

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



USO DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA COMO ALTERNATIVA A LOS
ENSAYOS DESTRUCTIVOS CONTEMPLADOS EN LAS NORMAS ISO
3449 Y 3471. CASO DE ESTUDIO CARGADOR FRONTAL MODELO
HS10E

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Ingeniería
Mecánica que presenta:

Pavel Rojas Asto

Asesor:

Jorge Hernán Alencastre Miranda

Lima, 2024

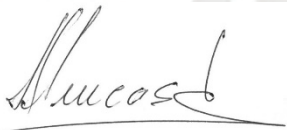
Informe de Similitud

Yo, Jorge Hernán Alencastre Miranda, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada “Uso de la simulación numérica como alternativa a los ensayos destructivos contemplados en las normas Iso 3449 y 3471. caso de estudio cargador frontal modelo HS10E”, del autor Pavel Rojas Asto, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 12.%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 29/04/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

San Miguel 29 de abril de 2024

Apellidos y nombres del asesor: <u>Alencastre Miranda, Jorge Hernán</u>	
DNI: 10588073	Firma 
ORCID: 0000-0001-8442-8255	

Resumen

El presente trabajo desarrolla un procedimiento general para la simulación por elementos finitos de dos ensayos destructivos contemplados en las normas ISO 3449, para el impacto de objetos en caída libre, y la ISO 3471, para volcadura de equipos móviles. El procedimiento propuesto abarca la comprensión de la solicitud del diseño a evaluar (donde se realiza una lista de exigencias para tener claros los puntos de mejora y las restricciones del estudio), las evaluaciones preliminares (que permiten identificar las necesidades para la simulación), el tipo de simulación a realizar, la selección del programa computacional, la geometría de la estructura que se requiere analizar, la definición de las cargas, los apoyos y los materiales involucrados en el análisis, el preprocesamiento (donde se realiza la generación de la maqueta virtual, en la cual se asignan las propiedades del material, las generaciones de la malla en la estructura, los apoyos y cargas, estas últimas definidas en las evaluaciones preliminares), el post procesamiento (en donde se determina los resultados y gráficas que se solicitará al programa) y la interpretación de los resultados. Para determinar la eficacia de este procedimiento se realizó el análisis de la estructura de un equipo móvil, el cual fue sometido a este procedimiento, determinándose que para el caso de la simulación para la norma ISO 3449 se requiere una simulación del tipo explícita por estar relacionado con el análisis de impacto y para el caso de la simulación de la norma ISO 3471 se requiere una simulación del tipo no lineal, tanto por superar los límites de fluencia del material como por tener grandes deformaciones plásticas. Los resultados obtenidos son coherentes con el resultado analítico y como el comportamiento esperado de la estructura, el cual se demuestra que el procedimiento propuesto cumple con el objetivo y permite hacer repetitivo el análisis hasta obtener resultados satisfactorios para el diseñador antes de someter la estructura al ensayo destructivo, reduciendo los costos y tiempo de mejora en las estructuras que requiere de dichos ensayos.

Tabla de Contenidos

Resumen.....	ii
Tabla de Contenidos	iii
Índice de Tablas	vii
Índice de Figuras.....	viii
I. Introducción.....	14
1.1. Problemática	14
1.2. Objetivos.....	16
1.2.1. Objetivo General.....	16
1.2.3. Objetivos Específicos.....	16
II. Estado del Arte.....	17
2.1. Dinámica del Impacto Sobre Estructuras.....	17
2.2. Análisis del Impacto en el Rango Elástico Lineal	18
2.3. Análisis del Impacto Mediante Ecuaciones de la Dinámica de Sólidos	22
2.3.1. Elasticidad.....	23
2.3.2. Plasticidad.....	24
2.4. Ondas de Tensión.....	26
2.4.1. Tensión Uniaxial.....	26
2.4.2. Deformación Uniaxial.....	28
2.5. Minería y Maquinaria Minera.....	28
2.5.1. Scooptram o LHD.....	31
2.6. Norma ISO 3449 (estructura de protección contra la caída de objetos)	33
2.7. Norma ISO 3471 (estructura de protección contra vuelcos).....	36
2.7.1. Aplicación de Fuerzas de Prueba.....	38

2.8. El Método de los Elementos Finitos	44
2.8.1. Fundamentos de los Elementos Finitos y Discretización.	44
2.8.2. Ecuaciones Generales para el MEF.	46
2.8.3. Ecuaciones Generales Para el Análisis Dinámico.	52
2.8.4. Comparación Entre los Métodos de Integración Implícitos y Explícitos Aplicados a los Elementos Finitos.....	56
3. Desarrollo del Procedimiento Para Simular una Estructura de Protección Bajo la Norma ISO 3449 y 3471	64
3.1. Introducción	64
3.2. Comprensión de la Solicitud de Diseño.....	64
3.2.1. Geometría o Dimensiones Requeridas.....	64
3.2.2. Materiales para Fabricación.....	65
3.2.3. Transporte.	65
3.2.4. Estabilidad.....	65
3.2.5. Ergonomía.....	66
3.2.6. Visibilidad.....	66
3.2.7. Costo.	66
3.2.8. Seguridad.	67
3.2.9. Fabricación.....	67
3.3. Evaluaciones Preliminares	68
3.3.1. Identificar las Necesidades Para la Simulación de la Estructura.	68
3.3.2. Identificar el Tipo de Simulación a Realizar.	68
3.3.3. Elaborar y Resolver el Fenómeno con un Análisis Analítico.	69
3.3.4. Seleccionar el Programa Computacional.	70
3.3.5. Geometría de la Estructura a Representar.....	70

3.3.6. Cargas, Apoyos y Materiales Involucrados.	71
3.4. Preprocesamiento.....	71
3.4.1. Generación de la Maqueta Virtual.	72
3.4.2. Propiedades del Material.....	72
3.4.3. Generación de la Malla.	72
3.4.4. Definición de Apoyos y Cargas.	73
3.5. Solución.....	73
3.6. Post-Procesamiento.....	74
3.7. Interpretación de Resultados.....	75
IV. Aplicación del Procedimiento Para Simular una Estructura de Protección Bajo la Norma ISO 3449 y 3471	77
4.1. Introducción.....	77
4.2. Comprensión de la Solicitud de Diseño.....	77
4.3. Evaluaciones Preliminares	80
4.3.1. Identificación de las Necesidades Para la Simulación de la Estructura.	80
4.3.2. Identificación del Tipo de Simulación a Realizar.....	80
4.3.3. Elaborar y Resolver el Fenómeno con un Análisis Analítico.	82
4.3.4. Seleccionar el Programa Computacional.....	93
4.3.5. Geometría de la Estructura a Representar.....	95
4.3.6. Cargas, Apoyos y Materiales Involucrados.	99
4.4. Preprocesamiento.....	106
4.4.1. Generación de la Maqueta Virtual.	106
4.4.2. Propiedades del Material.....	110
4.4.3. Generación de la Malla.	113
4.4.4. Definición de Apoyos y Cargas.	121

4.5. Solución	126
4.6. Post-Procesamiento.....	128
4.7. Interpretación de los Resultados Obtenidos.....	139
Conclusiones	153
Bibliografía	157



Índice de Tablas

Tabla 1 Clasificación del impacto según su velocidad y efectos en el material	17
Tabla 2 Fuerzas que aplicar de acuerdo con la masa del equipo	39
Tabla 3 Lista de exigencias aplicadas al caso microscop HS10E.....	77
Tabla 4 Lista de exigencias aplicadas al caso microscop HS10E.....	79
Tabla 5 Datos de la viga y la columna.....	90
Tabla 6 Deformación de la viga en cada punto.....	91
Tabla 7 Deformación de la columna en cada punto.....	92



Índice de Figuras

Figura 1 Modelo de la caída de objeto que impacta sobre un resorte.....	19
Figura 2 Modelo de la caída de un objeto que impacta sobre un poste	20
Figura 3 Modelo de la caída de un objeto que impacta sobre una viga.....	22
Figura 4 Modelo reológico del elemento rozante	24
Figura 5 Modelo reológico para el comportamiento elastoplástico perfecto.....	25
Figura 6 Representación de los procesos de la tensión uniaxial.....	27
Figura 7 Máquinas de transporte que intervienen en la minería subterránea	29
Figura 8 Perforador de bajo perfil.....	30
Figura 9 Camión de bajo perfil	30
Figura 10 Scooptram o LHD.....	31
Figura 11 Partes importantes de un microscopio	32
Figura 12 Curva de energía requerida para el nivel I.....	34
Figura 13 Curva de energía requerida para el nivel II	34
Figura 14 Geometría de los objetos de impacto.....	35
Figura 15 Fijación de la estructura de protección de un chasis semi articulado.....	37
Figura 16 Fijación de la estructura de protección del chasis de un tractor	37
Figura 17 Ejemplo de la aplicación de la fuerza lateral.....	39
Figura 18 Diagrama fuerza de deflexión (curva para la prueba de carga).....	40
Figura 19 Diagrama de fuerza de flexión (curva para la prueba de carga).....	41
Figura 20 Ejemplo de la aplicación de la fuerza longitudinal	42
Figura 21 Rotaciones permitidas para el DVL	43
Figura 22 Elemento unidimensional	45
Figura 23 Elemento bidimensional	45

Figura 24 Elemento tridimensional.....	46
Figura 25 Elemento viga.....	46
Figura 26 Elemento placa plana.....	46
Figura 27 Fuerzas actuantes sobre un elemento finito.....	49
Figura 28 Fuerzas actuantes sobre un elemento finito.....	54
Figura 29 Tipos de análisis estructurales.....	57
Figura 30 Aplicación de los métodos de integración según el tiempo de duración.....	58
Figura 31 Dimensiones características en función de la forma del modelo.....	62
Figura 32 Formato de lista de exigencias.....	68
Figura 33 Clasificación del análisis computacional.....	69
Figura 34 Diagrama de procedimientos para la simulación numérica.....	76
Figura 35 Dimensiones de las líneas de elementos estructurales a calcular.....	83
Figura 36 Geometría y dimensiones de la estructura simplificada.....	83
Figura 37 Geometría y dimensiones del perfil de la estructura.....	85
Figura 38 Primera configuración de la estructura de análisis.....	85
Figura 39 Configuración de la estructura de análisis.....	87
Figura 40 Carga aplicada en una viga empotrada.....	90
Figura 41 Torsión aplicada en una columna empotrada.....	90
Figura 42 Deformación total de la estructura en análisis.....	93
Figura 43 Identificación de la cabina del operador.....	96
Figura 44 Ensamble de la cabina del operador.....	97
Figura 45 Identificación de la estructura ROPS para el ensayo.....	98
Figura 46 Operador ubicado en la cabina de operación.....	98
Figura 47 DLV ubicado de acuerdo con la norma SAE J397.....	99
Figura 48 Ubicación del punto de aplicación de la carga de impacto según ISO 3449.....	100

Figura 49 Ubicación de apoyos para el análisis FOPS	100
Figura 50 Ubicación de la carga lateral F1 en vista frontal	101
Figura 51 Ubicación de la carga lateral centrada con la proyección de la DLV	102
Figura 52 Ubicación de la carga vertical F2 en vista frontal	103
Figura 53 Ubicación de la carga longitudinal F3 en vista frontal.....	103
Figura 54 Fuerzas y energía calculadas para el caso microscop HS10E	104
Figura 55 Ubicación de apoyos para el análisis ROPS.....	104
Figura 56 Propiedades mecánicas del acero ASTM A 500 grado A	105
Figura 57 Propiedades mecánicas del acero ASTM A 572 grado 50	105
Figura 58 Propiedades mecánicas del acero ASTM A 514 grado A	106
Figura 59 Modelo detallado de la cabina del operador.....	107
Figura 60 Modelo simplificado 3D para simulación FOPS.....	108
Figura 61 Modelo optimizado 3D para simulación FOPS.....	109
Figura 62 Modelo simplificado para simulación ROPS	109
Figura 63 Modelo simplificado para simulación ROPS	110
Figura 64 Material lineal ASTM A 500.....	111
Figura 65 Material lineal ASTM A 514.....	111
Figura 66 Material lineal ASTM A 572.....	111
Figura 67 Material no lineal ASTM A 500.....	112
Figura 68 Material no lineal ASTM A 514.....	113
Figura 69 Material no lineal ASTM A 572.....	113
Figura 70 Configuración de Patch Conforming Method para el objeto de impacto.....	114
Figura 71 Configuración de Body Sizing para el objeto de impacto.....	114
Figura 72 Elementos seleccionados para aplicar Multizone Quad / Tri Method.....	115
Figura 73 Configuración de Body Sizing para elementos de 20 mm	116

Figura 74 Elementos seleccionados para aplicar Body Sizing	117
Figura 75 Configuración de Body Sizing para elementos de 15 mm	117
Figura 76 Mallado de la maqueta virtual para análisis FOPS nivel I	117
Figura 77 Calidad de mallado de la maqueta virtual para análisis FOPS nivel I.....	118
Figura 78 Gráfica de calidad del mallado	119
Figura 79 Gráfica de calidad del mallado	120
Figura 80 Gráfica de calidad del mallado	120
Figura 81 Gráfica de calidad del mallado	121
Figura 82 Gráfica de calidad del mallado	121
Figura 83 Superficies seleccionadas tipo Fixed Support	122
Figura 84 Configuraciones de velocidad de impacto y gravedad	123
Figura 85 Superficies seleccionadas tipo Fixed Support	124
Figura 86 Ubicación de la fuerza lateral	125
Figura 87 Ubicación de la fuerza vertical	125
Figura 88 Ubicación de la fuerza longitudinal.....	126
Figura 89 Gráfica de Energy Conservation	127
Figura 90 Gráfica de Energy Sumary	127
Figura 91 Gráfica de Force Convergence	128
Figura 92 Gráfica de deformaciones durante el impacto	129
Figura 93 Gráfica de deformaciones en mallado para la máxima deformación	130
Figura 94 Gráfica de esfuerzos durante el impacto	131
Figura 95 Gráfica de esfuerzos en mallado al final del tiempo 0,01s.....	131
Figura 96 Gráfica de deformaciones durante el impacto	132
Figura 97 Gráfica de deformaciones en mallado para la máxima deformación	132
Figura 98 Gráfica de esfuerzos durante el impacto	133

Figura 99 Gráfica de esfuerzos en el mallado al final del tiempo 0,03s.....	133
Figura 100 Gráfica de deformaciones a lo largo de la simulación	134
Figura 101 Gráfica de máxima deformación en el mallado para el step 3	135
Figura 102 Gráfica de máximos esfuerzos durante la simulación	135
Figura 103 Gráfica de máximos esfuerzos en el mallado para el step 3.....	136
Figura 104 Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación	136
Figura 105 Gráfica de máxima deformación en el mallado.....	137
Figura 106 Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación	138
Figura 107 Gráfica de máximo esfuerzo en el mallado	138
Figura 108 Gráfica de Force Convergence para la simulación con grandes desplazamientos	139
Figura 109 Gráfica comparativa de máximo esfuerzo en el mallado	140
Figura 110 Ensamble de la estructura deformada a la maqueta virtual del chasis	141
Figura 111 Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para la simulación FOPS	141
Figura 112 Gráfica material estructural A500 para los soportes de estructura ROPS.....	143
Figura 113 Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para la simulación ROPS	144
Figura 114 Gráfica material estructural A514 para los soportes de estructura ROPS.....	145
Figura 115 Soportes estructurales resaltados que cambiaran de material a ASTM A514.....	146
Figura 116 Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación	146
Figura 117 Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación.....	147
Figura 118 Gráfica de máximo esfuerzo en mallado para el step 3s	148
Figura 119 Gráfica de máxima deformación en mallado para el step 3	148

Figura 120 Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para simulación ROPS	149
Figura 121 Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación	150
Figura 122 Gráfica de máxima deformación en el mallado para el time step $1,8e-2s$	150
Figura 123 Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación	151
Figura 124 Gráfica de máximo esfuerzo en el mallado para el time step $3e-3s$	151



I. Introducción

1.1. Problemática

En el Perú el sector de la minería es uno de los más importantes. “El subsector minero sigue siendo el principal generador de divisas al representar el 61% del comercio exterior peruano” (Ministerio de Energía y Minas, 2020, p. 2), demostrando una importante recuperación desde el mes de junio. Por tanto, la industria minera, debido a sus diversos requerimientos en sus fases de producción, impulsa al sector de la manufactura a desarrollar máquinas cada vez más eficientes y seguras. Dentro del procesos de extracción de mineral en la minería subterránea se encuentra el proceso de carguío y para ello se suelen utilizar los equipos móviles de bajo perfil como perforadoras, *scooptrams*, cargadores y *shotcreteras*, entre otros, los cuales requieren cumplir con los criterios normados para seguridad y ergonomía, lo que influye en el diseño de dichas máquinas. Estas normas se deben entender y aplicar de manera adecuada para garantizar la seguridad del operador.

Así mismo, debe destacarse al respecto lo señalado por (Karliński *et al.*, 2008, p. 1):

Máquinas de construcción y minería operan en distintas condiciones ambientales, ambas sobre suelo (máquinas de construcción y agrícolas) y subterráneas (máquinas de minería). Dado que todo tipo de máquinas de ingeniería son controladas por operadores, una cabina protectora (el lugar de trabajo del operador) es una parte inseparable de casi todas esas máquinas. Las difíciles condiciones en las que funcionan las máquinas exigen que la cabina garantice la seguridad y sea ergonómica.

