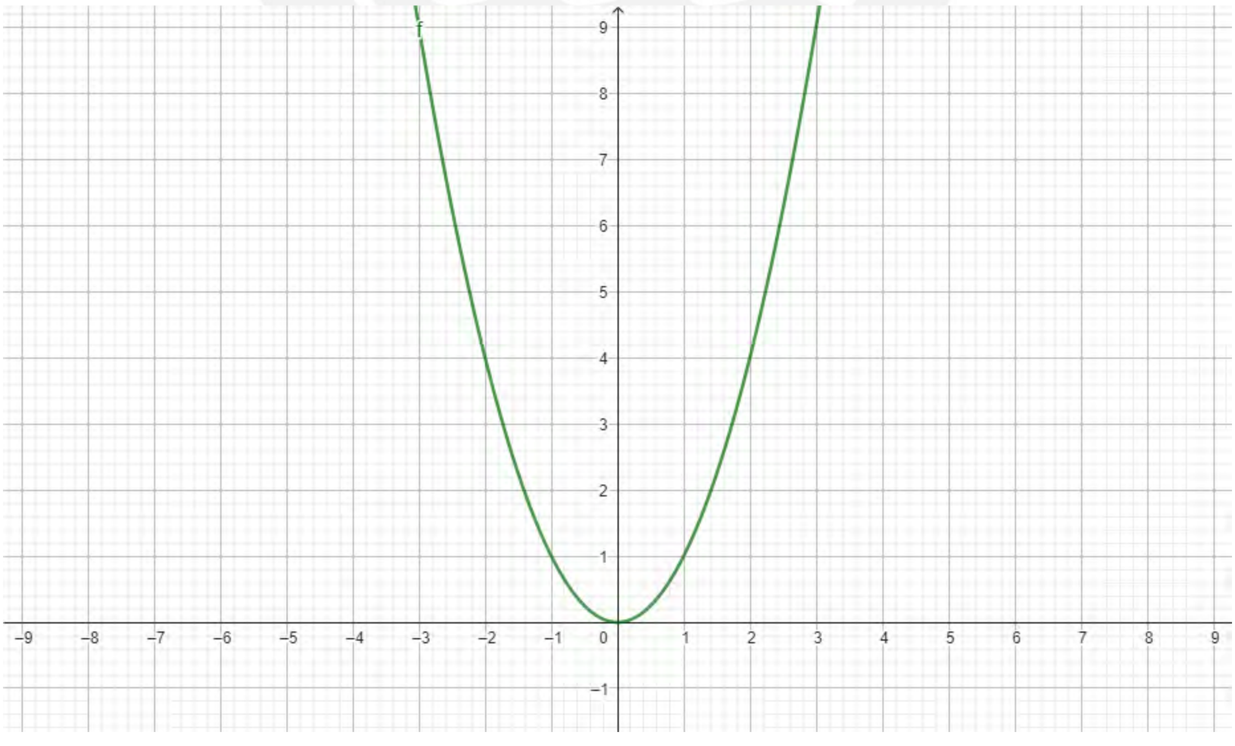
II. Con las soluciones (x_1, x_2) obtenidas en la actividad 3, graficar las líneas verticales: $x = x_1 \wedge x = x_2$.

III. Colorear de color azul las proyecciones de los interceptos de ambas gráficas sobre el eje x, de color verde los valores de x que hagan que $g_{(x)}$ sea mayor que $f(x)$ y de color rojo los valores de x que hagan que $f(x)$ sea mayor que $g(x)$.

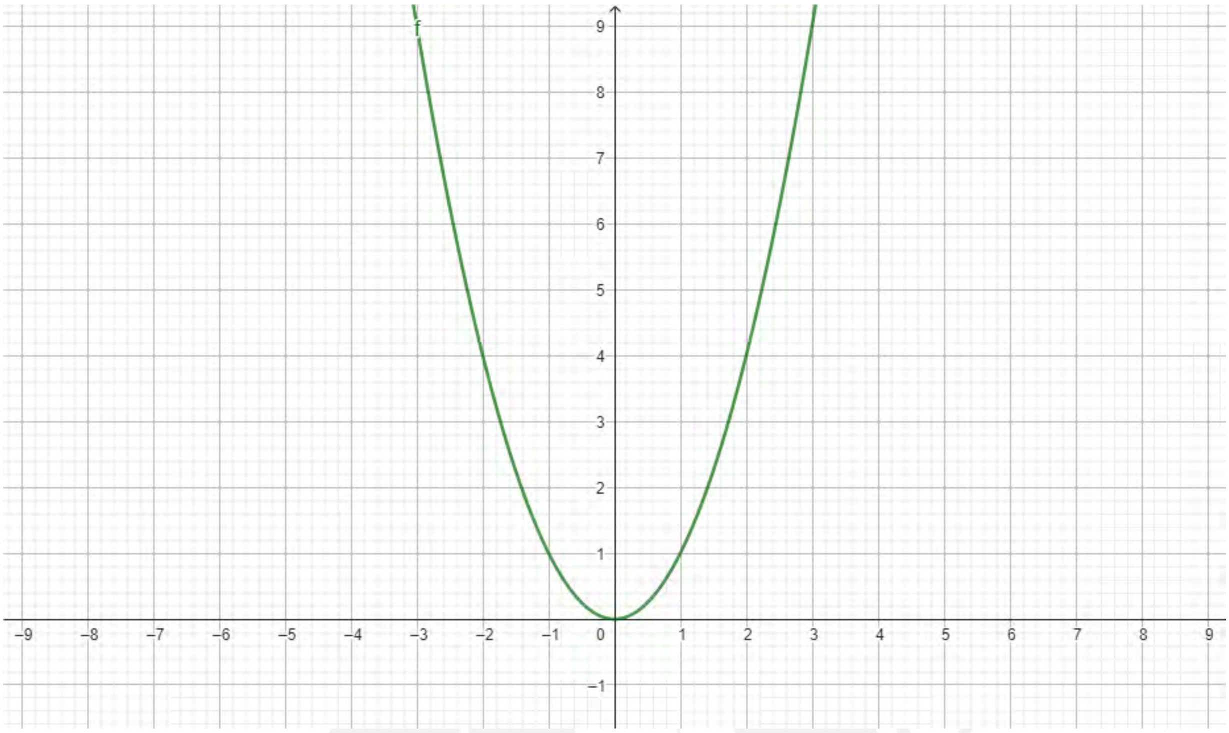
a) $x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



