

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**



**Modelo Cosmológico de Energía Oscura en una Teoría Gravitacional**

**$f(Q, \Phi)$**

**Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Física**

**AUTOR:**

Johan Gustavo Casimiro Valencia

**ASESORES:**

David Choque Quispe

Manuel Alberto González Espinoza

Lima, 2025

## Informe de Similitud

Yo, David Choque Quispe,

docente de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia

Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado


### **Modelo Cosmológico de Energía Oscura en una Teoría Gravitacional $f(Q,\Phi)$**

Del autor Johan Gustavo Casimiro Valencia

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 2%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 20/03/2026.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: PUCP-Campus San Miguel, 23 de marzo 2026

Apellidos y nombres del asesor: <u>Choque Quispe David</u>	
DNI: 45504617	Firma 
ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0003-3213-2000">https://orcid.org/0000-0003-3213-2000</a>	

## **Agradecimientos**

Agradezco a mi madre, padre y hermanos por su apoyo constante en esta etapa de mi vida. También agradezco a aquellas personas que fueron clave para mi desarrollo como futuro científico y persona profesional.



## Resumen

Esta tesis estudia la energía oscura en el marco de la no-metricidad y propone un modelo  $f(Q, \phi)$  con un campo escalar dilatónico no canónico. El objetivo es caracterizar la dinámica de expansión y restringir los parámetros del modelo, cuantificando su posible alejamiento de  $\Lambda$ CDM sin perder consistencia con las observaciones. A nivel teórico, se emplea el método del *Minisuperspace* para derivar las ecuaciones de Friedmann bajo la conexión *coincident gauge* en el marco de no-metricidad. Metodológicamente, se abordan dos frentes complementarios: (i) un análisis de sistemas dinámicos que identifica puntos críticos (radiación, materia, *scaling* y un atractor acelerado tardío) y delimita regiones viables del espacio de parámetros; y (ii) una inferencia bayesiana mediante cadenas de Markov (MCMC), con parámetros libres definidos, *priors* explícitos y condiciones iniciales fijas, reportando diagnóstico de convergencia e intervalos creíbles al 68% y 95%. Para la confrontación de fondo se utilizaron datos de *Cosmic Chronometers* para  $H(z)$ . Los resultados del análisis de estabilidad muestran que el modelo  $f(Q, \phi)$  puede reproducir una historia térmica plausible y dar lugar a parámetros cosmológicos actuales compatibles con los valores preferidos por los datos de *Cosmic Chronometers*. Por su parte, el método MCMC permite acotar los parámetros, incluyendo escenarios con un campo escalar tipo fantasma dilatónico, y permiten extensiones de  $\Lambda$ CDM con buen ajuste observacional. En conjunto, los hallazgos indican que existen regiones del espacio paramétrico, alejadas de  $\Lambda$ CDM, que ajustan adecuadamente los datos empleados, motivando ampliar la confrontación observacional en marcos de no-metricidad y, en trabajos futuros, incorporar criterios de viabilidad a nivel de perturbaciones junto con comparaciones observacionales más exigentes.

# Índice general

Agradecimientos

Resumen I

Índice general I

Índice de tablas VIII

Índice de figuras IX

Nomenclatura XI

Declaración XII

1 Introducción 1

2 Fundamentos de Geometría Diferencial 4

2.1 Preliminares matemáticos . . . . . 5

2.1.1 Mapas . . . . . 5

2.1.2 Espacios Topológicos . . . . . 5

2.1.3 Variedades topológicas . . . . . 6

2.1.4 Variedades diferenciables . . . . . 6

2.1.5 Mapas diferenciables . . . . . 7

2.1.6 Cartas . . . . . 7

2.1.7 Base coordenada . . . . . 7

2.1.8 Base no coordenada . . . . . 8

2.1.9 Variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas . . . . . 9

2.1.10	Tensores	12
2.1.11	<b>P</b> -formas	12
2.1.12	Producto Wedge	13
2.1.13	Derivada de Lie y derivada covariante	14
2.1.14	Derivada exterior	14
2.1.15	Dual de Hodge	15
2.1.16	Elemento de Volumen	15
2.1.17	Símbolo y Tensor de Levi-Civita	17
2.1.18	Integración en Formas Diferenciales	19
2.2	Geometría en variedades	20
2.2.1	Conexión	20
2.2.2	Ecuaciones de las geodésicas	21
2.2.3	Torsión	22
2.2.4	Curvatura	26
2.2.5	Conexiones métricas	28
2.2.6	Conexión Levi-Civita	29
2.2.7	Teorías de Gravedad Modificada	30
<b>3</b>	<b>Conexiones y geometrías de la gravedad: curvatura, torsión y no-metricidad</b>	<b>32</b>
3.1	Marco general	32
3.1.1	Separación de la conexión	33
3.1.2	Separación del tensor de curvatura	34
3.1.3	Separación del tensor de Torsión en base no coordenada	35
3.1.4	Separación del tensor de no-metricidad en base no coordenada	36
3.2	Una nueva ecuación de Cartán para el tensor de no metricidad	36
3.3	Teoría de No-Metricidad	37
3.3.1	Conexión <i>Coincident Gauge</i>	38
3.4	Equivalencia entre curvatura y no-metricidad	39

<b>4</b>	<b>Relatividad General</b>	<b>42</b>
4.1	Curvatura bajo la conexión de Levi-Civita . . . . .	42
4.2	Métrica de Friedmann-Lemaitre–Robertson–Walker . . . . .	44
4.3	Acción de Hilbert-Einstein . . . . .	45
4.3.1	Ecuaciones de Einstein . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Cosmología Estándar de fondo</b>	<b>46</b>
5.1	Ecuaciones de Friedmann . . . . .	46
5.1.1	Materia, radiación, energía oscura y curvatura . . . . .	48
5.2	El número de e-folds como variable temporal . . . . .	51
5.3	<i>Redshift</i> $z$ como variable . . . . .	52
5.4	Método del <i>Minisuperspace</i> . . . . .	53
5.5	Método de Sistemas Dinámicos . . . . .	55
5.5.1	Sistemas lineales . . . . .	55
5.5.2	Sistemas dinámicos no lineales . . . . .	56
5.6	Datos observacionales - <i>Cosmic Chronometers</i> . . . . .	59
5.7	Marco Estadístico . . . . .	60
5.7.1	Parámetro $\chi^2$ . . . . .	60
5.7.2	<i>Prior, Posterior y Likelihood</i> . . . . .	61
5.7.3	Cadenas de Markov . . . . .	62
5.7.4	Regiones de Contorno . . . . .	63
5.8	Sistema dinámico para un modelo de 3 Tipos de Fluido . . . . .	64
5.8.1	Estabilidad . . . . .	65
5.8.2	Gráfica de las Densidades Relativas . . . . .	69
5.8.3	Gráfica de $H$ en función del <i>redshift</i> $z$ . . . . .	70
5.8.4	Gráfica de las densidades en función de $\mathbf{Z}$ . . . . .	72
5.8.5	Cadenas de Markov y regiones de contorno para el modelo de 3 Tipos de Fluido . . . . .	73
5.9	Dinámica cosmológica de un campo escalar en presencia de un fluido barotrópico perfecto . . . . .	76

5.9.1	Modelo de Quinta Esencia . . . . .	77
5.9.2	Componentes del Tensor Energía-Momento del campo escalar . . . . .	79
5.9.3	Ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	79
5.9.4	Sistema dinámico en Quintaesencia . . . . .	81
5.9.5	Autovalores . . . . .	88
5.9.6	Interpretación del Modelo . . . . .	88
5.9.7	Interpretación por cada Punto Fijo . . . . .	91
5.9.8	Interpretación para el caso $\lambda = 2, \gamma = 1$ . . . . .	96
5.9.9	Cadenas de Markov y regiones de contorno para el modelo de Quintaesencia . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Dinámica cosmológica <math>f(Q, \phi)</math> con interacción y campo escalar dilatónico no canónico</b>	<b>103</b>
6.0.1	Sistema dinámico $f(Q, \phi)$ . . . . .	105
6.0.2	Parámetros Cosmológicos . . . . .	107
6.0.3	Análisis de estabilidad . . . . .	109
6.0.4	Gráficas cosmológicas del método de sistemas dinámicos . . . . .	111
6.0.5	Resultados del método de cadenas de Markov MCMC . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>117</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Capítulo 2 - Fundamentos de Geometría Diferencial</b>	<b>125</b>
A.1	Acciones formuladas con formas diferenciales . . . . .	125
A.1.1	Acción de un campo escalar . . . . .	125
A.1.2	Acción del campo de gauge Abelian . . . . .	126
A.1.3	Acción de Hilbert-Einstein . . . . .	126
<b>B</b>	<b>Capítulo 3 - Conexiones y geometrías de la gravedad: curvatura, torsión y no-metricidad</b>	<b>128</b>

B.1	Teoría de gravedad teleparalela . . . . .	128
B.1.1	Conexión de Weitzenböck . . . . .	129
B.1.2	Interpretación de las ecuaciones de Cartán . . . . .	131
B.1.3	Características de la función de Lagrange en una acción . . . . .	131
B.1.4	Resumen de identidades para la Acción Teleparalela . . . . .	132
B.1.5	Función de Lagrange en una Teoría Teleparalela . . . . .	133
B.1.6	Función de Lagrange en una teoría de Einstein-Cartán . . . . .	137
B.1.7	Término de Borde . . . . .	138
B.1.8	Relación entre el escalar de curvatura y el escalar de torsión . . . . .	139
B.2	Transiciones entre teorías gravitacionales bajo la conexión . . . . .	139
B.2.1	Resumen de ecuaciones en un marco general $R + T + Q$ . . . . .	139
B.2.2	Teoría $R$ (sólo curvatura; Relatividad General) . . . . .	140
B.2.3	Teoría $T$ (teleparalela; Weitzenböck) . . . . .	140
B.2.4	Teoría $Q$ (sólo no-metricidad; <i>symmetric teleparallel</i> ) . . . . .	140
<b>C</b>	<b>Capítulo 4 - Relatividad General</b>	<b>142</b>
C.1	Variación de la acción de Hilbert Einstein con acoplamiento de un campo escalar	142
C.1.1	Variación respecto al campo dinámico $\phi$ . . . . .	142
C.1.2	Variación respecto al campo dinámico $g_{\mu\nu}$ . . . . .	144
<b>D</b>	<b>Capítulo 5 - Cosmología estándar de fondo</b>	<b>147</b>
D.1	Sistema Lineal . . . . .	147
D.1.1	Gráfica de fases para el sistema lineal . . . . .	148
D.2	Sistema no Lineal . . . . .	149
D.2.1	Gráfica $y - x$ para el sistema no lineal . . . . .	151
D.3	Acción de Einstein–Hilbert con materia y curvatura espacial . . . . .	151
D.3.1	Caso $k < 0$ . . . . .	152
D.3.2	Caso $k > 0$ . . . . .	152
D.4	Acción de Einstein–Hilbert con materia ordinaria, radiación y constante cos- mológica . . . . .	153

D.5	Dinámica cosmológica de un campo escalar en presencia de materia ordinaria y radiación . . . . .	154
D.5.1	Caso $\lambda$ constante . . . . .	156
D.5.2	Tabla de autovalores . . . . .	157
D.5.3	Tabla de estabilidad . . . . .	158
D.5.4	Interpretación para $\lambda = 2$ . . . . .	159
D.5.5	Interpretación para $\lambda = 1$ . . . . .	160
<b>E</b>	<b>Capítulo 6 - Dinámica cosmológica <math>f(Q, \phi)</math> con interacción y campo escalar dilatónico no canónico</b>	<b>162</b>
E.1	Teoría <i>scaling</i> para un modelo $p(X, \phi)$ . . . . .	162
E.2	Teoría <i>scaling</i> para un modelo $p_1(X, \phi) + p_2(Q, \phi)$ . . . . .	165
E.3	Propuesta de presión del <i>scaling</i> en un modelo sin campo escalar fantasma dilatónico . . . . .	170
E.4	Propuesta de presión del <i>scaling</i> para un modelo con campo escalar fantasma dilatónico . . . . .	171
E.5	Condiciones adicionales . . . . .	172
E.6	Restricción para $G(Q)$ bajo el <i>scaling</i> . . . . .	173
E.6.1	Parte 1: Ecuación (1) . . . . .	173
E.6.2	Parte 2: Ecuación (2) . . . . .	174
E.6.3	Parte 3: Ecuación (3) . . . . .	175
E.7	Variación del escalar de no-metricidad $Q$ . . . . .	175
E.8	Tabla de datos observacionales <i>Cosmic Chronometers</i> . . . . .	179
E.9	Funciones completas del sistema dinámico del modelo $f(Q, \phi)$ dilatón . . . . .	180

# Índice de tablas

5.1	Valores de $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . . . . .	67
5.2	Estadísticos MCMC para el modelo de tres componentes. . . . .	75
5.3	Puntos fijos del modelo de quintaesencia. . . . .	87
5.4	Autovalores asociados a cada punto fijo del sistema dinámico para $\epsilon = 1$ . . . . .	88
5.5	Existencia, estabilidad y parámetros de los puntos críticos del modelo con $\epsilon = +1$ (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006). . . . .	88
5.6	Estadísticos MCMC quintaesencia. . . . .	101
6.1	Puntos fijos del sistema en variables $(x, y, u_1, u_2, \varrho)$ . . . . .	107
6.2	Parámetros cosmológicos por punto crítico densidad relativa de energía oscura $\Omega_{\text{DE}}$ , ecuación de estado de la componente oscura $\omega_{\text{DE}}$ y ecuación de estado efectiva $\omega_{\text{eff}}$ . . . . .	108
6.3	Autovalores de los puntos fijos $f(Q, \phi)$ . . . . .	110
6.4	Condiciones de existencia para los puntos fijos $Q1-Q16$ . . . . .	110
6.5	Estadísticos MCMC modelo $f(Q, \phi)$ . . . . .	116
D.1	Puntos críticos al resolver las Ec. (D.67). . . . .	157
D.2	Tabla de autovalores de los puntos fijos ( $\lambda_1 = \lambda^2$ ). . . . .	157
D.3	Tabla de estabilidad de los puntos fijos. . . . .	158
D.4	Tabla de los parámetros cosmológicas de los puntos fijos. . . . .	158
E.1	Mediciones de $H(z)$ ( $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ) y sus incertidumbres. . . . .	179

# Índice de figuras

3.1	Tríada geométrica: curvatura, torsión y no-metricidad. . . . .	33
5.1	Datos observacionales <i>Cosmic Chronometers</i> en función de $z$ con barras de error. . . . .	60
5.2	Representación 2D del espacio de soluciones para $\omega_1, \omega_2$ y $\omega_3$ . . . . .	67
5.3	Diagrama de Fase entre las variables $x_1, x_2$ y $x_3$ . . . . .	68
5.4	Comparativa de proyecciones de los diagramas de fase: $(x_1, x_2)$ y $(x_2, x_3)$ . . . . .	69
5.5	Curva de evolución en tres dimensiones. . . . .	69
5.6	Evolución para el modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	70
5.7	Gráfica de $H$ en función del redshift $z$ . . . . .	71
5.8	Gráficas de densidades de energía en función del <i>redshift</i> $z$ . . . . .	73
5.9	Trazas de un subconjunto de walkers para $H_0, \omega_3$ y $\Omega_{m0}$ . La línea vertical marca el <i>burn-in</i> . . . . .	74
5.10	Media acumulada post <i>burn-in</i> de $H_0, \omega_3$ y $\Omega_{m0}$ . . . . .	74
5.11	Regiones de contorno del 68% y 95% para $(H_0, \omega_3, \Omega_{m0})$ y marginales 1D correspondientes. . . . .	75
5.12	Diagrama de fase en un región cercana al punto $(0, 0)$ . . . . .	92
5.13	Diagrama de fase en una región cercana al punto $(1, 0)$ . . . . .	93
5.14	Diagrama de fase en una región cercana al punto $(-1, 0)$ . . . . .	93
5.15	Diagrama de fase en una región cercana al punto $(c)$ . . . . .	94
5.16	Diagrama de fase en una región cercana al punto $(d)$ . . . . .	95
5.17	Diagrama de fase del modelo para $\epsilon = +1, \lambda = 2$ y $\gamma = 1$ . . . . .	96
5.18	Curva de evolución del modelo Quintaesencia. . . . .	97
5.19	Gráficas cosmológicas del modelo Quintaesencia. . . . .	98

5.20	Trazas de un subconjunto de walkers para $H_0, \lambda$ y $\Omega_{m0}$ . La línea vertical marca el <i>burn-in</i> . . . . .	100
5.21	Media acumulada post <i>burn-in</i> de $H_0, \lambda$ y $\Omega_{m0}$ . . . . .	100
5.22	Regiones de contorno del 68% y 95% para $(H_0, \lambda, \Omega_{m0})$ y marginales 1D correspondientes. . . . .	101
6.1	Gráficos cosmológicos del modelo $f(Q, \phi)$ . . . . .	112
6.2	Trazas de un subconjunto de walkers para $H_0, \lambda_0, n$ y $s$ . La línea vertical marca el <i>burn-in</i> . . . . .	114
6.3	Media acumulada post <i>burn-in</i> de $H_0, \lambda_0, n$ y $s$ . . . . .	115
6.4	Regiones de contorno del 68% y 95% para $(H_0, \lambda, n, s)$ y marginales 1D correspondientes. . . . .	115
D.1	Diagrama de Fase $y - x$ . . . . .	149
D.2	Diagrama de fase $y - x$ . . . . .	151
D.3	Diagrama de fase con frontera dominante de campo escalar y radiación para $\lambda = 2$ . . . . .	159
D.4	Puntos (c.2) y (d): (a) en el plano $\varrho = 0$ y (b) en 3D. . . . .	160
D.5	Diagrama de fase con frontera dominante de campo escalar y radiación para $\lambda = 1$ . . . . .	161

# Nomenclatura

En este apartado se presentan los símbolos que se mostrarán en la tesis para una mejor lectura.

- Unidades naturales:  $\hbar = c = 1$ .
- Se considerará  $\kappa$  distinto de la unidad; sin embargo, cuando sea necesario se utilizarán unidades de Planck reducidas,  $\kappa^2 = 8\pi G = 1$ .
- Se utilizarán índices griegos ( $\mu, \nu, \alpha, \dots$ ) para las bases coordenadas, e índices latinos ( $a, b, c, \dots$ ) para las bases locales no coordenadas en el espacio tangente.
- Para la conexión se utilizará el símbolo  $w$ , mientras que para la ecuación de estado será  $\omega$ .
- Los campos escalares se denotarán con el símbolo  $\phi$ .
- Se utilizará el mismo símbolo  $e$  para el vielbein  $e_a^\mu$  y su inverso  $e_\mu^a$ , sin distinguir el orden de los índices.
- Los coeficientes de la conexión (símbolos de Christoffel) se escribirán como:  $\overset{\bullet}{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu$ . En otros objetos sí será importante el orden de los índices:  $R^\mu{}_{\nu\lambda\beta} \neq R_\mu{}^\nu{}_{\lambda\beta}$ ,  $T^a{}_{bc} \neq T_a{}^{bc}$ .
- Los objetos como  $R, \nabla, \Gamma$  tendrán el símbolo “•” encima si pertenecen a la conexión Levi-Civita.

# Declaración

En el desarrollo de la presente tesis se utilizó cálculo simbólico y numérico mediante los *software Wolfram Mathematica* y *Python*, cuyos códigos serán compartidos mediante un link de *Github* (Casimiro, 2025). Las definiciones y cálculos analíticos se presentan con la referencia y página respectiva de donde se tomó como guía; además, se verificaron y se añadieron cálculos propios, con algunas extensiones del texto original.

El autor utilizó la inteligencia artificial GPT como asistente de redacción durante la preparación de este manuscrito. La herramienta fue empleada para desarrollar y articular la estructura argumentativa, expandir esquemas conceptuales en prosa académica, y mejorar la claridad, coherencia y precisión lingüística del texto. Todas las ideas teóricas, preguntas de investigación, propuestas conceptuales y juicios intelectuales son del autor. El autor asume plena responsabilidad por el contenido de este artículo.

# Capítulo 1

## Introducción

En las últimas décadas la cosmología ha consolidado el modelo estándar  $\Lambda$ CDM, sustentado en la relatividad general, como una descripción exitosa de la expansión del universo, la formación de estructura y modelado de la energía oscura. Sin embargo, persisten tensiones estadísticas y cuestiones conceptuales: discrepancias con las observaciones obtenidas por la técnica de escalera de  $H_0$ ; tensiones en parámetros de crecimiento en perturbaciones como  $\sigma_8$  (Planck Collaboration, 2020); el problema de la constante cosmológica (ajuste fino) (Weinberg, 1989); el problema de la coincidencia (por qué  $\rho_m$  y  $\rho_\Lambda$  resultan comparables hoy) (Zlatev, L. Wang y Steinhardt, 1999); y la ausencia de un mecanismo dinámico para la energía oscura que explique su comportamiento en épocas previas. Estas limitaciones motivan la consideración de extensiones de  $\Lambda$ CDM para modelar energía oscura que incorporen restricciones de sus parámetros mediante ajuste observacional. Dos extensiones naturales han sido el uso de campos escalares (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006) y las modificaciones de la gravitación, como en teorías  $f(R)$  o en teorías con formulaciones equivalentes a la relatividad general como la teleparalela (Saridakis, 2018). En este trabajo se unen ambas líneas en un escenario donde la gravedad modificada se formula en el marco equivalente de la no-metricidad  $Q$  y se incorpora un campo escalar con dinámica no canónica y dilatónica. La elección de la geometría de no-metricidad permite reproducir, a nivel de fondo, ecuaciones de Friedmann en un *gauge* conveniente, a la vez que habilita modificaciones  $f(Q)$  que permiten describir a la energía oscura junto al campo escalar (Gadbail, Mandal y Sahoo, 2022). En consecuencia, planteamos dos preguntas de investigación con sus posibles hipótesis: ¿Qué rangos de parámetros en  $f(Q, \phi)$  permiten un régimen de *scaling* compatible con la evolución radiación  $\rightarrow$  materia  $\rightarrow$  aceleración? El análisis

sis de estabilidad identifica regiones del espacio de parámetros con soluciones de *scaling* y un atractor acelerado tardío. ¿Hasta qué punto puede alejarse el modelo propuesto de  $\Lambda$ CDM en el comportamiento de fondo sin perder coherencia con los datos observacionales? La interacción materia–campo escalar, la modificación  $f(Q, \phi)$  y un término cinético dilatónico no canónico permite el alejamiento mediante  $H_0$ .

El modelo propuesto introduce una combinación novedosa de dos bloques. Por un lado, un bloque geométrico tipo  $f(Q, \phi)$  que modifica las ecuaciones de Friedmann a nivel de fondo. Asimismo, se incorpora un campo escalar no canónico con término cinético controlado por un coeficiente  $\alpha$  y un acoplamiento dilatónico de la forma  $F(\phi)X^n$ . En particular, se considera  $\alpha = -1$  para un escalar tipo fantasma acompañado por el término estabilizante  $X^n$ , inspirado en el modelo *ghost condensate* (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025). Una manera de aliviar el problema de la coincidencia es mediante un escalamiento entre la energía oscura y la materia. Dado que hay evidencias de encontrar épocas *scaling* entre el sector de energía oscura y materia (Gonzalez-Espinoza y Otalora, 2021), es natural restringir el modelo de manera que nos permita encontrar mayor cantidad de estos puntos. Para ello, se propone una forma específica del modelo  $f(Q, \phi)$  a partir de un cálculo en tiempos lejanos (épocas actuales), que se presentará en el apéndice, agregando interacción entre el campo escalar y la materia (Zimdahl, Pavón y Chimento, 2001). Esta propuesta permite mayor exploración de trayectorias que la quintaesencia canónica y amplía los horizontes más allá de  $\Lambda$ CDM. Nuestro modelo abarcará un estudio de fondo, sin explorar las restricciones  $\sigma_8$  en teoría de perturbaciones.

Se emplean dos métodos numéricos y estadísticos complementarios y tratados por separado en esta tesis. El primero utiliza la estabilidad en sistemas dinámicos, la cual permite caracterizar la estructura global del espacio de fases. Se identifican puntos críticos representativos de las eras de radiación y de materia, soluciones de tipo *scaling* y un atractor acelerado tardío. Mediante un análisis de estabilidad se delimitan regiones del espacio de parámetros que admitan una historia térmica plausible compuesta por radiación  $\rightarrow$  materia  $\rightarrow$  salida del *scaling*  $\rightarrow$  energía oscura. Con esos rangos se eligen condiciones iniciales y se integran las ecuaciones de evolución de fondo para obtener  $H(z)$ , las fracciones de densidad  $\Omega_i(z)$  y la ecuación de estado efectiva  $w_{\text{DE}}(z)$ . Estas soluciones se comparan con datos de expansión y se evalúa su

alejamiento respecto de  $\Lambda$ CDM a nivel de la curva de Hubble. En el segundo método, se implementa muestreo con cadenas de Markov (MCMC) para restringir directamente los parámetros del modelo con datos observacionales. Dado que el modelo permite explorar campos escalares fantasma ( $\alpha = -1$ ), se utilizará este método de restricción para dicho caso. En esta etapa no se realiza análisis de estabilidad. Se integra numéricamente las ecuaciones de fondo, con condiciones iniciales fijas, y se presentan las cadenas para evidenciar su convergencia bajo los parámetros, junto con regiones de contorno que resumen las correlaciones y rangos permitidos. Este método evidencia cuánto de alejados estamos frente a  $\Lambda$ CDM sin vulnerar el ajuste observacional. En conjunto, ambos enfoques delimitan la frontera entre la viabilidad dinámica del modelo y las restricciones impuestas por los datos, ofreciendo una visión más completa y extensa de la propuesta  $f(Q, \phi)$ .

La organización conceptual de la tesis se detalla a continuación: primero se presentan los fundamentos de la geometría diferencial, necesaria para fijar notación y herramientas que se utilizarán para los cálculos. Luego, se introduce el marco de no-metricidad, enfatizando sus propiedades en cosmología a nivel de fondo. A continuación se revisan las bases de la relatividad general y la cosmología del modelo con tres tipos de fluido y el modelo de quintaesencia; bajo estos modelos estándares se presentan los métodos y resultados que se emplearán en el modelo propuesto. En el siguiente capítulo se formula el modelo  $f(Q, \phi)$  con un campo escalar no canónico dilatónico, presentando los resultados de la propuesta. Finalmente, se concluye la tesis mediante los resultados del modelo  $f(Q, \phi)$ , contrastándolos con las observaciones y los resultados obtenidos en los modelos de tres tipos de fluido y quintaesencia.

Los objetivos concretos de la tesis son: i) proponer un modelo  $f(Q, \phi)$  con un sector escalar no canónico diseñado para admitir, en principio, soluciones de tipo *scaling* y conservar historias térmicas correctas; ii) derivar y analizar el sistema dinámico asociado, identificando condiciones analíticas de viabilidad y rangos de parámetros con atractores acelerados; iii) integrar el fondo cosmológico del modelo y comparar con datos de expansión (*cosmic chronometers*) para observar el alejamiento respecto de  $\Lambda$ CDM; iv) realizar un estudio MCMC que presente cadenas y regiones de contorno para los parámetros del modelo, evidenciando la estabilización de las cadenas y la interpretación bayesiana de las regiones.

## Capítulo 2

# Fundamentos de Geometría Diferencial

Este capítulo presenta la base teórica de las nociones matemáticas y geométricas que emplearemos como el lenguaje de las teorías de gravedad y en los materiales complementarios del manuscrito. Se inicia con la noción de mapas entre espacios topológicos y el concepto de homeomorfismo, para introducir a continuación a las variedades y mapas diferenciales. Continuamos definiendo las cartas para introducir las bases coordenadas y las no coordenadas mediante vectores y 1-formas. Se definen las distintas variedades a partir de la signatura del tensor métrico. Posteriormente, se introduce las definiciones de tensores y  $p$ -formas, junto con el producto wedge. Asimismo, se define la derivada de Lie y la derivada exterior, así como el dual de Hodge; con ello se establece el elemento de volumen, el símbolo de Levi-Civita y el tensor de Levi-Civita. Finalmente, abordamos la integración en formas diferenciales.

La segunda parte se enfoca en la geometría de las variedades: se introduce la conexión, definiendo la derivada covariante, se derivan las ecuaciones de las geodésicas para el transporte paralelo, se define la torsión y curvatura. Luego, se incorporan las conexiones métricas y, como caso particular, la conexión de Levi-Civita. Finalmente, se discuten las teorías de gravedad modificada que serán el foco de investigación para este trabajo, en particular aquellas basadas en no-metricidad. Las referencias, utilizadas como guía en los cálculos y definiciones, se indicarán en cada subsección con su respectiva página.

## 2.1 Preliminares matemáticos

### 2.1.1 Mapas

Un mapa es una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  que asigna a cada elemento  $x \in X$  (dominio del mapeo) un único valor  $y \in Y$  (rango del mapeo) (Nakahara, 2003, p. 67). Si  $f$  es definida por alguna fórmula explícita, se escribe:

$$f : x \rightarrow f(x) \quad (2.1)$$

Diremos que  $f$  es inyectiva si  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ; sobreyectiva si para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ; y biyectiva si cumple ambas condiciones (Nakahara, 2003, p. 68). Sean los conjuntos  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ , se define la imagen de  $A$  como:

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \quad (2.2)$$

Y la preimagen de  $B$  como:

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}. \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Espacios Topológicos

Un espacio topológico es un par  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  donde  $\mathcal{T}$  es una familia de subconjuntos de  $\mathcal{X}$  (se dice que  $\mathcal{T}$  proporciona una topología sobre  $\mathcal{X}$ ) que satisface (Nakahara, 2003, p. 81):

- $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathcal{T}$ .
- Uniones arbitrarias de elementos de  $\mathcal{T}$  pertenecen a  $\mathcal{T}$ .
- Intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{T}$  pertenecen a  $\mathcal{T}$ .

#### Mapas continuos

Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  espacios topológicos. Un mapa  $f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_\mathcal{X}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$  es *continuo* si la imagen inversa de un conjunto abierto en  $\mathcal{Y}$  es un conjunto abierto en  $\mathcal{X}$  (Nakahara, 2003, p. 82).

## Homeomorfismo

Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  espacios topológicos. Un mapa  $f : (\mathcal{X}, \mathcal{T}_x) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{T}_y)$  es un homeomorfismo si es continuo y biyectivo, cuya inversa también es continua. Si existe un homeomorfismo entre  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  se dice que  $\mathcal{X}$  es homeomorfo a  $\mathcal{Y}$  (Nakahara, 2003, p. 85).

### 2.1.3 Variedades topológicas

Sea  $\mathcal{M}$  un espacio topológico. Diremos que  $\mathcal{M}$  es una variedad topológica de dimensión  $n$  si (Lee, 2013, p. 2-3):

- Es Hausdorff.
- Es de segunda numerabilidad.
- Es localmente Euclídea de dimensión  $n$  (cada punto admite una vecindad  $U$  homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).

### 2.1.4 Variedades diferenciables

Un atlas es una colección de cartas (se definen en la subsección 2.1.6) que cubren la variedad topológica  $\mathcal{M}$ . Dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \gamma)$  son suavemente compatibles si  $U \cap V = \emptyset$  o bien el siguiente mapa es un difeomorfismo (suave):

$$\gamma \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \gamma(U \cap V) \quad (2.4)$$

Un atlas suave es un atlas cuyas cartas son suavemente compatibles mutuamente (Lee, 2013, p. 12).

Una variedad diferenciable es el par  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{M}$  es una variedad topológica y  $\mathcal{A}$  es una estructura suave, es decir, un atlas suave maximal sobre  $\mathcal{M}$  (Lee, 2013, p. 13-15). En lo que sigue, trabajaremos únicamente con atlas de clase  $C^\infty$  (los mapas de transición entre cartas contienen derivadas de todo orden y todas son continuas). Por ello, se usará indistintamente los términos variedad diferenciable y variedad suave para referirnos a una variedad  $C^\infty$ , salvo mención en contrario.

### 2.1.5 Mapas diferenciables

Si  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es un mapa entre variedades suaves, diremos que  $F$  es suave si para cualquier par de cartas suaves:  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{M}$  y  $(V, \gamma)$  de  $\mathcal{N}$ , con  $F(U) \subset V$ , el mapa en coordenadas:

$$\gamma \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \gamma(V) \subset \mathbb{R}^m \quad (2.5)$$

es de clase  $C^\infty$  (Lee, 2013, p. 34-35). Esta condición es independiente de las cartas elegidas y captura la idea de que el mapa  $F$  transforma bases coordenadas de manera suave sin introducir “discontinuidades” (las bases coordenadas se definen en 2.1.7).

### Difeomorfismo e isomorfismo

Un mapa suave  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  entre variedades suaves se llama *difeomorfismo* si es biyectivo, de clase  $C^\infty$ , y su inversa  $F^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  también es suave (Lee, 2013, p. 38). En el grupo de variedades suaves, un *isomorfismo* es precisamente un difeomorfismo, esto es, un mapa suave con inversa suave (Lee, 2013, p. 73-74).

### 2.1.6 Cartas

Un mapa de coordenadas (o carta) es un par  $(U, \varphi)$  con  $U \subset \mathcal{M}$  abierto y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  (Lee, 2013, p. 4). Estas pueden describirse mediante una base coordenada o una base no coordenada, también llamada anholonómica.

### 2.1.7 Base coordenada

Para definir estas bases que actúan globalmente en cada punto de la variedad requerimos definir los objetos que residen en el espacio tangente (vectores) y cotangente (1-formas).

### Vectores

Sea una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$ , en la cual cada punto está asociado localmente a un punto en  $\mathbb{R}^n$ , mediante una carta diferenciable. Por otro lado, una curva que pertenece a la variedad, puede definirse mediante ecuaciones paramétricas como (Monsalve, 2018, p. 145):

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad (2.6)$$

Dada una función  $f$ , definida sobre la variedad  $\mathcal{M}$ , al considerar su derivada a lo largo de una curva parametrizada por  $\lambda$ , en un punto  $P$ , se obtiene el vector tangente a la curva:

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_p = \left. \frac{d}{d\lambda} f(x^\mu(\lambda)) \right|_p \quad (2.7)$$

Aplicando la regla de la cadena, esta expresión se reescribe como:

$$\frac{d}{d\lambda} f(x^\mu(\lambda)) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.8)$$

Dado que en ambos lados de la ecuación se presenta la función  $f$ , podemos abstraerla. De esta manera, se obtiene una expresión general para el vector tangente a la curva en  $P$ .

$$V = \frac{d}{d\lambda} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.9)$$

Aquí,  $V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , son las componentes del vector tangente. La expresión  $\frac{d}{d\lambda}$  resalta el carácter geométrico del vector, independiente de la carta. El conjunto  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \right\}$  forman una base coordenada del espacio tangente en  $P$ .

## 1-formas

Una 1-forma en  $p$  es un funcional lineal sobre  $T_p^* \mathcal{M}$ , tal que  $w_p : T_p^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . El conjunto de todas las 1-formas en  $p$  constituye el espacio cotangente  $T_p^* \mathcal{M}$ . El conjunto dado por  $\{dx^\mu\}$  forma la co-base dual del espacio cotangente. A partir de esta base definimos la relación de completitud en base coordenada:  $dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu$ . Cualquier 1-forma  $w$  se escribe, mediante esta base, de la siguiente manera (Monsalve, 2018, p. 146):

$$w = w_\mu dx^\mu \quad (2.10)$$

Su acción sobre un vector es:  $w(V) = w_\mu V^\mu$ . Para una función suave  $f$ , el diferencial se define:  $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$  y satisface  $df(V) = V[f]$ .

### 2.1.8 Base no coordenada

A partir de las bases coordenadas podemos definir una base, en una región local de la variedad, que describa los objetos geométricos igual de eficaz que las bases coordenadas. A continuación se definen los objetos que permiten la traslación entre bases.

## Vielbeins

Los vielbeins, también conocidos como tetradas  $e_a^\mu$ , son campos definidos sobre una variedad  $\mathcal{M}$  que proporcionan una base no coordinada local (Monsalve, 2018, p. 5). Estos objetos conectan la base coordinada con la no coordinada de la siguiente manera:

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad e^b = e_\nu^b dx^\nu \quad (2.11)$$

Por tanto, es natural definir un conjunto de bases no coordinadas (o anholónomas)  $\{e_a\}$  y  $\{e^b\}$ , que pertenecen al espacio tangente  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$  y cotangente  $\mathcal{T}_p^*\mathcal{M}$  respectivamente. Se define la condición de completitud:  $e_a(e^b) = \delta_a^b$ . Esta ecuación puede reescribirse en términos de los vielbeins  $e_a^\mu$  y  $e_\mu^b$  (matrices de dimensión  $n \times n$ ) como:

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b, \quad e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad a, b = 1, \dots, n, \quad n = \text{Dim}(\mathcal{M}) \quad (2.12)$$

Además, se denota por  $e$  al determinante de los vielbeins:

$$e = \det(e_\mu^b) \quad (2.13)$$

En esta base, los vectores y 1-formas, se definen como:

$$V = V^a e_a, \quad w = w_b e^b \quad (2.14)$$

### 2.1.9 Variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas

En muchas aplicaciones físicas no basta con definir únicamente la estructura diferenciable de una variedad, sino que se requiere una noción de longitud, ángulo y volumen. Esta información se codifica en un tensor métrico (se define en la subsección 2.1.10), que en términos modernos se interpreta como un campo tensorial simétrico de tipo  $(0, 2)$  definido sobre la variedad  $\mathcal{M}$ . Cuando dicho tensor tiene de asignatura  $(+, +, \dots, +)$  se habla de variedades Riemannianas; cuando admite signos mixtos  $(+, -, \dots, +, -)$  se obtiene el caso pseudo-Riemanniano, dentro del cual se encuentran las variedades Lorentzianas. Estas juegan un papel central en relatividad general (Nakahara, 2003, p. 244).

#### Variedades Riemannianas

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana sobre  $\mathcal{M}$  es un tensor de tipo  $(0, 2)$ , denotado por  $g$ , que en cada punto  $p \in \mathcal{M}$  asigna un **producto interno bilineal**,

simétrico y positivo definido:

$$g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.15)$$

En otras palabras, para cualquier par de vectores  $U, V \in T_p\mathcal{M}$  se cumple:

$$g_p(U, V) = g_p(V, U), \quad g_p(U, U) > 0 \text{ si } U \neq 0 \rightarrow (+, +, +, \dots, +) \quad (2.16)$$

De modo que  $g_p$  generaliza el producto escalar Euclídeo a un espacio tangente arbitrario (Nakahara, 2003, p. 244)

En un sistema de coordenadas locales  $\{x^\mu\}$  sobre una carta  $(U, \varphi)$ , el tensor métrico se escribe como:

$$g = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.17)$$

Y el elemento de línea asociado es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.18)$$

El elemento  $ds^2$  permite medir longitudes de curvas, ángulos entre vectores y volúmenes en la variedad. Además, la métrica induce un isomorfismo entre el espacio tangente y el cotangente:

$$U \in T_p\mathcal{M} \mapsto \omega_U(\cdot) \equiv g_p(U, \cdot) \in T_p^*\mathcal{M}, \quad (2.19)$$

Lo que se interpreta como la operación de “bajar índices” (Nakahara, 2003, p. 244-245).

### Variedades pseudo-Riemannianas

Cuando se consideran signos negativos en la métrica, se obtiene el caso pseudo-Riemanniano  $(+, -, -, \dots, +)$ . Formalmente, un tensor métrico  $g$  es pseudo-Riemanniano si sigue siendo un campo tensorial simétrico de tipo  $(0, 2)$ , no degenerado (es decir,  $g_p(U, V) = 0$  para todo  $U$  implica  $V = 0$ ), pero ya no se exige que  $g_p(U, U)$  sea siempre positivo. En una base adecuada, la matriz  $(g_{\mu\nu})$  puede diagonalizarse con entradas  $\pm 1$  (Nakahara, 2003, p. 246).

Así, una variedad pseudo-Riemanniana es un par  $(\mathcal{M}, g)$ , donde  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable y  $g$  es un tensor métrico no degenerado de signatura arbitraria. El caso Riemanniano se recupera cuando todos los autovalores (elementos de la diagonal) son positivos (signatura Euclídea), mientras que signaturas mixtas permiten describir estructuras donde ciertas direcciones

son “tipo tiempo” y otras “tipo espacio”, lo cual será esencial al hablar de espacio-tiempo relativista (Nakahara, 2003, p. 246).

### Variedades Lorentzianas y espacio-tiempo

Un caso particular de métrica pseudo-Riemanniana es la métrica de Lorentz. Se llama así a un tensor métrico cuya matriz puede llevarse, en una base apropiada, a una forma diagonal con exactamente un autovalor de signo distinto a los demás:

$$\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (2.20)$$

Lo que corresponde al índice (1, 3) en relatividad, con convención de signatura  $(-, +, +, +)$ , y proporciona la estructura geométrica necesaria para definir causalidad. Cuando una variedad diferenciable  $\mathcal{M}$  está dotada de una métrica de Lorentz  $g$ , el par  $(\mathcal{M}, g)$  se denomina variedad Lorentziana (Nakahara, 2003, p. 246). Esta métrica Lorentziana no solo mide distancias, sino que separa direcciones temporales, espaciales y lumínicas. En este contexto se puede clasificar cada vector tangente  $U \in T_p\mathcal{M}$  según el signo de su norma:

$$g(U, U) > 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ es espacial (spacelike)}, \quad (2.21)$$

$$g(U, U) = 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ es nulo o lumínico (null)}, \quad (2.22)$$

$$g(U, U) < 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ es temporal (timelike)}. \quad (2.23)$$

Esta distinción es precisamente la que permite introducir conos de luz, lo cual lleva a la noción de causalidad (Nakahara, 2003, p. 246).

En relatividad general, el espacio-tiempo se describe como una variedad Lorentziana de dimensión cuatro  $(\mathcal{M}, g)$ . La métrica  $g$  juega el papel de campo gravitacional: determina la medida de intervalos espacio-temporales y entra en las ecuaciones de Einstein como variable dinámica.

Además, en el caso particular del espacio de Minkowski, se tiene:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Esta estructura resume la idea de que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable con métrica Lorentziana, sobre la cual se formulan tanto la dinámica de las partículas (a partir de

geodésicas en el espacio-tiempo) como la propia dinámica geométrica de  $g_{\mu\nu}$  en las ecuaciones de campo de Einstein (Nakahara, 2003, p. 297).

En el formalismo teleparalelo se utilizan bases ortonormales  $\{e_a\}$ , definidas a partir del tensor métrico. El producto interior entre estas bases se fija como:

$$e_a \cdot e_b = g(e_a, e_b) = \eta_{ab} \quad (2.24)$$

Donde  $\eta_{ab} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  corresponde a la métrica de Minkowski. La base dual  $e^a$  satisface la siguiente relación:

$$e^a = \eta^{ac} g(e_c, \cdot) \quad (2.25)$$

Lo cual garantiza la condición de ortonormalidad para las bases anholónomas:

$$e^a(e_b) = \eta^{ac} g(e_c, e_b) = \eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_b^a \quad (2.26)$$

### 2.1.10 Tensores

Los tensores generalizan los vectores y las 1-formas. Se definen como aplicaciones multilineales  $T_p : \underbrace{\mathcal{T}_p^* \mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{T}_p^* \mathcal{M}}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{\mathcal{T}_p \mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{T}_p \mathcal{M}}_{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$  que reciben un conjunto  $r$  de 1-formas y  $s$  vectores para retornar un escalar. Su expresión en bases coordenadas y bases no coordenadas es (Monsalve, 2018, p. 146):

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r} \quad (2.27)$$

$$T = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_s} \quad (2.28)$$

De esta manera, los tensores se denotan como  $(r, s)$ . Un tensor de tipo  $(1, 0)$  corresponde a un vector, y uno de tipo  $(0, 1)$ , a una 1-forma.

### 2.1.11 P-formas

Una  $p$ -forma es un tensor totalmente antisimétrico de tipo  $(0, p)$ . Sea una  $p$ -forma de orden superior  $\omega$ , se expresa mediante el producto Wedge (se define en 2.1.12) de la forma (Corral, 2015, p. 16):

$$\omega = \frac{1}{p!} w_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.29)$$

En bases anholónomas, la  $p$ -forma se expresa con el producto tensorial como (Monsalve, 2018, p. 148):

$$w = w_{[a,b,\dots,c]} e^a \otimes e^b \otimes \dots \otimes e^c, \quad w_{[a,b,\dots,c]} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} w_{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(p)}} \quad (2.30)$$

Mediante el Producto Wedge:

$$w = \frac{1}{p!} w_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_p}, \quad e^a = e^a_{\mu} dx^{\mu}. \quad (2.31)$$

Dado que el objeto es totalmente antisimétrico, solo admite índices distintos. Por tanto, no existen  $p$ -formas con  $p > n$ , siendo  $n$  la dimensión de la variedad. Por otro lado, si  $p < n$  habrán  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$  componentes independientes.

### 2.1.12 Producto Wedge

El producto wedge es una operación exterior entre formas diferenciales ( $p$ -forma) que produce nuevas formas de orden superior, preservando la antisimetría. Para formas diferenciales  $dx^{\mu}$ , se define como (Corral, 2015, p. 16):

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \sum_{\sigma \text{ permutaciones}} (-1)^{|\sigma|} dx^{\sigma(\mu_1)} \otimes \dots \otimes dx^{\sigma(\mu_p)} \quad (2.32)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} &= dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \\ dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\lambda} &= dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} - dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu} - dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\lambda} \\ &\quad + dx^{\nu} \otimes dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} + dx^{\lambda} \otimes dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} - dx^{\lambda} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} \end{aligned}$$

Para dos 1-formas cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$ , se cumple:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad (2.33)$$

La anterior expresión implica que el producto wedge es antisimétrico, es decir:

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \quad (2.34)$$

Además, el producto wedge entre dos 1-formas idénticas es nulo:

$$\alpha \wedge \alpha = 0 \quad (2.35)$$

Para una  $p$ -forma  $w$  y una  $q$ -forma  $v$ , se tiene:

$$w \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge w \quad (2.36)$$

Y en particular:

$$v \wedge v = (-1)^{q^2} v \wedge v \quad (2.37)$$

Por tanto, el producto wedge de dos  $q$ -formas idénticas es nulo si  $q$  es impar.

### 2.1.13 Derivada de Lie y derivada covariante

La derivada de Lie de un campo vectorial  $V$  respecto a otro  $U$  se define como (Monsalve, 2018, p. 150):

$$\mathcal{L}_U V = (U^\mu \partial_\mu V^\nu - V^\mu \partial_\mu U^\nu) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2.38)$$

Este operador no es puramente direccional, pues considera la interacción entre  $U$  y  $V$ . Si fuera direccional esperaríamos que el resultado sea proporcional a  $U$  y a la tasa de cambio de  $V$  en esa dirección, pero el segundo término  $V^\mu \partial_\mu U^\nu$  indica que se está tomando otras contribuciones de otras direcciones. Por tanto, la derivada de Lie mide cómo un campo vectorial (o tensorial) actúa sobre otro a lo largo de sus trayectorias.

En cambio, la derivada covariante sí es direccional (se define en 2.2.1). Se satisface:

$$\nabla_{fU} V = f \nabla_U V \quad (2.39)$$

En una base no coordenada, se expresa como:

$$\nabla_U V = U^a e_a(V^b) e_b + U^a V^b \nabla_{e_a} e_b \quad (2.40)$$

El término  $\nabla_{e_a} e_b$  será explorado en la siguiente sección.

### 2.1.14 Derivada exterior

La derivada exterior  $d$  es un operador lineal que mapea una  $p$ -forma en una  $(p+1)$ -forma. Para una *cero-forma*  $f$ , se define la derivada exterior en base coordenada como (Monsalve, 2018, p. 149):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.41)$$

En cambio, para una  $p$ -forma  $w$ :

$$dw = d\left(\frac{1}{r!}w_{\mu_1\dots\mu_r} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\right) \quad (2.42)$$

$$dw = \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial x^\nu} w_{\mu_1\dots\mu_r} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (2.43)$$

Además, sea una  $r$ -forma  $\alpha$  y una  $q$ -forma  $\beta$ , se satisface una regla de producto (análoga a la de Leibniz) para el producto wedge:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad (2.44)$$

### 2.1.15 Dual de Hodge

Por medio del tensor métrico podemos definir la operación de Hodge  $*$ , que asocia  $p$ -formas con  $(D - p)$ -formas, donde  $D$  es la dimensión donde reside la  $p$ -forma. Sea  $\alpha$  una  $p$ -forma (Corral, 2015, p. 23):

$$w = \frac{1}{p!} w_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (2.45)$$

Entonces su respectiva  $(D - p)$ -forma, denotada por  $*w$ , será:

$$\star w \equiv \frac{1}{p!} \frac{\sqrt{-g}}{D - p} w_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D} \quad (2.46)$$

El operador dual de Hodge solo afecta las bases. Sea la dimensión  $D$  para una  $r$ -forma, el operador afecta a las bases coordenadas y no coordenadas de la siguiente manera:

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{-g}}{(D - r)!} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_D} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D} \quad (2.47)$$

$$\star(e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_r}) = \frac{1}{(D - r)!} \epsilon^{a_1 a_2 \dots a_r b_{r+1} \dots b_D} e^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{b_D} \quad (2.48)$$

### 2.1.16 Elemento de Volumen

Para definir el elemento de volumen se inicia tomando la determinante en la siguiente ecuación del tensor métrico (Corral, 2015, p. 23):

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (2.49)$$

Para ello, definimos las siguientes determinantes:

$$\begin{aligned} \det(g_{\mu\nu}) &= g, & \det(e_\mu^a) &= e \\ \det(e_a^\mu) &= e^{-1}, & \det(\eta_{ab}) &= -1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Se obtiene:

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}) \Rightarrow g = -e^2 \Rightarrow e = \sqrt{-g} \quad (2.51)$$

El anterior resultado conecta la formulación en tetradas o *vielbeins* con la puramente métrica de la relatividad general. El elemento de volumen se define como:

$$d\Omega_D = \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D = e dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D \quad (2.52)$$

Si aplicamos el operador dual de Hodge a la unidad, obtenemos el siguiente resultado<sup>1</sup>:

$$*(1) = \frac{\sqrt{-g}}{D!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} \quad (2.53)$$

$$= \sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D = d\Omega_D \quad (2.54)$$

Por tanto, el elemento de volumen es el dual de Hodge de la unidad. Además, si usamos las siguientes propiedades en la Ec. (2.53):

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} = e^{-1} e^{\mu_1}_{a_1} \cdots e^{\mu_D}_{a_D} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \quad (2.55)$$

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} = e e^{\mu_1}_{a_1} \cdots e^{\mu_D}_{a_D} \epsilon^{a_1 \dots a_D} \quad (2.56)$$

Se obtienen las siguientes equivalencias del elemento de volumen:

$$d\Omega_D = \frac{\sqrt{-g}}{D!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_D} = e dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^D \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{D!} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_D} = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^D \quad (2.58)$$

$$= \sqrt{-g} d^D x = e d^D x \quad (2.59)$$

Entonces,

$$e d^D x = \frac{1}{D!} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \cdots \wedge e^{a_D} \quad (2.60)$$

Si aplicamos  $\epsilon^{a_1 \dots a_D}$  en ambos lados, se obtiene<sup>2</sup>:

$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_D} = -\epsilon^{a_1 \dots a_D} e d^D x \quad (2.61)$$

<sup>1</sup>Recordemos la expresión:  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = m! \delta_{\mu_1}^{[1} \cdots \delta_{\mu_m]}^m$

<sup>2</sup>Si reemplazamos la Ec. (2.61) en la Ec. (2.60) y usamos  $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \sigma_1 \dots \sigma_q} = -p! q! \delta_{[\sigma_1}^{\nu_1} \cdots \delta_{\sigma_q]}^{\nu_q}$ , efectivamente se obtiene  $e d^D x$ .

## 2.1.17 Símbolo y Tensor de Levi-Civita

El símbolo de Levi-Civita que usaremos en este texto seguirá la siguiente renormalización (Corral, 2015, p. 22):

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares,} \\ -1 & \text{permutaciones impares,} \\ 0 & \text{se repiten índices.} \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} -1 & \text{permutaciones pares,} \\ +1 & \text{permutaciones impares,} \\ 0 & \text{se repiten índices.} \end{cases} \quad (2.63)$$

Donde  $\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = -\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ .

Este símbolo es útil a la hora de definir las determinantes de matrices. Sea una matriz  $m \otimes m$  de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & \dots & M_m^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & \dots & M_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1^m & M_2^m & \dots & M_m^m \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

El determinante de dicha matriz se halla con la siguiente expresión:

$$\det(M) = \epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} M_1^{\mu_1} M_2^{\mu_2} \dots M_m^{\mu_m} \quad (2.65)$$

Mediante el símbolo de Levi-civita se define el tensor de Levi-Civita  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_m} = \sqrt{-g} \epsilon_{\nu_1\dots\nu_m} \quad (2.66)$$

$$\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\nu_1\dots\nu_m} \quad (2.67)$$

La regla de transformación (en 2 dimensiones) del tensor de Levi-Civita, entre las cartas  $(x^\mu, y^\mu)$ , es de la forma<sup>3</sup>:

$$\varepsilon_{\sigma\lambda} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.68)$$

<sup>3</sup>Cuidado, el tensor métrico puede *bajar* o *subir* índices al tensor de Levi-Civita  $\varepsilon$ , no actúa sobre el símbolo de Levi-Civita  $\epsilon$ .

Para transformar el símbolo de Levi-Civita, de una base coordenada a una base no coordenada, se usa la siguiente identidad:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_D} = \frac{1}{e} e_{\mu_1}^{a_1} \dots e_{\mu_D}^{a_D} \epsilon_{a_1 \dots a_D} \quad (2.69)$$

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} = e e_{a_1}^{\mu_1} \dots e_{a_D}^{\mu_D} \epsilon^{a_1 \dots a_D} \quad (2.70)$$

Para el caso de 2 dimensiones, se definen los símbolos de Levi-Civita en función de deltas de Kroneckers como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} &= \epsilon_{\alpha\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} \\ &= \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1 \end{aligned} \quad (2.71)$$

El resultado de la Ec. (2.71) es la determinante de una matriz  $2 \otimes 2$ , conformadas por deltas de Kronecker en sus componentes. La notación que seguiremos será la siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu} &= \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1 = \delta_{\mu\nu}^{12} \\ &= 2! \delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2 = 2! \delta_{\mu\nu}^{[1} \delta^2]} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Donde  $\delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2 = \frac{1}{2!} (\delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1)$ .

Sin embargo, se comportan como dos deltas de Kronecker independientes al aplicar sobre tensores antisimétricos (debido a la antisimetría de los índices inferiores):  $\delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2 \equiv \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2$ . Por ejemplo, si aplicamos  $\delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2$  a un tensor  $A^{\mu\nu}$ , proyectará su parte antisimétrica. Se opera de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta_{[\mu}^1 \delta_{\nu]}^2 A^{\mu\nu} &= \frac{1}{2!} (\delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1) A^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^2 A^{\mu\nu} - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^1 A^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (A^{12} - A^{21}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Si el tensor es antisimétrico se obtiene  $A^{12}$ , en cambio si es simétrico se anula.

Generalizando:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} = m! \delta_{[\mu_1}^1 \dots \delta_{\mu_m]}^m \quad (2.74)$$

$$= m! \delta_{\mu_1}^{[1} \dots \delta_{\mu_m]}^m \quad (2.75)$$

$$= \delta_{\mu_1 \dots \mu_m}^{1 \dots m} \quad (2.76)$$

En cambio, para los símbolos de Levi-Civita con índices arriba, la notación sigue:

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_m} = -m! \delta_{[\mu_1}^1 \dots \delta_{\mu_m]}^m \quad (2.77)$$

$$= -m! \delta_{\mu_1}^{[1} \dots \delta_{\mu_m]}^m \quad (2.78)$$

$$= -\delta_{\mu_1 \dots \mu_m}^{1 \dots m} \quad (2.79)$$

En el caso general, se cumple la siguiente expresión:

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \sigma_1 \dots \sigma_q} = -p! q! \delta_{[\sigma_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\sigma_q]}^{\nu_q} \quad (2.80)$$

En particular  $p = q = m$ :

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_m} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m \nu_1 \dots \nu_m} = -m! \quad (2.81)$$

### 2.1.18 Integración en Formas Diferenciales

En un espacio  $D$ -dimensional, la integración de formas diferenciales se fundamenta en la noción de elemento de volumen previamente introducida. Una  $D$ -forma puede escribirse como combinación lineal del producto exterior de  $D$  diferenciales, lo cual permite realizar integrales en todo el espacio-tiempo. En particular, el elemento de volumen  $d\Omega_D$  garantiza que la integración sea coherente con la orientación y la métrica de la variedad (Corral, 2015, p. 22).