Entre las máquinas móviles de bajo perfil más usadas dentro de la industria de la minería subterránea se encuentran los cargadores frontales o *scooptrams*, además, para el caso de las vetas angostas se están implementando los mini cargadores frontales, conocidos también como *microscopes*, máquinas que realizan trabajos en zonas de alto riesgo, por lo cual es importante

implementar cabinas de operación diseñadas para soportar los efectos de posibles accidentes por volcadura o caída de objetos sobre la cabina (a fin de proteger la vida del operario). En el Perú, según el Decreto Supremo 055 de 2010, las máquinas de bajo perfil para el carguío de material deberán contar con un protector para el operador, sólido y resistente a las posibles caídas de roca. Por ello, en la industria se ha difundido ampliamente que los equipos que son capaces de resistir caída de rocas y que pueden labrar en sus instalaciones son aquellos equipos que cuentan con cabinas diseñadas bajo la norma ISO 3449, norma que especifica los parámetros y condiciones que debe cumplir la estructura de protección del operador bajo el impacto de un objeto de prueba que representa la energía de impacto que escapara de soportar la estructura sin ser perforada y que las deformaciones a causa del impacto no entren en interferencia con el volumen teórico que ocupa el operador dentro de la cabina. En la misma línea, en minería tiene buena aceptación que los equipos de movimiento de tierras cuente con diseño contra volcaduras, bajo este requerimiento la norma ISO 3471 es la que determina los parámetros y condiciones que debe cumplir la estructura de protección del operador bajo la volcadura del vehículo, esta condición es simulada mediante la aplicación de fuerzas en diferentes direcciones de la estructura de protección que dependen de la masa del vehículo y la geometría de la estructura. Por las estructuras de protección del operador deben ser diseñadas bajo las consideraciones que sean capaces de soportar las condiciones solicitadas por las normas ISO 3449 y 3471. Dado que los ensayos de las normas ISO 3449 y 3471 son del tipo destructivo y requieren de una gran inversión económica en utilaje, equipos y estructuras de prueba, en muchos casos las máquina que se fabrican en el mercado nacional no señalan si cumplen o no con las normas ISO 3449 y 3471, por lo que el uso de modelos matemáticos adecuados y las simulaciones mediante elementos pueden ser una alternativa viable para cumplir los criterios de aceptación de ambas normas e indicar que los chasis fueron diseñados bajo las normas señaladas.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Desarrollar un procedimiento basado en las herramientas computacionales de la simulación numérica como alternativa a los ensayos destructivos de las normas ISO 3449 y 3471 y aplicarlo al análisis del cargador frontal modelo HS10E.

1.2.3. Objetivos Específicos

- Conocer e interpretar las normas ISO 3449 y 3471 para aplicarlas en el diseño propuesto.
- Resolver analíticamente, mediante el uso de las teorías de resistencia de los materiales, el comportamiento los materiales de la estructura sometida a pruebas de laboratorio de las normas ISO 3449 y 3471 para el *microscopio* modelo HS10E.
- Definir un procedimiento para simular la estructura de protección propuesta mediante un método computacional.
- Aplicar el procedimiento al caso de estudio.
- Comparar los resultados obtenidos por los métodos analíticos y computacionales.

II. Estado del Arte

2.1. Dinámica del Impacto Sobre Estructuras

El impacto entre dos objetos es un fenómeno físico complejo que involucra el comportamiento mecánico de dichos objetos, sometidos a fuerzas que se generan de manera repentina y que puede producir deformaciones desde el tipo elástico, pasando a deformaciones permanentes y penetración de uno de los cuerpos en interacción. El fenómeno del impacto puede estudiarse desde la perspectiva de la cinemática, para lo cual se deben realizar simplificaciones, como desprestigiar los efectos de las deformaciones de los sólidos y la transmisión de ondas de tensión en los mismos, los resultados de esta simplificación permiten entender la cinemática y las fuerzas muy elevadas de corta duración; este análisis es conocido como dinámica de impulsiones. Desde el punto de vista de la mecánica de materiales y el análisis de esfuerzos, el fenómeno de impacto tiene un tratamiento especial, dado que el comportamiento de los objetos en estudio tendrá zonas de comportamiento no lineal y otras de comportamiento lineal y posibles roturas locales en los cuales el efecto de transmisión de ondas adquiere relevancia en este estudio. Para poder hacer un estudio de la dinámica de impacto debemos hacer una clasificación de tipos de impacto considerando su velocidad y efectos en el material, como una primera aproximación (Goicolea, 2000).

Tabla 1

Clasificación del impacto según su velocidad y efectos en el material

Tipo de velocidad	Rango de velocidades (m/s)	Efectos en el material
Velocidad baja	$v < 50$	Deformaciones elásticas o plásticas localizadas.

Velocidad media	$50 < v < 500$	Deformación plástica generalizada.
Velocidad alta	$500 < v < 2000$	La resistencia viscosa del material cobra importancia.
Híper velocidad	$v > 2000$	El material puede comportarse como fluido hidrodinámico.

Nota. Tomado de “Estructuras Sometidas a Impacto”, por Goicolea, 2000.

2.2. Análisis del Impacto en el Rango Elástico Lineal

En el estudio de la mecánica de materiales, la aplicación de la carga sobre los objetos se efectúa de manera gradual, hasta que permanecen constantes o estáticas, pero en las cargas de impacto son dinámicas y su magnitud varía con respecto al tiempo, al respecto Hibbeler (2011) señala algunas de las suposiciones erróneas sobre este fenómeno:

- No se pierde energía.
- El cuerpo en movimiento es rígido.
- El cuerpo estacionario es deformable.
- El cuerpo deformable se comporta en forma elástica lineal.
- Durante el choque no se pierde energía en calor, ruido, ni deformaciones plásticas localizadas.
- Cuando se produce el choque los cuerpos permanecen hasta que se llega a su deformación máxima.
- Se desprecia la inercia o la masa del cuerpo elástico.

Con estas suposiciones mencionadas se llegará a determinar valores conservadores de esfuerzo y deflexión del cuerpo elástico (es decir que se obtendrán del cálculo valores mayores a la realidad).

Para un primer análisis se considera el modelo de caída de un objeto que impacta sobre

un resorte, como se muestra en la figura 1.

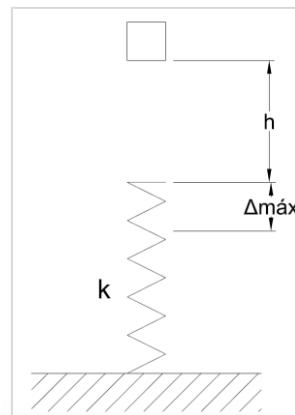


Figura 1. Modelo de la caída de objeto que impacta sobre un resorte

Tomado de “Estructuras Sometidas a Impacto”, por Goicolea, 2000.

De la figura se puede determinar que el trabajo efectuado por el objeto que cae será igual al trabajo que efectuará el resorte en el extremo donde se genera el impacto, por lo que podemos decir:

$$W(H + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2 \quad (1)$$

De esta ecuación cuadrática se puede despejar $\Delta_{máx}$ y se obtendrán dos raíces, pero la de signo negativo no tiene un significado físico, por lo cual no se toma en cuenta para el análisis.

$$\Delta_{máx} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{W}{k}\right)h} \quad (2)$$

De la ecuación 2 se puede reemplazar $\frac{W}{k}$ por Δ_{est} , que es la deformación que se produciría si la carga se aplicase de manera gradual hasta obtener la deformación máxima.

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} \left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)} \right] \quad (3)$$

Así, se puede deducir que existe un factor n que multiplica e incrementa la deformación estática, llevándola del valor de la deformación producida por el impacto.

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{h}{\Delta_{est}} \right)} \quad (4)$$

Bajo este mismo razonamiento se puede determinar el esfuerzo máximo debido al impacto.

$$\sigma_{m\acute{a}x} = n\sigma_{est} \quad (5)$$

$$\Delta_{m\acute{a}x} = n\Delta_{est} \quad (6)$$

Este análisis puede llevarse al caso de un poste al cual se le deja caer un peso conocido, por lo cual se deforma una cantidad máxima similar al resorte, pero debe tenerse en cuenta el valor de $k = \frac{AE}{L}$ para el poste considerando como una barra.

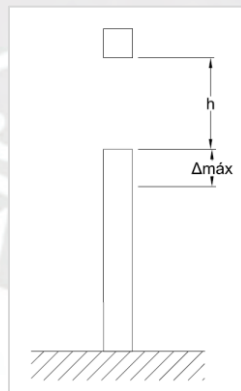


Figura 2. Modelo de la caída de un objeto que impacta sobre un poste

Tomado de “Estructuras Sometidas a Impacto”, por Goicolea, 2000.

Por lo tanto, el esfuerzo máximo en el modelo propuesto se obtendrá de:

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \Delta_{est} \left[1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{h}{\Delta_{est}} \right)} \right] \quad (7)$$

Donde:

$$\Delta_{est} = \frac{F_{est}L}{AE} \quad (8)$$

Reemplazando la ecuaci3n 8 en la ecuaci3n 7 se obtendr3:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{F_{est}}{A} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2hEA}{F_{est}L} \right)} \right] \quad (9)$$

La carga m3xima que la barra soportar3 durante el impacto de este modelo ser3:

$$F_{m\acute{a}x} = F_{est} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2hEA}{F_{est}L} \right)} \right] \quad (10)$$

Este an3lisis se puede aplicar a diferentes elementos estructurales, como vigas o columnas, donde la deformaci3n que se genera por el impacto puede ser calculada mediante las f3rmulas cl3sicas de la resistencia de materiales y luego de ello se puede determinar el factor n que magnifica el valor est3tico para llevarlo a un valor din3mico.

Este an3lisis realizado puede ser aplicado a vigas en diferentes configuraciones como por ejemplo una viga apoyada en sus extremos (figura 3). Conociendo el valor de su constante de rigidez y bajo los supuestos ya indicados, el valor de la fuerza de impacto ser3:

$$F_{m\acute{a}x} = F_{est} \left[1 + 2h \sqrt{1 + \left(\frac{48EI}{F_{est}L^3} \right)} \right] \quad (11)$$

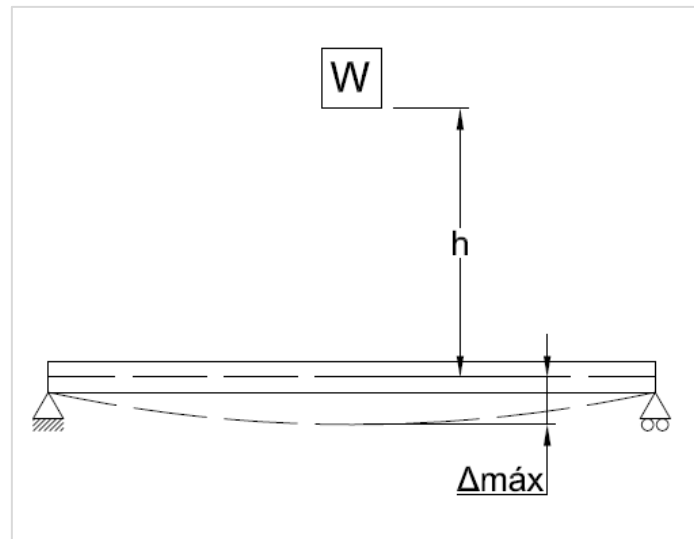


Figura 3. Modelo de la caída de un objeto que impacta sobre una viga

Tomado de “Estructuras Sometidas a Impacto”, por Goicolea, 2000.

2.3. Análisis del Impacto Mediante Ecuaciones de la Dinámica de Sólidos

Se realizó el análisis a partir de una serie de ecuaciones diferenciales básicas que expresan el balance de diversas magnitudes. El balance de cantidad de movimiento viene dado por la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho \dot{v} \quad (12)$$

El balance del momento cinético determina el tensor de tensiones a:

$$\sigma = \sigma^T \quad (13)$$

La conservación de masa o ecuación de continuidad establece que:

$$\frac{1}{\rho} \dot{\rho} + \nabla \cdot v = 0 \quad (14)$$

La ecuación de balance de energía (primer principio de la termodinámica) establece que:

$$p\dot{u} = \sigma : d + \nabla \cdot h + r \quad (15)$$

$$d = \frac{1}{2}[\nabla \cdot v + (\nabla \cdot v)^T] \quad (16)$$

Estas ecuaciones son generales y aplicables a cualquier material, además de ello se debe agregar las ecuaciones constitutivas, que relacionan las tensiones con las deformaciones. El comportamiento de un material frente a todas las acciones posibles y en cualquier situación no resulta posible de describir con un solo modelo matemático, por lo que se debe analizar con modelos ideales, los cuales pueden ser el modelo elástico, el modelo plástico y el modelo viscoso.

2.3.1. Elasticidad.

Para impactos de baja velocidad la respuesta del material será elástica y lineal bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y material isotrópico, con lo que podemos usar la ley general de Hooke en su notación clásica.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad (17)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \quad (18)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (20)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \quad (21)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad (22)$$

2.3.2. Plasticidad.

Para impactos a velocidades medias o velocidades bajas, pero con ciertas configuraciones geométricas, es posible que se generen esfuerzos y deformaciones de efectos plásticos en el material, con lo que llevaría a que se generen grandes desplazamientos, deformaciones y rotaciones, los cuales tienen un carácter no lineal una vez que sobrepasamos el esfuerzo de fluencia del material. Cuando supera el límite de fluencia del material aparecen fenómenos irreversibles, dado que el fenómeno de plasticidad es bastante complejo se debe entender en el caso uniaxial y luego aplicar sus criterios a elementos un más complejos.

Antes de desarrollar el caso uniaxial debemos tener en cuenta los siguientes supuestos.

- Las velocidades de deformación son pequeñas, alrededor de $10^{-2} s^{-1}$.
- El efecto de la temperatura en el material será considerado dentro de la temperatura ambiente estándar.
- Se acepta la hipótesis de Navier: las secciones al deformarse permanecen planas.

El modelo básico para representar la plasticidad en un elemento uniaxial es el elemento mecánico rozante, caracterizado por un límite en la tensión σ_f o tensión de fluencia.

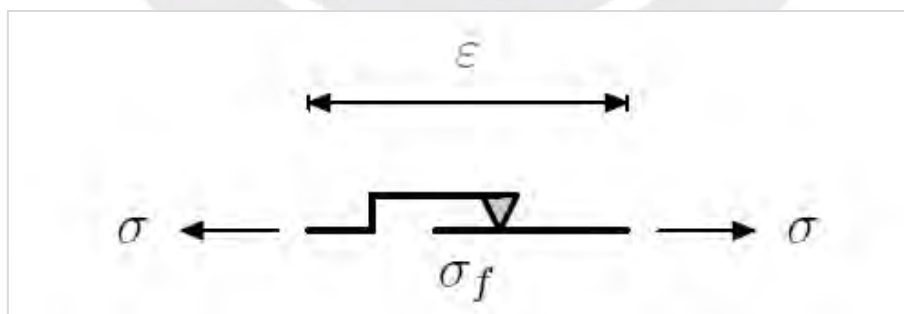


Figura 4. Modelo reológico del elemento rozante

La deformación viene dada por la siguiente relación:

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & |\sigma| < \sigma_f \\ \dot{\gamma} \operatorname{sgn}(\sigma) & |\sigma| = \sigma_f, \text{ con } \dot{\gamma} \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

Esta relación indica el límite de la tensión. Ahora, para estudiar los sólidos elastoplásticos se considera un modelo reológico compuesto por un resorte elástico de constante E y un rozante de constante σ_f .

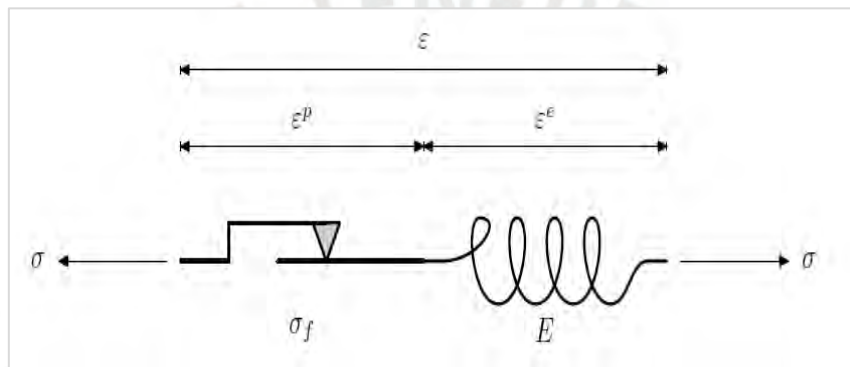


Figura 5. Modelo reológico para el comportamiento elastoplástico perfecto

Tomado de “Mecánica de Sólidos”, por Olleros, 2020

Donde:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (24)$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) = E\varepsilon^e \quad (25)$$

Finalmente, para expresar matemáticamente las condiciones en las que se inicia la deformación plástica resulta útil definir una función de fluencia que depende solo de la tensión y que para este modelo reológico es:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_f \quad (26)$$

2.4. Ondas de Tensión

En un sólido deformable, la alteración del equilibrio mecánico es representado por el cambio de velocidad de partículas y su correspondiente cambio en el esfuerzo y los estados de presión. Cuando alguna parte del solido ha sido perturbada, se requiere de un tiempo finito para que otra parte del solido sienta el desequilibrio debido a las propiedades de deformación del sólido. Este es el tipo de propagación como resultado de la alteración del esfuerzo y deformación a través del cuerpo del solido se denomina ondas de tensión (Yu y Qiu, 2018). El estudio local de la dinámica de impacto exige el análisis de propagación de las ondas asociadas a frecuencias propias mucho más elevadas que las de las vibraciones estructurales. A continuación, se describen las ondas elásticas para dos casos básicos unidimensionales representativos.