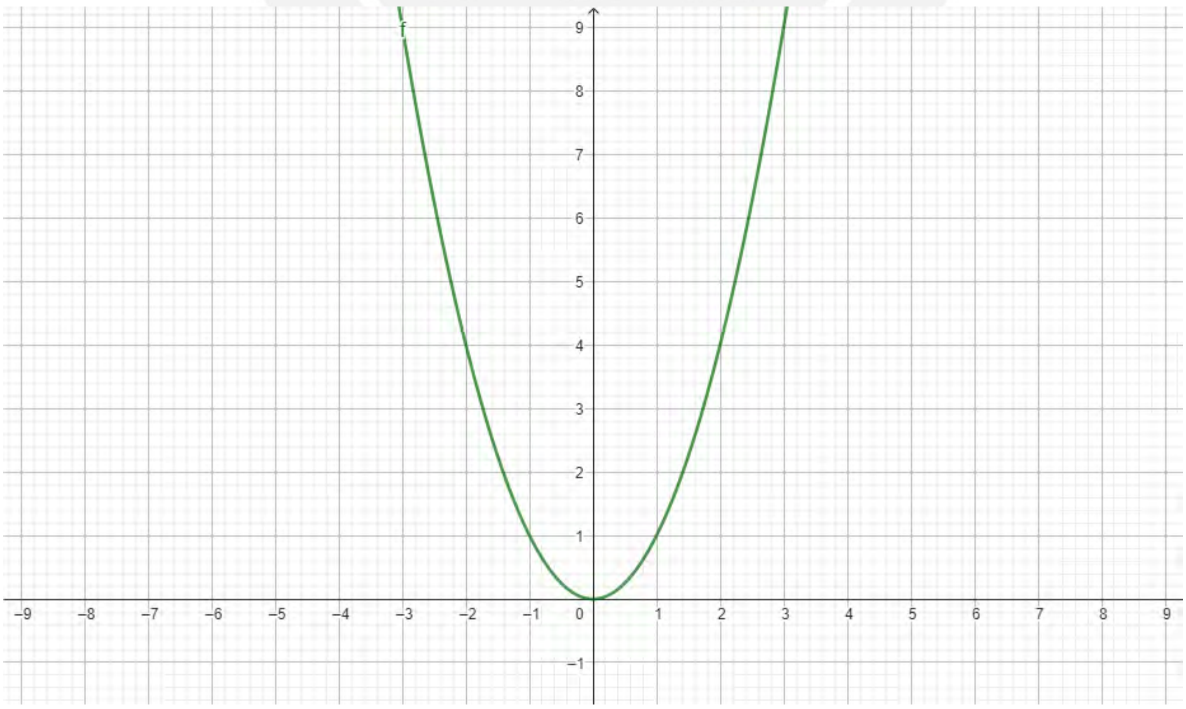
b) $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



