

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN LINEAL Y
FUNCIÓN AFÍN EN UN LIBRO DE TEXTO DE SEGUNDO
AÑO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

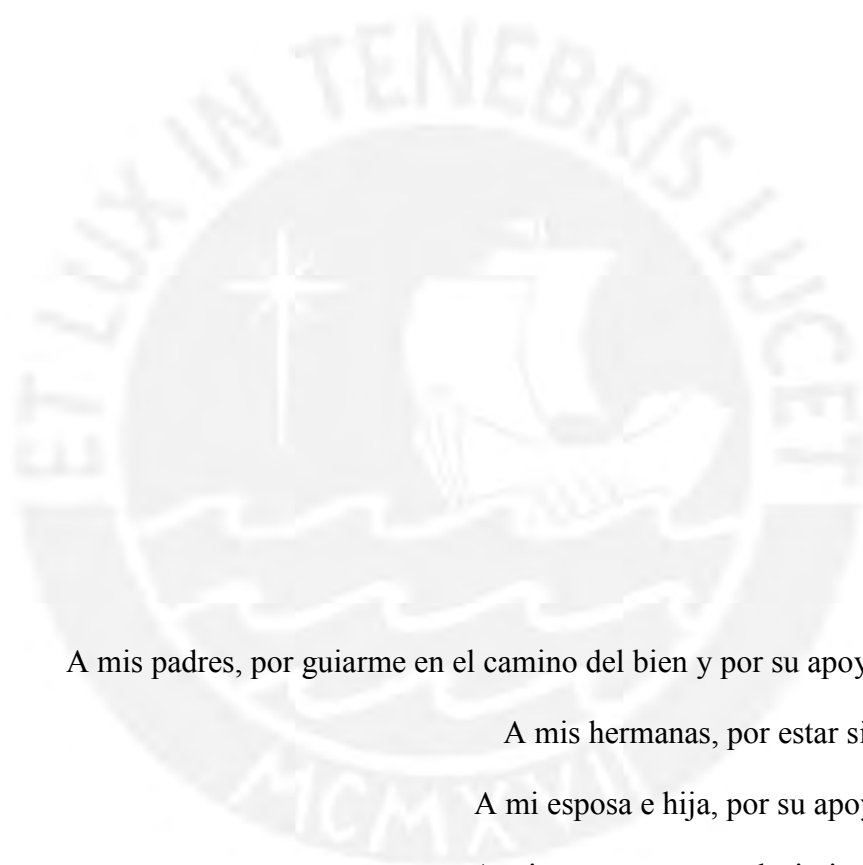
que presenta

JOSÉ MIGUEL TIBURCIO RIVAS

Dirigido por

FLOR ISABEL CARRILLO LARA

San Miguel, 2017



A mis padres, por guiarme en el camino del bien y por su apoyo incondicional.

A mis hermanas, por estar siempre conmigo.

A mi esposa e hija, por su apoyo y motivación.

A mi asesora, un agradecimiento muy especial,
por su dedicación y apoyo brindados.

A mis formadores y amigos.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo describir y analizar la organización matemática presente en un libro de texto del segundo año de educación secundaria en torno a los objetos matemáticos función lineal y función afín; dicho texto es distribuido de manera gratuita a todos los estudiantes de los colegios públicos del Perú.

Para realizar este estudio tomamos en cuenta investigaciones relacionados a los objetos matemáticos función lineal y función afín, según las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al desarrollo de problemas de dichos objetos.

Sobre la base de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard describimos la organización matemática (OM) presente en el libro de texto a analizar. Para ello, usamos los elementos que nos proporciona dicha teoría como las tareas, los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría. Además tomamos como referencia el Diseño curricular Nacional (2009) y tesis doctorales para analizar el contenido de cada uno de los problemas presentados en el libro de texto que tratan el tema de la función lineal y la función afín.

Finalmente, se presenta un análisis sobre el grado de completitud de las organizaciones matemáticas locales de nuestros objetos en estudio en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*.

Palabras Clave: Función lineal, Función afín, praxeología, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

ABSTRACT

This research aims to describe and analyze the present organization math textbook in the second year of secondary education around the mathematical objects related linear function and function; the text is distributed free of charge to all students in public schools of Peru.

To do this we consider research related to mathematical objects related linear function and function as the difficulties presented by students when faced with development problems such objects.

Based on anthropological theory of the didactic (TAD) of Chevallard describe the mathematical organization (OM) present in the textbook to analyze, for this we use the elements that gives us the theory including: the types of tasks, tasks, techniques, technologies and theory. In addition we consider the National Curriculum Design 2009 and doctoral theses to analyze the content of each of the problems presented in the text around the linear function and affine function.

Finally notes the degree of completeness for the selected text and relate these results to the difficulties presented by the students when facing the treatment of these mathematical objects.

Keywords: linear function, related function, praxeology, Anthropological Theory of Didactic.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Actividad 6. Noción de la pendiente para dos casos.....	20
Figura 2: Actividad 6. Gráfica de una recta según sus parámetros.	21
Figura 3: Actividad 4. Gráfica de una recta según su expresión algebraica.....	22
Figura 4: Actividad 3. Problema dado en lenguaje natural.	23
Figura 5: Descripción del nivel VI ciclo.	26
Figura 6: Actividades para recordar saberes previos.....	56
Figura 7: Ejercicio propuesto de introducción a la función lineal.....	58
Figura 8: Definición de función lineal.....	58
Figura 9: Ejercicio propuesto 2 - subtítulo 1.....	59
Figura 10: Ejercicio propuesto 5 - subtítulo 1.....	59
Figura 11: Gráfico sobre dominio y rango de una función.....	60
Figura 12: Solución del ejemplo 2- dominio y rango.....	60
Figura 13: Ejercicio propuesto 2 – subtítulo 2.....	61
Figura 14: Ejercicio propuesto 3 - subtítulo 3.....	61
Figura 15: Ejemplo 4 modelización.....	62
Figura 16: Ejercicio propuesto 1 - subtítulo 3.....	62
Figura 17: Ejercicio propuesto 2 - subtítulo 3.....	63
Figura 18: Ejercicio propuesto 3 - subtítulo 3.....	63
Figura 19: Ejercicio propuesto 1 - subtítulo 4.....	64
Figura 20: Ejercicio propuesto 3 - subtítulo 4.....	64
Figura 21: Ejercicio propuesto 4 - subtítulo 4.....	65
Figura 22: Ejercicio propuesto 5 - subtítulo 4.....	65
Figura 23: Ejercicio propuesto 1 - ítem para el cuaderno.....	66
Figura 24: Ejercicio propuesto 2 - ítem para el cuaderno.....	66
Figura 25: Ejercicio propuesto 3 - ítem para el cuaderno.....	66

Figura 26: Ejercicio propuesto 8 - ítem para el cuaderno.....	67
Figura 27: Ejercicio propuesto 9 - ítem para el cuaderno.....	67
Figura 28: Ejercicio propuesto - matemática en los medios.....	68
Figura 29: Ejercicio propuesto 1 - evaluación en proceso.....	69
Figura 30: Ejercicio propuesto 2 - evaluación en proceso.....	69
Figura 31: Ejercicio propuesto 1 - heteroevaluación.....	70
Figura 32: Ejercicio propuesto 2 - heteroevaluación.....	70
Figura 33: Ejercicio propuesto 5 - heteroevaluación.....	71
Figura 34: Ejercicio 3 - subtítulo 1.....	87
Figura 35: Ejemplo 1 - función lineal.....	88
Figura 36: Ejemplo 6.....	89
Figura 37: Ejercicio 7- subtítulo 3.....	90
Figura 38: Ejercicio 3 de evaluación en proceso.....	90
Figura 39: Ejercicio 6 - primer subtítulo.....	91
Figura 40: Ejercicio propuesto de introducción a la función afín.....	92
Figura 41: Definición de función afín.....	92
Figura 42: Ejercicio propuesto 1 - subtítulo 1 función afín.....	93
Figura 43: Ejercicio propuesto 4 - subtítulo 1 sobre función afín.....	93
Figura 44: Ejercicio propuesto 7 - subtítulo 1 función afín.....	93
Figura 45: Ejemplo 3 - subtítulo 1 dominio y rango de la función afín.....	94
Figura 46: Ejercicio propuesto 2 - subtítulo 2 función afín.....	95
Figura 47: Ejercicio propuesto 3 - subtítulo 2 función afín.....	95
Figura 48: Ejercicio propuesto 5 - subtítulo 2 función afín.....	95
Figura 49: Ejercicio propuesto 7 - subtítulo 2 función afín.....	96
Figura 50: Ejemplo 5 - subtítulo 3 función afín.....	96
Figura 51: Ejercicio propuesto 1 - subtítulo 3 función afín.....	97

Figura 52: Ejercicio propuesto 5 - subtítulo 3 función afín.....	97
Figura 53: Ejercicio propuesto 6 - subtítulo 3 función afín.....	98
Figura 54: Ejercicio propuesto 2 - subtítulo 4 función afín.....	98
Figura 55: Ejercicio 3 - subtítulo 4 función afín.	98
Figura 56: Ejercicio propuesto 5 - subtítulo 4 función afín.....	99
Figura 57: Ejercicio propuesto 4 - sección para el cuaderno función afín.	99
Figura 58: Ejercicio propuesto 7 - sección para el cuaderno función afín.	100
Figura 59: Ejercicio propuesto 9 - sección para el cuaderno función afín.	100
Figura 60: Ejercicio propuesto 2 - sección evaluación función afín.	101
Figura 61: Ejercicio propuesto 1 - sección evaluación función afín.	101
Figura 62: Ejercicio propuesto 4 - heteroevaluación función afín.	102
Figura 63: Ejercicio 6 - sección 2 función afín.	117
Figura 64: Ejercicio 6 - sección 5 función afín.	118
Figura 65: Ejemplo 1 función afín.....	118
Figura 66: Ejercicio 4 - sección 2 función afín.	119
Figura 67: Ejercicio 6 - sección 4 función afín.	119
Figura 68: Ejercicio 8 - sección 2 función afín.	120
Figura 69: Ejercicio 4 - sección 3 función afín.	120

INDICE DE TABLAS

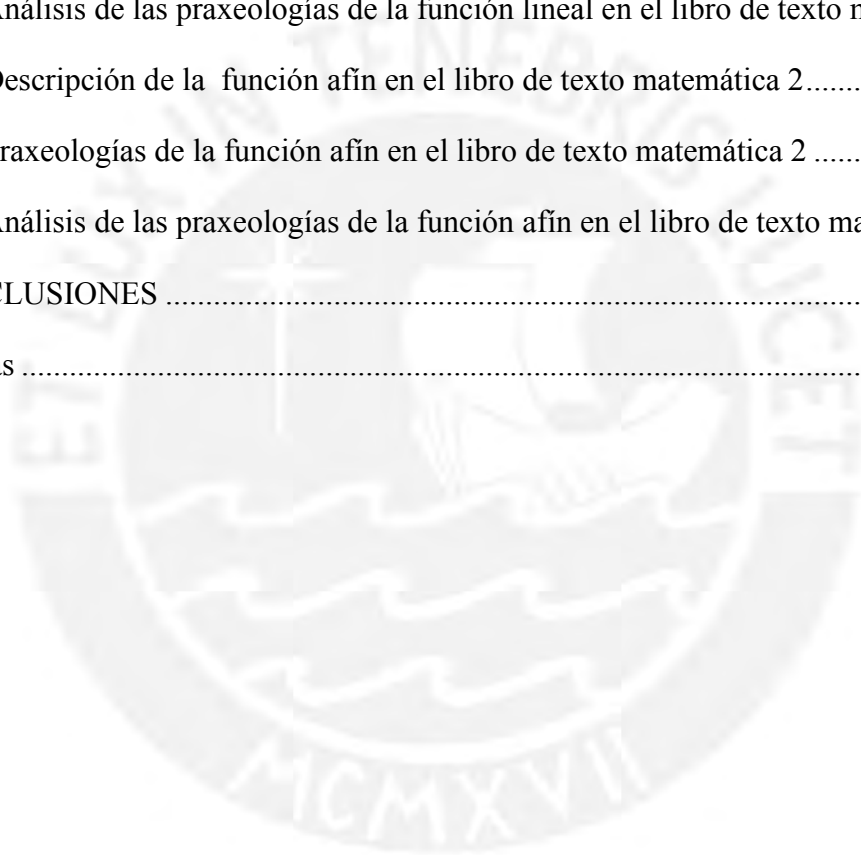
Tabla 1. Dificultades que presentan los estudiantes sobre función lineal y función afín.....	24
Tabla 2. Adaptación de los Indicadores de Fonseca para la completitud de una OM.....	51
Tabla 3. Actividades previas para el desarrollo de la unidad 2.....	56
Tabla 4. Praxeologías del libro de texto sobre función lineal.....	85
Tabla 5. Presencia de praxeologías en el libro de texto sobre función lineal.....	86
Tabla 6. Praxeologías del libro de texto sobre función afín.....	115
Tabla 7. Presencia de Praxeologías en el libro de texto sobre función afín.....	116



INDICE

INTRODUCCIÓN.....	11
CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA.....	13
1.1. Antecedentes	13
1.2. Dificultades que presentan los alumnos en tareas sobre función lineal y función afín	19
1.3. Justificación.....	24
1.4. El problema de investigación	28
1.4.1. Pregunta y objetivos de la investigación.....	28
1.5. Metodología de investigación	29
CAPITULO II: MARCO TEÓRICO.....	32
2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico	32
2.2. Praxeologías.....	33
2.3. La modelización ecuacional y funcional	36
2.4. Tipos de organizaciones praxeológicas	36
2.5. Categorías de una Organización Matemática (OM) ..;	Error! Marcador no definido.
2.6. Indicadores de las Organizaciones Matemáticas Locales (OML);	Error! Marcador no definido.
2.7. La función lineal y función afín desde la perspectiva de la TAD;	Error! Marcador no definido.
CAPÍTULO III: ESTUDIO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS;	Error! Marcador no definido.
3.1. Aspectos matemáticos.....;	Error! Marcador no definido.
3.1.1. Función lineal	43
3.1.2. Función afín.....	46
3.2. Aspectos didácticos	48
3.2.1. Aspectos didácticos del libro de texto	48
CAPÍTULO IV: CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO.....	50

4.1. Criterios para la descripción del libro de texto determinados por la TAD.....	50
4.2. Criterios para obtener el grado de completitud de una OML.....	50
CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA EN UN LIBRO DE TEXTO.....	52
5.1. Descripción del libro de texto matemática 2.....	52
5.2. Descripción de la función lineal en el libro de texto matemática 2.....	57
5.3. Praxeologías de la función lineal en el libro de texto matemática 2.....	71
5.4. Análisis de las praxeologías de la función lineal en el libro de texto matemática 2.....	85
5.5. Descripción de la función afín en el libro de texto matemática 2.....	91
5.6. Praxeologías de la función afín en el libro de texto matemática 2.....	102
5.7. Análisis de las praxeologías de la función afín en el libro de texto matemática 2.....	114
VI: CONCLUSIONES.....	121
Referencias.....	124



INTRODUCCIÓN

El presente trabajo describe y analiza la organización matemática de los objetos matemáticos función lineal y función afín en un libro de texto del nivel secundario desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La comprensión de los temas función lineal y función afín son de vital importancia para todo estudiante que se encuentre en el nivel superior educativo, por ello, en los cursos de matemática básica se desarrollan los temas mencionados. Por tal motivo, el Diseño Curricular Nacional, 2009 propone que sean enseñados a partir del segundo grado del nivel secundario y proporciona, además, los libros de textos tanto para el docente como para cada estudiante de colegios públicos a nivel nacional. Aun así, puede detectarse que los estudiantes de nivel secundario muestran diversas dificultades al resolver problemas sobre función lineal y/o función afín.

En la presente investigación, presentamos un estudio que muestra cómo aparecen los objetos función lineal y función afín en un libro de texto del segundo año de educación secundaria. Para ello, inicialmente, damos a conocer algunas dificultades particulares que presentan los alumnos cuando se enfrentan a problemas con respecto a nuestros objetos matemáticos en estudio.

En el primer capítulo, mostramos investigaciones referentes a las dificultades presentes en los estudiantes respecto del tema propuesto y las consideramos como antecedentes de nuestra investigación; también presentamos la justificación de nuestro trabajo así como la pregunta de investigación y los objetivos a alcanzar: el general y los específicos.

En el segundo capítulo, presentamos algunos aspectos de nuestro marco teórico, el cual se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual nos brinda los elementos necesarios para poder realizar tanto la descripción como el análisis de la organización matemática de nuestros objetos en estudio en el libro de texto Matemática 2 de educación secundaria.

En el tercer capítulo, presentamos el estudio de nuestros objetos matemáticos desde un punto de vista más riguroso, lo que comúnmente llama Chevallard el saber sabio. En esta sección, también damos a conocer las definiciones que se presentan en el libro de texto seleccionado.

En los capítulos cuarto y quinto, presentamos tanto los criterios brindados por la TAD así como la descripción y análisis del texto seleccionado. En dicho análisis, usamos los

indicadores de Fonseca para verificar la completitud de la organización matemática local presente en el libro seleccionado con respecto a nuestros objetos de estudio.

Finalmente, en el sexto y último capítulo, se mencionan algunas conclusiones, así como recomendaciones para futuros trabajos de investigación.



CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo, exponemos los antecedentes relacionados con las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los objetos en estudio, la función lineal y la función afín. También presentamos investigaciones relacionadas con el marco teórico que empleamos en nuestro trabajo, seguido de la justificación y problema de investigación. Además, en esta última sección se presentan la pregunta de la investigación y los objetivos de la misma.

1.1. Antecedentes

Para el desarrollo de nuestra investigación, que consiste en el análisis de un libro de texto, presentamos nuestros antecedentes basados en los siguientes criterios: i) dificultades en el aprendizaje que presentan los estudiantes cuando trabajan los objetos matemáticos “función lineal y función afín”, e ii) investigaciones relacionadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En investigaciones de educación matemática concernientes a los objetos matemáticos, función lineal y función afín, señalamos las investigaciones de Gonzales y Martin (2006), Guzmán (2006), Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zon, N., y Flores, P., (2009), Vanegas y Escalona (2013), y Martínez y Sánchez (2011); quienes identifican las dificultades que presentan los estudiantes del nivel secundario para el aprendizaje de la función lineal y función afín. Además, respecto a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, consideramos la investigación de Rey, G., Boubée, C., Sastre, P. y Cañibano, A. (2009), Carrillo, F. (2013) y Gonzales, C. (2014).

A continuación, detallamos las investigaciones que hemos citado.

i) Investigaciones relacionadas a las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes según los objetos matemáticos función lineal y función afín.

La investigación de Gonzales y Martin (2006) presenta la problemática acerca de cómo los estudiantes relacionan los coeficientes de las expresiones funcionales con las características geométricas de sus respectivas gráficas en el plano cartesiano. Se tiene como objetivo descubrir las concepciones de los alumnos en relación con la conversión de la representación algebraica de una función lineal a su representación gráfica, así como también analizar los errores de los estudiantes cuando trabajan con dichas transformaciones. Esta investigación fue desarrollada con estudiantes de 4to grado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), de 15 y 16 años de edad, de un colegio público en la ciudad de Salamanca y se utilizó como

herramienta teórica la Teoría de Registros de Representación. Dicha investigación se basó en la coordinación de registros gráfico y simbólico; los aspectos metodológicos se llevaron a cabo en dos fases en las cuales se aplicó un cuestionario a los alumnos para luego analizar los resultados. Estos últimos permitieron conocer las concepciones de los estudiantes sobre las expresiones algebraicas de las funciones y su representación gráfica, así como los errores que cometían al trabajar con ellas. Esta investigación es relevante, ya que presenta información sobre cómo el alumno distinguía entre pendiente y ordenada en el origen. Asimismo, se pudo conocer la manera cómo el estudiante analizaba la expresión algebraica de una función lineal al ejercer sobre ella una traslación horizontal. En las conclusiones, los autores afirmaron que los alumnos deberían tener una idea más completa de lo que es una función, ya que el desconocimiento los lleva a cometer numerosos errores al asociar la representación algebraica de una función con su gráfica. Determinaron, además, que los estudiantes manejan el concepto de función de forma operacional (como un proceso) y no de forma estructural (como un objeto). Esto último es fundamental tomando en cuenta el análisis histórico-epistemológico realizado por Sfard (1991, citado por Gonzales y Martin 2006), el cual menciona que la noción de función se concibe de esas dos formas:

“Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirnos a ella como si fuera un objeto real, una estructura estática, con existencia en alguna parte del espacio y del tiempo... por el contrario, interpretar una noción como un proceso implica manejarlo de una manera potencial más que como una entidad real, que adquiere existencia como elemento de una sucesión de acciones.” (p. 34)

De la misma manera, Guzmán (2006), quien llama indistintamente función lineal o modelo lineal a ambas funciones (función lineal y función afín), afirma que “las funciones reales de variable real, que tienen la forma $f(x) = mx + b$, son uno de los modelos lineales más simples y representan para estudiantes de tercer grado de educación secundaria el primer contacto formal con el concepto de función” (p.8). En su investigación, busca determinar la problemática de conocer cuáles son las dificultades que presentan los alumnos de secundaria al trabajar con las diferentes formas de representación de la función lineal. Su objetivo es identificar dichas dificultades. Esta investigación fue desarrollada con estudiantes de tercer grado de educación secundaria, de entre 13 y 15 años de edad, de un colegio nacional en la ciudad de Acapulco. En este trabajo, se empleó la Teoría de Registros de Representación. Para su efecto se aplicó un cuestionario con seis actividades para los estudiantes solicitándoles, además, que presenten una explicación de sus respectivas respuestas para, así,

poder detectar algunas dificultades en la transformación de una representación a otra. Este estudio es importante para nuestro trabajo debido a que en los resultados se detectó, entre otras dificultades, que los estudiantes querían ubicar los valores de m y b directamente en el plano cartesiano, dada la expresión lineal: $y = mx + b$ donde x es la variable y “ m ”, “ b ” son números reales.

Esto muestra el notorio descuido de las actividades de transformación en el proceso de la enseñanza. Esta dificultad de convertir una representación en otra puede interpretarse como resultado de una conceptualización pobre del objeto matemático dada por el docente o por el texto escolar utilizado, mecanizando a los estudiantes en un mismo tipo de tarea. Finalmente, el autor concluye que los estudiantes muestran deficiencias conceptuales, de interpretación y de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y tabular; y que la interacción con estas representaciones y la exitosa traducción entre ellas permite al estudiante explorar y aproximarse a la noción del concepto de función, por lo que resulta de gran interés prestar atención a las operaciones que el alumno realiza al ir de una forma de representación a otra.

En el mismo aspecto, y también para el nivel secundario, Agnelli, et al. (2009) mencionan que una incompleta e insuficiente enseñanza del objeto función lineal y función afín podría generar dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de otros temas en grados superiores al generar confusión cuando el estudiante afirma, por ejemplo, que regresión lineal es lo mismo que función lineal. Esto sucede porque, cuando se trabaja con función lineal, la metodología didáctica es mayormente operativa o determinística; sin embargo en la regresión lineal la metodología y los problemas son de carácter probabilístico o aleatorio, ya que son situaciones de carácter estadístico. Esta dificultad surge de las “formas o medios de enseñanza” para provocar algún aprendizaje de otros temas en los estudiantes; así se evidencia cuando analizan una tarea sobre regresión lineal, extraída de un libro de texto (Agnelli et al. (2009)):

“Dibujar la nube de puntos, para lo cual se provee una tabla de “tipo” de las que se presentan para graficar una función. Esta situación puede favorecer el obstáculo didáctico señalado, al relacionar de manera abusiva la regresión y el estudio de funciones.” (p.58)

Esta investigación tuvo como objetivo mostrar que las inadecuadas actividades diseñadas para los estudiantes sobre regresión lineal pueden llevar a la errada concepción de la misma, y generan confusiones con el concepto de función lineal. Para arribar a esta conclusión, los autores analizaron algunas tareas propuestas en un libro de texto de circulación nacional de

matemática para alumnos de primer año polimodal, de 14 y 15 años, de un colegio público argentino.

De la misma manera, pero sobre una muestra de estudiantes del primer ciclo del nivel superior, Vanegas y Escalona (2013) exponen su preocupación por el poco dominio en el manejo del concepto de función y en el trazado de gráficas por parte de los estudiantes de dicho nivel de estudio. Dado que los alumnos ya tienen conocimiento del tema desde la educación secundaria, los autores centraron su trabajo en obtener información sobre cuáles son las concepciones o representaciones mentales que poseen los estudiantes acerca del objeto función lineal y función afín. Su investigación tuvo por objetivo mostrar los resultados sobre concepciones respecto al concepto de función matemática de una variable. En esta investigación, se trabajó con alumnos de 17 y 18 años de edad, del primer ciclo de la facultad de ingeniería de la Universidad del Zulia en Maracaibo. La base teórica de la investigación fue la Teoría Cognitiva y especialmente se enfocó en el constructivismo y el aprendizaje significativo. La parte metodológica se realizó en dos fases: una prueba diagnóstica que fue aplicada al inicio del ciclo y la misma prueba al finalizar el curso. Las preguntas solicitaban que expresaran, con palabras o a través de sus ideas acerca de lo que es la función, la función lineal y la función afín, y su respectiva representación gráfica. Luego de comparar ambas pruebas se obtuvo que solo uno de cada diez estudiantes lograron mejorar sus concepciones; el resto de estudiantes mantuvo sus concepciones erradas (que posiblemente arrastran de la educación secundaria); finalmente, los autores concluyeron en que los estudiantes pueden tener un aprendizaje mecánico sin interiorizar significativamente el concepto de función. Al respecto, Vanegas y Escalona (2013) expresan:

“...no se puede seguir haciendo diseños instruccionales o enseñar contenidos vacíos sin conocer cuáles son las concepciones y representaciones mentales en nuestros alumnos. Por el contrario éstas deben ser el punto de partida si se quiere que el alumno logre establecer relación entre el objeto de estudio y sus propias concepciones.” (p.112)

Finalmente, sobre el objeto función lineal y función afín presente en los textos, Martínez y Sánchez (2011) concluyen que se debe tener cuidado con las concepciones de ambos objetos:

“Las diferentes concepciones que se tiene en algunos libros de texto matemáticos y escolares sobre el concepto de función lineal, es que en gran parte no corresponden a la definición contemplada desde las transformaciones lineales, que son los criterios para definir la linealidad de la función lineal, como característica fundamental y que por tanto difiere de la función afín.” (p. 1)

Además, refuerzan la idea de que los libros de texto son una herramienta de apoyo del saber, ya que contienen las transformaciones didácticas primordiales que se hacen al objeto matemático, las cuales provienen del saber sabio, hasta transformarlo en un saber enseñado. Indican que, en los textos, se pueden encontrar conceptos erróneos, obstáculos didácticos y diferentes limitaciones que influyen directamente en las prácticas de la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos tratados.