2.4.1. Tensión Uniaxial.

Se trata de una barra recta sin restricción lateral, medida por la coordenada x , de modulo elástico E y densidad ρ . Teniendo en cuenta que la única componente no nula de la tensión es $\sigma_x = E u_x$ resulta:

$$\ddot{u} = c_0^2 u_x \quad (27)$$

En la siguiente figura se aprecian los siguientes elementos: a) El esquema de un diferencial de una barra sometida a tensión uniaxial; b) El balance de cantidad de movimiento al avanzar el frente de la onda de tensión en una barra con velocidad v_0 que choca contra un muro rígido y c) La comparación de las curvas en tensión y deformación uniaxial.

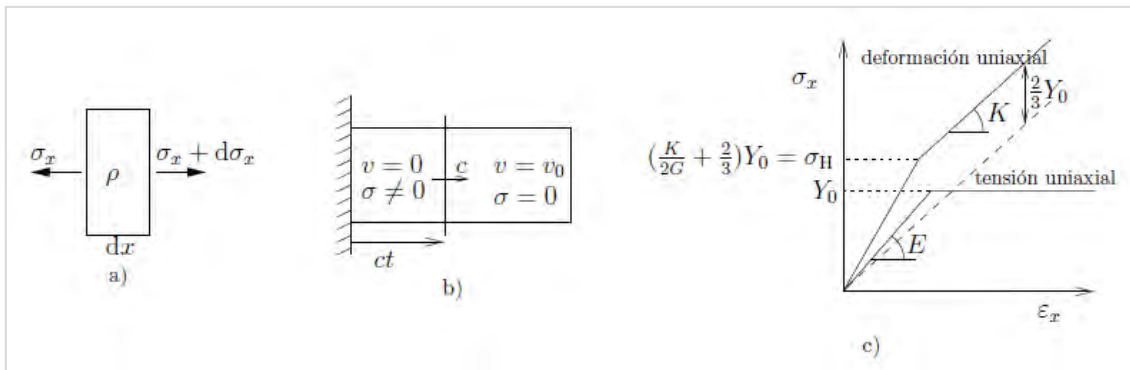


Figura 6. Representación de los procesos de la tensión uniaxial

Tomado de “Estructuras Sometidas a Impacto”, por Goicolea, 2000.

Donde $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ es la velocidad con la que se propagan las ondas de tensión o velocidad del sonido. Las ondas de tensión están asociadas a discontinuidades de las derivadas de la presión o de la velocidad, aunque los valores de estas últimas siguen siendo continuos. Por concretar el orden de magnitud en el acero es del orden de $(c_0)_{acer} \approx \frac{5100m}{s}$, y en el hormigón $(c_0)_{horm} \approx \frac{3500m}{s}$.

Si se considera la onda de tensión producida por el impacto del sólido uniaxial sobre la pared rígida a una velocidad v_0 (ver figura 6) y estableciendo el balance de cantidad de movimiento en el avance de la onda, se puede deducir la magnitud de la onda de tensión:

$$\sigma = -\rho c_0 v_0 \quad (28)$$

El signo indica que es estado de compresión, esta expresión permite calcular de forma aproximada las tensiones generadas por el impacto y determinar si se para producir o no plastificación debido al impacto, esto podemos deducir relacionado el esfuerzo que se produce por el impacto comparado con el esfuerzo de fluencia del material en estudio.

2.4.2. Deformación Uniaxial.

Cuando el impacto es sobre una placa en lugar de una barra de una pequeña sección transversal, la condición es más bien deformación uniaxial en lugar de una tensión uniaxial. Las deformaciones transversales al impacto no tienen tiempo de desarrollarse por la inercia, ya que el material se encuentra confinado. En estas condiciones, particularizando, se obtiene la ley uniaxial.

$$\sigma_x = \left(K + \frac{4G}{3} \right) u \quad (29)$$

El valor de la tensión para que se alcance el límite elástico en estas circunstancias se denomina límite elástico de Hugoniot:

$$\sigma_H = \left(\frac{K}{2G} + \frac{2}{3} \right) Y_0 \quad (30)$$

Planteando la ecuación de las ondas de forma similar, se deduce la velocidad de propagación de las denominadas ondas planas, la cual es mayor que la c_0 obtenida anteriormente para la tensión uniaxial.

$$c_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho}} \quad (31)$$

2.5. Minería y Maquinaria Minera

La minería es una actividad que se realiza para la obtención de distintos tipos de minerales que se encuentran en el suelo y subsuelo en forma de yacimientos, en el cual se puede extraer cobre, oro, plata, plomo, etc. En la minería existen dos tipos de extracción de minerales. La minería a tajo abierto (cielo abierto) consiste en eliminar capas de la superficie hasta

encontrar los yacimientos minerales enterrados, mientras que la minería subterránea consiste en realizar socavones en el subsuelo para crear galerías y túneles que conduzcan a las vetas de mineral, pudiendo tener accesos horizontales, diagonales o verticales.

Las etapas de la explotación en minería son las siguientes:

- Exploración.
- Desarrollo.
- Preparación.
- Explotación y extracción.
- Transporte y/o manipulación de minerales.

En las diferentes etapas de la minería interviene una serie de máquinas que realizan actividades específicas que contribuyen al proceso. De los tipos de minería, se eligió la minería subterránea en su etapa de transporte y/o manipulación, en la cual se realiza la extracción del mineral hacia el exterior, para lo cual se acumula y se carga en diferentes medios de transportes que se dispongan. En la etapa de transporte intervienen diferentes maquinas como se muestra en la figura 7.

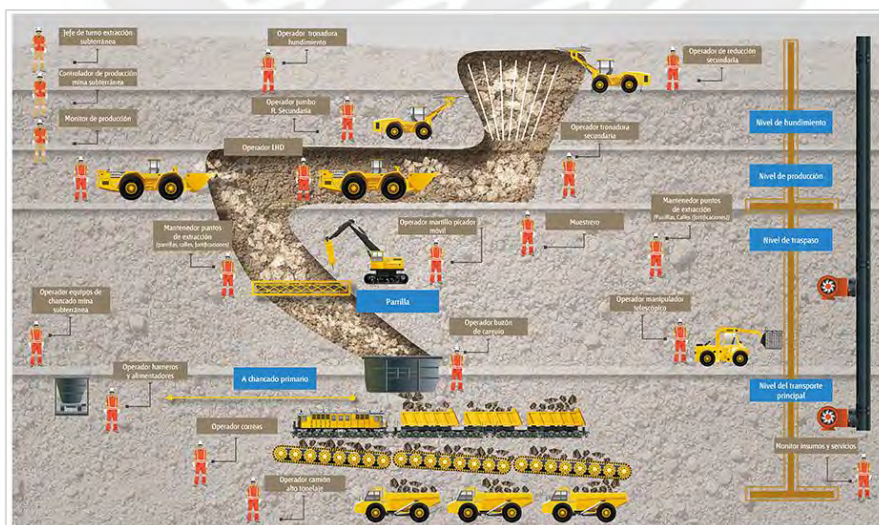


Figura 7. Máquinas de transporte que intervienen en la minería subterránea

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.

Los equipos que ingresan al interior de la mina para cumplir sus actividades de transporte son también conocidos como equipos de bajo perfil, dado que las dimensiones de las alturas de sus chasis deben ser de poca altura para poder ingresar a los diferentes socavones.

Los equipos más comunes son:

- Perforadoras de bajo perfil (fig. 1.8).
- Camiones de bajo perfil (fig. 1.9).
- *Scooptrans* o LHD (fig. 1.10).



Figura 8. Perforador de bajo perfil

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.



Figura 9. Camión de bajo perfil

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.



Figura 10. Scooptram o LHD

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.

2.5.1. Scooptram o LHD

Los *scooptrams* se cuentan entre las máquinas más comunes en la minería subterránea, siendo su función la de cargar el material que recién ha sido removido en la veta o frente y transportarlo a puntos específicos para cargar camiones mineros o carros mineros que se encargan del transporte en distancias mayores. Un *microscoop* es una máquina móvil diseñada para realizar trabajos en minería subterránea o en zonas confinadas y su ciclo de trabajo normalmente sigue la siguiente secuencia:

- Cargar una cantidad grande de material de un punto determinado.
- Transportar el material a un área específica.
- Descargar la carga en un camión o en un área específica.

Los *scooptrams* pueden ser impulsados por motores diésel o eléctricos alimentados por medio de un carrete de cable, la desventaja del equipo eléctrico es que la autonomía del mismo se ve limitada por la longitud del cable que puede proveer su carrete, sin embargo, en socavones donde el sistema de ventilación no es de tipo forzado, se hace necesario este tipo de alimentación al motor. Recientemente las industrias están experimentando con motores eléctricos alimentados por baterías, lo cual mejoraría la autonomía, sin embargo, esta práctica

obliga a contar con zonas de carga y recambio de baterías. En la minería subterránea de vetas angostas se están implementando los mini cargadores frontales o conocidos también como *microscopes*, estas máquinas realizan trabajos en zonas de alto riesgo, por lo cual es importante implementar cabinas de operación diseñadas para soportar los efectos ante posibles accidentes por volcadura o caída de objetos sobre la cabina para proteger la vida del operario. Las partes más importantes de un *microscop* son las siguientes:

- Cuchara.
- Chasis frontal.
- Articulación central.
- Cabina del operario.
- Compartimiento de transmisión.
- Compartimiento de motor (en la cual hay dos opciones diésel o eléctrico).

Las partes mencionadas son indicadas en la figura 11.

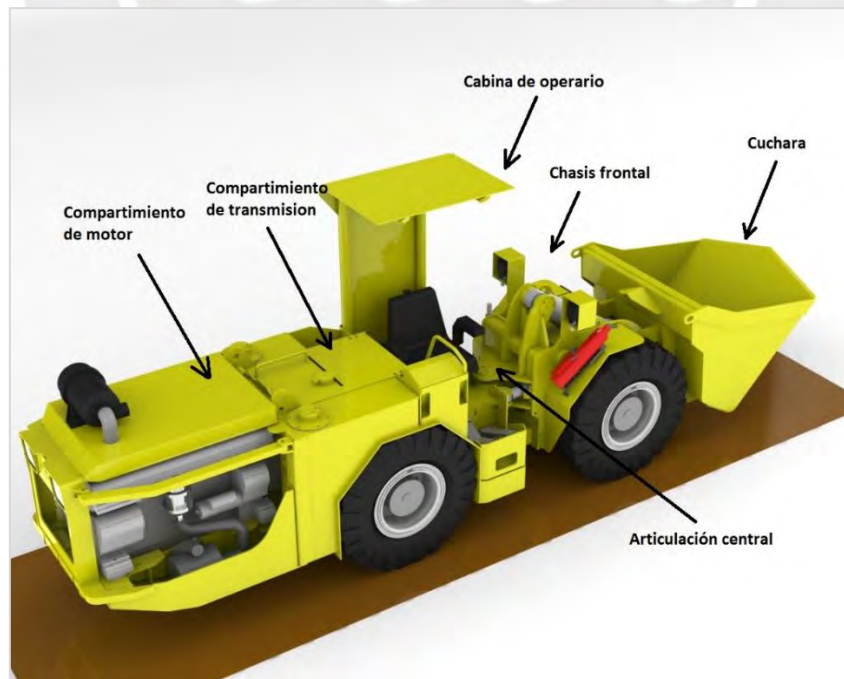


Figura 11. Partes importantes de un *microscop*

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.

2.6. Norma ISO 3449 (estructura de protección contra la caída de objetos)

Ésta es una norma internacional que se aplica a maquinaria pesada móvil que cuenta con una cabina de operación (estructura de protección) en la cual el operador realiza sus actividades y cuyas potencias no sean menor a 15 kW, las máquinas pueden ser sobre orugas o ruedas, la estructura de protección de la cabina puede ser solida al chasis como armable. La norma menciona a la estructura de protección (cabina del operario) que soporta la caída de objetos, denominándola *Falling-Object Protective Structures* (en adelante por sus siglas, FOPS). La norma especifica las características, parámetros y condiciones para ejecutar la prueba de laboratorio que permitirá comprender las capacidades estructurales de la cabina del operador frente a la caída de objetos. La prueba de laboratorio es de tipo destructiva y tiene dos niveles que dependen de la forma, peso y la energía de impacto del objeto de prueba que impacta sobre el FOPS, dicho objeto es ubicado en la parte superior de la cabina a una distancia lo suficiente alejada (elevada). Para determinar la altura de elevación se deberá conocer la masa del objeto que impacta sobre la estructura y mediante la fórmula de energía potencial gravitatoria se puede calcular la altura requerida para desarrollar una energía de 1365J con un objeto de impacto de 45 kg para el nivel I y 11600J con un objeto de impacto de 227 kg para el nivel II. El objeto caerá sin ninguna restricción sobre la estructura de prueba, la ubicación de la proyección del eje del centro del objeto sobre la FOPS (zona de impacto) dependerá de la forma de la estructura y por lo general está cerca al centro de gravedad de la estructura, la altura sobre la que se debe liberar el objeto de impacto se puede determinar en las figuras 12 (para el FOPS nivel I y 1.12) y 13 (para el FOPS nivel II).

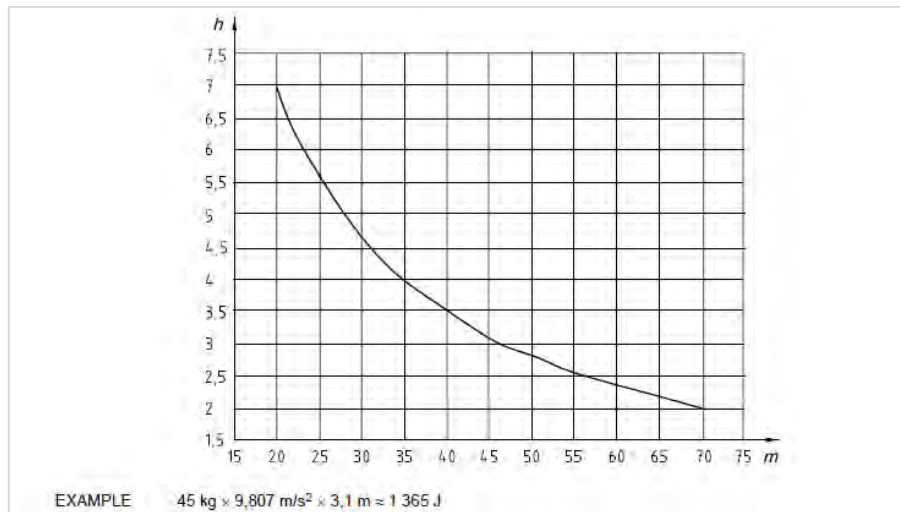


Figura 12. Curva de energía requerida para el nivel I

Tomado de International Organization for Standardization, 2005.

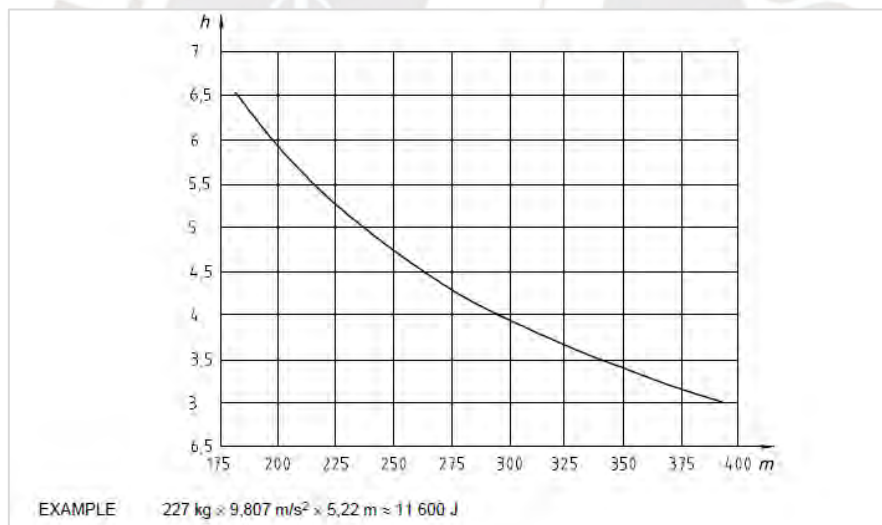


Figura 13. Curva de energía requerida para el nivel II

Tomado de International Organization for Standardization, 2005.

La geometría del objeto de impacto cuya forma viene dimensionada de acuerdo a la figura 12 para la prueba de impacto nivel I y 13, para la prueba de impacto nivel II.