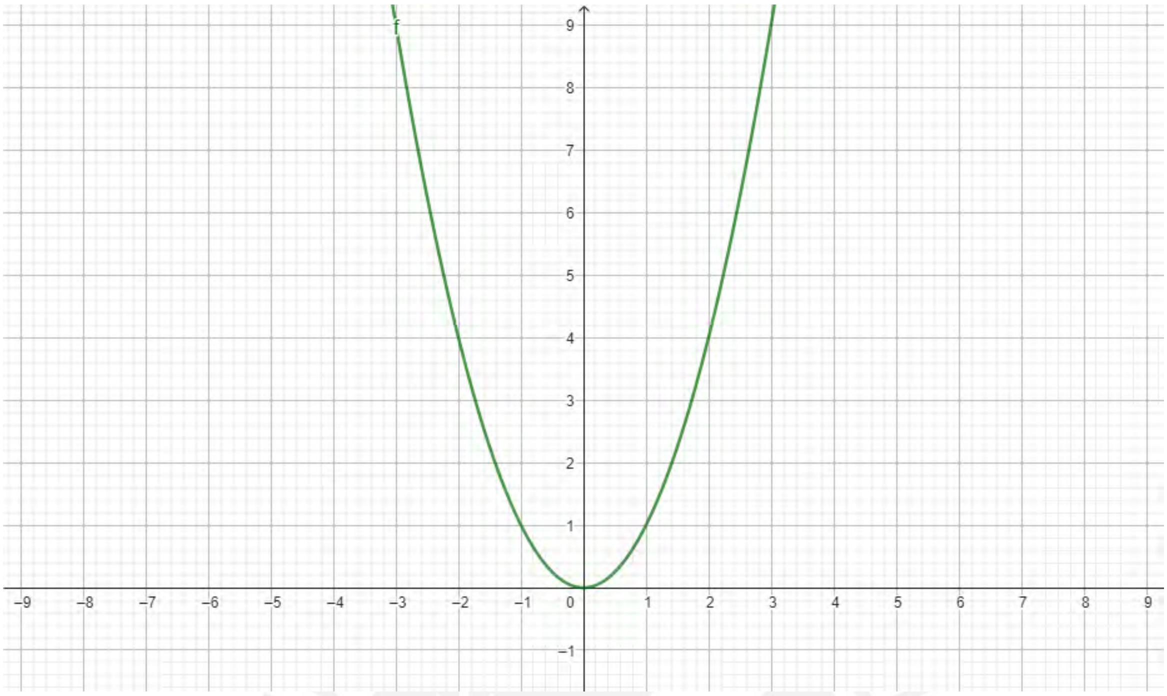
c) $x^2 = 4$



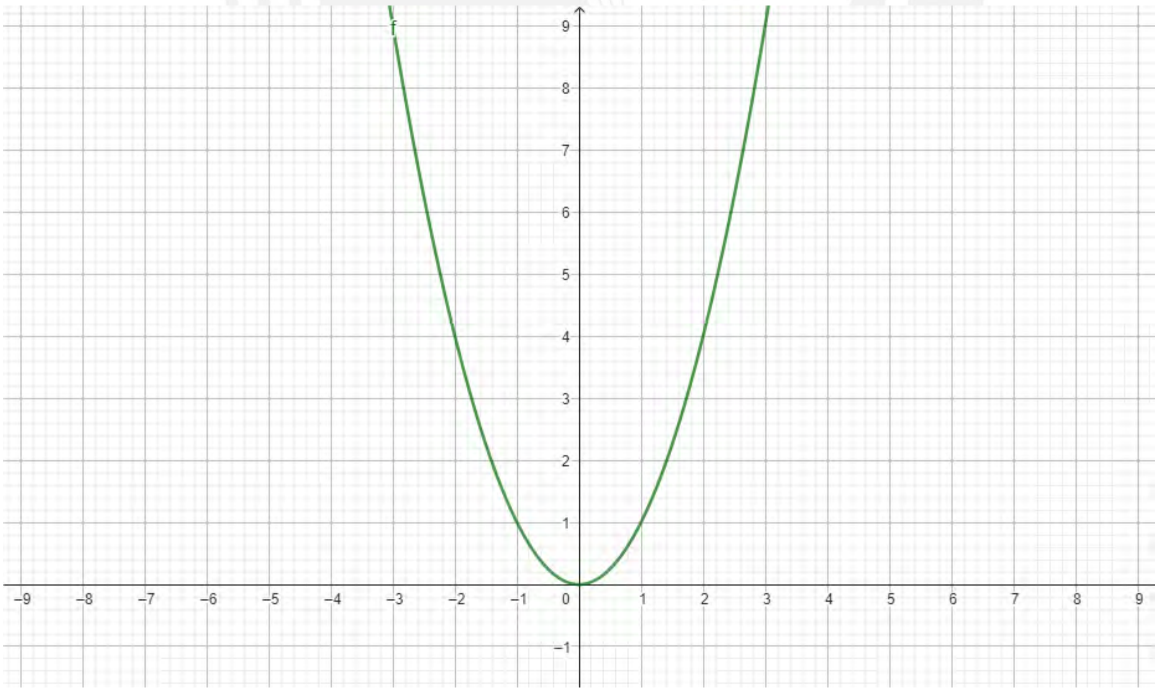
d) $x^2 = -x - \frac{1}{4}$



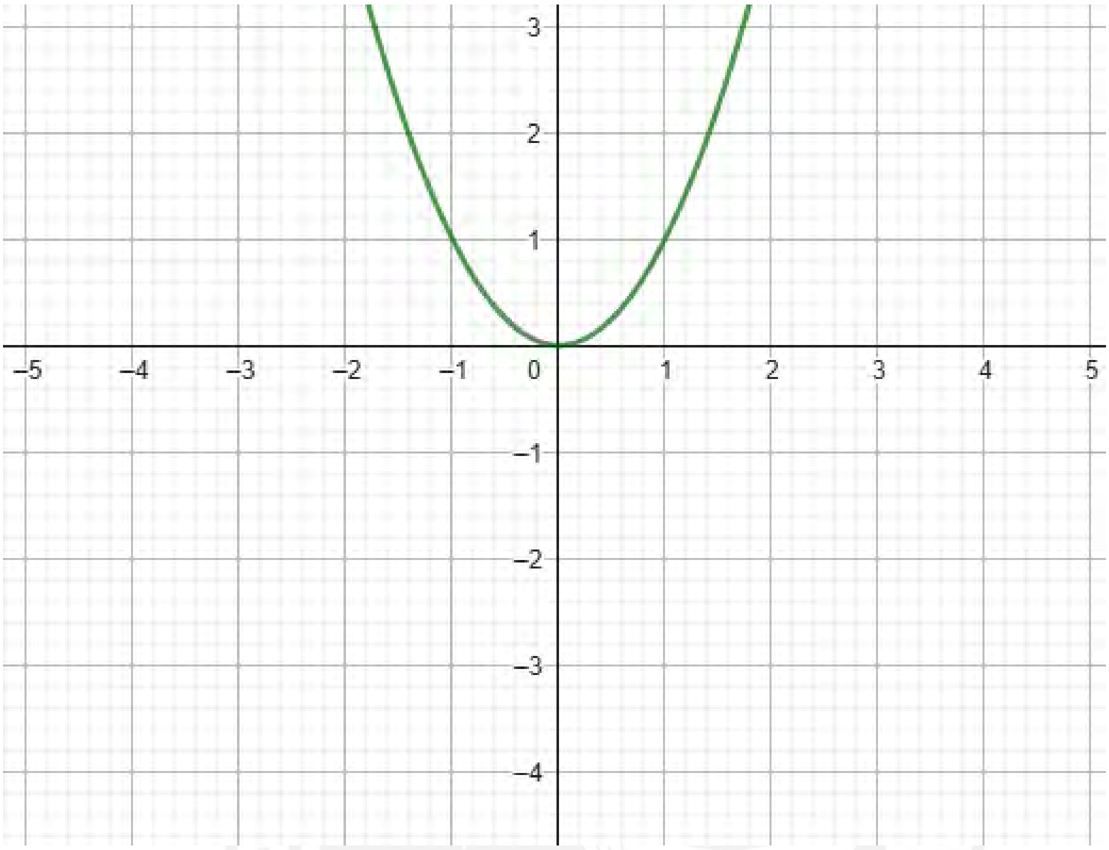
e) $x^2 = -2x - 1$


f
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

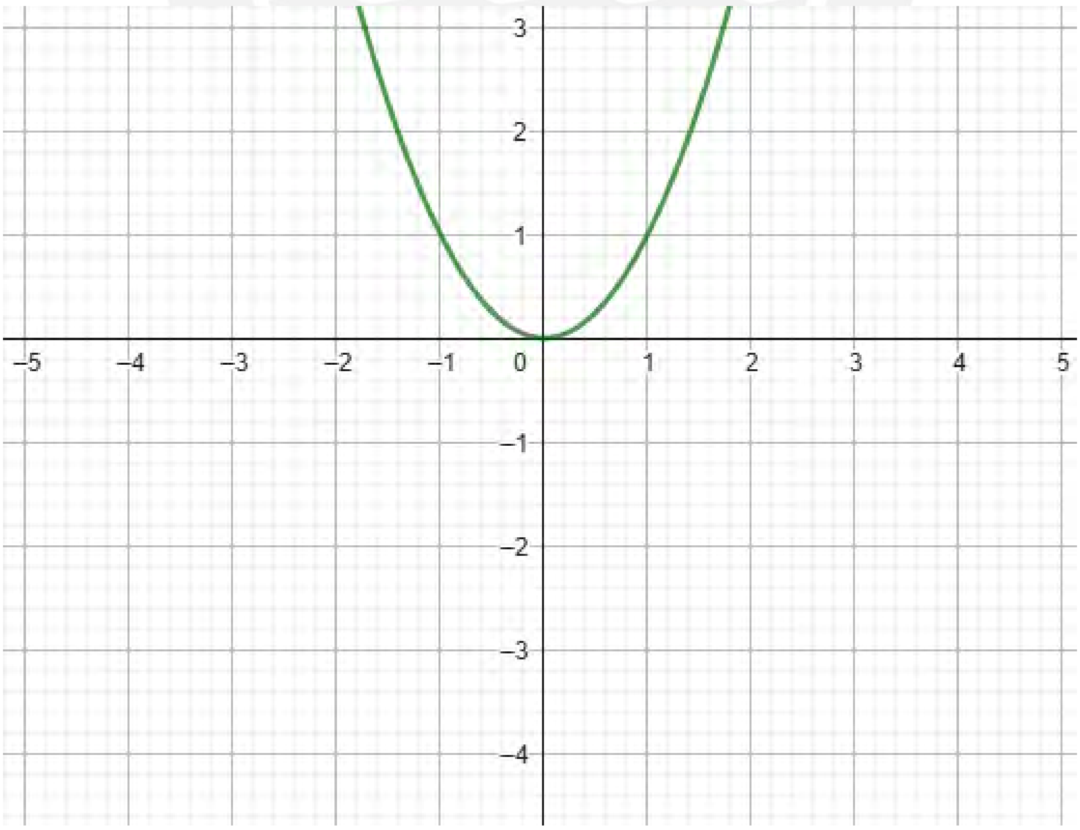
f) $x^2 = 0$


f
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

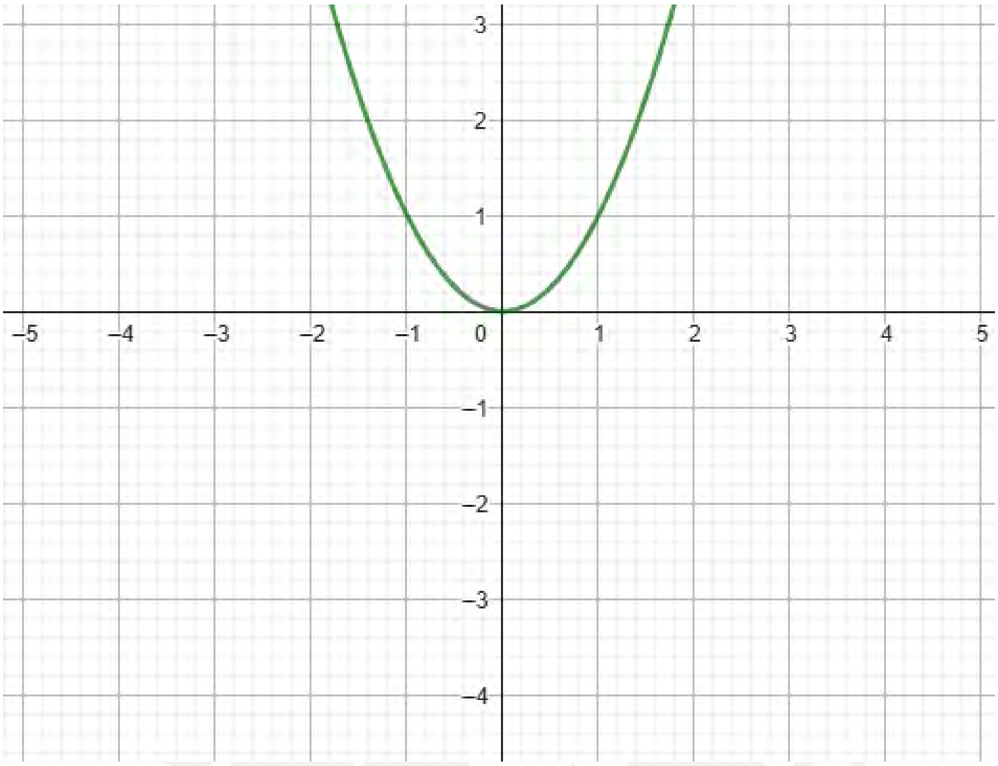
g) $x^2 = 2x - \frac{5}{3}$



h) $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$



i) $-4 = x^2$



6) De los gráficos obtenidos en la figura anterior, para cada gráfico, responde las siguientes preguntas en la tabla:

I. Determine el punto o los puntos, en caso existan, donde se intersecan la gráfica de la función cuadrática con la gráfica de la función lineal.
II. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ se encuentra por encima de la gráfica de la función lineal $f(x)$?
III. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ se encuentra por debajo de la gráfica de la función lineal $f(x)$?
IV. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$es mayor o igual que $f(x)$?
V. ¿En qué valores de "x" la gráfica de la función cuadrática $g(x)$ es menor o igual que $f(x)$?

Ecuación cuadrática	I	II	III	IV	V
a) $2x^2 + x + 5 = 6$					
b) $3x^2 - x + 5 = 7$					
c) $2x^2 - 10 = -2$					
d) $4x^2 - x + 5 = 4 - 5x$					
e) $x^2 + 5x - 2 = 3x - 3$					
f) $2x^2 - x + 3 = 3 - x$					
g) $4x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x - 1$					
h) $7x^2 - 2x + 1 = 3x^2 + x - 6$					
i) $4x^2 - 2x - 11 = 7x^2 - 2x + 1$					