De manera geométrica una  $p$ -forma, con  $p < D$ , no contiene suficiente información para abarcar todas las dimensiones del espacio; mientras que, para  $p > D$  el producto wedge se anula por antisimetría. Por ello, únicamente las  $D$ -formas son integrables en todo el espacio  $D$ -dimensional:

- En 1 dimensión: una 1-forma como  $dx$  mide la longitud de un intervalo.
- En 2 dimensiones: una 2-forma como  $dx \wedge dy$  representa un área.
- En 3 dimensiones: una 3-forma como  $dx \wedge dy \wedge dz$  corresponde a un volumen.

Con esta base, es natural definir acciones a partir de densidades de Lagrange que sean  $D$ -formas. Si  $\omega$  es una  $D$ -forma sobre la variedad  $\mathcal{M}$ , la integral queda expresada como:

$$I = \int_{\mathcal{M}} \omega = \frac{1}{D!} \int_{\mathcal{M}} \omega_{\mu_1 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \int_{\mathcal{M}} \omega_{01 \dots D-1} dx^0 dx^1 \dots dx^{D-1}. \quad (2.82)$$

## 2.2 Geometría en variedades

### 2.2.1 Conexión

La conexión  $\nabla$  permite definir derivadas covariantes entre campos tensoriales o vectoriales y se especifica por sus componentes  $\Gamma_{ab}^c$ . Las componentes de la conexión nos permitirán definir las conexiones de Levi-Civita, Weitzenböck y *Coincident Gauge* para teorías equivalentes a la relatividad general o en gravedad modificada. En base no coordenada, se establece (Monsalve, 2018, p. 8):

$$\nabla_a e_b = \Gamma_{ab}^c e_c \quad (2.83)$$

Los coeficientes o componentes definen la variación de una base  $e_a$  respecto a otra base  $e_b$ . Dada esta definición, la conexión de un campo vectorial  $U$  a lo largo de otro campo  $V$  se expresa como:

$$\nabla_V U = U^a [e_a V^c + \Gamma_{ab}^c V^b] e_c \quad (2.84)$$

$$\equiv U^a \nabla_a V^c e_c \quad (2.85)$$

**La derivada covariante** del campo vectorial  $V$  se define como el tensor  $\nabla V$  con componentes:  $\nabla_a V^c = e_a V^c + \Gamma_{ab}^c V^b$ . Este tensor no depende de ningún otro campo vectorial, es independiente de la dirección a la cual se deriva.

Para transformar la conexión entre bases, se utiliza:

$$\nabla_a e_b = e_a^\mu \nabla_\mu (e_b) = e_a^\mu \nabla_\mu (e_b^\nu e_\nu) \quad (2.86)$$

Es importante recalcar que la derivada covariante si puede actuar sobre bases no-coordenadas pero no es de utilidad (habrán aplicaciones de la forma  $e_a(A)$ ); en cambio, si nos trasladamos a índices coordenados ( $e_a(A) = e_a^\mu \partial_\mu (A)$ ) obtenemos las derivadas parciales conocidas. La ecuación que relaciona las componentes de la conexión en base coordenada y base no coordenada se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c e_c = \nabla_a e_b &\rightarrow \Gamma_{ab}^c e_c = e_a^\mu \nabla_\mu e_b \\ \Gamma_{ab}^c e_c^\nu e_\nu &= e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) e_\nu \\ \Gamma_{ab}^c &= e_\nu^c e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu) \end{aligned} \quad (2.87)$$

La anterior ecuación muestra que los coeficientes de la conexión no transforman como tensores. Además, la conexión actúa sobre la base dual  $e^c$  como:

$$\nabla_{e_a} e^c \equiv \nabla_a e^c = -\Gamma_{da}^c e^d \quad (2.88)$$

Como adicional, en una teoría general bajo la no compatibilidad:  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \neq 0$ , es posible descomponer los coeficientes de la conexión entre: los coeficientes de la conexión en Relatividad General (símbolos de Christoffel), el tensor contorsión (Teoría Teleparalela) y el tensor disformación (Teoría No Metricidad):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + K_{\mu\nu}^\lambda + L_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.89)$$

En el siguiente capítulo (3.1.1) se deriva la descomposición y la definición en componentes de los últimos dos tensores ( $K_{\mu\nu}^\lambda$ ,  $L_{\mu\nu}^\lambda$ ) que se interpretan como la parte no riemaniana de la conexión.

## 2.2.2 Ecuaciones de las geodésicas

Junto a la definición de derivada covariante, se introduce las curvas autoparalelas. Se tiene una curva con vector tangente  $V$ , se dice que es autoparalela si cumple la siguiente relación (Monsalve, 2018, p. 9):

$$\nabla_V V = fV \quad (2.90)$$

En relatividad general, las curvas geodésicas se caracterizan por la condición de que la derivada covariante de su vector tangente es proporcional al propio vector tangente. Si esta proporcionalidad es nula (derivada covariante nula), el parámetro utilizado es afín, lo que simplifica la descripción de la geodésica. Para ilustrarlo, sea una curva  $C(t)$  en el espacio-tiempo, parametrizada por  $t$ , cuyo vector tangente (o velocidad) se define como:  $V = \frac{dx^\mu}{dt}$ . Se tienen los siguientes transportes:

1. El vector  $Y$  es transportado a lo largo de la curva  $C(t)$ :

$$\nabla_V Y = \frac{dx^\mu}{dt} \left[ \frac{dY^\sigma}{dx^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma Y^\nu \right] \partial_\sigma$$

2. El vector  $y$  es transportado paralelamente a lo largo de la curva  $C(t)$ :

$$\nabla_V Y = 0 \rightarrow \frac{dY^\sigma}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{dt} Y^\nu = 0$$

3. El vector tangente  $V$  es transportado paralelamente a lo largo de la curva  $C(t) \equiv$  Curva Geodésica:

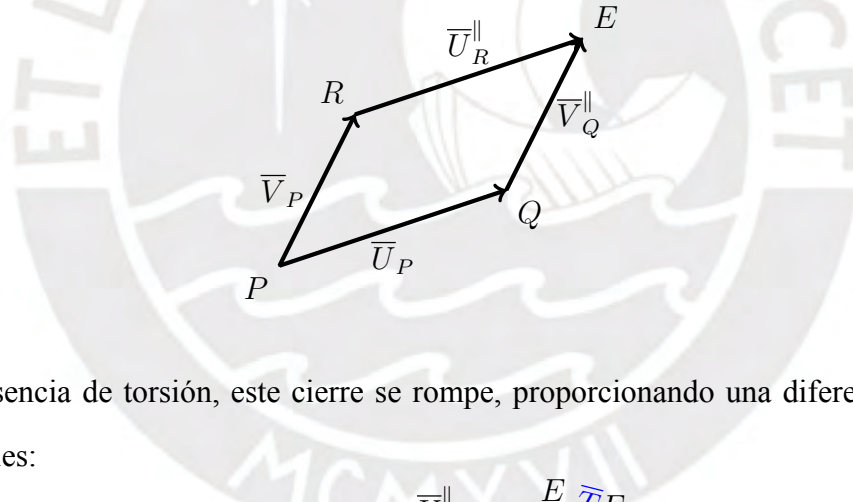
$$\nabla_V V = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\nu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

### 2.2.3 Torsión

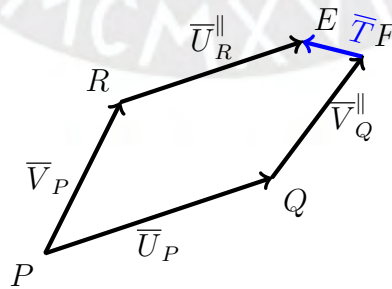
La Torsión  $T$  es un tensor de tipo  $(1, 2)$  que actúa sobre dos vectores  $U$  y  $V$  definidos en el espacio  $\mathcal{I}_p \mathcal{M}$ , definido como:

$$T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V] \quad (2.91)$$

Donde  $[U, V]$  es la derivada de Lie entre dichos vectores. La torsión es un objeto antisimétrico bajo el cambio  $U \leftrightarrow V$  y mide la no conmutatividad del transporte paralelo (Monsalve, 2018, p. 9). En una geometría sin torsión, los transportes paralelos infinitesimales del vector  $U$  (que se encuentra inicialmente en el punto  $P$ ) a lo largo de  $V$  y del vector  $V$  (inicialmente en  $P$ ) a lo largo de  $U$  forman un paralelogramo, como se muestra a continuación:



En presencia de torsión, este cierre se rompe, proporcionando una diferencia entre los vectores finales:



Si además incluimos curvatura (un objeto tensorial que definiremos después) los vectores transportados paralelamente no terminan siendo paralelos a sus respectivos vectores iniciales (las figuras son referenciadas de (Monsalve, 2018, p. 10)). Es decir, si transportamos paralelamente el vector  $U_P$  a lo largo de  $V$ , entonces obtenemos el vector  $U_R$ , que no es paralelo a  $U_P$ .



Se definen los **Coefficientes de Estructura** como el conmutador no nulo de la base no coordinada:

$$[e_a, e_b] = C_a^d{}_b e_d, \quad C_a^d{}_b = e_\nu^d [e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu] \quad (2.97)$$

Además, usando la identidad:  $e_\nu^a \cdot e_b^\nu = \delta_b^a \rightarrow \partial_\mu (e_\nu^a) e_b^\nu = -e_\nu^a \partial_\mu (e_b^\nu)$ , la expresión de los coeficientes de estructura se reduce como:

$$C_a^d{}_b = -e_a^\mu e_b^\nu [\partial_\mu e_\nu^c - \partial_\nu e_\mu^c] \quad (2.98)$$

Las componentes  $T^c{}_{ab}$  del tensor de torsión se calculan evaluando la 1-forma  $e^c$  en el objeto  $T(e_a, e_b)$ , lo que se denota mediante la siguiente aplicación:

$$T^c{}_{ab} = \eta^{cd} g(e_d, T(e_a, e_b)) = e^c[T(e_a, e_b)] \quad (2.99)$$

De esta manera, las bases vectoriales  $e_c$  no aparecen explícitamente en las componentes. Para realizar estos cálculos, es esencial recordar las siguientes relaciones:

$$e^c(e_d) = \delta_d^c, \quad e^c(\partial_\nu) = e_\nu^c \quad (2.100)$$

Por tanto, las componentes  $T^c{}_{ab}$  son:

$$T^c{}_{ab} = \eta^{cd} g(e_d, T(e_a, e_b)) = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c - e_\nu^c (e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu) \quad (2.101)$$

Finalmente, se puede reescribir la torsión como:

$$\begin{aligned} T &= T^c{}_{ab} \hat{e}_c \otimes e^a \otimes e^b = (e_a^\mu e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^c - e_b^\mu e_a^\nu \partial_\mu e_\nu^c + \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c) e_c \otimes e^a \otimes e^b \\ &= (e_a^\mu e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^c + \Gamma_{ab}^c) e_c \otimes e^a \wedge e^b \\ &= e_c \otimes (de^c + \Gamma_{ab}^c e^a \wedge e^b) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Se define  $T^c = de^c + \Gamma_{ab}^c e^a \wedge e^b$  como la 2-forma torsión, donde  $d$  es el operador derivada exterior. Además, se cumple:

$$T = T^c{}_{ab} \hat{e}_c \otimes e^a \otimes e^b = \frac{1}{2} T^c{}_{ab} e_c \otimes e^a \wedge e^b \quad (2.103)$$

De esta manera obtenemos:

$$T^c \equiv \frac{1}{2} T^c{}_{ab} e^a \wedge e^b, \quad T^c = de^c + \Gamma_{ab}^c e^a \wedge e^b \quad (2.104)$$

El índice libre  $c$  indica que  $T^c$  es una familia de 2-formas, una para cada valor de  $c$ . Así, la torsión puede interpretarse como una colección  $n$ , de 2-formas, donde  $n$  es la dimensión de la variedad. En esta expresión, identificamos un objeto geométrico fundamental: **La Conexión de Espín**. Definimos las componentes de esta conexión como las siguientes 1-formas:

$$w^c_b = \Gamma^c_{ab} e^a \quad (2.105)$$

Por lo tanto, la torsión queda expresada como:

$$T^c = de^c + w^c_b \wedge e^b \quad (2.106)$$

Esta expresión se conoce como la **primera ecuación de Cartán**.

### Contorsión

Sea el tensor contorsión, una forma bilineal, que actúa sobre dos vectores en el espacio  $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$  definido por:

$$K(X, Y) = \nabla_X Y - \overset{\bullet}{\nabla}_X Y \quad (2.107)$$

Esta definición expresa la contorsión como la diferencia entre la conexión general  $\nabla$  y la conexión de Levi-Civita  $\overset{\bullet}{\nabla}$ . La conexión de Levi-Civita se definirá posteriormente; por ahora basta con mencionar que es la conexión libre de torsión que conecta la teoría general de Einstein-Cartán con la relatividad general. Si introducimos la Ec. (2.107) en la torsión (2.91), se obtiene:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \underbrace{\left( \overset{\bullet}{\nabla}_X Y - \overset{\bullet}{\nabla}_Y X - [X, Y] \right)}_{=0} + K(X, Y) - K(Y, X) \\ &= K(X, Y) - K(Y, X) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Donde la torsión, bajo la conexión de Levi-Civita, es nula.

En una base coordinada las componentes de la torsión, en función de la contorsión, vienen dadas por:

$$T^\sigma_{\mu\nu} = K^\sigma_{\mu\nu} - K^\sigma_{\nu\mu} \quad (2.109)$$

Aplicando la diferencia  $(\nabla_X - \overset{\bullet}{\nabla}_X)$  sobre el tensor métrico  $g$  (evaluado en dos vectores  $Y, Z$ ), se obtiene la siguiente relación de productos internos que involucra a la contorsión:

$$g(K(X, Y), Z) = -g(Y, K(X, Z)) \quad (2.110)$$

Pasando a componentes, en una base coordenada, la expresión anterior implica la siguiente antisimetría:

$$K_{\lambda\mu\nu} = -K_{\nu\mu\lambda} \quad (2.111)$$

A partir de la anterior propiedad y la Ec. (2.109), se obtienen las componentes del tensor contorsión en función de la torsión:

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}) \quad (2.112)$$

## 2.2.4 Curvatura

La curvatura de una variedad diferenciable se define como el conmutador de dos derivadas covariantes actuando sobre un vector, corrigiendo la no conmutatividad de la base (Monsalve, 2018, p. 11):

$$R(A, B, C) = [\nabla_A, \nabla_B]C - \nabla_{[A, B]}C \quad (2.113)$$

Este operador cumple con la propiedad de antisimetría:

$$R(A, B, C) = -R(B, A, C) \quad (2.114)$$

Geoméricamente, la curvatura mide la variación de un vector bajo transporte paralelo. En un espacio curvo, al transportar un vector a lo largo de trayectorias cerradas, se observa una diferencia entre el vector inicial y el transportado. Esta diferencia refleja la no conmutatividad de las derivadas covariantes de dos campos vectoriales base (Monsalve, 2018, p. 12).

Si evaluamos la definición (2.113) en una base coordenada, se obtienen las componentes del tensor de curvatura general:

$$R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda, \mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda, \nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} \quad (2.115)$$

De manera equivalente, puede escribirse como:

$$R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu, \mu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu, \nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\nu} \quad (2.116)$$

En una base no coordenada  $e_a$ , la curvatura se obtiene como:

$$\begin{aligned} R(e_a, e_b, e_c) &= [\nabla_a, \nabla_b]e_c - \nabla_{[e_a, e_b]}e_c \\ &= \nabla_a(\Gamma^g{}_{bc}e_g) - \nabla_b(\Gamma^g{}_{ac}e_g) - C^g{}_{ab}\nabla_g e_c \end{aligned} \quad (2.117)$$

Luego, las componentes se determinan mediante la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} R^d_{cab} &= \eta^{dn} g(e_n, R(e_a, e_b, e_c)) = e^d[R(e_a, e_b, e_c)] \\ &= e_a[\Gamma^d_{bc}] - e_b[\Gamma^d_{ac}] + \Gamma^g_{bc}\Gamma^d_{ag} - \Gamma^g_{ac}\Gamma^d_{bg} - C^g_{ab}\Gamma^d_{gc} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Se define la 2-forma curvatura como:

$$R^a_b = \frac{1}{2} R^d_{cab} e^a \wedge e^b \quad (2.119)$$

Y, utilizando la expresión (2.118), se obtiene:

$$R^a_b = \Gamma^d_{cg} de^g + \Gamma^g_{cb} \Gamma^d_{ga} e^a \wedge e^b + e^a_\mu (\partial_\mu \Gamma^d_{cb} e^a \wedge e^b) \quad (2.120)$$

Para simplificar esta expresión, calculamos la derivada exterior de una base no coordinada  $e^g$ :

$$de^g = d(e^g_\nu dx^\nu) = \partial_\mu e^g_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = e^a_\mu e^b_\nu \partial_\mu e^g_\nu e^a \wedge e^b \quad (2.121)$$

De esta manera, se obtienen las componentes de la 2-forma curvatura  $R^a_b$  como:

$$\begin{aligned} R^a_b &= d(\Gamma^d_{cb} e^b) + (\Gamma^d_{ga} e^a) \wedge (\Gamma^g_{cb} e^b) \\ R^a_b &= dw^a_b + w^a_c \wedge w^c_b \end{aligned} \quad (2.122)$$

Donde  $w^a_b$  son las 1-formas de la conexión espín. La Ec. (2.122) se conoce como la **segunda ecuación de Cartán** y muestra que la curvatura se expresa naturalmente en términos de la conexión y su derivada exterior.

Podemos obtener la curvatura 2-forma mediante la derivada exterior covariante<sup>4</sup>. Esta se define como:

$$D = d + w \wedge \quad (2.123)$$

Aplicada a un vector con componentes  $\phi^a$ , se tiene:

$$D\phi^a = d\phi^a + w^a_b \phi^b, \quad w^a_b \wedge \phi^b \equiv w^a_b \phi^b \quad (2.124)$$

<sup>4</sup>Usamos la derivada exterior covariante  $D$  porque  $d$  no es covariante bajo cambios locales de marco. Bajo la derivada  $D$  se cumple:  $Dv \rightarrow \Lambda(Dv)$ .

Al aplicar nuevamente  $D$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
D^2\phi^a &= D[d\phi^a + w^a_b\phi^b] \\
&= d[d\phi^a + w^a_b\phi^b] + w^a_b [d\phi^a + w^a_c\phi^c] \\
&= [dw^a_b + w^a_c \wedge w^c_b] \phi^b
\end{aligned} \tag{2.125}$$

El término entre corchetes corresponde precisamente a la 2-forma de curvatura  $R^a_b$ . Esto refuerza la interpretación de que la curvatura surge como la obstrucción (o medición de cuánto evita) a la nilpotencia ( $D^2 \neq 0$ ) de la derivada exterior covariante. Caso contrario a la derivada exterior ordinaria, que sí es nilpotente  $d^2 = 0$ .

Finalmente, aplicando la derivada exterior covariante a la 2-forma curvatura, se obtiene la identidad de Bianchi (Monsalve, 2018, p. 13):

$$DR^a_b = dR^a_b + w^a_c \wedge R^c_b - w^c_b \wedge R^a_c \equiv 0 \tag{2.126}$$

La identidad de Bianchi muestra cómo la estructura de la curvatura está restringida por la conexión y su consistencia geométrica (como una ley de conservación geométrica). En relatividad general, donde la Torsión es nula, esta identidad lleva a la conservación del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ .

De la misma forma, el tensor de torsión  $T^a$  cumple:

$$DT^a = dT^a + w^a_c \wedge T^c \tag{2.127}$$

## 2.2.5 Conexiones métricas

Una conexión se dice métrica (o métricamente compatible) si preserva la condición (Monsalve, 2018, p. 14):

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} \equiv Q_{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{2.128}$$

Bajo (2.128), la derivada covariante del producto escalar cumple la regla de Leibniz:

$$\nabla_\mu (g_{\nu\lambda} V^\nu W^\lambda) = g_{\nu\lambda} (\nabla_\mu V^\nu) W^\lambda + g_{\nu\lambda} V^\nu (\nabla_\mu W^\lambda)$$

Mientras que si  $Q_{\mu\nu\lambda} \neq 0$ , aparece un término adicional  $(\nabla_\mu g_{\nu\lambda}) V^\nu W^\lambda$ .

En una base ortonormal  $\{e_a\}$  con  $g_{ab} = \eta_{ab}$ , la condición (2.128) equivale a:

$$0 = \nabla_c \eta_{ab} = -\omega^d_{ac} \eta_{db} - \omega^d_{bc} \eta_{ad} \iff \omega_{abc} + \omega_{bac} = 0, \quad (2.129)$$

O, de forma compacta:

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}. \quad (2.130)$$

De esta manera, la ansitimetría de la conexión espín indica una conexión métrica, en una base ortonormal<sup>5</sup>.

## 2.2.6 Conexión Levi-Civita

Si a la condición de metricidad (Ec. 2.130), le añadimos el requerimiento de torsión nula, es decir:

$$T^a = de^a + w^a_c \wedge e^c = 0 \quad (2.131)$$

La conexión espín queda completamente determinada. En este caso, se obtiene la conexión de Levi-Civita, dada en base no coordenada como (Monsalve, 2018, p. 15):

$$(w_{ab})_c = \frac{1}{2} [(de_a)_{bc} + (de_b)_{ca} - (de_c)_{ab}] \quad (2.132)$$

En una base coordenada, se obtienen los símbolos de Christoffel  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$  en función del tensor métrico:

$$\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.133)$$

En relatividad general, las geodésicas se definen como curvas autoparalelas respecto a la conexión de Levi-Civita. Si  $U$  es el vector tangente a la curva, la condición es:

$$\frac{dU}{d\lambda} = 0 \rightarrow U^i \nabla_i U^j = 0 \quad (2.134)$$

Lo que conduce a la ecuación diferencial de las geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (2.135)$$

<sup>5</sup>En una teoría con no-metricidad  $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} \neq 0$ , la conexión fijada sera no métrica.

## 2.2.7 Teorías de Gravedad Modificada

Con el propósito de resumir y organizar los objetos geométricos introducidos anteriormente, partimos de la idea de caracterizar una variedad mediante un conjunto de vectores  $e_a$  y 1-formas  $e^b$  en el espacio tangente local. Sin embargo, estos objetos, junto con los operadores de la derivada de Lie y la derivada exterior, no son suficientes para describir completamente la geometría de una variedad arbitraria. Para alcanzar esta descripción general, es necesario introducir el operador conexión, a partir del cual se definen dos objetos fundamentales: la 1-forma de torsión y la 2-forma de curvatura (Monsalve, 2018, p. 16). Asimismo, la conexión espín, introducida en la Ec. (2.105), indica cómo varían los vectores base respecto de sí mismos. De este modo:

- El tensor de torsión queda determinado en función de la conexión espín, las bases y su derivada exterior.
- El tensor de curvatura se expresa en términos de la conexión espín y su derivada exterior.

Por lo tanto, torsión y curvatura son propiedades de la conexión, y caracterizan el movimiento de los objetos de una variedad, salvo que se incorporen nuevos grados de libertad asociados a la condición de metricidad. La condición de metricidad se expresa a través del tensor:

$$Q_{\mu\nu\lambda} = \nabla_{\mu}g_{\nu\lambda}$$

Cuando  $Q_{\mu\nu\lambda} = 0$ , la conexión se dice que es métrica-compatible, lo que implica que la conexión espín es antisimétrica. El espacio-tiempo resultante recibe el nombre de espacio-tiempo de Riemann-Cartan (Monsalve, 2018, p. 17). Si, además de la condición de metricidad, se anula la torsión bajo una determinada conexión, la conexión queda determinada por el tensor métrico. Esto conduce a la conexión de Levi-Civita, cuyas componentes están dadas por los símbolos de Christoffel (2.133). El espacio-tiempo resultante se denomina espacio-tiempo de Riemann, el cual constituye la estructura geométrica fundamental de la teoría de la relatividad general. En cambio, bajo la conexión de Weitzenböck se anula a la curvatura, pero se permite la existencia de torsión. La métrica y la conexión quedan determinadas por las bases no coordinadas ortonormales  $e_a$ , relacionadas con las bases coordinadas  $\partial_{\mu}$  a través de los vielbeins  $e_a^{\mu}$ .

En este caso el espacio-tiempo se denomina espacio-tiempo de Weitzenböck (Monsalve, 2018, p. 17). Este es el escenario en el cual se formula la gravedad teleparalela, una teoría alternativa a la relatividad general. Finalmente, si tanto la torsión como la curvatura se anulan bajo una determinada conexión, se obtiene un espacio plano y métrico-compatible: el espacio-tiempo de Minkowski. Este constituye el caso más simple y sirve de punto de partida para las teorías relativistas en ausencia de gravedad.

En el presente trabajo de tesis, nos centraremos en una teoría gravitacional basada en la no-metricidad, donde tanto la torsión como la curvatura se anulan en una conexión no métrico-compatible:  $Q_{\mu\nu\lambda} \neq 0$ . Exploraremos el marco teórico adecuado para obtener esta teoría a partir de la formulación general de gravedad que incluye los componentes de curvatura ( $R$ ), torsión ( $T$ ) y no-metricidad ( $Q$ ). En el siguiente capítulo se introducirá la Tríada  $R, T, Q$ , cuyas definiciones y relaciones nos permitirán derivar una teoría gravitacional bajo una conexión establecida. En el Apéndice (B.1) se muestran los conceptos fundamentales de la teoría teleparalela y en el Apéndice (B.2) se analizan las distintas conexiones geométricas que nos llevan a un determinado marco teórico.

## Capítulo 3

# Conexiones y geometrías de la gravedad: curvatura, torsión y no-metricidad

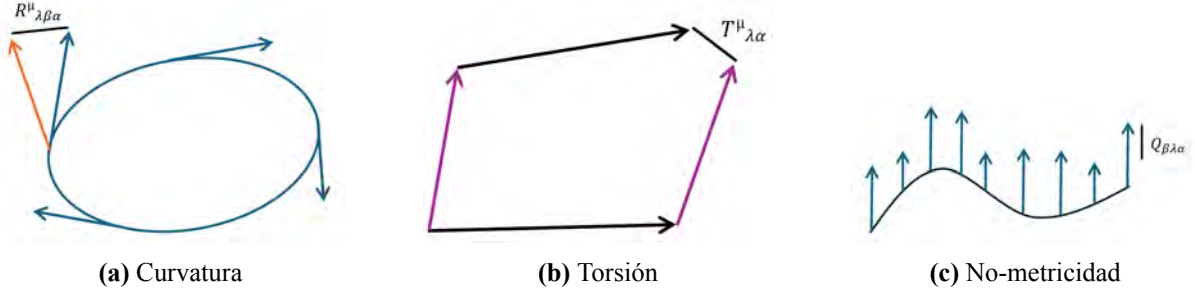
En este capítulo exploraremos la teoría general conformada por la tríada de tensores: curvatura, torsión y no metricidad. Se mostrará cómo los diferentes objetos pueden ser separados en términos asociados a cada tensor geométrico ( $R, T, Q$ ). Luego, definiremos la acción en una teoría de no-metricidad y mediante el método *minisuperspace* se determinarán las ecuaciones de Friedmann con una breve discusión del resultado.

### 3.1 Marco general

En el capítulo 2 se definieron los tensores curvatura y torsión, ahora introduciremos al tensor no-metricidad  $Q_{\lambda\mu\nu} = \nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}$  y explicaremos los efectos geométricos de cada objeto tensorial. En primer lugar, la curvatura es la rotación resultante que adquiere un vector al ser transportado paralelamente alrededor de una curva cerrada; esto es lo que describe la “Relatividad General” (GR). La torsión es la no clausura del paralelogramo que se forma al transportar paralelamente un vector a lo largo de otro (y viceversa); caracteriza al “Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General” (TEGR). Mientras que la no metricidad es la variación de la longitud (y del ángulo) de un vector durante su transporte paralelo<sup>1</sup>; es el rasgo distintivo del “Equivalente Teleparalelo Simétrico de la Relatividad General” (STGR). Estos efectos se aprecian geoméricamente en la siguiente imagen<sup>2</sup>:

<sup>1</sup>En la sección (3.3) se detalla matemáticamente este efecto mediante el transporte paralelo.

<sup>2</sup>Las imágenes son propias, pero tomadas como referencia de (Beltrán Jiménez, Heisenberg y Koivisto, 2019)



**Figura 3.1:** Triada geométrica: curvatura, torsión y no-metricidad.

En una geometría con curvatura, torsión y no-metricidad, los tres efectos se combinan y actúan simultáneamente en el transporte paralelo de un vector. Sin embargo, cada teoría gravitacional por separado describe la gravedad: la curvatura mediante el escalar de Ricci  $\dot{R}$  en relatividad general, la torsión mediante el escalar de torsión  $T$  y la no metricidad mediante el escalar de no-metricidad  $Q$ . Son teorías equivalentes a nivel de fondo y en teoría de perturbaciones con acoplo mínimo (Beltrán Jiménez, Heisenberg y Koivisto, 2019). Por otro lado, es importante comprender el rol de la **conexión** ( $\nabla$ ) respecto a los tensores de curvatura, torsión y no-metricidad. La conexión es la estructura que define la derivada covariante y el transporte paralelo entre puntos cercanos del espacio-tiempo. Está ligada a las geodésicas porque sus curvas autoparalelas son las curvas cuya tangente se mantiene paralela; en general es independiente de la métrica<sup>3</sup>. La curvatura, torsión y no-metricidad son propiedades de la conexión debido a que los tres tensores, en su forma de componentes, dependen de las componentes de la conexión.

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} \quad (3.1)$$

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \quad (3.2)$$

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - g_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} \quad (3.3)$$

Fijar la conexión nos permite fijar la teoría gravitacional. En el Apéndice (B) se muestra a detalle cómo podemos movernos entre teorías fijando la conexión.

### 3.1.1 Separación de la conexión

Sea el tensor de no metricidad en componente  $Q_{\alpha\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}$ . La anterior ecuación se demostrará en la sección (3.2). Si permutamos los índices obtenemos las

<sup>3</sup>Solo bajo la teoría de relatividad general la conexión que la genera (Levi-Civita) sí depende de la métrica (bajo los símbolo de Christoffel).

siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} &= Q_{\alpha\mu\nu} \\
\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} &= Q_{\mu\nu\alpha} \\
\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu} &= Q_{\nu\alpha\mu}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sumando las dos primeras y restando la última ecuación obtenemos la siguiente expresión

4:

$$T_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} + T_{\nu\alpha}^\beta g_{\mu\beta} + T_{\alpha\mu}^\beta g_{\nu\beta} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - 2\Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\nu\beta} = Q_{\alpha\mu\nu} + Q_{\mu\nu\alpha} - Q_{\nu\alpha\mu} \tag{3.5}$$

Introducimos los símbolos de Christoffel  $\dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ , el tensor de contorsión  $K^\alpha_{\mu\nu}$  y el tensor de deformación  $L^\alpha_{\mu\nu}$ .

$$\dot{\Gamma}_{\alpha\mu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) \tag{3.6}$$

$$K^\beta_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} T^\beta_{\alpha\mu} + T_{(\alpha}{}^\beta{}_{\mu)} \tag{3.7}$$

$$L^\beta_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} Q^\beta_{\alpha\mu} - Q_{(\alpha}{}^\beta{}_{\mu)} \tag{3.8}$$

De esta manera la conexión se separa en una base coordenada como:

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\beta = \dot{\Gamma}_{\alpha\mu}^\beta + K^\beta_{\alpha\mu} + L^\beta_{\alpha\mu}. \tag{3.9}$$

### 3.1.2 Separación del tensor de curvatura

#### Base Coordenada

Sea la definición general del tensor de curvatura en base coordenada:

$$R^\alpha_{\nu\lambda\mu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \tag{3.10}$$

Luego, con la descomposición de la conexión (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}
R^\alpha_{\nu\lambda\mu} &= \partial_\lambda (\dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + K^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}) - \partial_\mu (\dot{\Gamma}_{\lambda\nu}^\alpha + K^\alpha_{\lambda\nu} + L^\alpha_{\lambda\nu}) \\
&+ (\dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma + K^\sigma_{\mu\nu} + L^\sigma_{\mu\nu}) (\dot{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\alpha + K^\alpha_{\lambda\sigma} + L^\alpha_{\lambda\sigma}) \\
&- (\dot{\Gamma}_{\lambda\nu}^\sigma + K^\sigma_{\lambda\nu} + L^\sigma_{\lambda\nu}) (\dot{\Gamma}_{\mu\sigma}^\alpha + K^\alpha_{\mu\sigma} + L^\alpha_{\mu\sigma})
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Bajo la simetría del tensor métrico  $g_{\mu\nu} \equiv g_{\nu\mu}$

Expandiendo todos los términos y agrupando se obtiene:

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{\nu\lambda\mu} &= \dot{R}^\alpha{}_{\nu\lambda\mu} + (\dot{\nabla}_\lambda K)^\alpha{}_{\mu\nu} - (\dot{\nabla}_\mu K)^\alpha{}_{\lambda\nu} + (K^\alpha{}_{\lambda\rho} K^\rho{}_{\mu\nu} - K^\alpha{}_{\mu\rho} K^\rho{}_{\lambda\nu}) \\
&+ (\dot{\nabla}_\lambda L)^\alpha{}_{\mu\nu} - (\dot{\nabla}_\mu L)^\alpha{}_{\lambda\nu} + (L^\alpha{}_{\lambda\rho} L^\rho{}_{\mu\nu} - L^\alpha{}_{\mu\rho} L^\rho{}_{\lambda\nu}) \\
&+ K^\sigma{}_{\mu\nu} L^\alpha{}_{\lambda\sigma} - K^\sigma{}_{\lambda\nu} L^\alpha{}_{\mu\sigma} + L^\sigma{}_{\mu\nu} K^\alpha{}_{\lambda\sigma} - L^\sigma{}_{\lambda\nu} K^\alpha{}_{\mu\sigma}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si fijamos la conexión de Levi-Civita, anulando los tensores contorsión y disformación, obtenemos el tensor de Riemann de relatividad general.

### Base No Coordinada

Para obtener la descomposición del tensor de curvatura en una base no coordinada partimos de la segunda ecuación de Cartán y de la descomposición:  $w^a{}_b = \dot{w}^a{}_b + K^a{}_b + L^a{}_b$ .

$$R^a{}_b = d\dot{w}^a{}_b + \dot{w}^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b, \quad \dot{R}^a{}_b = d\dot{w}^a{}_b + \dot{w}^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b \tag{3.12}$$

Reemplazando la descomposición, se obtiene:

$$R^a{}_b = d(\dot{w}^a{}_b + K^a{}_b + L^a{}_b) + (\dot{w}^a{}_c + K^a{}_c + L^a{}_c) \wedge (\dot{w}^c{}_b + K^c{}_b + L^c{}_b) \tag{3.13}$$

Expandiendo y acomodando los términos convenientemente:

$$\begin{aligned}
R^a{}_b &= [d(\dot{w}^a{}_b) + \dot{w}^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b] + [d(K^a{}_b) + \dot{w}^a{}_c \wedge K^c{}_b + K^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b] + K^a{}_c \wedge K^c{}_b \\
&+ [d(L^a{}_b) + L^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b + \dot{w}^a{}_c \wedge L^c{}_b] + L^a{}_c \wedge L^c{}_b + L^a{}_c \wedge K^c{}_b + K^a{}_c \wedge L^c{}_b \\
&= \dot{R}^a{}_b + DK^a{}_b + K^a{}_c \wedge K^c{}_b + DL^a{}_b + L^a{}_c \wedge L^c{}_b + L^a{}_c \wedge K^c{}_b + K^a{}_c \wedge L^c{}_b
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por lo tanto, la conexión se separa en cuatro componentes: una parte puramente métrica, una parte asociada a la contorsión, otra relacionada con el tensor de disformación, y un último término que representa la interacción entre los tensores  $L$  y  $K$ .

$$R^a{}_b = \dot{R}^a{}_b + [DK^a{}_b + K^a{}_c \wedge K^c{}_b] + [DL^a{}_b + L^a{}_c \wedge L^c{}_b] + [L^a{}_c \wedge K^c{}_b - L^c{}_b \wedge K^a{}_c] \tag{3.15}$$

### 3.1.3 Separación del tensor de Torsión en base no coordinada

Tenemos la primera ecuación de Cartán:

$$T^a = de^a + w^a{}_c \wedge e^c \tag{3.16}$$

Si consideramos la descomposición de  $w^a_c$ , obtenemos:

$$T^a = de^a + w^a_c \wedge e^c \rightarrow T^a = de^a + \dot{w}^a_c \wedge e^c + K^a_c \wedge e^c + L^a_c \wedge e^c \quad (3.17)$$

La primera ecuación de Cartán, bajo la conexión de Levi-Civita, se escribe como:

$$de^a + \dot{w}^a_c \wedge e^c = 0 \quad (3.18)$$

Por lo tanto,

$$T^a = K^a_c \wedge e^c + L^a_c \wedge e^c \quad (3.19)$$

### 3.1.4 Separación del tensor de no-metricidad en base no coordenada

Tenemos la definición de la no-metricidad en una base anholonómica:

$$Q_{ab} = dg_{ab} - 2w_{(ab)} \quad (3.20)$$

Si consideramos la descomposición de  $w$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= dg_{ab} - w_{ab} - w_{ba} \\ Q_{ab} &= dg_{ab} - (\dot{w}_{ab} + K_{ab} + L_{ab}) - (\dot{w}_{ba} + K_{ab} + L_{ab}) \\ Q_{ab} &= \dot{Q}_{ab} - 2K_{(ab)} - 2L_{(ab)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Bajo la conexión de Levi-Civita la no-metricidad es nula ( $\dot{Q}_{ab} = 0$ ), entonces:

$$Q_{ab} = \dot{Q}_{ab} - 2K_{(ab)} - 2L_{(ab)} \quad (3.22)$$

## 3.2 Una nueva ecuación de Cartán para el tensor de no metricidad

Aplicando la conexión sobre la métrica se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\alpha} g &= \nabla_{\partial_\alpha} (g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu) = \partial_\alpha g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu - g_{\mu\nu} \nabla_{\partial_\alpha} (dx^\mu) \otimes dx^\nu - g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes \nabla_{\partial_\alpha} (dx^\nu) \\ &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu - g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\beta \otimes dx^\nu - g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu dx^\mu \otimes dx^\beta \\ &= (\partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) dx^\mu \otimes dx^\nu \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto,

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \quad (3.24)$$

Junto a los *vielbeins*, obtenemos la **tercera ecuación de Cartán**:

$$Q_{ab} = dg_{ab} - w_{ab} - w_{ba} \equiv dg_{ab} - 2w_{(ab)} \quad (3.25)$$

### 3.3 Teoría de No-Metricidad

El tensor de no-metricidad se define como:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = Q_{\alpha\mu\nu} \quad (3.26)$$

El efecto de este objeto en la geometría se comprende definiendo un vector  $V = V^{\nu} \partial_{\nu}$ , cuyo modulo  $|V|^2 = g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$  es transportado paralelamente sobre la curva  $\mathcal{C}$ , la cual tiene los vectores tangentes  $U = U^{\mu} \partial_{\mu}$ . Sea el transporte paralelo del vector  $V$  a lo largo de la curva:

$$\nabla_U V = 0 \rightarrow U^{\mu} \nabla_{\partial_{\mu}} (V^{\alpha} \partial_{\alpha}) = 0 \quad (3.27)$$

Expandiendo,

$$U^{\mu} \underbrace{(\partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V^{\nu})}_{\nabla_{\mu}(V^{\alpha})} \partial_{\alpha} = 0 \quad (3.28)$$

Para estudiar cómo cambia el módulo de un vector  $V$  a lo largo de una curva, y comprender cómo cambia con respecto a esta, recurrimos a la forma abstracta:  $g(V, V) \equiv |V|^2 = g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}$ . Aplicamos en ella la conexión respecto a un vector  $U$  para obtener la ecuación de transporte:

$$\begin{aligned} \nabla_U [g(V, V)] &= (\nabla_U g)(V, V) + 2g(\underbrace{\nabla_U V}_{=0}, V) \\ &= U^{\alpha} (\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu}) V^{\mu} V^{\nu} \\ &= U^{\alpha} Q_{\alpha\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Con este resultado, demostramos que el módulo del vector a lo largo de la curva se mantendrá constante, siempre y cuando  $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ . Sin embargo, en una teoría donde el tensor de no-metricidad es distinto de cero, dicho módulo si cambiará. Por lo tanto, el tensor de no-metricidad mide cómo cambia el módulo de un vector cuando es transportado paralelamente sobre una curva  $\mathcal{C}$ . Otra posible interpretación se da mediante el cambio del ángulo  $\theta$  entre dos vectores  $A$  y  $B$  que son transportados paralelamente sobre la curva  $\mathcal{C}$ . Dada la notación  $g(A, B)$

como el producto interno entre  $A$  y  $B$ , sabemos de manera coloquial que este producto está asociado al ángulo entre los vectores. Por lo tanto, se cumple:  $g(A, B) \propto \cos(\theta)$ . Si transportamos este producto interno  $g(A, B)$  sobre la curva, con vectores tangentes  $U$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_U[g(A, B)] &= (\nabla_U g)(A, B) + g(\nabla_U A, B) + g(A, \nabla_U B) \\ &= U^\alpha (\nabla_\alpha g_{\mu\nu}) A^\mu B^\nu \\ &= U^\alpha Q_{\alpha\mu\nu} A^\mu B^\nu\end{aligned}\tag{3.30}$$

Nuevamente aparece el tensor de no-metricidad, si este fuera nulo significaría que la razón de cambio del producto interno  $g(A, B)$ , asociado al ángulo entre los vectores, es nulo. Por tanto, en una teoría donde el tensor de no-metricidad es distinto de cero, el ángulo entre dos vectores que se transportan paralelamente a lo largo de una curva cambiará a lo largo de esta.

### 3.3.1 Conexión *Coincident Gauge*

En el marco simétrico teleparalelo se impone una conexión afín plana sin curvatura y torsión:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0, \quad T^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$$

De modo que toda la información geométrica se codifica en la no-metricidad  $Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu}$ . Bajo estas dos condiciones, la conexión puede escribirse globalmente como (Beltrán Jiménez, Heisenberg y Koivisto, 2018):

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda\tag{3.31}$$

Donde  $\xi^\lambda(x)$  son funciones suaves que definen un sistema de coordenadas  $\{\xi^\lambda\}$ , distinto del sistema original  $\{x^\mu\}$ .

La conexión *coincident gauge* es la elección de coordenadas  $\xi^\lambda = x^\lambda$ , como consecuencia:

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0\tag{3.32}$$

En este gauge la no-metricidad se reduce a:  $Q_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu}$ , y las dinámicas tipo  $Q$ ,  $f(Q)$  o  $f(Q, \phi)$  se formulan directamente en términos del métrico. Bajo esta conexión se definen los siguientes tensores en una teoría de no-metricidad:

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= Q_{\alpha\mu}{}^\mu, & Q^\alpha &= Q^\alpha{}_\mu{}^\mu \\
\tilde{Q}_\alpha &= Q_{\mu\alpha}{}^\mu, & \tilde{Q}^\alpha &= Q_\mu{}^{\alpha\mu}
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

El ‘‘Superpotencial’’ de la teoría de no-metricidad se define como:

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}Q^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Q_{(\mu}{}^\alpha{}_{\nu)} + \frac{1}{4}(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)}
\tag{3.34}$$

El escalar de no-metricidad se define como:

$$Q = -Q_{\alpha\mu\nu}P^{\alpha\mu\nu} = -\frac{1}{4}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\mu\alpha\nu} + \frac{1}{4}Q_\alpha Q^\alpha - \frac{1}{2}Q_\alpha \tilde{Q}^\alpha
\tag{3.35}$$

Finalmente, la relación entre el escalar de no-metricidad con el escalar de Ricci bajo la conexión *coincident gauge* es:

$$\dot{R} = -Q + \dot{\nabla}_\mu (\tilde{Q}^\mu - Q^\mu)
\tag{3.36}$$

### 3.4 Equivalencia entre curvatura y no-metricidad

Para observar la equivalencia se utilizan las ecuaciones de Friedmann. Dichas ecuaciones describen la dinámica cosmológica bajo la métrica homogénea e isótropa de Friedmann-Lemáitre–Robertson–Walker (FLRW). Cuando dos teorías, pese a sus diferencias geométricas, conducen al mismo sistema de ecuaciones, se consideran equivalentes a nivel de fondo<sup>5</sup>. En relatividad general, acoplado un fluido de materia perfecto con densidad  $\rho$  y presión  $p$ , se escriben como:

$$3H^2 = \kappa^2 \rho, \quad -2\dot{H} = \kappa^2 (\rho + p), \quad \kappa^2 = 8\pi G
\tag{3.37}$$

Donde  $H$  es el parámetro de Hubble definido como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , la constante  $\kappa$  en términos de la masa de Planck es  $\kappa = \frac{1}{M_{\text{pl}}}$  y  $G$  es la constante de gravitación de Newton.

Sea la acción en el marco STGR (*Symmetric Teleparallel Gravity*):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{Q}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right] + \int d^4x \partial_\mu [\sqrt{-g}(\tilde{Q}^\mu - Q^\mu)]
\tag{3.38}$$

<sup>5</sup>Véase la derivación detallada de las ecuaciones de Friedmann en la teoría de Relatividad General en el capítulo (5), llamado Cosmología Estándar de Fondo.

Donde  $Q$  es el escalar de no-metricidad y  $\mathcal{L}_m$  la densidad Lagrangiana de materia bariónica y la segunda integral es el término de borde que no influye en las ecuaciones dinámicas de fondo. Para hallar las ecuaciones dinámicas empleamos el método de *minisuperspace* para un espacio-tiempo FLRW plano con<sup>6</sup>:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.39)$$

El proceso y resultados se visualizan en el código “Teorías  $R - T - Q$ ” de la referencia (Casimiro, 2025); el código determina las ecuaciones dinámicas bajo los tres modelos gravitacionales. Acoplando un fluido de materia de fondo, las ecuaciones de Friedmann que se obtienen son:

$$3H^2 = \kappa^2 \rho, \quad -2\dot{H} = \kappa^2 (\rho + p) \quad (3.40)$$

Junto con la ecuación de conservación de la materia:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (3.41)$$

Se verifica que, para este modelo, las ecuaciones de Friedmann coinciden con las del marco con acción de Einstein–Hilbert, acoplada mínimamente a un fluido de materia bariónica. En consecuencia, ambos modelos son indistinguibles a nivel de fondo. Ahora bien, al incorporar un campo escalar, las características observadas de la energía oscura pueden describirse en el marco de la no-metricidad de forma equivalente (a nivel de fondo) al enfoque de curvatura pura, cuando se adopta la conexión de Levi-Civita.

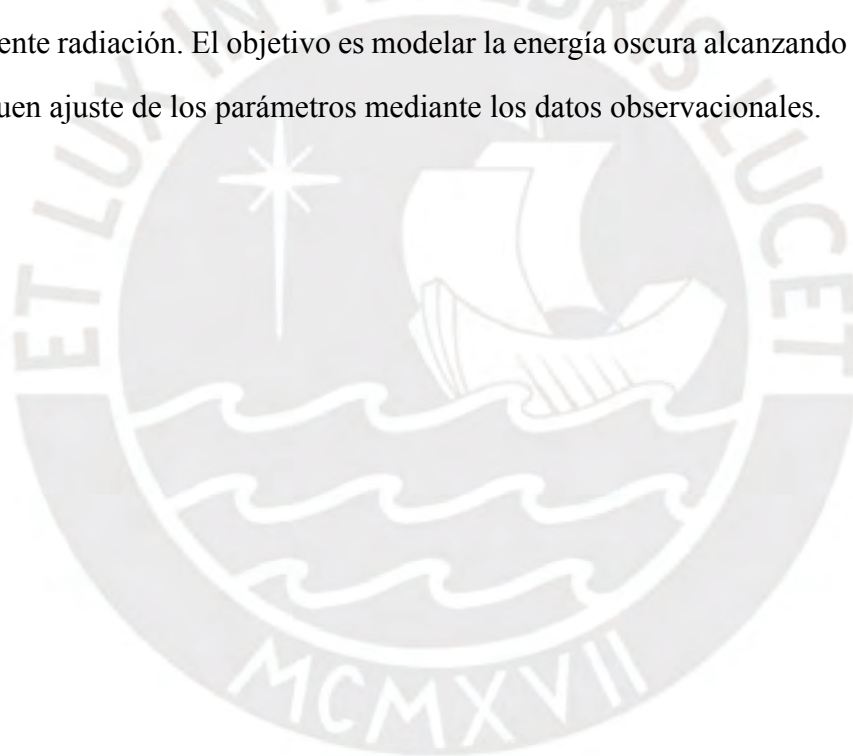
Durante años se han propuesto varias modificaciones del modelo  $\Lambda$ CDM, el cual utiliza la acción de Einstein–Hilbert para describir la energía oscura. La adición de campos escalares, la incorporación de invariantes o la modificación de la propia geometría han sido las propuestas más cautivadoras. En esta última se encuentran las teorías  $f(R)$ , que en el marco de Jordan son equivalentes (mediante una transformación conforme y una redefinición de campo) a una acción en el marco de Einstein acoplado mínimamente a un campo escalar canónico<sup>7</sup>. Por otro

<sup>6</sup>Véase el detalle del método de Minisuperspace en la sección (5.4)

<sup>7</sup>Marco de Jordan: la materia está acoplada mínimamente a la métrica  $g_{\mu\nu}$  y la gravedad puede escribirse con acoplo no mínimo o como  $f(R)$ . Marco de Einstein: tras una transformación conforme  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  y una redefinición de campo, la parte gravitatoria adopta la forma de Einstein–Hilbert con un escalar canónico, mientras la materia acopla a  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  mediante un factor dependiente del escalar a pesar de no haber acoplamiento anteriormente (Felice y Tsujikawa, 2010).

lado, conocemos la equivalencia entre las teorías con curvatura, torsión y no-metricidad. Sin embargo, las teorías  $f(R)$  y  $f(Q)$  no son equivalentes, lo cual permite mayor exploración para modelar la energía oscura con distintas teorías gravitacionales.

Explorar teorías modificadas basadas en la no-metricidad puede brindar nuevos resultados que contribuyan a resolver las tensiones cosmológicas que actualmente existen en las teorías estándar  $R$  o  $f(R)$ , así como otros problemas señalados en la introducción. Con esta motivación, en los capítulos siguientes se desarrollará: una introducción breve a los fundamentos de la relatividad general; cosmología estándar con tres componentes de materia (incluyendo como consecuencia el caso particular  $\Lambda$ CDM), el marco de la quintaesencia, y una teoría  $f(Q, \phi)$  que modifica la geometría, añade un campo escalar tipo dilatón con interacción con la materia y acopla mínimamente radiación. El objetivo es modelar la energía oscura alcanzando una evolución adecuada y buen ajuste de los parámetros mediante los datos observacionales.



# Capítulo 4

## Relatividad General

### 4.1 Curvatura bajo la conexión de Levi-Civita

En esta sección describimos las cantidades tensoriales que cuantifican la curvatura, inducida por la conexión de Levi-Civita, asociada a una métrica  $g_{\mu\nu}$ <sup>1</sup>. Comenzamos definiendo la conexión de Levi-Civita; con ella introducimos el tensor de Riemann como medida intrínseca de la curvatura. A continuación, consideramos sus contracciones: el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Cerramos con el tensor de Weyl, la parte libre de traza del tensor de Riemann.

#### Símbolos de Christoffel y conexión de Levi-Civita

Por el teorema fundamental de la geometría pseudo-Riemanniana: la conexión de Levi-Civita  $\overset{\bullet}{\nabla}$  es la única conexión afín que es métrica compatible  $\overset{\bullet}{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = 0$  y sin torsión  $\overset{\bullet}{\Gamma}^\rho_{[\mu\nu]} = 0$  (Nakahara, 2003, p. 261). Sus componentes en una carta coordenada son los símbolos de Christoffel:

$$\overset{\bullet}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (4.1)$$

Es importante recordar que los  $\overset{\bullet}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$  no son componentes tensoriales sino funciones de la elección de coordenadas: bajo un cambio de coordenadas se transforman de forma afín (Reall, 2017, p. 41). Sin embargo, las combinaciones que definen el tensor de Riemann son tensoriales, de modo que la curvatura es una propiedad geométrica intrínseca.

Los símbolos de Christoffel aparecen también en las ecuaciones de las geodésicas, anteriormente definidas:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \overset{\bullet}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>En general, las conexiones no dependen de la métrica.

Por tanto determinan la trayectoria de partículas libres (con el transporte de sus vectores velocidad) y la definición de derivada covariante.

## Tensor de Riemann

El tensor de Riemann mide el fallo del transporte paralelo cerrado y es la expresión fundamental de la curvatura en variedades Riemannianas. Bajo la conexión de Levi-Civita, el único efecto que encontramos asociado a la no planitud de la conexión es la rotación resultante de un vector al ser transportado paralelamente; el tensor de Riemann surge a partir de estas propiedades (Carroll, 1997, p. 73-74). Para la conexión de Levi-Civita (sin torsión y compatible con la métrica), sus componentes se escriben como:

$$\dot{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\dot{\Gamma}^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\dot{\Gamma}^{\rho}_{\mu\sigma} + \dot{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}\dot{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\sigma} - \dot{\Gamma}^{\rho}_{\nu\lambda}\dot{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\sigma} \quad (4.3)$$

Este tensor satisface varias simetrías importantes (Carroll, 1997, p. 79):

$$\dot{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = -\dot{R}_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad \dot{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = -\dot{R}_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad \dot{R}_{\rho\sigma\mu\nu} = \dot{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.4)$$

Además, sea la primera y segunda identidad de Bianchi, bajo índices coordinados, en una teoría sin torsión:

$$\dot{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \dot{R}^{\rho}_{\mu\nu\sigma} + \dot{R}^{\rho}_{\nu\sigma\mu} = 0, \quad \nabla_{[\lambda}\dot{R}_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad (4.5)$$

Al contraer la segunda identidad, se obtiene la identidad de bianchi contraída (Carroll, 1997, p. 81):

$$\dot{\nabla}^{\mu}(\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R}) = 0 \Rightarrow \dot{\nabla}^{\mu}G_{\mu\nu} = 0 \quad (4.6)$$

## Tensor de Ricci y escalar de Ricci

Al contraer dos índices apropiados del tensor de Riemann se obtiene el tensor de Ricci, una cantidad simétrica de segundo orden:

$$\dot{R}_{\mu\nu} = \dot{R}^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad \dot{R}_{\mu\nu} = \dot{R}_{\nu\mu} \quad (4.7)$$

La contracción adicional con la métrica define el escalar de Ricci:

$$\dot{R} = g^{\mu\nu}\dot{R}_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

El tensor de Ricci y el escalar de Ricci son las trazas del tensor de Riemann; es decir, no describen completamente la curvatura local (Riemann mide la curvatura local pues mide el efecto en cada punto de la variedad).

En relatividad general, el tensor de Ricci y su escalar, aparecen directamente en las ecuaciones de campo Einstein; se discutirá el método de obtención de estas ecuaciones mediante la variación en la sección (4.3). Sean las ecuaciones de campo, incluyendo un fluido de materia:

$$G_{\mu\nu} = \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad \kappa^2 = 8\pi G \quad (4.9)$$

Se observa que la parte contraída de la curvatura (Ricci y su escalar) está directamente ligada a la materia; la información restante del tensor de Riemann, no contenida en Ricci, se asocia al tensor de Weyl (Carroll, 1997, p. 82). Se define como:

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = \dot{R}_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2}(g_{\rho[\mu}\dot{R}_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}\dot{R}_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}\dot{R}g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} \quad (4.10)$$

## 4.2 Métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

Esta métrica, abreviada como FLRW, se adopta como consecuencia del llamado “Principio Cosmológico”: para grandes escalas (ignorando las anisotropías locales) el universo es homogéneo e isotrópico (Amendola y Tsujikawa, 2010, p. 7). Es la métrica más general en cosmología para describir homogeneidad e isotropía en un espacio-tiempo. La homogeneidad implica que las propiedades macroscópicas (por ejemplo, densidad de energía o de materia) no dependan de la posición; en la métrica (4.11) esto se refleja en la presencia del factor de escala  $a(t)$ , que multiplica la parte espacial y codifica la expansión (o contracción) global del espacio. La isotropía exige además que esas propiedades no cambien con la dirección de observación, lo que conlleva simetrías bajo rotaciones. En conjunto, homogeneidad y isotropía aseguran simetrías bajo traslaciones y rotaciones del espacio tridimensional, justificando el uso de coordenadas comóviles<sup>2</sup> y la métrica *FLRW* como fondo cosmológico y campo gravitatorio<sup>3</sup>.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad k = -1, 0, +1 \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>Las coordenadas comóviles se definen a partir del factor de escala:  $r_{\text{físico}} = a(t)r$  (Baumann, 2022, p. 20).