Martínez y Sánchez (2011) examinan estas dificultades en un trabajo de investigación realizado en Colombia titulado: “Tratamiento didáctico de la función lineal en libros de texto de matemática para la educación básica secundaria” tomando como referencia los ocho libros de texto más usados en dicho país durante el periodo del 2000 al 2005. Los autores concluyen en que los libros de texto definen la función lineal partiendo de la expresión $f(x) = y = mx + b$, con “m” y “b” números reales, además afirman que la función lineal se llama así, porque su gráfica respectiva es una línea recta. Todo ello, según los autores, es erróneo, pues se olvida “que los verdaderos principios matemáticos de donde emerge el concepto de función lineal se encuentra en los fundamentos del álgebra lineal” (p. 5).

Todas las investigaciones examinadas resultan pertinentes para nuestro trabajo, porque nos brindan algunos aspectos sobre las dificultades más recurrentes que presentan los estudiantes en su aprendizaje de los objetos función lineal y función afín, al presentar, por un lado, problemas para interpretar la pendiente “m” y ordenada en el origen “b”, dado: $f(x) = y = mx + b$; y, como consecuencia de ello, también tienen dificultades para representar gráficamente dichos objetos matemáticos en el plano cartesiano, así como también para modelar un problema contextualizado.

ii) Investigaciones relacionadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Rey et al. (2009) consideran que las limitaciones que presentan los estudiantes sobre el tema de función y, en particular, el de función lineal, se deben a que “aprendieron” el tema mediante un excesivo uso de representaciones algebraicas; además, es necesario resaltar que no logran articular representaciones, no dominan la idea de variabilidad y dependencia, y trabajan de forma descontextualizada. Ahora bien, si a ello se agrega el análisis de diferentes textos, en muchos casos, se concluye que “primero se formaliza el conocimiento a enseñar y

luego se lo aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están contruidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación” (p. 154). Esta investigación se basa en aportes didácticos para abordar el concepto de función con alumnos ingresantes a la universidad. Se desarrolló caracterizando brevemente a la actividad matemática y al proceso de estudio de la matemática siguiendo la teoría de Chevallard. Los investigadores proponen que un contenido matemático - ecuación de la recta que pasa por dos puntos, por ejemplo- sea desarrollado con actividades contextualizadas, las actividades descontextualizadas solo deben usarse si se tiene la seguridad de que el estudiante ya se apropió del concepto. Otro ejemplo, es trabajar la ecuación de la recta dados un punto y la pendiente con fórmulas y sin fórmulas.

Además Ruiz Higuera (1998), (citado en Rey et al. 2009) afirma que:

“Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo... Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él.

Tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza que el alumno no logra unificarlos dándoles una significación global. El alumno ha visto muchos objetos allí donde sólo debía existir uno.” (p. 154)

Ante ello, afirman que las dificultades que presentan los estudiantes se deben a las rutinas y procesos algorítmicos como la elaboración de tablas, el cálculo de dominios, la representación de funciones, etc. En general, se utilizan fórmulas como “recetas” sin aprovechar su gran poder para modelizar; de esta manera, dichas fórmulas algebraicas son usadas para encontrar el valor de la incógnita y este procedimiento o concepción elimina el sentido de variabilidad, al movilizar incógnitas en lugar de variables. Ante ello concluyen que:

“En algún momento del aprendizaje del concepto de función, el alumno debería poder distinguir la función de sus representaciones. Las actividades de articulación entre registros podrían favorecer dicha diferenciación.

En la mayoría de los libros de texto referidos a función lineal, el alumno encuentra fórmulas para hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto, conocida la pendiente, o que pasa por dos puntos, y sus respectivas deducciones.

Esas fórmulas son válidas, pero si el alumno no alcanza a apropiarse de su verdadero significado, pasan a ser simples fórmulas memorizadas, y si falla la memoria, la fórmula carecerá de utilidad.” (p. 159)

Finalmente, Carrillo (2013) y Gonzales (2014) nos presentan una organización matemática de libros de texto en la que describen y analizan las praxeologías en textos seleccionados.

Carrillo (2013), al describir y analizar la Organización Matemática OM de función cuadrática en un libro de texto de economía en el nivel superior, concluye que dicho texto presentaba pocas tareas resueltas como para que el estudiante pueda, por sí mismo, superar sus dificultades para resolver problemas sobre dicho tema; tampoco presentaba suficientes conceptos para la comprensión del objeto; y, finalmente, carecía de tareas que involucraran el aprendizaje de propiedades importantes para la función cuadrática. De manera similar, Gonzales (2014) trabajó con la descripción y análisis de los objetos escala y proporción en un libro de texto para estudiantes de arquitectura y concluyó que dicho texto no relaciona la teoría de proporcionalidad con la teoría de funciones ni con la teoría de ecuaciones. Además, cabe añadir que solo predomina un tipo de tarea: no hay mucha diversidad de estas.

De estas investigaciones, se puede inferir que la TAD es una poderosa herramienta para describir y analizar un libro de texto.

1.2 Dificultades que presentan los alumnos en tareas sobre función lineal y función afín

En esta sección, vamos a detallar, según los antecedentes vistos anteriormente, cada una de las dificultades que presentaron los alumnos al resolver las tareas propuestas en algunas de las investigaciones citadas. Vamos a agruparlas de la siguiente manera: i) Dificultades de los estudiantes en comprender la definición de pendiente como también la de ordenada al origen dada la forma algebraica de una función lineal y/o afín, ii) Dificultades de los estudiantes para relacionar la forma algebraica de una función lineal y/o afín con su forma gráfica en el plano cartesiano y iii) Dificultades de los estudiantes para transformar en lenguaje algebraico un problema dado en lenguaje natural (proceso conocido también como modelización). Pasamos a detallar a continuación.

i) Dificultades de los estudiantes en comprender la definición de pendiente como también la de ordenada al origen dada la forma algebraica de una función lineal y/o afín:

Según el estudio de Gonzales y Martín (2006), los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

1. Los estudiantes realmente no distinguen entre pendiente y ordenada en el origen, y se presentan diferentes situaciones: pendiente positiva/negativa, ordenada en el origen positiva/negativa/nula.
2. Al graficar una función lineal, los estudiantes suelen hacerlo solamente usando una tabla de valores y no usando la definición de cada uno de sus parámetros; por ello, tienden a equivocarse más por el hecho de realizar operaciones para completar una tabla.
3. Los estudiantes no saben responder una situación en la que se les pide que analicen qué variable varía y qué variable no varía en la expresión algebraica de una función lineal al ejercer sobre ella una traslación horizontal.

Según el estudio de Guzmán (2006), los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

1. Los estudiantes no manejan la noción de pendiente; como ejemplo se muestra una actividad en la que, al solicitarles que bosquejen la gráfica de la forma: $y = mx$, según los casos dados por el parámetro “ m ”, caso I: $m > 0$ y caso II: $m < 0$, se obtuvieron algunos resultados como el que sigue:

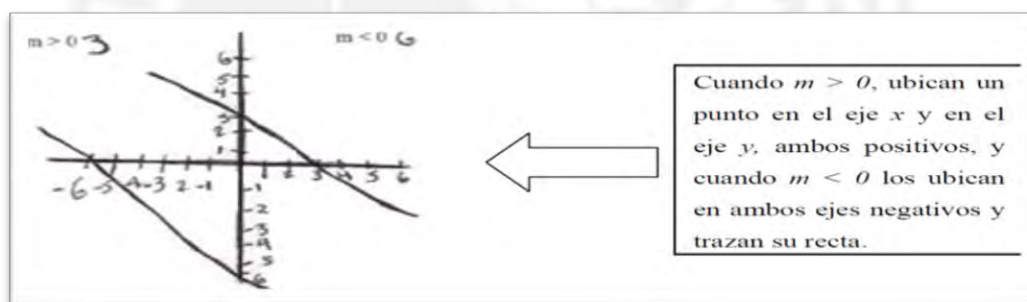


Figura 1: Actividad 6. Noción de la pendiente para dos casos.

Fuente: Guzmán (2006, p. 54)

2. Los estudiantes no dominan la noción conjunta de pendiente y ordenada al origen. Como ejemplo se muestra una actividad en la que, al solicitarles que bosquejen la gráfica de la forma: $y = mx + b$, según los casos dados por los parámetros “ m ” y “ b ”, caso I: $m > 0$, $b < 0$; caso II: $m > 0$, $b > 0$; caso III: $m < 0$, $b > 0$ y caso IV: $m < 0$, $b < 0$, se obtuvieron algunos resultados como el que sigue:

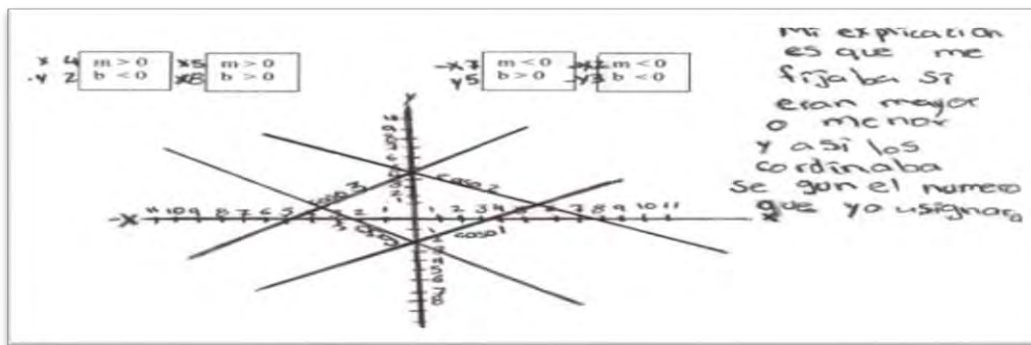


Figura 2: Actividad 6. Gráfica de una recta según sus parámetros.

Fuente: Guzmán (2006, p. 55)

ii) Dificultades de los estudiantes para relacionar la forma algebraica de una función lineal y/o afín con su forma gráfica en el plano cartesiano:

Según el estudio de Gonzales y Martin (2006), los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

1. Los estudiantes realizan una mala transformación de la representación gráfica de una función lineal y función afín en el plano cartesiano a su expresión algebraica o simbólica, y al hacer la transformación confunden el tipo de función.
2. Los estudiantes no identifican la expresión algebraica correcta de una función afín paralela al eje de abscisas.

Según el estudio de Guzmán (2006), los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

3. Al solicitarles que grafiquen algunas funciones lineales, se observó que algunos estudiantes ubican directamente los valores de “ m ” y “ b ” en los ejes cartesianos, como se ve a continuación:

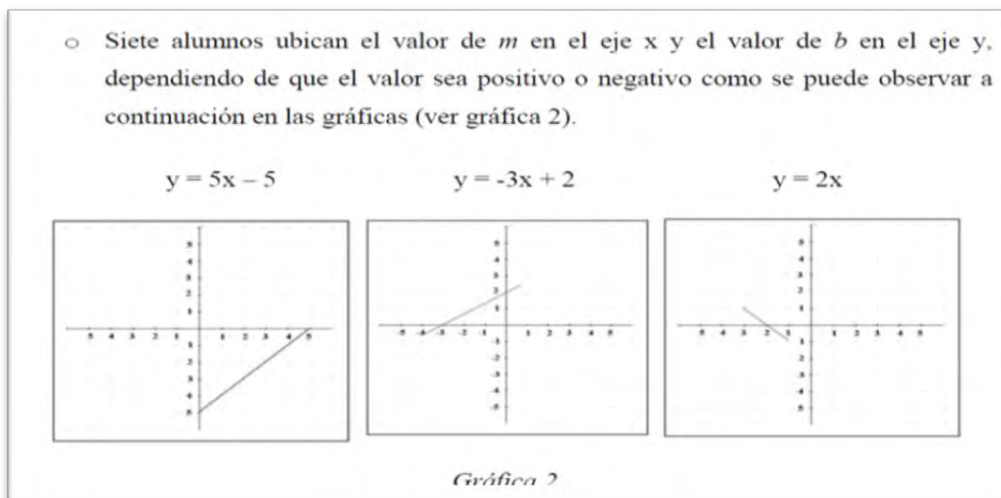


Figura 3: Actividad 4. Gráfica de una recta según su expresión algebraica.
Fuente: Guzmán (2006, p. 45)

Como podemos notar estas dos dificultades están relacionadas entre sí, ya que el estudiante al no superar la primera dificultad, no podría superar la segunda como una manera alternativa para graficar una función lineal o afin dada en su forma algebraica.

iii) Dificultades de los estudiantes para transformar en lenguaje algebraico un problema dado en lenguaje natural o modelización:

Según el estudio de Guzmán (2006), los estudiantes muestran las siguientes dificultades:

4. Al solicitarles que representen de forma algebraica un problema dado en lenguaje natural, muchos de los estudiantes no lo hacen o solo mencionan que se usa la multiplicación, pero tienen dificultad al momento de expresar de forma escrita su respuesta. A continuación, presentamos la actividad propuesta:

Análisis de la secuencia 3.

Esta actividad se presentó con el objetivo de ver si los estudiantes tienen alguna noción de función y cuáles son las argumentaciones que dan, además conocer que otro tipo de representación conocen, se esperaba que generalizaran sus respuestas dando a conocer la expresión algebraica y que además lo representaran por medio de una gráfica.

Actividad No. 3. Un automóvil recorre 9 km. por cada litro de gasolina.

¿Ésta relación es una función?

Si es así, explica porqué y represéntala.

Figura 4: Actividad 3. Problema dado en lenguaje natural.

Fuente: Guzmán (2006, p. 42)

Como se puede observar, esta dificultad se refiere a que el estudiante no logra realizar la transformación de un problema dado en lenguaje natural a su forma algebraica. Superar este problema es fundamental, ya que, según la TAD, las elaboraciones matemáticas son actividades naturales de todo ser humano en la medida en que nos permite resolver problemas cotidianos.

A continuación, resumimos en un cuadro estas dificultades que presentan los estudiantes al resolver diferentes tareas sobre función lineal y función afín.

Tabla 1. Dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a función lineal y función afín.

Nº LAS DIFICULTADES ENCONTRADAS EN LOS ESTUDIANTES SON:

- 1 Desconoce la noción de pendiente y ordenada en el origen.
 - 2 No emplea los parámetros “ m ” y “ b ” para graficar la expresión $y = mx + b$.
 - 3 No interpretan la relación de los parámetros “ m ” y “ b ” con los desplazamientos de una recta en el plano cartesiano.
 - 4 No grafican correctamente una función lineal $y = mx$, tomando a “ m ” como parámetro dado $m > 0$, o $m < 0$.
 - 5 No grafican correctamente una función afín $y = mx + b$, tomando a “ m ” y “ b ” como parámetros, dados distintos casos para “ m ” y “ b ”.
 - 6 Realizan de forma equívoca la transformación de la gráfica de una función lineal en el plano cartesiano a su representación algebraica.
 - 7 No representan correctamente la gráfica de una función lineal paralela al eje X.
 - 8 No logran modelar un problema contextualizado.
-

1.3 Justificación

Diversas investigaciones se han preocupado por el insuficiente aprendizaje sobre distintos contenidos matemáticos, en especial el de función lineal y función afín, pues el aprendizaje de este concepto es importante para el nivel escolar, ya que las funciones lineales se utilizan o son empleadas para describir diversos fenómenos en los que se relacionan dos magnitudes que varían proporcionalmente; además, usamos estos conceptos para comprender otros temas como la geometría analítica, las funciones trigonométricas o para poder diferenciarlos de otros objetos matemáticos como el de función cuadrática, e, incluso, para adquirir la capacidad de modelar situaciones reales dadas en otras disciplinas como la Física, Química, etc.

En nuestra experiencia como docentes, hemos notado que la mayoría de los estudiantes del último año del nivel secundario presenta escasos conocimientos sobre función lineal y función

afín. Este problema es importante en el sentido que se trata de un tema que debería ser abordado por los estudiantes en el primer y segundo año de educación secundaria, según el Diseño Curricular Nacional (2009), documento curricular oficial que rige el sistema educativo en todo el Perú.

Es importante resaltar los cambios curriculares que se han producido últimamente y que han involucrado notoriamente a nuestro objeto de estudio. Por ejemplo, en el DCN (2005) se desarrollaba el tema de función lineal y función afín por primera vez en el VII ciclo (4to grado del nivel secundario) y no como tema central, sino, más bien, como un subtema dentro de un conglomerado de temas de mayor complejidad conceptual como función, composición, inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, inversa, valor absoluto, máximo entero, etc. también relativos a funciones. Esto implicaba dedicar menos horas de clase para el desarrollo de nuestro objeto de estudio por parte de los docentes, hecho grave, ya que se trata de un tema esencial que el estudiante debería asimilar en su totalidad. Luego, se publicó el DCN (2009), de acuerdo con el cual se elaboraron los libros de texto brindados a los estudiantes, textos que son usados en la actualidad. En este documento se observa un considerable cambio en la estructura de los temas y en particular en lo referente al de función lineal y función afín, pues aparece el componente números, relaciones y funciones. En este punto, los conocimientos a impartir son: función lineal, función lineal afín, dominio y rango de una función lineal, modelos lineales, representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales; todo ello enmarcado para el VI ciclo (2do grado del nivel secundario).

Según el DCN (2009), en la página 324, las capacidades que deben adquirir los estudiantes sobre el tema función lineal y función afín al finalizar el año académico; por tanto, tomarlo como referencia es sumamente importante. Estas capacidades son:

- Determina el dominio y rango de una función.
- Establece relaciones entre la proporcionalidad directa y la función lineal.
- Formula modelos de fenómenos del mundo real con funciones lineales.
- Representa de diversas formas la dependencia funcional entre variables: verbal, tablas, gráficos, etc.
- Representa relaciones y funciones a partir de tablas, gráficos y expresiones simbólicas.
- Resuelve problemas que involucran funciones lineales, afín lineal y segmentada, como también la relación de proporcionalidad directa.

Como hemos mencionado, esta nueva secuencia de contenidos se centra en nuestro objeto de estudio, la función lineal y la función afín, para ser desarrollados con mayor número de horas por bimestre desde el 2do año de educación secundaria. Esto representa un cambio con relación al currículo anterior. Además, el Ministerio de Educación (MINEDU) para complementar de forma práctica el trabajo en clase, a partir del año 2014 hasta la actualidad, otorga una serie de herramientas para trabajar los diferentes objetos matemáticos. Dicho documento oficial llamado “Rutas del Aprendizaje, ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes?” aborda los temas matemáticos con problemas o ejercicios contextualizados. Particularmente, nuestro objeto de estudio lo encontraremos en el fascículo 1: Número y operaciones, cambio y relaciones, VI ciclo, primer y segundo grado de educación Secundaria.

Con respecto a los Mapas de Progreso de Cambio y Relaciones (2013), resulta pertinente considerar que el estudiante demanda desarrollar un conjunto de capacidades que le permitan describir, analizar, modelar y realizar predicciones para enfrentarse a los cambios de los fenómenos naturales, económicos, entre otros. Este documento aborda tres aspectos, los cuales se van complejizando en los distintos niveles: i) Interpretación y generalización de patrones, ii) Comprensión y uso de igualdades y desigualdades y iii) Comprensión y uso de las relaciones y funciones.

Con respecto a los aspectos mencionados, identificamos nuestro objeto de estudio en el tercer aspecto, en el cual el documento indica que esta competencia implica el desarrollo de capacidades para identificar e interpretar las relaciones entre dos magnitudes, analizar la naturaleza del cambio y modelar situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones. De la misma manera, podemos observar en la descripción de los niveles del Mapa de Cambio y Relaciones en el VI ciclo (1° y 2° de secundaria) la presencia de función lineal y función afín, como presentamos en la siguiente figura:

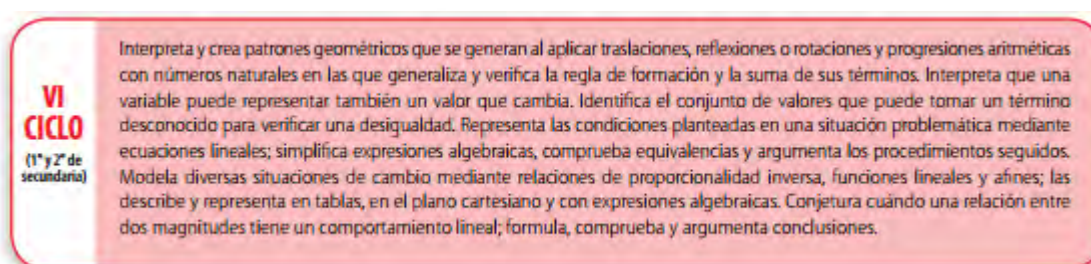


Figura 5: Descripción del nivel VI ciclo.

Fuente: Mapas del Progreso del Aprendizaje Matemática (Perú, 2013, p.9)

De acuerdo con lo descrito anteriormente, notamos que existe una preocupación por parte del MINEDU de mejorar la calidad educativa, hecho que se refleja en el currículo, en el que se

otorga especial importancia al tema de la función lineal y la función afín dentro de la educación básica regular. Ahora bien, cabe preguntarnos si es que el libro de texto que usan nuestros estudiantes (brindados de forma gratuita a nivel nacional por el Estado) facilita o no la comprensión de nuestro objeto de estudio por parte de los estudiantes.

Al respecto, Mayorga (2013) menciona que los libros de texto son los recursos didácticos más usados para apoyar al docente, quien, finalmente, debe ser un mediador en la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Dicho material educativo, debe permitirle al estudiante obtener, ampliar y profundizar sus conocimientos sobre un tema; por ello, debe estar adecuado a las necesidades actuales de acuerdo al nivel educativo. Además, menciona que el libro de texto de matemática se debe entender como un “texto comunicativo” al momento que el estudiante construya su conocimiento, ya que le sirve de apoyo o guía en el quehacer matemático, sin embargo comenta: “se puede decir hoy en día [que] los libros de textos que existen en el mercado poseen poca fuerza comunicativa, no logran establecer una conexión con el lector.” (p.76)

La autora manifiesta que toda obra se construye por las necesidades presentadas en los individuos, las cuales deben estar construidas por cuatro componentes principales, como los presentan Chevallard, Bosh y Gascón (1997), (citados en Mayorga 2013): “...los tipos de problemas que surgen de las cuestiones; las técnicas que permiten resolver estos problemas, las tecnologías que justifican y hacen comprensibles las técnicas; y las teorías que sirven de fundamento a las tecnologías” (p. 125). En su trabajo, Mayorga (2013) observó que el libro de texto analizado presentaba el uso reiterado de una sola técnica para los problemas propuestos, y era notoria la ausencia de la técnica de tabulación en la representación algebraica y gráfica del concepto de función lineal así como la inexistencia del uso de la fórmula $y = mx + b$ para el cálculo de la pendiente de una recta dados dos puntos. La autora concluye expresando que el texto escolar debe propiciar las condiciones para que el estudiante se sitúe en disposición de aprendizaje, además afirma que “el libro de texto puede ocupar un papel fundamental, siempre y cuando, la lectura y la repetición verbal de ciertas definiciones no sean las únicas actividades facilitadas por dicho material educativo”. (p. 81)

En la misma línea, Carrillo (2013) presenta la importancia de un libro de texto tomando como referencia a diferentes investigadores:

- “El libro de texto constituye uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente en cualquier nivel educativo y muy a menudo se transforma en el

referente exclusivo del saber científico tanto para los docentes como para los estudiantes. Además, el libro de texto ejerce diferentes roles: puede ser mirado como un objeto de estudio, como un material de consulta, como registro de actividades del estudiante, como una recopilación de ejercicios y problemas por resolver.” (Villella, 2001)

- “Un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica (el primer nivel estaría formado por los currículos y programas oficiales).” (Ortiz, 1999)
- “En un libro de texto se manifiestan las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado; entre ellos existe un escalón intermedio correspondiente al saber enseñar.” (Chevallard y Joshua, 1982)

De lo expuesto, resulta evidente la importancia del uso de un libro de texto en el proceso de enseñanza aprendizaje de objetos matemáticos y, por ello, nuestro trabajo de investigación se enmarca en este contexto. Además, al describir y analizar cómo un libro de texto presenta la OM del objeto función lineal y función afín, se proporciona al docente una herramienta para poder percibir una adecuada o inadecuada secuencia de las actividades que están presentes en los textos -las definiciones, las propiedades, los ejemplos, los ejercicios resueltos, etc.- antes de utilizarlos en su sesión de clases.

1.4 El problema de investigación

En el presente trabajo de investigación, luego de presentar las diversas dificultades de aprendizaje que existen en los estudiantes sobre los objetos función lineal y función afín, vamos a realizar el estudio de la organización matemática en el libro de texto, y, de acuerdo a la teoría de la TAD se van a describir y a analizar los tipos de tareas, tareas, técnicas y tecnologías en el libro de texto seleccionado para nuestro estudio. El texto de uso nacional a analizar es: “Matemática Secundaria 2” del 2do año del nivel secundario. El tema elegido es la función lineal y la función afín.

1.4.1 Pregunta y objetivos de la investigación

De acuerdo con el problema que nos proponemos investigar y la justificación previa, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cómo está presente la organización matemática de la función lineal y función afín en un libro de texto oficial del 2do año del nivel secundario?

De esta pregunta se desprenden los siguientes objetivos

Objetivo General

Analizar la organización matemática de los objetos función lineal y función afín en un libro de texto oficial del 2do año del nivel secundario.

Objetivos específicos

- Identificar y organizar los tipos de tareas, técnicas y tecnologías relacionadas con la función lineal y función afín en un libro de texto seleccionado de acuerdo a la TAD.
- Describir la organización matemática en un libro de texto seleccionado.
- Determinar el grado de completitud de la OM de función lineal y función afín encontrado en un libro de texto de segundo grado de educación secundaria.

1.5 Metodología de investigación

Nuestro trabajo se realiza dentro del enfoque de la investigación cualitativa de tipo bibliográfico debido a que vamos a describir una realidad en su contexto natural, en este caso, un libro de texto.