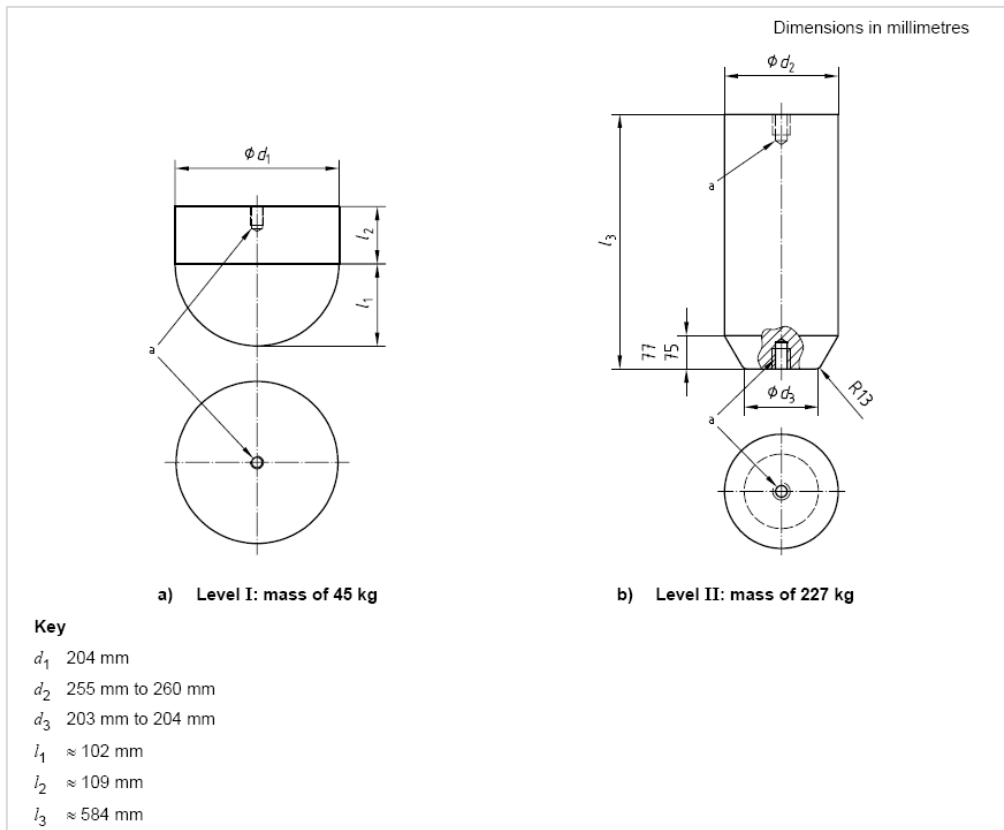


Figura 14. Geometría de los objetos de impacto

Tomado de International Organization for Standardization, 2005.

La prueba tendrá resultados satisfactorios cuando la estructura de protección pueda ser evaluado de acuerdo con la capacidad de resistir al impacto. El DVL no debiera ser tocado o invadido por ninguna parte de la FOPS durante el impacto o los sucesivos impactos, en caso contrario la prueba puede ser considerada como fallida. El criterio de aceptación de la prueba FOPS es verificar que resista el impacto y que cubra completamente la proyección vertical del DLV, además, el DLV no debe ser tocado por la deformación debido al impacto y la FOPS no debe ser penetrada por el objeto de prueba en el primer o subsecuentes impactos, caso contrario se considera que la FOPS tiene fallo de prueba (*International Organization for Standardization, 2005*).

2.7. Norma ISO 3471 (estructura de protección contra vuelcos)

Esta norma especifica los requisitos de rendimiento para la estructura de protección (cabina del operario) en caso de vuelco de máquinas de movimiento de tierra, así como una forma consistente y reproducible de evaluar el cumplimiento de estos requisitos por medio de las pruebas de laboratorio con una carga estática sobre la estructura representativa. Además, dicha norma es aplicable a estructuras de protección destinados a las máquinas móviles con el operador sentado con una masa de la máquina mayor o igual a 700 kg. La estructura de protección contra vuelcos es conocida como *Roll-Over Protective Structures* (en adelante por sus siglas en inglés, ROPS). Esta prueba es de tipo destructiva, para lo cual se debe identificar la estructura de protección y aislar la estructura representativa de la máquina la cual será sometida a la prueba, por lo que no es necesario toda la estructura del chasis o la máquina. La estructura de prueba debe ser fabricada bajo los mismos procedimientos, materiales y controles, como cualquier chasis, la estructura representativa puede ser fijada a una estructura de fijación, la cual debe tener como mínimo la misma rigidez que la estructura principal. La estructura de fijación no debe aportar ningún elemento de rigidez a la estructura de protección, los elementos de fijación entre la estructura de protección y la estructura de fijación deben recibir la menor cantidad de deflexión posible durante la prueba. El objetivo es que la estructura de protección soporte toda la energía de deformación sin tener ninguna influencia de otro componente estructural que no pertenezca a la estructura de protección. Algunos ejemplos de cómo se debe realizar la fijación de la estructura de protección son indicados en la norma como referencia y a continuación se muestran dos de dichos ejemplos.

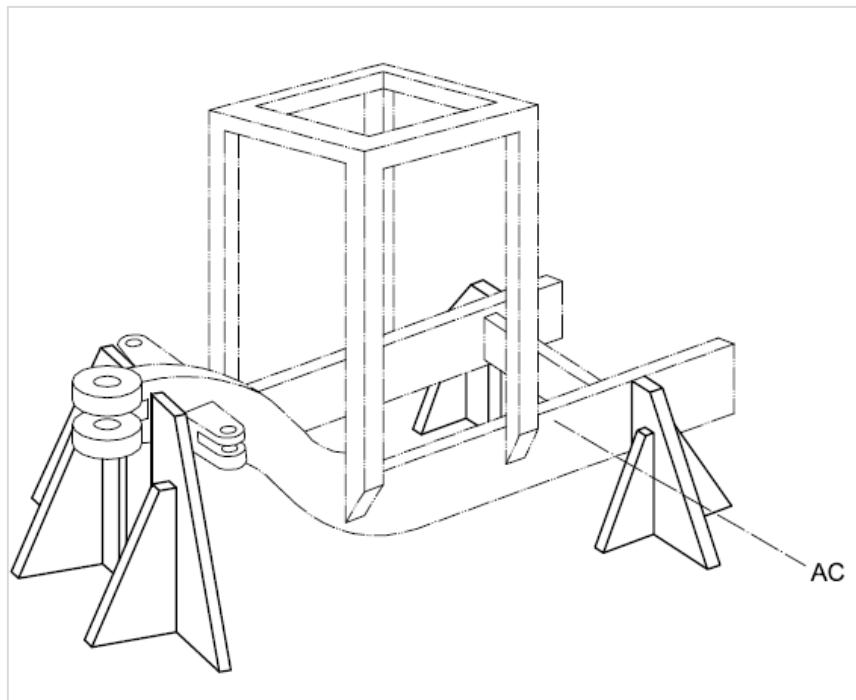


Figura 15. Fijación de la estructura de protección de un chasis semi articulado

Tomado de International Organization for Standardization, 2005.

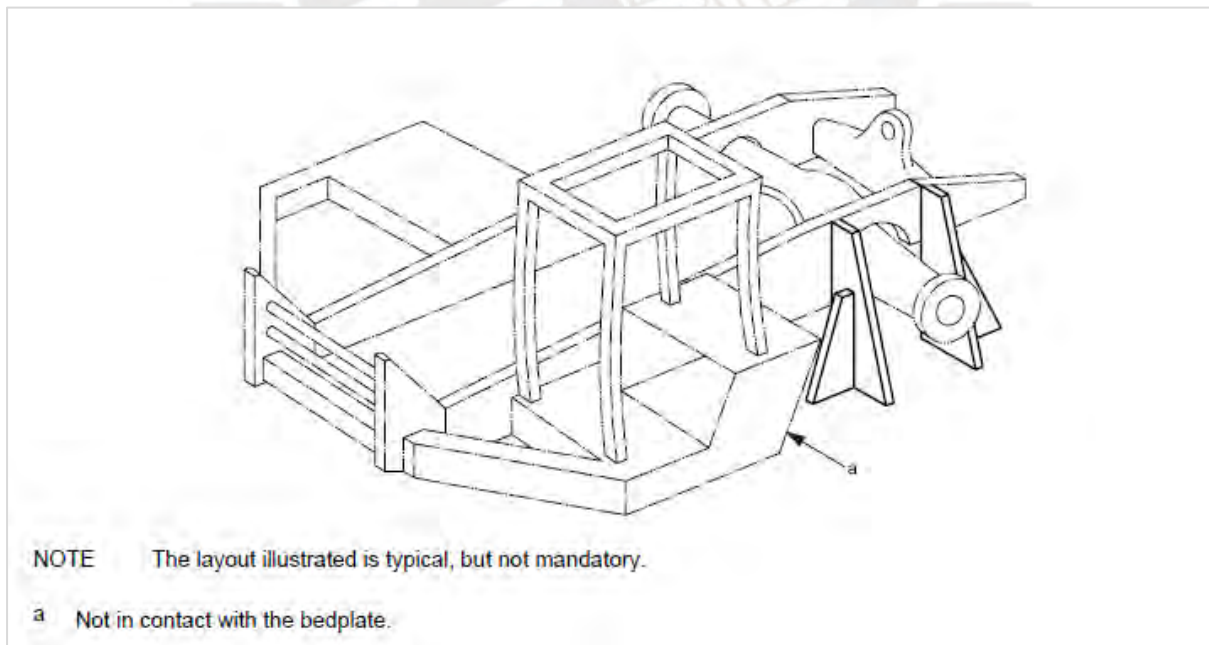


Figura 16. Fijación de la estructura de protección del chasis de un tractor

Tomado de International Organization for Standardization, 2008.

2.7.1. Aplicación de Fuerzas de Prueba.

Posterior a la fijación de la estructura de protección se procede a realizar la ubicación de las fuerzas de prueba que previamente fueron marcadas en el chasis de prueba, esta prueba requiere de la aplicación de tres fuerzas:

- Fuerza lateral.
- Fuerza vertical.
- Fuerza longitudinal.

La fuerza lateral puede ser aplicada mediante un accesorio soldado a una viga de la estructura que permita la distribución de la fuerza sobre el componente estructural para evitar fuerzas de penetración en el componente estructural. La longitud del accesorio de distribución de carga no debe ser mayor al 80% de la longitud de la ROPS. La ubicación de la fuerza lateral es indicada en los ejemplos referenciales que indica la norma, de los cuales se muestra uno de los ejemplos que es el que se usó en el presente estudio (figura 17). Cuando el asiento del operador está del eje longitudinal de la máquina, la carga longitudinal debe estar en contra, al lado externo lateral de la estructura más cercana al asiento. La dirección inicial de la carga debe ser horizontal y perpendicular al plano que atraviesa el eje longitudinal de la máquina. A causa de las deformaciones en la estructura la carga aplicada puede variar su dirección, esto es admitido según la norma referida. La carga puede ser considerada estática si la ratio de deflexión en el punto de aplicación de la carga no es mayor a 5 mm/s. Los valores de fuerza y de deflexión pueden ser registrados en incrementos de deflexión no mayores que 15 mm. La carga debe continuar hasta que la fuerza y energía sean alcanzadas según la tabla 2 (para aplicación en otro tipo de equipos puede consultar el documento ISO 3471).

Tabla 2

Fuerzas que aplicar de acuerdo con la masa del equipo

Maquinaria para movimiento de tierras sobre ruedas: Cargadores, Hojas de empuje, Tiendutubos, Cargadores compactas, retro excavadoras, zanjadoras				
Masa de la Máquina m kg	Fuerza lateral F N	Carga de energía lateral U J	Fuerza vertical F N	Fuerza Longitudinal F N
$700 < m \leq 10000$	6m	$12500(m/10000)^{1.25}$		4.8m
$10000 < m \leq 128600$	$60000(m/10000)^{1.2}$	$12500(m/10000)^{1.25}$	19.61m	$48000(m/10000)^{1.2}$
$m > 128600$	10m	2.37m		8m

Nota. Tomado de "ISO 3471", por International Organization for Standardization, 2008.

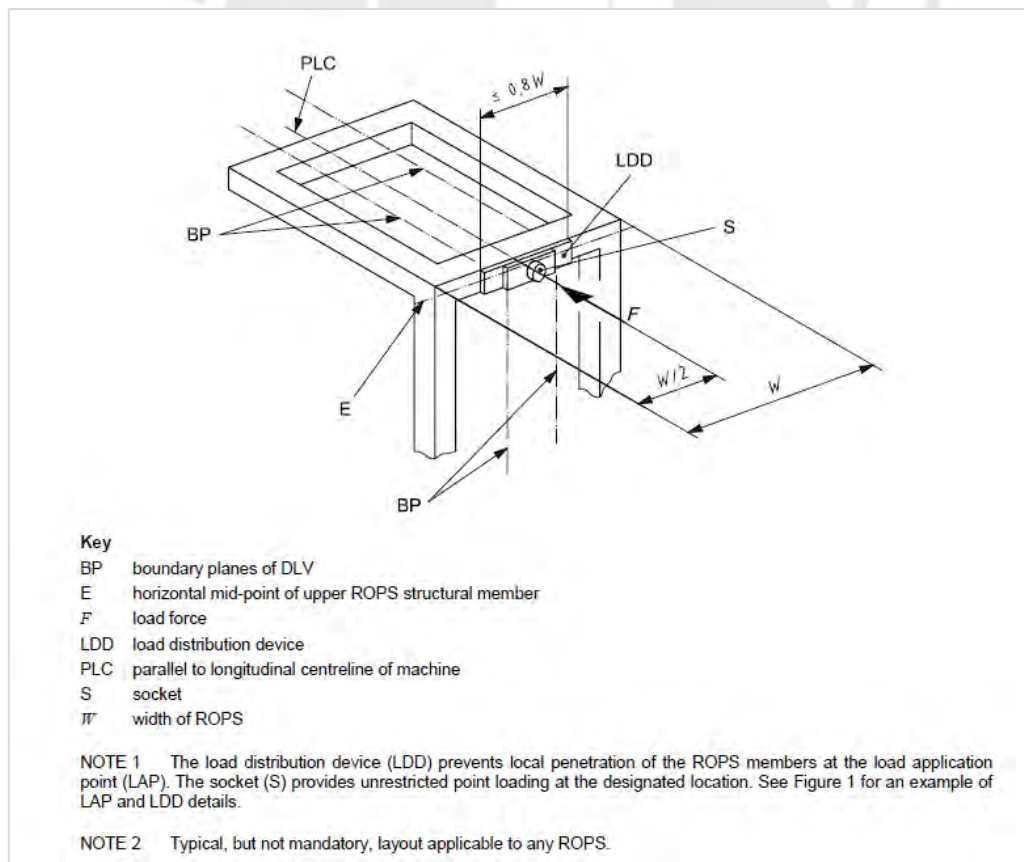


Figura 17. Ejemplo de la aplicación de la fuerza lateral

Tomado de International Organization for Standardization, 2008.

La energía lateral puede ser calculada de acuerdo con la figura 18. La medida de la deflexión usada en el cálculo de la energía es a lo largo de la línea de la fuerza aplicada.

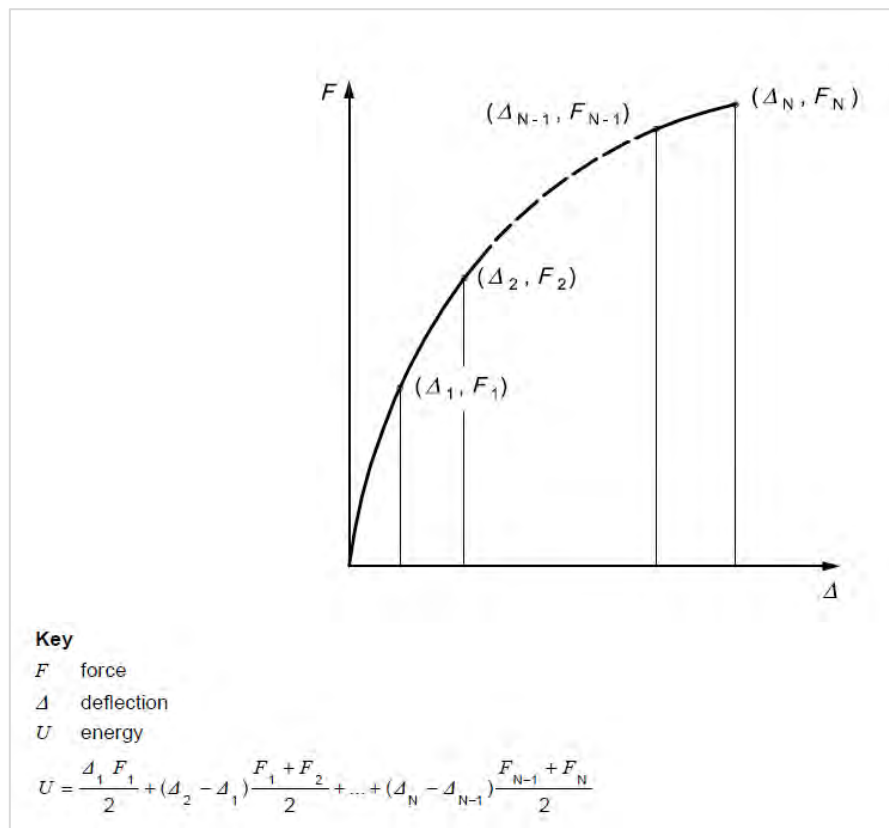


Figura 18. Diagrama fuerza de deflexión (curva para la prueba de carga)

Tomado de International Organization for Standardization, 2008.

La fuerza vertical debe ser ejecutada después de la aplicación de la fuerza horizontal. La carga se aplica en la parte superior del ROPS, dicha carga puede ser aplicada sin limitación sobre la manera de distribución, la ubicación de la carga es simétrica con el eje central de la estructura ROPS. La figura 19 muestra un ejemplo de la aplicación de la carga. La aplicación de la carga debe considerarse estática bajo los mismos criterios mencionados para la carga lateral y debe aplicarse hasta alcanzar los valores determinados por las fórmulas de la tabla 2.

La estructura ROPS debe soportar esta carga por un periodo de 5 minutos o hasta que cese cualquier deformación (cualquiera que sea más corto).