<sup>3</sup>En la métrica se encuentra la constante  $k$ , el cual dependiendo de su valor nos brinda un universo cerrado (curvatura positiva), plano (curvatura nula) o un universo abierto (curvatura negativa)

## 4.3 Acción de Hilbert-Einstein

Consideramos la acción de Hilbert–Einstein bajo la conexión de Levi-Civita mínimamente acoplada a un Lagrangiano de materia  $\mathcal{L}_m$ . El factor  $\sqrt{-g}$  aparece por el elemento de volumen cuadrimensional  $dV = d^4x\sqrt{-g}$ . La acción total toma la forma:

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \dot{R} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad \kappa^2 = 8\pi G \quad (4.12)$$

### 4.3.1 Ecuaciones de Einstein

Al variar la acción (4.12) respecto al campo dinámico  $g_{\mu\nu}$  se obtienen las ecuaciones de campo Einstein:

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad T^{(m)}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (4.13)$$

En el caso específico en que el Lagrangeano de materia, además de depender del tensor métrico, involucre un campo dinámico adicional  $\phi$  (y de sus derivadas), es decir:  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, \phi, \dot{\phi})$ . Se obtiene en la variación una ecuación asociada al campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} - \nabla_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\nabla_{\mu} \phi)} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Además, su dependencia con el tensor métrico generará un tensor energía-momento adicional asociado al campo dinámico.

$$T_{\mu\nu} = T^{(\phi)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu} \quad (4.15)$$

La Ec. (4.14) se reduce a una de tipo Klein–Gordon sobre el fondo FLRW. En el Apéndice (C) se muestra a detalle la variación de la acción de Hilbert-Einstein con un campo escalar acoplado mínimamente.

Para modelos con acoplamientos no canónicos o no mínimos, las ecuaciones de Friedmann son afectadas por términos adicionales propias del acoplamiento no mínimo. Esto se estudiará en un próximo capítulo bajo una teoría de no-metricidad con la conexión *coincident gauge*. Por otro lado, en cosmología, los Lagrangianos de materia que dependen tanto del tensor métrico como de un campo escalar (sin derivadas), producen una **interacción** entre la materia y campo escalar, afectando principalmente a sus ecuaciones de continuidad. Este fenómeno se considera en un modelo presentado en el Apéndice (E.2).

# Capítulo 5

## Cosmología Estándar de fondo

En este capítulo se establecen las nociones fundamentales de la cosmología de fondo y se presentan dos marcos de referencia: el modelo con tres tipos de fluido y el modelo de quintaesencia. Partiendo de las ecuaciones de campo Einstein, expuestas en el capítulo anterior, se derivan las ecuaciones de Friedmann; además, se introducen: la caracterización de los distintos contenidos de materia, el número de e-folds  $N$  y el corrimiento al rojo  $z$ . Se presentan los datos observacionales que se utilizarán en los modelos; asimismo, se describen los métodos matemáticos, numéricos y estadísticos empleados: el método de *minisuperspace*, el análisis por sistemas dinámicos y la inferencia bayesiana MCMC. El capítulo culmina con la formulación explícita de los modelos y la presentación de sus resultados.

### 5.1 Ecuaciones de Friedmann

Para esta sección consideramos el estudio de fondo de un universo homogéneo e isotrópico con curvatura espacial  $k$ , descrito por la métrica de Friedmann Robertson Walker (4.11). Definimos las ecuaciones de campo Einstein de la siguiente forma:

$$E^{\alpha}_{\beta} \equiv \dot{R}^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}\dot{R} - \kappa^2 T^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad (5.1)$$

Para el contenido de materia, adoptamos un modelo de fluido perfecto cuyo tensor energía-momento es dado por:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_{\alpha}u_{\beta} + g_{\mu\nu}p \quad (5.2)$$

Los vectores  $u^{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$  y  $u_{\alpha} = (-1, 0, 0, 0)$  representan las componentes del vector velocidad del fluido, en unidades naturales, el cual está en co-movimiento con la expansión del

espacio. Dado el vector velocidad  $u$ , definido como:  $u = u_\alpha dx^\alpha = u^\alpha \partial_\alpha$ ; se tiene que  $u = \partial_t$  y  $u = -dt$ . Por lo tanto, se cumple:  $u \cdot u = -1$ . En esta base,  $T^\mu_\nu$  resulta:

$$T^\alpha_\beta = (\rho + p)u^\alpha u_\beta + p\delta^\alpha_\beta \Rightarrow T^\mu_\nu = \text{Diag}(-\rho, p, p, p) \quad (5.3)$$

Donde la traza adopta la forma:

$$T^\alpha_\alpha = (\rho + p) \underbrace{u^\alpha u_\alpha}_{-1} + 4p = 3p - \rho \quad (5.4)$$

Bajo la métrica, las ecuaciones de campo Einstein (5.1) resultan:

$$\kappa^2 \rho - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3k}{a^2} = 0 \quad (5.5)$$

$$\kappa^2 p + \frac{2\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = 0 \quad (5.6)$$

Estas ecuaciones describen completamente la dinámica del modelo. Con ellas, obtenemos información de la evolución en expansión. Definimos el parámetro de Hubble y su primera derivada como<sup>1</sup>:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad (5.7)$$

Ahora, re-escribimos las ecuaciones de campo, para  $a(t)$ , en función del parámetro de Hubble. De esta manera, se obtienen las ecuaciones de Friedmann:

- Ecuación de Friedmann-Lemaitre: A partir de la Ec. (5.5).

$$\kappa^2 \rho - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3k}{a^2} = 0 \Rightarrow H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (5.8)$$

- Tasa de cambio del parámetro de Hubble: A partir de la Ec. (5.6)

$$\kappa^2 p + \frac{2\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = 0 \Rightarrow \dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + p) + \frac{k}{a^2} \quad (5.9)$$

- Despejando  $\ddot{a}(t)/a(t)$  en la Ec. (5.6), se obtiene la ecuación de expansión acelerada:

$$\kappa^2 p + \frac{2\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) \quad (5.10)$$

La última ecuación, se le llama ecuación de expansión pues nos indica la restricción para la cual nuestro modelo generará una expansión acelerada. Esto es:  $\rho + 3p < 0$ . Más adelante se definirá la ecuación de estado (5.1.1); mediante ella, la condición de expansión queda:  $\omega < -1/3$ .

<sup>1</sup>Las observaciones se registran en función del parámetro  $H$ , no en función del factor de escala  $a(t)$ .

## Ecuación de Continuidad

Sea la ecuación de campo Einstein,  $G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$ . De acuerdo a la identidad de Bianchi contraída Ec. (4.6), se demuestra la conservación del tensor energía-momento:

$$\dot{\nabla}^\mu G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \dot{\nabla}^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (5.11)$$

A partir de las Ecs. (5.11, 5.2) se obtiene:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0 \quad (5.12)$$

Esta ecuación también puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Friedmann. Derivando la Ec. (5.8) se obtiene:

$$2H\dot{H} = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}}{3} + \frac{2k^2}{a^3} \dot{a}$$

Luego reemplazamos la Ec. (5.9) en la anterior expresión y obtenemos:

$$2H \left[ -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + p) + \frac{k^2}{a^2} \right] = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}}{3} + \frac{2k^2}{a^2} H$$
$$-(\rho + p)H = \frac{\dot{\rho}}{3}$$

Entonces,

$$2H\dot{H} = \frac{\kappa^2 \dot{\rho}}{3} + 2\frac{k^2}{a^3} \dot{a} \Rightarrow \dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0 \quad (5.13)$$

Si en la teoría a nivel de acción incluimos interacción ( $Q(z)$ , no confundir con el escalar de no-metricidad) entre la materia y otra componente (como algún campo escalar) la ecuación de continuidad del tipo de materia obtiene la forma:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = Q(z) \quad (5.14)$$

### 5.1.1 Materia, radiación, energía oscura y curvatura

En este apartado se presentan la densidad crítica, la densidad relativa y la ecuación de estado, magnitudes que permiten caracterizar la evolución de los distintos componentes de materia del universo. Nos centraremos en los siguientes tipos de fluido: materia bariónica<sup>2</sup>, radiación,

---

<sup>2</sup>En la literatura, se llama materia bariónica o materia ordinaria a toda la materia que está formada por átomos, excluyendo a la materia oscura. Además, se llama materia tipo polvo a toda materia (bariónica o materia oscura) que cumple con  $\omega_m = 0$ .

energía oscura (por ahora descrita como constante cosmológica) y la curvatura espacial ( $k$ ), el cual no es un tipo de materia, pero se puede re-escribir como un fluido efectivo. El punto de partida es mediante la Ec. (5.8) de Friedmann–Lemaître, el cual se modificará al añadir más términos de materia.

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (5.15)$$

### Densidad crítica

Se define la densidad crítica, a una determinada época, como:

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{\kappa^2}, \quad \kappa^2 = 8\pi G \quad (5.16)$$

Donde en el caso plano ( $k = 0$ ), la densidad crítica coincide con la densidad total de todo el contenido de materia en el universo. Para la época actual, la densidad crítica en un universo aproximadamente plano según las observaciones es (Baumann, 2022, p. 48)<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{crit},0} &= \frac{3H_0^2}{\kappa^2} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} \\ &= 2.8 \times 10^{11} h^2 M_{\odot} \text{ Mpc}^{-3} \\ &= 1.1 \times 10^{-5} h^2 \text{ protons cm}^{-3} \end{aligned} \quad (5.17)$$

### Densidad relativa

La densidad relativa se define, en una época dada, como el cociente entre la densidad de energía y la densidad crítica de alguna componente de materia. Dado que es una relación de densidades, no tiene unidades.

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}, \quad i = r, m, \Lambda, \dots \quad (5.18)$$

Mediante las anteriores definiciones, la ecuación de Friedmann-Lemaître en un modelo con tres materias acopladas mínimamente y curvatura espacial ( $k \neq 0$ ), queda de la siguiente forma:

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho_r}{3} + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3} + \frac{\kappa^2 \rho_{\Lambda}}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (5.19)$$

<sup>3</sup>El subíndice “0” se denotará para cantidades evaluadas en el tiempo actual  $t_0$ .

Además, las densidades de energía de cada componente tienen la siguiente evolución en función del factor de escala  $a(t)$ :

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}, \quad \rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}, \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} a^0$$

Si ahora, dividimos por  $H_0^2$  en ambos lados de la Ec. (5.19), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\kappa^2}{3H_0^2} (\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2} a^{-2} \\ \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{1}{\rho_{\text{crit},0}} \left( \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda - \frac{\rho_{\text{crit},0} k}{H_0^2} a^{-2} \right) \\ \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{1}{\rho_{\text{crit},0}} (\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda + \rho_k) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Por lo tanto,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (5.21)$$

Se introduce el parámetro densidad relativa efectiva de curvatura y se define como:  $\Omega_{k,0} = -\frac{k}{H_0^2}$ . Hemos usado las densidades en la época actual (y no las generales) para determinar la ecuación que relaciona la constante de Hubble, en alguna época arbitraria, comparado con su valor en la época actual. Luego, evaluando ambos lados con la convención del tiempo actual:  $a(t_0) \equiv 1$ , obtenemos la siguiente ecuación de restricción:

$$1 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} \quad (5.22)$$

En modelos cosmológicos post-inflacionarios, donde nos interesa estudiar las épocas pasadas a un determinado *redshift*<sup>4</sup>, la ecuación de restricción toma la forma:

$$1 = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \quad \Omega_k = -\frac{k}{H^2} \quad (5.23)$$

Esta ecuación establece que, si en cierta época domina **exclusivamente** una componente de materia, entonces para dicha componente  $i$ -ésima se cumple:  $\Omega_i = 1$ ; en consecuencia, las densidades relativas de las demás componentes serán nulas. Sin embargo, puede haber dominancia de un tipo de materia y aún así existir las demás componentes:  $\Omega_r = 0.1$ ,  $\Omega_m = 0.3$ ,

<sup>4</sup>El *redshift*  $z$  indica la época cosmológica en la que nos encontramos; véase la Sección 5.3.

$\Omega_\Lambda = 0.6$ ,  $\Omega_K = 0$ . Además, se cumple lo siguiente para los distintos valores de  $k = -1, 0, 1$ :

$$k > 0 \text{ (Universo cerrado)} \Rightarrow \Omega_k < 0 \Rightarrow \sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_k > 1, \quad (5.24)$$

$$k = 0 \text{ (Universo plano)} \Rightarrow \Omega_k = 0 \Rightarrow \sum_i \Omega_i = 1, \quad (5.25)$$

$$k < 0 \text{ (Universo abierto)} \Rightarrow \Omega_k > 0 \Rightarrow \sum_i \Omega_i = 1 - \Omega_k < 1. \quad (5.26)$$

### Ecuación de estado

Se define la ecuación de estado como la relación entre la presión y densidad de energía de alguna componente de materia. Esto es:

$$\omega = \frac{p}{\rho} \quad (5.27)$$

Los distintos tipos de fluido se caracterizan por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\text{Materia bariónica o materia oscura fría} \rightarrow \omega = 0$$

$$\text{Radiación} \rightarrow \omega = \frac{1}{3}$$

$$\text{Constante cosmológica} \rightarrow \omega = -1$$

En una teoría que incluye distintos tipos de fluido, se define la ecuación de estado total o efectiva como la ecuación de estado de todo el contenido de materia:

$$\omega_{\text{total}} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3} \quad (5.28)$$

Además, la condición de expansión acelerada, vista en la sección (5.1), se modifica para varias componentes de materia como:

$$\omega_{\text{total}} < -\frac{1}{3} \quad (5.29)$$

## 5.2 El número de e-folds como variable temporal

El tiempo  $N$  e-fold se interpreta como una re-definición del tiempo ordinario que sigue la siguiente definición:

$$N \equiv \ln(a) \rightarrow dN = H dt, \quad a \equiv a(t) \quad (5.30)$$

Entonces, podemos obtener todas las ecuaciones de *FLRW* y la ecuación de continuidad en el tiempo  $N$  e-fold. La notación de derivada para el tiempo ordinario será con un punto encima, en cambio para el tiempo  $N$  e-fold serán derivadas primadas.

$$H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} \rightarrow H^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (5.31)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho + p) + \frac{k}{a^2} \rightarrow H' = -\frac{\kappa^2}{2H}(\rho + p) + \frac{k}{a^2 H} \quad (5.32)$$

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0 \rightarrow \rho' + 3(\rho + p) = 0 \quad (5.33)$$

### 5.3 *Redshift* $z$ como variable

El *redshift* cosmológico  $z$  cuantifica la dilatación de longitudes de onda de la luz debido a la expansión del Universo. En cosmología se utiliza como una variable independiente similar al tiempo  $t$ . Se define mediante:

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda} = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (5.34)$$

Donde  $\lambda$  y  $\lambda_{\text{obs}}$  son las longitudes de onda emitida y observada, respectivamente,  $a(t)$  es el factor de escala y, por convención,  $a_0 \equiv a(t_0) = 1$  en la época actual. Se tiene:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \rightarrow -\ln(1 + z) = \ln(a) = N \quad (5.35)$$

Cuanto mayor es el *redshift*, mayor es el corrimiento al rojo; en consecuencia, nos ubicamos en épocas más antiguas. En cambio, valores negativos de  $z$  se interpretan como épocas futuras que el modelo predice. Otra interpretación se da con el siguiente ejemplo: si una galaxia emite un *redshift*  $z = 1$ , la luz observada se emitió cuando el universo tenía la mitad de su tamaño  $a = 1/2$ ; en cambio, para  $z = 2$ , habrá emitido sus fotones cuando el universo tenía un tercio de su tamaño  $a = 1/3$  (Baumann, 2022, p. 28).

Para propósitos numéricos y de visualización computacional, en modelos con ecuación de estado  $\omega$  variable, será útil la variable logarítmica:

$$Z \equiv \log_{10}(1 + z) \rightarrow \frac{d}{dZ} = -\ln(10) \frac{d}{dN} \quad (5.36)$$

Es habitual registrar gráficos en función del parámetro  $Z$  (Gonzalez-Espinoza y Otalora, 2021); además, brinda soluciones numéricas con gráficas mucho más suaves que si utilizamos  $N$

como variable de integración. Sin embargo, para registrar y comparar el parámetro de Hubble, se debe determinar en función del redshift  $z$ . En modelos sencillos, como el de tres tipos de fluido que se explorará más adelante, se utilizó  $N$  para integración numérica; sin embargo, en el modelo de Quintaesencia se utilizó  $Z$ . Se tienen las relaciones:

$$Z = \log_{10}(1+z), \quad N = -\log_{10} Z, \quad N = -\ln(1+z) \quad (5.37)$$

Con estas definiciones podemos obtener la solución analítica de la ecuación de continuidad de un tipo de materia con ecuación de estado  $\omega$  constante con o sin interacción (el último será útil para el modelo propuesto en la tesis):

$$\dot{\rho} + 3H(1+\omega)\rho = 0 \implies \rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+\omega)} \quad (5.38)$$

$$\dot{\rho} + 3H(1+\omega)\rho = Q(z) \implies \rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+\omega)} \exp\left(-\int_0^z \frac{Q(\tilde{z})}{\rho(\tilde{z})H(\tilde{z})(1+\tilde{z})} d\tilde{z}\right) \quad (5.39)$$

El resultado de la Ec. (5.39) es válido siempre y cuando  $Q \propto \rho$ . Además, es importante resaltar que dicha solución se obtuvo con la interacción  $Q$  mostrada en la ecuación de continuidad temporal, no con la interacción  $Q_2$  que puede presentarse en la ecuación redefinida en el  $N$  e-fold como:  $\rho' + 3(1+\omega)\rho = Q_2(z)$ .

## 5.4 Método del *Minisuperspace*

Este método ofrece una técnica para obtener las ecuaciones de Friedmann sin necesidad de recurrir a la variación completa de la acción de un determinado modelo. Se propone homogeneidad e isotropía adoptando la métrica Friedmann-Robertson-Walker ( $k = 0$ ) con una variable *lapse*  $N(t)$  en el término temporal. Este término permite variar respecto a la componente temporal de la métrica, que normalmente es la unidad; de hecho,  $N$  actúa como multiplicador de Lagrange: su ecuación de Euler–Lagrange impone la restricción Hamiltoniana, que en cosmología coincide con la **primera ecuación de Friedmann** (Haro, 2024).

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.40)$$

Al insertar este *ansatz* en la acción, se obtiene una acción efectiva unidimensional de la

forma:

$$S = \int dt \mathcal{L}_{\text{eff}}(a, \dot{a}; N; \phi), \quad (5.41)$$

Donde  $\phi$  denota a un campo escalar y los puntos indican derivadas temporales. En esta reducción  $N(t)$  no posee derivadas temporales;  $a(t)$  es la variable dinámica del sector geométrico y la variable de  $\phi$  aporta una dinámica independiente.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange sobre  $N(t)$  y  $a(t)$ . La variación respecto de  $N$  entrega la restricción del sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial N} = 0, \quad (5.42)$$

A partir de ella se identifica la primera ecuación de Friedmann, una vez se expresa en términos de  $H \equiv \dot{a}/(aN)$ . La variación respecto de  $a(t)$  produce la ecuación dinámica del fondo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial a} = 0, \quad (5.43)$$

Esta corresponde a la segunda ecuación de Friedmann (o ecuación de Raychaudhuri), luego de utilizar la anterior restricción en ella. Tras derivar ambas ecuaciones, se fija el *lapse* temporal  $N = 1$  para permanecer en la métrica Lorentziana.

Si el modelo incluye un campo escalar homogéneo  $\phi(t)$ , se obtiene además su ecuación de movimiento mediante:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \phi} = 0, \quad (5.44)$$

Esta ecuación determina la evolución de  $\phi$  en el fondo. En conjunto, el sistema formado por la restricción generado por  $N$ , la ecuación dinámica para  $a(t)$  y, cuando corresponde, la ecuación para  $\phi(t)$ , reproduce directamente las ecuaciones de Friedmann del modelo considerado. Para modelos más complejos como  $f(T)$  o  $f(Q, \phi)$ , este método es particularmente eficaz para el estudio del fondo<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Se denomina estudio de fondo (o *background*) al análisis de la evolución del universo bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía. En cambio, la teoría de perturbaciones aborda las desviaciones respecto de ese fondo, donde ya no se asumen dichas simetrías de forma estricta, por lo que no es un estudio a nivel de fondo.

## 5.5 Método de Sistemas Dinámicos

La técnica de sistemas dinámicos consiste en transformar las ecuaciones Friedmann en un sistema autónomo de ecuaciones no lineales. Para ello, comenzaremos por abarcar los tópicos para hallar la solución de un sistema lineal y no lineal (Strogatz, 2018).

### 5.5.1 Sistemas lineales

Los sistemas lineales son modelos matemáticos que describen cómo las variables de entrada y salida se relacionan mediante ecuaciones lineales. Estos son descritos de la siguiente manera:

$$\dot{x} = ax + bx \quad (5.45)$$

$$\dot{y} = cx + dy \quad (5.46)$$

Si los interpretamos con notación matricial, tenemos:

$$\dot{X} = AX \quad (5.47)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Las soluciones  $(x, y)$  que se obtienen para este tipo de sistemas están bien estudiadas, una de estas son las trayectorias especiales en línea recta que conforman un crecimiento o decaimiento exponencial (Strogatz, 2018). Para visualizar este comportamiento, interpretamos el sistema lineal (5.47) como la ecuación diferencial de la forma  $\dot{x} = ax$ , cuya solución es una exponencial. Es por ello que buscamos soluciones exponenciales:

$$x(t) = e^{\lambda t}v \quad (5.49)$$

Donde  $v$  es un vector y  $\lambda$  es la tasa de crecimiento.

Estas soluciones representarían un movimiento exponencial a lo largo de la línea definida por el vector  $v$ . Al reemplazar la Ec. (5.49) en la Ec. (5.47), se obtiene:

$$Av = \lambda v \quad (5.50)$$

La Ec. (5.50) se trata de una “ecuación de autovalores”, el cual se resuelve hallando  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Donde  $I$  es la matriz identidad.

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5.51)$$

Acomodando términos para obtener una ecuación cuadrática.

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \quad (5.52)$$

Donde,

$$\tau = \text{Tr}(A) = a + d \quad (5.53)$$

$$\Delta = \det(A) = ad - bc \quad (5.54)$$

Lo que nos lleva a las siguientes soluciones para los autovalores<sup>6</sup>:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (5.55)$$

Cabe resaltar que los valores propios o autovalores dependen de la traza y determinante de la matriz  $A$  (5.53, 5.54). En el caso especial en que los autovalores sean distintos, existe un teorema del álgebra lineal que establece que sus respectivos autovectores ( $v$ ) serán linealmente independientes. Esto nos permite escribir una condición inicial  $X_0$  de la forma  $X_0 = c_1v_1 + c_2v_2$  (Strogatz, 2018). De acuerdo con la Ec. (5.49) y la condición inicial para  $X_0$ , podemos escribir la solución general de la forma simplificada:

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

## 5.5.2 Sistemas dinámicos no lineales

Ahora procederemos con la solución de un sistema no lineal. Consideramos las siguientes ecuaciones diferenciales para  $x(t), y(t)$ .

$$\dot{x} = f(x, y, t) \quad \dot{y} = g(x, y, t) \quad (5.57)$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son llamadas autónomas si no contienen explícitamente términos que dependen de  $t$ , ya que correspondería a un sistema sobredeterminado.

<sup>6</sup>Un ejemplo ilustrativo para el caso lineal se incluye en el Apéndice (D.1).

## Puntos críticos o fijos

Un punto  $(x_c, y_c)$  será un punto crítico de un sistema autónomo si cumple:

$$(f, g) \Big|_{(x_c, y_c)} = 0 \quad (5.58)$$

Además, dicho punto crítico es un atractor o sumidero si cumple para  $t \rightarrow \infty$ , lo siguiente:

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (x_c, y_c) \quad (5.59)$$

## Estabilidad de puntos fijos

Nuestro objetivo es linealizar la Ec. (5.57). Para ello, consideramos perturbaciones en torno a los puntos críticos. El análisis de estabilidad lineal permite determinar si las trayectorias del sistema se acercan (atractores) o se alejan (repulsores/*saddle point*) de los puntos fijos. Consideramos pequeñas perturbaciones  $\delta x, \delta y$  tal que:

$$x = x_c + \delta x, \quad y = y_c + \delta y \quad (5.60)$$

Entonces reemplazamos las Ecs. (5.60) en las Ecs. (5.57). Sean  $\delta x = \mu$  y  $\delta y = \nu$ , se obtiene:

$$\dot{x} = \dot{\mu} = f(x_c + \mu, y_c + \nu) \quad (5.61)$$

$$\dot{y} = \dot{\nu} = g(x_c + \mu, y_c + \nu) \quad (5.62)$$

Consideramos perturbaciones lo suficientemente menor a 1; entonces, se hace la expansión en Taylor de cada una.

$$\dot{\mu} = f(x_c, y_c) + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \nu \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(\mu^2, \nu^2, \mu\nu) \quad (5.63)$$

$$\dot{\nu} = g(x_c, y_c) + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial g}{\partial y} + \mathcal{O}(\mu^2, \nu^2, \mu\nu) \quad (5.64)$$

Por tanto, se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Reemplazando los valores de  $\mu$  y  $\nu$  como  $\delta x$  y  $\delta y$ , nombrando a la matriz cuadrada como  $\mathcal{M}$  tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Para nuestros fines, redefinimos las derivadas temporales en el tiempo  $N$  e-fold (No se utiliza la definición  $dN = Hdt$ , únicamente se redefine al  $N$  e-fold). Entonces el sistema, para las perturbaciones, queda:

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\mu^2, \nu^2, uv) \quad (5.67)$$

La matriz Jacobiano  $\mathcal{M}$  viene dada por:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x=x_c, y=y_c)} \quad (5.68)$$

La Ec. (5.67) se convierte en un sistema lineal (se anulan los términos de mayor orden) cuando la matriz  $\mathcal{M}$  es evaluada en los puntos críticos o fijos  $(x_c, y_c)$ . Por lo que podemos usar la solución general dada para un sistema lineal (5.56). La matriz  $\mathcal{M}$  posee 2 autovalores,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , dados por la Ec. (5.55). Entonces, la solución general para la evolución de las perturbaciones lineales es escrita como:

$$\delta x = c_1 e^{\lambda_1 N} + c_2 e^{\lambda_2 N} \quad (5.69)$$

$$\delta y = c_3 e^{\lambda_1 N} + c_4 e^{\lambda_2 N} \quad (5.70)$$

Donde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son constantes de integración.

La estabilidad alrededor de los puntos fijos depende de los autovalores<sup>7</sup>  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . A continuación se detalla la clasificación de la estabilidad mediante los autovalores (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006):

1. Nodo Estable:  $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0$ .
2. Nodo Inestable:  $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0$ .

<sup>7</sup>Un ejemplo ilustrativo para el caso no lineal se incluye en el Apéndice (D.2).

3. Punto Silla:  $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 > 0 \vee (\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0)$ .

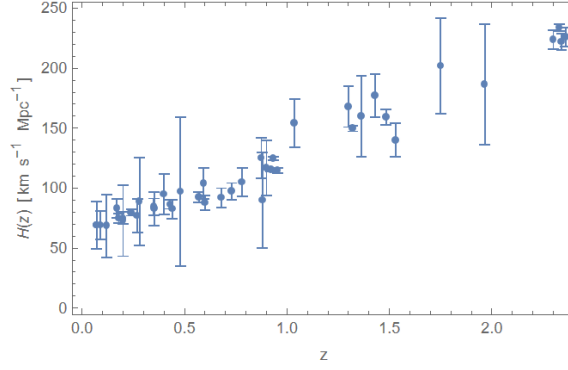
4. Espiral Estable: El determinante de la matriz  $\mathcal{M}$  es negativo y las partes reales de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son negativas.

De la anterior clasificación cabe resaltar que un punto fijo  $(x_c, y_c)$  será un atractor en los casos (1) y (4), pero no lo es en los casos (2) y (3) (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006).

Este método permite restringir los parámetros de un modelo imponiendo un régimen de estabilidad favorable. En este trabajo se implementará dicha metodología para fijar parámetros y obtener: diagramas de fase, curvas de evolución, densidades relativas, ecuaciones de estado y el parámetro de Hubble. Asimismo, resulta útil identificar previamente las propiedades cosmológicas de los puntos críticos antes de explorar todas las estabilidades que ofrece el modelo. La razón es que muchas configuraciones estables no se comportan (ni conducen) como la evolución cosmológica que muestran las observaciones. Si conocemos la física de los puntos fijos, podemos fijar la estabilidad de cada punto en función de esa física. Por ejemplo, se sabe que la radiación dominó en una época pasada y que dicha fase concluyó para dar paso a la dominancia de materia (Baumann, 2022); por ende, en nuestro modelo, los puntos con comportamiento de radiación ( $\omega = 1/3$ ) deben ser inestables, de modo que las curvas de evolución se alejen de ese punto.

## 5.6 Datos observacionales - *Cosmic Chronometers*

Técnica observacional que estima directamente  $H(z)$  a partir de la variación de edad de galaxias pasivas cercanas en redshift:  $H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$  (Jimenez y Loeb, 2002). En este trabajo incorporamos las mediciones  $H(z_i)$  con sus incertidumbres  $\sigma_{H_i}$  y redshifts  $z_i$ , en unidades  $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ . Estas observaciones se emplean para compararlos con los valores del parámetro de Hubble  $H(z)$  del modelo, luego de fijar sus parámetros o ajustarlos mediante un análisis estadístico (mínimos  $\chi^2/\text{MCMC}$ ) y obtener regiones de contorno. A continuación se muestran los datos observacionales en función del *redshift*:



**Figura 5.1:** Datos observacionales *Cosmic Chronometers* en función de  $z$  con barras de error.

En el Apéndice (E.8) se presenta una tabla con los datos observacionales empleados, junto con su referencia de origen.

## 5.7 Marco Estadístico

En esta sección se presentan las definiciones y el procedimiento práctico para ajustar los parámetros de un modelo a datos observacionales (CC:  $H(z)$ , DESI, SNe Ia), obtener las distribuciones *a posteriori* y reportar regiones de contorno. En esta tesis, mediante este segundo método, se busca identificar intervalos de parámetros que se alejen de  $\Lambda$ CDM, pero que se ajusten adecuadamente a los datos. Se emplea el método *MCMC*, mediante *Python*, para colocar una cantidad finita de caminantes en posiciones perturbadas; los cuales, recorrerán la distribución y se estabilizarán en las zonas de mayor probabilidad. Se tomará el enfoque Bayesiano para la interpretación de los resultados estadísticos. Además, para fijar las definiciones de este apartado, me baso en las notas de clase de la Dra. Susana Landau, realizadas en la UTA (Landau, 2025). En la referencia (Casimiro, 2025) se muestran los códigos de *Python* para cada modelo (si se requiere correr el código, se debe cambiar la ruta de guardado),

### 5.7.1 Parámetro $\chi^2$

Para datos con errores gaussianos, la discrepancia entre predicciones del modelo y observaciones es medido por el parámetro definido como:

$$\chi^2(\theta) = [d - t(\theta)]^T C^{-1} [d - t(\theta)], \quad (5.71)$$

Donde  $d$  es el vector de datos,  $t(\theta)$  el vector teórico de un modelo y  $C$  la covarianza de datos correlacionados. En la práctica, consideramos un buen ajuste con los datos, cuando el parámetro  $\chi^2$  es menor a 100.

En cosmología, se entiende por dato a todo lo que se registra por medio de técnicas observacionales, el vector teórico lo determina el modelo bajo las mismas condiciones; por ejemplo, si modelamos  $H(z)$ , los datos observacionales y los teóricos deben corresponder a los mismos *redshifts*.

Los datos *cosmic chronometers* (C.C.) suelen usarse con covarianza diagonal<sup>8</sup>:

$$\chi_{CC}^2 = \sum_i \frac{[H_{th}(z_i; \theta) - H_i]^2}{\sigma_{H,i}^2}, \quad (5.72)$$

Mientras que para SNe se usan<sup>9</sup>:

$$\chi_{SNe}^2 = [\mu_{th}(\theta) - \mu]^\top C_{SNe}^{-1} [\mu_{th}(\theta) - \mu]. \quad (5.73)$$

### Parámetros de mejor ajuste (MAP)

Son los valores  $\hat{\theta}$  que maximizan la verosimilitud o la posterior (Amendola y Tsujikawa, 2010, p. 359). Se formulan como:

$$\frac{\partial L(\hat{\theta}_i)}{\partial \hat{\theta}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.74)$$

### Parámetros verdaderos

Son  $\theta^*$ , los valores físicos que describen la realidad dentro del modelo. No se observan directamente; se infieren mediante regiones de contorno. No tienen por qué coincidir con  $\hat{\theta}$  (Amendola y Tsujikawa, 2010, p. 362).

## 5.7.2 Prior, Posterior y Likelihood

**Likelihood.** Con errores gaussianos, informa que tan verosímiles son los datos  $d$ , si los parámetros  $\theta$  fueran los correctos:

$$\mathcal{L}(d | \theta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \chi^2(\theta)\right] \quad (5.75)$$

<sup>8</sup>La principal razón es que estos datos son determinados por medio de trabajos independientes, lo que evita la correlación entre ellos.

<sup>9</sup>En esta tesis no se empleará la data de SNe o DESI; sin embargo, se espera su implementación en futuras investigaciones.

**Prior.** Información previa ( $I$ ) o restricciones físicas, en los parámetros  $\theta$ , antes de observar los datos:

$$\pi(\theta) = p(\theta | I) \quad (5.76)$$

**Posterior.** Inferencia de los parámetros  $\theta$ , luego de observar los datos. Presenta la distribución de densidades de probabilidad para  $\theta$ , luego de ajustar con los datos:

$$p(\theta | d, I) = \frac{\mathcal{L}(d | \theta) \pi(\theta)}{Z}, \quad Z = \int d\theta \mathcal{L}(d | \theta) \pi(\theta) \quad (5.77)$$

Donde  $Z$  es una normalización constante para que las probabilidades sean menores a la unidad.

En los códigos de *Python* se utilizan *priors* uniformes. Estos se definen de la siguiente manera:

$$p(\theta | I) = \begin{cases} K & \text{si } \theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \\ 0 & \text{fuera del intervalo} \end{cases} \quad (5.78)$$

Donde  $K$  es una constante de normalización, necesario si se requiere una comparación entre modelos, para nuestros fines lo fijaremos a 1.

### 5.7.3 Cadenas de Markov

Usamos MCMC para obtener una distribución del posterior  $p(\theta | d)$ . Una vez creado el “terreno”, se definen “walkers” o caminantes en distintas posiciones. Estos, mediante saltos numéricos, recorrerán la distribución para reportar el valor promedio y *MAP*, junto a los intervalos de confianza de las zonas de mayor probabilidad. A continuación se detalla el funcionamiento del código:

- **Inicialización:** se eligen los parámetros a explorar (por ejemplo  $H_0, \lambda, \Omega_{m0}$ ), el número de dimensiones y de caminantes. Se parte cerca de un punto en común con pequeñas perturbaciones y se asegura que todos comiencen dentro del *prior*.
- **Muestreador:** usamos un esquema de *ensemble* (como *emcee* con movimiento *stretch*). Los “caminantes” son puntos que recorren el terreno definido por el *posterior*: prueban saltos, “miden” la altura (densidad de probabilidad) y, como grupo, se espera que tiendan

a visitar más las zonas de mayor probabilidad. Las cadenas se guardan en un archivo para llamar luego.

- **Convergencia:** cada cierto número de pasos se estima el tiempo de autocorrelación  $\tau$ . Se considera convergente cuando las cadenas han recorrido suficiente terreno ( $> 100 \tau$ ) y  $\tau$  se estabiliza (cambios menores al 1%). Si las cadenas no convergen, no podemos afirmar que los intervalos de confianza son los apropiados.
- **Diagnóstico:** se revisa la fracción de aceptaciones, se sugiere un *burn-in*<sup>10</sup> de orden  $\gtrsim 5 \tau$ , y se inspeccionan trazas de algunos caminantes, medias móviles-acumuladas y la evolución de  $\ln \mathcal{L}$  para comprobar estabilidad. En esta tesis se reportarán únicamente las trazas.
- **Aplanado:** se recorta el *burn-in* y se juntan todas las muestras para calcular medias, *MAP*, intervalos creíbles y graficar contornos.

#### 5.7.4 Regiones de Contorno

Los puntos de un contorno son valores en el espacio de parámetros y contienen un valor de densidad de probabilidad; la región encierra aquellos puntos para los cuales la densidad de probabilidad (posterior) integrada acumulada, sea por ejemplo el 68%. En el enfoque Bayesiano, un contorno del 68% indica que, dados los datos, hay un 68% de probabilidad de que los parámetros verdaderos se encuentren dentro de esa región. Formalmente, si  $p(\theta | d)$  es el posterior y  $\vartheta \subset \theta$  un subconjunto de dimensión  $k$ :<sup>11</sup>

$$\mathcal{C}_\alpha = \left\{ \vartheta : p(\vartheta | d) \geq c_\alpha \right\}, \quad \int_{\mathcal{C}_\alpha} p(\vartheta | d) d\vartheta = \alpha$$

La región de contorno es el conjunto de valores de  $\vartheta$  que concentra una fracción (68% o 95%) de la densidad de probabilidad  $p(\theta | d)$ . A continuación se detalla la utilidad de estas gráficas:

<sup>10</sup>El *burn-in* es el número a partir del que aceptaremos las medidas de los caminantes, dado que al inicio los caminantes no siguen una distribución estacionaria.

<sup>11</sup>Donde  $k = 1$  nos da la distribución de probabilidad, y  $k = 2$  nos da la región de contorno.

- Resumir incertidumbre: los contornos muestran dónde se concentra la mayor densidad de probabilidad del posterior y la probabilidad de encontrar los parámetros verdaderos en dicha región.
- Correlaciones: por la forma de las gráficas conocemos si existe o no correlación: contornos circulares  $\equiv$  parámetros casi independientes; alargados o inclinados  $\equiv$  parámetros correlacionados. Se dice que dos variables están correlacionadas si existe alguna dependencia de una en función de la otra (Press et al., 2007, p. 721)
- Comparaciones entre modelos: mismo modelo con distintos *datasets* (C.C., SNe, DESI)  $\rightarrow$  prueba de consistencia; distintos modelos con el mismo *dataset*  $\rightarrow$  selección de modelo. En caso las gráficas no mantengan una buena superposición  $\rightarrow$  tensión. En esta tesis no se presentará este tipo de resultados.
- Estimadores y errores: reporta un valor representativo (media marginal), los parámetros de mejor ajuste (*MAP*) e intervalos de confianza.

## 5.8 Sistema dinámico para un modelo de 3 Tipos de Fluido

Consideramos una teoría, sin curvatura espacial, con tres componentes de fluido barotrópicos<sup>12</sup>. Acción del modelo:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \dot{R} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{M_1} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{M_2} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{M_3} \quad (5.79)$$

La métrica a usar será FLRW (4.11) en el caso plano ( $k = 0$ ). Esto se justifica porque las observaciones cosmológicas más precisas, como las anisotropías del fondo cósmico de microondas, indican que la curvatura espacial del universo es extremadamente pequeña y cercana a cero  $\Omega_k = 0.001 \pm 0.002$  (Planck Collaboration, 2020). Consideramos la siguiente métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (5.80)$$

<sup>12</sup>Un fluido se denomina barotrópico cuando su presión depende linealmente de la densidad de energía, de la forma  $p = \omega \rho$ , donde la ecuación de estado  $\omega$  se asume constante. Además, se consideran fluidos perfectos, este concepto será de mayor utilidad en el modelo de Quintaesencia.

Las ecuaciones de Friedmann, aplicando el método del *Minisuperspace*, son:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \quad (5.81)$$

$$H' = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \frac{\rho_1 + p_1 + \rho_2 + p_2 + \rho_3 + p_3}{H} \right] \quad (5.82)$$

Con ecuaciones de continuidad:

$$\rho_1' = -3(1 + \omega_1)\rho_1, \quad \rho_2' = -3(1 + \omega_2)\rho_2, \quad \rho_3' = -3(1 + \omega_3)\rho_3 \quad (5.83)$$

El primer paso para obtener un sistema de ecuaciones no lineales es adimensionar la primera ecuación de Friedmann (5.81). Al dividir en ambos lados por  $H^2$ , ya que es una variable mayor que cero, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x_1 = \frac{\kappa\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{3}H}, \quad x_2 = \frac{\kappa\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{3}H}, \quad x_3 = \frac{\kappa\sqrt{\rho_3}}{\sqrt{3}H} \quad (5.84)$$

Resultando en la siguiente ecuación de restricción:

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (5.85)$$

Definidas las variables, se procede a tomar sus derivadas respecto al  $N$  e-fold. Luego, el sistema dinámico se muestra como:

$$\frac{dx_1}{dN} = \frac{3x_1}{2}(-\omega_1 + \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2) \quad (5.86)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{3x_2}{2}(-\omega_2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_1 x_1^2 + \omega_3 x_3^2) \quad (5.87)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = \frac{3x_3}{2}(-\omega_3 + \omega_3 x_3^2 + \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2) \quad (5.88)$$

En modelos más complicados, como en Quintaesencia (5.9), se necesitan definir nuevas variables para obtener un sistema de ecuaciones adimensional. En el código llamado “Tipos de fluido”, de la referencia (Casimiro, 2025), se muestra el proceso para la obtención de dicho sistema dinámico con cálculo simbólico en Mathematica.

### 5.8.1 Estabilidad

Determinamos los puntos fijos del sistema:

$$\frac{dx_1}{dN} = F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \frac{dx_2}{dN} = G(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \frac{dx_3}{dN} = Y(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (5.89)$$

Luego, se calcula la matriz Jacobiano, tomando las derivadas parciales de cada función.

$$M = \begin{bmatrix} 3\omega_1 x_1^2 + \frac{3}{2}(-\omega_1 + \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2) & 3\omega_2 x_1 x_2 & 3\omega_3 x_1 x_3 \\ 3\omega_1 x_1 x_2 & 3\omega_2 x_2^2 + \frac{3}{2}(-\omega_2 + \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2) & 3\omega_3 x_2 x_3 \\ 3\omega_1 x_1 x_3 & 3\omega_2 x_2 x_3 & 3\omega_3 x_3^2 + \frac{3}{2}(-\omega_3 + \omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2) \end{bmatrix}$$

Mediante esta matriz, calculamos analíticamente o mediante *Wolfram Mathematica*, los autovalores para cada punto fijo. En este modelo, los puntos fijos que aparecen son:  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ . Estos, se comportan como puntos conformados por: pura materia bariónica, pura radiación o pura energía oscura (excepto el punto  $(0, 0, 0)$ ). Luego, se procede a realizar el análisis de estabilidad. Las variables de este modelo presentan propiedades cosmológicas arbitrarias  $(\omega, \Omega)$ ; es decir,  $x_1, x_2, x_3$  pueden comportarse como cualquier tipo de materia<sup>13</sup>. Esta generalidad no brinda información para restringir la estabilidad; es por ello que, en el código de *Mathematica*, se determinan todos los posibles casos para una determinada estabilidad.

Guiándonos por las observaciones (Planck Collaboration, 2020), buscamos una evolución que se aleje de una época de radiación (inestabilidad), transite por una época de materia y, pasando por un punto de tipo *saddle point*, tienda finalmente a un atractor dominado por una componente con presión negativa (“energía oscura”). En el marco de  $\Lambda$ CDM se propone un modelo precisamente para obtener expansión acelerada; al ajustarlo a los datos, el modelo reproduce las observaciones y, en ese proceso, se introduce (y se identifica de forma indirecta) la energía oscura como la responsable de dicha expansión. La evidencia clave provino de supernovas en 1998 (Riess et al., 1998). Con el modelo de tres tipos de fluido encontraremos, con el análisis de estabilidad y el método MCMC, que  $\Lambda$ CDM es un modelo excelente para explicar la expansión acelerada en una teoría con materia, radiación y alguna componente arbitraria con ecuación de estado  $\omega_3$ .

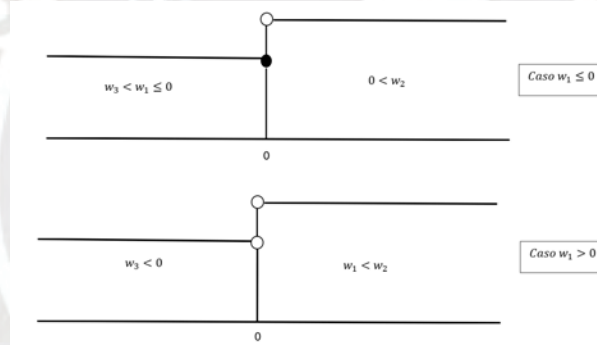
Para ello, seguimos el siguiente procedimiento: elegimos un punto fijo (sea el punto  $(0, 1, 0)$  asociado a  $\omega_2$ ), y le brindamos una estabilidad tipo inestable o *sadde point* al asignar determinados signos a sus autovalores, por ejemplo:  $\text{autov}_1 < 0$ ,  $\text{autov}_2 > 0$ ,  $\text{autov}_3 < 0$  (Véase (5.5.2) para recordar cómo determinar una estabilidad mediante los autovalores). Des-

<sup>13</sup>Lo que usualmente se calcula son los parámetros cosmológicos  $(\Omega, \omega)$  de cada punto fijo, encontrando de esta manera qué puntos fijos pueden comportarse como materia, radiación o energía oscura para poder establecer a cada punto una determinada estabilidad.

pués, asignamos los autovalores de otro punto fijo (sea el punto  $(1, 0, 0)$ ) de manera que brinde una estabilidad tipo inestable o *saddle point* igualmente. En consecuencia, el punto fijo sobrante  $(0, 0, 1)$  debe ser un punto estable para que modele la época dominante de energía oscura. Además, el punto fijo  $(0, 0, 0)$ , se establece estrictamente como *saddle point* para que nos arroje una solución; con el caso inestable no obtenemos soluciones. Mediante *Mathematica*, se determinó el siguiente intervalo que cumple con las siguientes estabilidades: inestable para  $(0, 1, 0)$ , *saddle point* para  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0)$  y estable para  $(0, 0, 1)$ :

$$\omega_3 < 0 \wedge ((\omega_3 < \omega_1 \leq 0 \wedge \omega_2 > 0) \vee (\omega_1 > 0 \wedge \omega_2 > \omega_1)) \quad (5.90)$$

Las siguientes gráficas representan el espacio de fase en el cual se encuentran las soluciones asociadas a cada ecuación de estado que satisfacen la condición de estabilidad obtenida previamente.



**Figura 5.2:** Representación 2D del espacio de soluciones para  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ .

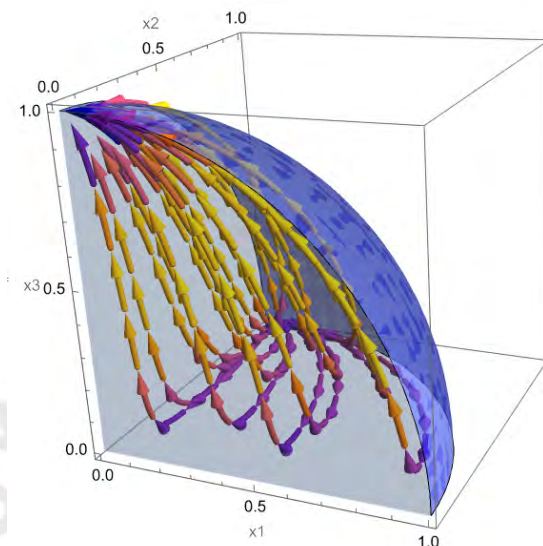
Sin embargo, según la referencia (Amendola y Tsujikawa, 2010, p. 15-17), los valores de las ecuaciones de estado para materia bariónica o radiación son 0 y  $1/3$  respectivamente. Esta restricción solo nos permite el caso  $\omega_3 < 0$  en la Fig. (5.2). A continuación se muestran posibles valores que cumplen dicha estabilidad:

$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0	$1/3$	-1
0	$1/3$	-0.5
0	$1/3$	-3

**Tabla 5.1:** Valores de  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

El primer caso se trata del modelo estándar  $\Lambda$ CDM, el cual presenta una componente de

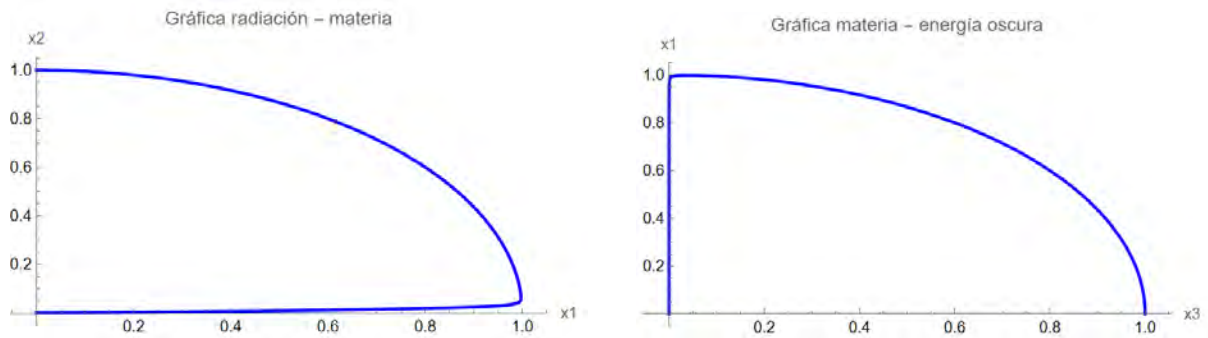
materia con presión negativa y ecuación de estado  $\omega = -1$ , asociado a la constante cosmológica  $\Lambda$ . En adelante, consideraremos este caso:  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\omega_3 = -1$ , donde la primera componente se trata de materia bariónica y la segunda se trata de radiación. A continuación se muestra el espacio de fase de las curvas de evolución que describen la estabilidad establecida.



**Figura 5.3:** Diagrama de Fase entre las variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$

Por ahora, solo hemos definido el espacio de fase, por el cual las curvas van a evolucionar; sin embargo, buscamos una única curva que describa, de manera efectiva, las medidas observacionales como el parámetro de Hubble, densidades relativas o ecuaciones de estado en la época actual. En la práctica, buscamos varias trayectorias de las cuales elegimos la que mejor se ajuste a los datos observacionales. Para ello, se requiere hallar de forma numérica las soluciones de las variables del modelo. Mediante las ecuaciones diferenciales definidas en la Ec. (5.86), podemos determinar numéricamente las soluciones de dichas variables, en función del  $N$  e-fold<sup>14</sup>. Se empleó el *software Mathematica* junto con la función *NDSolve*; esta función requiere de condiciones iniciales para que pueda graficar la curva de evolución en un intervalo dado para  $N$ . Bajo las condiciones iniciales  $x_1(N = 0) = \sqrt{0.3}$ ,  $x_2(N = 0) = \sqrt{0.0001}$ ,  $x_3(N = 0) = \sqrt{0.6999}$ , el sistema describe una curva de evolución con densidad relativa actual para la tercera componente ( $\omega_3 = -1$ ) como:  $\Omega_3 = 0.6999$ .

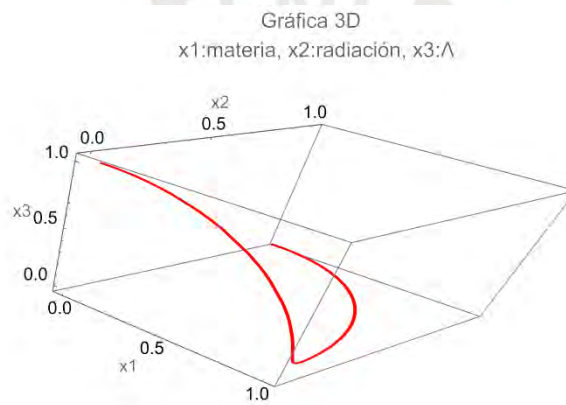
<sup>14</sup>En el trabajo de investigación se observó que es mucho mejor definir las ecuaciones diferenciales en función de  $Z = \log_{10}(1 + z)$ , para modelos más complejos. La razón principal se debe a la resolución de las gráficas, la escala logarítmica ayuda a que las gráficas se vean con mayor suavidad. Sin embargo, en este modelo se utilizó la variable  $N$ .



(a) Diagrama de fase en el plano  $(x_1, x_2)$ : materia bariónica vs. radiación.

(b) Diagrama de fase en el plano  $(x_2, x_3)$ : radiación vs. constante cosmológica.

**Figura 5.4:** Comparativa de proyecciones de los diagramas de fase:  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, x_3)$ .



**Figura 5.5:** Curva de evolución en tres dimensiones.

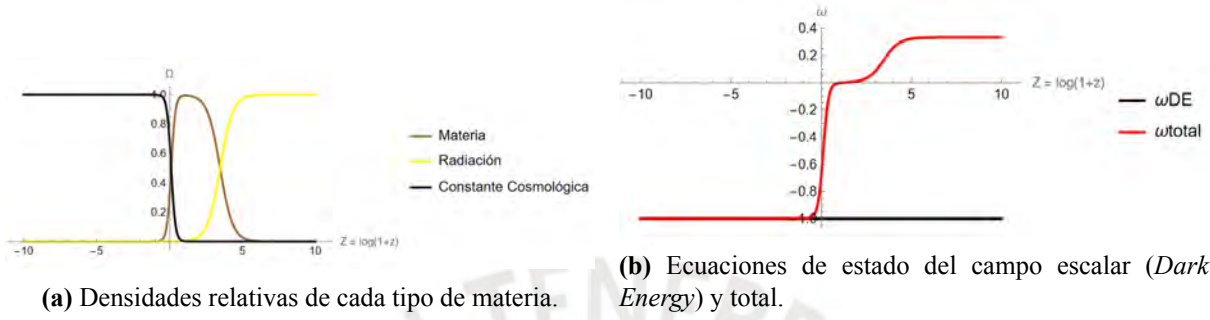
La gráfica presenta 4 puntos fijos  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , donde se muestran transiciones entre épocas o desplazamiento en el espacio de fase. La curva obtenida puede interpretarse de esta manera: empezamos en un punto cercano al punto fijo de radiación pura  $(0, 1, 0)$  y nos alejamos de él; luego, nos acercamos a una época que domina la materia  $(1, 0, 0)$  con  $\omega_1 = 0$ . Dado que la estabilidad de este punto es tipo *saddle point*, nos alejamos nuevamente de este. Finalmente, la curva tiende a una época que domina la constante cosmológica  $(0, 0, 1)$ . Este comportamiento se visualiza mejor en una gráfica de densidades relativas, las cuales se mostrarán a continuación.

### 5.8.2 Gráfica de las Densidades Relativas

Sean las densidades relativas en función de las variables:

$$\Omega_1(N) = x_1(N)^2, \quad \Omega_2(N) = x_2(N)^2, \quad \Omega_3(N) = x_3(N)^2 \quad (5.91)$$

Se han obtenido las soluciones numéricas de las variables  $x_1(N)$ ,  $x_2(N)$ ,  $x_3(N)$  bajo las condiciones iniciales  $x_1(0) = \sqrt{0.3}$ ,  $x_2(0) = \sqrt{0.0001}$ ,  $x_3(0) = \sqrt{0.6999}$ . Con dichas soluciones, determinamos las gráficas de densidades relativas y ecuaciones de estado en función de  $Z = \log_{10}(1+z) = -N \log_{10}(e)$ .



**Figura 5.6:** Evolución para el modelo  $\Lambda$ CDM

Las gráficas muestran, para la época actual, los valores:  $\Omega_3 = 0.6999$  y  $\omega_3 = -1$  de la tercera componente de materia. Además, la Fig. (5.6a) muestra las distintas épocas de dominancia, partiendo de radiación (mayores  $Z$ ), hacia una época que domina la componente con presión negativa. La Fig. (5.6b) muestra cómo evoluciona la ecuación de estado total, iniciando en un valor igual a  $\omega_{total} = 1/3$  (esto significa que todo el contenido de materia se comporta como radiación), trasladándose a un valor de  $\omega_{total} = 0$  (comportamiento como materia bariónica), finalizando en  $\omega_{total} = -1$ . El modelo informa de la existencia de un tipo de materia, con presión negativa, que domina y origina una expansión acelerada en la época actual. La expansión acelerada se cumple pues:  $\omega_{total} < -1/3$  para todo el contenido de materia.

### 5.8.3 Gráfica de $H$ en función del *redshift* $z$

Hasta el momento, no podemos afirmar que dicha curva, que contiene una componente con presión negativa (dominante en épocas actuales), sea la curva que describe la evolución de nuestro universo post-inflación. Para ello, se calcula el parámetro de Hubble  $H(z)$  del modelo (bajo las soluciones y condiciones iniciales que nos llevan a dicha curva), para compararlo con datos observacionales. La comparación se realiza mediante el estadístico  $\chi^2$ , presentado en la sección (5.7).