En esta aproximación, seguimos a Hernández, Fernández y Baptista (2010), quienes señalan: “que la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto”. (p. 364)

Los autores nos manifiestan que este enfoque se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados; con esto se refiere a estudiar la forma en que los participantes perciben subjetivamente la realidad. Es importante reconocer que los investigadores proponen los contenidos que debe incluir un estudio cualitativo: los objetivos, las preguntas de investigación, la justificación y la viabilidad, una exploración de las deficiencias en el conocimiento del problema y la definición inicial del ambiente o contexto.

Por su parte, Cuba y Lincoln (1981), citados en Gonzales, (2014) manifiestan que las ventajas de trabajar con esta metodología se debe a que estos documentos constituyen una fuente rica y estable, y pueden ser la base de diferentes estudios en los que podemos obtener evidencia para fundamentar las afirmaciones y declaraciones del investigador; por ello, resultan una fuente natural de información.

Procedimiento Metodológico:

A continuación, vamos a indicar el procedimiento realizado para lograr nuestros objetivos.

Primero, se buscó información referente a investigaciones relacionadas con nuestro objeto matemático, función lineal y función afín, de acuerdo a las dificultades en el aprendizaje que presentan los estudiantes cuando realizan tareas con dichos objetos matemáticos. A su vez se consultaron investigaciones relacionadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) debido a que es el marco teórico que guiará nuestro trabajo de investigación.

Luego, se adquirió una postura respecto a la Organización Matemática de Referencia, considerando algunos trabajos relacionados con las Organizaciones Matemáticas asociadas a la función lineal y la función afín. Estos se van a emplear como referentes para la identificación y organización de los elementos de estudio en nuestro trabajo. También, se consideraron los libros de textos de Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y César, A. (2000), Kenneth Hofmann y Ray Kunze (1971), Grossman (2012) y de Lages (2001) para definir el *saber sabio* y poder contrastarlo con el libro de texto a analizar.

Después, presentamos una breve descripción de nuestro marco teórico, la TAD, el cual nos brindó los elementos necesarios para la investigación: los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Estos elementos se identifican en el libro de texto matemáticas 2 con respecto a la función lineal y función afín.

Adicionalmente, se definieron los criterios para realizar el análisis de las praxeologías de nuestros objetos matemáticos en el libro de texto seleccionado tomando en cuenta los elementos de nuestro marco teórico.

Seguidamente, se realizó la descripción y el análisis de las Organizaciones Matemáticas de la función lineal y función afín en el libro de texto considerando los criterios definidos previamente.

Finalmente, presentamos las conclusiones de nuestra investigación así como las sugerencias para futuras investigaciones.

A continuación, presentamos una breve descripción de algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.



CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

El presente capítulo contiene algunos aspectos de la TAD que será nuestro marco teórico porque nos brinda las herramientas necesarias que serán algunos de los criterios usados para la descripción y el análisis del libro de texto seleccionado para este trabajo de investigación.

2.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

Chevallard (1991) considera que cotidianamente nosotros utilizamos nociones matemáticas: al comprar y pagar, al realizar mediciones, al calcular el ángulo o la posición adecuada, al pedir un préstamo y pagar los intereses, etc. Y si además pensamos en que fuimos “obligados” desde muy pequeños a ir al colegio y recibir, por ende, saberes matemáticos de nuestros maestros, entonces podemos deducir que la práctica del ejercicio matemático es parte de la vida de todo ser humano en contextos cotidianos, y realizar operaciones matemáticas no nos es ajeno; por lo tanto, no habría por qué separarla de nuestro entorno social, sino que debe tratarse desde un punto de vista antropológico; por ello, acudimos a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual nos brindará las herramientas necesarias para los fines de nuestra investigación.

La TAD nace con la Teoría de la Transposición Didáctica, la cual hace referencia al paso del saber sabio al saber enseñado, enunciado por Chevallard (1985); y se resume en que toda actividad matemática es una actividad humana más y como tal, se puede modelar mediante una expresión llamada “praxeología” (praxis + logos) la cual (Bosch et. al., 2006) divide en dos niveles:

- El nivel de la praxis o del “saber hacer”, que abarca un cierto tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos.
- El nivel del logos o del “saber” en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, y que recibe el nombre de tecnología. Dentro del “saber” se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología) que se denomina teoría.

Por tanto, los tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los cuatro elementos que componen una praxeología, la cual pasamos a detallar a continuación con algunos ejemplos relativos a la matemática.

2.2 Praxeologías

A continuación, resumimos los elementos de nuestro marco teórico: los tipos de tareas, las tareas, las técnicas, las tecnologías y teorías; con ejemplos para cada uno de los casos y presentamos las referencias textuales del creador de esta teoría.

- **Tipos de tareas T**

Con respecto a los tipos de tareas, Chevallard (1999) menciona que, son la base de la praxeología. Se definen como un conjunto de tareas t específicas que están relacionadas a un mismo objeto, por tanto $t \in T$, la cual mayormente esta expresada por un verbo, por ejemplo: dividir un entero entre otro, calcular el valor de $f(x)$ cuando $x = 2$, expresar el decimal 0.23 como número fraccionario, reconstruir un triángulo dada la medida de los tres lados, etc. Ahora bien, dividir un entero entre otro es un tipo de tareas, pero dividir, simplemente, no lo es. De la misma forma, calcular el valor de $f(x)$ cuando $x = 2$ es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se denominará un género de tareas.

“Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. Calcular... es, se ha dicho, un género de tareas; pero calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical es un tipo de tareas, lo mismo que calcular el valor de una expresión conteniendo la letra cuando se da a un valor determinado. Durante los años de colegio, el género calcular... se enriquece de nuevos tipos de tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va, en primer lugar, a aprender a calcular con vectores, después, más tarde, a calcular una integral o una primitiva, etc. Y se repetirá lo mismo, por supuesto, con los géneros Demostrar..., Construir..., o también Expresar... en función de...”

Por último, tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras”, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica.” (Chevallard, 1999, p.224)

Darle respuesta a cada una de las tareas t mencionadas anteriormente, puede resultar problemático o no, dependiendo si son realizables de forma inmediata, y si, además, no solamente queremos responder con éxito a cada una de forma particular, sino responder a todas del mismo tipo; entonces nuestro objetivo será convertir un tipo de tareas en tareas realizables con éxito. Para ello hay que “saber hacer”, es decir, saber la manera de hacerlo de forma segura: es lo que se denomina técnica

- **Técnicas**

Chevallard (1999) menciona que, dado un tipo de tareas T , se requiere realizar las tareas $t \in T$: a una determinada manera de hacer, se le da el nombre de técnica (del griego tekhnê, que significa saber hacer). Por ejemplo, para *expresar* el decimal 0,23 como número fraccionario, una técnica podría ser escribir todo el número que se observa sin la coma ni el cero como numerador y luego dividirlo entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya después de la coma; esta técnica permite abordar muchos problemas o tareas del mismo tipo. Para el caso de *reconstruir* un triángulo, dada la medida de los tres lados, una técnica asociada para ella podría ser la de los dos lugares geométricos y, de igual manera, esta técnica permitiría resolver muchos problemas o tareas del mismo tipo. Como se evidencia, las técnicas permiten agrupar los problemas en determinados tipos de tareas o problemas, de ahí que estos dos elementos se asocian mutuamente en una primera parte llamado bloque práctico-técnico, *la praxis*.

“Una praxeología relativa al tipo de tareas \mathcal{T} contiene pues, en principio, una técnica δ relativa a \mathcal{T} . Contiene así un “bloque” designado por $[\mathcal{T} / \delta]$, que se denomina bloque práctico-técnico y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina un saber-hacer: un determinado tipo de tareas, \mathcal{T} y una determinada manera, δ de realizar las tareas de este tipo.” (Chevallard, 1999, p.225).

Para que una técnica pueda ser usada de forma normal sin ningún “temor”, es porque es correcta y comprensible. Cabe acotar que la técnica trae consigo un discurso justificativo para su validez y, según su ámbito de aplicabilidad: a dicho discurso se le llama tecnología.

- **Tecnologías**

Con respecto a las tecnologías, Chevallard afirma que al discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica para realizar de forma “correcta” las tareas del tipo T , se le llama tecnología (de *tékhne*, técnica, y *logos*, discurso). La tecnología, aparte de justificar la técnica, también podría brindar más elementos para modificar la técnica a fin de que posea, probablemente, un mayor alcance sobre la tarea. Por ejemplo: una tecnología para justificar la técnica que sirve para expresar un decimal como número fraccionario podría ser la división de enteros o el estudio de los números racionales. Del mismo modo, una tecnología para justificar la técnica de *reconstruir* un triángulo, dada la medida de los tres lados, podría ser el uso de un teorema como “el conjunto de puntos del plano a igual distancia de un punto A es

la circunferencia de centro A y radio d ” u otro teorema. Esto depende de los *criterios* de cada institución I .

El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución. (Chevallard, 1999, p.226).

Cabe resaltar que una tecnología puede ser un tema, como los números complejos, los números racionales o el estudio de teoremas como el teorema de Pitágoras. Al discurso matemático, adecuadamente amplio y preciso para explicar y justificar la tecnología, se le denomina teoría.

- **Teorías**

De acuerdo con nuestro marco teórico, a la razón por la cual se usa una tecnología se le llama teoría, la cual es, pues, un nivel superior de justificación y explicación, y cumple el mismo papel que cumple la tecnología respecto de la técnica. Las teorías son frecuentemente más “abstractos” ya que se usan axiomas, demostraciones rigurosas, cuestiones metafísicas, etc. Por ejemplo, una teoría que justifica nuestra tecnología para el caso de la expresión de un decimal como número fraccionario podría ser tener en cuenta la teoría de anillos ordenados; y una para el caso del triángulo podría ser el axioma de que el plano está conformado por puntos, o que tres puntos no alineados determinan un triángulo. Sobre esto podemos inferir que los dos últimos elementos (tecnología y teoría) se asocian mutuamente en una segunda parte llamada, bloque tecnológico - teórico, *el logos*:

“En la enseñanza de las matemáticas, un tema de estudio, (“Pitágoras”, “tales”, etc.), se identifica a menudo con una tecnología Θ determinada (teorema de Pitágoras, teorema de Tales) o, más bien, implícitamente, con el bloque de saber $[\Theta / \Theta]$ correspondiente, dado que esta tecnología permite producir y justificar, a título de aplicaciones, técnicas relativas a distintos tipos de tareas. Se señalará, sin embargo, que otros temas de estudio (“Factorización”, “Desarrollo”, “Resolución de ecuaciones”, etc.) se expresan, muy clásicamente, en términos de tipos de tareas. Chevallard” (1999, p.227)

Por todo ello, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) concluyen que toda obra matemática (obra puede ser un contenido brindado en el currículo) se edifica por las necesidades presentadas por uno o más individuos en respuesta a las diferentes interrogantes exteriorizadas en su entorno, las cuales deben estar conformadas por cuatro componentes principales: “...los tipos de problemas que surgen de las cuestiones; las técnicas que permiten resolver estos

problemas, las tecnologías que justifican y hacen comprensibles las técnicas; y las teorías que sirven de fundamento a las tecnologías” (p. 125).

2.3 La modelización ecuacional y funcional

Gonzales (2014), en su trabajo de investigación referido a las proporciones, menciona que un problema contextualizado, es decir, expresado en lenguaje natural, presenta la relación proporcional de dos magnitudes, la cual lleva a la transformación en términos de ecuaciones y, a partir de ahí, se usa la teoría del álgebra entre magnitudes. Esto, según los elementos presentados anteriormente, lleva a la creación de nuevas técnicas y tecnologías para la resolución de un problema contextualizado, ya que, al convertirlo en términos de una ecuación, se está haciendo una primera intención de modelización. Esto evoluciona, puesto que, cuando se relaciona con la ecuación y la proporción, es decir, cuando dos magnitudes se igualan a una constante de proporcionalidad k , despejando se obtiene la propiedad de linealidad, es decir, se convierte en una función lineal $f(x) = kx$, por tanto el estudio de la modelización es parte de nuestros objetos matemáticos de estudio. Todo ello, Gonzales lo presenta basado en García (2005).

2.4 Tipos de organizaciones praxeológicas

La TAD menciona dos tipos de praxeologías u organizaciones praxeológicas: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y las segundas, a la forma en que eso ocurre. Ambas praxeologías presentan los cuatro elementos ya mencionados, los cuales, además, son imprescindibles también para construir cualquiera de ellas.

De lo mencionado anteriormente sobre los elementos de la TAD, vemos que alrededor de un tipo de tareas T , existe una *tripleta* formada por al menos una técnica, por una tecnología y una teoría, ahora cabe señalar que Chevallard (1999) introdujo diferentes tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes. Estas son:

- **Praxeologías puntuales:** es el tipo de problema y la técnica dada para esta (la praxeología). Está generada por un único tipo de tareas T . Es el punto de partida de la praxis que, sin embargo, es difícil de hallar aislada en una OM, ya que debe estar justificada por una tecnología. Esto nos conduce a la siguiente praxeología.

- **Praxeologías locales:** en este nivel se habla de una primera integración dada por una tecnología que integra diversas praxeologías puntuales, de tal manera que dicha tecnología sirva para justificar las diferentes técnicas de las praxeologías puntuales que la integran para poder resolver una situación problemática que no pudo ser resuelta por ninguna praxeología puntual a priori.
- **Praxeologías regionales:** en este nivel se habla de una teoría matemática común que integra diversas praxeologías locales, de tal manera que el discurso teórico sirva para justificar las diferentes tecnologías de las praxeologías locales que la integran.
- **Praxeologías globales:** se producen cuando se unen varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

Carrillo (2013) menciona que en diferentes investigaciones desarrolladas bajo el enfoque de la TAD se han encontrado conclusiones que informan que las OM locales que se ofrecen en diferentes instituciones escolares son incompletas. Además, las estructuras de las OM locales relativamente completas deben cumplir con la integración de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías así como con la interrelación de ellas. Debe preponderar, además, el discurso tecnológico.

Para este trabajo de investigación sobre función lineal y función afín, se consideran las organizaciones matemáticas puntuales (OMP), como un único tipo de tarea; las organizaciones matemáticas locales (OML), las cuales resultan de integrar diferentes praxeologías puntuales; y la organización matemática regional, en la que hallamos la teoría de la función lineal y función afín como la teoría matemática que justifica las diferentes praxeologías locales que la integran.

2.5 Categorías de una Organización Matemática (OM)

En esta sección, mencionamos los trabajos de Parra y Otero (2007), los cuales categorizan las Organizaciones Matemáticas de la siguiente manera:

- **OMR:** (Organización Matemática de Referencia). Es aquel espacio en el que encontramos el saber sabio. Esto no solo depende de las nociones matemáticas, sino también de las consideraciones personales del investigador así como de las características propias de la institución en la que se desarrollan las OM. Serán utilizadas para ser comparadas con los libros de texto a analizar, ya que la OMR es un modelo de OM en el que quedan definidos los tipos de tareas y las diferentes técnicas, y permite analizar las reconstrucciones propuestas en los libros de texto sobre ciertos

temas de estudio.

- **OMPE:** (Organización Matemática Propuesta para Enseñar). En esta instancia, se realiza el análisis de la OM de diversos libros de texto con referencia al objeto en estudio. Existen dos tipos de OMPE: **i)** Organización matemática propuesta para enseñar en los libros de texto y **ii)** Organización matemática propuesta para enseñar en un material teórico – práctico usado por el docente.
- **OMEE:** (Organización Matemática Efectivamente Enseñada). Se construye considerando los registros de clase y las notas de campo.

Para nuestro trabajo tomaremos en cuenta la OMR y la OMPE. La primera debido a que tomaremos los libros de texto como un saber sabio y tomaremos de ellos las definiciones matemáticas sobre nuestros objetos de estudio. La segunda será utilizada porque nuestra investigación consiste en el estudio de la OM en un libro de texto.

2.6 Indicadores de las Organizaciones Matemáticas Locales (OML)

Carrillo (2013) afirma que en la TAD toda actividad de estudio e investigación parte de una cuestión generatriz formada en una institución y que permite crear un tipo de problemas y una técnica de resolución para dicho problema, así como una tecnología coherente para justificar y entender mejor dicha actividad matemática que se va llevar a cabo.

Para medir el grado de completitud de una Organización Matemática Local se deben utilizar los indicadores dados por Fonseca (2004):

- **OML1:** deben mostrarse tipos de tareas asociados al “cuestionamiento tecnológico”; dicho de otro modo, tareas que hagan referencia a la interpretación y a la justificación de las técnicas, así como también a la comparación entre ellas. El grado de completitud dependerá del grado de integración de todos los tipos de tareas, en otras palabras, una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas existan, es decir, tareas realizables mediante técnicas que no están relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico.

- OML2: deben existir diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas. Una OML será más completa si para un tipo de tarea, existen dos o más técnicas que permitan realizar dicho tipo de tarea y, además, se permita optar por la técnica más fiable y económica para llevarla a cabo según los elementos tecnológicos.
- OML3: deben existir diferentes representaciones de la actividad matemática. Las técnicas usadas deben permitir utilizar distintas formas de representaciones y, a la vez, deben haber criterios para elegir la representación más adecuada según la actividad.
- OML4: deben existir tareas y técnicas “inversas”, por ejemplo, que, a partir de la respuesta, se analice la situación de partida, o que se intercambien los datos con la incógnita del problema.
- OML5: deben existir tipos de tareas que permitan al estudiante interpretar el funcionamiento y el resultado de la aplicación de las técnicas, y que, a la vez, se pueda percibir su beneficio matemático o ventaja en relación con las otras técnicas.
- OML6: deben existir tareas matemáticas “abiertas”. En las tareas abiertas los datos se tratan como si fueran desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son valores concretos, sino las relaciones que se establecen entre ellas. De esta manera, el estudiante, ante una situación matemática, debe decidir cuáles son los datos que va a utilizar y reconocer, quién o cuáles son las incógnitas. En este nivel se incluyen las tareas de modelización matemática.
- OML7: deben construirse técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas. Se sabe que la tecnología y la teoría son capaces de construir técnicas nuevas y también susceptibles de ampliar los tipos de problemas que se pueden abordar.

Hay que considerar que la noción de “completitud” es relativa, ya que no se puede hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”. Se debe entender como una cuestión de grado el hecho de que existen OML más o menos “completas” que otras en función de que tanto sus

componentes cumplen con las condiciones descritas por los indicadores de Fonseca. Este aspecto es importante, ya que nos servirá en adelante para el análisis del libro de texto seleccionado en nuestra investigación.

2.7 La función lineal y la función afín desde la perspectiva de la TAD

Se tomarán en cuenta las investigaciones de Parra et al. (2006) y García (2005) como las organizaciones matemáticas de referencia con respecto a la función lineal y la función afín, y que, finalmente, nos servirán para poder identificar y organizar los tipos de tareas y, por consiguiente, las técnicas y tecnologías presentes en el libro de texto seleccionado.

El texto a analizar, el cual es nuestro sujeto de investigación, es el libro de texto para el 2do año del nivel secundario de uso nacional. Este se analizará de acuerdo con la teoría de la TAD. En el libro se van a describir y analizar los tipos de tareas, tareas, técnicas y tecnologías presentes sobre función lineal y función afín.

- **Libro de texto a analizar:** *Matemática 2 secundaria* de la editorial Norma usado en colegios públicos que en adelante llamaremos “**libro de texto**”.

Nuestro estudio considera como organización matemática de referencia a las investigaciones de García (2005) y Parra et al. (2006). Por tal motivo, se emplean para identificar y organizar los elementos de la organización matemática sobre función lineal y función afín en el libro de texto seleccionado. A continuación, mencionamos los tipos de tareas como problemática en sus investigaciones respectivas.

De acuerdo a García (2005) en la página 297, tomamos en cuenta los diversos tipos de problemas en el tema función lineal y función afín:

- Interpretar relaciones de proporcionalidad directa a través de funciones lineales
- Obtener la ecuación y la gráfica de una función lineal derivada de una relación enmarcada en la vida cotidiana de los alumnos
- Obtener la ecuación y la gráfica de una función afín derivada de una relación enmarcada en la vida cotidiana de los alumnos
- Representar rectas en el plano cartesiano a partir de sus ecuaciones
- Interpretar, en casos sencillos, una función a través de su gráfica
- Conocer las propiedades básicas de los distintos tipos de funciones elementales en cualquiera de sus expresiones y familiarizarse con su terminología

- Reconocer el tipo de familia funcional a la que pertenece una función dada por una gráfica o una ecuación
- Realizar operaciones elementales entre funciones

De igual manera, Parra et al. (2006) destaca la OMR que se debe tener en cuenta en torno a la noción de función; estas son cuatro, según el nivel superior en el cual hizo su estudio. La OMR gira en torno a los siguientes géneros de tareas:

- Analizar el dominio de funciones
- Analizar qué expresiones resultan ser relación funcional
- Representar gráficamente funciones de una y dos variables
- Analizar casos particulares de curvas de nivel

Con respecto a estos trabajos presentados, podemos concluir que algunos de los temas mencionados son importantes para nuestro trabajo de investigación debido a que nos dan una referencia sobre cómo organizar de manera adecuada las praxeologías de nuestro marco teórico.

A continuación, presentamos los objetos matemáticos a analizar; es decir un breve estudio de la función lineal y la función afín.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En este capítulo, presentamos un estudio de nuestros objetos matemáticos función lineal y función afin, considerando los aspectos matemáticos y didácticos. En primer lugar, abordamos los conceptos y algunas propiedades fundamentales de función lineal y función afin desde un punto de vista formal en matemáticas. Para ello, en primer lugar, definimos la función lineal usando como base el álgebra lineal; luego, definimos la función afin. En segundo lugar, describimos como el libro de texto seleccionado presenta la función lineal y la función afin.

3.1 Aspectos matemáticos

En esta sección, vamos a definir de manera formal y estrictamente matemática cada uno de nuestros objetos matemáticos en estudio, es decir, vamos a evidenciar el saber sabio según la TAD tomando como referencia la teoría del álgebra lineal.

Sobre el álgebra lineal debemos tomar en cuenta algunas definiciones elementales como el espacio vectorial, los sub espacios vectoriales, las transformaciones lineales, etc. Según Lages (2001) un espacio vectorial es un conjunto de objetos, denominados vectores, que no necesariamente se refieren al vector comúnmente usado en física como velocidad, fuerza, etc., sino a cualquier elemento u objeto matemático como una matriz, un polinomio, una recta, un número, etc. junto con dos operaciones binarias llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisface los diez axiomas siguientes:

Sean los vectores u, v, w en V y los escalares α y β ,

1. **Ley de composición interna:** la suma de $u + v$ está en V (la suma de dos vectores es un vector)
2. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$, axioma conmutativo.
3. $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$, axioma asociativo.
4. $0 + u = u + 0 = u, \forall u \in V$, donde “0” se denomina elemento neutro aditivo o cero.
5. $u + (-u) = (-u) + u = 0$, donde “-u” se denomina opuesto de u.
6. **Ley de composición externa:** el múltiplo escalar αu denotado por $\alpha \cdot u$ está en V (el producto de un escalar por un vector es un vector).
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall u, v \in V, \alpha \in R$.
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall u \in V, \alpha, \beta \in R$.
9. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \forall v \in V, \alpha, \beta \in R$.

10. $1xu = u, \forall u \in V$, donde “1” se denomina elemento neutro multiplicativo.

Como ejemplo de espacios vectoriales tenemos: el plano R^2 , el espacio R^3 , la recta real R , el conjunto de polinomios P_n de grado menor o igual a n , las matrices $M_{m,n}$ con coeficientes reales, etc.

La definición de función lineal se fundamenta en el álgebra lineal; para ello, vamos a basarnos en las definiciones proporcionadas por Kenneth Hofmann y Ray Kunze (1971), Elon Lages Lima (2001) y Stanley Grossman (2012).

3.1.1 Función lineal

En esta sección, presentamos algunas definiciones, propiedades y teoremas sobre función lineal tomadas de libros de texto seleccionados para su estudio.

3.1.1.1 Algunas definiciones sobre la función lineal

Lages (2001), en su libro *Geometría analítica y álgebra lineal*, en el capítulo titulado “Transformaciones lineales”, afirma que “Transformación es sinónimo de función” (p.142) y esto lo dice en referencia a que una transformación “ T ” es el proceso de hacer corresponder un elemento de un conjunto de partida a otro elemento de un conjunto de llegada, siendo este último imagen del primero vía “ T ”.

Por otro lado, Grossman (2012) menciona que una transformación “ T ” se llama lineal si sucede lo siguiente:

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$, un vector único $T(v) \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α , lo siguiente:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$, es decir, que la imagen de la suma de dos vectores de V es igual a la suma de sus imágenes en W .
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, es decir, que la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector en W .

En otras palabras, si una transformación “ T ” o función “ f ” cumplen con las condiciones anteriores, se llamará transformación o función lineal y “Se escribirá $T: V \rightarrow W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W ; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen” (p. 481). Además, en su libro *Álgebra lineal* en el capítulo titulado “Transformaciones lineales”, el autor afirma que “Las únicas transformaciones lineales de R en R son funciones de la forma $f(x) = m.x$ para algún número real m . Así, entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son transformaciones lineales son aquellas que pasan por el origen” (p.485).