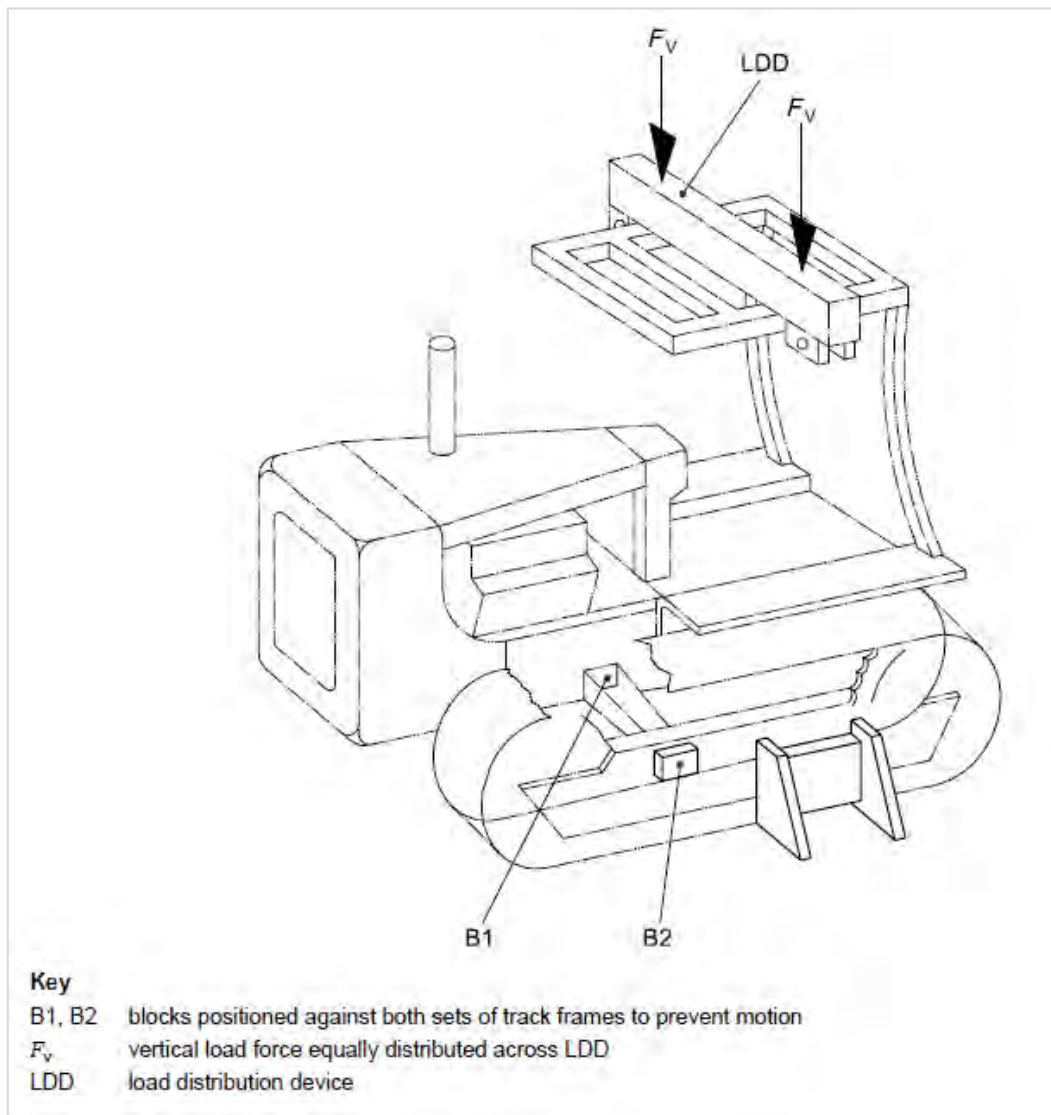


Figura 19. Diagrama de fuerza de flexión (curva para la prueba de carga)

Tomado de International Organization for Standardization, 2008.

La carga longitudinal debe ser ejecutada luego de la aplicación de la carga vertical, esta carga puede ser aplicada en la parte superior de los componentes estructurales de la ROPS a lo largo del eje longitudinal de la ROPS. El punto de aplicación de la carga es determinado usando

la intersección de los planos de la parte frontal y superior, un ejemplo del punto de aplicación de la carga se muestra en la figura 20. Para la ubicación de la aplicación de la carga respecto a la ROPS será elegida aquella que presente mayores exigencias. La carga al inicio de la prueba debe estar en una dirección horizontal y paralela al eje longitudinal. La aplicación de la carga debe considerarse estática bajo los mismos criterios mencionados para la carga lateral y debe aplicarse hasta alcanzar los valores determinados por las fórmulas de la tabla 2.

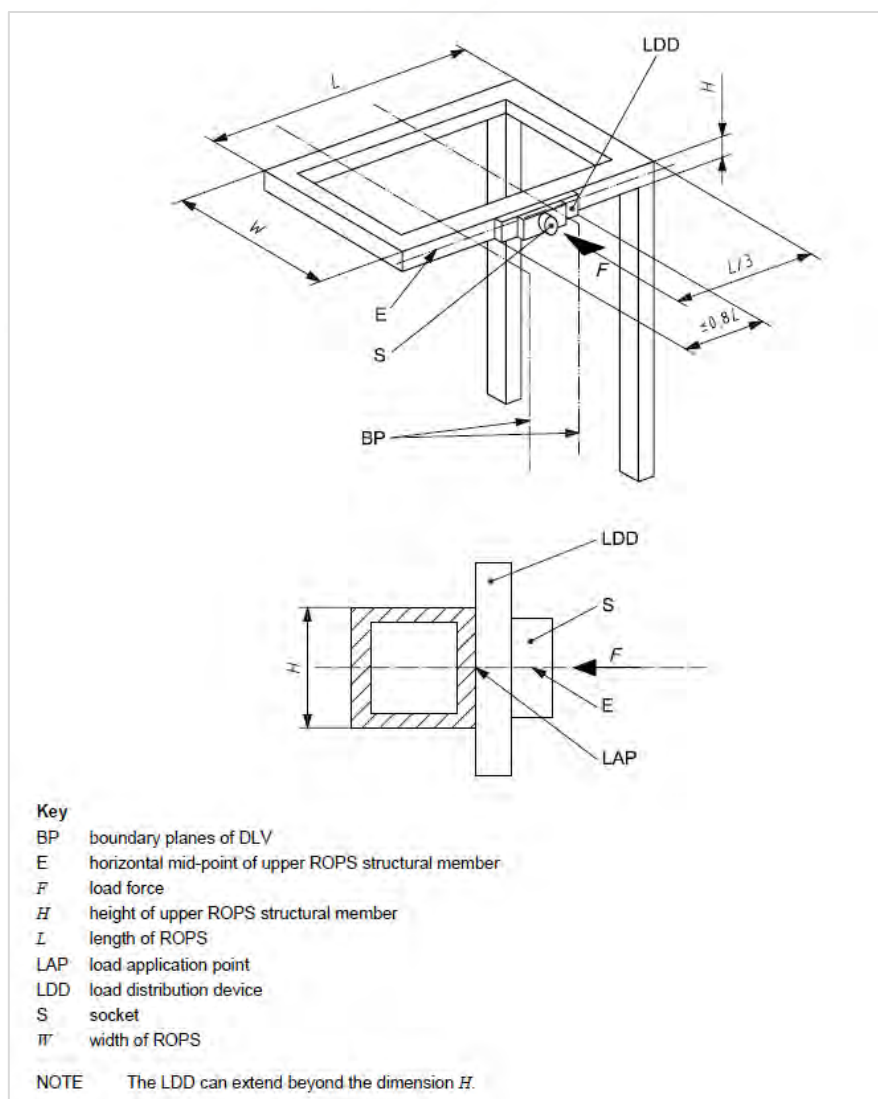


Figura 20. Ejemplo de la aplicación de la fuerza longitudinal

Luego de aplicada las cargas de prueba se debe tener en cuenta los criterios de aceptación los cuales son:

- La fuerza y la energía lateral no requieren alcanzar sus valores simultáneamente, uno puede superar a la otra antes de alcanzar su nivel requerido. Si la fuerza se alcanza antes que la energía, la fuerza puede disminuir, pero volverá a alcanzar el nivel requerido luego que la energía requerida ha sido alcanzada.
- Ninguna parte de la ROPS puede penetrar la DVL en ningún momento durante las fases de aplicación de las cargas lateral, vertical y longitudinal.
- Durante la aplicación de la carga longitudinal con la cara del operador mirando en la dirección longitudinal (ver figura 21 b) o en la aplicación de la carga lateral con la cara del operador mirando en la dirección de la fuerza lateral. Está permitido que parte de la DVL rote 16° respecto a la *Seat Index Point* (en adelante por sus siglas, SIP) sin que sea penetrado por la estructura ROPS.

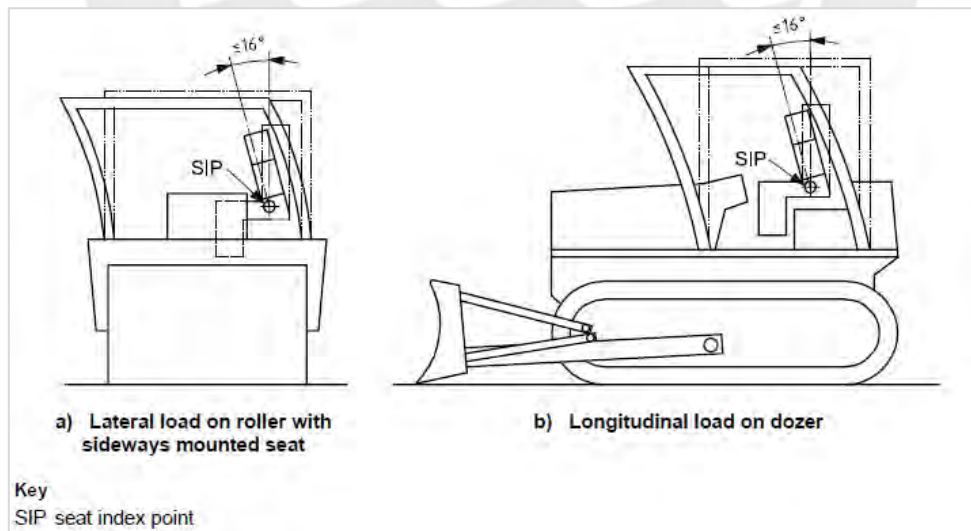


Figura 21. Rotaciones permitidas para el DVL

Tomado de International Organization for Standardization, 2008.

2.8. El Método de los Elementos Finitos

A continuación, se revisa el Método de Elementos Finitos (en adelante por sus siglas, MEF), el cual, dependiendo del tipo de fenómeno que deseamos simular, tiene diferentes algoritmos matemáticos que permiten la solución de las ecuaciones que rigen el comportamiento estructural.

2.8.1. Fundamentos de los Elementos Finitos y Discretización.

Cuando se diseñan estructuras o maquinarias, es común que los diseñadores se encuentren con sistemas continuos cuyo análisis requiere de métodos que contemplen su naturaleza de continuidad. Hasta la llegada del MEF, los sistemas continuos se analizaban con métodos analíticos, pero solo para aplicaciones de elementos con geometrías básicas o sencillas y con condiciones de contorno simples. El MEF es un método que divide el elemento continuo en una cantidad de elementos finitos que tienen interacción en la unión (de los nodos) entre elementos y en cada nodo se permite la deformación lineal y/o rotacional que depende del análisis que se requiera realizar. La etapa de dividir el elemento continuo en un número finito de elementos se le llama discretización. La discretización viene dada por los siguientes pasos:

- El elemento continuo se divide por medio uno de los elementos básicos, como elementos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales, cuya geometría debe ser sencilla y normalizada (estos elementos se llaman elementos finitos).
- Los elementos finitos se unen entre sí en puntos contiguos llamados nudos.
- Los desplazamientos de los nudos son las incógnitas para determinar mediante este método (estos desplazamientos determinan la configuración de la deformada del sistema), solo los desplazamientos nodales se consideran independientes.
- El desplazamiento de un punto cualquiera viene determinado por los

desplazamientos de los nudos del elemento al que pertenece el punto. Para ello se definen para cada elemento unas funciones de interpolación que permiten calcular el valor de cualquier desplazamiento interior por interpolación de los desplazamientos nodales. Estas funciones de interpolación tienen que ser compatibles con las deformaciones en los contornos de unión de los elementos.

- Las funciones de interpolación y los desplazamientos nodales definen el estado de deformaciones unitarias en el interior del elemento y mediante las ecuaciones constitutivas del material se define el estado de tensiones en el elemento y en sus bordes.
- Para cada elemento finito existe un sistema de fuerzas concentradas en los nudos que se equilibran con las tensiones existentes en el contorno del elemento y las fuerzas exteriores.

A continuación, se mostrará algunos elementos importantes:

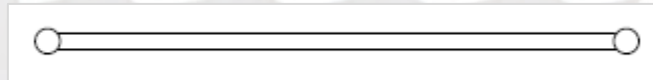


Figura 22. Elemento unidimensional

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

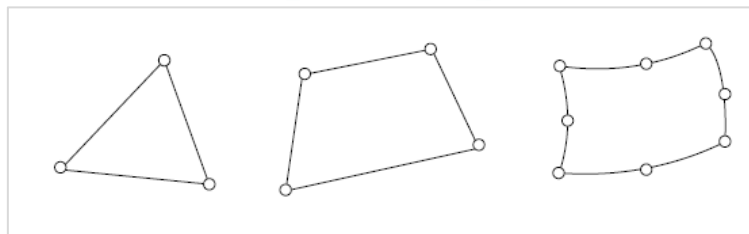


Figura 23. Elemento bidimensional

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

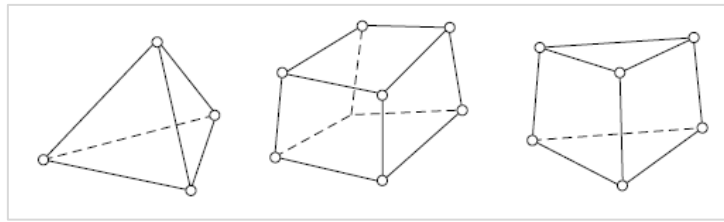


Figura 24. Elemento tridimensional

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

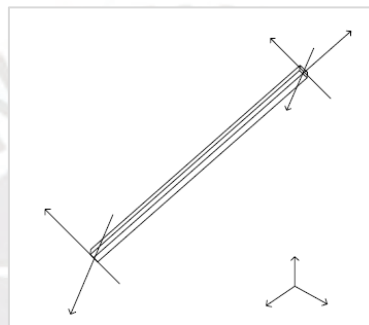


Figura 25. Elemento viga

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

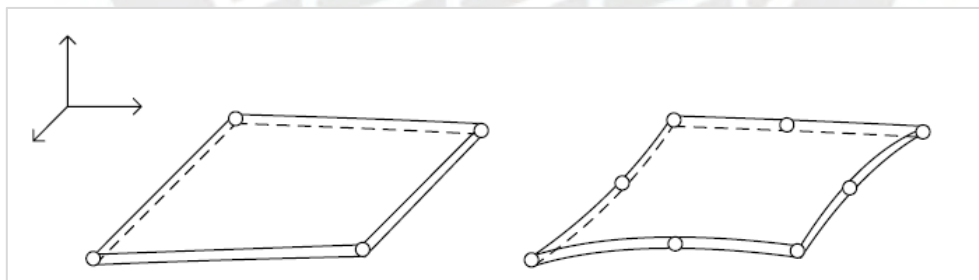


Figura 26. Elemento placa plana

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

2.8.2. Ecuaciones Generales para el MEF.

El campo de las deformaciones en un punto cualquiera del dominio está definido por un

vector que cuenta con componentes en la misma cantidad de las deformaciones, para el caso de un problema espacial el vector presenta la siguiente caracterización:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases} \quad (32)$$

En el interior del elemento finito las deformaciones se aproximan haciendo uso de la hipótesis de interpolación como un promedio ponderado de las deformaciones en cada uno de los nudos del elemento, siendo los factores de ponderación las funciones de interpolación:

$$u = \sum N_i V_i \quad (33)$$

$$v = \sum N_i V_i \quad (34)$$

$$w = \sum N_i V_i \quad (35)$$

De manera matricial la ecuación de interpolación sería la siguiente:

$$u = N\delta^e$$

Donde

$$\delta^e = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ \dots \ U_n \ V_n \ W_n]^T \quad (36)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

Para las deformaciones unitarias se tiene:

$$\varepsilon = B\delta^e \quad (38)$$

Donde:

$$B = \partial \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (39)$$

La ecuación constitutiva quedaría del siguiente modo:

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (40)$$

Siendo:

- D la matriz elástica que para un material elástico y lineal es constante y depende de dos parámetros, el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν .
- ϵ_0 el vector de las deformaciones unitarias iniciales en el material en el punto considerado (las más habituales son las debidas a las temperaturas).
- σ_0 las tensiones iniciales presentes en el material, que normalmente son tensiones residuales debidas a procesos anteriores sobre el material como el tratamiento térmico, entre otros.

2.8.2.1. Ecuación de equilibrio para el análisis estático.

Considerando un elemento finito cualquiera y las fuerzas que actúan sobre ella. Para el caso más general se muestra la siguiente figura:

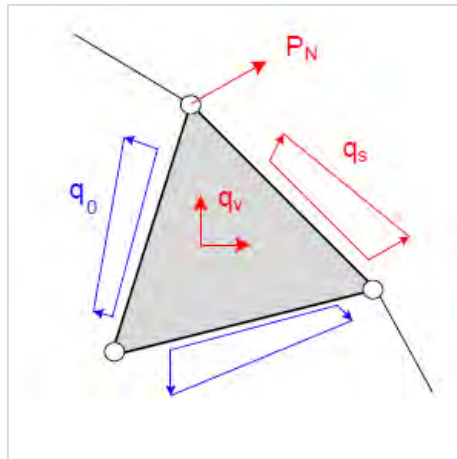


Figura 27. Fuerzas actuantes sobre un elemento finito

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

Siendo:

- q_v las fuerzas exteriores de volumen aplicadas en el interior del elemento y que tiene tantas componentes como desplazamientos haya en cada punto.
- q_s las fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre del elemento, que son en general variables a lo largo del contorno. El contorno donde se aplican estas fuerzas de superficie se denomina s .
- q_c las fuerzas interiores aplicadas en la superficie del contorno de unión del elemento con los elementos contiguos, dicho contorno se denomina c .
- P_N fuerzas exteriores puntuales aplicadas sobre los nudos del elemento.