Para obtener  $H$  se parte de las definiciones de las densidades relativas:

$$\Omega_i(N) = \frac{\kappa \sqrt{\rho_i(N)}}{\sqrt{3}H(N)} \rightarrow \rho_i(N) = \frac{3\Omega_i(N)^2 H(N)^2}{\kappa^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.92)$$

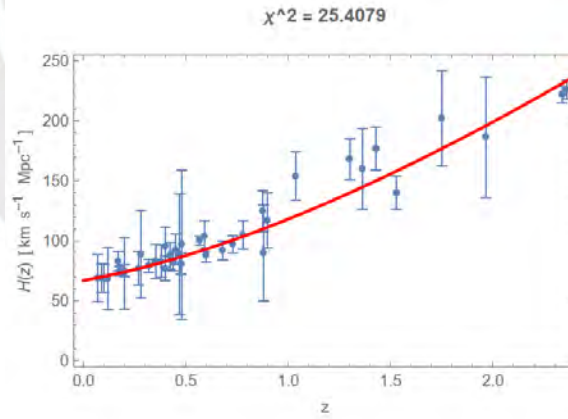
Dado que tenemos numéricamente los  $\Omega_i$ , las densidades quedan en función de  $H$ . Luego, reemplazamos en la segunda ecuación de Friedmann, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dN} &= -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \frac{(1 + \omega_1)}{H} \rho_1 + \frac{(1 + \omega_2)}{H} \rho_2 + \frac{(1 + \omega_3)}{H} \rho_3 \right] \\ &= -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \frac{(1 + \omega_1)}{H} \left( \frac{3\Omega_1^2 H^2}{\kappa^2} \right) + \frac{(1 + \omega_2)}{H} \left( \frac{3\Omega_2^2 H^2}{\kappa^2} \right) + \frac{(1 + \omega_3)}{H} \left( \frac{3\Omega_3^2 H^2}{\kappa^2} \right) \right] \\ &= -\frac{3}{2} [(1 + \omega_1) \Omega_1^2 H + (1 + \omega_2) \Omega_2^2 H + (1 + \omega_3) \Omega_3^2 H] \end{aligned} \quad (5.93)$$

Entonces, podemos obtener una gráfica numérica si empleamos la siguiente ecuación:

$$\frac{dH}{dN} = -\frac{3}{2} [(1 + \omega_1) \Omega_1^2 + (1 + \omega_2) \Omega_2^2 + (1 + \omega_3) \Omega_3^2] H \quad (5.94)$$

Gracias al software *Mathematica - ParametricPlot* obtenemos la solución para  $H$  como una interpolación de alguna función. De esta manera, obtenemos  $H$  en función de  $N$  e-fold. Para graficar en función de  $z$ , basta con definir:  $z = 10^{-N \log(e)} - 1$ .



**Figura 5.7:** Gráfica de  $H$  en función del redshift  $z$ .

La gráfica del parámetro de Hubble muestra un buen ajuste con los datos observacionales *Cosmic Chronometers*, incluso puede mejorar si consideramos condiciones iniciales con mejor ajuste; es decir, otra curva. Además, la curva representa la expansión prevista para el parámetro de Hubble del modelo, y ofrece un ajuste adecuado ( $\chi^2 < 100$ ) de  $H(z)$  en el rango aproximado  $0 < z \lesssim 2.5$ . Este resultado indica que la tercera componente de materia con  $\omega_3 = -1$

modela a la “energía oscura” adecuadamente. Si en un modelo se obtiene expansión acelerada y dominancia, pero la descripción de  $H$  no se ajusta adecuadamente al modelo, entonces no se está modelando correctamente la energía oscura, a pesar de reproducir sus efectos.

Por otro lado, para modelos más complicados (donde las ecuaciones de estado son dinámicas), resulta de utilidad la siguiente ecuación:

$$\Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \rightarrow H(Z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} \frac{10^{\frac{3Z}{2}}}{\sqrt{1 - \Omega_{DE}(Z) - \Omega_{rad}(Z)}} \quad (5.95)$$

Donde  $H_0 = 67.11 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , los datos observacionales *cosmic chronometers* se reportan en estas unidades. Si buscamos utilizar la solución de  $H$  para determinar otros parámetros, como la densidad de energía, se debe pasar a unidades naturales; esto debido al factor  $\kappa^2$  que se suele definir en  $\text{GeV}^{-1}$ .<sup>15</sup>

La ecuación (5.95) surge de la definición de la densidad relativa de materia  $\Omega_m$ , utilizando la evolución de  $\rho_m$  para  $\omega_m$  constante:  $\rho_m(Z) = \rho_0 10^{\frac{3Z}{2}}$ . La ecuación (5.94) requiere información de las ecuaciones de estado; en el modelo de tres tipos de fluido, son constantes. Sin embargo, en otros modelos, la ecuación de estado  $\omega_3$  puede ser dinámico. Por este motivo, la ecuación (5.95) sobresale en modelos más complejos, pues no requiere la solución numérica de las ecuaciones de estado. Sin embargo, si incluimos interacción  $Q(z)$ , el modelo debe seguir la siguiente forma (Por la ecuación 5.39):

$$H(Z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} \frac{10^{\frac{3Z}{2}} \exp\left(-\ln(10) \int_0^Z \frac{Q(\tilde{Z})}{\rho(\tilde{Z})H(\tilde{Z})} d\tilde{Z}\right)}{\sqrt{1 - \Omega_{DE}(Z) - \Omega_{rad}(Z)}} \quad (5.96)$$

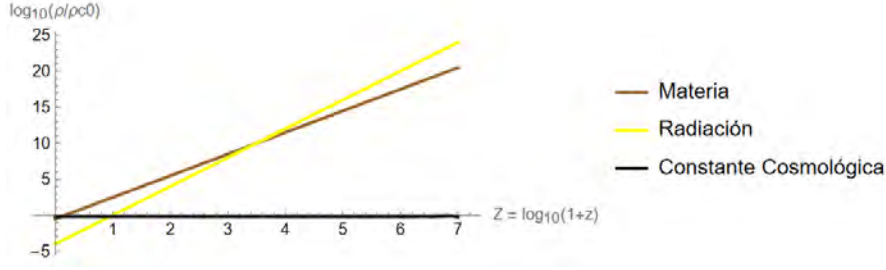
#### 5.8.4 Gráfica de las densidades en función de Z

Por la Ec. (5.92), tenemos:

$$\rho_i(N) = \frac{3\Omega_i(N)^2 H(N)^2}{\kappa^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.97)$$

Numéricamente se obtuvo:  $\Omega_1(N)$ ,  $\Omega_2(N)$ ,  $\Omega_3(N)$  y  $H(N)$ ; por lo tanto, podemos determinar las densidades  $\rho_1(N)$ ,  $\rho_2(N)$ ,  $\rho_3(N)$  en función de  $Z$ , bajo la redefinición  $N = -\ln_{10} Z$ .

<sup>15</sup>Basta con multiplicar por el factor aproximado:  $3.240779289 \times 10^{-20} \times 6.582119569 \times 10^{-25}$  [ $\text{GeV}$  por  $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ]. Se utilizó como referencia (Navas y (Particle Data Group), 2024) para el cálculo del factor de conversión.



**Figura 5.8:** Gráficas de densidades de energía en función del *redshift*  $z$ .

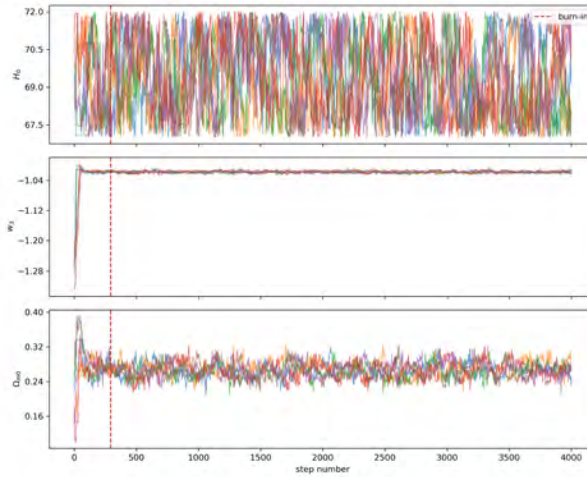
Donde la constante  $\kappa = \sqrt{8\pi G}$  se encuentra en unidades naturales  $\text{GeV}^{-1}$ , con  $G = 6.70883 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$  (Navas y (Particle Data Group), 2024).

### 5.8.5 Cadenas de Markov y regiones de contorno para el modelo de 3 Tipos de Fluido

Este método es independiente de la estabilidad anteriormente determinada, restringiremos los parámetros del modelo con el *posterior* estadístico bajo intervalos de confianza que nos permitan delimitar las regiones donde se encuentra el mejor ajuste y los parámetros verdaderos. Consideramos un escenario con tres fluidos barotrópicos no interactuantes: materia ( $\omega_1 = 0$ ), radiación ( $\omega_2 = \frac{1}{3}$ ) y un tercer componente con ecuación de estado constante  $\omega_3$  a inferir. El vector de parámetros libres es  $\theta = (H_0, \omega_3, \Omega_{m0})$  con *priors top-hat* uniformes:  $H_0 \in (67, 72)$ ,  $\omega_3 \in (-1.8, -0.5)$  y  $\Omega_{m0} \in (0.10, 0.40)$ . Las condiciones iniciales del sistema en  $Z = 7$  se fijan como<sup>16</sup>:  $x_1(Z = 7) = 2.6832 \times 10^{-9}$ ,  $x_2(Z = 7) = 8.47226 \times 10^{-1}$ ,  $x_3(Z = 7) = 1.87439 \times 10^{-11}$ . El muestreo MCMC emplea  $n_{\text{walkers}} = 12$ , un máximo de 4,000 pasos y diagnóstico cada 100 iteraciones; tras descartar el *burn-in* se obtienen las marginales y las regiones de confianza del 68% y 95%.

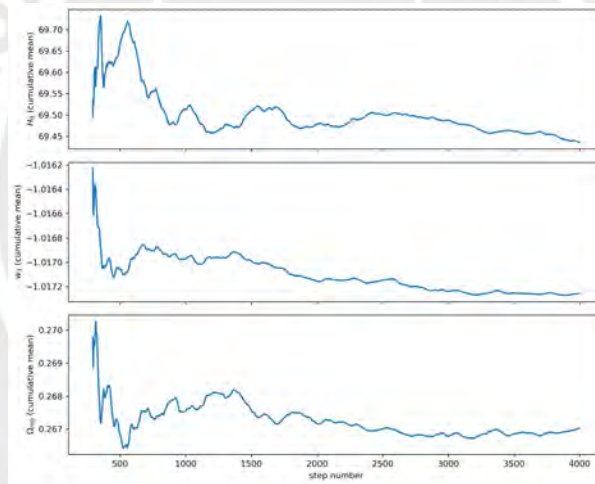
**Trazas de un subconjunto de walkers (con burn-in):** muestran la evolución por parámetro y la mezcla entre caminantes; la línea vertical indica el *burn-in*. Luego de muchos pasos, los caminantes deben permanecer alrededor de la zona con mayor probabilidad.

<sup>16</sup>Estas condiciones iniciales se determinaron al minimizar el parámetro  $\chi^2$  mediante un código en *Mathematica*. En la investigación vimos que, al fijar condiciones iniciales que minimizan dicho parámetro, las cadenas quedan mejor definidas; en cambio, si elegimos unas condiciones al azar (pero que cumpla la ecuación de restricción), las cadenas pueden no converger y se perderá tiempo computacional.



**Figura 5.9:** Trazas de un subconjunto de walkers para  $H_0$ ,  $\omega_3$  y  $\Omega_{m0}$ . La línea vertical marca el *burn-in*.

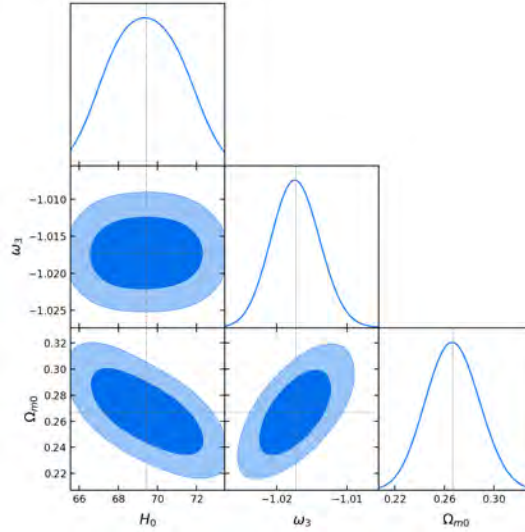
**Media acumulada post *burn-in*:** para cada parámetro, la media acumulada debe converger, lo que indica estabilidad del estimador frente a más iteraciones.



**Figura 5.10:** Media acumulada post *burn-in* de  $H_0$ ,  $\omega_3$  y  $\Omega_{m0}$ .

Las cadenas de Markov nos confirman convergencia del modelo; por consecuencia, reflejan adecuadamente los resultados del *posterior* y las regiones de contorno son fiables. A partir de ellas también conocemos, alrededor de qué valor, oscilan con mayor probabilidad los caminantes.

**Regiones de contorno (*corner plot*):** se muestran las marginales 1D y las regiones 2D del 68% y 95% para los pares  $(H_0, \omega_3, \Omega_{m0})$ , evidenciando correlaciones y posibles degeneraciones entre parámetros que permitan comparar directamente con  $\Lambda$ CDM ( $\omega_3 = -1$ ) o con otros escenarios.



**Figura 5.11:** Regiones de contorno del 68% y 95% para  $(H_0, \omega_3, \Omega_{m0})$  y marginales 1D correspondientes.

Parámetro	Media	<i>MAP</i>	68% I.C.	95% I.C.
$H_0$	69.43	71.21	[67.77, 71.12]	[67.11, 71.85]
$\omega_3$	-1.016	-1.018	[-1.018, -1.014]	[-1.020, -1.012]
$\Omega_{m0}$	0.2906	0.252515	[0.2762, 0.3050]	[0.2673, 0.3150]

**Tabla 5.2:** Estadísticos MCMC para el modelo de tres componentes.

Como era de esperar, al confrontar el modelo de tres componentes con los datos observacionales, el ajuste favorece valores de  $\omega_3$  próximos a  $-1$ , esto es, un comportamiento efectivamente  $\Lambda$ CDM. Los contornos de la distribución posterior en  $(\Omega_{m0}, H_0)$  son compatibles con los intervalos reportados por Planck (Planck Collaboration, 2020). Bajo la interpretación bayesiana, la región de credibilidad del 68% indica que: dado el modelo y los datos, existe un 68% de probabilidad de que los parámetros verdaderos se encuentren dentro de las zonas mostradas en la Fig. (5.2). Se reporta los parámetros de mejor ajuste (*MAP*) como los parámetros que minimizaron el  $\chi^2$  o maximizaron el posterior. Además, dado que las gráficas no son completamente circulares, se puede afirmar existencia de cierta correlación entre los parámetros.

A pesar de su éxito fenomenológico, el modelo  $\Lambda$ CDM presenta limitaciones para modelar la energía oscura: tensiones observacionales en  $H_0$  y  $\sigma_8$ <sup>17</sup> para perturbaciones (Planck

<sup>17</sup>Por tensión de  $H_0$  se entiende la discrepancia estadísticamente significativa entre el valor de la constante de Hubble, en la época actual (por ajuste del CMB bajo  $\Lambda$ CDM), y el medido de manera observacional o directa (método de escalera de distancias); ambos estiman la misma cantidad física, pero no coinciden dentro de sus barras de error. Por tensión en  $S_8$  (o  $\sigma_8$ ) se refiere a que cuando miramos el universo cercano con técnicas observacionales, la materia parece menos agrupada de lo que esperaríamos al compararlo con un modelo en teoría de perturbaciones.

Collaboration, 2020); falta de dinámica en épocas pasadas: al tener  $\omega_3 = -1$  constante, la componente de energía oscura ni rastreó radiación/materia ni influyó en la expansión temprana; el problema de la coincidencia permanece, pues la cercanía actual exige ajuste fino (esto es: fijar condiciones iniciales que nos den con exactitud, densidades del mismo orden, coincidentemente, en la época actual) y no se alivia dentro de  $\Lambda$ CDM; y están restringidas por la condición de no-fantasma, pues no es posible cruzar la barrera  $\omega_3 < -1$ ; este cruce permitiría aumentar  $H_0$ , sin tensionar la data CMB según Planck (Planck Collaboration, 2020), por lo cual es necesario para calibraciones. Estas limitantes nos exigen explorar otros modelos, como el que se presentará en la siguiente sección.

## 5.9 Dinámica cosmológica de un campo escalar en presencia de un fluido barotrópico perfecto

Los campos escalares aparecen de manera natural en diversos ámbitos de la física teórica, por lo que son posibles candidatos para describir la energía oscura. Un ejemplo destacado es el modelo de Quintaesencia (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1802), el cual se formula a partir de un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado a la gravedad y dotado de un potencial que puede generar un periodo de inflación tardía.

La constante cosmológica puede interpretarse como un fluido barotrópico perfecto<sup>18</sup> caracterizado por una ecuación de estado constante  $\omega = -1$ . No obstante, las observaciones actuales que restringen el valor de  $\omega$ , en la época presente, aportan información limitada sobre su posible evolución temporal en el pasado; además de otras limitaciones discutidas en el modelo de tres tipos de fluido. En consecuencia, resulta natural considerar escenarios en los que la ecuación de estado de la energía oscura varíe con el tiempo.

Asimismo, los campos escalares emergen de forma recurrente en teorías de partículas fundamentales, incluida la teoría de cuerdas (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1788), lo que refuerza su papel como candidatos viables para describir la dinámica de la energía oscura.

---

En ambos casos, la inquietud no es solo el tamaño del desajuste, sino su persistencia al combinar experimentos independientes, lo que sugiere ya sea fluctuaciones estadísticas, errores sistemáticos aún no comprendidos o la necesidad de física más allá de  $\Lambda$ CDM.

<sup>18</sup>Recordemos que un fluido se denomina barotrópico perfecto cuando presenta el siguiente tensor energía-momento:  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p$  y su presión es dado por:  $p = \omega\rho$ , con  $\omega$  constante.

En la actualidad, se suele modelar la energía oscura añadiendo campos, invariantes o con modificaciones de la gravedad. En el próximo capítulo se explorará un modelo de energía oscura descrito por modificaciones de la gravedad y un campo escalar, este será el foco fundamental de la tesis.

### 5.9.1 Modelo de Quinta Esencia

Sea la acción:

$$S[g^{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \dot{R} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi(g^{\mu\nu}, \phi, \dot{\phi}) + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}) \quad (5.98)$$

Donde,

$$\mathcal{L}_\phi \equiv \epsilon X - V(\phi), \quad \kappa^2 = 8\pi G \quad (5.99)$$

El modelo de Quintaesencia busca modelar y explicar los efectos de la energía oscura mediante un campo escalar temporal<sup>19</sup> mínimamente acoplado a la acción de Hilbert-Einstein con parte cinética<sup>20</sup>  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  y potencial  $V(\phi)$ . Además, este campo actúa como un fluido ideal perfecto, inmerso en un fluido barotrópico ideal de materia, dentro de un espacio-tiempo descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Es común introducir un parámetro  $\epsilon = \pm 1$  en el término cinético del campo escalar, con el fin de distinguir entre campos escalares convencionales y los denominados campos “fantasma”, caracterizados por poseer energía cinética negativa. Estos últimos han cobrado cierto interés en la literatura reciente (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025), aunque presentan problemas teóricos asociados a energías catastróficas. Para mitigarlos, se suelen considerar extensiones del lagrangiano que incluyen términos cinéticos de orden superior, como  $X^2$ , que permiten regular la dinámica del campo y evitar inestabilidades. En este capítulo, se realizarán los primeros cálculos y definiciones con el parámetro  $\epsilon$  y posteriormente tomaremos el caso estándar  $\epsilon = 1$ .

<sup>19</sup>Un campo escalar temporal se define como:  $\phi \equiv \phi(t)$ . Una generalización sería considerar un campo escalar que dependa además de las coordenadas espaciales, lo que adicionará gradientes en las ecuaciones dinámicas respecto a  $\phi$ .

<sup>20</sup>Dado que se trata de un campo escalar, la definición de sus derivadas no depende si es temporal o espacial. En ambos casos, el campo se transforma como un escalar bajo difeomorfismos, por lo que la derivada covariante coincide con la derivada parcial:  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$ .

Al variar la acción, se obtiene:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right) \delta g^{\mu\nu} - \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{T^{(\phi)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu}}{2} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ \epsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu \phi) - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right] \delta \phi \quad (5.100)$$

Reacomodando para obtener la variación con respecto a los campos dinámicos  $g_{\mu\nu}$  y  $\phi$ .

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [G_{\mu\nu} - \kappa^2 (T^{(\phi)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu})] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \epsilon \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right] \delta \phi \quad (5.101)$$

### Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de Einstein, respecto al campo dinámico  $g^{\mu\nu}$ , son:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 (T^{(\phi)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu})$$

Donde los tensores energía momento se definen como:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \epsilon \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \epsilon g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (5.102)$$

$$T^{(m)}_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \quad (5.103)$$

Las ecuaciones dinámicas, respecto al campo dinámico  $\phi$ , son:

$$\epsilon \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (5.104)$$

### Ecuación de Klein-Gordon

A partir de la métrica Friedmann-Robertson-Walker plana (5.80), se obtiene el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , su inversa  $g^{\mu\nu}$  y la raíz de su determinante como:  $\sqrt{-g}$ .

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad \sqrt{-g} = a^3 r^2 \sin \theta \quad (5.105)$$

Dadad una métrica diagonal, las componentes contravariantes del tensor métrico son:  $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$ . Utilizando la métrica, junto a su determinante, en la Ec. (5.104), considerando un campo escalar temporal ( $\phi(t)$ ), se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] - \frac{dV(\phi)}{d\phi} &= 0 \\ \epsilon \left( -\partial_t \partial_t \phi - \frac{3 \partial_t \phi a^2 \partial_t a}{a^3} \right) - \frac{dV(\phi)}{d\phi} &= 0 \\ \epsilon \left( \ddot{\phi} + 3 \dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} \right) + V_{,\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.106)$$

## 5.9.2 Componentes del Tensor Energía-Momento del campo escalar

Sea el tensor energía-momento del campo escalar (5.102):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \epsilon \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{\epsilon}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \\ T_0^0 &= -\frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \\ T_i^i &= \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Luego, el tensor energía-momento de un fluido ideal es:  $T^\mu{}_\nu = \text{Diag}(-\rho, p, p, p)$ . Se propone un campo escalar como un fluido ideal perfecto; de esta manera, podemos comparar los términos de ambos tensores energía-momento con el objetivo de encontrar: la densidad de energía  $\rho_\phi$  y la presión  $p_\phi$  del campo escalar:

$$\rho_\phi = -T^0{}_0 = \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.108)$$

$$p_\phi = T^i{}_i = \frac{\epsilon}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (5.109)$$

Se define la ecuación de estado del modelo de Quinta Esencia como  $\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$ :

$$\omega_\phi = \frac{\epsilon \dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\epsilon \dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (5.110)$$

## 5.9.3 Ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker

La acción (5.98) es un modelo con dos tipos de fluido acoplados mínimamente; por lo tanto, es natural definir una densidad y presión totales de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_\phi + \rho_m, \quad p = p_\phi + p_m \quad (5.111)$$

Reemplazando la anterior descomposición en las Ecs. (5.8, 5.9, 5.10), se obtienen las siguientes ecuaciones de Friedmann<sup>21</sup>:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_\phi + \rho_m) \quad (5.112)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2}(\rho_\phi + p_\phi + \rho_m + p_m) \quad (5.113)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho_\phi + \rho_m + 3p_\phi + 3p_m) \quad (5.114)$$

$$\epsilon \left( \ddot{\phi} + 3\dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (5.115)$$

A partir de la segunda identidad de Bianchi, al contraerla, se obtienen las ecuaciones de continuidad por medio de la conservación del tensor energía-momento:

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_{[\lambda} \dot{R}_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0 &\Rightarrow \nabla_\nu G^\nu_\mu = 0 \Rightarrow \nabla_\nu (T^{(\phi)\nu}_\mu + T^{(m)\nu}_\mu) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{\rho}_\phi + \dot{\rho}_m + 3(\rho_\phi + \rho_m + p_\phi + p_m)H = 0 \end{aligned} \quad (5.116)$$

Para este modelo es posible desacoplar estas ecuaciones en dos sistemas.

$$\dot{\rho}_\phi + 3(\rho_\phi + p_\phi)H = 0 \quad (5.117)$$

$$\dot{\rho}_m + 3(\rho_m + p_m)H = 0 \quad (5.118)$$

A partir de la ecuación de continuidad del campo escalar, se encuentra la evolución de la densidad de energía  $\rho_\phi$ :

$$\dot{\rho}_\phi + 3(\rho_\phi + p_\phi)H = 0 \Rightarrow \rho_\phi = \rho_o \exp \left[ - \int 3(1 + w_\phi) \frac{da}{a} \right] \quad (5.119)$$

Solo necesitamos conocer una expresión para la ecuación de estado  $\omega_\phi$ , y así poder obtener una solución analítica para la densidad. En el modelo de  $\Lambda$ CDM, la ecuación de estado es la constante  $\omega_\phi = -1$ ; en este modelo, la evolución de la densidad de energía será:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi_0} a^{-3(1+\omega_\phi)} \rightarrow \rho_\phi = \rho_{\phi_0} \quad (5.120)$$

En el modelo de Quintaesencia desconocemos (por ahora) la evolución dinámica de la ecuación de estado, por lo que la densidad de energía permanece, de forma general, sin integrar (5.119). En la investigación, se calculará la densidad de energía del campo escalar a partir del

<sup>21</sup>En el Apéndice (D.2.1), se detalla el caso de algún tipo de materia, considerando curvatura espacial  $k$ .

parámetro de Hubble (similar a lo expuesto en el modelo de tres tipos de fluido), sin necesidad de recurrir a dicha integración.

Por otro lado, sea la ecuación de estado de la materia bariónica  $\omega_m = \frac{p_m}{\rho_m}$ , en los modelos se asume constante. Por el momento, el fluido barotrópico de materia no está especificado, puede ser: materia ordinaria ( $\omega_m = 0$ ), materia oscura fría ( $\omega_m = 0$ ) o materia con presión ( $\omega_m > 0$ ). Para nuestros fines, consideraremos materia bariónica, pero en el modelo del siguiente capítulo también incluirá materia oscura fría. Por lo tanto, la evolución de la densidad de energía de materia es:

$$\dot{\rho}_m + 3(\rho_m + p_m)H = 0 \Rightarrow \rho_m = \rho_{0m} a^{-3(1+\omega_m)} \Rightarrow \rho_m = \rho_{0m} a^{-3} \quad (5.121)$$

Los escenarios donde la evolución de la densidad de energía del campo escalar imita la evolución de la densidad de energía del fluido de fondo (materia bariónica) se les denomina *scaling solutions*. Estos siguen la siguiente condición:

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_m} = \text{cte} \neq 0 \quad (5.122)$$

En otras palabras, si la densidad de energía de materia evoluciona como:  $\propto a^{-3(1+\omega_m)}$ , la densidad del campo escalar imitará dicha evolución. Estos escenarios se estudian en el Apéndice (E.1).

#### 5.9.4 Sistema dinámico en Quintaesencia

Consideremos un campo escalar temporal redefinido en el  $N$  e-fold bajo  $dN = Hdt$  (5.30). Entonces, la densidad lagrangeana de este modelo queda:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\epsilon\phi'^2 H^2 + V(\phi) \quad (5.123)$$

La presión y densidad del campo escalar son (5.108, 5.109):

$$p_\phi = \frac{1}{2}\epsilon\phi'^2 H^2 - V(\phi), \quad \rho_\phi = \frac{1}{2}\epsilon\phi'^2 H^2 + V(\phi) \quad (5.124)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Friedmann de las Ec. (5.112, 5.113, 5.115) se redefinen como:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2}\epsilon H^2 [\phi']^2 + V(\phi) + \rho_m \right] \quad (5.125)$$

$$H' = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \epsilon H [\phi']^2 + \frac{(1 + \omega_m) \rho_m}{H} \right] \quad (5.126)$$

$$\epsilon [3H^2 \phi' + H(H' \phi' + H \phi'')] + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (5.127)$$

Donde  $H \equiv H(N)$  y  $\phi \equiv \phi(N)$ .

Nuestro objetivo es obtener un sistema autónomo de ecuaciones, a partir de las ecuaciones de Friedmann Robertson Walkerm que nos muestren cómo evoluciona nuestro modelo. Para ello, requerimos de variables adimensionales que nos permitan obtener un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales de primer orden. A continuación se muestran las variables adimensionales de este modelo.

$$x \equiv \frac{\kappa \phi'}{\sqrt{6}}, \quad y \equiv \frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3H}}, \quad (5.128)$$

$$\lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}, \quad \Gamma \equiv \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2}$$

La definición de las primeras variables adimensionales surgen de adimensionar la primera ecuación de Friedmann (5.125), las demás variables se definen al utilizar la segunda ecuación de Friedmann (5.126) y la ecuación de Klein-Gordon(5.127).

### Ecuación de restricción

La Ec. (5.125) se adimensiona dividiendo ambos lados por  $H^2$  (restringiendo  $H = 0$ ). Además, reemplazamos las variables adimensionales de la Ec. (5.128).

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2} \epsilon H^2 [\phi']^2 + V(\phi) + \rho_m \right]$$

$$1 = \epsilon x^2 + y^2 + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} \quad (5.129)$$

Este resultado es análogo a la expresión usada en cosmología  $1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k$ , pues cada  $\Omega$  es una cantidad adimensional relativa.

Despejamos  $\rho_m$  para su uso posterior.

$$\rho_m = \frac{3H^2 [1 - \epsilon x^2 - y^2]}{\kappa^2} \quad (5.130)$$

Como ya se explicó, tomaremos  $\omega_m$  constante. Es decir,  $\rho_m = \rho_0 a^{-3(1+\omega_m)}$ . En cambio,  $\omega_\phi \equiv \omega_\phi(N)$  puede cambiar dinámicamente.

## Ecuación Intermedia

Se calcula la siguiente expresión para su uso posterior. De las variables adimensionales (5.128), para  $x$  tenemos que:  $\kappa^2[\phi']^2 = 6x^2$ . Entonces mediante la Ec. (5.126):

$$\begin{aligned} H' &= -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \epsilon H [\phi']^2 + \frac{(1 + \omega_m) \rho_m}{H} \right] \Rightarrow H' = -3\epsilon x^2 H - \frac{3}{2} H (1 + \omega_m) (1 - \epsilon x^2 - y^2) \\ H' &= -\frac{3}{2} H \epsilon x^2 + \frac{3}{2} \omega_m H \epsilon x^2 - \frac{3}{2} H (1 + \omega_m) (1 - y^2) \\ -\frac{H'}{H} &= \frac{3}{2} [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m) (1 - y^2)] \quad (5.131) \end{aligned}$$

## Ecuación General

Esta ecuación se obtiene reemplazando  $H'$ , del resultado de la *Ecuación Intermedia* (5.131), en la ecuación de Klein-Gordon (5.127). Además, se reemplaza  $\phi' = \frac{\sqrt{6}x}{\kappa}$ , queda la ecuación de la forma:

$$\epsilon \left[ \phi'' H^2 + \frac{3\sqrt{6}x H^2}{\kappa} - \frac{3\sqrt{6}x H^2}{2\kappa} [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m) (1 - y^2)] \right] + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (5.132)$$

## Derivada de $x$ respecto a $N$

Derivamos respecto al  $N$ -efold la variable  $x$  (5.128).

$$\frac{dx}{dN} = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \phi'' \quad (5.133)$$

De la *Ecuación General* (5.132), despejamos  $\phi''$  e insertamos en la anterior expresión.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \phi'' \\ &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \left[ -\frac{3\sqrt{6}x}{\kappa} + \frac{3\sqrt{6}x}{2\kappa} [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m) (1 - y^2)] - \frac{dV(\phi)}{\epsilon H^2} \right] \quad (5.134) \end{aligned}$$

Proseguimos despejando  $\frac{dV(\phi)}{d\phi} \equiv V_{,\phi}$  y  $H(N)$  de las variables  $\lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}$ ,  $y \equiv \frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3}H}$ , respectivamente, y los evaluamos en la Ec. (5.134)<sup>22</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= -3x - \frac{V_{,\phi}}{\epsilon H^2} + \frac{3}{2} x [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m) (1 - y^2)] \\ &= -3x + \frac{\sqrt{6}}{2} \epsilon \lambda y^2 + \frac{3}{2} x [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m) (1 - y^2)] \quad (5.135) \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Se utilizó:  $\epsilon^2 \equiv 1$ , con  $\epsilon = \pm 1$ .

## Derivada de $y$ respecto a $N$

Derivamos respecto al número  $N$ -efold la variable  $y \equiv \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}$ .

$$\frac{dy}{dN} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\frac{d\sqrt{V}}{dN} H - \sqrt{V} \frac{dH}{dN}}{H^2} \right] \Rightarrow \frac{dy}{dN} = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\frac{d\sqrt{V}}{dN}}{H} + \frac{-\sqrt{V} \frac{dH}{dN}}{H^2} \right] \quad (5.136)$$

Desarrollamos cada término por separado.

1.- Para el primer término se tiene:

$$\frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\frac{d\sqrt{V}}{dN}}{H} \right] = \frac{\kappa V_{,\phi} \phi'}{2\sqrt{3}H\sqrt{V}} \Rightarrow \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\frac{d\sqrt{V}}{dN}}{H} \right] = \frac{1}{2\sqrt{3}} [\kappa\phi'] \left[ \frac{V_{,\phi}}{\sqrt{V}} \right] \left[ \frac{1}{H} \right]$$

Con las variables adimensionales (5.128) tenemos:  $\kappa\phi' = x\sqrt{6}$ ,  $V_{,\phi} = -\lambda\kappa V$ ,  $\frac{1}{H} = \frac{y\sqrt{3}}{\kappa\sqrt{V}}$ .

Entonces:

$$\frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\frac{d\sqrt{V}}{dN}}{H} \right] = \frac{1}{2\sqrt{3}} [x\sqrt{6}] \left[ \frac{-\lambda\kappa V}{\sqrt{V}} \right] \left[ \frac{y\sqrt{3}}{\kappa\sqrt{V}} \right] = \frac{-\sqrt{6}\lambda xy}{2} \quad (5.137)$$

2.- Para el segundo término se usa la variable  $y$  (5.128) y la *Ecuación Intermedia* (5.131).

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \left[ \frac{-\sqrt{V} \frac{dH}{dN}}{H^2} \right] &= \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \left[ \frac{-H'}{H} \right] \\ &= \frac{3}{2} y [(1 - \omega_m)\epsilon x^2 + (1 + \omega_m)(1 - y^2)] \end{aligned} \quad (5.138)$$

Reemplazando las Ecs. (5.137, 5.138) en la Ec. (5.136), obtenemos la segunda ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dN} = \frac{-\sqrt{6}}{2} \lambda xy + \frac{3}{2} y [(1 - \omega_m)\epsilon x^2 + (1 + \omega_m)(1 - y^2)]$$

## Derivada de $\lambda$ respecto a $N$

Finalmente, derivamos nuevamente respecto al  $N$ -efold la variable  $\lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}$ .

$$\frac{d\lambda}{dN} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{-\frac{dV_{,\phi}}{dN} V}{V^2} + \frac{\frac{dV}{dN} V_{,\phi}}{V^2} \right] \quad (5.139)$$

Desarrollamos cada término por separado.

1.- Para el primer término:

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{-\frac{dV_{,\phi}}{dN} V}{V^2} \right] = \frac{-1}{\kappa} \frac{dV_{,\phi}}{d\phi} \frac{d\phi}{dN} \frac{V}{V^2} \Rightarrow \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{-\frac{dV_{,\phi}}{dN} V}{V^2} \right] = -\frac{1}{\kappa} [\phi'] V_{,\phi\phi} \left[ \frac{1}{V} \right] \quad (5.140)$$

Con las variables adimensionales (5.128) tenemos:  $\phi' = \frac{x\sqrt{6}}{\kappa}$ ,  $V_{,\phi\phi} = \frac{\Gamma V_{,\phi}^2}{V}$ .

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{-\frac{dV_{,\phi}}{dN} V}{V^2} \right] = -\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{x\sqrt{6}}{\kappa} \right] \Gamma \left[ \frac{V_{,\phi}^2}{V^2} \right]$$

Además, de la expresión para la variable  $\lambda$  se tiene:  $\frac{V_{,\phi}^2}{V^2} = \lambda^2 \kappa^2$ . Por lo que:

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{-\frac{dV_{,\phi}}{dN} V}{V^2} \right] = -\sqrt{6} \lambda^2 \Gamma x \quad (5.141)$$

2.- Para el segundo término:

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\frac{dV}{dN} V_{,\phi}}{V^2} \right] = \frac{1}{\kappa} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dN} \frac{V_{,\phi}}{V^2} \Rightarrow \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\frac{dV}{dN} V_{,\phi}}{V^2} \right] = \frac{1}{\kappa} \phi' \left[ \frac{V_{,\phi}^2}{V^2} \right] \quad (5.142)$$

Con las variables adimensionales (5.128), tenemos:  $\phi' = \frac{x\sqrt{6}}{\kappa}$ ,  $\frac{V_{,\phi}^2}{V^2} = \lambda^2 \kappa^2$ .

$$\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\frac{dV}{dN} V_{,\phi}}{V^2} \right] = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{x\sqrt{6}}{\kappa} \right] [\lambda^2 \kappa^2] = \sqrt{6} \lambda^2 x$$

Reemplazando las Ecs. (5.141, 5.142) en la Ec. (5.139) obtenemos la tercera ecuación diferencial:

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6} \lambda^2 [\Gamma - 1] x$$

El sistema dinámico resultante se presenta como:

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2} \epsilon \lambda y^2 + \frac{3}{2} x [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m)(1 - y^2)] \quad (5.143)$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{-\sqrt{6}}{2} \lambda x y + \frac{3}{2} y [(1 - \omega_m) \epsilon x^2 + (1 + \omega_m)(1 - y^2)] \quad (5.144)$$

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6} \lambda^2 [\Gamma - 1] x \quad (5.145)$$

Donde la ecuación de restricción es:

$$\epsilon x^2 + y^2 + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} = 1 \quad (5.146)$$

La ecuación de estado  $\omega_\phi$  y la fracción de densidad de energía  $\Omega_\phi$  se obtienen directamente con las Ecs. (5.108, 5.109, 5.128) para la densidad y presión del campo escalar:

$$\rho_\phi = \frac{\epsilon}{2} \phi'^2 H^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{\epsilon}{2} \phi'^2 - V(\phi) \quad (5.147)$$

Se obtiene (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1804):

$$\omega_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\epsilon x^2 - y^2}{\epsilon x^2 + y^2} \quad (5.148)$$

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = \epsilon x^2 + y^2 \quad (5.149)$$

Se define la ecuación de estado efectiva  $\omega_{\text{eff}}^{23}$ .

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{p_\phi + p_m}{\rho_\phi + \rho_m} = \omega_m + (1 - \omega_m)\epsilon x^2 - (1 + \omega_m)y^2 \quad (5.150)$$

Como sabemos de secciones anteriores, ocurrirá una expansión acelerada para  $\omega_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ .

Por otro lado, a partir de este momento consideraremos el caso de Quinta esencia con  $\epsilon = +1$ .

Además, para simplificar cálculos, usaremos los siguientes cambios de variables:  $\gamma_\phi, \gamma$  como

$$\gamma_\phi \equiv 1 + \omega_\phi, \gamma \equiv 1 + \omega_m.$$

### Caso $\lambda$ constante

De la cuarta variable adimensional (5.128), para  $\lambda$  constante, se obtiene un exponencial:

$$\frac{dV}{d\phi} = -\lambda \kappa V \rightarrow V(\phi) = V_0 e^{-\kappa \lambda \phi} \quad (5.151)$$

En este caso, la Ec. (5.145) se satisface para  $\Gamma = 1$ , para valores de  $x$  no nulos. Lo que logramos es obtener un sistema autónomo, ya que si consideramos  $\Gamma$  dinámico, tendremos tres ecuaciones diferenciales y cuatro variables adimensionales. Existen métodos para encontrar una solución numérica en estos casos (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1808). Sin embargo, para este trabajo consideraremos  $\lambda$  constante, obteniendo dos ecuaciones diferenciales y dos variables dinámicas.

### Puntos Fijos

Para obtener los puntos críticos o fijos, evaluamos las funciones  $\frac{dx}{dN} = 0$  y  $\frac{dy}{dN} = 0$ , de las Ecs. (5.143, 5.144). Sean las funciones  $f$  y  $g$  definidas a partir del sistema dinámico autónomo:

$$f(x, y) = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x[(2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)] \quad (5.152)$$

$$g(x, y) = \frac{-\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(2 - \gamma)x^2 + \gamma(1 - y^2)] \quad (5.153)$$

<sup>23</sup>Para poder determinar la ecuación, usamos las ecuaciones para  $\rho_\phi, p_\phi, p_m = \rho_m \omega_m$ , las variables adimensionales  $x, y$  y la Ecuación de restricción  $x^2 + y^2 + \Omega_m = 1$ .

Determinamos los puntos fijos para  $f$  y  $g$ .

$$\begin{aligned} -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x[(2-\gamma)x^2 + \gamma(1-y^2)] &= 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(2-\gamma)x^2 + \gamma(1-y^2)] &= 0 \end{aligned} \quad (5.154)$$

Se obtiene la siguiente tabla:

Punto fijo	x	y
a	0	0
b.1	1	0
b.2	-1	0
c	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$
d	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\lambda^2}}$

**Tabla 5.3:** Puntos fijos del modelo de quintaesencia.

Los puntos fijos se interpretan, como etapas de la evolución cosmológica, donde existirán determinadas propiedades de cada tipo de materia.++

### Matriz $\mathcal{M}$

Proseguimos hallando la matriz Jacobiano  $\mathcal{M}$  con las derivadas parciales de  $f$  y  $g$ .

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -3 - \frac{3}{2}(3x^2(-2+\gamma) + (-1+y^2)\gamma) & \sqrt{6}y\lambda - 3xy\gamma \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}y\lambda - 3xy(-2+\gamma) & -\sqrt{\frac{3}{2}}x\lambda - 3y^2\gamma + \frac{1}{2}(-3x^2(-2+\gamma) - 3(-1+y^2)\gamma) \end{pmatrix}$$

Gracias a esta matriz hallamos las expresiones para  $\tau$  y  $\Delta$ .

$$\tau \equiv \text{Tr}(\mathcal{M}), \quad \Delta \equiv \det(\mathcal{M})$$

Los autovalores para este sistema dinámico se determinan como:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Punto fijo	$\lambda_1$	$\lambda_2$
a	$-\frac{3}{2}(2-\gamma)$	$\frac{3\gamma}{2}$
b.1	$\frac{1}{2}(6-\sqrt{6}\lambda)$	$3(2-\gamma)$
b.2	$\frac{1}{2}(6+\sqrt{6}\lambda)$	$3(2-\gamma)$
c	$\frac{1}{2}(\lambda^2-6)$	$\lambda^2-3\gamma$
d	$-\frac{3(2-\gamma)}{4}\left[1+\sqrt{1-\frac{8\gamma(\lambda^2-3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)}}\right]$	$-\frac{3(2-\gamma)}{4}\left[1-\sqrt{1-\frac{8\gamma(\lambda^2-3\gamma)}{\lambda^2(2-\gamma)}}\right]$

**Tabla 5.4:** Autovalores asociados a cada punto fijo del sistema dinámico para  $\epsilon = 1$ .

## 5.9.5 Autovalores

### Tabla de Estabilidad

Punto	$x$	$y$	Existencia	Estabilidad	$\Omega_\phi$	$\gamma_\phi$
a	0	0	All $\lambda$ and $\gamma$	Saddle Point: $0 < \gamma < 2$	0	-
b.1	1	0	All $\lambda$ and $\gamma$	Unstable: $\lambda < \sqrt{6}$  Saddle Point: $\lambda > \sqrt{6}$	1	2
b.2	-1	0	All $\lambda$ and $\gamma$	Unstable: $\lambda > -\sqrt{6}$  Saddle Point: $\lambda < -\sqrt{6}$	1	2
c	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}$	$-\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{6}$	Stable: $\lambda^2 < 3\gamma$  Saddle Point: $3\gamma < \lambda^2 < 6$	1	$\frac{\lambda^2}{3}$
d	$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\gamma}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\lambda^2}}$	$\lambda^2 > 3\gamma$	Stable: $3\gamma < \lambda^2 < \frac{24\gamma^2}{9\gamma-2}$  Espiral stable: $\lambda^2 > \frac{24\gamma^2}{9\gamma-2}$	$\frac{3\gamma}{\lambda^2}$	$\gamma$

**Tabla 5.5:** Existencia, estabilidad y parámetros de los puntos críticos del modelo con  $\epsilon = +1$  (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006).

## 5.9.6 Interpretación del Modelo

Los puntos fijos brindan propiedades cosmológicas que alivian: la dominancia de energía oscura, la expansión acelerada o soluciones tipo *scaling*. En lo que sigue, se exponen dichos fenómenos fundamentales para orientar la interpretación de los resultados del modelo de Quintaesencia.

## Densidad Estática $\Omega$

En nuestro análisis del sistema dinámico encontramos la ecuación de restricción (5.129):

$$\epsilon x^2 + y^2 + \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2} = 1 \quad (5.155)$$

Además, se definió la densidad estática para el campo escalar  $\phi$  como  $\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = \epsilon x^2 + y^2$ . Análogamente, podemos definir la densidad estática para el fluido barotrópico perfecto como  $\Omega_m$ . De esta manera obtenemos la ecuación de densidades relativas de cada tipo de materia (energía oscura y materia bariónica) en un universo plano.<sup>24</sup>

$$\Omega_\phi + \Omega_m = 1 \quad (5.156)$$

Esta expresión es ampliamente conocida en cosmología. Mediante ella se nos explica que las densidades  $\Omega$  son fracciones de la densidad total del universo y están asociadas a una determinada componente de materia (Baumann, 2022, p. 48). Si  $0 < \Omega_\phi < 1$ , el campo escalar aporta un fracción de la densidad total. En una época dada, si  $\Omega_\phi \approx 1$ , el campo escalar domina la dinámica de fondo: su contribución a la densidad total es mayoritaria frente a los demás tipos de fluido. Además, la densidad relativa cuantifica la densidad de energía de cada componente normalizada por la densidad crítica del universo.<sup>25</sup> Por lo tanto, la Ec. (5.156) nos indica qué tipo de materia dominará en un determinado régimen de la evolución cosmológica. Este resultado es relevante porque, al expresar la ecuación de restricción en términos de las variables dinámicas del modelo, y al fijar los parámetros mediante criterios de estabilidad o un análisis de  $\chi^2$  con datos observacionales, es posible estimar la fracción de densidad del campo escalar en la época actual dentro del modelo de quintaesencia y modelos más generales.

## Expansión Acelerada

En la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, el factor de escala  $a(t)$  describe cómo las distancias espaciales se dilatan o contraen con el tiempo  $t$  (Como adicional, si redefinimos al tiempo conforme  $\eta$ , el factor de escala afecta al espacio-tiempo de forma global). A partir de

<sup>24</sup>La métrica propuesta para describir nuestro universo a grandes escalas es totalmente plana con  $\Omega_k = 0$ .

<sup>25</sup>La densidad crítica es un valor teórico que se mantiene independiente del tipo de componente considerado y se define como  $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ , donde  $H_0$  es el parámetro de Hubble en la época actual.

$a(t)$  se define la tasa de cambio  $H \equiv \dot{a}/a$  y la aceleración mediante  $\ddot{a}$ . La ecuación que sigue, derivada de las ecuaciones de Friedmann, cuantifica precisamente dicha aceleración cósmica.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho_\phi + \rho_m + 3p_\phi + 3p_m) \rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(1 + 3\omega_{\text{eff}})\rho_{\text{tot}} \quad (5.157)$$

Donde se define  $\omega_{\text{eff}} = \frac{p_\phi + p_m}{\rho_\phi + \rho_m}$ ,  $\rho_{\text{tot}} = \rho_\phi + \rho_m$ . como la ecuación de estado total o efectiva y la densidad de energía total respectivamente.

Gracias a las observaciones (Riess et al., 1998), conocemos que el universo actualmente se está expandiendo, para ello  $\ddot{a}$  debe ser positiva. Esto se logra bajo la condición de expansión:

$$\omega_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}.$$

### **Evolución Cosmológica**

En Quintaesencia no se incluye acoplamiento entre el campo escalar y el fluido barotrópico (materia). Esto implica que ambas componentes no interactúan, y cada una contribuye de manera independiente a la evolución del universo. En modelos con interacción, habrá un parámetro adicional que influirá en la dinámica cosmológica. En un modelo, que se incluye radiación, se espera que la energía oscura (campo escalar  $\phi$  o descrito por alguna modificación de la gravedad) permanezca subdominante durante las eras de dominancia de la radiación y la mayor parte de la era de la materia (materia oscura o bariónica) (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1801). Sin embargo, debido a su naturaleza, la densidad de energía oscura disminuye mucho más lentamente con la expansión del universo en comparación con la densidad de la materia o radiación. Como resultado, en épocas más recientes, la densidad de energía de la materia disminuye lo suficiente para que la energía oscura se convierta en la componente dominante del universo. Esta transición marca el inicio de la era de la energía oscura, generando que la expansión del universo se acelere. En el Apéndice (D.5) se explora diagramas de fase de un modelo de Quintaesencia incluyendo radiación.

### **El problema de la coincidencia**

El “problema de la coincidencia” pregunta por qué, justo en la época actual, las densidades de materia y energía oscura son del mismo orden de magnitud, a pesar de que  $\rho_m \propto a^{-3}$  mientras que la energía oscura varía mucho más lentamente (o es casi constante). Una vía para aliviarlo

son las soluciones de escalamiento (*scaling*) en las que el cociente  $\rho_\phi/\rho_m$  se mantiene casi constante durante largos intervalos, reduciendo la dependencia a las condiciones iniciales. El *scaling* que interesa es el de materia–energía oscura (no con radiación); sin embargo, un *scaling* “puro” sin interacción suele dar  $w_\phi = w_m$  (modelo de quintaesencia) sin producir aceleración, como se mostrará. Por ello, o bien se requiere un *scaling* acelerado (con interacción entre la energía oscura y materia oscura fría con  $\omega_m = 0$ ) (Zimdahl, Pavón y Chimento, 2001), o bien una salida tardía del *scaling* hacia un régimen con  $w_{\text{tot}} < -1/3$  (expansión acelerada). En este sentido, el problema de la coincidencia está vinculado a la aceleración tardía, si no hay una salida del *scaling*, la densidad de energía oscura se mantendrá subdominante en todo momento, sin generar expansión. Resolver este problema requiere un modelo que justifique cómo y por qué estas dos densidades resultan comparables coincidentemente en el tiempo presente de la evolución cosmológica. El método de sistemas dinámicos permite identificar puntos fijos que mantienen una proporción de escalamiento (soluciones tipo *scaling*), lo que puede aliviar el problema de la coincidencia (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025) al sostener, durante una época de transición, la razón  $\rho_\phi/\rho_m$  y reducir su sensibilidad a las condiciones iniciales<sup>26</sup>. Encontrar *scaling* será uno de los objetivos del modelo  $f(Q, \phi)$  que se presentará más adelante. En el Apéndice (E.1) se estudia un modelo con interacción y se establece una restricción a la teoría bajo la cual, se espera, emerjan diversos tipos de soluciones de escalamiento.

### 5.9.7 Interpretación por cada Punto Fijo

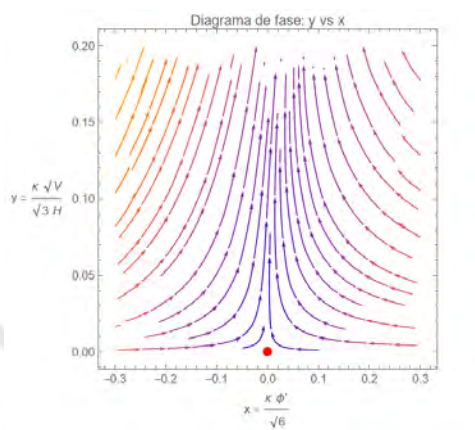
#### Punto Fijo $(x, y) = (0, 0)$

En el punto fijo  $(0, 0)$ , se ha obtenido un valor de  $\Omega_\phi = 0$  (Tabla 5.5), lo que indica que la densidad de energía del campo escalar  $\phi$  no contribuye a la densidad total del universo ni genera una influencia en la dinámica. Esto aplica únicamente en el punto fijo, alrededor de él habrá influencia dependiendo de la estabilidad del punto. De la Ec. (D.65) observamos para  $x = 0, y = 0$  nos arroja  $w_{\text{eff}} = w_m$ . Entonces si queremos una expansión acelerada se debe cumplir  $w_m < -\frac{1}{3}$ , o en todo caso  $\gamma < \frac{2}{3}$ .

La estabilidad en este punto es tipo *saddle point* para la condición  $0 < \gamma < 2$ . Esto indica

<sup>26</sup>Esto significa que no requerimos ajustar tan estrictamente el sistema para que coincidentemente sean del mismo orden en la época actual

inestabilidad, donde las trayectorias que se acercan por alguna dirección se alejarán en otras direcciones. Esto sugiere que, aunque el campo escalar  $\phi$  no tenga influencia en la dinámica en el mismo punto, cualquier perturbación o cambio en el sistema llevará a una evolución hacia estados diferentes, lo que puede ser interpretado como una transición a un comportamiento dinámico distinto en el futuro.

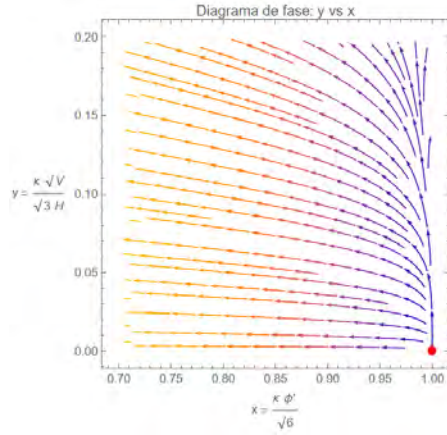


**Figura 5.12:** Diagrama de fase en un región cercana al punto  $(0, 0)$ .

### Punto Fijo $(x, y) = (1, 0)$

En el punto fijo  $(1, 0)$ , se ha obtenido un valor de  $\Omega_\phi = 1$  (Tabla 5.5), lo que indica que la densidad de energía del campo escalar  $\phi$  contribuye plenamente a la densidad total del universo y domina la dinámica de evolución en este punto y un sector cercano a él. Como consecuencia, se tiene  $\Omega_m = 0$ , es decir el fluido barotrópico no aporta en esta época. Además, se obtiene la ecuación de estado del campo escalar:  $\gamma_\phi = 2 \rightarrow \omega_\phi = 1$ . Dada la ecuación de estado efectiva en Quintaesencia (D.65), entonces  $\omega_{eff} = 1$ , por lo tanto  $\omega_{eff} = \omega_\phi$ . Observamos que no se cumple la condición  $\omega_{eff} < -\frac{1}{3}$ , por lo tanto no habrá expansión acelerada en este punto.

El comportamiento del punto es totalmente inestable para  $\lambda < \sqrt{6}$ , lo que significa que cualquier pequeña perturbación en este punto llevará al sistema a evolucionar hacia otros estados. Sin embargo, para  $\lambda > \sqrt{6}$ , este punto se comporta como *saddle point*. Dependiendo de las condiciones del parámetro  $\lambda$ , podemos tener distintos tipos de evolución.

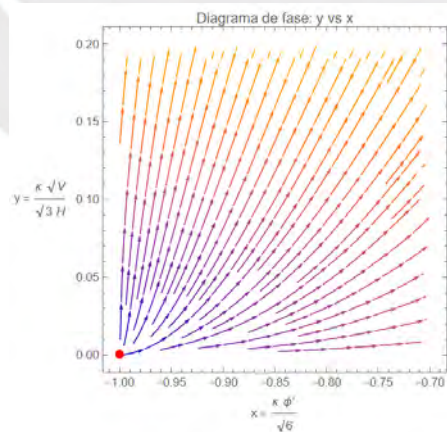


**Figura 5.13:** Diagrama de fase en una región cercana al punto  $(1, 0)$ .

**Punto Fijo  $(x, y) = (-1, 0)$**

En el punto fijo  $(-1, 0)$ , se ha obtenido un valor de  $\Omega_\phi = 1$  (Tabla 5.5), indicando que la densidad de energía del campo escalar  $\phi$  contribuye completamente a la densidad total del universo en este estado. Donde el sector de materia se comporta como una materia desconocida con presión nula ( $\Omega_m = 0 \rightarrow \rho_m = 0 \rightarrow p_m = 0$ ). Además, se ha encontrado que  $\gamma_\phi = 2$ , lo que sugiere que en este punto no existe una expansión acelerada dado que  $\omega_{eff} = \omega_\phi = 1$  no cumple la condición de expansión.