A continuación, presentamos su demostración:

Sea $f(x) = m.x, \forall m \in R$, entonces:

- $f(u + v) = m(u + v) = m.u + m.v = f(u) + f(v)$, luego: $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $f(\alpha.v) = m(\alpha.v) = \alpha(m.v) = \alpha.f(v)$, luego: $f(\alpha.v) = \alpha.f(v)$

Al respecto, Hofmann K. y Kunze R. (1971) mencionan que es probable llamar función lineal a aquella gráfica que es una línea recta, pero esto no resulta suficiente, ya que una transformación lineal de R en R es una función de R en R cuya gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

“Este punto es a menudo confuso para la persona que está estudiando álgebra lineal por primera vez, ya que probablemente ha estado expuesto a un diferente uso del término “función lineal”... Supongamos que V es el espacio del vector R^1 . Una transformación lineal de V en V es entonces un tipo particular de función de valor real sobre la línea R . En un curso de cálculo, uno probablemente llamaría a tal función lineal si su gráfica es una recta. Una transformación lineal de R^1 en R^1 , según nuestra definición, será una función de R en R , la gráfica de que es una línea recta que pasa por el origen.” (p.68)

De esta manera, se deduce que una transformación lineal es un caso particular de función real sobre el campo real R , llamado función lineal. Además, se debe resaltar que en toda transformación lineal T de V en W se debe cumplir que $T(0) = 0$; veamos:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

Además, estos autores señalan otra propiedad importante que se cumple en toda transformación lineal T en general: estas "preservan" combinaciones lineales, es decir, si v_1, v_2, \dots, v_n son vectores en V y c_1, c_2, \dots, c_n son escalares, entonces se cumple lo siguiente:

$$T(c_1.v_1 + c_2.v_2 + \dots + c_n.v_n) = c_1.T(v_1) + c_2.T(v_2) + \dots + c_n.T(v_n)$$

Y, de manera particular, se deduce: $T(c_1.v_1 + c_2.v_2) = c_1.T(v_1) + c_2.T(v_2)$

Otro ejemplo en el que se cumplen las dos condiciones de linealidad es para la función identidad. Sea $I: V \rightarrow W$ tal que $I(x) = x$, $\forall x, y \in V$ y α, β escalares entonces es una transformación lineal porque cumple lo siguiente:

$$I(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.x + \beta.y = \alpha.I(x) + \beta.I(y)$$

Como vemos, tratar el tema de función lineal es tomar en cuenta el álgebra lineal con sus temas de espacios vectoriales y transformaciones lineales, por tanto una **función lineal es una transformación de R en R sí y solo si $f(x) = m.x$** , con dominio $x \in R$ y m cualquier real.

3.1.1.2 Algunas propiedades y teoremas sobre función lineal

Según, Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y César, A. (2000) la función lineal es el modelo matemático de los problemas de proporcionalidad y es el tema matemático más difundido en todo el mundo. Para ahondar en este tema, tomaremos como referencia el libro *Aritmética Progressiva* de Antonio Trajano, cuya primera edición data de 1883 y en la que se rescata la siguiente definición:

“Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando ellas se corresponden de tal modo que, multiplicándose una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. En el primer caso, la proporcionalidad se llama directa y, en el segundo, inversa; las magnitudes se dicen directamente proporcionales o inversamente proporcionales.” (p.86)

Según lo anterior, los autores concluyen que una proporcionalidad es una función $f: R \rightarrow R$, tal que, para cualesquiera números reales c, x se tiene $f(c.x) = c.f(x)$ llamada proporcionalidad directa, y además, si $a = f(1)$, se tendría que $f(c) = f(c.1) = c.f(1) = c.a$, esto es $f(c) = a.c$, siendo c cualquier real. En general, si consideramos $c = x$, tenemos que $f(x) = a.x$, lo cual equivale a decir que la magnitud y es directamente proporcional a la

magnitud x cuando existe un número a (llamado constante de proporcionalidad) tal que $y = a.x$ para todo valor de x , luego f es una función lineal.

Al respecto podemos citar un ejemplo: si un litro de aceite cuesta a soles entonces x litros cuestan $y = a.x$ soles.

Ahora bien, cabe preguntarnos: ¿cómo estar seguros que una correspondencia es una proporcionalidad o función lineal? Para responder a esta interrogante, los autores presentan el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad, de la siguiente manera:

Para que $f : R \rightarrow R$ sea una función lineal, basta verificar lo siguiente:

- i) $f(n.x) = n.f(x)$ para todo $n \in Z$ y todo $x \in R$.
- ii) Poniendo $a = f(1)$, se tiene $f(x) = a.x$ para todo $x \in R$.
- iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x, y \in R$.

3.1.2 Función afín

En esta sección, presentamos algunas definiciones, propiedades y teoremas sobre función afín tomados de libros de texto seleccionados para su estudio.

3.1.2.1 Algunas definiciones sobre la función afín.

Grossman (2012) afirma que una función afín es aquella que asocia a cada número “ x ” el número “ $mx + b$ ”, donde m y b son dos valores fijos, tales que $m \in R$ y $b \in R - \{0\}$. Esta forma es casi similar al de función lineal demostrada anteriormente, pero que, al no cumplir con la condición de ser una transformación lineal, no se denomina así, lo cual se demuestra a continuación:

Sea $y = f(x) = mx + b, \forall m \in R$ y $b \in R - \{0\}$ con x e y variables en R , entonces:

- $f(u + v) = m(u + v) + b = mu + mv + b \neq f(u) + f(v) = (mu + b) + (mv + b) = mu + mv + 2b$
- $f(\alpha u) = m(\alpha u) + b = \alpha(mu) + b \neq \alpha f(u) = \alpha(mu + b) = \alpha(mu) + \alpha b$

Con lo anterior, queda demostrado que la expresión funcional $f(x) = mx + b$ no es una transformación lineal; por tanto, queda descartado el nombre de función lineal para esta. Por ello, el autor concluye que no toda transformación que parece lineal lo es. Por ejemplo, definimos $T : R \rightarrow R$ por $T(x) = 3x + 4$. Entonces la gráfica de $\{(x, T(x)); x \in R\}$ es una línea recta en el plano XY , pero T no es lineal porque $T(x + y) = 3(x + y) + 4 = 3x + 3y + 4$ y $T(x) + T(y) = (3x + 4) + (3y + 4) = 3x + 3y + 8$.

Por otro lado, Lages, et al. (2001) definen a la función afín como una ecuación de la recta con $y = mx + b$, mencionando que hay tres tipos principales de ecuación que definen rectas en el plano.

Sean $f : R \rightarrow R / f(x) = y = mx + b, \forall m \in R$ y $b \in R - \{0\}$, se tratará de una función afín si a “ x ” e “ y ” se les llama variables a las que se les puede asignar un conjunto de valores cualesquiera. Estas son de dos tipos: la variable independiente y la variable dependiente respectivamente. “ b ” que es el término independiente recibe el nombre de constante u ordenada al origen, ya que de ella depende en qué punto del eje de ordenadas cortará la gráfica, además la pendiente de la función afín está determinada por el valor que toma “ m ” quien determina el grado de inclinación de la gráfica y es un valor que permanece constante sin importar los valores que adopte “ x ”.

La gráfica de la función afín es una línea recta dado que, si la pendiente es un valor positivo, la función será creciente; si la pendiente es negativa la función será decreciente; y, si la pendiente es cero, la función no tendrá pendiente y se llamará función constante cuya grafica será una línea recta paralela al eje X .

Como vemos, “afín” significa que tiene afinidad con otro o que tiene cosas en común con otro, por tanto el nombre de función afín resulta pertinente porque esta posee un elemento común con la función lineal: ambas se representan mediante líneas rectas en el plano XY .

3.1.2.2 Algunas propiedades y teoremas sobre función afín

Lages et al. (2001) toman como ejemplo un caso muy sencillo de función afín, el de la tarifa de un taxi, la cual se modela de la forma: $f(x) = ax + b$, donde x es la distancia recorrida,

$f(x)$ es el precio a pagar, b es el precio por solicitar el servicio y a es el precio por km recorrido.

Además, presentan el siguiente teorema: sea $f : R \rightarrow R$ una función monótona inyectiva, si el aumento $f(x+h) - f(x) = \psi(h)$ dependiese apenas de h , y no de x , entonces f es una función afín; es decir, que los aumentos sufridos por $f(x)$ son proporcionales a los aumentos dados a x . Además afirman que existe una relación interesante entre las funciones afines y las progresiones aritméticas, ya que estas pueden ser vistas geoméricamente como una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ igualmente espaciados en la recta. De esta manera, la razón $h = x_{i+1} - x_i$ no depende de i , ya que: $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_{i+1} - x_i = \dots$

Por tanto, de acuerdo con los autores, si se tuviera una recta no-vertical (gráfico de una función afín) en R^2 y tomamos sobre ella los puntos:

$$(1, y_1), (2, y_2), \dots, (i, y_i), \dots$$

cuyas abscisas son los números naturales $1, 2, 3, \dots, i, \dots$, las ordenadas $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots$ de esos puntos forman una progresión aritmética. Y, recíprocamente, si una función monótona

$f : R \rightarrow R$ transforma cualquier progresión aritmética $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ en una progresión aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$ entonces f es una función afín.

3.2. Aspectos didácticos

En esta sección, vamos a presentar las definiciones de los objetos función lineal y función afín presentes en un libro de texto: *Matemática 2 secundaria* de la Editorial Norma usado en colegios públicos, para, luego, formular unos comentarios al respecto, basados en las definiciones formales presentadas anteriormente por Lages (2001) y Grossman (2012).

3.2.1. Aspectos didácticos del libro de texto

La definición de función lineal presente en el libro de texto matemáticas 2 es: “Una **función lineal** es aquella cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número diferente de cero que se llama constante de proporcionalidad. Una función lineal se llama también función de proporcionalidad directa.” (Perú, 2012, p. 44)

Tomando en cuenta el paso del saber sabio al saber enseñado (La transposición didáctica según la TAD) se dejan de considerar algunos criterios que suelen ser “rigurosos” y a veces pensados como “difíciles” de ser asimilado por el estudiante, pues en la definición notamos que la transposición didáctica se da en un aspecto, cuando se menciona que " m " es distinto de cero. Sin embargo, de acuerdo a las definiciones formales ya presentadas, se refieren a que " $m \in R$ "; además, cabe resaltar que el libro *matemáticas 2* mantiene el nombre original para la expresión: $f(x) = mx$, al llamarla función lineal.

Por otro lado, la definición de función afín presente es: “Una función lineal afín es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x) = mx + b$, donde m y b son números racionales diferentes de cero.” (Perú, 2012, p. 44)

En el caso de esta definición, notamos que la transposición didáctica se produce con muchos cambios y, por ende, ya se distancia del saber sabio, pues se afirma que los parámetros “ m ” y “ b ” son números racionales distintos de cero y, también, les da el nombre de función lineal afín, cuando se considera por referencias que el parámetro “ b ” pertenece a R y que el parámetro “ m ” es cualquier número real menos el cero; además, de acuerdo a las referencias tomadas es apropiado llamar a esta función como función afín.

Como vemos el texto *Matemática 2 secundaria* no realiza una buena transposición didáctica para definir cada uno de los objetos matemáticos de nuestro estudio (función lineal y función afín) sobre todo en lo que respecta a las restricciones que se les da a los parámetros “ m ” y “ b ” según sea el caso. Respecto a los nombres que se les otorga a cada función, tienden a acercarse con los nombres formales, pero aún se continúa con el error de llamar a la función afín como función lineal afín.

Mencionadas las definiciones de nuestros objetos de estudio dadas en el libro de texto seleccionado y comparadas con el saber sabio según la TAD, para mostrar cómo fue la transposición didáctica, procedemos a presentar algunos elementos sobre la TAD desarrollada por Chevallard.

En el capítulo que sigue, presentamos los criterios empleados en nuestro trabajo, dichos criterios nos permiten realizar la descripción y el análisis de los objetos función lineal y función afín en el libro de texto seleccionado.

CAPÍTULO IV: CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

En este capítulo, presentamos los criterios para el análisis del libro de texto seleccionado para nuestra investigación, además de una descripción y organización de las praxeologías presentes en el libro de texto; finalmente, analizamos la completitud de dicha OM considerando los indicadores de Fonseca (2004).

Estos criterios se derivan de los elementos que nos proporciona la TAD, las cuales son: tipos de tarea, tareas, técnicas y tecnologías en torno a la teoría de la función lineal y función afín. Sobre la base de estos elementos se realiza la descripción y el análisis del libro de texto seleccionado para esta investigación.

A continuación, detallamos los criterios antes mencionados.

4.1 Criterios para la descripción del libro de texto determinados por la TAD

Primero se presenta una descripción detallada sobre el desarrollo de la función lineal y función afín en el libro de texto seleccionado. Luego, identificamos y organizamos las praxeologías encontradas en el libro de texto, es decir, se agrupan y contabilizan los tipos de tareas, tareas, técnicas y tecnologías presentes en dicho material. Adicionalmente, identificamos si las técnicas presentes son suficientes para dar solución a los problemas propuestos. Esta labor nos dará información sobre si los tipos de tareas encontradas son las propicias para abarcar y comprender el objeto matemático en función de las referenciales dadas por García (2005) y Parra (2006). Por ejemplo, un tipo de tarea debería ser: determinar el dominio y rango de una función lineal y de aquí se deberían desprender diversas tareas con sus respectivas técnicas y tecnologías (justificaciones) para obtener una adecuada solución del problema.

4.2 Criterios para obtener el grado de completitud de una OML

Como se mencionó en el capítulo anterior, la noción de “completitud” es relativa, ya que no se puede hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”. Se debe entender como una

cuestión de OML más o menos “completa” que otras en función de que sus componentes cumplen con las condiciones descritas por los indicadores de Fonseca (2004).

A continuación, en la tabla 2 mostramos una adaptación de los siete indicadores que nos proporciona Fonseca (2004).

Tabla 2. Adaptación de los Indicadores de Fonseca para la completitud de una OM.

OML	DESCRIPCIÓN
1	Distintos tipos de tareas que se asocien a un mismo discurso tecnológico
2	Distintas técnicas para un mismo tipo de tareas
3	Distintas representaciones para una misma actividad matemática
4	Debe haber distintas tareas y técnicas “inversas”.
5	Se debe elegir de varias técnicas, la mejor para un tipo de tarea.
6	Trabajar con tareas “abiertas” tales que los coeficientes sean parámetros a variar
7	Se deben construir nuevas técnicas para ampliar los tipos de tareas o problemas.

Con todo lo mencionado anteriormente, vamos a analizar el libro de texto *Matemáticas 2 secundaria* identificando y describiendo previamente cada una de las tareas, técnicas y tecnologías presentes en él; para, luego, comparar estos elementos con las OML presentadas por Fonseca (2004) y así poder analizar la completitud de la OM de la función lineal y función afín en el libro de texto seleccionado.

A continuación, presentamos la descripción, las praxeologías y el análisis de los objetos matemáticos en estudio en el libro de texto seleccionado.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA EN UN LIBRO DE TEXTO

En este capítulo, presentamos una descripción y el análisis de la organización matemática del libro de texto *Matemática 2 Secundaria* que es distribuido de forma gratuita a las instituciones educativas públicas por el Ministerio de Educación del Perú a los estudiantes de segundo grado de educación secundaria.

Primero vamos a presentar una descripción de los objetos matemáticos función lineal y función afin en el libro de texto seleccionado. Luego, presentaremos las praxeologías de dicho texto y, finalmente, realizaremos el análisis tomando en cuenta los indicadores de completitud de Fonseca (2004).

Para realizar nuestro trabajo de investigación, se eligió el libro de texto *Matemática 2 Secundaria* debido a que es el único libro oficial de matemática para el segundo año del nivel secundario. Este libro de texto debe ser trabajado de forma obligatoria en todas las instituciones educativas públicas del Perú, ya que en él se presentan los contenidos y capacidades estipulados por el Diseño Curricular Nacional (2009).

A continuación, describimos el libro de texto seleccionado en relación a la función lineal y función afin.

5.1 Descripción del libro de texto *Matemática 2 Secundaria*

El Libro de texto *Matemática 2 Secundaria* ha sido elaborado por la Editorial Norma en el Perú. Su primera edición fue realizada en mayo del 2012, impreso en Perú, con más de medio millón de ejemplares. El libro de texto presenta los siguientes autores: Ramón Donato Marín Córdova, Jorge Silva Santisteban Chero, Álvaro Vergaray Dulanto, Nora Ysela Espinoza Chirinos y Esther Onsihuay Acosta.

El libro de texto seleccionado está conformado por ocho unidades, y cada unidad está organizada secuencialmente en cuatro partes:

PRIMERA PARTE: SECCIÓN INICIAL

- **Situaciones matemáticas en nuestro entorno:** se muestran imágenes y breves historias de situaciones de la vida real en la que se relaciona la matemática con las actividades de todo ser humano; además, se dan a conocer los aprendizajes esperados por los estudiantes.
- **¿Qué sabemos?:** se presentan ejercicios propuestos, que el estudiante deberá resolver previamente antes de comenzar la unidad, con la intención de que recuerde lo que ya aprendió con el texto del año anterior llamado *Matemática 1 secundaria* y, así, “active” los conocimientos previos y los “conecte” o los relacione con los nuevos conocimientos que se le brindarán en la unidad.

SEGUNDA PARTE: SECCIÓN CENTRAL

- **Presentación de los temas a desarrollar:** se redacta de forma resumida todo lo que contiene la unidad: títulos, subtítulos, etc.
- **Observa y analiza:** se presentan textos que complementan el tema en desarrollo.
- **Anota:** se presenta textos sobre el tema en desarrollo con la finalidad de ampliar los conocimientos.
- **Actividades para desarrollar capacidades matemáticas:** está compuesto de ejercicios propuestos de introducción a un tema para que sean desarrollados por los estudiantes de forma individual o grupal, y de diversos ejercicios propuestos para que sean desarrollados con ayuda del maestro.
- **Evaluación permanente:** está compuesto de ejercicios propuestos (llamada evaluación de proceso) para que sean desarrollados por los estudiantes y así ellos mismos puedan medir su nivel de aprendizaje.
- **Actividades para reforzar lo aprendido:** esta parte es llamada “para el cuaderno” y está compuesta de ejercicios propuestos para que el estudiante practique en casa.
- **Matemática en los medios/TIC:** se presentan textos cortos de diarios o revistas en los cuales se evidencia como la matemática es necesaria para comprender las noticias de la vida cotidiana. También se hace notar la manera cómo la tecnología puede ayudar a comprender mejor los procesos matemáticos.

- **Pruebas:** se presentan diversos ejercicios propuestos semejantes a ejercicios dados en exámenes de concursos nacionales e internacionales con la finalidad de que el estudiante se prepare para participar en alguno de ellos.
- **Organizador visual:** se presentan, a manera de resumen, todos los conocimientos desarrollados en la unidad.
- **Historia de la matemática:** se presentan infografías en las que se dan a conocer los aportes y el desarrollo de la matemática en el tiempo.

TERCERA PARTE: PROYECTOS DE APRENDIZAJES

Está compuesto por actividades relacionadas a situaciones cotidianas con la finalidad de que el estudiante ponga en práctica lo aprendido en la unidad.

CUARTA PARTE: EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN

- **Evaluación:** encabezada con el nombre “heteroevaluación”, está compuesta por ejercicios propuestos de tal manera que le permitan al estudiante medir si logró desarrollar las capacidades planteadas al inicio de la unidad.
- **Metacognición:** está compuesto por actividades que le permiten al estudiante reflexionar sobre su trabajo en el desarrollo de la unidad.

Los objetos matemáticos en estudio, función lineal y función afín, se encuentran en la unidad 2 llamada: “Funciones en mi vida diaria”, la cual está compuesta de dos temas:

El tema 1, llamado “función lineal” está dividido en cuatro subtítulos:

- i) Función lineal y función lineal afín.
- ii) Dominio y rango de una función lineal.
- iii) Modelos lineales.
- iv) Representación verbal, tabular y gráfica de las funciones lineales.

Así mismo, contiene dos ítems llamados: “para el cuaderno” y “evaluación / metacognición”;

El tema 2, llamado “proporcionalidad directa e inversa” consta cinco subtítulos:

- i) Proporcionalidad directa
- ii) Proporcionalidad inversa
- iii) Regla de tres simple

- iv) Regla de tres compuesta
- v) El porcentaje

y de cuatro ítems llamados “para el cuaderno”, “evaluación / metacognición”, “organizador visual” e “historia de la matemática”. Para nuestro trabajo presentamos la descripción del tema 1 en la unidad 2.

En la sección inicial de la unidad 2 se relatan las vivencias que tuvo un niño durante su viaje a Huaraz, donde, al notar el deshielo de los glaciares y recordar lo que le había mencionado su profesor, concluye que el calentamiento global está en función de la contaminación ambiental.

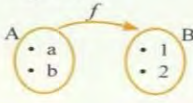
Luego se mencionan los aprendizajes esperados, entre los que se destacan:

- Determina el dominio y rango de una Función.
- Representa de diversas formas la dependencia funcional entre variables.
- Resuelve problemas de contexto real y matemático.

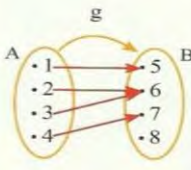
En la segunda parte de esta sección inicial, el libro de texto presenta, en la página 42, cinco ejercicios propuestos con el nombre “¿Qué sabemos?”. En esta parte, se proporcionan problemas en los que se aprecian ejercicios para recordar la definición de función, completar una tabla de valores y modelar problemas contextualizados. El objetivo de estas actividades es recordar los saberes previos de los estudiantes que son necesarios para este tema, los que mostramos en la figura 6:

Razonamiento y demostración

1. ¿Cuántas funciones diferentes se pueden definir teniendo A como conjunto de partida y B como conjunto de llegada?



2. Analiza el gráfico y determina el valor de verdad de la afirmación: "No es función, porque 6 es imagen de 2 y 3".



Comunicación matemática

3. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de nuevos soles recibidos y la cantidad de leche producida en el establo de don Luis en Jaén:

Completa el dato que falta y elabora un diagrama cartesiano con la información de la tabla.


Cantidad nuevos soles (S/.)	Cantidad de leche producida (en litros)
4	2
8	4
12	6
16	
18	

Resolución de problemas

4. La distancia de Lima a Trujillo es de 560 km. Si Carmen viaja en un ómnibus que va a 70 km por hora sin detenerse, a qué distancia se encontrará después de:

- 3 horas de iniciado el viaje.
- 5 horas de iniciado el viaje.

¿En cuántas horas llegará a Trujillo?



5. Hilda nos informa que para alimentar a una vaca utiliza 50 kg de pasto al día. ¿Cuántos kilogramos de pasto consumirán a diario 2 vacas, 3 vacas, 5 vacas, 32 vacas y n vacas?




Figura 6: Actividades para recordar saberes previos.

Fuente: Libro de texto de Matemática 2. (Perú, 2012, p.42)

El estudiante necesita recordar ciertas técnicas de resolución de problemas y manejo de conceptos y temas; por tal motivo, en la siguiente tabla presentamos los temas necesarios para la resolución de las actividades previas presentes en el libro de texto seleccionado.

Tabla 3. Actividades previas para el desarrollo de la unidad 2

Actividad previa	Temas necesarios para la resolución
Actividad 1	Producto cartesiano, relaciones, conjuntos, pares ordenados
Actividad 2	Definición de función, diagrama sagital
Actividad 3	Regla de tres simple, proporciones, graficar en el plano
Actividad 4	Tabulación, diagrama sagital, regla de tres simple
Actividad 5	Magnitudes, tabulación, inducción, modelización

Para la realización de estas actividades previas, el estudiante debe tomar en cuenta lo que aprendió el año anterior con el texto *Matemática 1 secundaria* de la editorial norma la cual en su unidad 5 llamada “Funciones y álgebra”, página 136, presenta los siguientes temas:

- Funciones: producto cartesiano, representación tabular y gráfica
- Proporcionalidad: relación directamente proporcional, regla de tres simple
- Ecuaciones: ecuación lineal, valor numérico de polinomios

Sobre estos temas el texto *Matemática 1 secundaria* presenta la técnica de la tabulación y la del reemplazo o valor numérico; también usa los diagramas sagitales y el plano cartesiano para el desarrollo de diversos ejercicios. Además, se usa la técnica de los patrones numéricos y la regla de tres simple para el desarrollo de problemas contextualizados. Si el estudiante recuerda estas técnicas para el desarrollo de las actividades propuestas anteriormente, estaría preparado para comenzar la unidad 2: “Funciones en mi vida diaria”.

Adicionalmente, el libro de texto *Matemática 2 secundaria* presenta una sección central que se inicia con los objetivos que se busca alcanzar en los estudiantes. También les proporciona herramientas para que puedan identificar y representar la correspondencia entre dos variables así como para poder interpretar lo que sucede cuando una de las variables aumenta o disminuye; además, se menciona que los ejercicios son redactados a partir de situaciones reales.

Ahora, nos centraremos en el objeto de estudio función lineal en el tema 1, que se presenta de forma explícita desde la página 43 hasta la página 54.

5.2 Descripción de la función lineal en el libro de texto *Matemática 2*

Esta OM se inicia con una pequeña lectura sobre la vida real, la cual genera un ejercicio grupal. De esta manera se introduce al estudiante en el tema de la función lineal. Veamos la figura 7:

EJERCICIO 1

Al estar en Trujillo, María y sus amigos acordaron reunirse en la puerta de ingreso a la ciudadela de Chan Chan. Si el costo de ingreso es de 5 nuevos soles por persona y algunos no confirmaron su participación, ¿cuánto les costará la visita a dicho lugar?



Completa la tabla y responde las preguntas.

Nro. de personas	1	2	3	4	5	6	n
Monto a pagar (S/.)	5(1)	5(2)	5(3)				
	5	10					

Identifiquen:

- ¿Qué sucede con el monto a pagar si el número de visitantes aumenta?
- ¿De qué depende que el monto a pagar se incremente?
- Indica el monto a pagar por el ingreso de 10, 50 y 100 turistas.

OBSERVA Y ANALIZA

Observa que el monto a pagar depende o está en función del número de turistas que visitan la ciudadela. Entonces, si “x” es el número de turistas e “y”, el monto a pagar; tendremos que el monto a pagar es igual al número de turistas multiplicado por 5: $y = 5x$.

Figura 7: Ejercicio propuesto de introducción a la función lineal.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.43)

Como se puede observar, el ejercicio propuesto, representado en lenguaje natural, es seguido de una tabla con algunos valores ya determinados a manera de “ayuda” para que el estudiante pueda dar con la solución de cada pregunta. Se concluye con su expresión algebraica respectiva $y = 5x$. A partir de este ejercicio como introducción se presenta la definición de la función lineal.

En la figura 8, presentamos la definición de función lineal

Una **función lineal** es aquella cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número diferente de cero que se llama constante de proporcionalidad. Una función lineal se llama también función de proporcionalidad directa.

Figura 8: Definición de función lineal.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.44)

A partir de la definición dada, podemos señalar que al coeficiente de la variable “x” se le da el nombre de constante de proporcionalidad y, por ello, a la función lineal también se le

denomina función de proporcionalidad directa. Luego de esto se presenta el “Ejemplo 1” en el cual se proporciona una función lineal en su representación algebraica y se solicita la representación geométrica así como el análisis de su gráfica respectiva.