Según la gráfica mostrada en la figura 27 se puede realizar el análisis por medio del principio del trabajo virtual, el cual es un método muy útil para resolver problemas en mecánica de sólidos y en mecánica estructural. Este método consiste en que al aplicar un desplazamiento hipotético del elemento que es consistente con las restricciones geométricas, las fuerzas aplicadas se mantienen constantes durante el desplazamiento virtual (este análisis se puede

aplicar a problemas elásticos lineal como no lineales). La ecuación que cumple este principio viene dada del siguiente modo:

$$\delta W^e = \int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds + \int_c \delta u^T q_c ds + \delta \delta^e P_N^e \quad (41)$$

Siendo:

- δu el desplazamiento virtual en el campo de las deformaciones u .
- $\delta \delta^e$ es la variación correspondiente a los grados de libertad de los nudos, durante estas variaciones las fuerzas exteriores permanecen constantes.

Para el que exista equilibrio en el elemento, el trabajo virtual de las fuerzas debe ser igual a la variación de energía potencial elástica U acumulada en el elemento debido al desplazamiento virtual.

$$\delta W^e = \int_v \delta \epsilon^T \sigma dv = \delta U^e \quad (42)$$

Siendo:

- $\delta u = N \delta \delta^e$ la variación virtual para la interpolación de deformaciones.
- $\delta \epsilon = B \delta \delta^e$ la variación de las deformaciones unitarias en relación con la variación de las deformaciones nodales a través de la matriz B .

Si se sustituyen las variaciones de δu y $\delta \epsilon$ en las ecuaciones (41) y (42) respectivamente y estas se igualan, se obtiene la ecuación de equilibrio aproximada mediante la hipótesis de interpolación de deformaciones, además considerando que la ecuación debe cumplirse para cualquier variación arbitraria de las deformaciones se obtiene que:

$$\int_v N^T q_v dv + \int_s N^T q_s ds + \int_c N^T q_c ds + P_N^e = \int_v B^T \sigma dv \quad (43)$$

Si se sustituye el esfuerzo mediante la ecuación constitutiva (40), así como el valor de la

deformación unitaria en función de la matriz B y se reemplazan las fuerzas distribuidas q_c por fuerzas que están aplicadas sobre los nudos del elemento P_c^e que son equivalentes a las fuerzas distribuidas aplicadas sobre los contornos de unión con elementos contiguos (ambas fuerzas producen el mismo trabajo virtual), se pueden reordenar los términos, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$\int_v N^T q_v dv + \int_s N^T q_s ds + \int_v B^T D \epsilon_0 dv - \int_c B^T \sigma_0 dv + P_c^e + P_N^e = \int_v B^T D B dv \delta^e \quad (44)$$

Esta ecuación es la ecuación final de equilibrio del elemento finito para el caso más general, de la cual se pueden identificar los siguientes términos:

- $\int_v B^T D B dv = K^e$ es la matriz de rigidez del elemento finito, la cual es una matriz cuadrada simétrica de tamaño igual al número de grados de libertad.
- $\int_v N^T q_v dv = P_v^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas actuantes por unidad de volumen.
- $\int_s N^T q_s ds = P_s^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie.
- $\int_v B^T D \epsilon_0 dv = P_T^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales existentes en el material.
- $\int_c B^T \sigma_0 dv = P_b^e$ es el vector fuerzas nodales equivalentes debido a las tensiones iniciales existentes en el material.

Por lo tanto, puede reescribirse la ecuación (44) de manera simplificada como sigue:

$$K^e \delta^e = P_v^e + P_s^e + P_T^e + P_b^e + P_c^e + P_N^e \quad (45)$$

Esta ecuación es la base para los análisis de cualquiera de los elementos finitos, desde los unidimensionales hasta los tridimensionales.

2.8.3. Ecuaciones Generales Para el Análisis Dinámico.

En este apartado se revisan las ecuaciones del comportamiento de una estructura sometida a fuerzas exteriores que son variables en el tiempo. Por lo tanto, las fuerzas exteriores y las deformaciones también varían en el tiempo, con lo cual es necesario realizar un análisis dinámico en el que además de la rigidez de la estructura se deberá tener en cuenta la inercia.

2.8.3.1. Ecuación de trabajo virtual.

Considerando un sólido deformable sometido a un sistema de cargas variables en el tiempo, que de manera más general son:

- Fuerza de volumen $q_v(t)$.
- Fuerzas de superficie $q_s(t)$.
- Fuerzas puntuales $P(t)$.

En el campo de los desplazamientos en el interior del sólido se tienen las siguientes variables

- Deformaciones en variables $u(t)$.
- Esfuerzos $\sigma(t)$.
- Deformaciones unitarias $\epsilon(t)$.

Bajo las cargas y las variables indicadas puede aplicarse el principio de trabajo virtual al campo de deformaciones δu producido por las fuerzas de volumen y de superficie, obteniéndose la siguiente ecuación.

$$\delta W = \int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds \quad (46)$$

El trabajo virtual producido por las fuerzas de inercia es:

$$\delta W_{IN} = \int_v \delta u^T q_{IN} dv = - \int_s \delta u^T \rho \ddot{u} dv \quad (47)$$

Sumando ambos trabajos virtuales y realizando el desarrollo respectivo como para el caso del análisis estático se obtiene la siguiente ecuación:

$$\delta W + \delta W_{IN} = \int_v \delta \epsilon^T \sigma dv \quad (48)$$

Sustituyendo los trabajos virtuales por sus expresiones previamente desarrolladas se obtiene la ecuación final del principio de los trabajos virtuales en régimen dinámico para el sólido deformable.

$$\int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds - \int_s \delta u^T \rho \ddot{u} dv = \int_v \delta \epsilon^T \sigma dv \quad (49)$$

2.8.3.2. Principio de Hamilton.

El principio de Hamilton es el equivalente en el régimen dinámico al principio de la mínima energía potencial para el caso estático. La expresión del principio de Hamilton cuenta con la función lagrangiana $L = T - U - V$, con lo que el principio puede enunciarse como todas las posibles configuraciones que una estructura puede adoptar a lo largo de un intervalo de tiempo, aquella que satisface el equilibrio es la que hace estacionaria la integral de la lagrangiana L durante dicho intervalo de tiempo.

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt \right) = 0 \quad (50)$$

2.8.3.3. Ecuación de equilibrio dinámico de un elemento finito.

Considerando un elemento cualquiera en el que actúan las fuerzas exteriores de volumen q_v , las fuerzas exteriores de superficie aplicadas en el contorno libre q_s , las fuerzas interiores de superficie q_c y las fuerzas puntuales aplicadas sobre los nudos P_N , como se muestra en la figura 28:

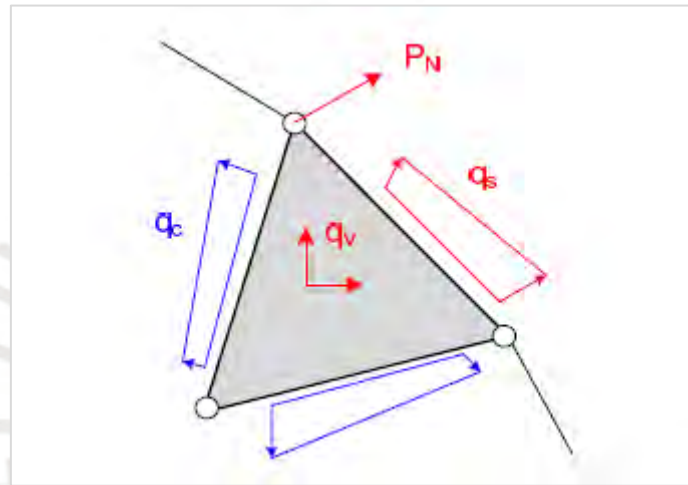


Figura 28. Fuerzas actuantes sobre un elemento finito

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

Aplicando el principio de trabajo virtual, el cual suma el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas y las fuerzas inerciales, se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico del elemento:

$$\int_v \delta u^T q_v dv + \int_s \delta u^T q_s ds + \int_c \delta u^T q_c ds + \delta \delta^{eT} P_N^e - \int_v \delta u^T \rho \ddot{u} dv = \int_v \delta \epsilon^T \sigma dv \quad (51)$$

Si aplicamos la hipótesis de interpolación de deformaciones, en el campo de las aceleraciones, esta viene dada por la segunda derivada de la ley de interpolación, mientras que

las funciones de interpolación se mantienen constantes porque no dependen del tiempo.

$$\ddot{u} = N\ddot{\delta}^e \quad (52)$$

Reemplazando la aceleración en términos de la variación como indica la ecuación 52 en la ecuación 51 y siendo:

- $\delta u = N\delta\delta^e$ la variación virtual para la interpolación de deformaciones.
- $\delta\epsilon = B\delta\delta^e$ la variación de las deformaciones unitarias en relación con la variación de las deformaciones nodales a través de la matriz B .

Se obtiene la ecuación para cualquier variación arbitraria:

$$\int_v N^T q_v dv + \int_s N^T q_s ds + \int_c N^T q_c ds + P_N^e - \int_v N^T \rho N dv \delta^e = \int_v B^T \sigma dv \quad (53)$$

Al igual que en el análisis del caso estático, las fuerzas distribuidas q_c se reemplazan por unas fuerzas aplicadas sobre los nodos del elemento, las que producen el mismo trabajo virtual que las fuerzas distribuidas:

$$\int_c N^T q_c ds = P_c^e \quad (54)$$

También se puede reemplazar el valor de la tensión mediante la ecuación constitutiva y si además se sustituye el valor de la deformación unitaria en función de la matriz B , se obtiene la ecuación final de equilibrio dinámico para el elemento finito:

$$\int_v N^T q_v dv + \int_s N^T q_s ds + \int_v B^T D \epsilon_0 dv - \int_c B^T \sigma_0 dv + P_c^e + P_N^e = \int_v B^T D B dv \delta^e + \int_v N^T \rho N dv \delta^e \quad (55)$$

Si se compara la ecuación 55 con la ecuación 44 del caso estático, se puede identificar que ambas ecuaciones tienen los mismos términos, a excepción de un término nuevo, que corresponde a las fuerzas de inercia:

- $\int_v N^T \rho N dv = M^e$ es la matriz de inercia del elemento, que representa la masa en el interior del elemento y define las fuerzas de inercia que aparecen en sus grados de libertad.
- $\int_v B^T D B dv = K^e$ es la matriz de rigidez del elemento finito, la cual es una matriz cuadrada simétrica de tamaño igual al número de grados de libertad.
- $\int_v N^T q_v dv = P_v^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas actuantes por unidad de volumen.
- $\int_s N^T q_s ds = P_s^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de superficie.
- $\int_v B^T D \epsilon_0 dv = P_T^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes producidas por las deformaciones iniciales existentes en el material.
- $\int_c B^T \sigma_0 dv = P_b^e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las tensiones iniciales existentes en el material.

Por lo tanto, puede reescribirse la ecuación 55 de manera simplificada como sigue:

$$K^e \delta^e + M^e = P_v^e + P_s^e + P_T^e + P_b^e + P_c^e + P_N^e \quad (56)$$

2.8.4. Comparación Entre los Métodos de Integración Implícitos y Explícitos

Aplicados a los Elementos Finitos.

Los problemas temporales se pueden clasificar de acuerdo con la tasa de cambio en la tasa de cantidad de movimiento, por lo que en los análisis estáticos se puede entender que el

fenómeno llega a un estado donde ya no hay cambios en los estados de cantidad de movimiento o fuerza y hay un balance total entre fuerzas internas y externas, sin ningún desequilibrio que genere un desbalance inercial. Para un análisis cuasi estático existe un movimiento de los estados inerciales (pero muy pequeño con respecto al balance de fuerzas), aquí se pueden hacer algunas asunciones para resolver el problema mediante métodos implícitos por ser eficiente en este campo. Para problemas dinámicos los términos inerciales son bastante importantes en los cambios temporales y deben ser tomados en cuenta los términos temporales (así, el método explícito es más robusto que el método implícito).

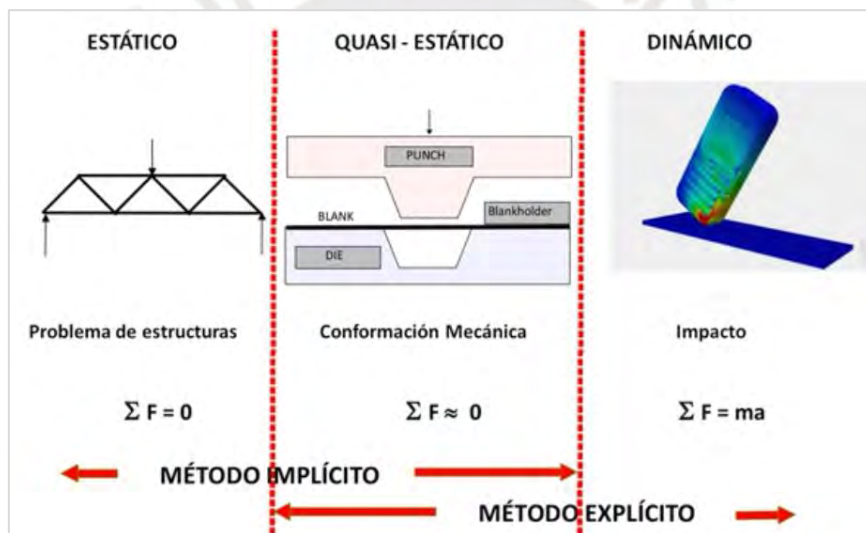


Figura 29. Tipos de análisis estructurales

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

Para poder hacer la clasificación y decidir que método se debe usar para los casos mencionados debe considerarse la magnitud del tiempo en el cual ocurre el fenómeno en estudio (como se muestra en la figura 30):

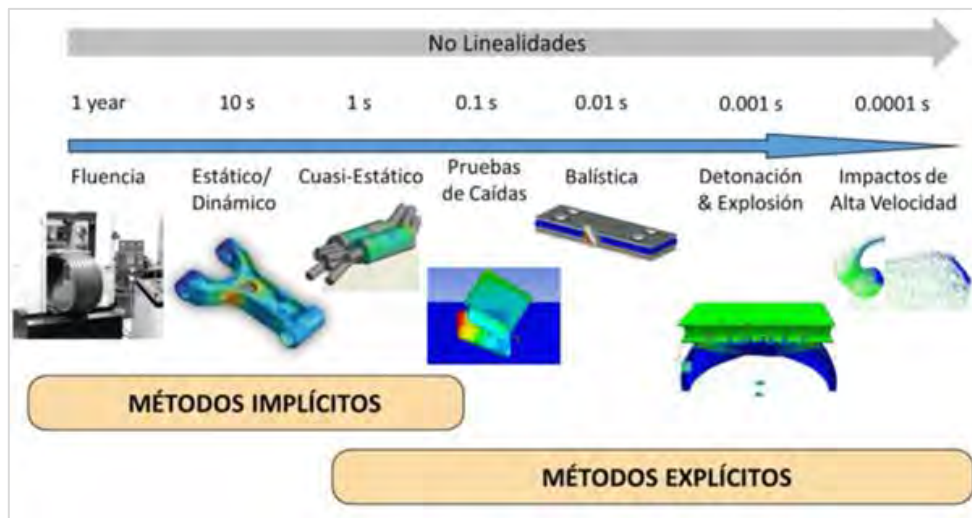


Figura 30. Aplicación de los métodos de integración según el tiempo de duración

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

En las escalas de las pruebas de caídas en adelante se puede apreciar que el método de integración explícita es la mejor opción para la solución de las ecuaciones de continuidad y conservación de los elementos finitos. El método explícito es más preciso y eficiente para las simulaciones que involucran los siguientes fenómenos:

- Propagación de ondas.
- Grandes desplazamientos y deformaciones.
- No linealidades del material.
- Contactos avanzados.
- Erosión, falla y fragmentación.
- Pandeo no lineal.

Entre las ventajas del método de integración explícito se consideran las siguientes:

- No presenta problemas de convergencia en problemas no lineales.
- No requiere iteraciones de equilibrio.

- Facilidad de modelar la falla en los materiales.
- Los problemas con alta frecuencia son considerados automáticamente gracias a los pequeños incrementos de tiempo.
- Facilidad de acoplamiento con métodos implícitos para problemas multietapa.
- Amplia gama de modelos de materiales, formulaciones de elementos y parámetros de solución disponibles.

2.8.4.1. Formulación del método implícito.

La ecuación de movimiento resuelta por el método implícito es un análisis dinámico es la siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (57)$$

Donde:

- m es la matriz de masa.
- c es la matriz de amortiguamiento.
- k es la matriz de rigidez.
- $F(t)$ es el vector de fuerzas.

El método de *Newmark* o HHT es el más utilizado para resolver esta ecuación en los instantes sucesivos de tiempo de análisis, los incrementos entre cada solución son denominados integración o *steps*. Para los problemas lineales el método implícito es incondicionalmente estable para ciertos parámetros de integración. Por lo tanto, el incremento de tiempo se elige sólo sobre la base de criterios de precisión y eficiencia. Para los casos de no linealidad, la solución se obtiene con una serie de aproximaciones lineales sucesivas como el que se aplica en el método de Newton Raphson, por lo que cada incremento de tiempo puede requerir muchas

iteraciones de la ecuación de equilibrio. La solución requiere la inversión de la matriz de rigidez, en cada incremento de tiempo, además, los incrementos de tiempo deben ser muy pequeños para obtener convergencia. No se tiene una garantía de convergencia cuando se aplica el método implícito a problemas altamente no lineales. En el análisis implícito pueden considerarse elementos de segundo orden para mejorar la precisión de la solución, pero solo para análisis estáticos.