El comportamiento de  $(-1, 0)$  es análogo al punto  $(1, 0)$ : inestable para  $\lambda > -\sqrt{6}$  y *saddle point* para  $\lambda < -\sqrt{6}$

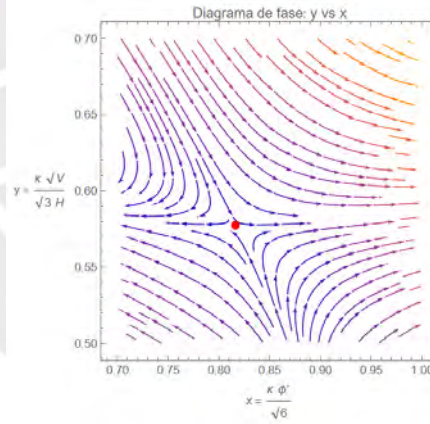


**Figura 5.14:** Diagrama de fase en una región cercana al punto  $(-1, 0)$ .

$$\text{Punto Fijo } (x, y) = \left( \frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}} \right)$$

En este punto se ha obtenido un valor de  $\Omega_\phi = 1$  (Tabla 5.5), lo que indica que la densidad de energía del campo escalar  $\phi$  contribuye completamente a la densidad total del universo en este estado y domina totalmente frente a otros tipos de fluido. Además, se ha encontrado que  $\gamma_\phi = \frac{\lambda^2}{3}$ , lo que sugiere que la dinámica del campo escalar está determinado por el parámetro  $\lambda$ . El sector de materia es desconocido, pero cumple con mantener presión nula. Por la Ec. (D.65):  $w_{eff} \equiv w_\phi = -1 + \gamma_\phi$ . Este resultado nos permite afirmar que habrá expansión acelerada en el punto para los valores de  $\lambda$  que cumplan con  $\lambda^2 < 2$ .

El punto fijo es un nodo estable para  $\lambda^2 < 3\gamma$ , lo que implica que cualquier perturbación en este estado conducirá a un retorno al mismo punto. Por otro lado, para  $3\gamma < \lambda^2 < 6$  actúa como un punto silla o *saddle point*. Esta transición en la estabilidad indica que el comportamiento del sistema puede ser altamente dependiente del valor de  $\lambda$  (exponente del potencial). Por esta razón, este parámetro se convertirá en uno de los parámetros que restringiremos con el método *MCMC* para reconocer la región de confianza que nos genera un buen ajuste a los datos observacionales.



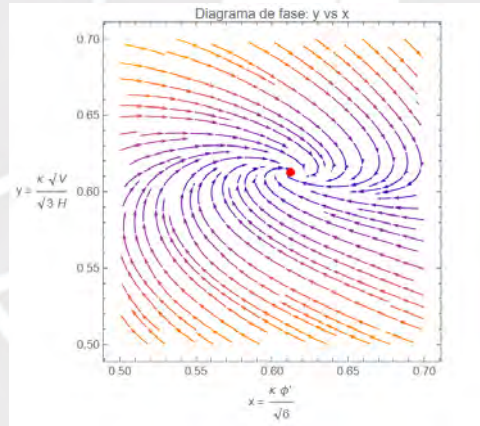
**Figura 5.15:** Diagrama de fase en una región cercana al punto (c).

$$\text{Punto Fijo } (x, y) = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\gamma}{\lambda}, \sqrt{\frac{3\gamma(2-\gamma)}{2\lambda^2}} \right)$$

Este punto contiene un valor de  $\Omega_\phi = \frac{3\gamma}{\lambda^2}$  (Tabla 5.5), lo que indica que la densidad de energía del campo escalar  $\phi$  es una fracción de la densidad total del universo, dependiendo de los parámetros  $\gamma$  y  $\lambda$ . Además, se ha encontrado que  $\gamma_\phi = \gamma \rightarrow \omega_\phi = \omega_m$  en dicho punto (Tabla 5.5), lo que sugiere que el comportamiento del campo escalar es el mismo que el del fluido barotrópico presente. Este comportamiento para *late time* o tiempos actuales indica que el

campo escalar y la materia evolucionan de forma proporcional. Es decir, la densidad de energía del campo escalar decrece proporcionalmente a la densidad de energía del fluido barotrópico. Sin embargo, este punto no alivia el problema de la coincidencia, dado que nuestro modelo tiende a un punto fijo donde habrá una evolución proporcional entre las densidades de campo escalar y materia, **sin salir del scaling**<sup>27</sup>. Por otro lado, habrá expansión acelerada si evaluamos la expresión  $w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$  en la Ec. (D.65) para el  $w_{eff}$ , obtenemos  $w_{eff} = -1 + \gamma$ . Por lo que se tendrá una expansión acelerada para  $\gamma < \frac{2}{3}$ .

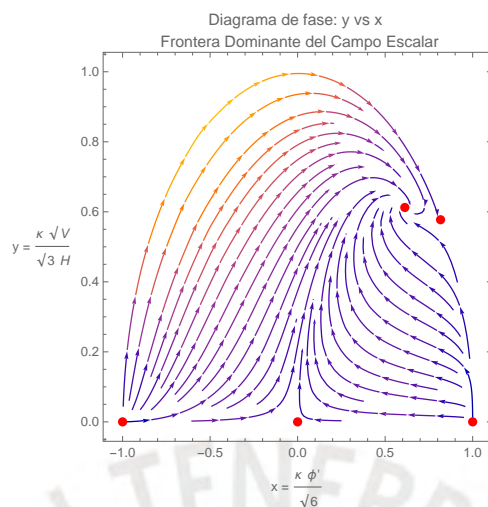
Este punto es un nodo estable para  $3\gamma < \lambda^2 < \frac{24\lambda^2}{9\gamma-2}$ , lo que implica que cualquier perturbación, alrededor de este punto, provocará un retorno al mismo. Por otro lado, para  $\lambda^2 > \frac{24\lambda^2}{9\gamma-2}$ , el punto se convierte en un espiral estable, donde las trayectorias en el espacio de fase tienden a “enrollarse” de forma espiral hacia el punto fijo, lo que sugiere que el sistema experimenta un comportamiento oscilatorio y tiende a estabilizarse en torno a este punto a medida que evoluciona.



**Figura 5.16:** Diagrama de fase en una región cercana al punto (d).

<sup>27</sup>La proporcionalidad se observa mejor al recordar la solución de la densidad de energía de materia para  $\omega_m$  constante:  $\rho_m = \rho_{m0} e^{-3(1+\omega_m)N}$ . Dado que  $\omega_m = \omega_\phi$ , entonces la solución para la densidad de energía del campo escalar es:  $\rho_m = \rho_{m0} e^{-3(1+\omega_\phi)N}$ .

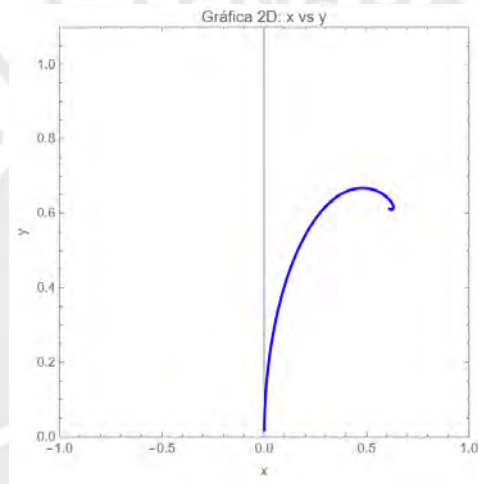
### 5.9.8 Interpretación para el caso $\lambda = 2, \gamma = 1$



**Figura 5.17:** Diagrama de fase del modelo para  $\epsilon = +1, \lambda = 2$  y  $\gamma = 1$ .

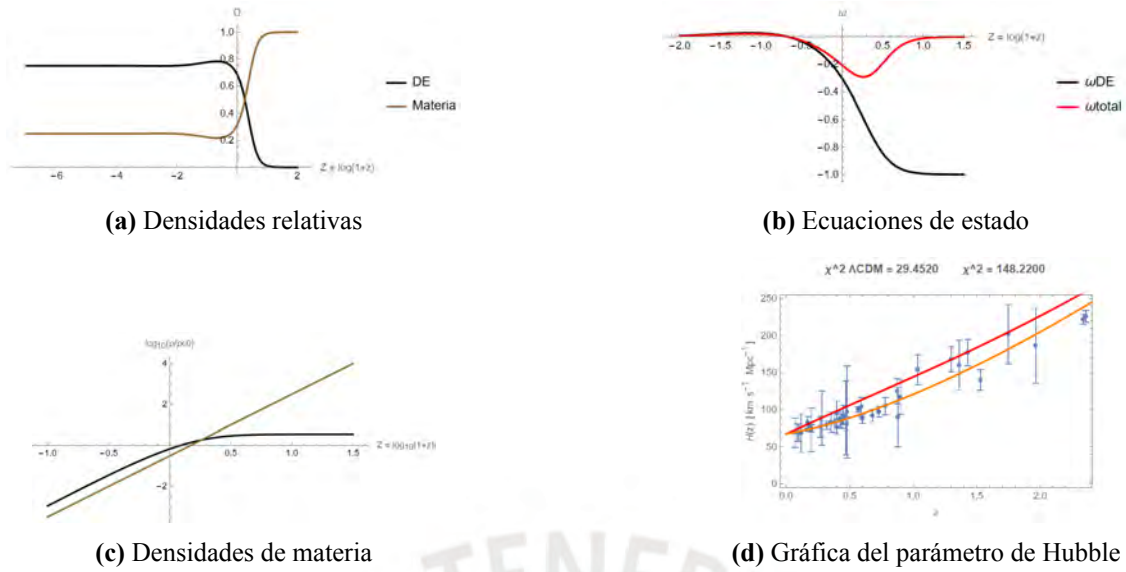
Hemos analizado la física que aporta cada punto fijo del modelo, mediante el sistema dinámico. Por el análisis de estabilidad, obtenemos distintos tipos de espacio de fases para las múltiples curvas que buscarán modelar la evolución de nuestro universo. Vamos a considerar el caso típicamente estudiado donde  $\lambda = 2, \gamma = 1$  (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1806) y se mostrarán los resultados que conlleva esta elección. Uno de los principales motivos de su elección es claro, “requerimos que la densidad de energía del campo escalar permanezca subdominante durante las eras de radiación y materia, emergiendo solo en tiempos posteriores para dar lugar a la aceleración actual observada del universo” (Copeland, Sami y Tsujikawa, 2006, p. 1801). Sin embargo, este modelo solo incluye la etapa de evolución entre materia y energía oscura. Dicha evolución se cumple por lo siguiente: si observamos la Fig. (5.17), la mayoría de curvas de evolución pasan por distintas etapas transitorias (puntos en el espacio de fase), tendiendo a estabilizarse en el punto fijo ( $d$ ). Lo interesante es que dicho punto tiene un valor de  $\Omega_\phi = \frac{3}{4}$ . Esto quiere decir que la mayoría de curvas de evolución, para tiempos lejanos, tenderán a un punto que contiene un campo escalar que aporta el 75% de la densidad crítica (para un universo plano  $\Omega_k \approx 0$  es la densidad total). Este resultado es prometedor, pues es cercano al resultado de las observaciones para el modelo estándar  $\Lambda$ CDM. Sin embargo, este diagrama no es suficiente para identificar si nuestro modelo se ajusta a los datos observacionales. Para ello, se debe realizar un cálculo numérico y determinar una curva de evolución que se ajuste

adecuadamente a los datos. Para ello requerimos de condiciones iniciales que nos permitirán estar sobre una determinada curva. Durante la investigación se identificó que las curvas de evolución son muy sensibles a las condiciones iniciales, en un modelo más complejo se requiere un análisis estadístico ( $\chi^2$ ) para poder obtener los parámetros y condiciones iniciales que mejor se ajustan a los datos. A continuación se muestran las gráficas cosmológicas del modelo de Quintaesencia bajo las condiciones iniciales<sup>28</sup> en  $Z = 1.5$ :  $x(Z = 1.5) = 5.0 \times 10^{-8}$ ,  $y(Z = 1.5) = 9.0 \times 10^{-11}$ . Además, las condiciones iniciales deben ser coherentes, si se busca empezar en una época de materia, las variables asociadas al campo escalar deben ser cercanas a cero; de esta manera,  $\Omega_m \approx 1$ .



**Figura 5.18:** Curva de evolución del modelo Quintaesencia.

<sup>28</sup>Dado que el modelo solo contiene materia bariónica y campo escalar, se busca iniciar desde una época de dominancia de materia. Según la referencia de la misión Planck (Planck Collaboration, 2020), alrededor de  $z = 3387 \rightarrow Z \approx 3.530$ , es el instante cuando la cantidad de materia y radiación se equiparan; por este motivo, elegir un valor de  $Z = 1.5$  (y mayor a  $\approx 0.2$  dónde empieza la expansión acelerada según (Planck Collaboration, 2020) garantiza que nos ubiquemos en una época que domina la materia.



**Figura 5.19:** Gráficas cosmológicas del modelo Quintaesencia.

Para la época actual ( $z = 0$ ) obtenemos un valor de  $\Omega_\phi = 0.685512$ , lo que nos informa que el campo escalar dominará sobre la materia bariónica. Además, la ecuación de estado para el sector de energía oscura modelado por el campo escalar<sup>29</sup> es  $\omega_\phi = -0.301748$ ; este valor genera que  $\omega_{\text{eff}} = -0.206852$  no cumpla la condición de expansión, en la época actual. Esto es claro, pues el resultado del punto (d):  $\gamma = \gamma_\phi$ , implica que estrictamente existirá una proporción constante entre la densidad del campo escalar y la densidad de materia, impidiendo cualquier desviación del régimen de escalamiento. Debido a esto, la densidad de energía del campo escalar evolucionará en proporción al de la materia (Fig. 5.19c), lo que implica que no ocurrirá una expansión acelerada, ni se aliviará el problema de la coincidencia pues no hay una salida del *scaling*<sup>30</sup>. Por otro lado, la Fig. 5.19d muestra dos gráficas, la anaranjada es del modelo y la roja de un modelo  $\Lambda$ CDM; además, se incluyen los datos observacionales en azul. Se muestra que la predicción de  $H(z)$  del modelo se aparta de manera significativa de los datos observacionales *Cosmic Chronometers*; el valor obtenido  $\chi^2 = 148.22$  indica un ajuste deficiente. En contraste, el modelo  $\Lambda$ CDM (determinado con el modelo CPL para  $\omega_0 = 1, \omega_a = 0, H_0 = 67.11 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}, \Omega_m = 0.32$ )

<sup>29</sup>Por el modelo  $\Lambda$ CDM conocemos la existencia de un fluido desconocido llamado “energía oscura”; por ende, en distintos modelos la parte de: campo escalar, invariantes adicionales o modificaciones de la geometría, se les denomina sector de energía oscura; pues, no comprende ni el sector de materia ni radiación. Adoptamos, como hipótesis de trabajo, que la energía oscura queda modelada mediante modificaciones de la teoría; aunque no podamos identificar de forma directa ese sector, la existencia de energía oscura está firmemente respaldada en el marco  $\Lambda$ CDM.

<sup>30</sup>No habrá expansión acelerada pues en *scaling*  $\omega_\phi = \omega_m$ , originando que  $\omega_{\text{eff}} = \omega_m$ . Dado que los distintos tipos de fluido conocidos cumplen  $\omega_m > 0$ , no se podrá tener el caso de expansión donde  $\omega_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ .

ofrece un ajuste mucho mejor, con  $\chi^2 = 29.4520$ .

Un primer intento para solucionar las limitaciones obtenidas es escoger otros parámetros para  $\gamma, \lambda$  que logren un régimen de escalamiento o *scaling* transitorio, y genere una época de expansión acelerada. De forma más técnica, se deben escoger nuevos parámetros para que nos dé un nuevo espacio de evolución y las condiciones iniciales apropiadas, ajustando el modelo de tal forma que se acerquen a los datos observacionales. Notar que si  $\lambda \rightarrow 0$ , el modelo de Quintaesencia tiende al modelo de  $\Lambda$ CDM. En otras palabras, Quintaesencia nos lleva al modelo que ya conocemos que, a pesar de su éxito, presenta limitaciones como la tensiones  $H_0$ , la tensión  $\sigma_8$  para perturbaciones o el problema de ajuste fino, entre otros. A pesar de ello, se tienen restricciones sólidas con  $\Lambda$ CDM para la densidad de energía oscura en la época actual (cerca del 68%) o para su ecuación de estado  $\omega$ . El modelo  $\Lambda$ CDM fija  $\omega_\Lambda = -1$ , pero hay investigaciones, en la misión Planck, dejando a la ecuación de estado como parámetro libre, obteniendo el intervalo:  $-1.028 \pm 0.032$  (Gonzalez-Espinoza y Otalora, 2021, p. 11). Estas no son restricciones universales, por lo que tenemos libertad de proponer un modelo con valores cosmológicos actuales fuera de esos intervalos, pero que se ajusten mejor a los datos observacionales. En la siguiente sección se presentarán los resultados del método de *Cadenas de Markov*, el cual nos permitirá obtener regiones de contorno que nos ayuden a restringir los parámetros en base a la data observacional (*Cosmic Chronometers*) con intervalos de confianza.

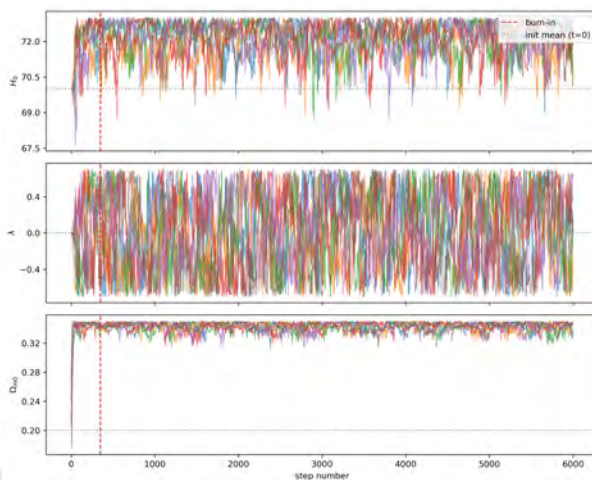
### 5.9.9 Cadenas de Markov y regiones de contorno para el modelo de Quintaesencia

En esta sección presentamos los resultados bayesianos del modelo de quintaesencia a partir de cadenas de Markov (MCMC) y sus regiones de contorno. El vector de parámetros libres es  $\theta = (H_0, \lambda, \Omega_{m0})$  con *priors top-hat* uniformes:  $H_0 \in (63, 73)$ ,  $\lambda \in (-0.7, 0.7)$  y  $\Omega_{m0} \in (0.15, 0.35)$ . Mantenemos fijos  $\gamma = 1$  y  $\epsilon = 1$ . Las condiciones iniciales del campo se fijan<sup>31</sup>:  $x(Z = 1.5) = 2.234 \times 10^{-8}$ ,  $y(Z = 1.5) = 4.234 \times 10^{-11}$ . El muestreo se realiza con  $n_{\text{walkers}} = 8$ , un máximo de 6,000 pasos y diagnósticos de convergencia cada 100 iteraciones. Tras descartar el *burn-in*, se obtienen las distribuciones marginales y las regiones de confianza

<sup>31</sup>De la misma forma que en el modelo de tres tipos de fluido, para la elección de las condiciones iniciales se formó a partir de minimizar en primer lugar el parámetro  $\chi^2$  mediante un código de *Mathematica*; por el contrario, las cadenas no convergían.

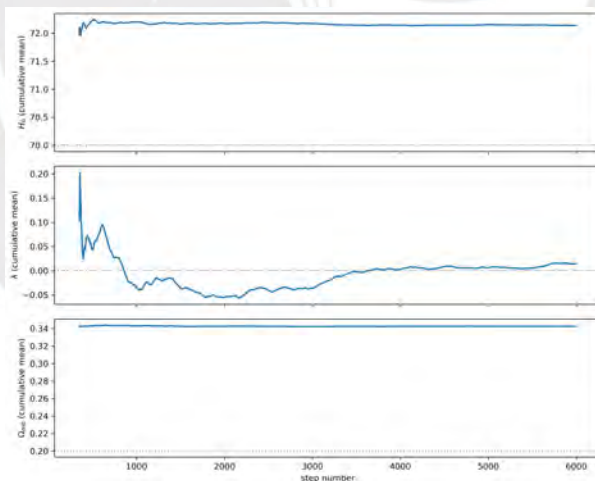
del 68% y 95%.

**Trazas de un subconjunto de walkers (con burn-in):** la estabilidad y mezcla entre walkers sugieren buena exploración del posterior.



**Figura 5.20:** Trazas de un subconjunto de walkers para  $H_0$ ,  $\lambda$  y  $\Omega_{m0}$ . La línea vertical marca el *burn-in*.

**Media acumulada post *burn-in*:** la convergencia hacia una meseta sugiere que la estimación puntual es estable frente a más iteraciones.

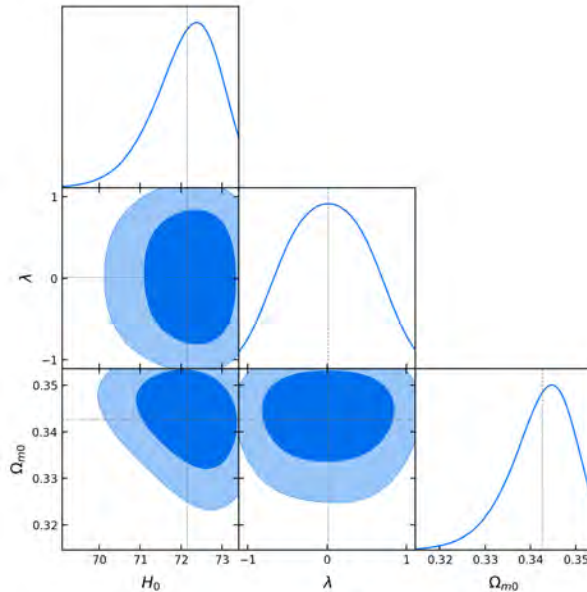


**Figura 5.21:** Media acumulada post *burn-in* de  $H_0$ ,  $\lambda$  y  $\Omega_{m0}$ .

Las cadenas de Markov nos confirman convergencia del modelo; por consecuencia, reflejan adecuadamente los resultados del *posterior* y las regiones de contorno son fiables. A partir de ellas también conocemos, alrededor de qué valor, oscilan con mayor probabilidad los caminantes.

**Regiones de contorno (*corner plot*):** presenta las marginales 1D y las marginales 2D

para cada par de parámetros con las bandas del 68% y 95%. Las elipses revelan correlaciones y posibles degeneraciones entre  $H_0$ ,  $\lambda$  y  $\Omega_{m0}$ , y permiten comparar directamente con  $\Lambda$ CDM ( $\lambda = 0$ ) o con otros escenarios.



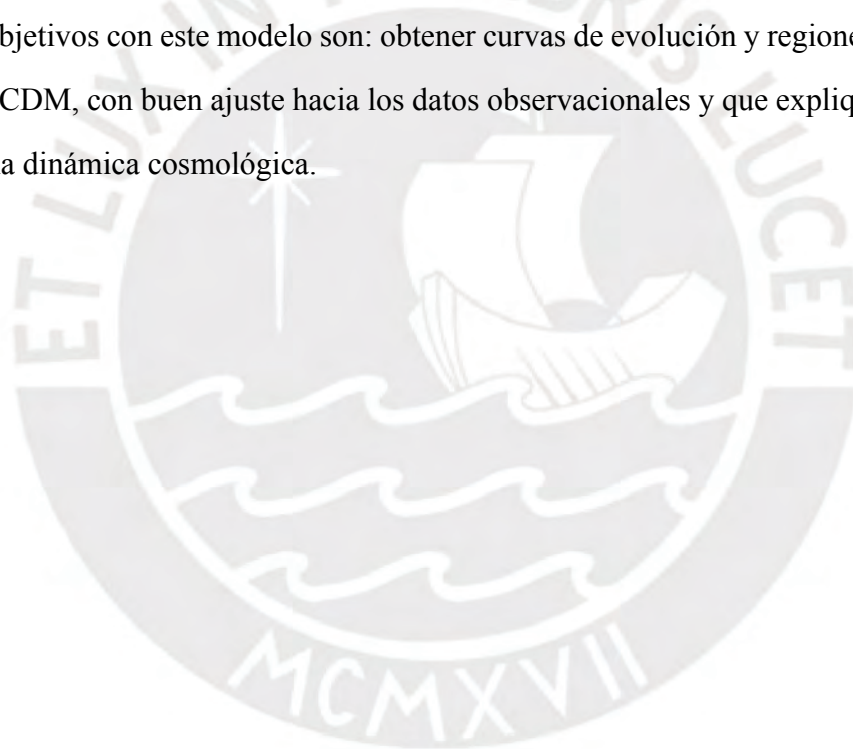
**Figura 5.22:** Regiones de contorno del 68% y 95% para  $(H_0, \lambda, \Omega_{m0})$  y marginales 1D correspondientes.

Parámetro	Media	<i>MAP</i>	68% I.C.	95% I.C.
$H_0$	72.15	72.60	[71.51, 73.09]	[70.55, 73.64]
$\lambda$	0.01305	0.1538	[-0.4703, 0.5035]	[-0.6609, 0.6751]
$\Omega_{m0}$	0.3427	0.3464	[0.3371, 0.3509]	[0.3285, 0.3558]

**Tabla 5.6:** Estadísticos MCMC quintaesencia.

Observamos que los datos encontrados para el parámetro  $H_0$  y  $\Omega_{m,0}$  no se encuentran dentro del intervalo dado por la misión Planck (Planck Collaboration, 2020); esto es claro indicio que podemos encontrar modelos distintos a  $\Lambda$ CDM que se aproximen con confianza a los datos observacionales. Sin embargo, las regiones nos informan que cuanto más cerca a cero es el valor de  $\lambda$  (media, *MAP*), el modelo se ajusta mejor a los datos. Sin embargo, en el caso límite  $\lambda = 0$ , volvemos al caso estándar  $\Lambda$ CDM, por lo que no ofrece resultados novedosos. Las gráficas presentan correlación, a comparación de las regiones encontradas en el modelo de tres materias, éstas se muestran más circulares, por ende hay menor correlación. La tabla (5.6) muestra que hay una probabilidad del 68% que los parámetros verdaderos del modelo se encuentren en los intervalos de la segunda columna.

Por otro lado, aunque ajustemos el modelo, en Quintaesencia tenemos limitaciones generales:  $\omega_\phi \geq -1$ , el modelo tiende  $\omega_\phi \approx -1$  con dinámica restringida sin cruzar el “límite fantasma”; se encuentran discordancias al tratar de resolver las tensiones  $H_0$  al incluir *scaling* (Sabla y Caldwell, 2021); no es posible resolver las tensiones  $H_0$  y  $\sigma_8$  de perturbaciones por la poca dinámica de  $\omega_\phi$  (Heisenberg, Villarrubia-Rojo y Zosso, 2022). Por estas razones se investigan diversas propuestas con modificaciones en la gravedad (teorías teleparalelas o de no-metricidad) o adición de campos en la acción (escalares, vectoriales o tensoriales) para obtener resultados con un mejor ajuste y aliviar las tensiones, el problema de la coincidencia, entre otros. En el siguiente capítulo exploraremos un modelo, bajo una teoría de no-metricidad, con modificación de la gravedad y acoplamiento de campo escalar no canónico dilatónico con interacción. Los objetivos con este modelo son: obtener curvas de evolución y regiones de contorno alejadas de  $\Lambda$ CDM, con buen ajuste hacia los datos observacionales y que explique, de manera coherente, una dinámica cosmológica.



## Capítulo 6

# Dinámica cosmológica $f(Q, \phi)$ con interacción y campo escalar dilatónico no canónico

Sea la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{-Q}{2\kappa^2} + \alpha X + F_2(\phi)X^n - F_1(\phi)G(Q) - V(\phi) \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \phi, \Psi_m] + S_r[g_{\mu\nu}, \Psi_r]$$

Consideramos un modelo, bajo una teoría de no-metricidad, que busca modelar el sector de energía oscura con una modificación de la gravedad  $G(Q)$  y un campo escalar no canónico dilatónico con un parámetro  $\alpha$  en su parte cinética  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$  y un potencial  $V(\phi)$ . Dicho parámetro nos permite estudiar los casos de quintaesencia  $\alpha = 1$  o el caso *phantom*  $\alpha = -1$  (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025). El término dilatónico  $F_2(\phi)X^n$  se incorpora con la finalidad de aliviar teóricamente inestabilidades de energía negativa en el caso  $\alpha = -1$  (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025). Se acopla mínimamente a radiación  $S_r[g_{\mu\nu}, \Psi_r]$  y materia  $S_m[g_{\mu\nu}, \phi, \Psi_m]$ <sup>1</sup>; esta última, además, interactúa con el campo escalar  $\phi$ , conteniendo una parte como materia oscura fría no relativista ( $\omega_m = 0$ ). Entonces, el sector de materia está conformado por materia bariónica y materia oscura; sin embargo, la interacción  $C$  solo ocurre entre la energía oscura y materia oscura<sup>2</sup> mediante  $\frac{\delta S_m}{\delta \phi} = -\sqrt{-g}\sigma$  (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025). La motivación de este modelo, es que incorpora distintas teorías gravitacionales que han proporcionado, cada uno por su lado, resultados prometedores para describir a la energía oscu-

<sup>1</sup>La notación  $S_r[g_{\mu\nu}, \Psi_r]$  significa una acción asociada a un fluido dependiente de campos de radiación y métrica. Mientras que  $S_m[g_{\mu\nu}, \phi, \Psi_m]$  significa una acción asociada a un fluido dependiente de campos de materia, métrica y campo escalar.

<sup>2</sup>Según la referencia (Bergé et al., 2018), la interacción entre materia bariónica y energía oscura es ínfimo, por lo que consideramos únicamente interacción con la materia oscura.

ra; estos son: modelo de condensado fantasma dilatónico con interacción (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025) y el modelo de energía oscura en una teoría  $f(T, \phi)$  (Gonzalez-Espinoza y Otilora, 2021). El trabajo en esta tesis se realizó con la guía constante del Dr. Manuel Gonzalez Espinoza, los resultados mostrados en esta tesis están basados en los cálculos de sus trabajos de investigación.

Por otro lado, el modelo es un caso específico del marco general  $P_1(X, \phi) + P_2(Q, \phi)$ , presentado en el Apéndice (E.2) para encontrar restricciones en el *scaling*. En el estudio para obtener un régimen de escalamiento para tiempos lejanos (Apéndice E.6) se obtuvo como uno de los resultados que la función general para  $G(Q)$  debe seguir la forma:  $G(Q) = \left(\frac{Q}{6}\right)^{1+s}$ . Con esta motivación, emplearemos esta propuesta para  $G(Q)$  en la acción, con la esperanza de encontrar puntos *scaling* en el sistema dinámico; esto es, puntos cuya ecuación de estado, del sector energía oscura, imite al de la materia:  $\omega_{\text{DE}} = \omega_m = 0$  y así obtener un mecanismo natural que alivie el problema de la coincidencia.

A partir del modelo, determinamos las ecuaciones que describen la evolución de fondo con el método del *Minisuperspace* (5.4). Las ecuaciones de Friedmann son:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \frac{3H^2}{\kappa^2} &= -(1+2s)F_1(\phi)H^{2(1+s)} + V(\phi) + \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2 + 2^{-n}(-1+2n)F_2(\phi)\dot{\phi}^{2n} + \rho_M + \rho_r \\ -\frac{2\dot{H}}{\kappa^2} &= \alpha\dot{\phi}^2 + 2^{1-n}nF_2(\phi)\dot{\phi}^{2n} + \frac{2}{3}(1+s)H^{2s} \left[ (1+2s)F_1(\phi)\dot{H} + H\frac{dF_1}{d\phi}\dot{\phi} \right] + p_M + \rho_M + p_r + \rho_r \\ -H^{2(1+s)}\frac{dF_1}{d\phi} - \frac{dV}{d\phi} - \alpha(3H\dot{\phi} + \ddot{\phi}) + 2^{-n}\dot{\phi}^{2(-1+n)} \left[ (1-2n)\frac{dF_2}{d\phi}\dot{\phi}^2 + 2nF_2(\phi)(-3H\dot{\phi} + (1-2n)\ddot{\phi}) \right] &= \sigma \end{aligned}$$

Donde, las ecuaciones de continuidad para la materia ( $\rho_m = \rho_{\text{bariones}} + \rho_{\text{materia oscura}}$ ) y radiación son:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_m}{dN} + 3(1+\omega_m)\rho_m &= \sigma\phi' \\ \frac{d\rho_r}{dN} + 3(1+\omega_r)\rho_r &= 0 \end{aligned}$$

En la referencia (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025) se exploran distintos tipos de interacción. Para este trabajo se utilizará la siguiente:

$$C = \beta \kappa \rho_m \dot{\phi} \quad (6.1)$$

<sup>3</sup>Por cuestiones de redacción, se optó por mostrar las ecuaciones con derivadas temporales  $t$ ; sin embargo, en el código para determinar las gráficas se deben redefinir en el  $N$  e-fold. Recordar que la notación de punto está asociada a la derivada temporal y primado a la derivada respecto al e-fold.

La interacción  $C$  está relacionado con  $\sigma$  de la siguiente manera<sup>4</sup>:

$$C = q \rho_m \dot{\phi}, \quad q = \beta \kappa, \quad \sigma(z) = q \rho_m(z) \quad (6.2)$$

Aquí,  $C$  representa el término de intercambio de energía entre el fluido de materia oscura y el campo escalar. La función  $\sigma(z) = q \rho_m(z)$  describe el acoplamiento efectivo entre ambos sectores y depende de la evolución de la densidad de materia. Por su parte,  $\beta$  es un parámetro adimensional que cuantifica la intensidad del acoplamiento; en particular, para  $\beta = 0$  se recupera el caso sin interacción entre la materia oscura y el campo escalar.

Por la forma estándar de las ecuaciones de Friedmann, reconocemos la densidad y presión del sector energía oscura. Se mostrarán en el tiempo  $N$  e-fold:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{DE}} &= \frac{\alpha}{2} (\phi' H)^2 + V(\phi) - (1 + 2s) H^{2+2s} F_1(\phi) + 2^{-n} (2n - 1) F_2(\phi) (\phi' H)^{2n} \\ &\quad + \frac{2}{3} (1 + s) F_{1,\phi} \phi' H^{2+2s} + 2^{-n} F_2(\phi) (\phi' H)^{2n} \\ p_{\text{DE}} &= \frac{\alpha}{2} (\phi' H)^2 - V(\phi) + (1 + 2s) H^{2+2s} F_1(\phi) + \frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) F_1(\phi) H^{2s+1} H' \end{aligned}$$

Además, las definiciones de las ecuaciones de estado, del sector energía oscura y del sector efectivo o total, son:<sup>5</sup>

$$\omega_{\text{DE}}(N) = \frac{p_{\text{DE}}(N)}{\rho_{\text{DE}}(N)}, \quad \omega_{\text{eff}}(N) = \frac{p_{\text{DE}}(N) + \frac{1}{3} \rho_r(N)}{\rho_{\text{DE}}(N) + \rho_m(N) + \rho_r(N)}. \quad (6.3)$$

### 6.0.1 Sistema dinámico $f(Q, \phi)$

Definimos las siguientes variables adimensionales<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\kappa \phi'}{\sqrt{6}}, & y &\equiv \frac{\kappa \sqrt{V}}{\sqrt{3} H}, & u_1 &\equiv -\frac{\kappa^2 (2s + 1) F_1 H^{2s}}{3}, \\ u_2 &\equiv \frac{\kappa \sqrt{F_2}}{\sqrt{3} H} \left( \frac{\phi' H}{\sqrt{2}} \right)^n, & \varrho &\equiv \frac{\kappa \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3} H}, & \lambda &\equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}, \\ \Gamma &\equiv \frac{V V_{,\phi\phi}}{(V_{,\phi})^2}, & \sigma_1 &\equiv -\frac{F_{1,\phi}}{\kappa F_1}, & \Theta_1 &\equiv \frac{F_1 F_{1,\phi\phi}}{(F_{1,\phi})^2}, \\ \sigma_2 &\equiv \frac{F_{2,\phi}}{\kappa F_2}, & \Theta_2 &\equiv \frac{F_2 F_{2,\phi\phi}}{(F_{2,\phi})^2}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>En los Apéndices (E.1, E.2) se estudian los efectos de este tipo de interacción.

<sup>5</sup>Dichas definiciones pueden ser para variables en función del  $N$  e-fold o en función de  $Z = \log_{10}(1 + z)$ , según convenga.

<sup>6</sup>Estas variables se obtienen al buscar adimensionar las ecuaciones de Friedmann, cada una está asociada a una variable del modelo. Por ejemplo,  $x$  a la parte cinética del campo escalar,  $y$  asociado al potencial del campo escalar,  $\varrho$  respecto a la parte de radiación,  $u_1$  asociado a la modificación de gravedad o  $u_2$  asociado al término dilatón.

Para obtener un sistema autónomo tomamos  $\lambda, \sigma_1, \sigma_2$  constantes. En el Apéndice (E.9) se muestran las funciones completas del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dN} &= -\frac{f_1(x, y, u_1, u_2, \lambda, \sigma_1, \sigma_2, \varrho, \alpha, \beta, n, s)}{2(1+2s)(-1+u_1+su_1)(n(-1+2n)u_2^2+x^2\alpha)} \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{f_2(x, y, u_1, u_2, \lambda, \sigma_1, \varrho, \alpha, s)}{2(1+2s)(-1+u_1+su_1)} \\ \frac{du_1}{dN} &= \frac{f_3(x, y, u_1, u_2, \sigma_1, \varrho, \alpha, n, s)}{(1+2s)(-1+u_1+su_1)} \\ \frac{du_2}{dN} &= \frac{f_4(x, y, u_1, u_2, \lambda, \sigma_1, \sigma_2, \varrho, \alpha, \beta, n, s)}{2(1+2s)(-1+u_1+su_1)(n(-1+2n)u_2^2+x^2\alpha)} \\ \frac{d\varrho}{dN} &= -\frac{f_5(x, y, u_1, u_2, \sigma_1, \varrho, \alpha, s)}{2(1+2s)(-1+u_1+su_1)} \\ \frac{d\lambda}{dN} &= -\sqrt{6}x(-1+\Gamma)\lambda^2 \\ \frac{d\sigma_1}{dN} &= \sqrt{6}x\sigma_1^2 - \sqrt{6}x\Theta_1\sigma_1^2 \\ \frac{d\sigma_2}{dN} &= \sqrt{6}x\sigma_2^2 - \sqrt{6}x\Theta_2\sigma_2^2\end{aligned}$$

La ecuación de restricción es:

$$\alpha x^2 + y^2 + u_1 + (-1+2n)u_2^2 + \varrho^2 + \Omega_m = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \Omega_{DE} + \Omega_r + \Omega_m = 1 \quad (6.4)$$

Determinamos los puntos fijos o críticos del modelo. En la referencia E.9 se muestra el código usado para hallarlos.

Puntos	$x$	$y$	$u_1$	$u_2$	$\varrho$
Q1	$-\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\beta}{\alpha}$	0	0	0	0
Q2	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	0	0	0	0
Q3	$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	0	0	0	0
Q4	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{-1+2n}}$	0
Q5	$-\frac{1}{\sqrt{6}\beta}$	0	0	0	$\frac{\sqrt{-\frac{2}{3}+\beta^2}}{\beta}$
Q6	$\frac{(-1+2n)\sigma_2 - \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2}}{2\sqrt{6}(-1+n)^2\alpha}$	0	0	$\sqrt{12 + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - 2n\sigma_2 + \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2})}{(-1+n)^3\alpha}}$	0
Q7	$\frac{(-1+2n)\sigma_2 + \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2}}{2\sqrt{6}(-1+n)^2\alpha}$	0	0	$\sqrt{12 + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - 2n\sigma_2 - \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2})}{(-1+n)^3\alpha}}$	0
Q8	$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+n)}{(-1+n)\beta + \sigma_2}$	0	0	$\frac{\sqrt{(-1+n)^2(3(-1+n)\alpha + 2\beta(-1+n)\beta + \sigma_2)}}{((-1+n)\beta + \sigma_2)^2}$	0
Q9	$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+n)}{\sigma_2}$	0	0	$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+n)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-2+n}\sigma_2}$	$\frac{\sqrt{-8(-1+n)^3\alpha + (-2+n)\sigma_2^2}}{\sqrt{(-2+n)\sigma_2^2}}$
Q10	$\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\lambda}$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{3}\lambda}$	0	0	$\frac{\sqrt{-4\alpha + \lambda^2}}{\lambda}$
Q11	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}\alpha}$	$\frac{\sqrt{(\beta+\lambda)(6\alpha - \lambda^2)/\alpha}}{\sqrt{6}\sqrt{\beta+\lambda}}$	0	0	0
Q12	$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\beta+\lambda}$	$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}\alpha + \beta(\beta+\lambda)}}{\beta+\lambda}$	0	0	0
Q13	$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}s}{s\beta - \sigma_1}$	0	$\frac{(1+2s)(3s\alpha + 2s\beta^2 - 2\beta\sigma_1)}{2(s\beta - \sigma_1)(\beta + 2s\beta - \sigma_1)}$	0	0
Q14	$-\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}s}{\sigma_1}$	0	$\frac{4s(1+2s)\alpha}{3\sigma_1^2}$	0	$\frac{\sqrt{-\frac{4}{3}s(1+4s)\alpha + \sigma_1^2}}{\sigma_1}$
Q15	$-\frac{\sqrt{3}s(1+2s)\alpha + \sqrt{s\alpha(3s(1+2s)^2\alpha - 2(1+s)\sigma_1^2)}}{\sqrt{2}(1+s)\alpha\sigma_1}$	0	$\frac{(1+2s)(3s^2(1+2s)\alpha - (1+s)\sigma_1^2 + \sqrt{3}s\sqrt{s\alpha(3s(1+2s)^2\alpha - 2(1+s)\sigma_1^2)})}{(1+s)^2\sigma_1^2}$	0	0
Q16	$-\frac{\sqrt{3}s(1+2s)\alpha + \sqrt{s\alpha(3s(1+2s)^2\alpha - 2(1+s)\sigma_1^2)}}{\sqrt{2}(1+s)\alpha\sigma_1}$	0	$\frac{(1+2s)(\sigma_1^2 + s(-3s(1+2s)\alpha + \sigma_1^2 + \sqrt{3}s\sqrt{s\alpha(3s(1+2s)^2\alpha - 2(1+s)\sigma_1^2)}))}{(1+s)^2\sigma_1^2}$	0	0

Tabla 6.1: Puntos fijos del sistema en variables  $(x, y, u_1, u_2, \varrho)$ .

## 6.0.2 Parámetros Cosmológicos

A continuación se muestran las densidades relativas y ecuaciones de estado en función de las variables adimensionales:

$$\Omega_{\text{DE}} = u_1 + (-1 + 2n)u_2^2 + \alpha x^2 + y^2, \quad \Omega_{\text{rad}} = \varrho^2, \quad \Omega_{\text{mat}} = 1 - \Omega_{\text{DE}} - \Omega_{\text{rad}}$$

$$\omega_{\text{DE}} = -\frac{3u_2^2 + 2\sqrt{6}\sigma_1 u_1 x + 3\alpha x^2 - 3y^2 + 6s(u_2^2 + \alpha x^2 - y^2) + u_1 \varrho^2 + 2s^2 u_1 (3 + \varrho^2) + s u_1 (3 + 2\sqrt{6}\sigma_1 x + 3\varrho^2)}{3(1+2s)(-1+u_1+s u_1)(u_1 + (-1+2n)u_2^2 + \alpha x^2 + y^2)}$$

$$\omega_{\text{eff}} = -\frac{3s(1+2s)u_1 + 3u_2^2 + 2\sqrt{6}(1+s)\sigma_1 u_1 x + 3\alpha x^2 - 3y^2 + \varrho^2 + 2s(3u_2^2 + 3\alpha x^2 - 3y^2 + \varrho^2)}{3(1+2s)(-1+u_1+s u_1)}$$

Para realizar un análisis exhaustivo de estabilidad es necesario obtener los parámetros cosmológicos por cada punto fijo y así enfocarnos en una posible estabilidad. En la siguiente tabla se muestran las propiedades de cada punto crítico:

Punto	$\Omega_{DE}$	$\omega_{DE}$	$\omega_{eff}$
Q1	$\frac{2\beta^2}{3\alpha}$	1	$\frac{2\beta^2}{3\alpha}$
Q2	1	1	1
Q3	1	1	1
Q4	1	$\frac{1}{-1+2n}$	$\frac{1}{-1+2n}$
Q5	$\frac{\alpha}{6\beta^2}$	1	$\frac{1}{3}$
Q6	1	$-1 + \frac{\sigma_2 \left( (-1+2n)\sigma_2 - \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2} \right)}{6(-1+n)^3\alpha}$	$-1 + \frac{\sigma_2 \left( (-1+2n)\sigma_2 - \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2} \right)}{6(-1+n)^3\alpha}$
Q7	1	$-1 + \frac{\sigma_2 \left( (-1+2n)\sigma_2 + \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2} \right)}{6(-1+n)^3\alpha}$	$-1 + \frac{\sigma_2 \left( (-1+2n)\sigma_2 + \sqrt{-24(-1+n)^3n\alpha + (1-2n)^2\sigma_2^2} \right)}{6(-1+n)^3\alpha}$
Q8	$-\frac{(-1+n)(3(-1+n)^2\alpha + (-1+2n)\beta(-1+n)\beta + \sigma_2)}{((-1+n)\beta + \sigma_2)^2}$	$\frac{\beta(-1+n)\beta + \sigma_2}{3(-1+n)^2\alpha + (-1+2n)\beta(-1+n)\beta + \sigma_2}$	$\frac{\beta - n\beta}{(-1+n)\beta + \sigma_2}$
Q9	$\frac{8(-1+n)^3\alpha}{(-2+n)\sigma_2^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Q10	$\frac{4\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Q11	1	$-1 + \frac{\lambda^2}{3\alpha}$	$-1 + \frac{\lambda^2}{3\alpha}$
Q12	$\frac{3\alpha + \beta(\beta + \lambda)}{(\beta + \lambda)^2}$	$-\frac{\beta(\beta + \lambda)}{3\alpha + \beta(\beta + \lambda)}$	$-\frac{\beta}{\beta + \lambda}$
Q13	$\frac{3s^2\alpha + \frac{(1+2s)(s\beta - \sigma_1)(3s\alpha + 2s\beta^2 - 2\beta\sigma_1)}{\beta + 2s\beta - \sigma_1}}{2(-s\beta + \sigma_1)^2}$	$-\frac{2s\beta(s\beta - \sigma_1)(\beta + 2s\beta - \sigma_1)}{2s^2(1+2s)\beta(3\alpha + \beta^2) - s((3+9s)\alpha + 4(1+2s)\beta^2)\sigma_1 + 2(1+2s)\beta\sigma_1^2}$	$\frac{s\beta}{-s\beta + \sigma_1}$
Q14	$\frac{4s(1+4s)\alpha}{3\sigma_1^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Q15	1	$\frac{3s^{3/2}\sqrt{\alpha} + \sqrt{9s(1+2s)^2\alpha - 6(1+s)\sigma_1^2}}{3\sqrt{s(1+s)}\sqrt{\alpha}}$	$\frac{3s^{3/2}\sqrt{\alpha} + \sqrt{9s(1+2s)^2\alpha - 6(1+s)\sigma_1^2}}{3\sqrt{s(1+s)}\sqrt{\alpha}}$
Q16	1	$\frac{3s^{3/2}\sqrt{\alpha} - \sqrt{9s(1+2s)^2\alpha - 6(1+s)\sigma_1^2}}{3\sqrt{s(1+s)}\sqrt{\alpha}}$	$\frac{3s^{3/2}\sqrt{\alpha} - \sqrt{9s(1+2s)^2\alpha - 6(1+s)\sigma_1^2}}{3\sqrt{s(1+s)}\sqrt{\alpha}}$

**Tabla 6.2:** Parámetros cosmológicos por punto crítico densidad relativa de energía oscura  $\Omega_{DE}$ , ecuación de estado de la componente oscura  $\omega_{DE}$  y ecuación de estado efectiva  $\omega_{eff}$ .

Analizaremos las propiedades de los puntos fijos que aparecen en la Fig. (6.1). El punto fijo  $Q_1$ , bajo una interacción  $\beta$  pequeña (B. Wang et al., 2016), se comporta como un punto de materia  $\Omega_{DE} \approx 0$ ,  $\omega_{eff} \approx 0$ ; por lo que es válido para este punto una estabilidad tipo inestable o *saddle point*. El punto fijo  $Q_4$ , se encontrará demasiado cerca al punto  $Q_1$  en el espacio de fase; este, es un punto con un sector de energía oscura pura  $\Omega_{DE} = 1$ . Además, si tomamos  $n = 2$ , el sector de energía oscura se comporta como radiación  $\omega_{eff} = 1/3$ ; dado que  $\omega_{DE} = 1/3$ , el punto  $Q_4$  es un punto *scaling* entre el sector energía oscura y radiación; por lo que, tendrá estabilidad tipo inestable o *saddle point*. El punto fijo  $Q_{10}$ , es un punto de radiación si  $\lambda$  es de valor grande:  $\Omega_{DE} \approx 0$ ,  $\Omega_{rad} \approx 1$ ,  $\omega_{eff} = 1/3$ ; además, presenta escalamiento  $\omega_{DE} = 1/3$ , siendo de estabilidad tipo inestable o *saddle point*<sup>7</sup>. El punto fijo  $Q_{12}$ , para  $\beta$  de valor pequeño y  $\lambda$  de valor grande, es un punto con un porcentaje no nulo del sector energía oscura  $\Omega_{DE} \geq 0$ ; luego, como  $\omega_{DE} \approx 0$ , es un punto *scaling* entre materia y energía oscura. Este resultado alivia el problema de la coincidencia al proporcionar un mecanismo que mantiene las densidades de materia y energía oscura en el mismo orden de magnitud cerca de la época actual;

<sup>7</sup>En la investigación se observó que la mayoría de puntos críticos son del tipo *saddle point*, claro, bajo todas las dimensiones del espacio de fase. Sin embargo, si consideramos solo 3 variables, algunos puntos se volverán inestables completamente.

además, su estabilidad de tipo *saddle point* rompe dicho escalamiento, permitiendo una época con expansión acelerada. Finalmente, el punto  $Q_{16}$  será el atractor, este se conforma únicamente por el sector de energía oscura; y, bajo los resultados que se mostrarán más adelante, presentará expansión acelerada:  $\omega_{\text{eff}} < -1/3$ ,  $\omega_{\text{DE}} \approx -1$ .

### 6.0.3 Análisis de estabilidad

Buscamos una estabilidad coherente con las observaciones actuales del universo, como puntos de radiación inestables, puntos de materia inestables tipo *saddle point*, puntos *sca-ling* y puntos de energía oscura que sean atractores. Este análisis restringirá los parámetros  $n, s, \alpha, \beta, \lambda, \sigma_1, \sigma_2$  para una determinada evolución. Consideramos los casos  $\lambda, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  constantes para obtener un sistema autónomo, definimos:

$$F_1 = \frac{dx}{dN}, \quad F_2 = \frac{dy}{dN}, \quad F_3 = \frac{du_1}{dN}, \quad F_4 = \frac{du_2}{dN}, \quad F_5 = \frac{d\varrho}{dN} \quad (6.5)$$

Luego, determinamos la matriz Jacobiano del sistema<sup>8</sup>:

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 \\ J_6 & J_7 & J_8 & J_9 & J_{10} \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x \left( -n u_2^2 (2\varrho + 4s\varrho) + 2n^2 u_2^2 (2\varrho + 4s\varrho) + x(2(1+2s)x\alpha\varrho - 2\sqrt{6}(1+2s)(-1+u_1+s u_1)\beta\varrho) \right)}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)(n(-1+2n)u_2^2 + x^2\alpha)} \\ \frac{y(6x\alpha + 2\sqrt{6}s^2 u_1\lambda + \sqrt{6}((-1+u_1)\lambda + 2u_1\sigma_1) + s(2(6x\alpha - \sqrt{6}\lambda) + \sqrt{6}u_1(3\lambda + 2\sigma_1)))}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{u_1(12s^2 x\alpha - \sqrt{6}(-1+u_1)\sigma_1 + s(6x\alpha + 2\sqrt{6}\sigma_1 - \sqrt{6}u_1\sigma_1))}{(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{u_1(-6sy - 12s^2 y)}{(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{\varrho(6x\alpha + 2\sqrt{6}u_1\sigma_1 + 2s(6x\alpha + \sqrt{6}u_1\sigma_1))}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{(6u_2 + 12su_2)y}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{u_1(6su_2 + 12s^2 u_2)}{(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{u_1(2s\varrho + 4s^2\varrho)}{(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{-2n^2 u_2^2 (2\varrho + 4s\varrho) - u_2 x^2 \alpha (2\varrho + 4s\varrho) + nu_2(2\sqrt{6}(1+2s)(-1+u_1+s u_1)x\beta\varrho + u_2^2(2\varrho + 4s\varrho))}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)(n(-1+2n)u_2^2 + x^2\alpha)} \\ \frac{(-6y - 12sy)\varrho}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ \frac{(6u_2 + 12su_2)\varrho}{2(1+2s)(-1+u_1+s u_1)} \\ J_{13} \end{pmatrix}$$

Por la complejidad del sistema, los autovalores de algunos puntos fijos son demasiado extensos o no es posible determinarlos en su forma general (demasiado coste computacional). Una técnica para lograr obtener algún resultado es fijar algunos parámetros antes de utilizar la función *Eigenvalues*<sup>9</sup>, caso contrario, el código no terminará de compilar. Por estas razones, no se mostrarán los autovalores de todos los puntos fijos en su forma general. En caso de interés, en la referencia (Casimiro, 2025) se encuentra el código para determinar todos los autovalores.

<sup>8</sup>En la referencia (Casimiro, 2025) se encuentra el código llamado “Versión Final - General sin scaling - Teoría Cosmological p1 + p2 dilaton + Cosmological”; dentro de este, se encuentra la matriz completa.

<sup>9</sup>Adicionalmente, se identificaron puntos fijos que se vuelven indeterminados o imaginarios al fijar parámetros físicos como  $\alpha$  (coeficiente cinético) o  $\beta$  (interacción), por lo que no aparecen en los diagramas de fase ni afectan la dinámica. Otros puntos, aunque presentes, se sitúan en regiones muy alejadas de la trayectoria relevante en el espacio  $(x, y, z)$ , de modo que su estabilidad no influye en la curva analizada y, por ello, también se omiten en los diagramas.

Puntos	1° Autovalor	2° Autovalor	3° Autovalor	4° Autovalor	5° Autovalor
$Q_1$	$-\frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}$	$-\frac{3}{2} + \frac{\beta^2}{\alpha}$	$\frac{3}{2} + \frac{\beta(\beta + \lambda)}{\alpha}$	$\frac{-3s\alpha - 2s\beta^2 + 2\beta\sigma_1}{\alpha}$	$-\frac{3}{2}(-1+n) - \frac{\beta((-1+n)\beta + \sigma_2)}{\alpha}$
$Q_4$	$\frac{3}{-1+2n}$	$\frac{2-n}{-1+2n}$	$\frac{3(-1+n)}{-1+2n}$	$\frac{3n}{-1+2n}$	$\frac{6ns}{1-2n}$
$Q_{10}$	$1 + \frac{4\beta}{\lambda}$	$\frac{\lambda + \sqrt{64\alpha - 15\lambda^2}}{2\lambda}$	$\frac{-1 + \sqrt{64\alpha - 15\lambda^2}}{2}$	$\frac{4(s\lambda + \sigma_1)}{\lambda}$	$2 - 2n + \frac{2\sigma_2}{\lambda}$
$Q_{12}$	$\frac{4\beta + \lambda}{2(\beta + \lambda)}$	$\frac{3(1+2s)\alpha(2\beta^2 + 3\beta\lambda + \lambda^2) + \sqrt{3}\sqrt{D}}{4(\alpha + 2s\alpha)(\beta + \lambda)^2}$	$\frac{-3(1+2s)\alpha(2\beta^2 + 3\beta\lambda + \lambda^2) + \sqrt{3}\sqrt{D}}{4(\alpha + 2s\alpha)(\beta + \lambda)^2}$	$\frac{3(s\lambda + \sigma_1)}{\beta + \lambda}$	$\frac{3(\lambda - n\lambda + \sigma_2)}{2(\beta + \lambda)}$
$Q_{16}$	$\frac{(s\lambda + \sigma_1)(3\sqrt{s}(1+2s)\sqrt{\alpha} - \sqrt{B})}{2\sqrt{s}(1+s)\sqrt{\alpha}\sigma_1}$	$\frac{-6s^{5/2}\sqrt{\alpha}\beta + 3s^{3/2}\sqrt{\alpha}(-\beta + \sigma_1) + s\beta\sqrt{B} - \sigma_1\sqrt{B}}{\sqrt{s}(1+s)\sqrt{\alpha}\sigma_1}$	$\frac{3 + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{s}\sqrt{\alpha}}}{2(1+s)}$	$\frac{1 - 2s + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{s}\sqrt{\alpha}}}{2(1+s)}$	$\frac{(-3\sqrt{s}(1+2s)\sqrt{\alpha} + \sqrt{B})((-1+n)\sigma_1 + s\sigma_2)}{2\sqrt{s}(1+s)\sqrt{\alpha}\sigma_1}$

**Tabla 6.3:** Autovalores de los puntos fijos  $f(Q, \phi)$ .

Donde:

$$B = 9s(1+2s)^2\alpha - 6(1+s)\sigma_1^2$$

$$D = (1+2s)^2\alpha(\beta + \lambda)^2(72\alpha^2 - 16\beta\lambda(\beta + \lambda)^2 + 3\alpha(20\beta^2 + 12\beta\lambda - 7\lambda^2))$$

Además, cada punto fijo tiene su propia condición de existencia, dado por los denominadores o las raíces cuadradas. Se muestran a continuación:

Punto	Existencia
$Q_1$	$\alpha \neq 0$
$Q_4$	$n \neq \frac{1}{2}$
$Q_{10}$	$-4\alpha + \lambda^2 \geq 0 \wedge \alpha > 0 \wedge \lambda \neq 0$
$Q_{12}$	$\frac{3\alpha}{2} + \beta(\beta + \lambda) \geq 0 \wedge \beta + \lambda \neq 0$
$Q_{16}$	$(\sqrt{6}s\alpha + 2\sqrt{6}s^2\alpha)^2 - 4s\sigma_1(\alpha\sigma_1 + s\alpha\sigma_1) > 0 \wedge s\alpha(3s\alpha + 12s^2\alpha + 12s^3\alpha - 2\sigma_1^2 - 2s\sigma_1^2) > 0 \wedge 1 + s \neq 0$

**Tabla 6.4:** Condiciones de existencia para los puntos fijos  $Q_1$ – $Q_{16}$ .

A continuación se muestra la estabilidad y las restricciones sobre los parámetros de los cinco puntos fijos que se presentan en los resultados numéricos de las curvas de fase.