Finalmente, en este subtítulo, el libro presenta una lista de ejercicios propuestos, siete en total, que pertenecen a función lineal que deberán ser desarrollados por los estudiantes junto con el docente. Estos son los ejercicios 2, 3, 5 y 6; los cuales detallamos a continuación.

- Ejercicios propuestos 2a y 2c del subtítulo 1: se pide reconocer la representación algebraica de una función lineal, dada una lista de cinco expresiones algebraicas, como se muestra en la figura 9:

2. Subraya las funciones lineales.

a. $y = 5x$ b. $y = 2x^2$ c. $y = \frac{1}{3}x$ d. $y = 4$ e. $y = x$


Figura 9: Ejercicio propuesto 2-subtítulo 1.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.45)

- Ejercicios propuestos 5 y 6 del subtítulo 1: se pide expresar en su representación algebraica un problema de la vida real dado en lenguaje natural y resolver otras preguntas que se desprenden de la modelización. A continuación, en la figura 10 presentamos el ejercicio propuesto 5.

5. Al estar de visita en Cajamarca, Carmen decidió comprar algunas humitas dulces. Si el precio de cada una es de S/. 2:

a. **Completa** la tabla.

Número de humitas	1	2	3	4	5
Costo en nuevos soles					



b. **Escribe** la regla de correspondencia de la función.
 c. **Indica** el tipo de función.
 d. **Halla** $f(10)$ y $f(20)$.
 e. Sabiendo que $f(x) = 24$, ¿cuántas humitas dulces podrá comprar con esa cantidad?

Figura 10: Ejercicio propuesto 5-subtítulo 1.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.45)

En el subtítulo 2, página 46, se presenta el dominio y el rango de una función lineal, presentando, primero, la definición de ambos términos y, luego, una gráfica en la que se

muestran dos conjuntos A y B y la relación funcional entre ambos, determinando que todos los elementos “x” del conjunto de partida A, son el dominio de la función f , expresado de esta manera: $\text{Dom}(f)=A$; y que el rango de la función f son todos los elementos “ $f(x)$ ” que le corresponde a “x” y que están contenidos en el conjunto B y se expresa de esta manera: $\text{Ran}(f) \subseteq B$. Veamos la siguiente figura:

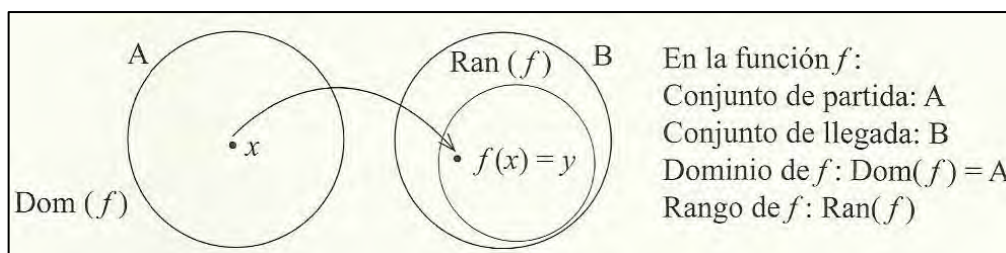


Figura 11: Gráfico sobre dominio y rango de una función.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.46)

Luego, el texto presenta el “ejemplo 2” en el que se pide determinar el dominio y rango de la función lineal a partir de la expresión algebraica $f(x) = 3x$ definida en \mathbb{Z} , mostrando la representación tabular, esto significa, darle valores a la variable x (cuatro valores en total) pertenecientes a \mathbb{Z} , y así obtener los correspondientes valores de $f(x) = y$. Se llega a la siguiente conclusión:

• Como a x se le puede asignar cualquier número entero, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{Z}$
 Los valores que toma $f(x)$ son los múltiplos de 3,
 $\text{Ran}(f) = \{y \in \mathbb{Z} / y \text{ es múltiplo de } 3\}$

Figura 12: Solución del ejemplo 2-dominio y rango.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.46)

Finalmente, en esta sección, el texto presenta una lista de ejercicios propuestos, ocho en total que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los que interesan a nuestra investigación son los que tratan el tema función lineal, es decir, los ejercicios propuestos 1 (dos primeros enunciados), 2a y 2c. Colocamos alguno de ellos en la figura 13.

- Ejercicio propuesto 2 del subtítulo 2: se pide determinar la representación algebraica de una función lineal a partir de un conjunto de pares ordenados o puntos.

2. Relaciona cada función con su respectiva regla de correspondencia.


a. $f = \{(1; 2); (2; 4); (3; 6)\}$	•	$y = 2x - 1$
b. $g = \{(1; 4); (2; 5); (3; 6); (4; 7)\}$	•	$y = -3x$
c. $h = \{(1; -3); (2; -6); (3; -9); (4; -12)\}$	•	$y = 2x$
d. $i = \{(-1; -3); (0; 1); (2; 9); (3; 13)\}$	•	$y = 4x + 1$
e. $j = \{(1; 1); (3; 5); (4; 7); (6; 11); (7; 13)\}$	•	$y = x + 3$

Figura 13: Ejercicio propuesto 2-subtítulo 2.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.47)

El subtítulo 3 página 48, titulado modelos lineales, se inicia con un ejercicio propuesto como introducción, llamado "Ejercicio 3" presentado en lenguaje natural, el cual debe ser resuelto en parejas. Veamos la figura 14:

EJERCICIO 3

Julia vende revistas sobre tecnología a S/. 3 cada una. Observa que si se vende 1 revista se obtiene un ingreso de S/. 3; si se vende 2, obtiene S/. 6; si se vende 3, obtiene S/. 9; si se vende 4, obtiene S/. 12.



Respondan.

- ¿Los pares de valores que se relacionan representan una función?
- ¿Esta relación es una función lineal o una función lineal afín?
- ¿Cuál es la regla de correspondencia de dicha función?
- ¿Cuál es dominio y el rango de la función?

Figura 14: Ejercicio propuesto 3-subtítulo 3.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.48)

El ejercicio anterior presenta cuatro preguntas, de las cuales 3b, 3c y 3d corresponden a función lineal.

A continuación, el libro presenta el "ejemplo 4", el cual muestra la modelización de un problema de la vida real dado en lenguaje natural a una representación algebraica. Obsérvese la figura 15:

Resolución

En vista que el campo a construir será de forma cuadrada, llamamos x a la medida de su lado. Sabemos que el perímetro (y) de un cuadrado es 4 veces la medida del lado. Entonces, el perímetro del campo deportivo será:

$$y = x + x + x + x.$$

$$y = 4x.$$

Donde: “ x ” es la variable independiente, “ y ” es la variable dependiente y 4 es la constante de proporcionalidad.

Se ha utilizado una función lineal para representar la situación propuesta. Se dice entonces que se tiene un modelo lineal.

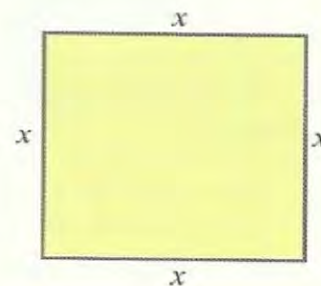


Figura 15: Ejemplo 4 modelización.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.48)

Así mismo, en esta sección, el libro presenta una lista de ejercicios propuestos, siete en total, que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los pertinentes para nuestra investigación sobre función lineal son: 1 (la segunda modalidad), 2, 3, y 7., los cuales presentamos a continuación.

- Ejercicio propuesto 1 del subtítulo 3: se pide modelar; es decir, representar en lenguaje algebraico un problema dado en lenguaje natural y compararlo con otra expresión también modelada bajo el mismo contexto del ejercicio, pero con diferente condición. Veamos la figura 16:

1. En un banco de libros, existen dos modalidades para el alquiler de textos:

- Si se desea ser socio, la inscripción es S/. 50 y el costo por texto es S/. 20.
 - Si no se es socio, el costo por texto es S/. 40.
- a. **Expresa** el costo total por el alquiler de textos con una regla de correspondencia para cada modalidad.
- b. **Determina** cuál de las dos modalidades es más conveniente para un cliente que desea visitar dicho banco de libros.



Figura 16: Ejercicio propuesto 1-subtítulo 3.


Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.49)

- Ejercicio propuesto 2 del subtítulo 3: en este ejercicio se pide hallar la representación algebraica y representación tabular de un problema contextualizado. Veamos la figura 17:

2. Por 13 alfajores trujillanos pagué S/. 32,50 y por 21 pagué S/. 52,50.

a. **Expresa** como una notación funcional $f(x)$ el costo de x alfajores.

b. Si deseo comprar 25, 30, 40 o 45 alfajores, ¿cuál será el costo en cada caso? **Organiza** los datos en una tabla.



Nro. de alfajores				
Costo total (x)				

Figura 17: Ejercicio propuesto 2-subtítulo 3.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.49)

- Ejercicio propuesto 3 del subtítulo 3: se pide hallar la representación algebraica de un problema dado en lenguaje natural, como podemos ver en la figura 18:

3. Si la distancia de Lima a Ica es 300 km y un auto sale de Lima con una velocidad constante de 50 km/h, **expresa** una función que denote la distancia que avanza el auto cada hora hasta que llegue a Ica.



Figura 18: Ejercicio propuesto 3-subtítulo 3.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.50)

Luego, en el ejercicio 7, el texto muestra una expresión algebraica de una función lineal y solicita verificar si corresponde al contexto presentado.

El subtítulo 4, página 50 el cual se titula “Representación verbal, tabular y gráfica de las funciones lineales” presenta inicialmente un ejercicio resuelto llamado “Ejemplo 6”, el cual consta de seis actividades desarrolladas. En su solución, se muestra el paso de la representación verbal a la representación algebraica así como a la representación tabular y, finalmente, la representación gráfica de una función lineal.

De la misma manera, en esta sección el texto presenta otra lista de ejercicios propuestos, seis en total en la página 52, que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los de función lineal son: 1, 3a, 3c, 4, 5b y 5d, los mismos que presentamos a continuación.

- Ejercicio propuesto 1 del subtítulo 4: requiere la resolución de tres preguntas, las cuales consisten en hallar la representación algebraica, la representación tabular y la representación gráfica a partir de un problema dado en lenguaje natural. Veamos la figura 19:

- 1.** Si de Lima a Trujillo hay una distancia de 560 km aproximadamente, ¿en cuánto tiempo llegará Mayté si sale de Lima a las 9:00 a. m. en un auto que avanza con una velocidad constante de 80 km por hora?
- Expresa** la notación funcional de la distancia en función del tiempo.
 - Realiza** la representación tabular con las magnitudes de distancia (km) y tiempo (horas).
 - Representa** gráficamente la función.

Figura 19: Ejercicio propuesto 1-subtítulo 4.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.52)

- Ejercicio propuesto 3 del subtítulo 4: consiste en representar gráficamente cada una de las representaciones algebraicas dadas. Corresponden a función lineal 3a y 3c, como podemos apreciar en la siguiente figura 20:

3. Representa gráficamente las funciones.

a. $f(x) = 6x$

b. $y = 2x - 5$

c. $f(x) = -5x$

d. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Figura 20: Ejercicio propuesto 3-subtítulo 4.

Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.52)

- Ejercicio propuesto 4 del subtítulo 4: consiste en resolver dos ítems, para ello primero se solicita que el estudiante realice la representación tabular, luego que halle la gráfica en función de los valores de la tabla y, finalmente, se le pide hallar la representación algebraica del problema dado en lenguaje natural. Veamos la figura 21:

4. El supermercado El Remate aumenta los precios de los artículos de la sección zapatos un 6%. **Designamos** por x el precio de un artículo antes del aumento y por y el precio del mismo artículo después de la subida. **Completa** la tabla:

No
escribir aquí

x	50		120		200
$y = f(x)$		106		159	

a. **Grafica** los puntos cuyas coordenadas x e y están indicadas en la tabla anterior.
 b. **Obtén** y en función de x .

Figura 21: Ejercicio propuesto 4-subtítulo 4.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.52)

- Ejercicio propuesto 5 del subtítulo 4: con respecto a función lineal identificamos dos ítems b y d, los cuales están expresados en forma algebraica con dominio restringido y se pide realizar la representación tabular de dichas expresiones según sus valores dados; y, por último, se pide determinar su dominio y rango en cada caso. Veamos la figura 22:

5. Sean las funciones:

- $f(x) = 5x - 6; x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 6$
- $f(x) = -4x; x \in \mathbb{Z}, -11 < x < 3$
- $f(x) = x + 1/2; x \in \mathbb{Z}, -9 < x < 2$
- $f(x) = 2x/5; x \in \mathbb{N}, x < 5$

Realiza la representación tabular de cada función y luego **indica** el dominio y el rango en cada caso.


Figura 22: Ejercicio propuesto 5-subtítulo 4.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.52)

Luego de estos cuatro subtítulos, el texto presenta los ítems denominados: para el cuaderno, página 53 y evaluación en las páginas 54 y 71. Sobre el primer ítem, el texto muestra una lista de ejercicios propuestos para que sean desarrollados por el estudiante en su cuaderno, sobre función lineal encontramos cinco ejercicios que corresponden a los números 1, 2, 3, 8 y 9. Dichos ejercicios los detallamos a continuación:

- Ejercicio propuesto 1 del ítem para el cuaderno: se pide completar una tabla con valores específicos tanto para la variable independiente como para la variable dependiente usando la expresión algebraica lineal dada. Veamos la figura 23:

PARA EL CUADERNO

1. Dada la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x$
 Donde x : número de alfajores
 $f(x)$: costo en nuevos soles



Completa las representaciones tabular.

x	8		24	
$f(x)$		8		15

Figura 23: Ejercicio propuesto 1- ítem para el cuaderno.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.53)

- Ejercicio propuesto 2 del ítem para el cuaderno: presenta un problema contextualizado, veamos la figura 24:

2. Un corredor de maratón ha avanzado 2,4 km en los 8 primeros minutos de su recorrido. Si mantiene la velocidad, ¿cuánto tardará en completar los 42 km del recorrido?

Figura 24: Ejercicio propuesto 2-ítem para el cuaderno.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.53)

- Ejercicio propuesto 3 del ítem para el cuaderno: se pide determinar el dominio y rango de una función lineal, dada en su representación algebraica y con un conjunto numérico definido para su variable independiente. Veamos la figura 25:

3. Si x es un número natural menor que 4, el dominio y rango de la función $f(x) = 3x$ es:

- Dom(f) = {1; 2; 3; 4} Ran(f) = {0; 3; 6; 9}
- Dom(f) = {1; 2; 3; 4} Ran(f) = {3; 6; 9; 12}
- Dom(f) = {0; 1; 2; 3} Ran(f) = {3; 4; 5; 6}
- Dom(f) = {0; 1; 2; 3} Ran(f) = {0; 3; 6; 9}
- Dom(f) = {1; 2; 3; 4} Ran(f) = {4; 5; 6; 7}

Figura 25: Ejercicio propuesto 3-ítem para el cuaderno.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.53)

Esta sección finaliza con un ejercicio propuesto que relaciona la matemática con las noticias periodísticas publicadas diariamente. La sección se denomina “matemática en los medios”, y, en este caso, el ejercicio consiste en hallar la representación algebraica con respecto a la longitud final de una seda de araña. Hemos identificado que dicha expresión corresponde a una función lineal. Veamos la figura 28:

The figure shows a worksheet titled "Matemática en los medios" (Mathematics in the media). On the left, there is a section titled "ciencia en breve" (science in brief) with the sub-heading "Investigan la seda de araña" (They investigate spider silk). The text in this section reads: "Investigadores españoles presentaron la estructura tridimensional de una de las proteínas que componen la seda de araña, que llega a estirarse en 135% de su longitud sin romperse." (Spanish researchers presented the three-dimensional structure of one of the proteins that make up spider silk, which can stretch up to 135% of its length without breaking.)

The main section of the worksheet is titled "Matemática en los medios" and contains the following text: "El trabajo coordinado entre la matemática y los medios de comunicación favorece la formación del estudiante, ya que lo acerca a una comprensión crítica de la realidad." (Coordinated work between mathematics and mass communication favors the formation of the student, as it brings him closer to a critical understanding of reality.)

Below this text, it says "Luego de leer la noticia:" (After reading the news:). A bullet point follows: "• Si llamamos x a la longitud de la fibra de seda" (• If we call x the length of the silk fiber).

To the right of this, there is another section of text: "mencionada de la telaraña, expresa como notación funcional la longitud que tendrá dicha fibra de seda luego de estirarse." (mentioned of the spider web, expressed as functional notation the length that said silk fiber will have after stretching.)

Below this text, there is another bullet point: "• ¿Qué tipo de función es dicha representación? Argumenta tu respuesta." (• What type of function is said representation? Argue your answer.)

At the bottom right of the worksheet, it says "Fuente: El Comercio (13 de mayo de 2010)" (Source: El Comercio (May 13, 2010)).

Figura 28: Ejercicio propuesto-matemática en los medios.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.54)

Sobre el segundo ítem, el libro de texto muestra una lista de ejercicios propuestos para que sean desarrollados por el estudiante, de tal manera que pueda medir sus aprendizajes sobre el tema. Este ítem está dividido en dos partes, y sobre función lineal tenemos:

- Evaluación en proceso (página 54): consta de cuatro ejercicios propuestos (1, 2, 3 y 4).
- Heteroevaluación (página 71): que consta de tres ejercicios propuestos (1, 2 y 5).

A continuación describimos estos ejercicios.

- Ejercicios propuestos 1 a 4 sobre evaluación en proceso: los ejercicios están dados en lenguaje natural y se pide determinar la regla de correspondencia; es decir, hallar su representación algebraica para luego obtener valores particulares sobre la misma. A manera de ejemplo, mostramos el ejercicio 1 y el ejercicio 2. En la siguiente figura 29 vemos el ejercicio 1:

EVALUACIÓN de proceso

1. El pie es una medida de longitud equivalente a 0,3048 metros.

- Determina** la regla de correspondencia de una medida de longitud en metros en función de su equivalente en pies.
- Para una longitud de 5, 10 y 15 pies, ¿cuál será su equivalente en metros?

Figura 29: Ejercicio propuesto 1-evaluación en proceso.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.54)

- Ejercicio propuesto 2 sobre evaluación en proceso: este ejercicio tiene dos condiciones, una que corresponde a una función lineal y otra que corresponde a una función afín, como vemos a continuación en la figura 30:

2. Para invitar a un concierto a sus amigos, Luis tiene dos posibilidades:

- Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de 150 nuevos soles y pagar las entradas a 60 nuevos soles cada una.
- Pagar cada entrada a 80 nuevos soles.

Sea n el número de invitados de Luis.

- Obtén** en función de n el precio a pagar en los dos casos.
- Finalmente, Luis se presenta al concierto con 7 amigos. ¿Qué solución le conviene adoptar?

Figura 30: Ejercicio propuesto 2-evaluación en proceso.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.54)

En este último ejercicio, luego de obtener la representación algebraica para ambos casos presentados, se pide comparar cuál de las dos expresiones algebraicas es conveniente según el contexto del problema. Con respecto al ejercicio 3, el libro de texto presenta una representación gráfica de una función lineal y pide hallar las representaciones en lenguaje natural y tabular; y, por último, en el ejercicio 4 se pide hallar la regla de correspondencia de una función lineal dado un problema en lenguaje natural.

Con respecto a los ejercicios propuestos en Heteroevaluación, en la página 71, tenemos:

- Ejercicio 1 sobre heteroevaluación: se pide determinar el dominio y rango de una función lineal dada en su expresión algebraica en la que, además, la variable independiente está definida en un campo numérico específico, en este caso el conjunto de los números naturales. Veamos la figura 31:

Heteroevaluación Copia los eje

Razonamiento y demostración

1. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números naturales.

a. $f(x) = x + 4$ c. $f(x) = 2x + 1$
 b. $f(x) = 2x$

Figura 31: Ejercicio propuesto 1-heteroevaluación.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.71)

- Ejercicio propuesto 2 sobre heteroevaluación: en este ejercicio se pide completar una tabla empleando la expresión algebraica dada; luego, se pide establecer la relación que existe entre las variables x e y. Veamos la figura 32:

2. Completa la tabla.

x	0	1	2	3
y = 4x				

Luego, **determina** el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

Figura 32: Ejercicio propuesto 2-heteroevaluación.
Fuente: Libro de texto de *Matemática 2*. (Perú, 2012, p.71)

- Ejercicio propuesto 5 sobre heteroevaluación: se muestran dos tablas completas con valores dados de un problema de la vida real, en la cual se pide determinar cuál de ellas representa a una función lineal y se debe argumentar la respuesta. Veamos la figura 33:

5. La tabla muestra lo que gasta Pedro cuando compra naranjas:

Cantidad de naranjas	1	2	3	4
Gasto (S/.)	2,5	5	7,5	10

En cambio, Ana gasta:

Cantidad de naranjas	1	2	3	4
Gasto (S/.)	1	4	9	16

¿Cuáles de los casos representa una función lineal? ¿Por qué?

Figura 33: Ejercicio propuesto 5- heteroevaluación.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.71)

Con respecto al ejercicio 5, podemos concluir que la primera tabla corresponde a la representación tabular de una función lineal.

La descripción de la función lineal nos va a permitir identificar y organizar las praxeologías presentes en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*.

5.3 Praxeologías de la función lineal en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*

A continuación, describimos las praxeologías, es decir, los tipos de tareas, las tareas correspondientes a cada tipo de tarea, técnicas y tecnologías sobre la función lineal en el libro de texto seleccionado.

Con respecto a la función lineal se han identificado 12 tipos de tareas. La presentación de las praxeologías se inicia con un tipo de tarea, luego se desarrollan las tareas correspondientes a ese tipo, se continúa con la presentación de cada una de las técnicas y las tecnologías, y, por último, se concluye con la teoría de la función lineal. Procedemos de la misma manera con cada tipo de tarea hasta concluir con todos los tipos de tareas identificados en el libro de texto. Por ello, consideramos las siguientes notaciones:

T_i : es el tipo de tarea i .

$t_{i,j}$: es la tarea j del tipo de tarea T_i

$\hat{O}_{i,j,k}$: es la técnica, donde i indica el tipo de tarea, j el número de tarea y k indica el número de técnica de la tarea correspondiente.

θ_m : es la tecnología.

Θ_n : es la teoría.

T_1 : **Identificar una función lineal.**

$t_{1,1}$: Dada una expresión algebraica, identificar si corresponde a una función lineal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 2a, 2c; pág. 71: 2b; pág. 54: ítem 1.

Técnica $\hat{O}_{1,1,1}$: consiste en

- Paso 1: Aplicar la definición de función lineal

El libro de texto muestra esta técnica en la página 44.

θ_1 : Definición de función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{1,2}$: Dado un problema contextualizado, identificar si su modelización corresponde a una función lineal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 5c, 6c; página 50; ejemplo 6^a. También en la página 48: ejercicio 3b.

Técnica $\hat{O}_{1,2,1}$: consiste en

- Paso 1: aplicar inducción matemática para generalizar una expresión algebraica, en este caso depende de una variable independiente (dada por el libro de texto en la página 51 ítem a).
- Paso 2: tener en cuenta la expresión algebraica y aplicar la técnica ($\hat{O}_{1,1,1}$) que consiste en aplicar la definición de función lineal.

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51, solución del ejemplo 6a.

θ_2 : Propiedades del principio de inducción

θ_1 : Definición de función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{1,3}$: Dada una representación gráfica, identificar si corresponde a una función lineal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 53: 9a.

Técnica $\hat{O}_{1,3,1}$: consiste en

- Paso 1: observar si la gráfica de la función dada pasa por el origen del sistema de coordenadas.

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51, en la indicación Anota- ítem 1.

θ_9 : Propiedades gráfico de una función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{1,4}$: Dada una representación tabular, identificar si corresponde a una función lineal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 71: 5b.

Técnica $\hat{O}_{1,4,1}$: consiste en

- Paso 1: observar en la tabla que la relación entre la variable independiente y la variable dependiente corresponde a un modelo lineal.

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51, solución del ejemplo 6e.

θ_1 : Definición de función lineal

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_2 : **Identificar la variable independiente.**

$t_{2,1}$: Dado un problema contextualizado de una función lineal, identificar la variable independiente.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 43: 1b.

Técnica $\hat{O}_{2,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar la variable independiente de acuerdo al contexto dado.

El libro de texto muestra esta técnica en la indicación llamada “Observa y analiza” en la página 43.

θ_1 : Definición de función lineal

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_3 : **Hallar el valor de la variable independiente de la función lineal.**

$t_{3,1}$: Dada la imagen de una función lineal, hallar el valor de la variable independiente.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 5e; página 51: ejercicio 6d.

Técnica $\hat{O}_{3,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: Se reemplaza el valor dado como imagen en la expresión $y=f(x)$.
- Paso 2: se resuelve la ecuación.
- Paso 3: identificar la variable independiente

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51 ejemplo 6d.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_4 : **Interpretar la variación de la variable dependiente.**

$t_{4,1}$: Dado un problema contextualizado de una función lineal, interpretar la variación de la variable dependiente.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 43: 1a.

Técnica $\hat{O}_{4,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: tomar en cuenta la noción de magnitudes proporcionales, si una magnitud aumenta en la misma proporción que otra, se dice que son directamente proporcionales.

El libro de texto muestra esta técnica en la página 43 en la indicación “Observa y analiza”.

θ_4 : Definición de proporcionalidad

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_5 : **Hallar la imagen de una función lineal.**

$t_{5,1}$: Dada la expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$ y un punto de la función, hallar su imagen para otro valor de x .

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 3a, 3b, 3c, 3d.

Técnica $\hat{O}_{5,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar el valor de x en la expresión algebraica
- Paso 2: resolver las operaciones aritméticas
- Paso 3: identificar la imagen

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51 ítem c.

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{5,2}$: Dado un problema contextualizado y un punto conocido de la función, hallar otro valor de la imagen en la función.

Esta tarea se presenta en el libro de texto página 51: ejercicio 6c; página 53: 2; página 54: 3b.

Técnica $\hat{O}_{5,2,1}$: consiste en:

Usamos el paso 1 de la técnica $\hat{O}_{1,2,1}$, luego la técnica $\hat{O}_{5,1,1}$

El libro de texto no muestra técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{5,3}$: Dado un problema contextualizado con valores conocidos para su variable independiente, hallar su imagen.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 43: ejercicio 1c; página 45: 5d.

Técnica $\hat{O}_{5,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar la variable independiente
- Paso 2: aplicar la técnica $\hat{O}_{5,2,1}$

El libro de texto no muestra técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{5,4}$: Dado un problema contextualizado, hallar el costo.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 43: ejercicio 1; página 49: 2b; página 54: 2b.