2.8.4.2. Formulación del método explícito.

La formulación del método explícito puede efectuarse de la siguiente manera:

- Las ecuaciones resueltas por un análisis de dinámica explícita plantean la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía.
- En conjunto con los modelos del material, las condiciones iniciales y de contorno, estas ecuaciones definen la solución completa del problema.
- En caso de la formulación lagrangiana, la malla se mueve y se distorsiona juntamente con el material, de modo que la conservación de masa es satisfecha automáticamente
- En cada incremento de tiempo la conservación de masa y la cantidad de movimiento están garantizadas. La conservación de la energía debe ser verificada por el usuario (como será abordado más adelante).

$$M\ddot{x} = F^{ext} + F^{int} + H \quad (58)$$

Donde:

- M es la matriz diagonal de masa.
- \ddot{x} aceleraciones nodales.

- F^{ext} vector de fuerzas externas.
- F^{int} vector de fuerzas internas.
- H es la resistencia Hourglass.

Con las aceleraciones en el tiempo n calculadas, las velocidades en tiempo $n + \frac{1}{2}$ son obtenidas por:

$$\dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_i^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{x}_i^n \Delta t^n \quad (59)$$

Las posiciones nodales son actualizadas en el tiempo $n + 1$ por integración de las velocidades:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \dot{x}_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (60)$$

La ventaja de la integración para problemas no lineales viene dada por que las ecuaciones a ser resueltas están desacopladas, pudiendo ser resueltas directamente sin iteraciones, además, otra ventaja es que no es necesario realizar la inversión de matrices ya que todas las no linealidades están incluidas en el vector de fuerzas internas. Para garantizar la estabilidad y precisión de la solución del incremento de tiempo utilizado en los análisis explícitos, esta solución está limitada por un criterio conocido por CFL (a partir del nombre de sus idealizadores: Courant, Friedrichs y Levy). Esta condición implica que una onda mecánica que se propague por el medio del material no puede desplazarse más que la menor dimensión característica entre todos los elementos de la malla de un único incremento de tiempo, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\Delta t \leq f \left[\frac{l}{c} \right]_{min} \quad (61)$$

Donde:

- Δt es el incremento de tiempo.
- f es un factor de estabilidad.
- l es la menor dimensión característica entre los elementos del modelo.
- c es la velocidad del sonido en este elemento.

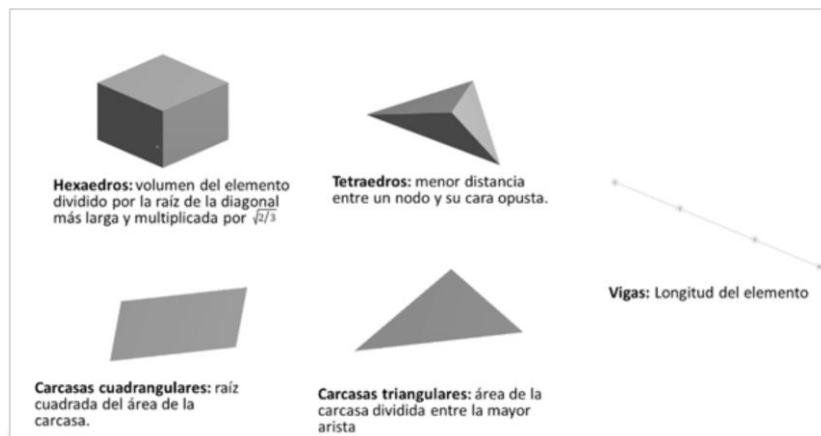


Figura 31. Dimensiones características en función de la forma del modelo

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

En general, los incrementos de tiempo utilizados en los análisis explícitos serán mucho menores que los de los análisis implícitos. El valor mínimo de $\frac{l}{c}$ para todos los elementos del modelo se utiliza para calcular el *time step*, lo que significa que la duración real de la simulación se da por el menor elemento del modelo. En el análisis explícito los elementos es de primer orden, puesto que ganar precisión con elementos de segundo orden significaría una gran carga computacional por los cálculos que debe realizarse en cada *time step*.

2.8.4.3. *Peso computacional.*

Los métodos implícitos y explícitos difieren también en las estimaciones de esfuerzo

computacional para solucionar un determinado problema. En un método explícito, como las ecuaciones son desacopladas en un incremento de tiempo razonablemente constante, la duración de un análisis es aproximadamente proporcional al número de grados de libertad del modelo. En comparación, en un método implícito (dado de que es necesaria la inversión de matrices y que la no linealidad esta incluso en la matriz de rigidez) el tiempo para la solución crece de forma más pronunciada.



3. Desarrollo del Procedimiento Para Simular una Estructura de Protección Bajo la Norma ISO 3449 y 3471

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se mostró de manera resumida el marco teórico requerido para el análisis de problemas con comportamiento plástico o no lineal y problemas de impacto o dinámicos, así mismo, se mostraron los fundamentos de los elementos finitos para el análisis lineal, no lineal y dinámico. En el presente capítulo se presenta el procedimiento general basado en las herramientas computacionales de simulación numérica como alternativa a los ensayos destructivos para aplicar las normas, ISO 3449 y 3471, en cabinas de protección de operadores para equipos de movimiento de tierras empleados en la minería subterránea. Para una mejor comprensión de los procedimientos se menciona cada una de las etapas y una explicación del alcance de cada una de las etapas, presentándose un diagrama de flujo como resumen del procedimiento.

3.2. Comprensión de la Solicitud de Diseño

En esta etapa el diseñador debe solicitar la lista de exigencias para el diseño de la cabina del operador, para ello puede hacerse uso de la lista de exigencias que se propone en la norma VDI 2221 del proceso generalizado de desarrollo y diseño. Con este formato se pueden ver claramente las características que deben cumplirse durante la etapa del modelamiento de la maqueta virtual. Para evitar el reproceso del modelamiento se misionan las exigencias más importantes que deben tenerse en cuenta en esta etapa.

3.2.1. Geometría o Dimensiones Requeridas.

Es importante conocer la geometría que debe tener la estructura, puesto que las máquinas

que operan en las unidades mineras de socavón deben tener dimensiones compatibles con las dimensiones de la galería donde se va a operar. Por lo tanto, esta exigencia es crítica para la operatividad del equipo, dado que, si no se cumple con las dimensiones solicitadas, simplemente el equipo no entrará en operaciones o no será adquirido por el cliente potencial.

3.2.2. Materiales para Fabricación.

Se deben conocer los materiales comerciales en la región donde se está fabricando la estructura, dado que no todos los materiales estructurales con sus especificaciones están disponibles en todos los países, para ello se requiere revisar las fichas técnicas de los materiales disponibles para proponer los materiales que serán usados para el análisis según los requerimientos de resistencia que se pueda tener a priori o por experiencia en otros diseños similares con el objetivo de cumplir con las normas ISO 3449 - 3471 y tener los pesos adecuados en la máquina (para no generar pérdidas de energía innecesarias por pesos excesivos).

3.2.3. Transporte.

Las máquinas que operan en la minería suelen trasladarse a lugares remotos de difícil acceso que incluso no son accesibles por vía terrestre. Por lo tanto, se debe tener clara la facilidad de que el equipo pueda desarmarse en componentes más pequeños y que pueda reensamblarse nuevamente en la zona de operación (esto implica el uso de componentes emperrados con facilidad de acceso).

3.2.4. Estabilidad.

Las condiciones donde operan las máquinas de la minería subterránea suelen ser muy difíciles en relación a la vía de trabajo, presentando muchas irregularidades y desniveles. Por

ello, la maquina debe contar con una buena estabilidad, siendo necesario mantener el centro de gravedad lo más bajo posible. Al respecto, si la cabina es muy pesada o con una geometría muy elevada del piso no contribuirá de manera positiva en este requerimiento.

3.2.5. Ergonomía.

La estructura de protección debe presentar dimensiones que permitan que el operador cuente con espacio para poder sentarse adecuadamente, para lo cual puede hacerse uso de las normas SAE J833 para la guía de las dimensiones de una persona estándar en la posición de sentado (el cual es la posición de operación del equipo).

3.2.6. Visibilidad.

La estructura de protección no debe interrumpir la visibilidad del operador. En este tipo de máquinas los equipos, al no poder girar para cambiar de sentido de dirección, deben operarse permanentemente hacia adelante y en reversa, es por ello que en muchos casos el operador se ubica de forma lateral a la máquina para mantener una visión permanente tanto hacia adelante como hacia atrás.

3.2.7. Costo.

En el mercado global actual hay una gran competencia por entregar productos cada vez mejores a precios más accesibles, optimizando los diseños para que puedan soportar las solicitudes en donde se requiere y eliminado peso en zonas donde no existe las grandes solicitudes de resistencia. Siempre es importante solicitar el presupuesto asignado para la fabricación de la estructura para cuidar los márgenes que el proyecto requiere sin comprometer el buen desempeño del diseño de la estructura (en las solicitudes que las normas ISO 3449 y 3471 exigen).

3.2.8. Seguridad.

La seguridad solicitada está implícita en el desarrollo del cumplimiento de las normas ISO 3449 y 3471, pues actualmente la minería solicita que los equipos que ingresan al interior de una mina cumplan con estas normativas para que frente a situaciones extremas la vida del operario pueda garantizarse.

3.2.9. Fabricación.

La tecnología de fabricación es la que se aplica para la construcción de estructuras metálicas en los talleres de manufactura locales, el proceso principal de fabricación es el corte y soldeo de acero, para lo cual se deben exigir las calificaciones solicitadas a los soldadores y las inspecciones de calidad (todas ellas bajo la norma A.W.S. D1.1.). Aplicar otra normativa de fabricación quedara a criterio de la normativa de la región donde se esté fabricando, sin embargo, el objetivo es que el diseño evite tener defectos de manufactura que no garanticen la repetibilidad de la fabricación (dado que el método de fabricación escogido asegura que todas las estructuras fabricadas cumplan con las exigencias de las normativas exigidas).

LISTA DE EXIGENCIAS			Pág
PROYECTO:			Edición:
CLIENTE:			Fecha:
			Revisado:
			Elaborado:
Fecha (cambios)	Exigencia	Descripción	Responsable
	E	FUNCIÓN PRINCIPAL:	
	E	MATERIA PRIMA:	
	E	GEOMETRÍA:	
	E	SEGURIDAD:	
	E	ERGONOMÍA:	
	E	FABRICACIÓN:	
	E	MONTAJE:	
	E	TRANSPORTE:	
	E	COSTOS:	
	E	PLAZO DE ENTREGA:	

Figura 32. Formato de lista de exigencias

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

3.3. Evaluaciones Preliminares

En esta etapa del procedimiento deben identificarse las características básicas del fenómeno a simular. Este paso es crucial porque involucra el criterio y la experiencia del diseñador para la toma de decisiones que determinarán las características del análisis a ejecutar, estableciéndose también la complejidad del análisis a realizar para obtener un equilibrio entre los detalles del fenómeno a simular y el costo computacional. Con la finalidad de abordar correctamente esta etapa importante del procedimiento pueden clasificarse las necesidades en los siguientes grupos.

3.3.1. Identificar las Necesidades Para la Simulación de la Estructura.

El diseñador debe revisar porqué es necesario realizar la simulación, para lo cual debe entender cuan crítico es conocer el comportamiento de la estructura frente al fenómeno a simular, pues el proceso requerido involucra un costo de recursos humanos y computacionales, siendo por ello importante que se realicen reuniones con los involucrados en el proyecto, en donde se puedan exponer los diferentes puntos de vista y definir si es necesaria una simulación o si con algún cálculo analítico se pueden atender la necesidad de la simulación.

3.3.2. Identificar el Tipo de Simulación a Realizar.

En la simulación computacional existen diferentes tipos de análisis, pero para el caso de estudio no es necesario de mencionarlos o estudiarlos todos, pero si debemos mencionar todos los análisis disponibles para el caso de los que involucran es estudio estructural, para ello

pueden clasificarse de acuerdo con el organigrama que se muestra en la figura 33:



Figura 33. Clasificación del análisis computacional

Tomado de Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural, por Celigüeta Lizarza, 2011.

3.3.3. Elaborar y Resolver el Fenómeno con un Análisis Analítico.

Una vez identificado el tipo de análisis que se realizará al fenómeno físico que experimenta la estructura, el diseñador debe efectuarlo, siendo previsible que se requiera asumir y/o simplificar varios aspectos del fenómeno y del comportamiento de la estructura, es por ello que los resultados analíticos que se puedan obtener serán valores conservadores (su valor consiste en proporcionar un punto de partida).

3.3.4. Seleccionar el Programa Computacional.

En este punto el diseñador ya tiene una idea clara del fenómeno a simular y cuan complejo es, por lo tanto, debe centrar su atención en la decisión de definir qué programa computacional usará. Para ello debe hacerse las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el costo de la licencia?
- ¿Cuenta con el módulo de análisis deseado?
- ¿Cuenta con herramientas para el mejoramiento de la malla?
- ¿Cuenta con asistencia local?
- ¿Tiene casos de éxito en simulaciones similares?
- ¿Es reconocido por la comunidad académica o empresarial?
- ¿Es compatible con el tipo de archivo de la maqueta virtual o alguno genérico?

En esta etapa del procedimiento debe entenderse cuál es la necesidad de realizar la simulación numérica, por ello deben generarse reuniones de trabajo en el equipo de ingeniería, para determinar si la necesidad de simulación computacional es real y definir las capacidades del software con el que se realizará dicha simulación. Para ello puede consultarse el manual del programa o con el proveedor del mismo, asegurándose que dicho software pueda ejecutar las simulaciones que van a requerirse. En caso contrario, deberán otras opciones: a) Tercerizar la simulación con una empresa especializada o centro de investigación, o b) La adquisición de un software (con toda la implicancia de la capacitación e implementación que debe realizarse).

3.3.5. Geometría de la Estructura a Representar.

En este punto se especifican las variables que deben estar representadas en la geometría, qué componentes estructurales están involucrados en el análisis y cuál es el nivel de detalle que se deberá representar de la geometría que influirá en los resultados de la simulación. Aquí

puede hacerse uso de la propia experiencia profesional-organizacional o de la experiencia del usuario o juicio de los expertos, quienes pueden brindar información importante relacionada a los aspectos del funcionamiento estructural de los componentes y así incluirlos o no en el análisis. Con ayuda de las normas ISO 3449 Y 3471 puede determinarse la porción de estructura requerida para la simulación, dado que no es necesario modelar toda la estructura del chasis (como se explicó en el Capítulo 2), por lo que con ayuda de la norma se puede entender la geometría de la estructura a simular.

3.3.6. Cargas, Apoyos y Materiales Involucrados.

En este último punto debe entenderse y definir cuáles son las carga y apoyos involucrados en el análisis, pues estos deben ser correctamente valorados tanto en la dirección como en la magnitud de aplicación. Los apoyos quizás sean un poco más difíciles de determinar, pero no son más que las condiciones de contorno que afectan la geometría, es decir que grados de libertad se van a restringir de manera que representen las condiciones reales de trabajo. Así mismo, estas restricciones pueden estar dadas bajo alguna especificación o norma, la cual ayudara a determinar el tipo de apoyo a aplicar. El material que se usa para la estructura debe ser identificado y contar con las especificaciones técnicas del mismo. El material por lo general es un dato inicial, pues en muchos casos es conocida la aplicación del material, sin embargo, en la simulación también se podrá determinar si el material propuesto inicialmente cumple con las solicitudes estructurales o debe cambiar su geometría o cambiar a otro material, esto siempre puede llevar a evaluar los costos de dichos cambios.

3.4. Preprocesamiento

En esta etapa del proceso se revisarán y determinarán los detalles y las características, de la maqueta virtual y las condiciones iniciales para la simulación, que influyen directamente en

los resultados que se obtendrán en las siguientes etapas del procedimiento, los principales subprocesos se indicaran a continuación:

3.4.1. Generación de la Maqueta Virtual.

La maqueta virtual es el modelo 3D generado para la elaboración de los planos de detalle de fabricación y ensamblaje, pero como en la etapa previa ya se ha definido la geometría involucrada en el análisis, en esta etapa el diseñador deberá preparar la maqueta eliminando detalles irrelevantes y geometrías que puedan generar conflictos durante el análisis, haciendo un equilibrio entre simplificación y representación adecuada de la estructura. En este punto de simplificación de la geometría es importante tener varios puntos de vista sobre lo que va a eliminar y hasta donde realizará la simplificación ya que la experiencia en simulaciones similares puede ayudarnos a evitar demasiadas abstracciones que no reflejen la realidad y así obtener resultados absurdos.

3.4.2. Propiedades del Material.

En este punto el diseñador debe verificar si el programa donde trabajará cuenta en su librería con los materiales con los que se va a simular, puesto que en muchos casos los programas cuentan con una cantidad limitada de materiales en su librería. En caso no se cuente con el material en la librería del programa, se debe proceder a crear el o los materiales requeridos para la simulación (esto lo puede realizar con apoyo de las fichas técnicas de los materiales y las especificaciones de las normas del material).

3.4.3. Generación de la Malla.

La generación de la malla es el proceso de convertir la maqueta virtual simplificada en un conjunto de elementos finitos cuyas características deben ser definidas por el diseñador en

base a los criterios básicos para que la malla pueda generar resultados coherentes y no presentar errores durante el proceso de cálculo de la simulación.