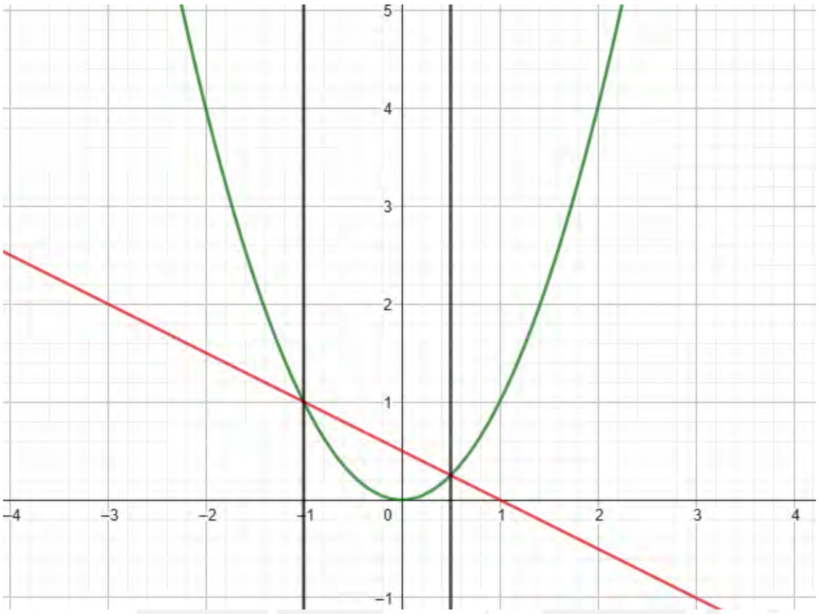
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII

7) De manera análoga a lo trabajado en la actividad 4, despeja el término "x^2" y completar el cuadro:

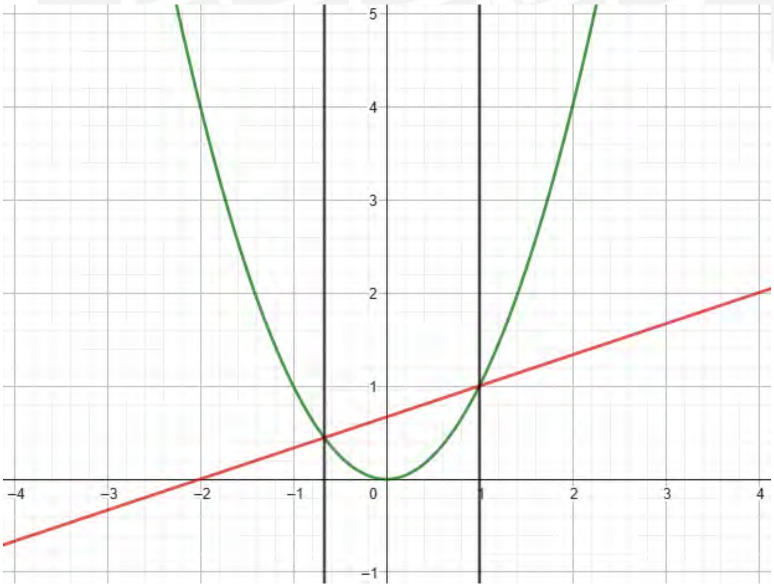
Inecuación cuadrática	Forma despejada ($x^2 \lesseqgtr mx + n$)
a) $2x^2 + x + 5 < 6$	
b) $3x^2 - x + 5 > 7$	
c) $2x^2 - 10 \leq -2$	
d) $4x^2 - x + 5 \geq 4 - 5x$	
e) $x^2 + 5x - 2 < 3x - 3$	
f) $2x^2 - x + 3 > 3 - x$	
g) $4x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 2x - 1$	
h) $7x^2 - 2x + 1 \geq 3x^2 + x - 6$	
i) $4x^2 - 2x - 11 \leq 7x^2 - 2x + 1$	

8) Con la gráfica obtenida en la actividad 5 coloree los valores de x en el eje x que cumplen la desigualdad solicitada.

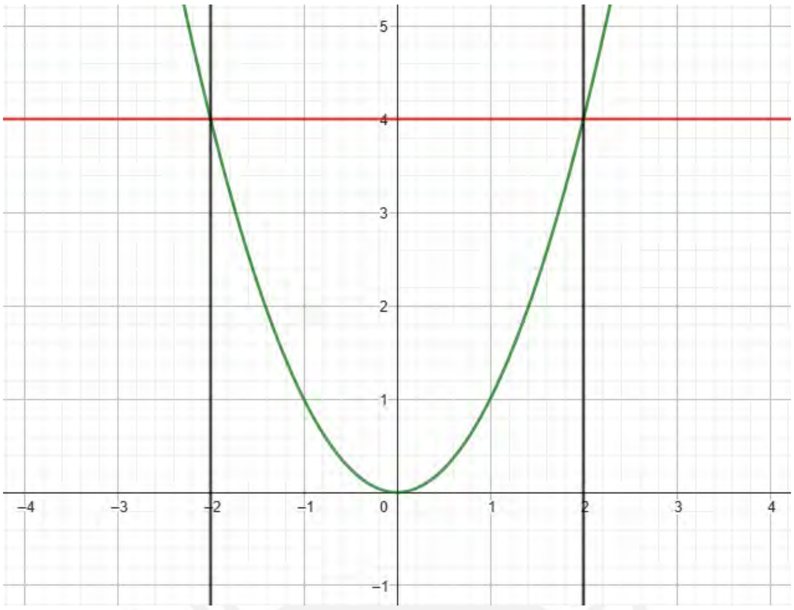
a) $x^2 < -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