Técnica $\hat{O}_{5,4,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los valores de la variable independiente
- Paso 2: reemplazar los valores de la variable independiente según el contexto del problema dado
- Paso 3: resolver las operaciones aritméticas
- Paso 4: identificar el costo hallado para cada valor dado según el problema

El libro de texto muestra la técnica en la página 43 en la indicación “Observa y analiza”.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_6 : Hallar la constante de proporcionalidad.

$t_{6,1}$: Dado un problema contextualizado con su representación gráfica, hallar su constante de proporcionalidad.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 53: 9d.

Técnica $\hat{O}_{6,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar las coordenadas de los puntos dados en la tabla de valores, en su expresión $f(x) = mx$
- Paso 2: resolver la ecuación
- Paso 3: identificar la constante de proporcionalidad

El libro de texto no muestra la técnica $\hat{O}_{6,1,1}$, pero muestra otra técnica en la página 56 ejemplo 1.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_5 : Definición de proporcionalidad

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_7 : Determinar la regla de correspondencia de una función lineal

$t_{7,1}$: Dado un problema contextualizado de una función lineal, hallar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 6b; página 48: ejercicio 3c; página 48: ejemplo 4; página 49: 1a; página 50: 3; página 52: 1a; página 54: ejercicio propuesto ítems 1, 1a, 2a, 4.

Técnica $\hat{O}_{7,1,1}$: consiste en:

Se usa el paso 1 de la técnica $\hat{O}_{1,2,1}$.

El libro de texto muestra la técnica en la página 48 ejemplo 4.

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_2 : Propiedades del principio de inducción

θ_4 : Propiedades de los números reales

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{7,2}$: Dado un problema contextualizado y dos puntos de la función, hallar la regla de correspondencia de dicha función.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 49: 2a; página 53: 8.

Técnica $\hat{O}_{7,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar un punto dado en la expresión lineal $y = f(x) = mx$
- Paso 2: resolver la ecuación, donde se halla el valor del parámetro m
- Paso 3: reescribir la expresión original que es la regla de correspondencia pedida

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_1 : Definición de función lineal

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_4 : Propiedades de los números reales

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{7,3}$: Dado un conjunto de pares ordenados de una función lineal, hallar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 2a, 2c.

Técnica $\hat{O}_{7,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar el conjunto de partida y de llegada
- Paso 2: hallar valores particulares de la función
- Paso 3: identificar la regla de correspondencia

El libro de texto no muestra técnica.

- θ_1 : Definición de función lineal
- θ_3 :Definición de regla de correspondencia
- θ_4 : Propiedades de los números reales
- Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{7,4}$: Dado un problema contextualizado y la representación tabular de una función lineal, hallar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 5b; página 52: 4b.

Técnica $\hat{O}_{7,4,1}$: consiste en:

- Aplicar el Paso 1 de la técnica $\hat{O}_{7,2,1}$
- Luego el Paso 3 de la técnica $\hat{O}_{7,3,1}$

El libro de texto muestra la técnica en la página 43 en la indicación “Observa y anota”

- θ_3 :Definición de regla de correspondencia
- θ_4 : Propiedades de los números reales
- Θ_1 : Teoría de función lineal

T_8 : **Determinar el dominio y el rango.**

$t_{8,1}$:Dada la expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$ definida en un conjunto numérico, hallar su dominio y rango.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 46: ejemplo 2; página 48: ejercicio 3d; página 52: 5b; página 53: 3; página 71:1b.

Técnica $\hat{O}_{8,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar posibles valores de la variable independiente
- Paso 2: reemplazar todos los valores que toma la variable x en la expresión $y = mx$
- Paso 3: resolver las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 4: identificar el rango de la función

El libro de texto muestra la técnica en la página 46, ejemplo 2.

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_6 : Definición de dominio de una función lineal

θ_7 : Definición de rango de una función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{8,2}$: Dado un conjunto de pares ordenados, hallar su dominio y rango de la función lineal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 1a, 1b.

Técnica $\hat{O}_{8,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los valores de la variable independiente
- Paso 2: reescribir los valores identificados en el paso 1 como un conjunto
- Paso 3: identificar los valores de la variable dependiente
- Paso 4: reescribir los valores identificados en el paso 3 como un conjunto

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_6 : Definición de dominio de una función lineal

θ_7 : Definición de rango de una función lineal

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_9 : **Hallar la representación tabular de una función lineal.**

$t_{9,1}$: Dada una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$, hallar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 52: 5b, 5d; página 53: 1; página 71: 2.

Técnica $\hat{O}_{9,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: tomar valores arbitrarios para la variable x
- Paso 2: reemplazar los valores de x en la expresión $f(x) = mx$
- Paso 3: resolver las operaciones aritméticas
- Paso 4: identificar las imágenes respectivas

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_6 : Definición de dominio de una función lineal

θ_{12} : Definición de imagen de una función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{9,2}$: Dada la gráfica de una función lineal, hallar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 54: 3a.

Técnica $\hat{O}_{9,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los puntos de la gráfica de la función
- Paso 2: ubicar las coordenadas de los puntos en una tabla, teniendo en cuenta el orden de las abscisas y ordenadas.

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_6 : Definición de dominio de una función lineal

θ_7 : Definición de rango de una función lineal

θ_{12} : Definición de imagen de una función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{9,3}$: Dado un problema contextualizado de una función lineal, hallar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 43: ejercicio 1; página 45: 5a, 6a; página 49: 2b; página 51: ejemplo 6e; página 52: 1b, 4.

Técnica $\hat{O}_{9,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los valores de la variable independiente en el problema
- Paso 2: hallar la regla de correspondencia del problema de la forma $f(x) = mx$
- Paso 3: remplazar los valores de m y x según el problema
- Paso 4: realizar las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 5: hallar la imagen para cada valor de x

- Paso 6: construir una tabla donde se identifican los valores de x y de $f(x)$

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51 ejemplo 6e

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_6 : Definición de dominio de una función lineal

θ_{12} : Definición de imagen de una función lineal

θ_{10} : Definición de variable

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_{10} : **Graficar la función lineal.**

$t_{10,1}$: Dada una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$, hallar su representación gráfica.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 44: ejemplo 1; página 52: 3a, 3c.

Técnica $\hat{O}_{10,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar valores del dominio en la expresión algebraica de la función
- Paso 2: realizar operaciones aritméticas
- Paso 3: identificar los valores de y
- Paso 4: ubicar los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano XY

El libro de texto muestra esta técnica en la página 44 en el ejemplo 1a.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_8 : Definición de gráfico de una función

θ_9 : Propiedades de gráfico de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{10,2}$: Dada la representación tabular de una función lineal, hallar su representación gráfica.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 51: ejemplo 6f; página 52: 1c, 4a.

Técnica $\hat{O}_{10,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los pares ordenados dados en la tabla
- Paso 2: ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano XY
- Paso 3: unir los puntos que se encuentran en el plano cartesiano XY

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51 en el ejemplo 6f.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_8 : Definición de gráfico de una función

θ_9 : Propiedades de gráfico de una función

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_{11} : **Verificar que la expresión algebraica corresponde a una función lineal.**

$t_{11,1}$: Verificar si la expresión algebraica corresponde a la modelización de una función lineal

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 50: 7.

$\hat{O}_{11,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar el dominio de la expresión dada
- Paso 2: reemplazar valores particulares que pertenecen al dominio, en la expresión dada
- Paso 2: realizar las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 3: verificar que el dominio hallado corresponde a una función lineal

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_1 : Definición de función lineal

Θ_1 : Teoría de función lineal

T_{12} : **Dar la representación verbal de una función lineal.**

$t_{12,1}$: Dado un problema contextualizado y su expresión algebraica de la forma $f(x) = mx$ proporcionar su representación verbal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 51: ejemplo 6b.

Técnica $\hat{O}_{12,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reconocer como dos magnitudes a las variables x e y presentes en dicha expresión
- Paso 2: expresar en lenguaje natural que las dos magnitudes son directamente proporcionales para dicho problema

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51 en el ejemplo 6b.

θ_1 : Definición de función lineal

θ_5 : Propiedades de proporcionalidad

Θ_1 : Teoría de función lineal

$t_{12,2}$: Dada la representación gráfica de una función lineal, proporcionar su representación verbal.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 54: 3a.

Técnica $\hat{O}_{12,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar las coordenadas de los puntos en la gráfica dada
- Paso 2: identificar una relación directamente proporcional entre los valores de las abscisas y las ordenadas dadas
- Paso 3: expresar en lenguaje natural que los valores de las abscisas y de las ordenadas son directamente proporcionales

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_1 : Definición de función lineal

θ_5 : Propiedades de proporcionalidad

Θ_1 : Teoría de función lineal

5.4 Análisis de las praxeologías de la función lineal en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*

Para el análisis de la función lineal en este libro de texto, vamos a tomar en cuenta los elementos de nuestro marco teórico, los cuales son: tipos de tareas, tareas, técnicas y tecnologías así como también los indicadores de las Organizaciones Matemáticas Locales de Fonseca (2004).

Con respecto a los elementos de nuestro marco teórico:

En el libro de texto seleccionado, se han identificado 12 tipos de tareas, con 26 tareas, cada una de ellas relacionadas con una técnica, tecnología y teoría dadas. A continuación, presentamos la tabla 4, en la que se organizan los tipos de tareas y tareas resueltas y propuestas en el libro de texto.

Tabla 4. Praxeologías del libro de texto sobre función lineal.

Tipos de tareas (T_i) y tareas ($t_{i,j}$)	Total	Resueltos	Propuestos
$T_1: t_{1,1}(4), t_{1,2}(4), t_{1,3}(1), t_{1,4}(1)$	10	1	9
$T_2: t_{2,1}(1)$	1	0	1
$T_3: t_{3,1}(2)$	2	1	1
$T_4: t_{4,1}(1)$	1	0	1
$T_5: t_{5,1}(4), t_{5,2}(3), t_{5,3}(3), t_{5,4}(3)$	13	3	10
$T_6: t_{6,1}(1)$	1	0	1
$T_7: t_{7,1}(10), t_{7,2}(2), t_{7,3}(2), t_{7,4}(2)$	16	2	14
$T_8: t_{8,1}(6), t_{8,2}(2)$	8	2	6
$T_9: t_{9,1}(4), t_{9,2}(1), t_{9,3}(7)$	13	2	11
$T_{10}: t_{10,1}(3), t_{10,2}(3)$	6	2	4
$T_{11}: t_{11,1}(1)$	1	0	1
$T_{12}: t_{12,1}(1), t_{12,2}(1)$	2	1	1
Total	74	14	60

De acuerdo a la tabla anterior se puede observar que el número de ejercicios propuestos (60) es mayor al número de los resueltos (14). Solo ocho tipos de tareas contienen tareas resueltas, estas son: $T_1, T_3, T_5, T_7, T_8, T_9, T_{10}$ y T_{12} .

A continuación, presentamos la tabla 5, en la que se muestran las técnicas para la resolución de las tareas presentes en el libro de texto y las páginas donde se encuentra las mismas. También se proponen técnicas para las tareas que no las presentan en el libro de texto.

Tabla 5. Presencia de praxeologías en el libro de texto sobre función lineal.

Tipos de tareas (T_i) y tareas ($t_{i,j}$)		Presencia de Técnicas	Página en el libro de texto	Presencia de tecnologías
T_1 :	$t_{1,1}$	Sí	44	$\theta_1 : Sí$
	$t_{1,2}$	Sí	51	
	$t_{1,3}$	Sí	51	$\theta_2 : No$
	$t_{1,4}$	Sí	51	
T_2 :	$t_{2,1}$	Sí	43	$\theta_3 : No$
T_3 :	$t_{3,1}$	Sí	51	
T_4 :	$t_{4,1}$	Sí	43	$\theta_4 : No$
T_5 :	$t_{5,1}$	Sí	51	$\theta_5 : Sí$
	$t_{5,2}$	No	-	
	$t_{5,3}$	No	-	$\theta_6 : Sí$
	$t_{5,4}$	Sí	43	
T_6 :	$t_{6,1}$	Sí	56	$\theta_7 : Sí$
T_7 :	$t_{7,1}$	Sí	48	
	$t_{7,2}$	No	-	$\theta_8 : No$
	$t_{7,3}$	No	-	$\theta_9 : No$
	$t_{7,4}$	Sí	43	$\theta_{10} : Sí$
T_8 :	$t_{8,1}$	Sí	46	$\theta_{11} : No$
	$t_{8,2}$	No	-	$\theta_{12} : No$
T_9 :	$t_{9,1}$	No	-	
	$t_{9,2}$	No		
	$t_{9,3}$	Sí	51	

T ₁₀ :	t _{10,1}	Sí	44
	t _{10,2}	Sí	51
T ₁₁ :	t _{11,1}	No	-
T ₁₂ :	t _{12,1}	Sí	51
	t _{12,2}	No	-

De acuerdo a la tabla anterior se pueden observar 12 tipos de tareas, de las cuales se desprenden 25 tareas, se cuenta con la presencia de 16 técnicas distintas para los diferentes tipos de tareas y 12 tecnologías que se identificaron en el desarrollo de las técnicas. Asimismo, se muestra que para la resolución de algunas tareas propuestas el libro de texto matemáticas 2 no muestra técnica alguna como son: t_{5,2}, t_{5,3}, t_{7,2}, t_{8,2}, t_{9,1}, t_{9,2}, t_{11,1}, y t_{12,2}, lo cual supone una carencia de herramientas de resolución considerable para el estudiante. Además, se observa que en solo 4 páginas del libro de texto se pretende mostrar al estudiante todas las técnicas necesarias y suficientes como para que aprenda el objeto función lineal. Finalmente, el libro de texto muestra de forma explícita cinco de doce tecnologías empleadas en la OM.

Ahora bien, considerando los indicadores de Fonseca (2004) para el análisis del presente libro y con la intención de medir el grado de completitud de esta OM, se describe lo siguiente:

OML 1: El cual menciona que pueden haber distintas tareas, pero todas ellas se deben asociar a un mismo discurso tecnológico; al respecto, el texto presenta diversos ejercicios que están asociadas al mismo discurso tecnológico, esto significa que hacen referencia a las mismas técnicas de tabular, de reemplazar y de modelar, pero no muestra una comparación de técnicas para la solución de una misma tarea. También se nota la presencia de tareas aisladas, aquellas para las que el texto no muestra técnicas para su resolución y que, además, no se asemejan a otras, como el ejercicio 3 del subtítulo 1. Veamos:

- Ejercicio 3 del subtítulo 1: se muestra el ejercicio en lenguaje algebraico con parámetro “ m ” donde se pide reconocer y reemplazar valores para x y $f(x)$, luego de ello se debe resolver 4 ítems que se desprenden del ejercicio. Veamos la figura 34:

3. Si f es una función lineal de la forma $f(x) = mx$ tal que $f(3) = 6$, halla:
a. $f(5)$ b. $f(-11)$ c. $f(5) + f(-8)$ d. $f(-1) + f(1)$

Figura 34: Ejercicio 3- subtítulo 1.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.45)

El ejercicio anterior pertenece a la tarea T_5 y solo hay un solo ejercicio de este tipo, además, cabe resaltar que el libro de texto matemática 2 no presenta una tarea resuelta similar para que el estudiante se pueda guiar en su resolución.

OML 2: El cual menciona que existen distintas técnicas para una misma tarea; al respecto, el texto no presenta tareas con este tipo de criterio, ya que no muestra variedad de técnicas para una misma tarea, solo muestra una técnica para una misma tarea; por ejemplo, para graficar una función solo muestra la técnica de la tabulación, como puede observarse en los ejemplos 1 y 6 del libro de texto. A continuación mostramos uno de ellos, en la figura 35:

EJEMPLO 1

Grafica y analiza las siguientes relaciones definidas en el conjunto de los números racionales: a. $y = 2x$ b. $y = 2x - 4$

Resolución

a. La relación $y = 2x$ tiene la forma $y = mx$, luego es una función lineal con 2 de constante de proporcionalidad. Algunos pares de números que pertenecen a la función son:

Para: $x = -4, y = 2x = 2(-4) = -8 \rightarrow (-4; -8)$
 $x = -2, y = 2x = 2(-2) = -4 \rightarrow (-2; -4)$
 $x = 0, y = 2x = 2(0) = 0 \rightarrow (0; 0)$

Así $(-4; -8); (-2; -4); (0; 0); (2; 4); (4; 8)$ pertenecen a la función. Al graficarlos se observa que están alineados y que la recta que los contiene pasa por el origen del sistema de coordenadas.

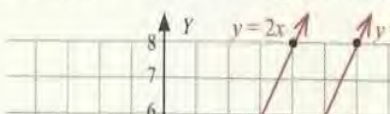


Figura 35: Ejemplo 1-función lineal.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.44)

Como se puede notar en la figura anterior, para realizar la gráfica de una función lineal expresada en forma algebraica solo se muestra una sola técnica para su resolución, que es la tabulación.

OML 3: El cual menciona que debe haber distintas representaciones para una misma actividad matemática; al respecto, el texto presenta tareas resueltas con este tipo de criterio, ya que se puede observar el uso de las cinco maneras de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, representación verbal, tabular y lenguaje gráfico; sin embargo, no se menciona cual es la representación más adecuada para un ejercicio específico. Una muestra de ello es el ejemplo 6 del texto, como puede observarse en la figura 36:

Tiempo (h)	x	1	2	3	4	5
Distancia (km)	$f(x)$	80(1)	80(2)	80(3)	80(4)	80(5)
		80	160	240	320	400

Representamos los pares ordenados de la función mediante una gráfica en el plano cartesiano.

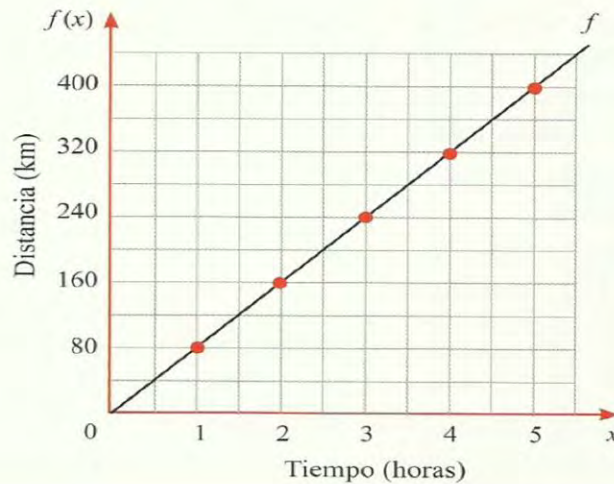


Figura 36: Ejemplo 6.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.51)

En el gráfico anterior se puede notar el uso de tres formas de representación: la tabular, que se desprende de la algebraica, y la representación gráfica.

OML 4: El cual menciona que debe haber distintas tareas y técnicas “inversas”; al respecto, el texto no presenta tareas resueltas considerando este criterio, por ende, tampoco técnicas, pero sí presenta dos tareas propuestas donde considera este indicador, pues generalmente se da el lenguaje natural para luego ser tabulado y graficado, pero ahora se da de manera “inversa” y lo podemos observar en las siguientes figuras:

- Ejercicio 7 del subtítulo 3: se pide crear una tarea redactada en lenguaje verbal a partir de una expresión algebraica dada, como se puede ver en la figura 37:

7. Dadas las funciones:

$$f(x) = 4x \text{ y } g(x) = x^2$$

Verifica con ejemplos que f relaciona la longitud del lado de un cuadrado con su perímetro y g relaciona la longitud del lado de un cuadrado con su área.

Figura 37: Ejercicio 7- subtítulo 3.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.50)

- Ejercicio 3 de la parte evaluación en proceso: Se proporciona una tarea de forma gráfica y se pide representarlo en su forma verbal y tabular para, luego, calcular un valor en particular.

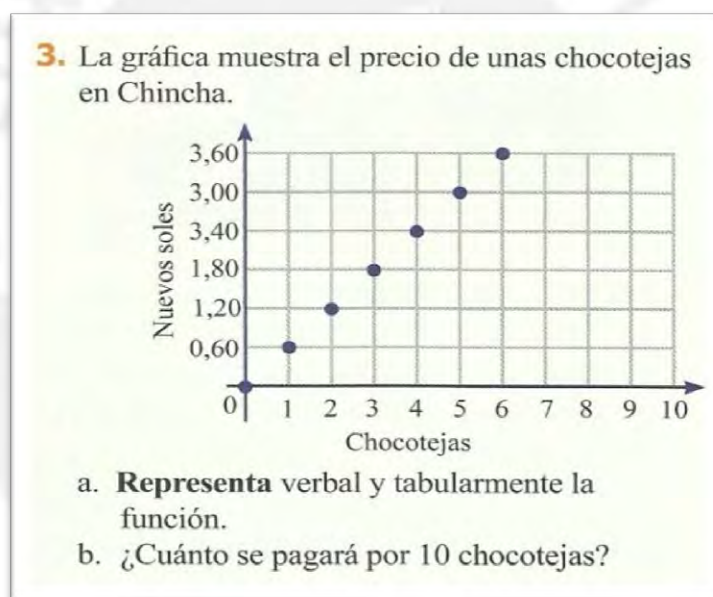


Figura 38: Ejercicio 3 de evaluación en proceso.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.54)

OML 5: El cual menciona que se debe elegir la mejor técnica para una tarea; al respecto, el texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador, ya que solo muestra una sola técnica para el desarrollo de una tarea. Esto puede observarse en los ejercicios 1, 4.

OML 6: El cual menciona que se deben trabajar con tareas “abiertas” o aquellas que lleven a la modelización de ejercicios dados en lenguaje natural al matemático; al respecto, el texto presenta 15 ejercicios propuestos y 2 ejercicios resueltos con este criterio cabe resaltar que

más de la mitad de todos sus ejercicios resueltos y propuestos cumplen con las descripciones de este indicador. A continuación, mostramos como ejemplo uno de ellos:

- Ejercicio 6 del primer subtítulo: se pide deducir la forma algebraica dado el lenguaje natural de una situación problemática de la vida real. Veamos la figura 39:

6. Si por 5 kg de aguaymanto pagué S/. 7,50, ¿cuánto pagaré por 1, 2 o 3 kg de dicha fruta?

a. **Organiza** la información en una tabla.

b. **Define** la regla de correspondencia que expresa la función.

c. **Señala** si se trata de una función lineal o una función lineal afín.




Figura 39: Ejercicio 6-primer subtítulo.


Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.45)

De lo anterior, podemos afirmar que el libro de texto seleccionado sobre función lineal solo cumple con cuatro de los siete indicadores para el grado de completitud de su OML; por tal motivo, podemos concluir que la organización matemática del texto *Matemática 2 secundaria* está parcialmente completa.

5.5 Descripción de la función afín en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*

En el libro de texto *Matemática 2 Secundaria* se presenta a la función afín bajo la denominación de función lineal afín. Nosotros la llamaremos función afín en nuestro trabajo, tomando en cuenta las definiciones dadas en la sección 3.1.2 en el capítulo III.

El libro de texto se inicia con un ejercicio propuesto en la página 44, expresado en lenguaje natural. El libro de texto propone que debe ser resuelto por el estudiante de manera individual. Veamos la figura 40:

Individual 

EJERCICIO 2

El costo del ingreso a una feria es de 3 nuevos soles y el costo de la entrada a cada juego mecánico es de 4 nuevos soles. Si represento con “ x ” al número de juegos a los que se desea subir e “ y ” al dinero que gastaré en la feria, entonces ¿cuál es la representación simbólica de la relación de “ x ” con “ y ”?

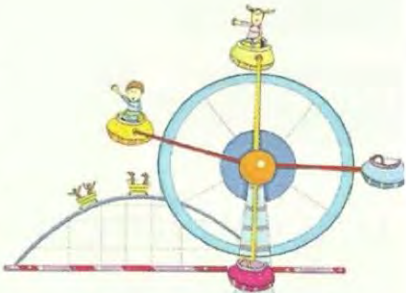


Figura 40: Ejercicio propuesto de introducción a la función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.44)

A partir de este problema, como introducción al tema, se da el primer subtítulo que se refiere a la definición de la función afín, como podemos ver en la figura 41:

Una **función lineal afín** es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x) = mx + b$, donde m y b son números racionales diferentes de cero.

Figura 41: Definición de función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.44)

Luego, en la página 44, se presenta un ejercicio resuelto llamado Ejemplo 1 en el que podemos identificar a la función afín en el inciso b, de la forma $y = 2x - 4$. En este ejemplo se presenta su representación geométrica y también se analiza la representación gráfica de dicha función.

Finalmente, en este primer subtítulo, el libro de texto, en la página 45, presenta una lista de siete ejercicios propuestos que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Identificamos a la función afín en los ejercicios cuyos números son: 1, 4 y 7., los cuales presentamos a continuación.

- Ejercicio propuesto 1 del primer subtítulo: se pide relacionar de manera coherente, según la definición brindada, la representación algebraica de la función afín de la forma $y = ax + b$, con las condiciones dadas para sus parámetros a y b . Veamos la figura 42:

Con ayuda del maestro

$$4 + 4 = 8$$

1. En la expresión $y = ax + b$, **analiza** y **subraya** las afirmaciones verdaderas.
 - a. Si $a \neq b$ y $b = 0$, la expresión representa a una función lineal afín.
 - b. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, la expresión representa a una función lineal afín.
 - c. Si $a = 0$ y $b = 0$, la expresión representa a una función lineal.
 - d. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, la expresión representa a una función lineal.

Figura 42: Ejercicio propuesto 1-subtítulo 1 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.45)

- Ejercicio propuesto 4 del primer subtítulo: se pide hallar la regla de correspondencia y completar la tabla de valores de un problema dado en lenguaje natural, previamente se presenta una tabla con algunos datos. Veamos la figura 43:

4. Un electricista cobra 15 nuevos soles por la visita a domicilio y 25 nuevos soles por cada hora de trabajo.
 - a. **Completa** la siguiente tabla de valores.
 - b. **Escribe** la regla de correspondencia.
 - c. **Indica** el tipo de función.
 - d. ¿Cuánto cobrará el electricista si llega a un domicilio a las 11:00 a. m. y se retira a las 8:00 p. m.?