### Punto Fijo $Q_1$

Este punto fijo presenta una estabilidad de tipo *saddle point* con los siguientes signos de los autovalores: autov. 1 < 0, autov. 2 < 0, autov. 3 > 0, autov. 4 > 0, autov. 5 < 0. Además, se consideraron las restricciones de existencia junto a:  $\alpha > 0$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $s < 0$ ,  $\beta > 0$ :

$$\beta > 0 \wedge \alpha > 2\beta^2 \wedge \beta(3\alpha + 2\beta(\beta + \lambda)) > 0 \wedge \sigma_1 > 0 \wedge s < 0 \wedge n > \frac{3\alpha + 2\beta(\beta - \sigma_2)}{3\alpha + 2\beta^2}$$

### Punto Fijo $Q_4$

Este punto fijo presenta una estabilidad de tipo *saddle point* con los siguientes signos de los autovalores: autov. 1 > 0, autov. 2 ≤ 0, autov. 3 > 0, autov. 4 > 0, autov. 5 > 0. Además, se consideraron las restricciones de existencia:

$$s < 0 \wedge n \geq 2$$

### Punto Fijo $Q_{10}$

Este punto fijo presenta una estabilidad de tipo *saddle point* con los siguientes signos de los autovalores:  $\text{autov. 1} > 0$ ,  $\text{Re}[\text{autov. 2}] < 0$ ,  $\text{Re}[\text{autov. 3}] < 0$ ,  $\text{autov. 4} > 0$ ,  $\text{autov. 5} < 0$ .

Además, se consideraron las restricciones de existencia:

$$n > 1 + \frac{\sigma_2}{\lambda} \wedge 64\alpha \geq 15\lambda^2 \wedge 4\alpha < \lambda^2 \wedge \\ ((s\lambda + \sigma_1 > 0 \wedge 4\beta + \lambda < 0 \wedge \lambda < 0) \vee (4\beta + \lambda > 0 \wedge \lambda > 0 \wedge s\lambda + \sigma_1 < 0)) \wedge 1 + 2s \neq 0$$

### Punto Fijo $Q_{12}$

Este punto fijo presenta una estabilidad de tipo *saddle point* con los siguientes signos de los autovalores:  $\text{autov. 1} < 0$ ,  $\text{Re}[\text{autov. 2}] < 0$ ,  $\text{Re}[\text{autov. 3}] < 0$ ,  $\text{autov. 4} > 0$ ,  $\text{autov. 5} < 0$ .

Además, se consideraron las restricciones de existencia junto a:  $\lambda > 0$ ,  $s < 0$ ,  $\beta > 0$ :

$$\left(-\frac{1}{2} < s < 0\right) \vee \left(s < -\frac{1}{2}\right) \wedge 7\lambda^2 + \sqrt{(2\beta + \lambda)^3 (50\beta + 49\lambda)} \leq 48\alpha + 4\beta(5\beta + 3\lambda) \wedge \\ 3\alpha < \lambda(\beta + \lambda) \wedge s\lambda + \sigma_1 < 0 \wedge n > \frac{\lambda + \sigma_2}{\lambda} \wedge \beta > 0 \wedge \lambda > 0.$$

### Punto Fijo $Q_{16}$

Este punto fijo presenta una estabilidad de tipo *Stable* con los siguientes signos de los autovalores:  $\text{autov. 1} < 0$ ,  $\text{autov. 2} < 0$ ,  $\text{autov. 3} < 0$ ,  $\text{autov. 4} < 0$ ,  $\text{autov. 5} < 0$ . Además, se consideraron las restricciones de existencia junto a:  $s < -1$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\beta > 0$ :

$$\sigma_1 > 0 \wedge s < -1 \wedge \alpha > \frac{2\sigma_1^2}{3s + 9s^2} \wedge \beta > 0 \wedge \frac{2\sigma_1}{s} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{\alpha(3s\alpha + 12s^2\alpha + 12s^3\alpha - 2\sigma_1^2 - 2s\sigma_1^2)}{s\sigma_1^2}} > \frac{3\alpha + 6s\alpha + 2\beta\sigma_1}{\sigma_1} \\ \wedge \sigma_2 > 0 \wedge n + \frac{s\sigma_2}{\sigma_1} > 1 \wedge s(s\lambda + \sigma_1) > 0.$$

Un conjunto de parámetros, bajo las restricciones de estabilidad, son: <sup>10</sup>

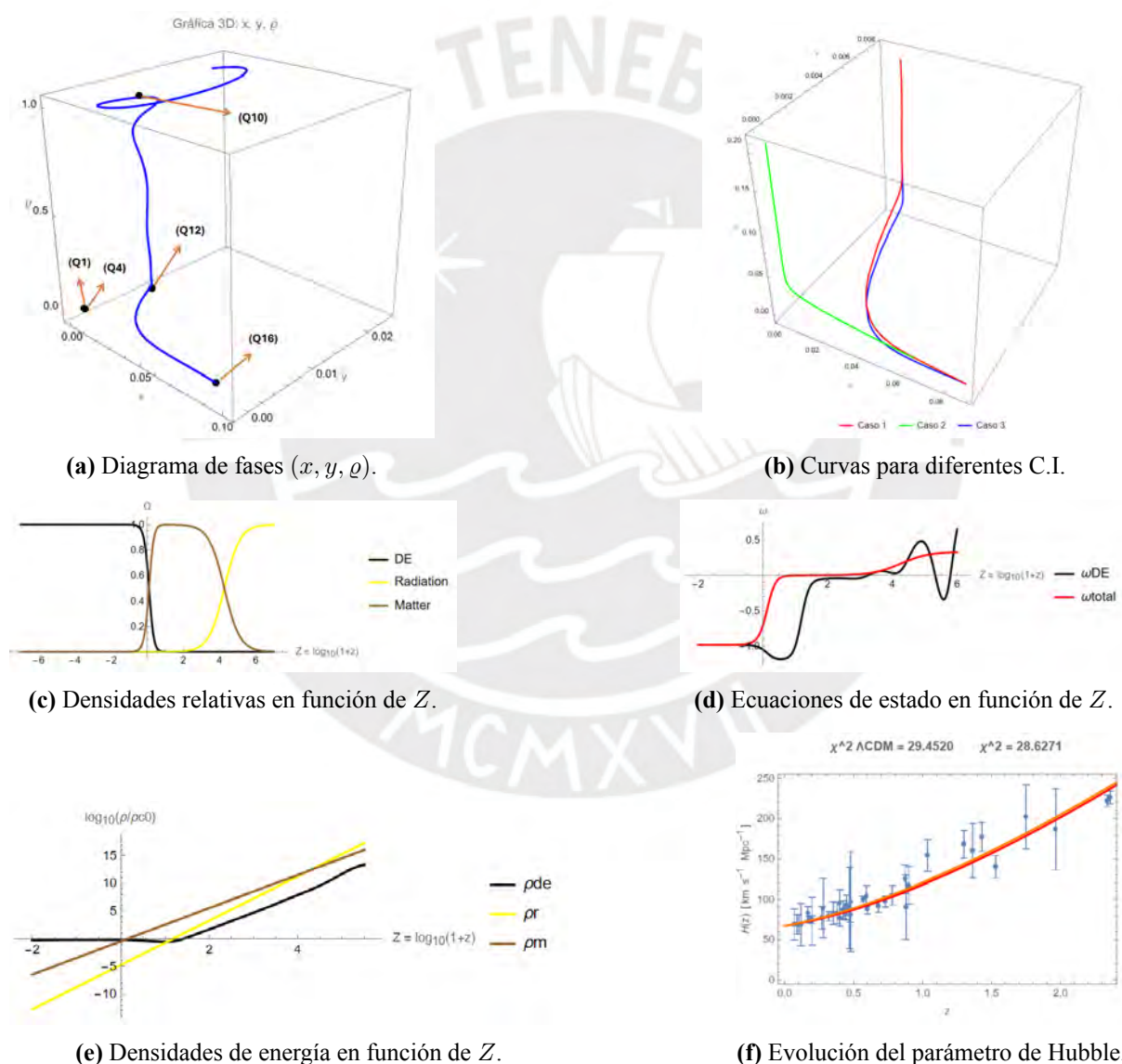
$$n = 2, \quad s = -1.2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 10^{-3}, \quad \lambda = 150, \quad \sigma_1 = 0.3, \quad \sigma_2 = 0.1 \quad (6.6)$$

## 6.0.4 Gráficas cosmológicas del método de sistemas dinámicos

En este apartado se presentan: las curvas de evolución en el espacio de fase, una gráfica de curvas con distintas condiciones iniciales, el parámetro de Hubble  $H(z)$ , la gráfica de las densidades relativas  $\Omega_i$  en función de  $Z$  y la gráfica de las ecuaciones de estado efectiva y del sector energía oscura. Las gráficas se determinaron bajo los parámetros restringidos del análisis

<sup>10</sup>La restricción para  $\beta = 10^{-3}$  proviene de resultados en diversos artículos, donde se concluye que este parámetro de interacción debe ser menor a 0.052 (Xia, 2013).

de estabilidad (Ec. 6.6); además, se empleó el mismo método numérico que se utilizó en el modelo de quintaesencia para determinar las curvas de evolución. En este caso, consideramos las siguientes condiciones iniciales para  $Z = 7$  donde domina la radiación<sup>11</sup>:  $x(Z = 7) = 0.0002$ ,  $y(Z = 7) = 0.02465$ ,  $u_1(Z = 7) = 9.9 \times 10^{-29}$ ,  $u_2(Z = 7) = 1.25 \times 10^{-20}$ ,  $\rho(Z = 7) = 0.998788$ . Las condiciones iniciales deben ser consistentes, si buscamos partir de una época de radiación, entonces, la variable  $\rho$  de radiación debe ser cercana a la unidad. Luego de resolver numéricamente el sistema mediante *Wolfram Mathematica* (Casimiro, 2025), se encuentran las siguientes gráficas cosmológicas:



**Figura 6.1:** Gráficos cosmológicos del modelo  $f(Q, \phi)$ .

<sup>11</sup>Según la referencia de la misión Planck (Planck Collaboration, 2020), para  $z = 3387 \rightarrow Z \approx 3.530$  hay igual cantidad de materia y radiación, por lo que situarnos en  $Z = 7$  nos permite empezar desde una época dominada completamente por radiación.

La Fig. (6.1a) muestra una curva de evolución que comienza en las condiciones iniciales donde domina la radiación. Luego, la curva muestra un acercamiento al punto de *scaling* (energía oscura-radiación)  $Q_{10}$ , y se aleja, dirigiéndose al punto  $Q_{12}$ , donde existe *scaling* entre la materia (*Cold Dark Matter*) y sector energía oscura (campo escalar y modificación  $f(Q)$ ). Dada la estabilidad tipo *saddle point* en  $Q_{12}$ , el sistema se libera del escalamiento, dirigiéndose de forma atractiva al punto  $Q_{16}$ , generando una expansión acelerada. Por otro lado, la Fig. (6.1b) muestra tres curvas de evolución bajo las condiciones iniciales respectivas:  $x(Z = 7) = 1 \times 10^{-9}$ ,  $y(Z = 7) = 4 \times 10^{-7}$ ,  $u_1(Z = 7) = 9.1 \times 10^{-30}$ ,  $u_2(Z = 7) = 1.25 \times 10^{-40}$ ,  $\varrho(Z = 7) = 0.999877$ ;  $x(Z = 7) = 1 \times 10^{-33}$ ,  $y(Z = 7) = 1 \times 10^{-41}$ ,  $u_1(Z = 7) = 1.05 \times 10^{-29}$ ,  $u_2(Z = 7) = 1.25 \times 10^{-40}$ ,  $\varrho(Z = 7) = 0.999877$ ;  $x(Z = 7) = 0.0002$ ,  $y(Z = 7) = 0.02465$ ,  $u_1(Z = 7) = 9.9 \times 10^{-29}$ ,  $u_2(Z = 7) = 1.25 \times 10^{-20}$ ,  $\varrho(Z = 7) = 0.998788$ ; esta gráfica evidencia que el sistema es sensible a las condiciones iniciales. La Fig. (6.1c) detalla las diferentes etapas de dominancia del modelo, obteniéndose en la época actual un valor:  $\Omega_{DE} = 0.68296$ , este valor se encuentra en el intervalo restrictivo de la referencia Planck (Planck Collaboration, 2020). Mientras, la Fig. (6.1d) evidencia una dinámica para la ecuación de estado  $\omega_{DE}$ , obteniéndose regiones mayores y menores a:  $-1$ , produciendo una expansión tardía. El valor de la ecuación de estado, en la época actual, es  $\omega_{DE} = -1.0471$ , el cual es consistente con la restricción  $\omega_{DE} = -1.028 \pm 0.032$ , brindada por la misión Planck (Planck Collaboration, 2020). Además, la evolución de las densidades en la Fig.(6.1e) evidencia una fase de *scaling* a bajos *redshifts*, de la cual el sistema sale, alcanzando en la época actual valores de densidad del mismo orden para el sector de energía oscura y la materia.

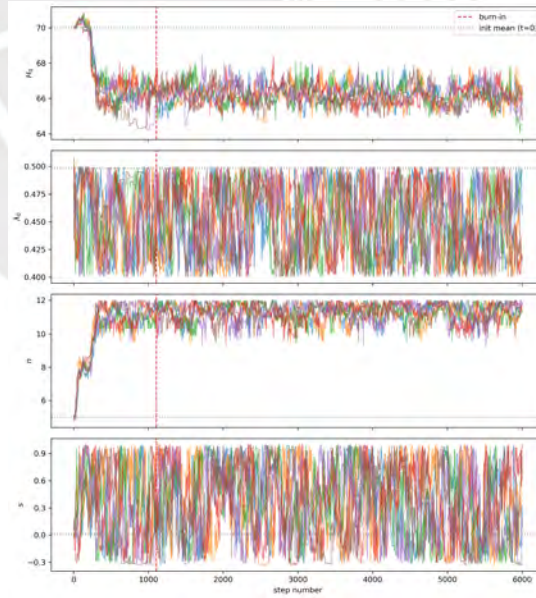
La Fig. (6.1f) del parámetro de Hubble  $H(z)$  manifiesta el modelo  $f(Q, \phi)$  (color anaranjado), modelo  $\Lambda$ CDM (color rojo) y datos observacionales *Cosmic Chronometers* (color azul), con valores teóricos más ajustados a los datos en  $z < 1.0$ . Se evidencia que el modelo se ajusta, aún mejor a los datos, que el modelo  $\Lambda$ CDM<sup>12</sup>. Se resalta que se ha tomado el caso canónico dilatónico  $\alpha = 1$ , en el método de cadenas de Markov se explorará el modelo con campo escalar condensado fantasma dilatónico  $\alpha = -1$ .

<sup>12</sup>Mediante el modelo CPL:  $H_{CDM}(z; w_0, w_a, H_0, \Omega_m) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} \exp\left[-\frac{3w_a z}{1+z}\right]}$ , se determinó el modelo  $\Lambda$ CDM para  $\omega_0 = -1, \omega_a = 0, H_0 = 67.11 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}, \Omega_m = 0.32$ .

## 6.0.5 Resultados del método de cadenas de Markov MCMC

El análisis de estabilidad permitió identificar un conjunto de parámetros que conducen a una evolución cosmológica consistente. Dado que el modelo propuesto permite términos cinéticos fantasmas, elegiremos el caso  $\alpha = -1$  para explorar nuevas dinámicas. El método MCMC nos permite acotar los parámetros a partir de datos observacionales (*Cosmic Chronometers*, Supernovas y DESI) y así poder comparar con otros modelos como  $\Lambda$ CDM. Analizamos el escenario  $f(Q, \phi)$  con parámetros fijos  $\Omega_{m0} = 0.32$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\sigma_2 = 0.1$  y  $\beta = 10^{-3}$ . El vector de parámetros libres es  $\theta = (H_0, \lambda_0, n, s)$ , con *priors* top-hat uniformes:  $H_0 \in (67, 73) \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$ ,  $\lambda_0 \in (0.2, 0.8)$ ,  $n \in (4.0, 8.0)$  y  $s \in (-0.45, -0.2)$ . Las condiciones iniciales en  $Z = 7$  se fijan como<sup>13</sup>:  $x(Z = 7) = 2.0 \times 10^{-11}$ ,  $y(Z = 7) = 9.96435 \times 10^{-12}$ ,  $u_1(Z = 7) = 2.88077 \times 10^{-9}$ ,  $u_2(Z = 7) = 7.34722 \times 10^{-10}$  y  $\varrho(Z = 7) = 0.969231$ . El muestreo MCMC emplea  $n_{\text{walkers}} = 10$ , un máximo de 6000 pasos y diagnóstico cada 200 iteraciones. Tras descartar el *burn-in*, se reportan las marginales 1D y las regiones de confianza del 68% y 95%.

**Trazas de un subconjunto de walkers (con burn-in):** la estabilidad y la mezcla entre walkers apoyan la estacionariedad del posterior.

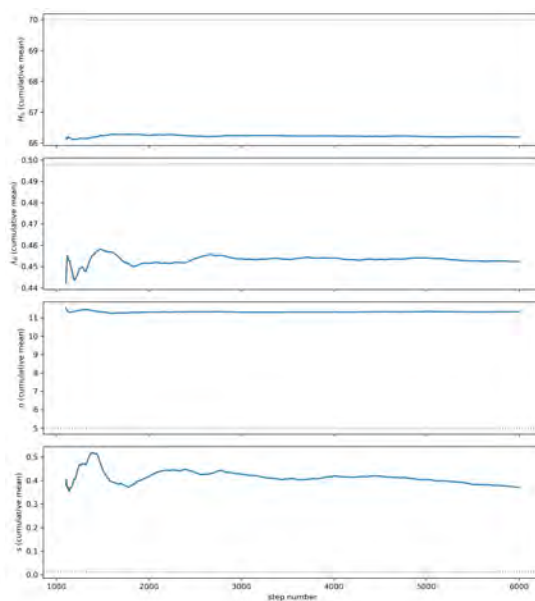


**Figura 6.2:** Trazas de un subconjunto de walkers para  $H_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $n$  y  $s$ . La línea vertical marca el *burn-in*.

**Media acumulada post *burn-in*:** la media acumulada converge hacia una meseta, lo que

<sup>13</sup>Las condiciones iniciales se determinaron al minimizar, en primer lugar, el parámetro  $\chi^2$ ; con el objetivo de encontrar regiones de contorno plausibles.

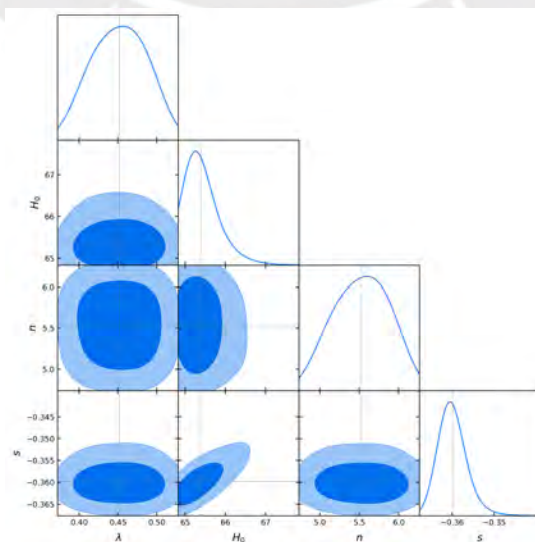
indica estabilidad de los estimadores frente a más iteraciones.



**Figura 6.3:** Media acumulada post *burn-in* de  $H_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $n$  y  $s$ .

Las cadenas de Markov nos confirman convergencia del modelo; por consecuencia, reflejan adecuadamente los resultados del *posterior* y las regiones de contorno son fiables. A partir de ellas también conocemos, alrededor de qué valor, oscilan con mayor probabilidad los caminantes.

**Regiones de contorno (*corner plot*):** se muestran las marginales 1D y las regiones 2D del 68% y 95% para  $(H_0, \lambda_0, n, s)$ , evidenciando correlaciones y posibles degeneraciones entre parámetros.



**Figura 6.4:** Regiones de contorno del 68% y 95% para  $(H_0, \lambda_0, n, s)$  y marginales 1D correspondientes.

Parámetro	Media	MAP	68% I.C.	95% I.C.
$H_0$	65.40	64.59	[64.88, 65.72]	[64.56, 66.28]
$\lambda$	0.4520	0.4681	[0.4150, 0.4910]	[0.3837, 0.5193]
$n$	5.532	10.64	[5.168, 5.931]	[4.843, 6.202]
$s$	-0.3598	-0.3251	[-0.3636, -0.3570]	[-0.3666, -0.3529]

**Tabla 6.5:** Estadísticos MCMC modelo  $f(Q, \phi)$ .

Las regiones de contorno muestran restricciones para los parámetros fuera del modelo  $\Lambda$ CDM, por las cuales se logra ajustar adecuadamente a los datos con intervalos de confianza. Observamos que  $H_0$  se encuentra en un intervalo distinto al de la misión Planck (Planck Collaboration, 2020). El modelo arroja  $[64.88, 65.72] \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$  al 68% de confianza para  $H_0$ ; según el enfoque bayesiano, hay una probabilidad del 68% de encontrar el parámetro real para  $H_0$  en el intervalo hallado, la misma analogía para  $\lambda, n, s$ . Se obtuvo  $H_0 = 64.59 \frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}}$ ,  $\lambda = 0.4681$ ,  $n = 10.64$ ,  $s = -0.3251$  como los parámetros que mejor se ajustaron a los datos *Cosmic Chronometers*. Se comprobó es posible obtener una convergencia en los parámetros para el caso de un campo escalar fantasma  $\alpha = -1$ , lo que permite ampliar el espacio de exploración mediante un modelo  $f(Q, \phi)$ , en comparación con la quintaesencia canónica, alejándonos del modelo  $\Lambda$ CDM, y manteniendo un ajuste adecuado a los datos observacionales.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis se desarrolló y analizó un modelo cosmológico de energía oscura en el marco de la no-metricidad, del tipo  $f(Q, \phi)$  con un campo escalar no canónico dilatónico, y se lo comparó con la cosmología estándar de fondo para verificar su amplia capacidad de exploración dinámica frente a otros modelos. El trabajo de tesis se organizó comenzando por los fundamentos geométricos y la relatividad general, continuando con el estudio del modelo estándar con tres tipos de fluido y un modelo de quintaesencia canónica, para culminar con la formulación y el análisis del modelo  $f(Q, \phi)$  propuesto. Esta organización permitió utilizar los modelos de referencia como punto de comparación física y metodológica, y evaluar en qué medida el modelo  $f(Q, \phi)$  puede reproducir la dinámica de fondo tipo  $\Lambda$ CDM y los datos observacionales disponibles. En todos los casos se implementó, de manera independiente, el análisis de estabilidad en sistemas dinámicos y el estudio Bayesiano basado en cadenas de Markov, comparando con datos de *cosmic chronometers*, lo que permitió cuantificar (mediante el  $\chi^2$ ) la compatibilidad de cada escenario con la expansión observada.

Para el modelo con tres tipos de fluido (materia bariónica, radiación y un fluido con la propuesta:  $\omega_3 = -1$ ), el análisis de sistemas dinámicos (Figuras 5.3–5.8) muestra una trayectoria que recorre las eras de radiación, materia y culmina en una fase dominada por la componente de presión negativa, coherente con un régimen de aceleración tardía. La evolución de las densidades relativas, ecuaciones de estado y del parámetro de Hubble, comparado con datos, indican consistencia con las observaciones y que este fluido reproduce los resultados mostrados por la misión Planck, con su modelo  $\Lambda$ CDM. Estos resultados aseguran una correcta descripción de la energía oscura, con un modelo restringido hacia  $\Lambda$ CDM, y ecuación de estado  $\omega_\Lambda = -1$ . Al

ajustar el modelo con datos de *cosmic chronometers* en el análisis Bayesiano mediante *MCMC*, se producen cadenas convergentes y regiones de credibilidad para  $(H_0, \omega_3, \Omega_{m0})$  (Figuras 5.9–5.11), en las que el posterior se concentra cerca de  $\omega_3 \simeq -1$  y de valores de  $H_0$  y  $\Omega_{m0}$  compatibles con estimaciones como las obtenidas en la misión Planck. De este modo, el modelo de tres tipos de fluido, mediante dos métodos de restricción, asegura una correcta caracterización de la evolución de nuestro universo con una componente de presión negativa y ecuación de estado alrededor de  $-1$ . Sin embargo,  $\Lambda$ CDM presenta limitaciones frente a las tensiones cosmológicas actuales, lo que motiva la exploración de teorías con un fluido dinámico de energía oscura.

En el caso de la quintaesencia canónica, con potencial exponencial, el estudio de sistemas dinámicos revela puntos fijos de tipo *scaling* en los que el campo escalar sigue a la materia y a la radiación, así como puntos dominados por el campo. Sin embargo, el análisis de los autovalores de la matriz Jacobiana muestra que las soluciones de escalamiento no conducen a una expansión acelerada, si se consideran como estados finales, y que la existencia de un atractor acelerado restringe de manera significativa los parámetros del potencial mediante  $\lambda$ . Las soluciones numéricas (Figuras 5.17 y 5.19) muestran que, para valores representativos de los parámetros, el campo escalar puede reproducir una fase intermedia en la que la energía oscura sigue a la materia, pero no genera una fase acelerada tardía ni alivia el problema de la coincidencia. Al incorporar el análisis Bayesiano, el ajuste del modelo de quintaesencia a los datos de  $H(z)$  mediante *MCMC* conduce a cadenas estables (Figuras 5.20 y 5.21) y a regiones de credibilidad para  $(H_0, \lambda, \Omega_{m0})$  (Figura 5.22) en las que el posterior favorece valores de  $\lambda$  muy cercanos a cero. Esto significa que las realizaciones del modelo que mejor se ajustan a los *cosmic chronometers* tienden a aproximarse al límite  $\Lambda$ CDM, con parámetros de densidad y de Hubble algo desplazados respecto a los resultados de Planck, pero coherentes con el conjunto de datos utilizados. Desde la perspectiva Bayesiana, la quintaesencia canónica se muestra como un modelo con poca libertad efectiva para alejarse de  $\Lambda$ CDM en la dinámica de fondo.

Sobre esta base, se propuso un modelo  $f(Q, \phi)$  compuesto por un bloque geométrico  $f(Q)$  y un bloque escalar no canónico dilatónico. El término  $f(Q)$  modifica las ecuaciones de Friedmann en el marco de la no-metricidad, mientras que el sector escalar incorpora un Lagrangiano de la forma  $P(\phi, X) = \alpha X + F(\phi)X^n$ , inspirado en construcciones de tipo *ghost*

*condensate* con interacción campo–materia. La elección específica de  $f(Q)$  y del acoplamiento cinético está motivada por la posibilidad de obtener soluciones de escalamiento y regímenes acelerados en presencia de interacción, tal como se discute en la literatura sobre modelos no canónicos con acoplamiento entre energía oscura y materia. En el análisis de sistemas dinámicos se consideró el caso  $\alpha = 1$ , mientras que en el análisis Bayesiano se exploró el caso  $\alpha = -1$ , más cercano a los modelos de tipo fantasma (pero con parte dilatónica) que se han propuesto para generar aceleración tardía con interacción.

El análisis de sistemas dinámicos del modelo  $f(Q, \phi)$  permite identificar puntos fijos asociados a eras de radiación, materia y energía oscura, así como regímenes de escalamiento entre energía oscura, radiación o materia (puntos como  $Q_{10}$  y  $Q_{12}$ ) y un atractor oscuro tardío (punto  $Q_{16}$ ) con dominancia del sector energía oscura con  $\Omega_{DE} \simeq 1$  y  $\omega_{DE} \simeq -1$ . Bajo condiciones adecuadas sobre los parámetros  $(n, s, \alpha, \beta, \sigma_1, \sigma_2, \lambda)$ , las trayectorias en el espacio de fase describen una historia térmica en la que el universo pasa por una era de radiación, una era de materia y, tras el rompimiento del *scaling*, entra en una fase de aceleración dominada por la energía oscura, como se muestra en la evolución de  $\Omega_i(Z)$  y de las ecuaciones de estado efectiva y de energía oscura (Figura 6.1). La evolución de  $H(Z)$  muestra buen ajuste con los datos, mejor que el modelo  $\Lambda$ CDM obtenido mediante el modelo *CPL*. En este sentido, el modelo reproduce cualitativa y cuantitativamente la secuencia cosmológica estándar, pero con un sector de energía oscura más flexible que en la quintaesencia canónica. La interacción materia-campo escalar, la propuesta  $G(Q)$  y los términos no canónicos con dilatón permiten fases transitorias de escalamiento, una evolución cosmológica coherente, buen ajuste observacional y una expansión acelerada tardía.

Al confrontar el modelo  $f(Q, \phi)$  con datos de *cosmic chronometers*, mediante un análisis Bayesiano, las cadenas de *MCMC* para  $(H_0, \lambda_0, n, s)$  muestran un comportamiento convergente (Figuras 6.2 y 6.3), y las regiones de contorno (Figura 6.4) definen intervalos de credibilidad acotados, resumidos en la Tabla (6.5). El posterior presenta regiones de parámetros en las que el modelo reproduce un ajuste compatible con los datos (C.C.) y sitúa el valor de  $H_0$  en un rango ajustado a los datos observacionales, sin exigir que coincida con las estimaciones de Planck. Las cadenas convergentes nos dicen que el modelo nos permite inferir los valores de los parámetros

físicos al ajustarlo a las observaciones; sin embargo, los rangos reportados por la misión Planck, aunque proporcionan restricciones muy precisas respaldadas por una gran cantidad de datos, no deben interpretarse como rangos universales, por lo que nuestro modelo puede reportar valores fuera de esos intervalos. Además, las regiones de credibilidad presentan correlaciones y degeneraciones entre los parámetros geométricos ( $s$ ) y escalares ( $n$ ), lo que muestra cómo ambos sectores generan en conjunto la aceleración y ajuste de la tasa de expansión. En este sentido, el modelo  $f(Q, \phi)$  es compatible con los datos utilizados y ofrece un ajuste comparable al modelo  $\Lambda$ CDM, a la vez que introduce una dinámica de energía oscura más diversa.

En conjunto, la comparación entre los tres modelos permite sintetizar varias conclusiones. El modelo con tres fluidos barotrópicos y el modelo de quintaesencia canónica sirven como referencias controladas: ambos son capaces de reproducir la expansión acelerada, pero  $\Lambda$ CDM no incorpora mecanismos internos que alivien el problema de la coincidencia y la quintaesencia canónica es empujada por las restricciones de los datos hacia un régimen indistinguible de una constante cosmológica  $\Lambda$ . El modelo  $f(Q, \phi)$  combina, en cambio, la modificación geométrica y un campo escalar no canónico dilatónico para generar una estructura dinámica en la que aparecen soluciones de *scaling*, interacción con la materia y un atractor acelerado tardío. La confrontación con datos de expansión muestra que es posible ajustar sus parámetros de manera que se obtenga una historia de fondo coherente con las observaciones y con un valor de  $H_0$  compatible con los datos *cosmic chronometers*, lo que convierte a este modelo en una alternativa viable a  $\Lambda$ CDM en el análisis de la dinámica de fondo. De esta manera, hemos respondido además las preguntas de investigación formuladas en la introducción.

Este trabajo deja abiertas varias líneas de investigación que pueden explorarse en el futuro. Un primer paso natural es desarrollar la teoría de perturbaciones lineales del modelo  $f(Q, \phi)$  y estudiar sus consecuencias en la formación de estructuras y en observables como  $\sigma_8$ . Desde el punto de vista observacional, resulta importante extender el análisis Bayesiano incorporando los datos de supernovas tipo Ia, medidas de oscilaciones acústicas de bariones y restricciones del fondo cósmico de microondas, así como datos recientes de DESI, con el fin de someter el modelo a un conjunto más restrictivo. Finalmente, sería interesante implementar esquemas de muestreo que incorporen de manera automática condiciones de estabilidad y de viabilidad

cosmológica en el espacio de parámetros, descartando desde el propio *MCMC* aquellas regiones que no conducen a una secuencia radiación  $\rightarrow$  materia  $\rightarrow$  *scaling*  $\rightarrow$  energía oscura bien comportada.

Con las herramientas desarrolladas y los resultados obtenidos, el modelo  $f(Q, \phi)$  estudiado en esta tesis se presenta como un escenario consistente para describir la energía oscura en el marco de la no-metricidad. Un análisis más completo de su estabilidad y de sus predicciones observacionales permitirá una mejor comparación con  $\Lambda$ CDM y con otros modelos de energía oscura; además, ayudará a contribuir a la respuesta sobre hasta qué punto las modificaciones de la gravedad y los campos escalares no canónicos puedan ofrecer una explicación a la dinámica cosmológica observada.



# Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. “The Cosmological Constant Problem”. En: *Reviews of Modern Physics* 61.1 (1989), págs. 1-23. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.1. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1> (visitado 09-11-2025).
- [2] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. arXiv: gr-qc/9712019 [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [3] Adam G. Riess et al. “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”. En: *The Astronomical Journal* 116.3 (1998), págs. 1009-1038. DOI: 10.1086/300499. arXiv: 9805201 [astro-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201>.
- [4] Ivaylo Zlatev, Limin Wang y Paul J. Steinhardt. “Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant”. En: *Physical Review Letters* 82.5 (1999), págs. 896-899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.896.
- [5] W. Zimdahl, D. Pavón y L. P. Chimento. “Interacting Quintessence”. En: *arXiv e-prints* (2001). arXiv: astro-ph/0105479 [astro-ph].
- [6] Raul Jimenez y Abraham Loeb. “Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages”. En: *The Astrophysical Journal* 573 (2002), págs. 37-42. DOI: 10.1086/340549. arXiv: astro-ph/0106145 [astro-ph].
- [7] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. 2ª ed. Bristol y Philadelphia: IOP Publishing, 2003.
- [8] Federico Piazza y Shinji Tsujikawa. “Dilatonic Ghost Condensate as Dark Energy”. En: (2004). Bicocca-FT-04-4. arXiv: hep-th/0405054 [hep-th].
- [9] Edmund J. Copeland, M. Sami y Shinji Tsujikawa. “Dynamics of Dark Energy”. En: *International Journal of Modern Physics D* 15.11 (2006), págs. 1753-1935. DOI: 10.1142/S021827180600942X.
- [10] William H. Press et al. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3rd. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [11] Luca Amendola y Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [12] Antonio De Felice y Shinji Tsujikawa. “f(R) Theories”. En: *Living Reviews in Relativity* 13 (2010), pág. 3. DOI: 10.12942/lrr-2010-3. arXiv: 1002.4928 [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/1002.4928>.
- [13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5> (visitado 09-11-2025).
- [14] Jun-Qing Xia. “New Limits on Coupled Dark Energy from Planck”. En: *arXiv e-prints* (2013). arXiv: 1311.2131 [astro-ph.CO].
- [15] Cristóbal Corral. “Particle Phenomenology in Spacetimes with Torsion”. PhD thesis. Valparaíso, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María, 2015.
- [16] Bin Wang et al. “Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures”. En: *Reports on Progress in Physics* 79.9 (2016), pág. 096901. DOI: 10.1088/0034-4885/79/9/096901. arXiv: 1603.08299 [astro-ph.CO].
- [17] Harvey S. Reall. *General Relativity (Part III Lecture Notes)*. Lecture notes, Part III of the Cambridge Mathematical Tripos. 2017.
- [18] Sebastián Bahamonde. “Modified Teleparallel Theories of Gravity”. Tesis doct. London, UK: University College London, 2018. URL: <https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10055604>.
- [19] Jose Beltrán Jiménez, Lavinia Heisenberg y Tomi S. Koivisto. “Coincident General Relativity”. En: *Phys. Rev. D* 98.4 (2018), pág. 044048. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.044048. arXiv: 1710.03116 [gr-qc]. URL: <https://arxiv.org/abs/1710.03116>.
- [20] Joel Bergé et al. “MICROSCOPE Mission: First Constraints on the Violation of the Weak Equivalence Principle by a Light Scalar Dilaton”. En: *Physical Review Letters* 120.14 (2018), pág. 141101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.141101. arXiv: 1712.00483 [gr-qc].

- [21] María José Guzmán Monsalve. “Grados de libertad en teorías teleparalelas de gravedad modificada”. PhD thesis. Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires, 2018.
- [22] Emmanuel N. Saridakis. “Introduction to teleparallel and  $f(T)$  gravity and cosmology”. En: *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories*. Ed. por Massimo Bianchi, Robert T. Jantzen y Remo Ruffini. Singapore: World Scientific, 2018, págs. 1135-1140. DOI: 10.1142/9789813226609\_0074.
- [23] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2ª ed. Boca Raton: CRC Press, 2018. DOI: 10.1201/9780429492563.
- [24] Jose Beltrán Jiménez, Lavinia Heisenberg y Tomi S. Koivisto. “The Geometrical Trinity of Gravity”. En: (2019). arXiv: 1903.06830 [hep-th]. URL: <https://arxiv.org/abs/1903.06830>.
- [25] Planck Collaboration. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (2020), A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.
- [26] Manuel Gonzalez-Espinoza y Giovanni Otalora. “Cosmological dynamics of dark energy in scalar-torsion  $f(T, \phi)$  gravity”. En: *The European Physical Journal C* 81 (2021), pág. 480. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09270-x.
- [27] Vivian I. Sabla y Robert R. Caldwell. “No  $H_0$  assistance from assisted quintessence”. En: *arXiv e-prints* (2021). arXiv: 2103.04999 [astro-ph.CO].
- [28] Eleonora Di Valentino, Ankan Mukherjee y Anjan A. Sen. “Dark Energy with Phantom Crossing and the  $H_0$  Tension”. En: *Entropy* 23 (2021), pág. 404. DOI: 10.3390/e23040404. arXiv: 2005.12587 [astro-ph.CO].
- [29] Daniel Baumann. *Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. DOI: 10.1017/9781108937092.
- [30] Gaurav N. Gadbail, Sanjay Mandal y P. K. Sahoo. “Reconstruction of  $\Lambda$ CDM Universe in  $f(Q)$  Gravity”. En: *Physics Letters B* 835 (2022), pág. 137509. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137509.
- [31] Lavinia Heisenberg, Héctor Villarrubia-Rojo y Jann Zosso. “Simultaneously solving the  $H_0$  and  $\sigma_8$  tensions with late dark energy”. En: *arXiv e-prints* (2022). arXiv: 2201.11623 [astro-ph.CO].
- [32] Manuel Gonzalez-Espinoza, Giovanni Otalora et al. “Dynamics of dark energy in a scalar-vector-torsion theory”. En: *The European Physical Journal Plus* (2023). DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-04237-1.
- [33] Jaume de Haro. “Relations between Newtonian and Relativistic Cosmology”. En: *Universe* 10.6 (2024), pág. 263. DOI: 10.3390/universe10060263.
- [34] S. Navas y others (Particle Data Group). “Review of Particle Physics”. En: *Physical Review D* 110 (2024), pág. 030001.
- [35] Johan Casimiro. *Cosmology-MCMC-and-Integrator-Code*. GitHub repository. 2025. URL: <https://github.com/TheoryPhysics/Cosmology-MCMC-Integrator-Code.git>.
- [36] Manuel Gonzalez-Espinoza y Ramón Herrera. *Interacting dilatonic ghost condensate as dark energy model*. 2025. arXiv: 2504.05435 [gr-qc].
- [37] Susana Landau. *Bayesian-Inference-and-Montecarlo-Methods*. GitHub repository. 2025. URL: <https://github.com/susanalandau/Bayesian-Inference-and-Montecarlo-Methods.git> (visitado 09-2025).



## **Apéndice**

# Apéndice A

## Capítulo 2 - Fundamentos de Geometría Diferencial

### A.1 Acciones formuladas con formas diferenciales

En este primer apéndice se presenta la demostración de las equivalencias entre acciones mediante su formulación como integrales de formas diferenciales, junto con las ecuaciones necesarias para la prueba y algunos cálculos complementarios. (Corral, 2015).

#### A.1.1 Acción de un campo escalar

Sea la siguiente equivalencia de la acción de un campo escalar:

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d\phi \star d\phi = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (\text{A.1})$$

Para demostrarla son necesarios los siguientes resultados:

- El dual de Hodge  $\star(\partial_{a_1} \phi e^{a_1}) = \partial_{a_1} \phi \frac{\epsilon^{a_1 a_2 a_3 \dots a_D}}{(D-1)!} e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_D}$
- La Ec. (2.61):  $e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_D} = -\epsilon^{b a_2 \dots a_D} e^b dx$
- La Ec. (2.80):  $\epsilon_{a_1, a_2, a_3, \dots, a_D} \epsilon^{b a_2 \dots a_D} = -(D-1)! \delta_{a_1}^b$

Demostración<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d\phi \star d\phi &= -\frac{1}{2} \int (\partial_b \phi e^b \wedge) \star (\partial_{a_1} \phi e^{a_1} \wedge) \\ &= -\frac{1}{2} \int (\partial_b \phi) \partial_{a_1} \phi \frac{\epsilon^{a_1 a_2 a_3 \dots a_D}}{(D-1)!} e^b \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_D} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

<sup>1</sup>En la última expresión usamos:  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \equiv \partial_b \phi \partial^b \phi$ .

### A.1.2 Acción del campo de gauge Abelian

Demostraremos la siguiente equivalencia para el campo de gauge Abelian:

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{2} \int F * F = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

Para la demostración usaremos los mismos resultados del caso anterior<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int F * F &= -\frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{2} F_{lm} e^l \wedge e^m \right) * \left( \frac{1}{2} F_{n_1 n_2} e^{n_1} \wedge e^{n_2} \right), \\ &= -\frac{1}{8} \int F_{lm} F^{n_1 n_2} \frac{\epsilon_{n_1 n_2 \dots n_D}}{(D-2)!} (-\epsilon^{lmn_3 \dots n_D} e^D x), \\ &= -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

### A.1.3 Acción de Hilbert-Einstein

Finalmente, demostraremos el equivalente en formas diferenciales para la acción de Hilbert-Einstein y encontraremos las ecuaciones de campo al variarla.

$$S_{\text{HE}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{\epsilon_{a_1, \dots, a_D}}{(D-2)!} \dot{R}^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_D} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \dot{R} \quad (\text{A.5})$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{\epsilon_{a_1 \dots a_D}}{(D-2)!} \dot{R}^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_D} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{\epsilon_{a_1 \dots a_D}}{(D-2)!} \cdot \frac{1}{2} \dot{R}^{a_1 a_2}{}_{lm} e^l \wedge e^m \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_D}, \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{\epsilon_{a_1 \dots a_D}}{(D-2)!} \cdot \frac{1}{2} \dot{R}^{a_1 a_2}{}_{lm} (-\epsilon^{lma_3 \dots a_D} e^D x), \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \dot{R} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La acción de Hilbert-Einstein en formas diferenciales para  $D = 4$ :

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} \dot{R}^{cd} \wedge e^a \wedge e^b = \frac{1}{2\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \dot{R}^{cd} \quad (\text{A.7})$$

Variamos la acción:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} (\delta e^a \wedge e^b + e^a \wedge \delta e^b) \wedge \dot{R}^{cd} + \frac{1}{2\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \delta \dot{R}^{cd} \quad (\text{A.8})$$

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int 2 \epsilon_{abcd} \delta e^a \wedge e^b \wedge \dot{R}^{cd} + \frac{1}{2\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \delta \dot{R}^{cd} \quad (\text{A.9})$$

<sup>2</sup>En la última expresión usamos:  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv F_{lm} F^{lm}$ .

La segunda expresión de la variación corresponde al término de borde, por lo cual podemos despreciarlo para obtener las ecuaciones de campo. Luego quedará:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int 2 \left( \epsilon_{abcd} e^b \wedge \dot{R}^{cd} \right) \wedge \delta e^a = 0 \quad (\text{A.10})$$

Dado que el término entre paréntesis es el único que se puede anular, se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} e^b \wedge \dot{R}^{cd} &= 0 \\ \epsilon_{abcd} e^b \wedge \left( \frac{1}{2} \dot{R}^{cd}{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) &= 0 \\ \epsilon_{abcd} \epsilon^{bfgh} \left( \frac{\Omega(e_h)}{2} \dot{R}^{cd}{}_{fg} \right) &= 0 \\ \delta_{[a}^f \delta_c^g \delta_{d]}^h \left( \dot{R}^{cd}{}_{fg} \right) &= 0 \\ \left[ \dot{R}^{gh}{}_{ag} - \dot{R}^{hg}{}_{ag} + \dot{R}^{hf}{}_{fa} - \dot{R}^{fh}{}_{fa} - \dot{R}^{gf}{}_{fg} \delta_a^h + \dot{R}^{fg}{}_{fg} \delta_a^h \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Definimos las siguientes identidades:

$$\dot{R}^{hg}{}_{ag} = \dot{R}^h{}_a, \quad \dot{R}^{hg}{}_{ag} = -\dot{R}^{gh}{}_{ag}, \quad \dot{R}^{hf}{}_{fa} = \dot{R}^{fh}{}_{af}, \quad \dot{R}^{fh}{}_{fa} = -\dot{R}^{fh}{}_{af}, \quad \dot{R}^{fg}{}_{fg} = -\dot{R}^{gf}{}_{fg} = \dot{R}$$

Finalmente, las ecuaciones de campo Einstein:

$$4\dot{R}^h{}_a - 2\dot{R}\delta_a^h = 0 \rightarrow \dot{R}^h{}_a - \frac{1}{2}\dot{R}\delta_a^h = 0 \quad (\text{A.12})$$

# Apéndice B

## Capítulo 3 - Conexiones y geometrías de la gravedad: curvatura, torsión y no-metricidad

### B.1 Teoría de gravedad teleparalela

En este apéndice presentamos una introducción a la gravedad teleparalela como complemento del **Capítulo 3**, donde se introduce la tríada geométrica  $R, T, Q$ .

A diferencia de la relatividad general, donde la curvatura no es nula y el transporte paralelo de un vector en una trayectoria cerrada resulta en una rotación, aquí se emplea la conexión de Weitzenböck, la cual anula curvatura. Esto permite una formulación equivalente a la relatividad general; en cuanto a los fenómenos gravitatorios: se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento o Friedmann, aunque la acción difiere únicamente en términos de borde.

El elemento clave de estas teorías es el *vielbein*  $e_a^\mu$ , también conocido como tetrada o *vierbein* en el caso de cuatro dimensiones ( $n = 4$ ). Este campo posee  $n^2$  grados de libertad, en contraste con los  $\frac{n(n+1)}{2}$  de la métrica, lo que implica la existencia de  $\frac{n(n-1)}{2}$  componentes adicionales asociadas a un tensor antisimétrico. Históricamente, Einstein sugirió que estas componentes adicionales podrían ser la clave para unificar la gravedad y el electromagnetismo; más tarde, se observó que podían eliminarse al introducir invariancia local de Lorentz mediante una conexión basada en el *vielbein*. Para los cálculos mostrados en este Apéndice, se tomó como guía la tesis (Monsalve, 2018), añadiendo pasos y comentarios adicionales en el proceso.

Nuestro objetivo es: exponer la conexión de Weitzenböck (en el marco  $Q \equiv \nabla g = 0$ ) donde la curvatura desaparece, quedando la torsión como portadora de la gravitación; analizar

la equivalencia con la relatividad general (TEGR), mostrando cómo la función de Lagrange de teleparalela se relaciona con el de Hilbert-Einstein mediante un término de borde; derivar explícitamente, en el lenguaje de formas diferenciales, el Lagrangiano teleparalelo a partir de la acción de Hilbert-Einstein; y discutir el escenario con torsión y curvatura (teoría de Einstein-Cartan, sin no-metricidad), enfatizando la aparición del término superficial y la relación entre el escalar de Ricci  $R$  y el escalar de torsión  $T$ .

### B.1.1 Conexión de Weitzenböck

Esta conexión corresponde a fijar una conexión de espín nula,  $\omega^a{}_b \equiv 0$ . No obstante, las componentes de la conexión de Weitzenböck en base coordenada no se anulan. Partimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla_a e_b &= e_a^\mu \nabla_\mu (e_b^\nu \partial_\nu) \Rightarrow \Gamma_{ab}^c e_c = e_a^\mu \underbrace{[(\partial_\mu e_b^\nu) \partial_\nu + e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma]}_{(\partial_\mu e_b^\sigma) \partial_\sigma} \\ \Gamma_{ab}^c e_c \partial_\sigma &= e_a^\mu [(\partial_\mu e_b^\sigma) + e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] \partial_\sigma \\ \Gamma_{ab}^c &= e_\sigma^c e_a^\mu [(\partial_\mu e_b^\sigma) + e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma]\end{aligned}$$

Dado que, por definición:  $\omega^c{}_b = \Gamma_{ab}^c e^a \equiv 0$ ; de la expresión anterior se obtiene:

$$\partial_\mu e_b^\sigma + e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -e_b^\nu \partial_\mu (e_b^\sigma) = e_b^\sigma \partial_\mu (e_\nu^b) \quad (\text{B.1})$$

Concluimos que las componentes de la conexión de Weitzenböck en base coordenada no son nulas.

Dado que la curvatura de la Ec. (2.122) está asociada a la conexión de espín, esta se anula bajo Weitzenböck. Por otro lado, para estudiar las propiedades de esta conexión definimos la derivada covariante asociada.

$$\nabla_\nu e_\mu^a = \partial_\nu e_\mu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a \quad (\text{B.2})$$

Si empleamos la Ec. (B.1) en la ecuación anterior, se verifica que se anula.

$$\begin{aligned}\nabla_\nu e_\mu^a &= \partial_\nu e_\mu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a \\ &= \partial_\nu e_\mu^a - (e_b^\sigma \partial_\nu e_\mu^b) e_\sigma^a = 0\end{aligned}$$

Por tanto, bajo esta conexión, el transporte del vielbein  $e_\mu^a$  a lo largo de cualquier curva siempre es paralelo. En general, para  $\nabla g = 0$  se cumple  $\nabla_\nu e_\mu^a = 0$ , dado que la métrica se expresa como  $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ ; lo que garantiza compatibilidad métrica. Además, como la curvatura es nula, el transporte paralelo de cualquier vector en un espacio métrico bajo esta conexión no depende del camino. Finalmente, consideramos la derivada covariante de un vector respecto de la conexión de Weitzenböck.

$$\nabla_\nu U = \nabla_\nu(U^a e_a) = (\partial_\nu U^a) e_a + U^a e_a^\mu \nabla_\nu \partial_\mu \quad (\text{B.3})$$

### El postulado del vielbein

El vielbein  $e_\mu^a$  actúa como puente entre dos simetrías: difeomorfismos (índices griegos) e invariancia de Lorentz local (índices latinos). Al relacionar ambas descripciones mediante  $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ , pedimos en gravedad teleparalela la compatibilidad métrica bajo base coordenada ( $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ ) y en el marco local ( $D_\mu \eta_{ab} = 0$ ). Al derivar  $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$  e imponer esas compatibilidades, se obtiene de forma directa el “postulado del vielbein”:

$$D_\mu e_\nu^a \equiv \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0 \quad (\text{B.4})$$

De esta identidad se deducen las relaciones entre la conexión afin  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  y la conexión espín  $\omega_\mu{}^a{}_b$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu^b) \quad \omega_\mu{}^a{}_b = e_\lambda^a \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_b^\nu - e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^a \quad (\text{B.5})$$

Estas expresiones clarifican los marcos:

- **Relatividad general (Levi–Civita):** torsión nula y  $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ ; la  $\omega_\mu{}^a{}_b$  correspondiente es la espín–conexión de Levi–Civita compatible con  $e_\mu^a$ .
- **Teleparalela (Weitzenböck):** si se fija  $\omega_\mu{}^a{}_b = 0$  (gauge de Weitzenböck), entonces  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda \partial_\mu e_\nu^a$ , la curvatura asociada a  $\Gamma$  es cero y la gravedad se describe por la torsión.

En la formulación covariante teleparalela se introduce una espín–conexión inercial (plana) para preservar la invariancia de Lorentz local.

## B.1.2 Interpretación de las ecuaciones de Cartán

Las ecuaciones de Cartán que se presentaron en el capítulo 3 tienen una interpretación técnica cuando las comparamos con el procedimiento seguido para determinar las componentes del tensor de Riemann en relatividad general. En esta teoría, una de las prioridades es encontrar los objetos geométricos que nos describen la curvatura de nuestro modelo. Estos entes geométricos son el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci; el objeto que describe con mejor exactitud la curvatura es el tensor de Riemann, este tiene un procedimiento para poder determinarlo. En primer lugar, postulamos la métrica de nuestro espacio-tiempo para poder determinar el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Luego determinamos los símbolos de Christoffer que aparecen con la fijación de la conexión de Levi-Civita en base coordenada (dependen del tensor métrico sólo bajo esta teoría). Finalmente, se determinan las componentes del tensor de Riemann con dichos símbolos, por tanto Riemann (y también el escalar de Ricci) dependerá del tensor métrico, sus derivadas y segundas derivadas. En ETGR el objeto geométrico que describe la curvatura del espacio tiempo es la 2-forma curvatura  $R^{ab}$ .<sup>1</sup> En consecuencia, para teorías de gravedad teleparalela se espera que la función de Lagrange dependa de los vielbeins y sus derivadas. Para hallar la 2-forma curvatura se comienza con determinar los vielbeins  $e^a_\mu$ , para ello nos apoyamos de las siguientes expresiones:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} e^a \otimes e^b \quad (\text{B.6})$$

Luego, usando la primera ecuación de Cartán con torsión nula (condición en relatividad general) se determina la conexión espín  $\omega_b^a$ . Finalmente, usamos la segunda ecuación de Cartán para hallar las componentes de la 2-forma curvatura. El proceso es similar al que se utiliza en relatividad general.

## B.1.3 Características de la función de Lagrange en una acción

En una función de Lagrange, se busca construir una cantidad escalar que sea invariante bajo transformaciones globales de Lorentz y locales en marcos tetrádicos; es el ente que determina la dinámica de un sistema físico. Aunque el escalar sea invariante bajo Lorentz, no

---

<sup>1</sup>Si bien es cierto que la 2-forma curvatura tiene 2 índices libres, sigue comportándose como el equivalente al tensor de Riemann. Esto debido a que la 2-forma curvatura es solo una “proyección” de  $R^a_{bcd}$  en base no coordenada.

necesariamente significa que sea una constante en el tiempo o en el espacio; su valor puede depender de las coordenadas y las variables del sistema.

Por ejemplo, en un campo escalar  $\phi(x^\mu)$ , el Lagrangeano usual se define:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (\text{B.7})$$

Donde el término cinético  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  es un escalar construido a partir de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y el gradiente del campo  $\phi$ . El potencial  $V(\phi)$  también es un escalar, pero puede variar dependiendo de  $\phi(x^\mu)$ .