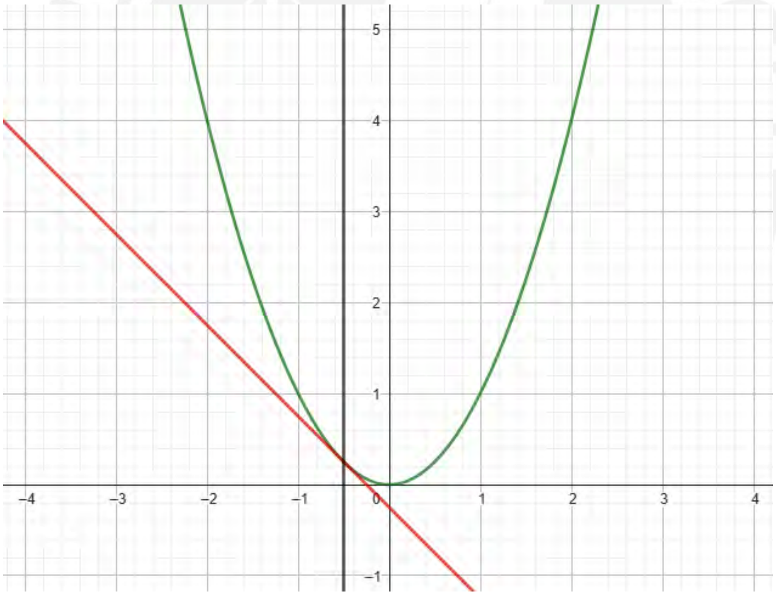
b) $x^2 > \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