Número de horas	1	2	3	4	5
Nuevos soles	40				

Figura 43: Ejercicio propuesto 4-subtítulo 1 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.45)

- Ejercicio propuesto 7 del primer subtítulo 1: se pide completar una tabla de valores y hallar la imagen de valores específicos dados en el problema. Veamos la figura 44:

7. Si una función lineal afín está representada en la tabla:

- a. **Completa** los valores que faltan en la tabla.
- b. **Halla** $f(-18)$ y $f(21)$.

x	4	6		10	12	14
$f(x)$	9		17			29

Figura 44: Ejercicio propuesto 7-subtítulo 1 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.45)

En el subtítulo, 2 página 46, el libro de texto presenta el dominio y rango de una función; luego presenta un ejercicio resuelto sobre función afín, llamado ejemplo 3, el cual parte de un problema dado en lenguaje natural. Se pide determinar su regla de correspondencia para posteriormente determinar el dominio y rango. Veamos la figura 45:

EJEMPLO 3

La tarifa de un gasfitero por trabajo a domicilio es S/. 5 la consulta y S/. 12 por cada hora de trabajo (si hay una fracción de hora trabajada, será considerada como 1 hora completa). **Determina** la regla de correspondencia, el dominio y el rango de la función.

Resolución

Si llamamos x a las horas de trabajo y $f(x)$ al monto total que se cobrará, tendremos la regla de correspondencia de la función lineal afín:
 $f(x) = 12x + 5$.

El dominio es el número de horas que trabaja el gasfitero, es decir:
 $\text{Dom}(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$

El rango es lo que cobrará el gasfitero por el trabajo:

• $x = 0 \Rightarrow f(0) = 12(0) + 5 = 5$	• $x = 3 \Rightarrow f(3) = 12(3) + 5 = 41$
• $x = 1 \Rightarrow f(1) = 12(1) + 5 = 17$	• $x = 4 \Rightarrow f(4) = 12(4) + 5 = 53$
• $x = 2 \Rightarrow f(2) = 12(2) + 5 = 29$	• $x = 5 \Rightarrow f(5) = 12(5) + 5 = 65$

Luego, el $\text{Ran}(f) = \{5; 17; 29; 41; 53; 65; \dots\}$.




Figura 45: Ejemplo 3-subtítulo 1 dominio y rango de la función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.46)

Finalmente, en esta sección, el libro de texto presenta una lista de ejercicios propuestos, ocho en total, que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los más interesantes, en la medida en que tratan sobre función afín, son los ejercicios 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, los cuales presentamos a continuación:

- Ejercicio propuesto 2 del subtítulo 2: se pide relacionar cada función afín con su respectiva regla de correspondencia, donde las funciones están dadas como un conjunto de pares ordenados. Veamos la figura 46:

2. Relaciona cada función con su respectiva regla de correspondencia.

a. $f = \{(1; 2); (2; 4); (3; 6)\}$	•	• $y = 2x - 1$
b. $g = \{(1; 4); (2; 5); (3; 6); (4; 7)\}$	•	• $y = -3x$
c. $h = \{(1; -3); (2; -6); (3; -9); (4; -12)\}$	•	• $y = 2x$
d. $i = \{(-1; -3); (0; 1); (2; 9); (3; 13)\}$	•	• $y = 4x + 1$
e. $j = \{(1; 1); (3; 5); (4; 7); (6; 11); (7; 13)\}$	•	• $y = x + 3$

Figura 46: Ejercicio propuesto 2-subtítulo 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

- Ejercicio propuesto 3 del subtítulo 2: se pide determinar el dominio y rango para cada una de las cuatro expresiones propuestas. Veamos la figura 47:

3. Dados los conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$ y $B = \{1; 3; 4; 5; 7; 9\}$, **determina** por extensión el dominio y el rango de las siguientes funciones:

$f_1 = \{(1; 3); (2; 4); (3; 5)\}$	$f_3 = \{(a; b) \in A \times B / b = a + 2\}$
$f_2 = \{(a; b) \in A \times B / b = 2a + 1\}$	$f_4 = \{(a; b) \in A \times B / b = 2a - 1\}$

Figura 47: Ejercicio propuesto 3-subtítulo 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

- Ejercicios propuestos 4 y 5 del subtítulo 2: se pide completar una tabla de valores dada la expresión algebraica, para luego determinar el dominio y rango de la función afín respectiva. Veamos el ejercicio 5 en la figura 48:

5. Sea la función $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$. **Completa** la tabla y **señala** el dominio y el rango

x	-4	-2	2	4	6
$f(x)$			-11/5		




Figura 48: Ejercicio propuesto 5-subtítulo 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

- Ejercicios propuestos 7 y 8 del subtítulo 2: se pide la representación algebraica de un problema en lenguaje natural para luego determinar el dominio y rango. Veamos el ejercicio 7 en la figura 49:

7. En tu disco duro actualmente hay 120 canciones grabadas. Este número está creciendo en 4 canciones a la semana.
- Expresa el número de canciones en función del tiempo.
 - Determina el dominio y el rango de la función.
 - ¿Al cabo de cuántas semanas tendrá 152 canciones?



Figura 49: Ejercicio propuesto 7-subtítulo 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

El subtítulo 3 trata sobre modelos lineales. En este, luego de definir lo que es modelización, el libro de texto presenta un ejercicio resuelto llamado ejemplo 5, en el que, a partir de un problema de la vida real, se pide determinar una representación algebraica: a ello le llama modelización. Se muestran, además, técnicas para modelar y para graficar una función afín. Veamos la figura 50:

EJEMPLO 5

En el valle de Áncash se ha observado que, en las 10 primeras semanas de cultivo de una planta que medía 2 cm, su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, pues en la primera semana ha pasado a medir 2,5 cm.

Denota una función que exprese la altura de la planta en función del tiempo y **representala** gráficamente.

Resolución

- La altura inicial de la planta es 2 cm.
 El crecimiento en la primera semana ha sido $2,5 - 2 = 0,5$.
 Según la información, el crecimiento es directamente proporcional al tiempo.
 Es decir, la altura de la planta está en función del tiempo.
 Si llamamos x al tiempo expresado en semanas e y a la altura que alcanza la planta, obtenemos la función: $y = 0,5x + 2$.
- Para representar gráficamente la función, determinamos algunos pares ordenados.

$x = 0 \Rightarrow y = 0,5(0) + 2 = 2$	entonces	(0; 2)
$x = 2 \Rightarrow y = 0,5(2) + 2 = 3$	entonces	(2; 3)
$x = 4 \Rightarrow y = 0,5(4) + 2 = 4$	entonces	(4; 4)
$x = 6 \Rightarrow y = 0,5(6) + 2 = 5$	entonces	(6; 5)
$x = 8 \Rightarrow y = 0,5(8) + 2 = 6$	entonces	(8; 6)
$x = 10 \Rightarrow y = 0,5(10) + 2 = 7$	entonces	(10; 7)

Figura 50: Ejemplo 5-subtítulo 3 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.49)

Finalmente, en la página 49, el libro de texto presenta una lista de siete ejercicios propuestos, que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los que tratan sobre función afín son los ejercicios, los cuales presentamos a continuación.

- Ejercicio propuesto 1 del subtítulo 3: se pide la regla de correspondencia de un problema dado en lenguaje natural y se debe comparar con otra expresión algebraica e indicar si corresponde al problema dado. Veamos la figura 51:

1. En un banco de libros, existen dos modalidades para el alquiler de textos:

- Si se desea ser socio, la inscripción es S/. 50 y el costo por texto es S/. 20.
- Si no se es socio, el costo por texto es S/. 40.

a. **Expresa** el costo total por el alquiler de textos con una regla de correspondencia para cada modalidad.

b. **Determina** cuál de las dos modalidades es más conveniente para un cliente que desea visitar dicho banco de libros.




Figura 51: Ejercicio propuesto 1-subtítulo 3 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.49)

- Ejercicio propuesto 5 del subtítulo 3: se pide expresar la regla de correspondencia de un problema contextualizado dado en representación tabular con valores ya determinados. Veamos la figura 52:

5. Investigaciones científicas han demostrado que la frecuencia de los chirridos de los grillos es una función lineal afín a la temperatura ambiental.

Grados Fahrenheit	x	45	46	47	48	49
Chirridos por minuto	$f(x)$	20				36

a. **Expresa** la regla de correspondencia de la función.

b. **Completa** la tabla.

c. A 50 grados Fahrenheit, ¿cuántos chirridos por minuto emitirá un grillo?




Figura 52: Ejercicio propuesto 5- subtítulo 3 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.50)

- Ejercicio propuesto 6 del subtítulo 3: se pide identificar las variables dependiente e independiente de un problema dado en lenguaje natural para, así, obtener su representación algebraica y, finalmente, calcular un valor específico. Veamos la figura 53:

- 6.** En una fábrica de productos lácteos en Cajamarca, el costo variable por unidad al producir un litro de yogur es 4 nuevos soles y el costo fijo mensual es 2800 nuevos soles. Suponiendo que el costo total tiene un comportamiento lineal:
- Representa** una función que describa la situación planteada como una regla de correspondencia.
 - Identifica** las variables dependiente e independiente.
 - ¿Cuál será el costo que representará para la empresa la producción de 200 litros de yogur?

Figura 53: Ejercicio propuesto 6- subtítulo 3 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.50)

En el subtítulo 4, página 50, con título “Representación verbal, tabular y gráfica de las funciones lineales” se presentan seis ejercicios propuestos que deberán resolver los estudiantes con ayuda del maestro. Los que tratan el tema de función afín son los ejercicios: 2, 3, 5 y 6, los cuales presentamos a continuación.

- Ejercicio propuesto 2 del subtítulo 4: se pide identificar, de una lista de cuatro representaciones gráficas, cuál o cuáles representan una función afín. Veamos la figura 54:

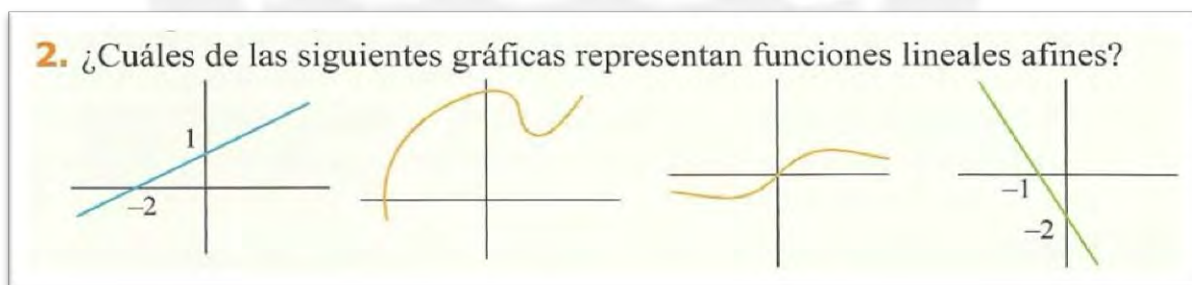


Figura 54: Ejercicio propuesto 2-subtítulo 4 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.52)

- Ejercicio 3 del subtítulo 4: se pide graficar las funciones dadas en su expresión algebraica, dos de las cuales son funciones afines. Veamos la figura 55:

3. Representa gráficamente las funciones.

a. $f(x) = 6x$

b. $y = 2x - 5$

c. $f(x) = -5x$

d. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Figura 55: Ejercicio 3-subtítulo 4 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.52)

- Ejercicio propuesto 5 del subtítulo 4: consiste en desarrollar dos problemas sobre función afín 5a y 5c, en los cuales se pide la representación tabular de dichos expresiones algebraicas y, además, determinar su dominio y rango. Veamos la figura 56:

5. Sean las funciones:

- $f(x) = 5x - 6; x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 6$
- $f(x) = -4x; x \in \mathbb{Z}, -11 < x < 3$
- $f(x) = x + 1/2; x \in \mathbb{Z}, -9 < x < 2$
- $f(x) = 2x/5; x \in \mathbb{N}, x < 5$

Realiza la representación tabular de cada función y luego **indica** el dominio y el rango en cada caso.

Figura 56: Ejercicio propuesto 5-subtítulo 4 función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.52)

Por otra parte, la sección que se titula “Para el cuaderno” consta de cuatro ejercicios propuestos sobre función afín cuyos números son 4, 6, 7 y 9. La finalidad es que el estudiante ponga en práctica lo que ha aprendido en clase sobre función afín. Dichos ejercicios se detallan a continuación:

- Ejercicio propuesto 4: se pide determinar el dominio de una función afín dada su expresión algebraica, partiendo de su rango, esto es, de valores que toma $f(x)$. Veamos la figura 57:

4. El rango de la función lineal afín $f(x) = 5x - 3$ es $\{37; 62; 77; 102\}$. **Halla** su dominio.

Figura 57: Ejercicio propuesto 4-sección para el cuaderno función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.53)

- Ejercicio propuesto 7: se pide determinar la expresión algebraica de la función afín, conociendo un par de puntos de la función. Veamos la figura 58:

7. Sean $M(7; 11)$ y $N(13; 23)$ puntos de una función lineal afín. ¿Cuál de las siguientes relaciones es su ley de correspondencia?
- a. $f(x) = 2x + 3$ c. $f(x) = 3x - 10$ e. $f(x) = 3x + 10$
 b. $f(x) = x + 4$ d. $f(x) = 2x - 3$

Figura 58: Ejercicio propuesto 7-sección para el cuaderno función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.53)

- Ejercicio propuesto 9: consiste en modelar un problema de la vida real en dos situaciones una de las cuales consiste en una función afín (Transportista B), luego se pide la representación gráfica y se compara con la función lineal. Veamos la figura 59:

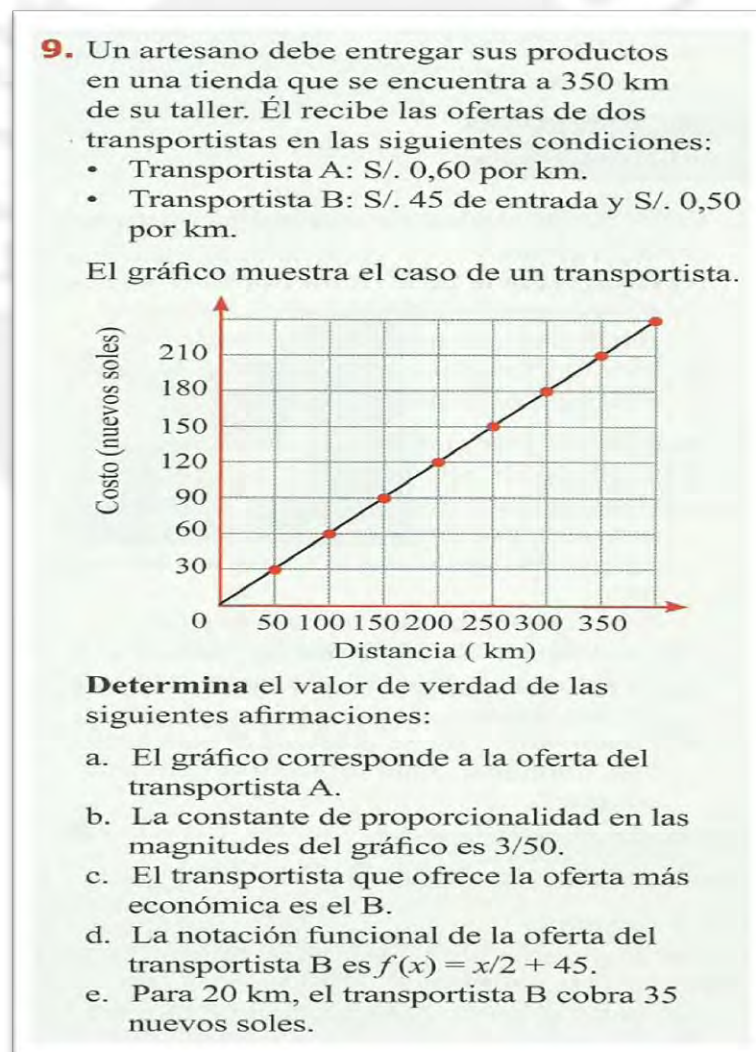


Figura 59: Ejercicio propuesto 9-sección para el cuaderno función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.53)

En la sección que se titula “Evaluación”, en la página 54, se presentan ejercicios propuestos de evaluación. Dicha sección está dividido en dos partes: i) Evaluación en proceso, la cual consta de un ejercicio sobre función afín: ejercicio propuesto 2; y ii) Heteroevaluación, la cual presenta dos ejercicios sobre función afín: ejercicios propuestos 1 y 4. A continuación, veamos los ejercicios propuestos en Evaluación en proceso:

- Ejercicio propuesto 2: consiste en modelar dos problemas de la vida real (uno de ellas es función afín) para, luego, compararlos. Veamos la figura 60:

2. Para invitar a un concierto a sus amigos, Luis tiene dos posibilidades:

- Hacerse socio del club organizador del concierto por un valor de 150 nuevos soles y pagar las entradas a 60 nuevos soles cada una.
- Pagar cada entrada a 80 nuevos soles.

Sea n el número de invitados de Luis.

- Obtén** en función de n el precio a pagar en los dos casos.
- Finalmente, Luis se presenta al concierto con 7 amigos. ¿Qué solución le conviene adoptar?

Figura 60: Ejercicio propuesto 2-sección evaluación función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.54)

Con respecto a los ejercicios en Heteroevaluación, tenemos:

- Ejercicio propuesto 1 sobre heteroevaluación: consta de dos problemas sobre función afín en los que se debe determinar el dominio y rango de la función afín dada en representación algebraica. Veamos la figura 61:

Heteroevaluación Copia los eje

Razonamiento y demostración

1. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones definidas en el conjunto de los números naturales.

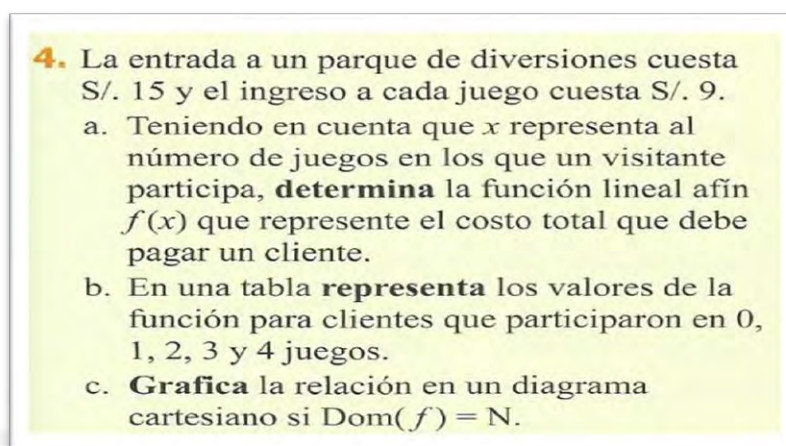
- $f(x) = x + 4$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 2x + 1$

Figura 61: Ejercicio propuesto 1-sección evaluación función afín.

Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.71)

Finalmente, en la página 71, los autores presentan otra sección de Heteroevaluación, con ejercicios propuestos entre los que podemos identificar la función afín en los ejercicios 1 y 4 A continuación los presentamos en detalle:

- Ejercicio propuesto 4 de heteroevaluación: se pide modelar un problema de la vida real, hallar su representación tabular con valores específicos y, finalmente, graficar dicha función afín. Veamos la figura 62:



4. La entrada a un parque de diversiones cuesta S/. 15 y el ingreso a cada juego cuesta S/. 9.

- Teniendo en cuenta que x representa al número de juegos en los que un visitante participa, **determina** la función lineal afín $f(x)$ que represente el costo total que debe pagar un cliente.
- En una tabla **representa** los valores de la función para clientes que participaron en 0, 1, 2, 3 y 4 juegos.
- Grafica** la relación en un diagrama cartesiano si $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$.

Figura 62: Ejercicio propuesto 4-heteroevaluación función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.71)

5.6 Praxeologías de la función afín en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*

A continuación, describimos las praxeologías; es decir, tipos de tareas, las tareas correspondientes a cada tipo, técnicas y tecnologías sobre la función afín en el libro de texto seleccionado.

Con respecto a la función afín, se han identificado 10 tipos de tareas. La presentación de las praxeologías se inicia con un tipo de tarea, luego se presentan las tareas correspondientes a ese tipo se continúa con cada una de las técnicas y las tecnologías y, por último, se concluye con la teoría de la función afín. Este proceso ocurre en todos los casos; por ello, presentamos otro tipo de tarea, con sus tareas correspondientes, y continuamos el mismo procedimiento hasta concluir con todos los tipos de tareas identificados en el libro de texto.

Para ello, consideramos las siguientes notaciones:

T_i : es el tipo de tarea i .

$t_{i,j}$: es la tarea j del tipo de tarea T_i

$\hat{O}_{i,j,k}$: es la técnica; donde i indica el tipo de tarea, j el número de tarea y k indica el número de técnica de la tarea correspondiente.

θ_m : es la tecnología.

Θ_n : es la teoría.

T₁: Identificar una función afín.

t_{1,1}: Dado un problema contextualizado, identificar si corresponde a una función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 4c; página 50: 4.

Técnica $\hat{O}_{1,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los datos con valores constantes y valores variables del problema dado
- Paso 2: establecer una regla de correspondencia de la forma $f(x) = mx + b$
- Paso 3: identificar que la expresión obtenida corresponde a una función afín

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_2 : Propiedades de los números reales

θ_1 : Definición de función afín

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{1,2}: Dada una representación algebraica de la forma $f(x) = mx + b$ y condiciones para sus parámetros m y b , identificar si corresponde a una función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 1d.

Técnica $\hat{O}_{1,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: dar valores particulares para m y b , según las condiciones dadas
- Paso 2: identificar si la expresión corresponde a una función afín

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_2 : Propiedades de los números reales

θ_1 : Definición de función afín

Θ_1 : Teoría de función afín

$t_{1,3}$: Dada una representación gráfica, identificar si corresponde a una función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 52: 2a, 2d.

Técnica $\hat{O}_{1,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: observar si la recta cruza al eje Y en el punto $(0,b)$, con $b \neq 0$.

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51, en la indicación “Anota- ítem 2”.

θ_8 : Definición de gráfico de una función

θ_9 : Propiedades gráfico de una función afín

Θ_1 : Teoría de función afín

T₂: Identificar la variable independiente y variable dependiente.

$t_{2,1}$: Dada una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx + b$, identificar las variables dependiente e independiente.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 50: 6b.

Técnica $\hat{O}_{2,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los valores de la variable independiente x en la expresión dada
- Paso 2: realizar operaciones aritméticas necesarias
- Paso 3: identificar los valores de la variable dependiente

El libro de texto muestra esta técnica en la página 45, en la indicación “Anota”.

θ_2 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función afín

T₃: Hallar el valor de la variable independiente de una función afín.

t_{3,1}: Dada la imagen de una función afín, hallar el valor de la variable independiente empleando la expresión $f(x) = mx + b$

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 7c.

Técnica $\hat{O}_{3,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar el valor dado en la expresión $y = f(x) = mx + b$
- Paso 2: resolver la ecuación
- Paso 3: identificar el valor de la variable independiente

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51-ejemplo 6d.

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función afín

T₄: Hallar la imagen de una función afín.

t_{4,1}: Dada la expresión algebraica de la forma $f(x) = mx + b$ y un valor particular de la variable independiente, hallar la imagen de la función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 4d; página 47: 8c; página 53: 9e.

Técnica $\hat{O}_{4,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar el valor de la variable independiente en la expresión algebraica dada
- Paso 2: resolver las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 3: identificar la imagen

El libro de texto muestra esta técnica en la página 51-ejemplo 6c.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{4,2}: Dada una representación tabular con valores para su variable independiente, hallar su imagen.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 7b; página 50: 5c.

Técnica $\hat{O}_{4,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: determinar la regla de correspondencia
- Paso 2: reemplazar los valores de la variable independiente en la expresión algebraica
- Paso 3: realizar las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 4: identificar el valor de la imagen

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

T₅: Dada la representación algebraica de la forma $f(x) = mx + b$, hallar los parámetros “m” y “b”.

t_{5,1}: Dado un par de puntos definidos en la expresión $f(x) = mx + b$, hallar los parámetros m y b .

Esta tarea se presenta en el libro de texto página 53: 6.

Técnica $\hat{O}_{5,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar los puntos en la expresión $f(x) = mx + b$
- Paso 2: resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas
- Paso 3: identificar los valores de m y b

El libro de texto no muestra la técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales.

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

θ_{13} : Métodos de solución para sistema de ecuaciones lineales

Θ_1 : Teoría de función afín

T₆: Determinar la regla de correspondencia de una función afín.

t_{6,1}: Dado un problema contextualizado de una función afín, determinar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 44: ejercicio 2; página 45: 4b; página 46: ejemplo 3; página 47: 7a, 8a; página 49: ejemplo 5, 1a -ítem 1; página 50: 4, 5a, 6a; página 53: 9d; página 54: 2a; página 71: 4a.

Técnica $\hat{O}_{6,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar la variable independiente, la llamamos x
- Paso 2: identificar el valor del parámetro m , valor constante del problema dado
- Paso 3: identificar el valor del parámetro b , valor constante del problema dado
- Paso 3: determinar la regla de correspondencia de la forma $f(x) = mx + b$

El libro de texto muestra esta técnica en la página 46: ejemplo 3.

θ_1 : Definición de función afín

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{6,2}: Dados dos o más puntos de una función afín, determinar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 6; página 53: 7.

Técnica $\hat{O}_{6,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: tomar dos puntos dados
- Paso 2: reemplazar los puntos en la expresión de la forma $f(x) = mx + b$
- Paso 3: resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas
- Paso 4: identificar los valores de m y b
- Paso 5: determinar la expresión de la forma $f(x) = mx + b$ con los valores de m y b hallados

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_1 : Definición de función afín

θ_{13} : Métodos de solución para sistema de ecuaciones lineales

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{6,3}: Dado un conjunto de pares ordenados de la forma (x, y) de una función afín, determinar su regla de correspondencia.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 2b, 2d, 2e.

Técnica $\hat{O}_{6,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar la variación de x
- Paso 2: identificar la variación de y
- Paso 3: determinar que el parámetro m es la variación de x
- Paso 4: determinar que el parámetro b es variación de y
- Paso 5: determinar la expresión de la forma $f(x) = mx + b$, con los valores de m y b hallados

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_1 : Definición de función afín

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

Θ_1 : Teoría de función afín

T₇: Determinar el dominio y rango de una función afín.

t_{7,1}: Dada la expresión algebraica de la forma $f(x) = mx + b$ definida en un conjunto numérico, determinar su dominio y rango.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 46: ejemplo 3; página 47: 4, 5, 7b, 8b; página 52: 5a, 5c; página 71: 1a, 1c.