### B.1.4 Resumen de identidades para la Acción Teleparalela

Hemos demostrado que la acción de Hilbert-Einstein de relatividad general en formas diferenciales se puede escribir como:

$$S_{\text{HE}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{\epsilon_{a_1, \dots, a_D}}{(D-2)!} \dot{R}^{a_1 a_2} \wedge e^{a_3} \wedge \dots \wedge e^{a_D} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} \dot{R} \quad (\text{B.8})$$

El elemento de volumen tiene las siguientes propiedades.

$$d\Omega_D = \frac{\sqrt{-g}}{D!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = edx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^D \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{D!} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \dots \wedge e^{a_D} = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^D \quad (\text{B.10})$$

$$= \sqrt{-g} d^D x = ed^D x \quad (\text{B.11})$$

Donde:

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_D} = -\epsilon^{a_1 \dots a_D} e d^D x \quad (\text{B.12})$$

Se definió la siguiente identidad para el símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \sigma_1 \dots \sigma_q} = -p! q! \delta_{[\sigma_1 \dots \sigma_q]}^{\nu_1 \dots \nu_q} \quad (\text{B.13})$$

Las ecuaciones de Cartán en el caso general:

$$de^c + w^c_b \wedge e^b = T^c \quad (\text{B.14})$$

$$dw^a_b + w^a_c \wedge w^c_b = R^a_b \quad (\text{B.15})$$

Las ecuaciones de Cartán bajo la conexión de Levi-Civita:

$$de^c + \dot{w}^c_b \wedge e^b = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$d\dot{w}^a_b + \dot{w}^a_c \wedge \dot{w}^c_b = \dot{R}^a_b \quad (\text{B.17})$$

También requeriremos la definición de los coeficientes de estructura mediante el conmutador de bases no coordenadas.

$$[e_a, e_b] = C_a^c{}_b e_c, \quad C_a^c{}_b = e^c_\nu [e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu - e_b^\mu \partial_\mu e_a^\nu] = -e_a^\mu e_b^\nu [\partial_\mu e_\nu^c - \partial_\nu e_\mu^c] \quad (\text{B.18})$$

### B.1.5 Función de Lagrange en una Teoría Teleparalela

Tenemos las herramientas para contruir la función de Lagrange de la teoría teleparalela. Partimos de la acción de Hilbert-Einstein en formas diferenciales para el caso  $D = 4$ .

$$S = \int \mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \int \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \dot{R}^{cd}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \dot{R}^{cd} \quad (\text{B.19})$$

Donde  $\kappa^2 = 8\pi G$ .

El objeto  $\dot{R}^{cd}$  es la 2-forma curvatura en la conexión de Levi-Civita. En el capítulo 4 se exploró la separación de la curvatura en base coordenada. En base anholonómica se presenta de la siguiente manera:

$$R^a_b - \dot{R}^a_b = \dot{D} K^a_b + K^a_c \wedge K^c_b \quad (\text{B.20})$$

Para demostrar esta identidad empezamos con la segunda ecuación de cartán en el caso general (B.15). En ella, vamos demostrar de forma general que la conexión espín puede dividirse en una parte torsional, una asociada a la no-metricidad y otra libre de torsión; luego, iremos al caso teleparalelista, libre de no-metricidad y con compatibilidad métrica. Comenzamos con el “Postulado del Vielbein” del Apéndice (B.1.1):

$$\nabla_\nu e_a^\alpha \equiv \partial_\nu e_a^\alpha + \Gamma_{\rho\nu}^\alpha e_a^\rho - \omega^b_{a\nu} e_b^\alpha = 0. \quad (\text{B.21})$$

Multiplicando por  $e_\mu^a$  y usando  $e_\mu^a e_a^\rho = \delta_\mu^\rho$ , obtenemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = e_\mu^a \partial_\nu e_a^\alpha + e_\mu^a e_b^\alpha \omega^b_{a\nu}. \quad (\text{B.22})$$

Se define la conexión afin general en base coordenada:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + K^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu}, \quad (\text{B.23})$$

Donde  $\dot{\Gamma}$  es la conexión de Levi-Civita,  $K^\alpha_{\mu\nu}$  la contorsión y  $L^\alpha_{\mu\nu}$  la disformación.

Para la conexión de Levi-Civita, el postulado del vielbein se escribe:

$$\dot{\nabla}_\nu e_a^\alpha \equiv \partial_\nu e_a^\alpha + \dot{\Gamma}_{\rho\nu}^\alpha e_a^\rho - \dot{\omega}^b_{\nu a} e_b^\alpha = 0 \implies \dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = e_\mu^a \partial_\nu e_a^\alpha + e_\mu^a e_b^\alpha \dot{\omega}^b_{\nu a}. \quad (\text{B.24})$$

Restando las dos expresiones anteriores (general menos Levi-Civita):

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha) &= e_\mu^a e_b^\alpha (\omega^b_{\nu a} - \dot{\omega}^b_{\nu a}) \\ K^\alpha_{\mu\nu} + L^\alpha_{\mu\nu} &= e_\mu^a e_b^\alpha (\omega^b_{\nu a} - \dot{\omega}^b_{\nu a}). \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Definimos las proyecciones en base no coordenada:

$$K^a_{b\nu} \equiv e_\alpha^a e_b^\mu K^\alpha_{\mu\nu}, \quad L^a_{b\nu} \equiv e_\alpha^a e_b^\mu L^\alpha_{\mu\nu}, \quad (\text{B.26})$$

Obtenemos la descomposición de la conexión espín:

$$\omega^a_{b\nu} = \dot{\omega}^a_{b\nu} + K^a_{b\nu} + L^a_{b\nu} \quad (\text{B.27})$$

En la conexión de Weitzenböck, se cumple compatibilidad métrica  $\nabla g = 0$ ; por lo tanto:  $L^a_{b\nu} = 0$ . Se tiene entonces:

$$\omega^a_{b\nu} = \dot{\omega}^a_{b\nu} + K^a_{b\nu} \quad (\text{B.28})$$

En forma de 1-formas (suprimiendo el índice  $\nu$  con  $dx^\nu$ ):

$$\omega^a_b \equiv \omega^a_{b\nu} dx^\nu, \quad \dot{\omega}^a_b \equiv \dot{\omega}^a_{b\nu} dx^\nu, \quad K^a_b \equiv K^a_{b\nu} dx^\nu, \quad (\text{B.29})$$

Queda finalmente:

$$\omega^a_b = \dot{\omega}^a_b + K^a_b \quad (\text{B.30})$$

Reemplazamos este resultado en la segunda ecuación de Cartán general (Ec. B.15) para obtener la relación entre la curvatura general y la curvatura de Levi-Civita.

$$\begin{aligned} d(\dot{\omega}^a_b + K^a_b) + (\dot{\omega}^a_c + K^a_c) \wedge (\dot{\omega}^c_b + K^c_b) &= R^a_b \\ d\dot{\omega}^a_b + dK^a_b + \dot{\omega}^a_c \wedge \dot{\omega}^c_b + \dot{\omega}^a_c \wedge K^c_b + K^a_c \wedge \dot{\omega}^c_b + K^a_c \wedge K^c_b &= R^a_b \\ \left[ d\dot{\omega}^a_b + \dot{\omega}^a_c \wedge \dot{\omega}^c_b \right] + \left[ dK^a_b + \dot{\omega}^a_c \wedge K^c_b + K^a_c \wedge \dot{\omega}^c_b \right] + K^a_c \wedge K^c_b &= R^a_b \end{aligned}$$

Ahora usamos la segunda ecuación de Cartán (B.17) bajo la conexión Levi-Civita (para el primer corchete) y simplificamos el segundo corchete con la derivada exterior covariante, quedando de la siguiente forma:

$$\dot{R}^a_b + \dot{D}K^a_b + K^a_c \wedge K^c_b = R^a_b \quad \Rightarrow \quad R^a_b - \dot{R}^a_b = \dot{D}K^a_b + K^a_c \wedge K^c_b \quad (\text{B.31})$$

De esta manera, hemos demostrado la separación de la curvatura en base anholonómica. Luego, la función de Lagrange (Ec. B.19) se modifica como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \left( R^{cd} - \dot{D}K^{cd} - K^c_e \wedge K^{ed} \right) \quad (\text{B.32})$$

Los símbolos de Levi-Civita son constantes y bajo las siguientes propiedades:  $\dot{D}\epsilon_{abcd} = 0$ ,  $\dot{D}e^a = 0$ ; la acción podemos separarlo de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \left[ \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge (R^{cd} - K^c_e \wedge K^{ed}) - \dot{D}(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) \right] \quad (\text{B.33})$$

El segundo término corresponde al término de borde, en la siguiente subsección lo investigaremos más a detalle. Entonces, nos enfocamos en el primer término:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} [\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge (R^{cd} - K^c_e \wedge K^{ed})] \quad (\text{B.34})$$

Para obtener la función de Lagrange de la teoría en gravedad teleparalela (ETGR), se requiere compatibilidad métrica ( $\nabla g = 0$ ) y que la conexión corresponda a la conexión de Weitzenböck que  $w^a_b \equiv 0$ . Esta conexión transforma las ecuaciones de Cartán como:

$$de^c = T^c, \quad R^c_d = 0 \quad (\text{B.35})$$

De esta manera la función de Lagrange toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^c_e \wedge K^{ed} \quad (\text{B.36})$$

Dado que la conexión de Weitzenböck anula la conexión spin  $w^a_b$ , entonces se obtiene para el tensor contorsión:  $K^c_e = w^c_e - \dot{w}^c_e \rightarrow K^c_e = -\dot{w}^c_e$ . La elección de esta conexión genera que la función de Lagrange sea cuadrático en derivadas de primer orden de los vielbeins, pues se cumple:  $\dot{w}_{abc} = \frac{1}{2}(d(e_a)_{bc} + d(e_b)_{ca} - d(e_c)_{ab})$

Por el momento la acción va tomando de la siguiente forma:

$$S_{\text{TGR}} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int_U \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^c_e \wedge K^{ed} - \frac{1}{4\kappa^2} \int_{\partial U} \dot{D}(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) \quad (\text{B.37})$$

Sea la definición de la proyección de las componentes  $K^c_{ef}$  en la base  $e^f$ :

$$K^c_e \equiv K^c_{ef} e^f \quad (\text{B.38})$$

De esta manera la función de Lagrange queda:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} K^c_{ef} K^{ed}_g e^a \wedge e^b \wedge e^f \wedge e^g \quad (\text{B.39})$$

Considerando las propiedades:  $e^a \wedge e^b \wedge e^f \wedge e^g = -e \epsilon^{abfg} d^4x$ ,  $\epsilon^{abfg} \epsilon_{abcd} = -4 \delta_{cd}^{[fg]}$ ; la función de Lagrange queda como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2} (K^c_{ec} K^{ed}_d - K^c_{ed} K^{ed}_c) e d^4x \quad (\text{B.40})$$

Además, bajo las siguientes equivalencias (Monsalve, 2018):

$$K^c_{ec} = -T^c_{ec}, \quad K^{ed}_d = -T^d_{d^e}, \quad K^c_{ed} K^{ed}_c = K^c_{[ed]} K^{ed}_c = -\frac{1}{2} T^c_{ed} K^{ed}_c \quad (\text{B.41})$$

La función de Lagrange se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K^c_{ec} K^{ed}_d - K^c_{ed} K^{ed}_c &= \underbrace{T^c_{ec} T^d_{d^e}}_{\frac{1}{2}(T^c_{ec} - T^c_{ce})T^a_{a^e}} + \frac{1}{2} T^c_{ed} K^{ed}_c \\ &= \frac{1}{2} T^c_{ed} \delta^d_c T^a_{a^e} + \frac{1}{2} T^c_{ed} \delta^e_c T^a_{a^d} + \frac{1}{2} T^c_{ed} K^{ed}_c \\ &= \frac{1}{2} T^c_{ed} (T^a_{ae} \delta^d_c - T^a_{ad} \delta^e_c + K^{ed}_c) = T^c_{ed} S^{ed}_c \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Se define el ‘‘Superpontencial’’ de la teoría teleparalela:

$$S_c{}^{ed} = \frac{1}{2} (T^a{}_{ae} \delta^d_c - T^a{}_{ad} \delta^e_c + K^{ed}_c) \quad (\text{B.43})$$

De esta manera, se define el escalar de Torsión:

$$T \equiv T^c{}_{ed} S_c{}^{ed} \quad (\text{B.44})$$

Hemos obtenido el Lagrangeano de la teoría teleparalela. Aunque la conexión de Weitzenböck es plana (su 2-forma de curvatura se anula), la curvatura métrica  $\dot{R}$  (la de Levi-Civita)

sigue siendo distinta de cero y puede escribirse íntegramente en términos de la contorsión. En el gauge de Weitzenböck, donde  $\omega^a_b = 0$ , se cumple:  $K^a_b = -\dot{\omega}^a_b$ ; en consecuencia,  $\dot{R}$  se expresa a partir de  $K$  e, internamente, de la torsión. Así, imponer la conexión de Weitzenböck elimina la curvatura general, pero mantiene una formulación plenamente geométrica, pues las cantidades métricas se reconstruyen mediante la contorsión y la torsión.<sup>2</sup>

Al incorporar un fluido de energía oscura junto con la materia bariónica, la acción adopta la siguiente forma:

$$S_{\text{ETGR}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e (-T - 2\Lambda) + S_m \quad (\text{B.45})$$

### B.1.6 Función de Lagrange en una teoría de Einstein-Cartán

Bajo una conexión donde no se anula la curvatura 2-forma, partimos de la siguiente expresión<sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \left( R^{cd} - \dot{D} K^{cd} - K^c_e \wedge K^{ed} \right) \quad (\text{B.46})$$

Este Lagrangeano se divide en 3 partes fundamentales, una asociada a la acción de Hilbert-Einstein, la otra corresponde al equivalente teleparalelo que obtuvimos en la anterior sección y la última corresponde al término de borde.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} R^{cd} \wedge e^a \wedge e^b - \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} K^c_e \wedge K^{ed} \wedge e^a \wedge e^b - \frac{1}{4\kappa^2} \dot{D} (\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) \quad (\text{B.47})$$

Reduciendo el segundo término de la anterior expresión con el mismo proceso de la sección anterior, queda como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} R^{cd} \wedge e^a \wedge e^b - \frac{1}{2\kappa^2} T e d^4x \quad (\text{B.48})$$

Considerando la identidad demostrada en la Ec. (A.3), obtenemos la acción en la teoría de Einstein-Cartán:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e (R - T) \quad (\text{B.49})$$

Al incorporar un fluido de energía oscura junto con la materia bariónica, la acción adopta la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e (R - T - 2\Lambda) + S_m \quad (\text{B.50})$$

<sup>2</sup>El símbolo  $\bullet$  indica que los tensores son métricos y dependen de la geometría. En cambio, si este símbolo no está presente (como en la curvatura general  $R_{ab}$ ), dicho objeto podría contener una parte métrica y otra parte no métrica.

<sup>3</sup>No requerimos fijar ninguna conexión para llegar a esta expresión, por lo que sigue siendo válida.

### B.1.7 Término de Borde

Obtuvimos el siguiente término:

$$-\frac{1}{4\kappa^2} \int_{\partial U} \dot{D}(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) \quad (\text{B.51})$$

Dado que  $\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}[e]$  es un escalar invariante, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\dot{D}(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) = d(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) \quad (\text{B.52})$$

Es posible obtener una cuadri-divergencia si consideramos:

$$\Omega = ed^4x, \quad K^{cd} = K^{cd}_g e^g, \quad e^a \wedge e^b \wedge e^g = -\epsilon^{abgf} \Omega(e_f) = -\epsilon^{abgf} \Omega e_f \quad (\text{B.53})$$

La última expresión es análogo a la Ec. (2.61), pero para una integral superficial.

Se reescribe el término de borde como (Monsalve, 2018):

$$\begin{aligned} d(\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge K^{cd}) &= d\left(4 \delta_{cd}^{[ef]} K^{cd}_e \Omega(e_f)\right) \\ &= 4 d(K^{cd}_c \Omega(e_d)) = 4 d(K^{cd}_c ed^4x e_d^\mu \partial_\mu) \\ &= 4 \partial_\nu (e K^{cd}_c e_d^\mu) dx^\nu \wedge \partial_\mu d^4x = \frac{4}{e} \partial_\mu (e K^{cd}_c e_d^\mu) \Omega \\ &= -\frac{4}{e} \partial_\mu (e T^\nu{}_\nu{}^\mu) \Omega \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Donde,

$$K^{c\mu}{}_c = -T^\nu{}_\nu{}^\mu \quad (\text{B.55})$$

En la Función de Lagrange de la relatividad general, el escalar de Ricci  $R$  (donde para esta teoría sería  $\dot{R}$ ) depende tanto de la métrica como de sus primeras y segundas derivadas. En la Gravedad Teleparalela de Einstein (TEGR) esta dependencia se expresa en términos de los *vielbeins*: el Lagrangeano teleparalelo también depende de primeras y segundas derivadas de  $e^a_\mu$ , pero las segundas derivadas aparecen únicamente en el término de borde. La razón es que el tensor de torsión (y, por ende, la contorsión) depende solo de las primeras derivadas de los *vielbeins*; las segundas derivadas ingresan exclusivamente a través del término superficial<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Para ver por qué el término de borde involucra segundas derivadas, puede hacerse un mapeo explícito: La curvatura métrica  $\dot{R}$  depende de  $\dot{\omega}^a{}_b$ . Además, observamos las segundas derivadas por las ecuaciones:  $\dot{w}_{[\mu}{}^\lambda{}_{\nu]} = \frac{1}{2} C_\mu{}^\lambda{}_\nu$  y  $C_a{}^d{}_b = -e_a^\mu e_b^\nu [\partial_\mu e_\nu^c - \partial_\nu e_\mu^c]$ .

## B.1.8 Relación entre el escalar de curvatura y el escalar de torsión

Obtuvimos la acción general en gravedad teleparalela:

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e T + \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x e \frac{1}{e} \partial_\mu (e T^\mu) \leftrightarrow S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e \dot{R} \quad (\text{B.56})$$

Este resultado surgió de la acción de Hilbert-Einstein con el escalar de Ricci, por lo que la relación entre escalares es:

$$\dot{R} = -T + \frac{2}{e} \partial_\mu (e T^\mu) \quad (\text{B.57})$$

Podemos concluir que la acción teleparalela no es más que otra versión de la acción de relatividad general tomando la conexión de Weitzenböck, son equivalentes.

## B.2 Transiciones entre teorías gravitacionales bajo la conexión

La idea central es fijar la conexión  $w^a_b$  y, a partir de ello, verificar directamente qué objetos geométricos se anulan.

### B.2.1 Resumen de ecuaciones en un marco general $R + T + Q$

$$R^a_b = dw^a_b + w^a_c \wedge w^c_b, \quad T^a = de^a + w^a_b \wedge e^b, \quad Q_{ab} = dg_{ab} - 2w_{(ab)}$$

Además, usamos las descomposiciones:

$$w^a_b = \dot{w}^a_b + K^a_b + L^a_b, \quad T^a = K^a_c \wedge e^c + L^a_c \wedge e^c, \quad Q_{ab} = -2K_{(ab)} - 2L_{(ab)} \quad (\text{pues } \dot{Q}_{ab} = 0)$$

Donde,  $K$  proviene de  $T$  (contorsión) y  $L$  proviene de  $Q$  (disformación). Sean las ecuaciones de Cartán:

$$T^a = de^a + w^a_c \wedge e^c \quad (\text{B.58})$$

$$R^a_b = dw^a_b + w^a_c \wedge w^c_b \quad (\text{B.59})$$

$$Q_{ab} = dg_{ab} - 2w_{(ab)} \quad (\text{B.60})$$

En Levi-Civita (compatibilidad métrica y torsión nula) se cumple  $\dot{Q}_{ab} = 0$ , es decir  $dg_{ab} - 2\dot{w}_{(ab)} = 0$ . A continuación mostramos transiciones escogiendo  $w^a_b$  y verificando  $(R, T, Q)$ .

## B.2.2 Teoría $R$ (sólo curvatura; Relatividad General)

Elección de la conexión.

$$\boxed{w^a{}_b = \dot{w}^a{}_b} \quad (K^a{}_b = 0, L^a{}_b = 0)$$

Verificación:

$$R^a{}_b = d\dot{w}^a{}_b + \dot{w}^a{}_c \wedge \dot{w}^c{}_b = \dot{R}^a{}_b \quad (\text{en general } \neq 0) \quad (\text{B.61})$$

$$T^a = de^a + \dot{w}^a{}_b \wedge e^b = 0 \quad (\text{B.62})$$

$$Q_{ab} = dg_{ab} - 2\dot{w}_{(ab)} = 0 \quad (\text{B.63})$$

Por lo tanto:  $R \neq 0$  en general, mientras que  $T = 0, Q = 0$ .

## B.2.3 Teoría $T$ (teleparalela; Weitzenböck)

Elección de la conexión.

$$\boxed{w^a{}_b = 0} \quad (\text{gauge de Weitzenböck}).$$

Verificación.

$$R^a{}_b = d(0) + 0 = 0 \quad (\text{B.64})$$

$$T^a = de^a + 0 = de^a \quad (\text{en general } \neq 0) \quad (\text{B.65})$$

$$Q_{ab} = dg_{ab} - 2 \cdot 0 = dg_{ab} \quad (\text{B.66})$$

Si además tomamos bases anholonómicas ( $g_{ab} = \eta_{ab}$  constante), entonces  $dg_{ab} = 0$ :

$$R^a{}_b = 0, \quad T^a = de^a \neq 0, \quad Q_{ab} = 0$$

Este es el caso teleparalelo puro (TEGR).

## B.2.4 Teoría $Q$ (sólo no-metricidad; *symmetric teleparallel*)

Elección de la conexión (en coordenadas): usamos la conexión *coincident gauge*:

$$\boxed{\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0} \quad \iff \quad R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0, \quad T^\alpha{}_{\mu\nu} = 0, \quad Q_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu}.$$

Pues,

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} \quad (\text{B.67})$$

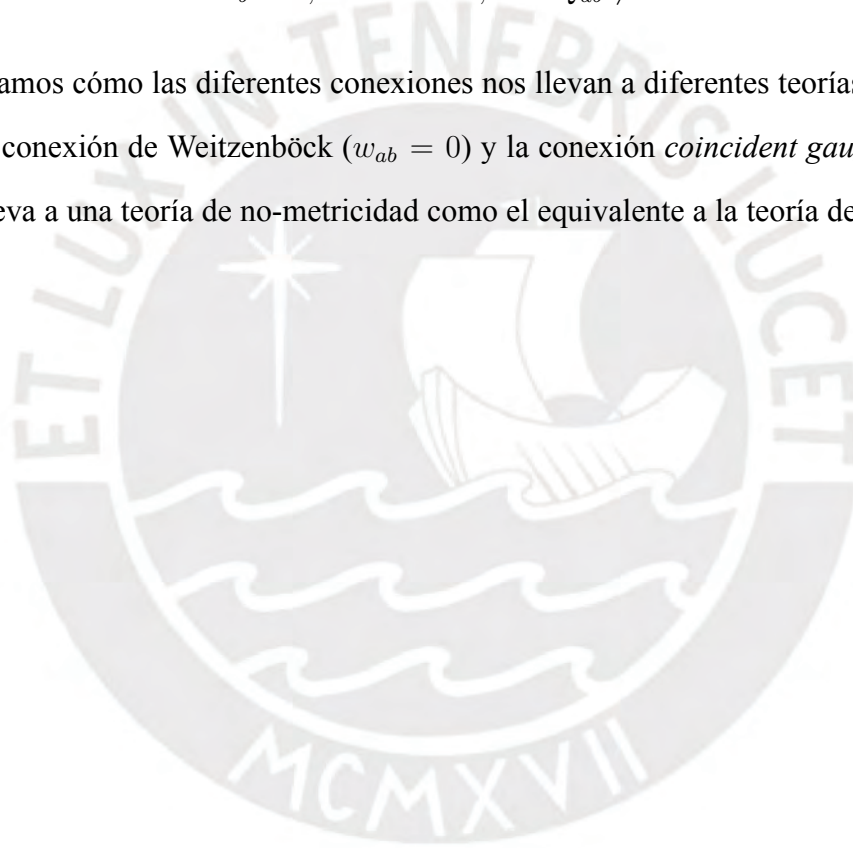
$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (\text{B.68})$$

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}g_{\mu\lambda} \quad (\text{B.69})$$

En términos de 1-formas y una conexión puramente simétrica (Por el postulado del *vielbein*:  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0 \rightarrow w^a_b = e^a_{\nu} de^{\nu}_b$ ):

$$R^a_b = 0, \quad T^a = 0, \quad Q_{ab} \neq 0$$

Observamos cómo las diferentes conexiones nos llevan a diferentes teorías. De esta manera actúa la conexión de Weitzenböck ( $w_{ab} = 0$ ) y la conexión *coincident gauge* ( $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ ), el cual nos lleva a una teoría de no-metricidad como el equivalente a la teoría de la relatividad general.



# Apéndice C

## Capítulo 4 - Relatividad General

### C.1 Variación de la acción de Hilbert Einstein con acoplamiento de un campo escalar

Sea la acción:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \cdot \dot{R} - \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \cdot \frac{(\nabla\phi)^2}{2} - \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \cdot V(\phi) \quad (\text{C.1})$$

Como la acción depende de los campos dinámicos  $g_{\mu\nu}$  y  $\phi$ , entonces al variarlo obtendremos dos ecuaciones independientes para cada campo.

$$\delta S = \left( \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} + \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \delta \phi = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\delta S = \left( \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad \delta S = \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \delta \phi = 0 \quad (\text{C.3})$$

#### C.1.1 Variación respecto al campo dinámico $\phi$

Para obtener las ecuaciones dinámicas de  $\phi$ , podríamos usar la Ec. (4.14). Sin embargo, optamos por variar la acción de manera progresiva, sin considerar ese camino general. Variando la acción de la Ec. (C.1) respecto a  $\phi$  obtenemos:

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{\delta(\nabla\phi)^2}{2} - \delta V(\phi) \right] \quad (\text{C.4})$$

Ahora nos enfocamos en cada variación por separado.

### Variación para $(\nabla\phi)^2$

Usamos:  $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\delta(\nabla\phi)^2}{2} &= \frac{\delta(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)}{2} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}[\delta(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\delta(\partial_\nu\phi)] \\ &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\delta(\nabla_\nu\phi)\end{aligned}$$

### Variación para $V(\phi)$

$$\delta(V(\phi)) = \left(\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right)\delta\phi$$

Por lo tanto la Ec. (C.4) quedará:

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\delta(\nabla_\nu\phi) - \left(\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right)\delta\phi\right] \quad (\text{C.5})$$

Considerando la propiedad de conmutación  $[\nabla, \delta] = 0$  y acomodando, la integral quedará:

$$\delta S = -\left[\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\phi)\nabla_\mu\phi] + \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right]\delta\phi\right] \quad (\text{C.6})$$

Usamos integración por partes:  $\nabla_\nu(\delta\phi)\nabla_\mu\phi = \nabla_\nu(\delta\phi\nabla_\mu\phi) - \delta\phi\nabla_\nu(\nabla_\mu\phi)$ . Se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\phi)\nabla_\mu\phi &= \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\phi\cdot\nabla_\mu\phi) - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\phi\nabla_\nu(\nabla_\mu\phi) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla^\mu(\nabla_\mu\phi\cdot\delta\phi) - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi)\delta\phi\end{aligned}$$

Entonces la variación respecto al campo escalar queda de la forma:

$$\delta S = -\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}[\nabla^\mu(\nabla_\mu\phi\cdot\delta\phi)] + \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi)\delta\phi] - \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right]\delta\phi \quad (\text{C.7})$$

La primera integral de la Ec. (C.7) es una derivada total y podemos aplicar el Teorema de Stokes.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}[\nabla^\mu(\nabla_\mu\phi\cdot\delta\phi)] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\mu(\nabla^\mu\phi\cdot\delta\phi)] \\ &= \oint_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma_\mu\nabla^\mu\phi\delta\phi\end{aligned}$$

Tomando la condición de Neumann ( $\nabla^\mu \phi \equiv 0$ ), se anula el término de borde. Finalmente, la variación completa queda de la forma:

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi) - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right] \delta \phi \quad (\text{C.8})$$

Aplicando la Ec. (C.8) en la Ec. (C.3) y bajo compatibilidad métrica ( $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ ), obtenemos:

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\nabla_\nu \phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \Rightarrow \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (\text{C.9})$$

Donde la Ec. (C.9) se puede reducir usando la forma conocida de la derivada covariante. Recordar que la expresión  $\nabla^\mu(\phi)$  es un vector de la forma  $A^\mu$ .

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) &= \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi) \\ &= \partial_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu g^{\nu\alpha} \nabla_\alpha \phi \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

En la Ec. (C.10) podemos expresar los símbolos de Christoffel de la siguiente manera:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \nu} \quad (\text{C.11})$$

Luego usando la Ec. (C.11) en la Ec. (C.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) &= \partial_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g}) g^{\nu\alpha} \nabla_\alpha \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \sqrt{-g} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi) + \partial_\mu (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_u \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación de movimiento para el campo escalar  $\phi$ , también llamada ecuación de Klein Gordon.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_u \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (\text{C.13})$$

### C.1.2 Variación respecto al campo dinámico $g_{\mu\nu}$

El tensor energía-momento del campo escalar se obtiene variando la acción (Ec. C.1) respecto al campo dinámico  $g^{\mu\nu}$ , para ello usaremos las siguientes expresiones:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad \delta \sqrt{-g} = \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{uv} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{C.14})$$

Buscamos el principio variacional con  $g^{\mu\nu}$  como en la anterior variación:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \dot{R} \right] - \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} \right] - \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} V(\phi) \right] \quad (\text{C.15})$$

La primera integral (Ec. C.15) corresponde al término de Hilbert-Einstein el cual se puede reducir como prosigue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \dot{R} \right] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \dot{R}_{\mu\nu} \right] \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \dot{R}_{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) \dot{R}_{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(\dot{R}_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Cabe resaltar que la tercera integral de la ecuación anterior se va a eliminar estratégicamente con el término agregado de Gibbons-Hawking a la Ec. (C.1). Entonces proseguimos de la siguiente manera y usamos la Ec. (C.14) en la primera integral.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \dot{R} \right] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \dot{R}_{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) \dot{R}_{\mu\nu} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) \dot{R} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) \dot{R}_{\mu\nu} \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Prosiguiendo con la segunda integral de la Ec. (C.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} \right] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[ \delta(\sqrt{-g}) \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \sqrt{-g} \delta \left[ \frac{(\nabla\phi)^2}{2} \right] \right] \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[ \left[ \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \sqrt{-g} \delta \left[ \frac{(\nabla\phi)^2}{2} \right] \right] \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[ \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{\sqrt{-g}}{2} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi \delta g^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

En la tercera integral de la Ec. (C.15) se evalúa teniendo en cuenta que  $V(\phi)$  no depende de  $g^{\mu\nu}$ . Además se usa la Ec. (C.14).

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta \left[ \sqrt{-g} V(\phi) \right] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}) V(\phi) + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta V(\phi) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}) V(\phi) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) V(\phi) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Junto a las Ec. C.16, C.17 y C.18 en la Ec. (C.15) se obtiene:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ \dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} \right] \delta g^{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{C.19})$$

Donde,

$$\frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} - \frac{\sqrt{-g}}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (\text{C.20})$$

Con la Ec. (C.19) en la Ec. (C.3) tenemos:

$$\dot{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{R} = -\frac{2\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{C.21})$$

Se define:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\nu} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{(\partial\phi)^2}{2} + V(\phi) \right] \end{aligned}$$

### Ecuaciones de Campo

De esta manera encontramos las ecuaciones de campo Einstein y la expresión para el Tensor de Energía-Momento.

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (\text{C.22})$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \quad (\text{C.23})$$

# Apéndice D

## Capítulo 5 - Cosmología estándar de fondo

### D.1 Sistema Lineal

Tenemos el problema de valor inicial:

$$\dot{x} = x + y \quad (\text{D.1})$$

$$\dot{y} = 4x - 2y \quad (\text{D.2})$$

Cuya condición inicial es  $(x_0, y_0) = (2, -3)$ . Obtenemos la siguiente matriz Jacobiano:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Usando las Ec. (5.53, 5.54), se determina la traza y determinante:  $\tau = -1$  y  $\Delta = -6$ . Los autovalores se hallan a partir de  $\tau$  y  $\Delta$ , se obtienen:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3 \quad (\text{D.4})$$

Dado un determinado autovalor  $\lambda$ , su respectivo autovector satisface la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Para el caso  $\lambda = 2$  obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtiene como solución no trivial el autovector  $(v_1, v_2) = (1, 1)$  como el mínimo que satisface el sistema. Cabe resaltar que otros autovectores válidos son múltiplos de  $(1, 1)$ .

Para el caso del autovalor  $\lambda = -3$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtiene como solución no trivial el autovector  $(v_1, v_2) = (1, -4)$ . La solución general queda:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad (\text{D.8})$$

Finalmente,  $c_1$  y  $c_2$  se determinan de las condiciones iniciales del problema  $(x_0, y_0) = (2, -3)$ .

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad (\text{D.9})$$

Los valores de  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 1$  satisfacen el sistema de ecuaciones. Entonces el problema queda resuelto.

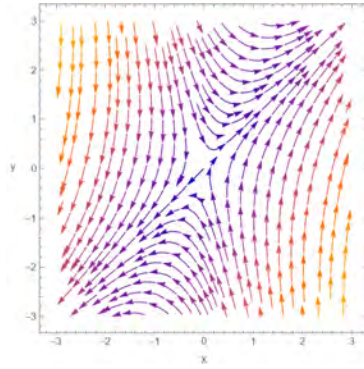
$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

$$y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t}$$

Reconocemos como punto fijo al punto  $(0, 0)$  con estabilidad tipo *saddle point*, dado que sus autovalores son de signos contrarios.

### D.1.1 Gráfica de fases para el sistema lineal

A continuación se muestra el diagrama de fases, alrededor del punto fijo, con muchas curvas que cada una representa una solución para una determinada condición inicial.



**Figura D.1:** Diagrama de Fase  $y - x$

## D.2 Sistema no Lineal

Se tiene el siguiente problema de valor inicial:

$$\dot{x} = -x + x^3 \quad (\text{D.10})$$

$$\dot{y} = -2y \quad (\text{D.11})$$

Procedemos a resolver el sistema no lineal alrededor de sus puntos críticos. Estos deben satisfacer  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ . Por lo tanto, los puntos fijos son  $(0, 0), (1, 0)$  y  $(-1, 0)$ . La matriz para linealizar este problema esta dada por la Ec. (5.68). Obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Evaluamos la matriz  $A$  en cada punto fijo para linealizar el sistema.

**Punto Fijo**  $(0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Una vez linealizado, continuamos con el procedimiento para el caso de un sistema lineal. Usando las Ec. (5.53, 5.54), se determinan los valores de traza y determinante:  $\tau = -3$  y  $\Delta = 2$ . Se obtienen como autovalores:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \quad (\text{D.14})$$

Se tiene una estabilidad tipo fuente (estable).

Para el caso  $\lambda = -1$ , obtenemos su respectivo autovector como:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtiene como solución no trivial el autovector  $(v_1, v_2) = (0, 0)$ .

Para el caso  $\lambda = -2$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.16})$$

Se obtiene como solución no trivial el autovector  $(v_1, v_2) = (0, 0)$ . Por lo tanto, la solución general queda:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-1t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad x(t) = 0, \quad y(t) = 0 \quad (\text{D.17})$$

**Puntos Fijos**  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$

Linealizamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Los valores de la traza y determinante son:  $\tau = 0$  y  $\Delta = -4$ . Se obtienen los siguientes autovalores:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad (\text{D.19})$$

Se tiene una estabilidad tipo *saddle point*.

Para el caso  $\lambda = 2$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Al resolver dicho sistema de ecuaciones se obtiene como solución no trivial el autovector  $(v_1, v_2) = (1, 0)$ . Cabe resaltar que existen otros autovectores que son múltiplos de este.

Para el caso del autovalor  $\lambda = -2$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.21})$$

Se obtiene el autovector  $(v_1, v_2) = (0, 1)$ . La solución general queda:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad x(t) = c_1 e^{2t}, \quad y(t) = c_2 e^{-2t} \quad (\text{D.22})$$

### D.2.1 Gráfica $y - x$ para el sistema no lineal

Se muestra el diagrama de fases alrededor de los puntos críticos.

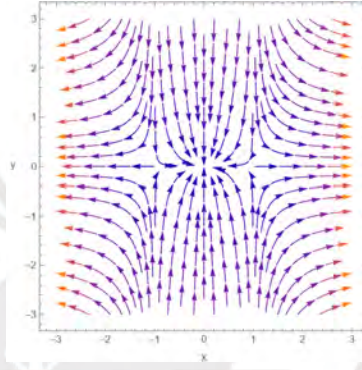


Figura D.2: Diagrama de fase  $y - x$

## D.3 Acción de Einstein–Hilbert con materia y curvatura espacial

Acción del modelo:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \dot{R} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad (\text{D.23})$$

Consideramos un modelo gobernado por alguna componente de materia con  $\omega$  constante<sup>1</sup> y curvatura no nula ( $k \neq 0$ ). Las ecuaciones de Friedmann son:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (\text{D.24})$$

$$H' = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ \frac{\rho + p}{H} \right] + \frac{k}{a^2 H} \quad (\text{D.25})$$

$$\rho' = -3(1 + w)\rho \quad (\text{D.26})$$

<sup>1</sup> $\omega$  es la ecuación de estado para alguna componente con ecuación de estado constante (radiación, materia bariónica o constante cosmológica).

### D.3.1 Caso $k < 0$

Se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x \equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho}}{\sqrt{3H}}, \quad y \equiv \frac{k\sqrt{p}}{\sqrt{2H}}, \quad c \equiv \frac{\sqrt{-k}}{Ha} \quad (\text{D.27})$$

Es importante resaltar que la variable adimensional  $c$  existe únicamente para  $k < 0$ . Con estas definiciones se obtiene el siguiente sistema dinámico:

$$\frac{dx}{dN} = c^2x + \frac{3x^3}{2} + xy^2 - \frac{y^2}{x} - \frac{3x}{2} \quad (\text{D.28})$$

$$\frac{dy}{dN} = c^2y + \frac{3x^2y}{2} + y^3 - \frac{3wy}{2} - \frac{9wx^2}{4y} \quad (\text{D.29})$$

$$\frac{dc}{dN} = c^3 + \frac{3cx^2}{2} + cy^2 - c \quad (\text{D.30})$$

La ecuación de restricción:

$$x^2 + c^2 = 1 \quad (\text{D.31})$$

### D.3.2 Caso $k > 0$

Ahora cambiará la variable adimensional  $c$ , generando además que cambie el sistema dinámico. Se definen las siguientes variables adimensionales:

$$x \equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho}}{\sqrt{3H}}, \quad y \equiv \frac{k\sqrt{p}}{\sqrt{2H}}, \quad c \equiv \frac{\sqrt{k}}{Ha} \quad (\text{D.32})$$

Ahora la variable adimensional  $c$  existe únicamente para el caso  $k > 0$ . Con estas definiciones se obtiene el siguiente sistema dinámico:

$$\frac{dx}{dN} = -c^2x + \frac{3x^3}{2} + xy^2 - \frac{y^2}{x} - \frac{3x}{2} \quad (\text{D.33})$$

$$\frac{dy}{dN} = -c^2y + \frac{3x^2y}{2} + y^3 - \frac{3wy}{2} - \frac{9wx^2}{4y} \quad (\text{D.34})$$

$$\frac{dc}{dN} = -c^3 + \frac{3cx^2}{2} + cy^2 - c \quad (\text{D.35})$$

La ecuación de restricción:

$$x^2 - c^2 = 1 \quad (\text{D.36})$$

Si consideramos la nueva variable como deformación de la curvatura y no como un tipo de materia, entonces en los dos casos con curvatura espacial se tiene de sus ecuaciones de

restricción:

$$k < 0 \Rightarrow \sum_i \Omega_i < 1 \quad (\text{D.37})$$

$$k > 0 \Rightarrow \sum_i \Omega_i > 1 \quad (\text{D.38})$$

El caso plano  $k = 0$  no aporta una variable adimensional. Es por ello que los modelos explorados en los capítulos de la tesis no contienen una variable asociada a  $k$ .

## D.4 Acción de Einstein–Hilbert con materia ordinaria, radiación y constante cosmológica

Acción del modelo:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \dot{R} - \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} 2\Lambda - \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} F^2 + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad (\text{D.39})$$

Al variar respecto al campo dinámico  $g_{\mu\nu}$  obtenemos:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu} = T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} + T^{(r)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu} \quad (\text{D.40})$$

En este modelo, existe un acoplamiento mínimo entre la constante cosmológica, radiación y materia con curvatura espacial nula ( $k = 0$ ), lo que implica que las ecuaciones de Friedmann resultantes serán una superposición de los casos independientes. Considerando un tensor energía-momento de un fluido ideal de la forma:

$$T_{\mu\nu} = \text{Diag}(-\rho, p, p, p) = T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} + T^{(r)}_{\mu\nu} + T^{(m)}_{\mu\nu} \quad (\text{D.41})$$

$$T_{\mu\nu} = \text{Diag}(-\rho_\Lambda - \rho_r - \rho_m, p_\Lambda + p_r + p_m, p_\Lambda + p_r + p_m, p_\Lambda + p_r + p_m) \quad (\text{D.42})$$

Por tanto,

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda \quad (\text{D.43})$$

Se derivan las ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (\rho_\Lambda + \rho_r + \rho_m) \quad (\text{D.44})$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} [(1 + \omega_\Lambda)\rho_\Lambda + (1 + \omega_r)\rho_r + (1 + \omega_m)\rho_m] \quad (\text{D.45})$$

Donde  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $\omega_m = 0$  y  $\omega_r = \frac{1}{3}$ .

Además, por la conservación del tensor energía momento obtenemos la ecuación de continuidad de cada componente:

$$\nabla(T_\nu^\mu) = \nabla(T_\nu^\mu)_{mat} + \nabla(T_\nu^\mu)_{rad} = 0 \quad (D.46)$$

$$\nabla(T_\nu^\mu)_{mat} = 0 \rightarrow \dot{\rho}_r + 3H(1 + w_r)\rho_r = 0 \quad (D.47)$$

$$\nabla(T_\nu^\mu)_{rad} = 0 \rightarrow \dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = 0 \quad (D.48)$$

Las variables adimensionales que nos forman un sistema dinámico a partir de las ecuaciones de Friedmann son:

$$x_1 = \frac{\kappa\sqrt{\rho_m}}{\sqrt{3}H}, \quad x_2 = \frac{\kappa\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3}H} \quad (D.49)$$

El sistema dinámico queda:

$$\frac{dx_1}{dN} = \frac{x_1}{2}(3x_1^2 + 4x_2^2 - 3) \quad (D.50)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_2}{2}\left(\frac{3x_1^2}{2} + 4x_2^2 - 4\right) \quad (D.51)$$

La ecuación de restricción:

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad (D.52)$$

## D.5 Dinámica cosmológica de un campo escalar en presencia de materia ordinaria y radiación

Acción del modelo:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\dot{R}}{2\kappa^2} - \mathcal{L}_\phi \right] + S_m + S_r$$

Consideremos un campo escalar  $\phi$  mínimamente acoplado con una energía potencial  $V(\phi)$  el cual describirá los efectos de la energía oscura. La densidad lagrangeana del campo escalar está descrita por:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 H^2 + V(\phi) \quad (D.53)$$

En este caso el valor de  $\rho$  y  $p$  están descritos como:

$$\rho = \rho_m + \rho_\phi + \rho_r, \quad p = p_\phi + p_r \quad (D.54)$$

Con ecuaciones de continuidad:

$$\rho'_m + 3\rho_m = 0 \quad (\text{D.55})$$

$$\rho'_r + 4\rho_r = 0 \quad (\text{D.56})$$

Se resalta que la presión de la materia ordinaria tipo polvo, es de valor muy inferior con respecto a su densidad, por lo que la consideramos nula (por consecuencia:  $\omega_m = 0$ ). Además, la ecuación de estado para materia tipo radiación es  $\omega_r = -\frac{1}{3}$ . Como resultado de la Ec. (D.55):  $\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}$ ,  $\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}$ . Las ecuaciones de estado de materia y radiación son constantes, por el contrario  $\omega_\phi \equiv \omega_\phi(N)$  puede cambiar dinámicamente. Entonces se tiene las siguientes ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \frac{1}{2}H^2(\phi')^2 + V(\phi) + \rho_m + \rho_r \right] \quad (\text{D.57})$$

$$H' = -\frac{\kappa^2}{2} \left[ H[\phi']^2 + \frac{\rho_m}{H} + \frac{4}{3} \frac{\rho_r}{H} \right] \quad (\text{D.58})$$

$$3H^2\phi' + H(H'\phi' + H\phi'') + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (\text{D.59})$$

Luego, las variables adimensionales son:

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\kappa\phi'}{\sqrt{6}}, & y &\equiv \frac{\kappa\sqrt{V}}{\sqrt{3H}} \\ \lambda &\equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}, & \Gamma &\equiv \frac{VV_{,\phi\phi}}{V_{,\phi}^2} \\ \varrho &\equiv \frac{\kappa\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{3H}} \end{aligned} \quad (\text{D.60})$$

Utilizando los códigos en *Wolfram Mathematica* (Casimiro, 2025) y las definiciones de las funciones ajustadas a este modelo, obtenemos el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 - \frac{x}{2}(3y^2 - 3x^2 - \varrho^2) \\ \frac{dy}{dN} &= \frac{-\sqrt{6}}{2}\lambda xy - \frac{y}{2}(3y^2 - 3x^2 - \varrho^2 - 3) \\ \frac{d\varrho}{dN} &= -\frac{\varrho}{2}(3y^2 - 3x^2 - \varrho^2 + 1) \\ \frac{d\lambda}{dN} &= \sqrt{6}x(1 - \Gamma)\lambda^2 \end{aligned}$$

Donde la ecuación de restricción es:

$$\epsilon x^2 + y^2 + \varrho^2 + \frac{\kappa^2\rho_m}{3H^2} = 1 \quad (\text{D.61})$$

La ecuación de estado  $w_\phi$  y densidad relativa de campo escalar  $\Omega_\phi$  se obtienen con las siguientes expresiones de presión y densidad del campo escalar:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 H^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\phi'^2 H^2 - V(\phi) \quad (\text{D.62})$$

Se obtiene:

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\epsilon x^2 - y^2}{\epsilon x^2 + y^2} \quad (\text{D.63})$$

$$\Omega_\phi \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2} = \epsilon x^2 + y^2 \quad (\text{D.64})$$

Se define la ecuación de estado efectiva  $w_{\text{eff}}$ .<sup>2</sup>

$$w_{\text{eff}} = \frac{p_\phi + p_m}{\rho_\phi + \rho_m} = w_m + (1 - w_m)\epsilon x^2 - (1 + w_m)y^2 + \left(\frac{1}{3} - w_m\right)\varrho^2 \quad (\text{D.65})$$

Luego, ocurrirá una expansión acelerada para la condición de expansión:  $w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ . Además, consideramos el caso  $\epsilon = +1$  y definimos los siguientes cambios de variable  $\gamma_\phi \equiv 1 + w_\phi$ ,  $\gamma \equiv 1 + w_m$ .

### D.5.1 Caso $\lambda$ constante

Se demuestra con la definición  $\lambda \equiv -\frac{V_{,\phi}}{\kappa V}$  que el potencial es exponencial:

$$V(\phi) = V_0 e^{-\kappa\lambda\phi} \quad (\text{D.66})$$

Luego definimos las siguientes funciones del sistema dinámico autónomo:

$$F(x, y, \varrho) = \frac{dx}{dN}, \quad G(x, y, \varrho) = \frac{dy}{dN}, \quad H(x, y, \varrho) = \frac{d\varrho}{dN} \quad (\text{D.67})$$

Procedemos a hallar los puntos fijos con la definición  $\frac{dx}{dN} \equiv F(x, y, \varrho) = 0$ ,  $\frac{dy}{dN} \equiv G(x, y, \varrho) = 0$  y  $\frac{d\varrho}{dN} \equiv H(x, y, \varrho) = 0$ . Obtenemos los siguientes puntos fijos:

<sup>2</sup>Para poder determinarla en función de variables adimensionales se usa las ecuaciones para  $\rho_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $p_m = \rho_m w_m$ , las variables adimensionales y la ecuación de restricción.

Punto	$x$	$y$	$\varrho$
(a)	0	0	0
(b.1)	1	0	0
(b.2)	-1	0	0
(r.1)	0	0	1
(r.2)	0	0	-1
(c.2)	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{2}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{\lambda}$
(d)	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	0
(c.1)	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}$	0

**Tabla D.1:** Puntos críticos al resolver las Ec. (D.67).

Proseguimos hallando la matriz  $\mathcal{M}_{3 \times 3}$  mediante las derivadas parciales de las funciones del sistema autónomo:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{9x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + \frac{\varrho^2}{2} & -3xy + \sqrt{6}y\lambda & x\varrho \\ 3xy - \sqrt{\frac{3}{2}}y\lambda & \frac{3}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{9y^2}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}x\lambda + \frac{\varrho^2}{2} & y\varrho \\ 3xy - \sqrt{\frac{3}{2}}y\lambda & \frac{3}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{9y^2}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}x\lambda + \frac{\varrho^2}{2} & y\varrho \end{pmatrix}$$

Luego, se linealiza la matriz evaluando en cada punto fijo. De esta manera se determinan los autovalores para cada punto fijo mediante la traza ( $\tau$ ) y el determinante ( $\Delta$ ) de la matriz  $\mathcal{M}$ .

## D.5.2 Tabla de autovalores

Puntos	$x$	$y$	$\varrho$	Autovalores
(a)	0	0	0	$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = 0$
(b.1)	1	0	0	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{6}\lambda)$
(b.2)	-1	0	0	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{6}\lambda)$
(r.1)	0	0	1	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$
(r.2)	0	0	-1	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$
(d)	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	0	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3(-\lambda^2 - \sqrt{24\lambda^2 - 7\lambda^4})}{4\lambda^2}, \lambda_3 = \frac{3(-\lambda^2 + \sqrt{24\lambda^2 - 7\lambda^4})}{4\lambda^2}$
(c.1)	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	0	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}(-6 + \lambda^2), \lambda_3 = -3 + \lambda^2$
(c.2)	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{2}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2-4}}{\lambda}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{-4 + \lambda_1}}{\sqrt{3}\lambda_1} - \frac{\sqrt{48(2 + \sqrt{3}\sqrt{-4 + \lambda_1}) - 3\lambda_1(-220 + 12\sqrt{3}\sqrt{-4 + \lambda_1} + 45\lambda_1)}}{6\lambda_1}$ $\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda_1} + \frac{\sqrt{-4 + \lambda_1}}{\sqrt{3}\lambda_1} + \frac{\sqrt{48(2 + \sqrt{3}\sqrt{-4 + \lambda_1}) - 3\lambda_1(-220 + 12\sqrt{3}\sqrt{-4 + \lambda_1} + 45\lambda_1)}}{6\lambda_1}$

**Tabla D.2:** Tabla de autovalores de los puntos fijos ( $\lambda_1 = \lambda^2$ ).

### D.5.3 Tabla de estabilidad

Point	$x$	$y$	$\varrho$	Existence	Stability
(a)	0	0	0	All $\gamma$ and $\lambda$	Saddle Point $\forall \lambda$
(b.1)	1	0	0	All $\gamma$ and $\lambda$	Unstable $\lambda < \sqrt{6}$ Saddle Point $\lambda > \sqrt{6}$
(b.2)	-1	0	0	All $\gamma$ and $\lambda$	Unstable $\lambda > -\sqrt{6}$ Saddle Point $\lambda < -\sqrt{6}$
(r.1)	0	0	1	All $\gamma$ and $\lambda$	Saddle Point $\forall \lambda$
(r.2)	0	0	-1	All $\gamma$ and $\lambda$	Saddle Point $\forall \lambda$
(c.1)	$\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$	0	$\lambda^2 \leq 6$	Stable $-\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3}$ Saddle Point $-\sqrt{6} < \lambda < -\sqrt{3}$ o $\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{6}$
(c.2)	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{2}{\sqrt{3}\lambda}$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4}}{\lambda}$	$\lambda^2 \geq 4$	Unstable $\frac{19}{4} < \lambda^2 \leq \approx 4.75$ Saddle Point $4 \leq \lambda^2 < \frac{19}{4}$ Spiral Stable $3\lambda^2 > 16$
(d)	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\lambda}$	0	$\lambda \neq 0$	Stable $-2\sqrt{\frac{6}{7}} \leq \lambda \leq -\sqrt{3}$ o $\sqrt{3} \leq \lambda \leq 2\sqrt{\frac{6}{7}}$ Spiral Stable $\lambda > \sqrt{3}$

**Tabla D.3:** Tabla de estabilidad de los puntos fijos.

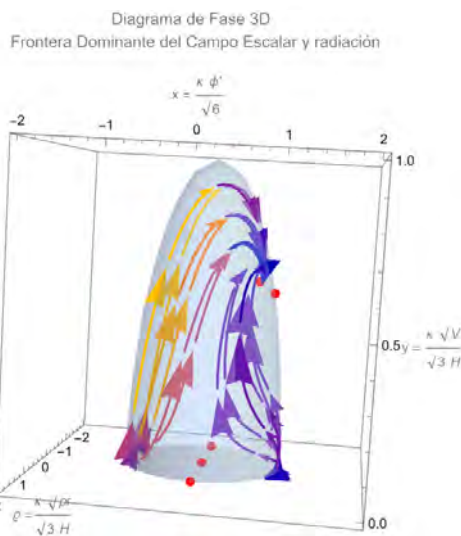
### Parámetros Cosmológicos

Punto	$\Omega_\phi$	$\Omega_m$	$\Omega_r$	$\gamma_\phi$	$w_{\text{eff}}$
(a)	0	1	0	-	0
(b.1)	1	0	0	2	1
(b.2)	1	0	0	2	1
(r.1)	0	0	1	-	$\frac{1}{3}$
(r.2)	0	0	1	-	$\frac{1}{3}$
(c.1)	1	0	0	$\frac{\lambda^2}{3}$	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$
(c.2)	$\frac{4}{\lambda^2}$	0	$1 - \frac{4}{\lambda^2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{3}{\lambda^2}$	$1 - \frac{3}{\lambda^2}$	0	1	0

**Tabla D.4:** Tabla de los parámetros cosmológicas de los puntos fijos.

## D.5.4 Interpretación para $\lambda = 2$

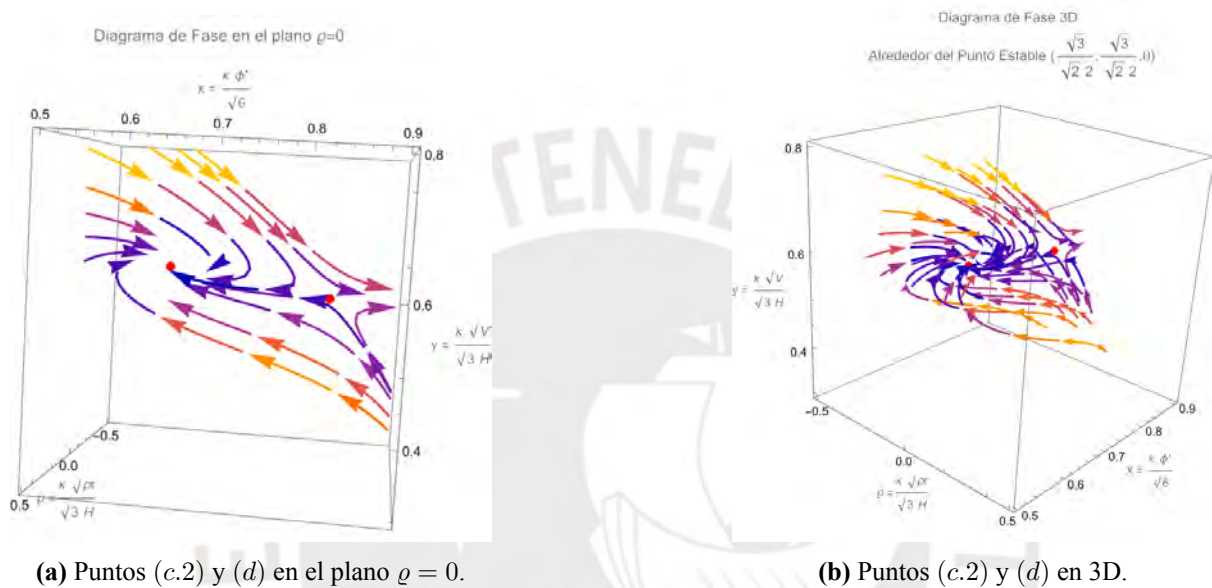
Buscamos un modelo que nos describa la evolución post-inflacionaria pasando por diferentes etapas de dominancia, empezando por radiación, luego materia y finalmente energía oscura. Exploraremos el caso  $\lambda = 2$ , mediante la Tabla (D.3) podemos determinar qué estabilidad tendrá cada punto fijo y cuales serán sus propiedades cosmológicas (Tabla D.4). Para cada punto fijo, podemos analizar la componente dominante o si el sistema presenta expansión acelerada ( $w_{eff} < -\frac{1}{3}$ ).