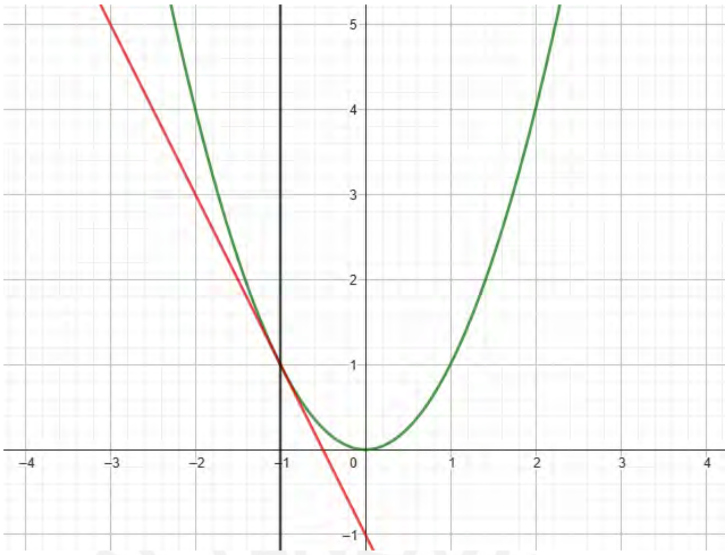
c) $x^2 \leq 4$



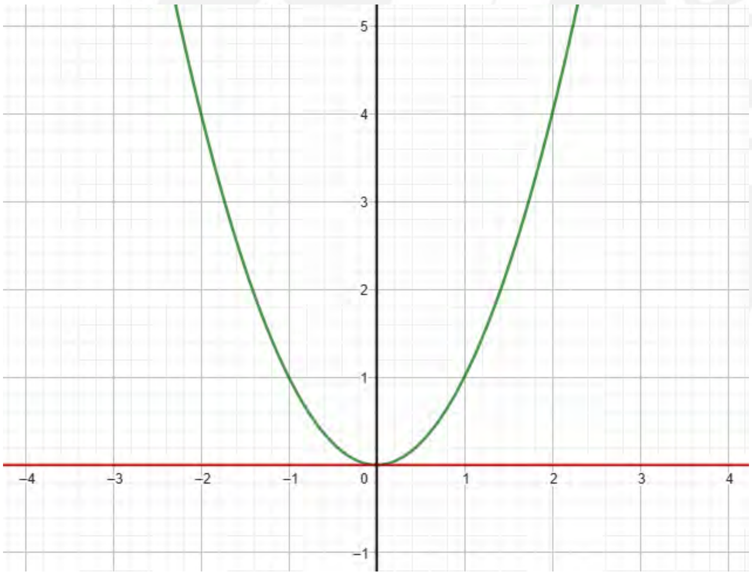
d) $x^2 \geq -x - \frac{1}{4}$



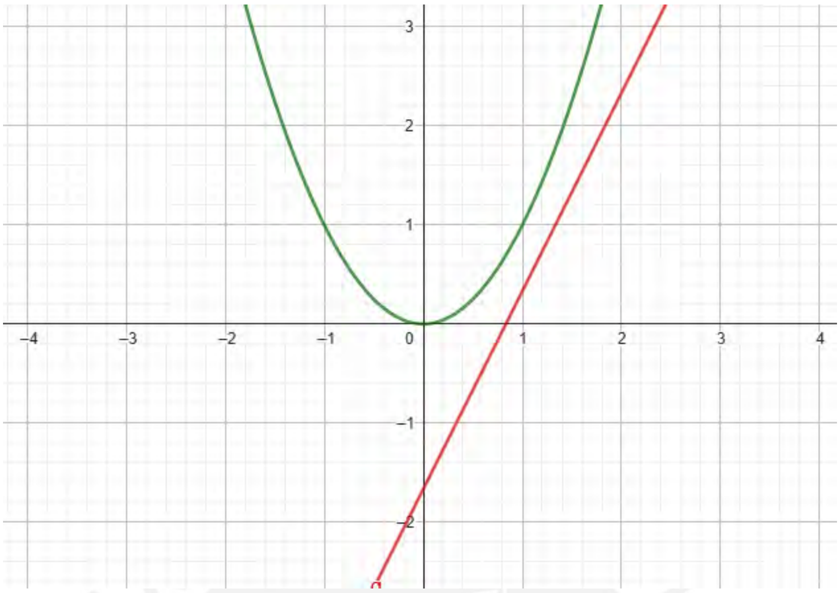
e) $x^2 < -2x - 1$



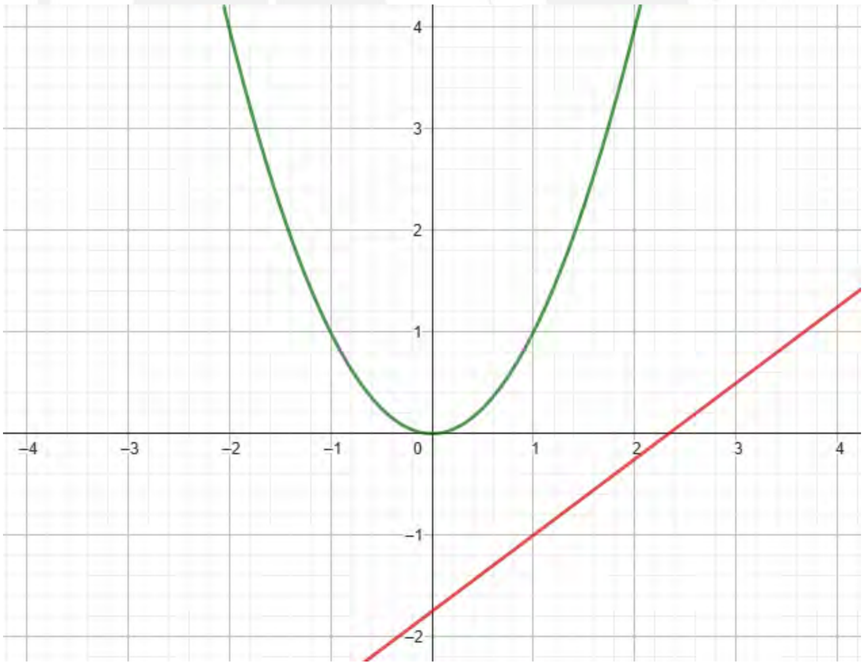
f) $x^2 > 0$



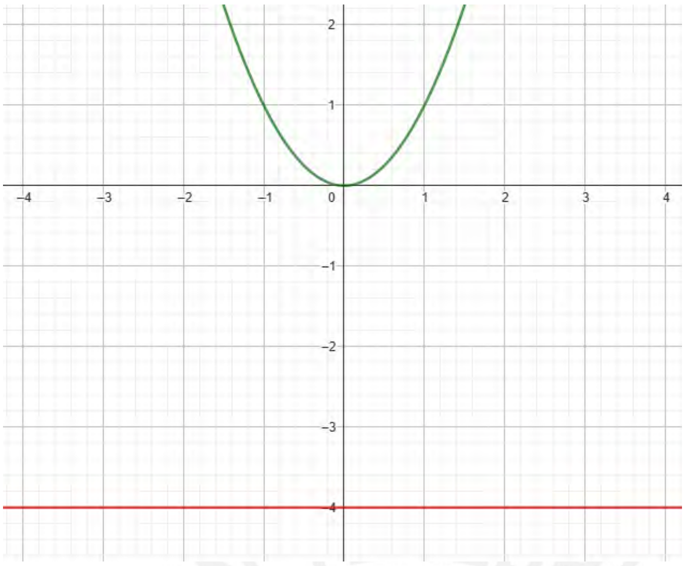
g) $x^2 \leq 2x - \frac{5}{3}$



h) $x^2 \geq \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$



i) $-4 \leq x^2$



9) En las gráficas de la actividad anterior identifique para que valores de "x" se cumplen las desiguadades solicitadas en la actividad 7 y completar la tabla.

Ecuación cuadrática	Conjunto Solución (C.S.)	Caso de la actividad 6
a) $2x^2 + x + 5 < 6$	$C.S. =$	
b) $3x^2 - x + 5 > 7$	$C.S. =$	
c) $2x^2 - 10 \leq -2$	$C.S. =$	
d) $4x^2 - x + 5 \geq 4 - 5x$	$C.S. =$	
e) $x^2 + 5x - 2 < 3x - 3$	$C.S. =$	
f) $2x^2 - x + 3 > 3 - x$	$C.S. =$	
g) $4x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 2x - 1$	$C.S. =$	
h) $7x^2 - 2x + 1 \geq 3x^2 + x - 6$	$C.S. =$	
i) $7x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 - 2x - 11$	$C.S. =$	