Técnica $\hat{O}_{7,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: elegir los valores posibles que toma la variable x
- Paso 2: identificar el conjunto formado por todos los valores de la variable x
- Paso 3: evaluar los valores de x en la expresión de la forma $f(x) = mx + b$
- Paso 4: identificar el conjunto formado por todos los valores de $f(x)$

El libro de texto muestra esta técnica en la página 46: ejemplo 3.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_1 : Definición de función afín

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_{10} : Definición de variables

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{7,2}: Dado un conjunto de pares ordenados de una función afín, determinar su dominio y rango.

Esta tarea se presenta el libro de texto página 47: 1c, 1d; página 47: 3a, 3b, 3c, 3d.

Técnica $\hat{O}_{7,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los valores de la variable independiente x
- Paso 2: identificar los valores de $f(x)$

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_{10} : Definición de variables

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{7,3}: Dado el rango y la regla de correspondencia de una función afín, hallar su dominio.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 53: 4.

Técnica $\hat{O}_{7,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: evaluar en su regla de correspondencia los valores dados para el rango
- Paso 2: resolver las ecuaciones determinadas
- Paso 3: elaborar un conjunto de los valores hallados en las ecuaciones
- Paso 4: identificar el dominio de la función dada

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_{11} : Teorema de ecuación lineal de una variable

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

T₈: **Determinar la representación tabular de una función afín.**

t_{8,1}: Dada una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx + b$, determinar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 47: 4, 5; página 52: 5a, 5c; página 71: 4b.

Técnica $\hat{O}_{8,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: reemplazar los valores de la variable x en la regla de correspondencia dada
- Paso 2: resolver las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 3: identificar los valores de la variable dependiente $y=f(x)$

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_{10} : Definición de variables

θ_4 : Propiedades de los números reales

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{8,2}: Dada la representación gráfica y la regla de correspondencia de una función afín, determinar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 52: 6a, 6b, 6c.

Técnica $\hat{O}_{8,2,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar los puntos de la recta que corta con los ejes del plano cartesiano XY
- Paso 2: identificar otros valores del dominio de la función
- Paso 3: evaluar en la regla de correspondencia dada
- Paso 4: resolver las operaciones aritméticas
- Paso 5: identificar los valores de $f(x)$

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_{14} : Definición del plano cartesiano

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{8,3}: Dado un problema contextualizado de una función afín, determinar su representación tabular.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 4a.

Técnica $\hat{O}_{8,3,1}$: consiste en:

- Paso 1: determinar la regla de correspondencia del problema
- Paso 2: evaluar con valores del dominio en la regla de correspondencia
- Paso 3: resolver las operaciones aritméticas necesarias
- Paso 4: colocar los valores hallados en una tabla

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

t_{8,4}: Dada una tabla de valores, completar la representación tabular de una función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 45: 7a; página 50: 5b.

Técnica $\hat{O}_{8,4,1}$: consiste en:

- Paso 1: identificar las variables independientes x
- Paso 2: determinar la regla de correspondencia de la función dada
- Paso 3: determinar la imagen que corresponden a los valores de x
- Paso 4: determinar los valores de x que corresponden a la imagen dada

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_7 : Definición de rango de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

T₉: Hallar el costo.

t_{9,1}: Dado un problema contextualizado de una función afín, hallar el costo.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 50: 6c.

Técnica $\hat{O}_{9,1,1}$: consiste en:

Paso 1: determinar la regla de correspondencia del problema dado

Paso 2: evaluar los valores dados para la variable independiente

Paso 3: resolver las operaciones aritméticas

Paso 4: identificar el costo

El libro de texto no muestra esta técnica.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_{10} : Definición de variables

θ_3 : Definición de regla de correspondencia

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_{12} : Definición de imagen de una función

Θ_1 : Teoría de función afín

T₁₀: Graficar una función afín.

t_{10,1}: Dada una expresión algebraica de la forma $f(x) = mx + b$, graficar la función afín.

Esta tarea se presenta en el libro de texto en la página 44: ejemplo 1b; página 49: ejemplo 5; página 52: 3b, 3d; página 71: 4c.

Técnica $\hat{O}_{10,1,1}$: consiste en:

- Paso 1: construir una tabla de valores
- Paso 2: identificar los pares ordenados de la tabla de valores
- Paso 3: construir el plano cartesiano

- Paso 4: ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano

El libro de texto muestra esta técnica en la página 44: ejemplo 1-item b.

θ_4 : Propiedades de los números reales

θ_6 : Definición de dominio de una función

θ_{12} : Definición de imagen de una función

θ_{14} : Definición de plano cartesiano

θ_8 : Definición de gráfico de una función

θ_9 : Propiedades de gráfico de una función afín

Θ_1 : Teoría de función afín

5.7 Análisis de las praxeologías de la función afín en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*

Para el análisis de la función afín en el libro de texto, vamos a tomar en cuenta los elementos de nuestro marco teórico (las tareas, técnicas y tecnologías) así como los indicadores de Fonseca.

Con respecto a los elementos de nuestro marco teórico:

En el libro de texto seleccionado, hemos organizado 10 tipos de tareas de donde se desprenden 18 tareas. Cada una de ellas relacionadas con su técnica, tecnologías y teoría dadas.

A continuación presentamos la tabla 6, en la que se organizan los tipos de tareas y tareas resueltas y propuestas en el libro de texto seleccionado.

Tabla 6. Praxeologías del libro de texto sobre función afín

Tipos de tareas (T_i) y tareas ($t_{i,j}$)	Total	Resueltos	Propuestos
$T_1: t_{1,1}(2), t_{1,2}(1), t_{1,3}(2)$	5	0	5
$T_2: t_{2,1}(1)$	1	0	1
$T_3: t_{3,1}(1)$	1	0	1
$T_4: t_{4,1}(3), t_{4,2}(2)$	5	0	5
$T_5: t_{5,1}(1)$	3	3	3
$T_6: t_{6,1}(13), t_{6,2}(2), t_{6,3}(3)$	18	3	15
$T_7: t_{7,1}(9), t_{7,2}(6), t_{7,3}(1)$	16	1	15
$T_8: t_{8,1}(5), t_{8,2}(3), t_{8,3}(1)$	9	0	9
$T_9: t_{9,1}(1)$	1	0	1
$T_{10}: t_{10,1}(5)$	5	2	3
Total	64	9	55

De acuerdo a la tabla anterior se puede observar que el número de ejercicios propuestos (64) es mayor al número de los resueltos (9). Solo cuatro tipos de tareas muestran tareas resueltas. Estas son: T_5 , T_6 , T_7 y T_{10} .

A continuación, mostramos una tabla en la que aparecen los criterios, técnicas y tecnologías identificadas en esta OM.

Tabla 7. Presencia de Paxeologías en el libro de texto sobre función afín

Tipos de tareas (T_i) y tareas ($t_{i,j}$)		Presencia de Técnica	Página en el libro de texto	Presencia de Tecnología
$T_1:$	$t_{1,1}$	No	-	
	$t_{1,2}$	No	-	
	$t_{1,3}$	Sí	51	
$T_2:$	$t_{2,1}$	Sí	45	
$T_3:$	$t_{3,1}$	Sí	51	$\theta_1 : Sí$
$T_4:$	$t_{4,1}$	Sí	51	$\theta_2 : No$
	$t_{4,2}$	No	-	$\theta_3 : No$
$T_5:$	$t_{5,1}$	No	-	$\theta_4 : No$
				$\theta_5 : Sí$
$T_6:$	$t_{6,1}$	Sí	46	$\theta_6 : Sí$
	$t_{6,2}$	No		$\theta_7 : Sí$
	$t_{6,3}$	No		$\theta_8 : No$
$T_7:$	$t_{7,1}$	Sí	46	$\theta_9 : No$
	$t_{7,2}$	No	-	$\theta_{10} : Sí$
	$t_{7,3}$	No	-	$\theta_{11} : No$
$T_8:$	$t_{8,1}$	No	-	$\theta_{12} : No$
	$t_{8,2}$	No	-	$\theta_{13} : No$
	$t_{8,3}$	No	-	$\theta_{14} : No$
	$t_{8,4}$	No	-	
$T_9:$	$t_{9,1}$	No	-	
$T_{10}:$	$t_{10,1}$	Sí	44	

De acuerdo con la tabla anterior, se pueden observar 20 tareas, divididas en diez tipos; el uso de siete técnicas distintas para diferentes tipos de tareas; y, finalmente, 14 tecnologías que se

identificaron en la resolución de las tareas presentadas en el libro de texto seleccionado. Cabe destacar la ausencia de técnicas en el libro de texto para la resolución de 13 tareas propuestas.

Existe, pues otro vacío (ya que el anterior fue para función lineal) considerable para el estudiante. Además, se observa que en solo 5 páginas del libro de texto se pretende mostrar al estudiante todas las técnicas necesarias y suficientes como para que aprenda el objeto función afín (algunas de estas páginas también muestran técnicas para la función lineal).

Finalmente, el libro de texto muestra de forma explícita cinco de catorce tecnologías empleadas en la OM.

A continuación, tomando en cuenta los indicadores de Fonseca (2004) para el análisis del presente libro y con la intención de medir el grado de completitud de esta OM, se describe lo siguiente:

OML 1: el texto presenta *relativamente* distintos tipos de tareas (ya que son considerables las tareas aisladas presentes en este) que están asociadas con el mismo discurso tecnológico, es decir, que hacen referencia a las mismas técnicas así como a sus justificaciones para los distintos tipos de tareas. Cabe añadir que el texto no muestra una comparación de técnicas para la solución de una tarea.

Sobre las tareas aisladas encontradas, mostramos dos ejemplos:

- Ejercicio 6 de la sección 2: se pide determinar la expresión algebraica de la función afín a partir de notaciones que se entienden como cuatro puntos o pares ordenados, como podemos observar en la figura 63:

6. Determina una regla de correspondencia para f si se cumple que:
 $f(1) = 3; f(2) = 5; f(3) = 7; f(4) = 9$

Figura 63: Ejercicio 6-sección 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

- Ejercicio 6 de la sección 5: se pide calcular los valores de los parámetros a y b de una función afín de la forma $f(x) = ax + b$, conociendo un par de puntos de la misma, esto es, valores de “ x ” y “ $f(x)$ ”, como podemos ver en la figura 64:

6. Si $f(x) = ax + b$, halla el valor de a y b sabiendo que $f(1) = 5$ y $f(3) = 8$

Figura 64: Ejercicio 6-sección 5 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.53)

OML 2: el texto no presenta tareas con este tipo de criterio, ya que no muestra variedad de técnicas para una misma tarea, solo muestra una técnica para un mismo tipo de problema; por ejemplo, para graficar una función solo muestra la técnica de la tabulación, como lo demuestran los ejemplos 1 y 5 del texto. A continuación, presentamos un ejemplo en la figura 65:

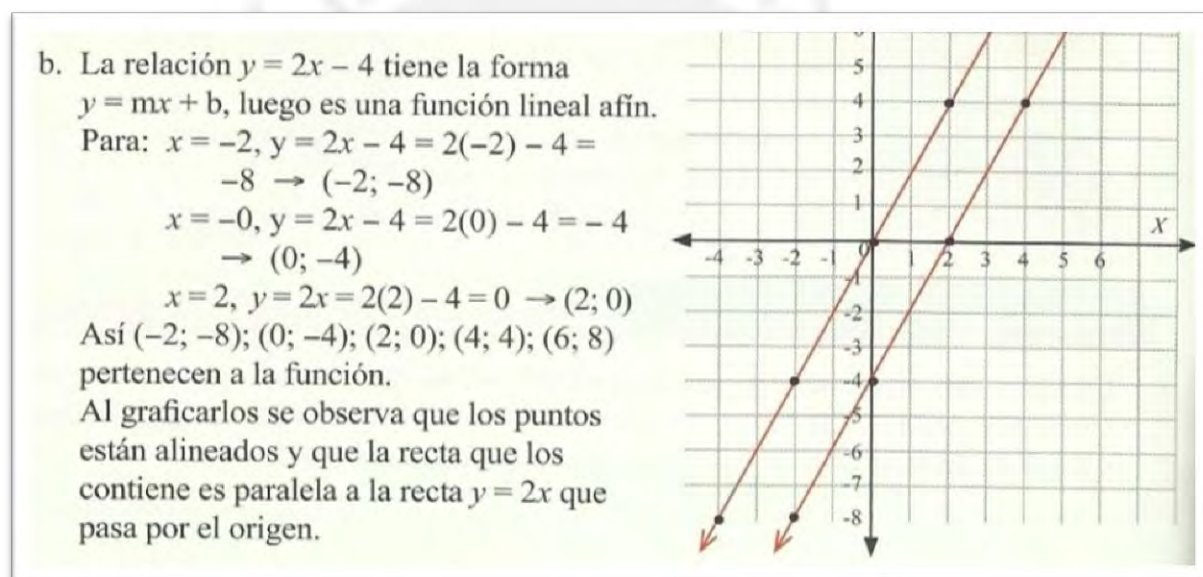


Figura 65: Ejemplo 1 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.44)

En el ejercicio anterior, se observa el uso de la representación tabular para calcular los pares ordenados, cinco en total, que luego servirán para construir la representación geométrica, todo ello mediante la expresión algebraica $y = 2x - 4$.

OML 3: el texto presenta tareas resueltas con este tipo de criterio, ya que se puede observar cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, representación tabular y representación gráfica; sin embargo, no se indica la representación más adecuada; una muestra de ello es el ejemplo 4 dado en el texto. Veamos la figura 66:

4. Sea la función $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$. **Completa** la tabla y **señala** el dominio y el rango.

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	7/2				




Figura 66: Ejercicio 4-sección 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

OML 4: el texto no presenta tareas resueltas con este tipo de criterio, por ende, tampoco técnicas, pero si presenta cinco problemas propuestos con este tipo de criterio. Lo podemos observar en las figuras 5.46, 5.54, 5.55, 5.56, y 5.57 del presente trabajo de investigación. Veamos uno de estos ejercicios en la figura 67:

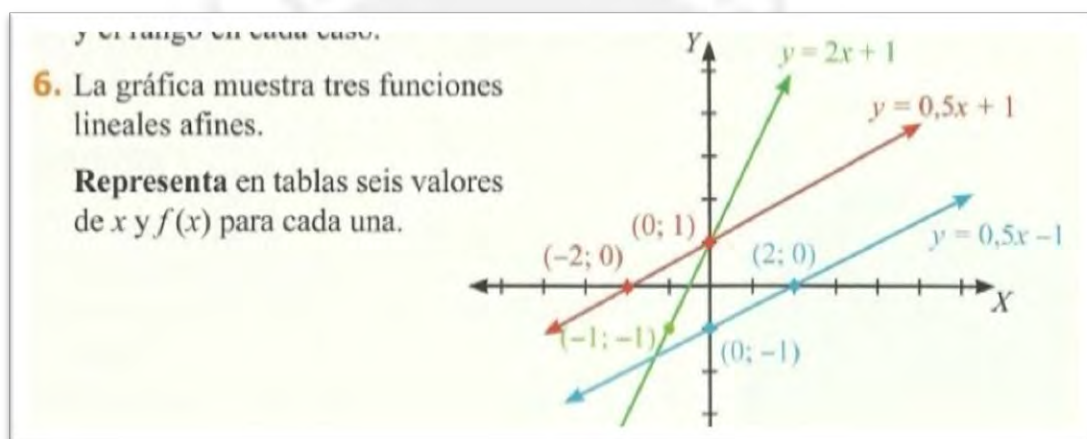


Figura 67: Ejercicio 6-sección 4 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.52)

OML 5: el texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

OML 6: el texto presenta tareas con este criterio, el cual incluye las tareas de modelización matemática, y en ese sentido el presente texto presenta poco menos de la mitad de sus problemas resueltos y propuestos con las descripciones de este indicador, para ello mostramos dos ejemplos. Veamos la figura 68:

- 8.** María tiene una planta que mide 50 cm de altura. Ella abonó su planta y de pronto empezó a crecer a razón de 2 cm en cada semana.
- Expresa** el tamaño de la planta en función del tiempo.
 - Determina** el dominio y el rango de la función.
 - ¿Qué tamaño tendrá la planta luego de 5 meses?



Figura 68: Ejercicio 8-sección 2 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.47)

- Ejercicio 4 del subtítulo 3: se pide expresar en lenguaje algebraico un problema dado en lenguaje verbal que expresa una situación real. Asimismo se pide que se justifique y demuestre con ejemplos que dicha expresión es una función afín. Veamos la figura 69:

- 4.** Un estudiante de un instituto técnico paga 250 nuevos soles como matrícula y una pensión mensual de 180 nuevos soles. **Escribe** una regla de correspondencia que represente el costo total que paga el estudiante en dicho instituto. **Explica** y **muestra** con ejemplos que la relación es una función lineal afín.

Figura 69: Ejercicio 4-sección 3 función afín.
Fuente: *Matemática 2 secundaria*. Perú (2012, p.50)

OML 7: el texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

De lo anterior, podemos afirmar que el libro de texto *Matemática 2 secundaria* sobre el tema función afín solo cumple con cuatro de los siete indicadores para el grado de completitud de su OML. Por ello podemos concluir que la organización matemática del texto *Matemática 2 secundaria* es parcialmente completa.

A continuación, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo y las sugerencias para futuras investigaciones.

VI CONCLUSIONES

Al finalizar este trabajo de investigación, obtenemos las siguientes conclusiones:

Con respecto a nuestro objetivo general, podemos manifestar que se concluyó con este de manera satisfactoria, ya que se realizó el análisis de la organización matemática de la función lineal y de la función afín en el libro de texto seleccionado.

Para lograr dicho objetivo, se llevaron a cabo, de manera ordenada, los objetivos específicos propuestos en este trabajo: primero se describieron los criterios adecuados en base a la TAD para realizar nuestro estudio, luego, se tomaron como referencia los trabajos de García (2005) y Parra et al (2006) y, por último, se organizaron y describieron las praxeologías presentes en la OM del libro *Matemática 2 secundaria*.

Finalmente, queremos comentar que con respecto a los objetos en estudio: la función lineal y la función afín, los autores presentan una diferencia, ya que presentan a la función afín bajo la denominación de función lineal afín. Nosotros seguimos la denominación función afín debido a que se tomó como referencia a las definiciones encontrada en los saberes sabios.

Resultados de análisis del libro de texto sobre la función lineal

La organización matemática, con respecto a la función lineal en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*, presenta 12 tipos de tareas, 26 tareas (con un total de 74 ejercicios en total, de los cuales 14 están resueltos y 60 están propuestos). Con respecto a la presencia de técnica solo presenta 9 de cada una de estas para diferentes tipos de tareas. Finalmente, muestra de manera explícita 5 de 12 tecnologías empleadas en la organización matemática sobre función lineal.

En el libro de texto analizado, se pudo identificar cuatro de siete criterios con respecto a la OML considerados por Fonseca (2004), estos son: OML 1, debido a que el libro de texto presenta tareas que hacen referencia a la interpretación y justificación de la función lineal, pero no se observa la comparación entre las técnicas presentes, también identificamos tareas aisladas debido a que el libro de texto no presenta técnica alguna para algunas tareas en particular. Con respecto a la OML 3, el texto presenta tareas donde se puede observar cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y tabular; sin embargo, el texto no hace referencia a la representación de la función lineal más adecuada según la técnica usada. En el texto identificamos la OML 4 debido a que presenta

dos ejercicios propuestos con tareas inversas. En el libro de texto se han identificado tareas que llevan a la modelización, es decir, tareas dadas en lenguaje natural en las que se solicita su representación algebraica; al respecto se ha identificado 15 ejercicios propuestos y 2 ejercicios resueltos correspondiendo a la OML 6.

Resultados de análisis del libro de texto sobre la función afín

La organización matemática, con respecto a la función afín en el libro de texto *Matemáticas 2 secundaria*, presenta 10 tipos de tareas, 18 tareas (de las cuales el texto presenta 64 ejercicios en total: 9 están resueltos y 55 están propuestos). Con respecto a la presencia de técnica, solo presenta 7 de cada una de estas para diferentes tareas. Finalmente, muestra de manera explícita 5 de 14 tecnologías empleadas en el libro de texto.

En el libro de texto analizado se pueden identificar cuatro de siete criterios con respecto a la OML considerados por Fonseca (2004), estos son: OML 1 debido a que el libro de texto presenta tareas que hacen referencia a la interpretación y justificación de la función afín, pero no se observa la comparación entre las técnicas presentes; también identificamos tareas aisladas debido a que el libro de texto no presenta técnica alguna para algunas tareas en particular. Con respecto a la OML 3, el texto presenta tareas en las que se puede observar cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y tabular; sin embargo, el texto no hace referencia a la representación de la función afín más adecuada según la técnica usada. En el texto identificamos la OML 4 debido a que presenta cinco ejercicios propuestos con tareas inversas. Asimismo, se han identificado tareas que llevan a la modelización, es decir, tareas dadas en lenguaje natural para las que se solicita su representación algebraica, al respecto se ha identificado 13 ejercicios propuestos y un ejercicio resuelto, correspondiendo a la OML 6.

De manera general, podemos concluir que el libro de texto *Matemática 2 secundaria*, en cuanto al tema analizado, no presenta diversidad de técnicas para una misma tarea, solo muestra una técnica para una tarea; y con respecto a la tarea de graficar una función afín, solo presenta la técnica de tabulación, lo cual indica una ausencia importante de variedad de técnicas para una misma tarea. Se debe tener en cuenta que existen otras técnicas para la resolución de dicha tarea que podrían economizar el tiempo de su resolución.

Otra característica de la organización matemática del libro de texto en la unidad analizada es la presencia de una gran variedad de problemas propuestos contextualizados relacionados con

el quehacer de la vida real. Cabe acotar que varios de estos problemas propuestos no tienen ninguna relación con los problemas resueltos; es decir forman parte de las tareas aisladas.

Por lo expuesto, en los resultados del análisis de la función lineal y función afín en el libro de texto *Matemática 2 secundaria*, podemos reconocer que se cuenta con la presencia de algunos aspectos de los siete indicadores de completitud de una organización matemática local. Con relación a la función lineal y función afín se puede identificar que cumplen con los indicadores OML1, OML3, OML4 y OML6; por tal motivo, podemos concluir que el grado de completitud en la organización matemática local del libro de texto seleccionado es medianamente completa en lo referente a estos temas.

Sugerencias para futuras investigaciones

Un futuro trabajo podría consistir en el estudio de la organización matemática de la función lineal y función afín en otros libros de texto usados por las instituciones privadas del Perú para poder hacer una comparación con el presente trabajo. Asimismo, resultaría interesante comparar los resultados académicos de los estudiantes que lleven el curso con libros organizados de manera distinta.

Se sugiere para futuras investigaciones con respecto a la función lineal y función afín construir las tareas de referencia, de tal manera que los textos en el futuro se basen en ellas para así poder contribuir con los adecuados tipos de tareas, tareas, técnicas y tecnologías en una institución.

También, se recomienda una investigación sobre la organización didáctica de la función lineal y función afín en el segundo año de secundaria.

Se recomienda el estudio de la organización matemática de las funciones elementales en los libros de texto de los primeros años de la educación secundaria, ya que respecto a los antecedentes de nuestro trabajo podemos identificar que los estudiantes presentan dificultades tanto en los últimos años del nivel secundario como en el nivel superior. Cabe agregar que el tema de funciones resulta vital en el nivel académico superior puesto que se desarrolla en todas las carreras profesionales.

Referencias

- Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zon, N. & Flores, P. (2009). *La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal*. Revista iberoamericana de educación matemática (pp. 52-61). Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/17/Union_017_008.pdf
- Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf>
- Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos aires: Aique.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J.(1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre La enseñanza y El aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 14(72), 9-42. Recuperado de: <http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF>
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis Doctoral, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS_en_PDF.pdf
- García, J. (2005). *La “Modelización Matemática” en Didáctica dela matemática. Formulación de un problema de investigación*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.
- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Gonzales, T. & Martin, E. (2006). *Matemáticas para el siglo XXI*. En J. Aymerich, S. Macano (Eds) “XVI simposio Iberoamericano de enseñanza matemática”, (pp. 197-204)

- Grossman, S., (2012), *Algebra Lineal*, México D.F., México: Mc Graw-Hill/interamericana editores, S.A. de C.V.
- Guzmán, R. (2006). *Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal*. (Tesis de licenciatura). Acapulco, México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hofmann K. y Kunze R. (1971). *Algebra Lineal*. Prentice Hall.
- Lages, E., (2001), *Geometría Analítica y Álgebra Lineal*, Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA.
- Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Lima: IMCA.
- Martínez, M. & Sánchez, P. (2011). *¿Toda gráfica de línea recta es función lineal?* Universidad de la Amazonia. Colombia, memorias encuentro 2011. Descargado de: <http://www.elitv.org/documentos/maestria/Memorias2011/Ponencia%205.pdf>
- Mayorga, L. P. (2013). Organizaciones Matemáticas en el libro de texto. Un estudio en el contenido de Función Lineal en el tercer año de educación media venezolana. *Revista ciencias de la educación* (pp. 69-82). Recuperado de: <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n42/art04.pdf>
- Parra, V., Otero, M. y Elichiribehety (2006). Organizaciones Matemáticas que se estudian en la Universidad en torno a la noción de función: un estudio de caso. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. Año 1, N°2.
- Paulino, E. (Ed.). (2012). Texto escolar Matemática 2 de secundaria. Lima, Perú. Grupo Editorial Santillana S.A.
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje matemática: Cambio y relaciones*. Lima. Recuperado de <http://www.sineace.gob.pe/mapas-deprogreso>
- Perú, Ministerio de Educación (2012a). *Matemática I*. Lima: Norma.

- Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 2*. Lima: Norma.
- Ramos, R. (Ed.). (2012). *Matemática 2 de secundaria*. Lima, Perú. Grupo Editorial Norma S.A.C.
- Rey, G., Boubée, C., Sastre, P. &Cañibano, A. (2009). *Ideas para enseñar. Aportes didácticos para abordar el concepto de función*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (pp. 153-162). Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/20/Union_020_019.pdf
- Vanegas, D. & Escalona M. (2013). *Concepciones sobre funciones matemáticas de una variable, en estudiantes del primer semestre de Ingeniería. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal* (pp. 99-113). Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/737/73726911>