**Figura D.3:** Diagrama de fase con frontera dominante de campo escalar y radiación para  $\lambda = 2$ .

En el punto  $(0, 0, 0)$  obtenemos una estabilidad tipo *saddle point*, siendo un punto de materia ordinaria ( $\Omega_m = 1$ ). Además, no encontramos expansión acelerada dado que el valor del  $w_{eff} = 0$  y no cumple con la condición de expansión. Para los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(-1, 0, 0)$  obtenemos una tipo de estabilidad totalmente inestable, siendo además puntos con puro campo escalar ( $\Omega_\phi = 1$ ). Tampoco encontramos expansión acelerada en estos puntos, ya que  $w_{eff} = 1$  en ambos casos. En el caso de los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$  siempre serán punto de tipo *saddle point*, siendo puntos netamente de radiación ( $\Omega_r = 1$ ). Estos puntos no tendrán expansión acelerada dado que  $w_{eff} = \frac{1}{3}$ . Para  $\lambda = 2$ , el punto crítico (c.1) coincide con (c.2), por lo que ambos tienen la misma estabilidad. El punto (c.2) tiene estabilidad tipo *saddle point*, con dominancia del campo escalar. No obtenemos un valor de expansión acelerada en este punto crítico, ya que  $w_{eff} = \frac{1}{3}$ , generando una evolución de escalamiento *scaling* entre radiación y campo escalar. Por último tenemos el punto (d), obtenemos estabilidad de tipo *spiral stable*

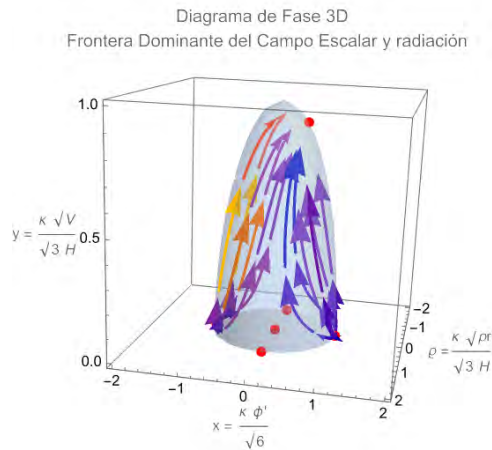
(Tabla D.3). En este caso tenemos un punto con el 75% de campo escalar y 25% de materia ordinaria ( $\Omega_\phi = \frac{3}{4}, \Omega_m = \frac{1}{4}$ ). El modelo nos arroja que el punto a donde se estabiliza el universo será una región que domina el campo escalar en ausencia de radiación. Sin embargo, este modelo tampoco explica la expansión acelerada en el punto (d), debido a que su  $w_{eff}$  nunca es menor a  $-\frac{1}{3}$ . A continuación se presenta la evolución de las líneas de flujo alrededor de los puntos (c.2) y (d).



**Figura D.4:** Puntos (c.2) y (d): (a) en el plano  $\rho = 0$  y (b) en 3D.

### D.5.5 Interpretación para $\lambda = 1$

Si buscamos algún punto que nos explique la expansión acelerada, entonces debemos fijarnos en el punto c.1. Debido a que el valor de  $w_{eff}$  resultante puede tomar varios valores dependiendo de  $\lambda$ . Escogemos el caso  $\lambda = 1$ , pues cumple con la condición de expansión acelerada  $w_{eff} = -\frac{2}{3}$ . A continuación se muestra el espacio de fase del sistema dinámico:



**Figura D.5:** Diagrama de fase con frontera dominante de campo escalar y radiación para  $\lambda = 1$ .

Podemos interpretar este resultado como una serie de etapas de transición en el universo: primero domina una época de radiación pura ( $r.1, r.2$ ), luego domina la materia bariónica ( $a$ ), y finalmente el universo tiende hacia un estado de campo escalar puro (energía oscura), que a su vez genera una expansión acelerada. Este resultado es tentador, puesto que si cumple la expansión acelerada y la dominancia de energía oscura. Sin embargo, para una fiabilidad del modelo más rigurosa, se deben obtener gráficas de las curvas de evolución y registrar los valores en la época actual de la densidad relativa de campo escalar y su ecuación de estado. Este análisis se presentará en el modelo  $f(Q, \phi)$  junto a gráficas de contorno que aseguren confiabilidad frente a la data observacional.

# Apéndice E

## Capítulo 6 - Dinámica cosmológica $f(Q, \phi)$ con interacción y campo escalar dilatónico no canónico

### E.1 Teoría *scaling* para un modelo $p(X, \phi)$

Consideramos la siguiente acción en una teoría de gravedad teleparalela simétrica (STTEGR) o de no-metricidad con un campo escalar cuya Lagrangiana es una función general del término cinético  $X$  y del campo escalar  $\phi$ . Los cálculos en este Apéndice (E.1) fueron guiados por el trabajo realizado en (Piazza y Tsujikawa, 2004, p. 5).

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{-1}{2\kappa^2} Q + p(X, \phi) \right] + S_m[\phi, g_{\mu\nu}] \quad (\text{E.1})$$

Donde  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ . Además, la acción del sector de materia depende de la métrica y está acoplado al campo escalar, específicamente a través de una constante de acoplamiento  $\sigma$  que satisface la siguiente relación:

$$\frac{\delta S_m}{\delta \phi} = -\sqrt{-g} \sigma \quad (\text{E.2})$$

El tensor de energía-momento del campo escalar de la acción es:

$$T_{\mu\nu}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{E.3})$$

Donde  $S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} p(X, \phi)$ . Dado que la función Lagrangiana  $p$  depende de  $X$  y  $\phi$ , el tensor de energía-momento es el siguiente:

$$T_{\mu\nu}^\phi = p g_{\mu\nu} + p_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad p(X, \phi) \equiv p_{\text{DE}}(X, \phi)^1 \quad (\text{E.4})$$

<sup>1</sup>En este modelo, describimos la energía oscura con un campo escalar  $\phi$ . Por esta razón, definiremos las variables o parámetros de la energía oscura como:  $p, \rho, \omega_\phi, \Omega_\phi$ .

Sea la ecuación del tensor de energía-momento de un fluido perfecto con presión  $p$  y densidad  $\rho$ :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} p, \quad u_\mu = \frac{\partial_\mu \phi}{\sqrt{2X}} \quad (\text{E.5})$$

Comparando los términos temporales de ambos tensores de energía-momento, hallamos la relación para la densidad del campo escalar.

$$\rho = 2X p_{,x} - p, \quad p_{,x} = \frac{\partial p}{\partial X} \quad (\text{E.6})$$

Consideramos un universo con un espacio-tiempo de fondo de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) plano con factor de escala  $a(t)$ .

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{E.7})$$

La ecuación de Klein–Gordon que resulta de variar la acción (E.1) con respecto a  $\phi$  se muestra como:

$$\ddot{\phi} (p_{,x} + \dot{\phi}^2 p_{,xx}) + 3H(p_{,x} \dot{\phi}) + 2X p_{,x\phi} - p_{,\phi} = -\sigma \quad (\text{E.8})$$

Donde,

$$p_{,xx} = \frac{\partial^2 p}{\partial X^2}, \quad p_{,x\phi} = \frac{\partial^2 p}{\partial X \partial \phi} \quad (\text{E.9})$$

Es posible reducir la Ec. (E.8) en la forma de una ecuación de continuidad para  $\rho$ . Si derivamos la ecuación de la densidad (E.6) y luego reconocemos que:  $p_X \dot{\phi}^2 = (p + \rho)$ , a partir de la misma ecuación, obtenemos:

$$\frac{d\rho}{dN} + 3(1 + \omega_\phi)\rho = -q\rho_m \frac{d\phi}{dN}, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{d\rho_m}{dN} + 3(1 + \omega_m)\rho_m = q\rho_m \frac{d\phi}{dN}, \quad (\text{E.11})$$

Donde,

$$q(\phi) \equiv \frac{\sigma}{\rho_m}, \quad N \equiv \ln(a), \quad \omega_\phi \equiv \frac{p}{\rho} \quad (\text{E.12})$$

Aparece un término no nulo en el lado derecho de las ecuaciones de continuidad como consecuencia del acoplamiento entre la materia y el campo escalar. La segunda ecuación, que muestra la evolución de la densidad de la materia, surge como consecuencia de la conservación del tensor de energía-momento y de la relación (E.2).

$$\nabla T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla T_{\mu\nu}^\phi = -\nabla T_{\mu\nu}^m \quad (\text{E.13})$$

Dado que buscamos una solución para  $p(X, \phi)$  para tiempos lejanos, donde los parámetros  $\omega_\phi$  y  $\Omega_\phi$  sean constantes y exista un incremento o decremento proporcional entre las densidades de materia y de campo escalar, imponemos la siguiente relación para soluciones de tipo *scaling*.

$$\frac{d \log \rho}{dN} = \frac{d \log \rho_m}{dN} = \alpha \quad (\text{E.14})$$

Junto con las ecuaciones de  $\rho$  y  $\rho_m$ , podemos determinar una expresión para la tasa de cambio del campo escalar en el  $N$ -éfold. Si consideramos que  $q$  es constante durante el régimen de *scaling*, obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{3\Omega_\phi}{q}(\omega_m - \omega_\phi) = \mathcal{K} \quad (\text{E.15})$$

Si volvemos a la ecuación de  $\rho_m$  y sustituimos el resultado, encontramos una expresión para la constante  $\alpha$ .

$$\frac{d \log \rho}{dN} = \frac{d \log \rho_m}{dN} = -3(1 + \omega_s), \quad \omega_s = \omega_m + \Omega_\phi(\omega_\phi - \omega_m) \quad (\text{E.16})$$

El parámetro  $\omega_s$  es la ecuación de estado efectiva durante el régimen de *scaling*. Este resultado significa que tanto  $\rho$  como  $\rho_m$  evolucionan exponencialmente en la forma:  $\rho_0 e^{-3(1+\omega_s)N}$ . Además, a partir de la primera ecuación de Friedmann se sabe que  $H^2$  es proporcional a  $\rho + \rho_m$ , por lo que  $H^2$  también evoluciona exponencialmente. Finalmente, dado que  $2X = H^2 \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2$  es proporcional a  $H^2$ , entonces también evolucionará exponencialmente. Lo que resulta en las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dX}{dN} = -3(1 + \omega_s)X, \quad \frac{d\rho}{dN} = -3(1 + \omega_s)\rho, \quad \frac{dp}{dN} = -3(1 + \omega_s)p \quad (\text{E.17})$$

El objetivo principal es encontrar una función general para  $p(X, \phi)$ . Por esta razón, necesitamos una ecuación maestra que nos permita hallarla. Dado que  $p$  depende de  $X$  y  $\phi$ , podemos expresar  $\frac{d \log p}{dN}$  como:

$$\frac{d \log p}{dN} = \frac{\partial \log p}{\partial \log X} \frac{dX}{dN} + \frac{\partial \log p}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.18})$$

Considerando  $\frac{d\phi}{dN} = \mathcal{K}$  y las ecuaciones de evolución (E.17), obtenemos:

$$\frac{\partial \log p}{\partial \log X} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log p}{\partial \phi} = 1 \quad (\text{E.19})$$

Donde  $\frac{\mathcal{K}}{-3(1+\omega_s)} = \frac{1}{\lambda}$ . Si usamos la expresión (E.15) y la definición de  $\omega_s$ , hallamos:

$$\lambda = q \frac{1 + \omega_m - \Omega_\phi(\omega_m - \omega_\phi)}{\Omega_\phi(\omega_m - \omega_\phi)} \quad (\text{E.20})$$

Al resolver la ecuación funcional para  $p(X, \phi)$  encontramos el siguiente resultado para una solución de tipo *scaling*.

$$p(X, \phi) = Xg(Xe^{\lambda\phi}) \quad (\text{E.21})$$

## E.2 Teoría *scaling* para un modelo $p_1(X, \phi) + p_2(Q, \phi)$

Consideramos la siguiente acción en una teoría de no-metricidad con un campo escalar cuya Lagrangiana se separa en dos funciones generales. El primer término contiene el término cinético  $X$  y el campo escalar  $\phi$ , mientras que el segundo término contiene acoplamiento entre la no-metricidad escalar y el mismo campo escalar  $\phi$ .

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{-1}{2\kappa^2} Q + p_1(X, \phi) + p_2(Q, \phi) \right] + S_m[\phi, g_{\mu\nu}] \quad (\text{E.22})$$

Donde  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ . Además, la acción del sector de materia depende de la métrica y del campo escalar, específicamente a través de una constante de acoplamiento  $\sigma$  que satisface la siguiente relación:

$$\frac{\delta S_m}{\delta\phi} = -\sqrt{-g}\sigma \quad (\text{E.23})$$

El tensor de energía-momento del campo escalar de la Acción es:

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{E.24})$$

$$\text{Donde } \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(\sqrt{-g} p_1(X, \phi))}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Para el sector de gravedad modificada, el tensor de energía-momento se expresa como:

$$\Theta^{(Q)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_Q}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{E.25})$$

$$\text{Donde } \frac{\delta S_Q}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(\sqrt{-g} p_2(Q, \phi))}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Se presenta el tensor energía-momento del sector de energía oscura:

$$T^{\text{DE}}_{\mu\nu} = T^{(\phi)}_{\mu\nu} + \Theta^{(Q)}_{\mu\nu}$$

$$T^{\text{DE}}_{\mu\nu} = p_1 g_{\mu\nu} + p_{1,X} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi + p_2 g_{\mu\nu} - 2p_{2,Q} S_{\mu\nu} + \frac{4}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha(\sqrt{-g} p_{2,Q}) P^\alpha_{\mu\nu} \quad (\text{E.26})$$

$$\text{Donde } \frac{\delta Q}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv S_{\mu\nu}.$$

<sup>2</sup>En el apéndice (E.7) calculamos la variación completa del escalar de no-metricidad que nos lleva al tensor  $S_{\mu\nu}$  presentado.

Sea la ecuación del tensor de energía-momento de un fluido perfecto con presión  $p$  y densidad  $\rho$ :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu} p, \quad u_\mu = \frac{\partial_\mu \phi}{\sqrt{2X}} \quad (\text{E.27})$$

Comparando los términos temporales de ambos tensores de energía-momento, encontramos la relación de la densidad de energía oscura.

$$\rho_{\text{DE}} = 2X p_{1,X} + 2Q p_{2,Q} - p_1 - p_2 \quad (\text{E.28})$$

Además, la presión del sector de la energía oscura:

$$p_{\text{DE}} = p_1 + p_2 - 2Q p_{2,Q} - \frac{1}{3} Q' (p_{2,Q} + 2Q p_{2,QQ}) - \frac{2}{3} Q p_{2,Q\phi} \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.29})$$

Donde,

$$p_{2,QQ} = \frac{\partial^2 p_2}{\partial Q^2}, \quad p_{2,Q\phi} = \frac{\partial^2 p_2}{\partial Q \partial \phi}, \quad Q' \equiv \frac{dQ(N)}{dN} \quad (\text{E.30})$$

Por lo tanto,

$$p_1 + p_2 = p_{\text{DE}} + 2Q p_{2,Q} + \frac{1}{3} Q' (p_{2,Q} + 2Q p_{2,QQ}) + \frac{2}{3} Q p_{2,Q\phi} \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.31})$$

Consideramos un universo con un espacio-tiempo de fondo de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) plano con factor de escala  $a(t)$ .

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{E.32})$$

La ecuación de Klein–Gordon que resulta de variar la acción (E.1) con respecto a  $\phi$  se muestra como:

$$\ddot{\phi} (p_{1,X} + \dot{\phi}^2 p_{1,XX}) + 3H (p_{1,X} \dot{\phi}) + 2X p_{1,X\phi} - p_{1,\phi} - p_{2,\phi} = -\sigma \quad (\text{E.33})$$

Donde,

$$p_{1,XX} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial X^2}, \quad p_{1,X\phi} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial X \partial \phi} \quad (\text{E.34})$$

Análogamente al caso  $p(X, \phi)$ , es posible comprimir la anterior ecuación en la forma de una ecuación de continuidad para  $\rho_{\text{DE}}$ . Si derivamos  $\rho_{\text{DE}}$  respecto del  $N$  e-fold (E.28); reconocemos que:  $p_{1,X} \dot{\phi}^2 = \rho_{\text{DE}} + (p_1 + p_2) - 2p_{2,Q} Q$ ; y, usamos la Ec. (E.31), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\text{DE}}}{dN} - Q' (p_{2,Q} + 2Q p_{2,QQ}) - 2Q p_{2,Q\phi} \frac{d\phi}{dN} + 3(\rho_{\text{DE}} + [p_1 + p_2] - 2p_{2,Q} Q) &= -\sigma \frac{d\phi}{dN} \\ \frac{d\rho_{\text{DE}}}{dN} - Q' (p_{2,Q} + 2Q p_{2,QQ}) - 2Q p_{2,Q\phi} \frac{d\phi}{dN} \\ + 3 \left( \rho_{\text{DE}} + \left[ p_{\text{DE}} + 2Q p_{2,Q} + \frac{1}{3} Q' (p_{2,Q} + 2Q p_{2,QQ}) + \frac{2}{3} Q p_{2,Q\phi} \frac{d\phi}{dN} \right] - 2Q p_{2,Q} \right) &= -\sigma \frac{d\phi}{dN} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{d\rho_{\text{DE}}}{dN} + 3(\rho_{\text{DE}} + p_{\text{DE}}) = -\sigma \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.35})$$

Por lo tanto, obtenemos para la conservación del tensor energía-momento.

$$\frac{d\rho_{\text{DE}}}{dN} + 3(1 + \omega_{\text{DE}})\rho_{\text{DE}} = -q\rho_m \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.36})$$

$$\frac{d\rho_m}{dN} + 3(1 + \omega_m)\rho_m = +q\rho_m \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.37})$$

Donde,

$$q \equiv \frac{\sigma}{\rho_m}, \quad N \equiv \ln(a), \quad \omega_{\text{DE}} = \frac{p_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}}}, \quad Q \equiv Q(N)$$

Hemos encontrado un sistema dinámico análogo al caso ya estudiado  $p(X, \phi)$ , con la diferencia principal de que ahora la densidad de la energía oscura  $\rho_{\text{DE}}$  depende de  $X, \phi, Q$  y la presión de la energía oscura  $p_{\text{DE}}$  depende de  $X, \phi, Q, \dot{H}$ . La presión depende de  $\dot{H}$  porque en la Ec. (E.29) encontramos el término  $Q'$ ; este término usualmente depende de  $\dot{H}$ . De manera análoga al caso previo, aparece un término no nulo en el lado derecho de las ecuaciones de continuidad como consecuencia del acoplamiento total entre la materia y el campo escalar. La segunda ecuación, que muestra la evolución de la densidad de la materia, surge como consecuencia de la conservación del tensor de energía-momento y de la relación (E.23).

$$\nabla T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla T^{\text{DE}}_{\mu\nu} = -\nabla T^{\text{Mat}}_{\mu\nu} \quad (\text{E.38})$$

Dado que buscamos una solución para  $p_{\text{DE}}$  donde los parámetros  $\omega_{\text{DE}}$  y  $\Omega_{\text{DE}}$  sean constantes y exista un incremento o decremento proporcional entre las densidades de materia y de campo escalar. Por esta razón, imponemos la siguiente relación para soluciones de tipo *scaling*.

$$\frac{d \log \rho_{\text{DE}}}{dN} = \frac{d \log \rho_m}{dN} = \alpha \quad (\text{E.39})$$

Junto con las ecuaciones de  $\rho_{\text{DE}}$  y  $\rho_m$  podemos determinar una expresión para la tasa de cambio del campo escalar en el  $N$  e-fold. En primer lugar, usando la condición de *scaling*.

$$\frac{d \log \rho_{\text{DE}}}{dN} + 3(1 + \omega_{\text{DE}}) = -q \frac{\rho_m}{\rho_{\text{DE}}} \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.40})$$

$$\frac{d \log \rho_m}{dN} + 3(1 + \omega_m) = +q \frac{d\phi}{dN} \quad (\text{E.41})$$

Por lo tanto,

$$\alpha = -3(1 + \omega_{\text{DE}}) - q \frac{\rho_m}{\rho_{\text{DE}}} \frac{d\phi}{dN}, \quad (\text{E.42})$$

$$\alpha = -3(1 + \omega_m) + q \frac{d\phi}{dN}. \quad (\text{E.43})$$

Igualando estas 2 ecuaciones y factorizando  $\frac{d\phi}{dN}$ , obtenemos:

$$-\left(\frac{\rho_{\text{DE}} + \rho_m}{\rho_{\text{DE}}}\right) q \frac{d\phi}{dN} = 3[\omega_{\text{DE}} - \omega_m]$$

En consecuencia,

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{3\Omega_{\text{DE}}}{q} (w_m - w_{\text{DE}}) = \mathcal{K} \quad (\text{E.44})$$

Donde<sup>3</sup>,

$$\Omega_{\text{DE}} \equiv \frac{\rho_{\text{DE}}}{\rho_{\text{DE}} + \rho_m} \quad (\text{E.45})$$

Podemos hallar una expresión para la constante  $\alpha$  si usamos el resultado en la Ec. (E.44) dentro de la Ec. (E.43).

$$\frac{d \log \rho_{\text{DE}}}{dN} = \frac{d \log \rho_m}{dN} = -3(1 + \omega_s), \quad \omega_s = \omega_m + \Omega_{\text{DE}}(\omega_{\text{DE}} - \omega_m)$$

De este modo, tanto  $\rho_{\text{DE}}$  como  $\rho_m$  evolucionan exponencialmente. Además, a partir de la primera ecuación de Friedmann se sabe que  $H^2$  es proporcional a  $\rho_{\text{DE}} + \rho_m$ , por lo que  $H^2$  también evoluciona exponencialmente con exponente  $-3(1 + \omega_s)N$ . Finalmente, dado que  $2X = H^2 \left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2$  es proporcional a  $H^2$ , entonces también evolucionará exponencialmente. Resultando en las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dX}{dN} = -3(1 + \omega_s)X, \quad \frac{d\rho_{\text{DE}}}{dN} = -3(1 + \omega_s)\rho_{\text{DE}}, \quad \frac{dp_{\text{DE}}}{dN} = -3(1 + \omega_s)p_{\text{DE}} \quad (\text{E.46})$$

Donde,

$$\rho_{\text{DE}} \equiv \rho_{\text{DE}}(X, \phi, Q) \quad (\text{E.47})$$

$$p_{\text{DE}} \equiv p_{\text{DE}}(X, \phi, Q, \dot{H}) \quad (\text{E.48})$$

<sup>3</sup>El término  $\Omega_{\text{DE}}$  no es exactamente  $\Omega_\phi$ . Debido a que  $\rho$  depende de  $X$ ,  $\phi$  y  $Q$ . El sector de energía oscura se describe mediante un campo escalar y una modificación de la geometría o gravedad.

Como se mencionó antes, la dependencia en  $\dot{H}$  está caracterizada internamente por la variable  $Q'$ . Dentro de una teoría de no-metricidad con conexión simétrica, el escalar de No-Metricidad se define como:

$$Q \equiv 6H^2 \quad (\text{E.49})$$

En este caso  $Q$  es proporcional a  $H^2$  y, de manera similar,  $\dot{H} \propto \rho_{\text{DE}} + \rho_m \propto H^2$ , por lo que la evolución de  $Q$  y  $\dot{H}$  puede escribirse como:

$$\frac{dQ}{dN} = -3(1 + \omega_s)Q, \quad \frac{d\dot{H}}{dN} = -3(1 + \omega_s)\dot{H} \quad (\text{E.50})$$

Por lo tanto la presión del sector de energía oscura cumple:

$$p_{\text{DE}} \equiv p_{\text{DE}}(X, \phi, Q, \dot{H}) \quad (\text{E.51})$$

Podemos obtener una ecuación maestra que nos permita restringir la presión de la Energía Oscura. En primer lugar, podemos expresar  $\frac{d \log p_{\text{DE}}}{dN}$  como sigue:

$$\frac{d \log p_{\text{DE}}}{dN} = \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log X} \frac{d \log X}{dN} + \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log Q} \frac{d \log Q}{dN} + \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log \dot{H}} \frac{d \log \dot{H}}{dN} + \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \phi} \frac{d \phi}{dN} \quad (\text{E.52})$$

Considerando  $\frac{d\phi}{dN} = \mathcal{K}$ ,  $\frac{\mathcal{K}}{-3(1+\omega_s)} = \frac{1}{\lambda}$ , y las ecuaciones de evolución Ecs. (E.46; E.50), obtenemos:

$$\frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log X} + \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log Q} + \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \log \dot{H}} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log p_{\text{DE}}}{\partial \phi} = 1, \quad (\text{E.53})$$

Donde,

$$\lambda = q \frac{1 + \omega_m - \Omega_{\text{DE}}(\omega_m - \omega_{\text{DE}})}{\Omega_{\text{DE}}(\omega_m - \omega_{\text{DE}})} \quad (\text{E.54})$$

Cuya solución está dada por:

$$p_{\text{DE}}(X, \phi, Q, \dot{H}) = (XQ\dot{H})^{1/3} g(Xe^{\lambda\phi}, Qe^{\lambda\phi}, \dot{H}e^{\lambda\phi}) \quad (\text{E.55})$$

Dado que  $Q$  es proporcional a  $H^2$ , entonces podemos reescribirlo como:

$$p_{\text{DE}}(X, \phi, H^2, \dot{H}) = (XH^2\dot{H})^{1/3} g(Xe^{\lambda\phi}, H^2e^{\lambda\phi}, \dot{H}e^{\lambda\phi}) \quad (\text{E.56})$$

Con este resultado, proponemos un *ansatz* para la presión; y, comparamos con la presión que se obtiene de un modelo general en no-metricidad con la siguiente forma del lagrangeano del sector de energía oscura:

$$\mathcal{L}_{\text{DE}} = \alpha X + F_2(\phi)X^n - V(\phi) - F_1(\phi)G(Q)$$

$$p_1(X, \phi) = \alpha X + F_2(\phi)X^n - V(\phi), \quad p_2(Q, \phi) = -F_1(\phi)G(Q)$$

De esta manera, restringimos el modelo con el fin de favorecer la existencia de un mayor número de puntos *scaling* en el análisis de sistemas dinámicos.

### E.3 Propuesta de presión del *scaling* en un modelo sin campo escalar fantasma dilatónico

Proponemos la siguiente función para  $g(Xe^{\lambda\phi}, H^2e^{\lambda\phi}, \dot{H}e^{\lambda\phi})$ :

$$g = \frac{X^{2/3}}{(H^2\dot{H})^{1/3}} - \frac{V_0}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} + \frac{(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^{1+s}}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} \\ + \frac{\frac{2}{3}(1+s)(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^s(\dot{H}e^{\lambda\phi})}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} + \frac{2\lambda s F_0(1+s)(H^2e^{\lambda\phi})^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2}(Xe^{\lambda\phi})^{1/2}}{3(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}}$$

Entonces,

$$p_{\text{DE}}(X, \phi, Q, \dot{H}) = (XH^2\dot{H})^{1/3} g(Xe^{\lambda\phi}, H^2e^{\lambda\phi}, \dot{H}e^{\lambda\phi}) \\ = (XH^2\dot{H})^{1/3} \left[ \frac{X^{2/3}}{(H^2\dot{H})^{1/3}} - \frac{V_0}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} + \frac{(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^{1+s}}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} \right. \\ \left. + \frac{\frac{2}{3}(1+s)(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^s(\dot{H}e^{\lambda\phi})}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} + \frac{2\lambda s F_0(1+s)(H^2e^{\lambda\phi})^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2}X^{1/2}e^{\lambda\phi/2}}{3(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}} \right] \\ = \underbrace{(XH^2\dot{H})^{1/3} \frac{X^{2/3}}{(H^2\dot{H})^{1/3}}}_X - \underbrace{(XH^2\dot{H})^{1/3} \frac{V_0}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}}}_{V_0e^{-\lambda\phi}} \\ + \underbrace{(XH^2\dot{H})^{1/3} \frac{(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^{1+s}}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}}}_{(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^{1+s}e^{-\lambda\phi}} \\ + \underbrace{(XH^2\dot{H})^{1/3} \frac{\frac{2}{3}(1+s)(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^s(\dot{H}e^{\lambda\phi})}{(XH^2\dot{H})^{1/3}e^{\lambda\phi}}}_{\frac{2}{3}(1+s)(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^s\dot{H}} \\ + \frac{2\lambda F_0 s(1+s)(H^2e^{\lambda\phi})^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2}X^{1/2}e^{\lambda\phi/2}}{3e^{\lambda\phi}} \frac{(XH^2\dot{H})^{1/3}}{(XH^2\dot{H})^{1/3}} \\ = X - V_0e^{-\lambda\phi} + (1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^{1+s}e^{-\lambda\phi} + \frac{2}{3}(1+s)(1+2s)F_0(H^2e^{\lambda\phi})^s\dot{H} \\ + \frac{2}{3}\lambda s F_0e^{\lambda s\phi}(1+s)\sqrt{2X}(H)^{2s+1}$$

Definimos:

$$F \equiv F_0e^{\lambda s\phi}, \quad V \equiv V_0e^{-\lambda\phi}, \quad X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$$

Finalmente,

$$p_{\text{DE}} = X - V + (1 + 2s) F (H^2)^{1+s} + \frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) H^{2s} \dot{H} F + \frac{2}{3} F_{\phi} (1 + s) \dot{\phi} H^{2s+1}$$

## E.4 Propuesta de presión del *scaling* para un modelo con campo escalar fantasma dilatónico

Ahora, consideramos una generalización del término cinético:

$$g = \sum_n \alpha_n \frac{(X e^{\lambda\phi})^n}{(X H^2 \dot{H})^{1/3} e^{\lambda\phi}} - \frac{V_0}{(X H^2 \dot{H})^{1/3} e^{\lambda\phi}} + \frac{(1 + 2s) F_{1_0} (H^2 e^{\lambda\phi})^{1+s}}{(X H^2 \dot{H})^{1/3} e^{\lambda\phi}} \\ + \frac{\frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) F_{1_0} (H^2 e^{\lambda\phi})^s (\dot{H} e^{\lambda\phi})}{(X H^2 \dot{H})^{1/3} e^{\lambda\phi}} + \frac{2\lambda s F_{1_0} (1 + s) (H^2 e^{\lambda\phi})^{s+\frac{1}{2}} \sqrt{2} (X e^{\lambda\phi})^{1/2}}{3 (X H^2 \dot{H})^{1/3} e^{\lambda\phi}}$$

Por lo tanto, en  $p = (X H^2 \dot{H})^{1/3} g$ :

$$p_{\text{DE}} = \sum_n \alpha_n (X^n e^{\lambda(n-1)\phi}) - V + (1 + 2s) F_1 (H^2)^{1+s} + \frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) H^{2s} \dot{H} F_1 \\ + \frac{2}{3} F_{1,\phi} (1 + s) \dot{\phi} H^{2s+1}$$

Donde la expresión de  $F_1$  se obtuvo en el proceso previo.

$$F_1 \equiv F_{1_0} e^{\lambda s \phi}$$

En la suma, consideraremos solo dos términos: el primero con  $n = 1$  y el segundo, que depende de  $n \geq 2$ , con una constante  $\alpha_n = F_{2_0}$ <sup>4</sup>:

$$p_{\text{DE}} = \alpha X + X^n F_{2_0} e^{\lambda(n-1)\phi} - V + (1 + 2s) F_1 (H^2)^{1+s} + \frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) H^{2s} \dot{H} F_1 \\ + \frac{2}{3} F_{1,\phi} (1 + s) \dot{\phi} H^{2s+1}$$

Por lo tanto, es natural definir:

$$F_1 \equiv F_{1_0} e^{\lambda s \phi}, \quad F_2 \equiv F_{2_0} e^{\lambda(n-1)\phi}, \quad V \equiv V_0 e^{-\lambda\phi}, \quad X = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$$

<sup>4</sup>Nótese que con  $n = 2$  y  $F_1 = 0$  se obtiene el caso de la referencia (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025):

$$p_{\text{DE}} = \alpha X + X^2 F_{2_0} e^{\lambda\phi} - V$$

Comparando esto con las variables adimensionales:

$$\sigma_1 = \frac{-F_{1,\phi}}{kF_1}, \quad \sigma_2 = \frac{F_{2,\phi}}{kF_2} \quad (\text{E.57})$$

Requerimos que  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  sean constantes. Por lo tanto:

$$F_1 = F_{1_0} e^{-\sigma_1 k \phi}, \quad F_2 = F_{2_0} e^{\sigma_2 k \phi} \quad (\text{E.58})$$

Finalmente, encontramos las relaciones en *scaling* para los parámetros sigma con  $k = 1$ :

$$\sigma_1 = -\lambda s, \quad \sigma_2 = \lambda(n - 1) \quad (\text{E.59})$$

El resultado de la presión del sector de energía oscura en el *scaling* es:

$$p_{\text{DE}} = \alpha X + F_2 X^n - V + (1 + 2s) F_1 (H^2)^{1+s} + \frac{2}{3} (1 + s)(1 + 2s) H^{2s} \dot{H} F_1 + \frac{2}{3} F_{1,\phi} (1 + s) \dot{\phi} H^{2s+1} \quad (\text{E.60})$$

## E.5 Condiciones adicionales

Por la Ec. (E.54), obtuvimos:

$$\lambda = q \frac{1 + \omega_m - \Omega_{\text{DE}}(\omega_m - \omega_{\text{DE}})}{\Omega_{\text{DE}}(\omega_m - \omega_{\text{DE}})} \quad (\text{E.61})$$

Donde,

$$C = \beta \kappa \rho_m \dot{\phi}, \quad q = \beta \kappa \quad (\text{E.62})$$

Si consideramos del modelo  $\Lambda$ CDM:  $\omega_m = 0$ ,  $\Omega_{\text{DE}} = 0.68$  (Planck Collaboration, 2020) y  $\omega_{\text{DE}} = -1$ , obtenemos:

$$\lambda = \frac{0.32}{0.68} \beta \kappa \quad (\text{E.63})$$

Para evitarnos complicaciones en el proceso numérico al restringir el modelo con esta condición, debemos considerar unidades de Planck reducidas  $\kappa^2 = 8\pi G = 1$ . Si mantenemos el valor de  $\kappa^2 = 8\pi G = 1.6861 \times 10^{-37} \text{ GeV}^{-2}$  ( $\hbar = c = 1$ ) (Navas y (Particle Data Group), 2024), el sistema dinámico poseerá órdenes de  $\approx 10^{-37}$ , lo cual conllevará a complicaciones computacionales.

## E.6 Restricción para $G(Q)$ bajo el *scaling*

Modelo general (E.22) bajo:

$$p_1(X, \phi) = \alpha X + F_2(\phi) X^n - V(\phi), \quad p_2(Q, \phi) = -F_1(\phi) G(Q)$$

La presión general:

$$p_{\text{DE General}} = \alpha X + F_2 X^n - V - (G - 2Q G_{,Q}) F_1 + 4(2Q G_{,QQ} + G_{,Q}) F_1 \dot{H} + 4HG_{,Q} F_{1,\phi} \dot{\phi}$$

El resultado de la presión que se obtuvo en el *scaling*, Ec. (E.60):

$$p_{\text{DE Scaling}} = \alpha X + F_2 X^n - V + (1+2s) F_1 (H^2)^{1+s} + \frac{2}{3} (1+s)(1+2s) H^{2s} \dot{H} F_1 + \frac{2}{3} F_{1,\phi} (1+s) \dot{\phi} H^{2s+1}$$

Comparando ambos resultados, las ecuaciones diferenciales a resolver son:

1.  $-G + 2QG' = (1 + 2s)(H^2)^{1+s}$
2.  $4(2QG'' + G') = \frac{2}{3}(1 + s)(1 + 2s)H^{2s}$
3.  $4HG' = \frac{2}{3}(1 + s)H^{2s+1}$

Donde,

$$G' \equiv \frac{dG}{dQ} = G_{,Q}, \quad G'' \equiv \frac{d^2G}{dQ^2} = G_{,QQ}$$

### E.6.1 Parte 1: Ecuación (1)

$$-G + 2QG' = (1 + 2s)(H^2)^{1+s}, \quad Q \equiv 6H^2, \quad G' \equiv \frac{dG}{dQ}$$

Reescritura de la ecuación (1) en términos de  $Q$ :

$$-G + 2QG' = (1 + 2s) \left(\frac{Q}{6}\right)^{1+s} \implies G' - \frac{1}{2Q}G = \frac{1}{2} \frac{1 + 2s}{6^{1+s}} Q^s$$

Factor integrante:

$$G' + P(Q)G = R(Q), \quad P(Q) = -\frac{1}{2Q}, \quad R(Q) = \frac{1}{2} \frac{(1 + 2s)}{6^{1+s}} Q^s.$$

$$I = \exp\left(\int P(Q) dQ\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln Q\right) = Q^{-1/2}.$$

Producto derivada e integración:

$$\frac{d}{dQ}(IG) = IR(Q) = Q^{-1/2} \frac{1(1+2s)}{2 \cdot 6^{1+s}} Q^s = \frac{1(1+2s)}{2 \cdot 6^{1+s}} Q^{s-\frac{1}{2}},$$

$$IG = \frac{1(1+2s)}{2 \cdot 6^{1+s}} \frac{Q^{s+\frac{1}{2}}}{s+\frac{1}{2}} + C = \frac{Q^{s+\frac{1}{2}}}{6^{1+s}} + C, \quad (s \neq -\frac{1}{2}).$$

Solución general:

$$G(Q) = \frac{Q^{s+1}}{6^{1+s}} + C Q^{1/2} \quad (\text{E.64})$$

## E.6.2 Parte 2: Ecuación (2)

Reescritura de la ecuación (2) en términos de  $Q$ :

$$4(2Q G'' + G') = \frac{2}{3}(1+s)(1+2s) H^{2s} = \frac{2(1+s)(1+2s)}{3} \left(\frac{Q}{6}\right)^s,$$

$$\Rightarrow 2Q G'' + G' = \frac{(1+s)(1+2s)}{6^{s+1}} Q^s = B Q^s, \quad B = \frac{(1+s)(1+2s)}{6^{s+1}}$$

Definición  $u = G'(Q)$  y solución de la EDO de primer orden:

$$2Q u' + u = B Q^s, \quad u = G'(Q).$$

Por el método de factor integrante:

$$I = Q^{1/2}, \quad \frac{d}{dQ}(Iu) = Q^{1/2} B Q^s = B Q^{s+1/2}$$

Luego,

$$Q^{1/2} u = B \int Q^{s+1/2} dQ$$

$$u = \frac{B}{s+\frac{1}{2}} Q^s + C_1 Q^{-1/2}$$

Integración final para  $G(Q)$ .

$$G(Q) = \int u dQ$$

$$= \frac{B}{(s+\frac{1}{2})(s+1)} Q^{s+1} + 2C_1 Q^{1/2} + C_2$$

$$= \left(\frac{Q}{6}\right)^{s+1} + A Q^{1/2} + B_0.$$

**Solución general de la Parte 2**

$$G(Q) = \left(\frac{Q}{6}\right)^{s+1} + A Q^{1/2} + B_0. \quad (\text{E.65})$$

### E.6.3 Parte 3: Ecuación (3)

Derivación de  $G'$  a partir de la ecuación (3).

$$4H \frac{dG}{dQ} = \frac{2}{3}(1+s)H^{2s+1}$$

$$\frac{dG}{dQ} = \frac{\frac{2}{3}(1+s)H^{2s+1}}{4H} = \frac{1+s}{6}H^{2s} = \frac{1+s}{6^{s+1}}Q^s$$

Integrando:

$$G(Q) = \int \frac{dG}{dQ} dQ = \int \frac{1+s}{6^{s+1}} Q^s dQ$$

$$= \frac{Q^{s+1}}{6^{s+1}} + C$$

Por lo tanto, una propuesta para  $G(Q)$  que cumple las tres ecuaciones en el *scaling* es:

$$G(Q) = \left(\frac{Q}{6}\right)^{s+1}, \quad G(H) = H^{2s+2}. \quad (\text{E.66})$$

Este resultado motiva adoptar la misma forma funcional en otros marcos cuando se buscan soluciones de tipo *scaling*. En particular, en (Gonzalez-Espinoza y Otalora, 2021) se implementa esta elección para  $G(T)$  y se obtienen, efectivamente, puntos fijos con escalamiento.

Finalmente, este estudio del régimen *scaling* nos lleva a los siguientes resultados:

$$\sigma_1 = -\lambda s, \quad \sigma_2 = \lambda(n-1), \quad \lambda = \lambda_0 \beta, \quad \lambda_0 = \frac{0.32}{0.68}, \quad G(Q) = \left(\frac{Q}{6}\right)^{s+1} \quad (\text{E.67})$$

## E.7 Variación del escalar de no-metricidad $Q$

Recordemos del modelo (E.22):

$$\Theta_{\mu\nu}^Q = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_Q}{\delta g^{\mu\nu}} = p_2 g_{\mu\nu} - 2 p_{2,Q} \frac{\delta Q}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{E.68})$$

Para hallar el segundo término comenzamos definiendo el tensor de no-metricidad y sus trazas.

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \quad (\text{E.69})$$

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\mu}{}^\mu, \quad Q^\alpha = Q^\alpha{}_\mu{}^\mu \quad (\text{E.70})$$

$$\tilde{Q}_\alpha = Q_{\mu\alpha}{}^\mu, \quad \tilde{Q}^\alpha = Q_\mu{}^{\alpha\mu}$$

El “Superpotencial” de la teoría de no-metricidad se define como:

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}Q^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Q_{(\mu}{}^\alpha{}_{\nu)} + \frac{1}{4}(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)} \quad (\text{E.71})$$

Finalmente, el escalar de no-metricidad:

$$Q = -Q_{\alpha\mu\nu}P^{\alpha\mu\nu} \quad (\text{E.72})$$

Variando el escalar (ignorando términos de borde):

$$\begin{aligned} \delta Q = & - \left[ \partial_\alpha (P^{\alpha\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right] \delta g^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} Q_\alpha{}^{\rho\sigma} Q_{\beta\rho\sigma} \delta g^{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^{\beta\rho\sigma}) \delta g_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} Q_\alpha{}^{\rho\sigma} Q_{(\rho\beta\sigma)} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_{(\rho} Q^{\beta\rho\sigma)} \delta g_{\beta\sigma)} \\ & - \frac{1}{4} \delta g^{\alpha\beta} Q_{\beta a}{}^a Q_{\alpha\sigma}{}^\sigma - \frac{1}{4} \delta g^{ab} Q^\alpha{}_{ab} Q_{\alpha\sigma}{}^\sigma + \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^\beta{}_\sigma{}^\sigma g^{ab}) \delta g_{ab} \\ & + \frac{1}{4} \delta g^{\alpha\beta} Q_{a\beta}{}^a Q_{\alpha\sigma}{}^\sigma + \frac{1}{4} \delta g^{ab} Q_a{}^\alpha{}_\beta Q_{\alpha\sigma}{}^\sigma - \frac{1}{4} \partial_a (Q^\beta{}_\sigma{}^\sigma g^{ab}) \delta g_{\beta b} \\ & - \frac{1}{4} (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha) Q_\alpha{}^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma} + \frac{1}{8} \left[ Q_{\alpha\mu}{}^\sigma Q_\sigma{}^\mu \delta g^{\alpha\mu} + Q^{\mu\rho\sigma} Q_\sigma{}^\mu \delta g_{\sigma\mu} \right. \\ & + Q_\rho{}^{\rho\sigma} Q_{\sigma\nu\mu} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\sigma (Q_\rho{}^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}) \delta g_{\nu\mu} + Q_\alpha{}^\rho{}_\mu Q_\rho{}^\mu \delta g^{\alpha\mu} \\ & \left. + Q^{\mu\rho\sigma} Q_\rho{}^\mu \delta g_{\sigma\mu} + Q_\sigma{}^{\rho\sigma} Q_{\rho\nu\mu} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\rho (Q_\sigma{}^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}) \delta g_{\nu\mu} \right] \\ & - (Q_{\alpha\nu\mu} P^\alpha{}_\sigma{}^\mu + Q_{\alpha\mu\nu} P^{\alpha\mu}{}_\sigma) \delta g^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{E.73})$$

Ordenando términos y re-indexando índices mudos:

$$\begin{aligned} \delta Q = & \left[ - \left[ \partial_\alpha (P^{\alpha\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right] + \frac{1}{4} Q_\rho{}^{\alpha\beta} Q_{\sigma\alpha\beta} - \frac{1}{2} Q_\rho{}^{\alpha\beta} Q_{(\alpha\sigma\beta)} - \frac{1}{4} Q_{\sigma\lambda}{}^\lambda Q_{\rho\gamma}{}^\gamma \right. \\ & - \frac{1}{4} Q^\alpha{}_{\rho\sigma} Q_{\alpha\gamma}{}^\gamma + \frac{1}{4} Q_{\lambda\sigma}{}^\lambda Q_{\rho\gamma}{}^\gamma + \frac{1}{8} Q_{\rho\sigma}{}^\lambda Q_\lambda + \frac{1}{8} Q_\lambda{}^{\lambda\gamma} Q_{\gamma\sigma\rho} + \frac{1}{8} Q_\rho{}^\lambda{}_\sigma Q_\lambda \\ & \left. + \frac{1}{8} Q_\gamma{}^{\lambda\gamma} Q_{\lambda\sigma\rho} - Q_{\alpha\rho\mu} P^\alpha{}_\sigma{}^\mu - Q_{\alpha\mu\rho} P^{\alpha\mu}{}_\sigma \right] \delta g^{\rho\sigma} \\ & + \left[ -\frac{1}{4} \partial_\beta (Q^{\beta\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^{\mu\beta\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\beta (P^{\mu\nu\beta}) + \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^\beta{}_\lambda{}^\lambda g^{\mu\nu}) \right. \\ & - \frac{1}{4} \partial_\alpha (Q^\mu{}_\lambda{}^\lambda g^{\alpha\nu}) - \frac{1}{4} (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha) Q_\alpha{}^{\mu\nu} + \frac{1}{8} Q^{\nu\mu\lambda} Q_\lambda \\ & \left. - \frac{1}{8} \partial_\alpha (Q_\beta{}^{\beta\alpha} g^{\nu\mu}) + \frac{1}{8} Q^{\nu\lambda\mu} Q_\lambda - \frac{1}{8} \partial_\alpha (Q_\beta{}^{\alpha\beta} g^{\nu\mu}) \right] \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{E.74})$$

Acomodamos,

$$\begin{aligned}
\delta Q = & \left[ -\left[ \partial_\alpha (P^{\alpha\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right] + \frac{1}{4} Q_\rho^{\alpha\beta} Q_{\sigma\alpha\beta} - \frac{1}{2} Q_\rho^{\alpha\beta} Q_{(\alpha\sigma\beta)} - \frac{1}{4} Q_{\sigma\lambda}{}^\lambda Q_{\rho\gamma}{}^\gamma \right. \\
& - \frac{1}{4} Q^\alpha{}_{\rho\sigma} Q_{\alpha\gamma}{}^\gamma + \frac{1}{4} Q_{\lambda\sigma}{}^\lambda Q_{\rho\gamma}{}^\gamma + \frac{1}{8} Q_{\rho\sigma}{}^\lambda Q_\lambda + \frac{1}{8} Q_\lambda{}^{\lambda\gamma} Q_{\gamma\sigma\rho} + \frac{1}{8} Q_\rho{}^\lambda{}_\sigma Q_\lambda \\
& + \frac{1}{8} Q_\gamma{}^{\lambda\gamma} Q_{\lambda\sigma\rho} - Q_{\alpha\rho\mu} P^\alpha{}_\sigma{}^\mu - Q_{\alpha\mu\rho} P^{\alpha\mu}{}_\sigma + \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^{\beta\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \\
& - \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^{\mu\beta\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \partial_\beta (P^{\mu\nu\beta}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^\beta{}_\lambda{}^\lambda g^{\mu\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \\
& + \frac{1}{4} \partial_\alpha (Q^\mu{}_\lambda{}^\lambda g^{\alpha\nu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} (Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha) Q_{\alpha\rho\sigma} - \frac{1}{8} Q_{\sigma\rho}{}^\lambda Q_\lambda \\
& \left. + \frac{1}{8} \partial_\alpha (Q^\beta{}_\sigma{}^\sigma g^{\nu\mu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \frac{1}{8} Q_{\sigma\rho}{}^\lambda Q_\lambda + \frac{1}{8} \partial_\alpha (Q_\beta{}^{\beta\alpha} g^{\nu\mu}) g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right] \delta g^{\rho\sigma} \quad (E.75)
\end{aligned}$$

Sea la definición (ignorando términos de borde):

$$\delta Q = S_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma} \quad (E.76)$$

El término temporal del tensor obtenido de la variación es:

$$S_{00} = -6H^2 = -Q \quad (E.77)$$

Este resultado se muestra en un código de *Mathematica* donde se define la variación completa y se encuentra el término temporal (Casimiro, 2025).

Los “términos de borde” faltantes en la variación son:

$$\begin{aligned}
& - \partial_\alpha (\delta g_{\mu\nu} P^{\alpha\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\beta (\delta g_{\rho\sigma} Q^{\beta\rho\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\rho (Q^{\beta\rho\sigma} \delta g_{\beta\sigma}) - \frac{1}{2} \partial_\sigma (Q^{\beta\rho\sigma} \delta g_{\beta\rho}) - \frac{1}{4} \partial_\beta (Q^\beta{}_\sigma{}^\sigma g^{ab} \delta g_{ab}) \\
& + \frac{1}{4} \partial_\alpha (Q^\beta{}_\sigma{}^\sigma g^{ab} \delta g_{\beta b}) + \frac{1}{8} \partial_\sigma (Q_\rho{}^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu}) + \frac{1}{8} \partial_\rho (Q_\sigma{}^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu})
\end{aligned}$$

Luego, estos términos se pueden agrupar como:

$$2 \partial_\alpha (P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (E.78)$$

Se tiene completamente:

$$\delta Q = S_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2 \partial_\alpha (P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (E.79)$$

Sea la acción y su variación:

$$S_Q = \int d^4x \sqrt{-g} p_2(Q, \phi), \quad \Theta^{(Q)}{}_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_Q}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (E.80)$$

$$\delta S_Q = \int d^4x \left[ \delta(\sqrt{-g}) p_2 + \sqrt{-g} p_{2,Q} \delta Q \right], \quad \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{E.81})$$

Reemplazando  $\delta Q$ :

$$\delta S_Q = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} p_2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + p_{2,Q} S_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2 p_{2,Q} \partial_\alpha (P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \right] \quad (\text{E.82})$$

Integrando por partes:

$$2\sqrt{-g} p_{2,Q} \partial_\alpha (P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha (2\sqrt{-g} p_{2,Q} P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - 2 P^\alpha{}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \partial_\alpha (\sqrt{-g} p_{2,Q}) \quad (\text{E.83})$$

Ignorando el término superficial queda:

$$\delta S_Q = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} p_2 g_{\mu\nu} + p_{2,Q} S_{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} p_{2,Q}) P^\alpha{}_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{E.84})$$

Bajo la definición  $\delta S_Q = \int d^4x \frac{\delta S_Q}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$ , se obtiene<sup>5</sup>:

$$\Theta^{(Q)}{}_{\mu\nu} = p_2 g_{\mu\nu} - 2 p_{2,Q} S_{\mu\nu} + \frac{4}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} p_{2,Q}) P^\alpha{}_{\mu\nu} \quad (\text{E.85})$$

El último término es importante, pues brinda la presión al considerar la componente espacial. Por el contrario, se anula si tomamos el término temporal del tensor  $\Theta^{(Q)}{}_{\mu\nu}$ .

---

<sup>5</sup>Bajo la conexión *Coincident Gauge* se cumple:  $(\nabla_\alpha \rightarrow \partial_\alpha)$ .

## E.8 Tabla de datos observacionales *Cosmic Chronometers*

La siguiente tabla de datos observacionales presenta la mayoría de sus datos en la referencia (Gonzalez-Espinoza y Herrera, 2025).

$z$	$H(z)$	$\pm \sigma_H$
0.07	69	19.6
0.09	69	12
0.10	69	12
0.12	68.6	26.2
0.17	83	8
0.179	75	4
0.199	75	5
0.20	72.9	29.6
0.27	77	14
0.28	88.8	36.6
0.32	79.2	5.6
0.352	83	14
0.3802	83	13.5
0.40	95	17
0.4004	77	10.2
0.4247	87.1	11.2
0.44	82.6	7.8
0.4497	92.8	12.9
0.47	89	50
0.4783	80.9	9
0.48	97	62
0.57	100.3	3.7
0.593	104	13
0.60	87.9	6.1
0.68	92	8
0.73	97.3	7
0.781	105	12
0.875	125	17
0.88	90	40
0.90	117	23
1.037	154	20
1.30	168	17
1.363	160	33.6
1.43	177	18
1.53	140	14
1.75	202	40
1.965	186.5	50.4
2.34	222	7
2.36	226	8

**Tabla E.1:** Mediciones de  $H(z)$  ( $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ) y sus incertidumbres.

## E.9 Funciones completas del sistema dinámico del modelo $f(Q, \phi)$ dilatón

Se detallan las funciones completas del sistema dinámico:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= x \left( 2n^2 u_2^2 (3 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + u_1(-3 + 2\sqrt{6} x \sigma_1)) \right. \\
 &\quad + 2s(3 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + u_1(-3 + \sqrt{6} x \sigma_1)) \\
 &\quad + x(3(1 + 2s)x^3 \alpha^2 + (1 + 2s)x \alpha (3(-1 + u_1 + 2su_1 + u_2^2 - y^2) + \varrho^2) \\
 &\quad + \sqrt{6} x^2 \alpha (- (1 + 2s)(-1 + u_1 + su_1)\beta + 2(1 + s)u_1 \sigma_1) \\
 &\quad - \sqrt{6} (-1 + u_1 + su_1)(y^2(\lambda + 2s\lambda) + (1 + 2s)\beta(-1 + u_1 - u_2^2 + y^2 + \varrho^2) - u_1 \sigma_1 + (1 + 2s)u_2^2 \sigma_2)) \\
 &\quad - nu_2^2 (9 - 9u_1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + 4s^2 u_1 (-3 + \sqrt{6} x(\beta - \sigma_2))) \\
 &\quad + 2\sqrt{6} x((-1 + u_1)\beta + u_1(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2) \\
 &\quad \left. + 2s(9 + 3u_2^2 - 3y^2 + \varrho^2 + u_1(-12 + \sqrt{6} x(3\beta + \sigma_1 - 3\sigma_2)) + x(3x\alpha + 2\sqrt{6}(-\beta + \sigma_2))) \right), \\
 f_2 &= y \left( 3 - 3u_1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + 2\sqrt{6} s^2 u_1 x \lambda + \varrho^2 \right. \\
 &\quad + \sqrt{6} x((-1 + u_1)\lambda + 2u_1 \sigma_1) \\
 &\quad \left. + s(2(3 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha - \sqrt{6} x \lambda + \varrho^2) + u_1(-6 + \sqrt{6} x(3\lambda + 2\sigma_1))) \right), \\
 f_3 &= u_1 \left( 2s^2(3 - 3u_1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2) - \sqrt{6} (-1 + u_1)x \sigma_1 \right. \\
 &\quad \left. + s(3 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + 2\sqrt{6} x \sigma_1 - u_1(3 + \sqrt{6} x \sigma_1)) \right), \\
 f_4 &= -2n^2 u_2^3 (3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha - 2s^2 u_1(-3 + \sqrt{6} x \beta) + \varrho^2 \\
 &\quad + 2s(3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \sqrt{6} x \beta + \varrho^2) + \sqrt{6} x(\beta - u_1 \beta + 2u_1 \sigma_1) \\
 &\quad + su_1(3 + \sqrt{6} x(-3\beta + 2\sigma_1))) \\
 &\quad + nu_2 \left( (3 + 6s)u_2^4 + (-1 + u_1 + su_1)x((1 + 2s)x\alpha(-6 + \sqrt{6} x \beta) \right. \\
 &\quad + \sqrt{6}((1 + 2s)y^2 \lambda + (1 + 2s)\beta(-1 + u_1 + y^2 + \varrho^2) - u_1 \sigma_1)) \\
 &\quad + u_2^2 (3 - 3u_1 - 3y^2 + 3x^2 \alpha - 2\sqrt{6} s^2 u_1 x \beta + \varrho^2 \\
 &\quad + 2s(3 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \sqrt{6} x \beta + \varrho^2) + \sqrt{6} x(\beta - u_1 \beta + 2u_1 \sigma_1) \\
 &\quad \left. + su_1(-6 + \sqrt{6} x(-3\beta + 2\sigma_1))) \right) \\
 &\quad - u_2 x^2 \alpha (3 - 3u_1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 - 2\sqrt{6} s^2 u_1 x \sigma_2 \\
 &\quad + \sqrt{6} x(2u_1 \sigma_1 + \sigma_2 - u_1 \sigma_2) \\
 &\quad \left. + s(-6u_1 + 2(3 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2) + \sqrt{6} x(2u_1 \sigma_1 + 2\sigma_2 - 3u_1 \sigma_2)) \right), \\
 f_5 &= \varrho \left( -1 + u_1 + 8s^2 u_1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + 2\sqrt{6} u_1 x \sigma_1 \right. \\
 &\quad \left. + 2s(-1 + 3u_2^2 - 3y^2 + 3x^2 \alpha + \varrho^2 + u_1(3 + \sqrt{6} x \sigma_1)) \right).
 \end{aligned}$$