3.4.4. Definición de Apoyos y Cargas.

En los programas de simulación existe una gran variedad de opciones de apoyos y cargas, las cuales deben ser revisadas con detalle y aplicadas correctamente en base al análisis previo (que se realizó en la etapa de decisiones preliminares), por lo general debe revisar cuales son los grados de libertad que se debe restringir en los apoyos o qué tipo de contactos habrá entre los elementos estructurales (que reflejen el comportamiento en la realidad). En lo que respecta a las cargas en los programas de simulación también cuentan con una gran variedad de tipos de carga, las cuales deben seleccionarse adecuadamente el tipo de carga a aplicar, guardando relación con el tipo de efecto que se genera en la estructura a simular. Para para ello debe estudiarse los diferentes tipos de carga con los que cuenta el programa, para entender cómo se manifiestan sobre la estructura y si uno de ellos representa correctamente lo que se requiere simular. Estas decisiones son críticas, es por ello que esta etapa debe ser correctamente definida, sustentándose cada una de las elecciones. Para el presente estudio la aplicación de las cargas está basada en las normas ISO 3449 y 3471 (las cuales se mostraron en el capítulo 2). Lo importante es que estas cargas sean aplicadas correctamente, de acuerdo con las indicaciones de la norma.

3.5. Solución

En esta etapa se procede a realizar la simulación de la estructura simplificada con los apoyos, contactos y cargas definidas previamente, los cálculos de simulación por el método de elementos finitos se ejecutan en el programa a través del poder de cómputo con la que cuenta cada computadora. En muchos casos la espera de resultados puede tomar un tiempo

considerable, dependiendo del nivel de detalle que se simule o la complejidad del fenómeno a simular, aquí puede evaluarse la posibilidad de contratar servidores remotos que ejecutan las simulación con computadoras especializadas para este tipo de análisis, lo que puede reducir drásticamente los costos computacionales (en muchos casos, para este tipo de simulaciones, debe emplearse computadoras con mucha potencia de cálculo, por lo que no son económicas). Debe tenerse en cuenta que el tiempo que tome realizar la primera simulación solo es el inicio de una serie de simulaciones posteriores que realizarán después de la interpretación de resultados. También debe considerarse la búsqueda de la convergencia de resultados, consistente en hacer una serie de simulaciones bajo las mismas condiciones, variando solo el tamaño de los elementos de la malla hasta que los resultados la variación de los resultados obtenidos entre la última y penúltima simulación sea lo suficientemente pequeña como para concluir que los resultados obtenidos son los adecuados para la simulación.

3.6. Post-Procesamiento

En esta etapa del procedimiento debe definirse qué resultados se requiere que el programa presente mediante gráficas de contorno o con la generación de tablas y gráficas. Los programas de simulación tienen una serie de resultados que pueden presentar luego de realizada la simulación, estos resultados son presentados mediante visualización de contornos que muestran modelo 3D con una serie de colores que se van degradando por lo general de azul a rojo con la finalidad de entender cómo se distribuyen los valores de los resultados solicitados (estos van desde el valor mínimo hasta el valor máximo). Este tipo de gráficas permite comprender donde se localizan los valores máximos o mínimos y tomar decisiones que se realizarán en la siguiente etapa. Los programas, además, pueden mostrar gráficas que simplifican las gráficas de contornos mencionadas previamente (estas pueden ser solicitadas de acuerdo con las necesidades de evaluación que defina el diseñador, como por ejemplo la

evolución de las fuerzas de reacción o deformación en función del tiempo o en función del orden de aplicación de las cargas).

3.7. Interpretación de Resultados

Para esta etapa del proceso el diseñador será quien tome el protagonismo sobre los resultados obtenidos mediante la simulación, puesto que el programa no indicara si la estructura tiene una falla o si cumple o no alguna restricción específica, básicamente lo que en esta etapa se debe realizar es confrontar los resultados obtenidos con los valores límite de fluencia y rotura, así mismo, pueden ser confrontados frente a los requerimientos de una norma específica, (para este caso será las normas ISO 3449 y 3471), las cuales fueron explicadas en el capítulo 2 (su objetivo principal es que las deformaciones que puedan ocurrir en la estructura no afecten el volumen que presenta al operador dentro de la cabina, por lo tanto aquí el objetivo principal está relacionado con las deformaciones máximas que se obtendrán en la simulación). Bajo los criterios de la norma se interpretarán si la estructura cumple los requerimientos preestablecidos. Los resultados obtenidos también deben ser confrontados con el análisis analítico que se realizó anteriormente en la etapa de evaluaciones previas, por lo que aquí el diseñador debe tener en cuenta qué consideraciones y simplificaciones realizó en su análisis analítico y así poder valorar la diferencia de resultados y cuanta diferencia puede existir entre ambos resultados. Es conocido que los resultados obtenidos analíticamente son resultados conservadores por todas las suposiciones que se realizan y con el afán de evitar las fallas catastróficas, cuanto más consciente se sea de todas las asunciones que realizadas, mejor se realizará la comparativa de resultados. Si el diseñador nota que existen demasiadas diferencias o no son lógicos los resultados obtenidos deberá volver a revisar los parámetros con los que realizó la simulación. Debe revisarse el análisis analítico buscando inconsistencias o interpretaciones que no correspondan, luego de ello deben realizarse las correcciones del caso y si detecta que los

parámetros ingresados en la simulación son lo que generaron los resultados divergentes deberá hacerse un nuevo análisis hasta estar seguro que las diferencias o inconsistencias han sido superadas.

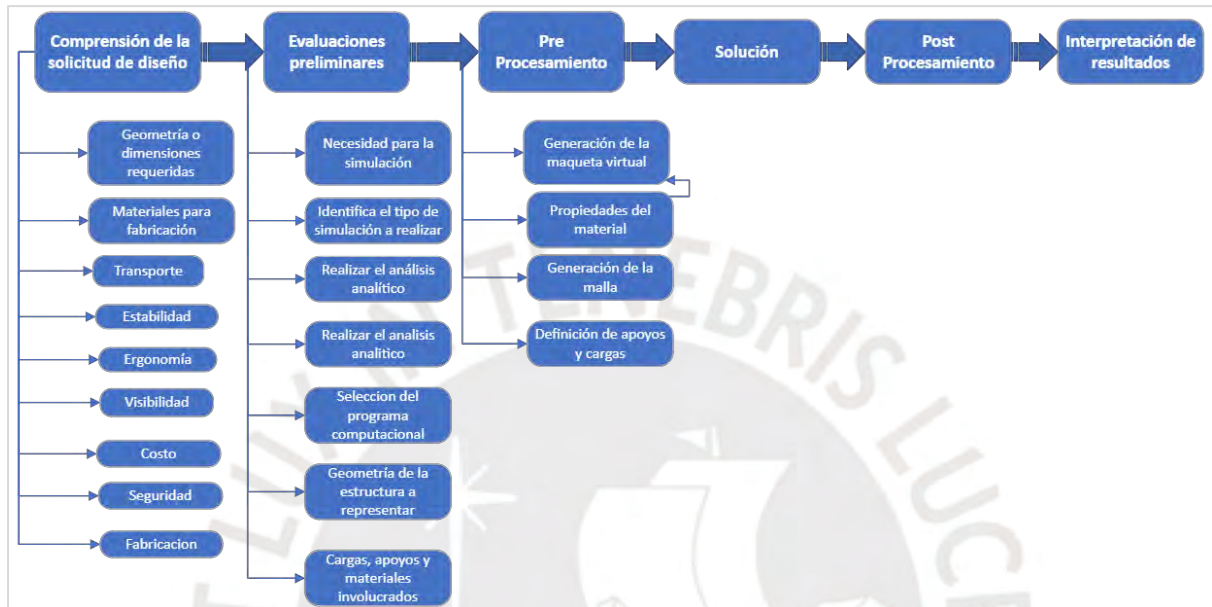


Figura 34. Diagrama de procedimientos para la simulación numérica

IV. Aplicación del Procedimiento Para Simular una Estructura de Protección Bajo la Norma ISO 3449 y 3471

4.1. Introducción

El procedimiento general desarrollado en el capítulo previo definió los pasos que se deben realizar para aplicar la simulación numérica como alternativa a los ensayos destructivos que solicitan las normas ISO 3449 y 3471 para equipos de movimiento de tierras, por lo que en el presente capítulo se procedió a ejecutarlos en un caso real. Así, se verificó la eficacia de dicho procedimiento al ordenar y determinar los pasos a seguir hasta obtener los resultados de las simulaciones.

4.2. Comprensión de la Solicitud de Diseño

Según lo indicado en el procedimiento, en esta etapa se procedió a hacer uso de la lista de exigencias con la finalidad ordenar y definir los alcances del diseño (previo a realizar el análisis).

Tabla 3

Lista de exigencias aplicadas al caso microscop HS10E

Lista de Exigencias		Edición: 01
Proyecto:	Micro Scoop HS10E	Fecha: 22/11/2021 Revisado: J.A.M.
Cliente:	HES DEL PERÚ	Elaborado: P.R.A.

Fecha (cambios)	Exigencia	Descripción	Responsable
		Ergonomía:	
22/11/2021	E	La estructura de protección debe ser lo suficientemente espaciosa para que un operador de talla M según la norma SAE J833 pueda ingresar y permanecer sentado con sus implementos de seguridad, entre ellos el casco de protección.	P.R.A.
		Visibilidad:	
22/11/2021	E	La estructura de protección no debe interrumpir la visibilidad de operación tanto en el sentido de adelante como hacia atrás.	P.R.A.
		Costos:	
22/11/2021	E	Los costos de fabricación no puede superar el valor de cualquier de las estructuras que pertenecen al chasis.	P.R.A.
		Fabricación:	
22/11/2021	E	Los métodos de unión rígida serán mediante soldadura con el proceso GMAW. Para placas puede hacer uso del plegado, respetando los radios mínimos para no dañar la estructura interna del material. La estructura debe contar con protección contra la corrección resistente a golpes mecánicos.	P.R.A.
		Transporte:	
22/11/2021	E	La estructura de protección debe ser capaz de desensamblarse del equipo, los elementos de unión deben ser pernos.	P.R.A.

Tabla 4

Lista de exigencias aplicadas al caso microscopio HS10E

Lista de Exigencias			Edición: 01
Proyecto:	Micro Scoop HS10E		Fecha: 22/11/2021 Revisado: J.A.M.
CLIENTE:	HES DEL PERÚ		Elaborado: P.R.A.
Fecha (cambios)	Exigencia	Descripción	Responsable
22/11/2021	E	<p>Ergonomía:</p> <p>La estructura de protección debe ser lo suficientemente espaciosa para que un operador de talla M según la norma SAE J833 pueda ingresar y permanecer sentado con sus implementos de seguridad, entre ellos el casco de protección.</p>	P.R.A.
22/11/2021	E	<p>Visibilidad:</p> <p>La estructura de protección no debe interrumpir la visibilidad de operación tanto en el sentido de adelante como hacia atrás.</p>	P.R.A.
22/11/2021	E	<p>Costos:</p> <p>Los costos de fabricación no puede superar el valor de cualquier de las estructuras que pertenecen al chasis.</p>	P.R.A.
22/11/2021	E	<p>Fabricación:</p> <p>Los métodos de unión rígida serán mediante soldadura con el proceso GMAW. Para placas puede hacer uso del plegado,</p>	P.R.A.

		respetando los radios mínimos para no dañar la estructura interna del material. La estructura debe contar con protección contra la corrección resistente a golpes mecánicos.	
		Transporte:	
22/11/2021	E	La estructura de protección debe ser capaz de desensamblarse del equipo, los elementos de unión deben ser pernos.	P.R.A.

4.3. Evaluaciones Preliminares

4.3.1. Identificación de las Necesidades Para la Simulación de la Estructura.

Se identificó la necesidad de que el Microscopio HS10E cuente con una estructura de protección capaz de cumplir con los requerimientos de la Norma ISO 3449, que indica los requerimientos y alcances para la prueba FOPS, y de la Norma ISO 3471, que indica los requerimientos y alcances para la prueba ROPS. Las pruebas mencionadas son de tipo destructivo y requieren de utillaje e instrumentos que no son accesibles para todas las empresas, por lo que se debe recurrir a los métodos numéricos por la complejidad de las pruebas que requieren, un análisis analítico con el uso de la resistencia de materiales clásicos no será suficiente para los cálculos dado que involucra fenómenos complejos como la dinámica de impacto sobre estructuras para la prueba FOPS y el fenómeno de análisis no lineal para la prueba ROPS, porque se aplican fuerzas que someten a la estructura a deformaciones plásticas.

4.3.2. Identificación del Tipo de Simulación a Realizar.

Se puede identificar que los fenómenos a simular pertenecen claramente al análisis estructural, por que involucra fuerzas inerciales y fuerzas externas aplicadas a una estructura

rígida con propiedades mecánicas conocidas por el tipo de acero con el que se fabrica la estructura. Para la prueba FOPS, como se explicó previamente, la estructura debe ser sometida al impacto de un objeto de 45 kg para el nivel I, generando una energía de impacto de 1365J, mientras que para el nivel II se requiere de un objeto de 227 kg, lo que genera una energía de impacto de 11600J.

Según las energías de impacto que se aplicaran podemos determinar la velocidad de impacto y determinar a qué nivel de impacto pertenece este ensayo.

Conocemos que:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (62)$$

Despejado el termino de velocidad tenemos:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \quad (63)$$

Remplazando para el FOPS nivel I y nivel II obtendremos:

$$v (FOPS I) = 7.788 \frac{m}{s} \quad (64)$$

$$v (FOPS II) = 10.109 \frac{m}{s} \quad (65)$$

De acuerdo con la tabla 1, las velocidades calculadas para ambos casos están dentro de la clasificación de velocidades bajas, produciendo deformaciones elásticas y/o plásticas localizadas. Por lo tanto, para las simulaciones FOPS se utilizará un análisis dinámico aplicando el método explícito debido a que este método tiene mejor comportamiento en la convergencia y es un método más robusto para este tipo de fenómenos. Para el caso del análisis ROPS se aplican tres cargas, las cuales se suceden una a continuación de la otra y cada cargase

aplica de manera progresiva lineal, además, la velocidad de deflexión de la estructura no será mayor a 5mm/s, por lo que se puede considerar que la aplicación de la carga es estática, sin embargo, al aplicar las cargas se producirán deformaciones permanentes y la aplicación de las cargas sucesivas se realiza sobre la misma estructura deformada, por tanto se puede concluir que es un análisis por el método implícito del tipo no lineal.

4.3.3. Elaborar y Resolver el Fenómeno con un Análisis Analítico.

Para el análisis analítico se realizaron varias simplificaciones de la estructura en estudio, para ello no se consideró la placa de protección que recubre la estructura, ya que su efecto estructural no es significativo para el caso de estudio, del mismo modo no se consideró en el análisis las cartelas de refuerzo entre la viga y la columna ya que el objetivo es hacer una simplificación, finalmente se consideró una estructura simétrica, por lo que esta pudo ser dividida en dos desde el plano simétrico repartiendo la carga de impacto entre estas dos subestructuras. Para el cálculo se tomaron las dimensiones de la estructura modelada en la maqueta virtual, la altura de la columna fue considerada desde los puntos de anclaje hacia el eje de la viga y la longitud de la viga fue desde el eje de la columna hacia la parte más lejana como se muestra en la figura 35.

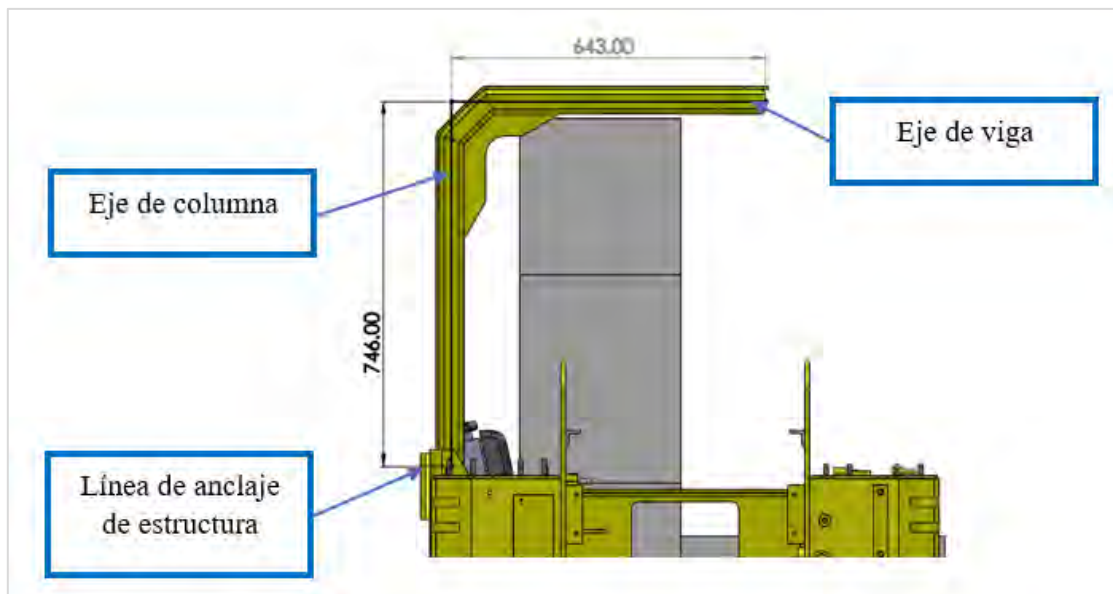


Figura 35. Dimensiones de las líneas de elementos estructurales a calcular

Con las simplificaciones planteadas la estructura quedó como se muestra en la figura 36.

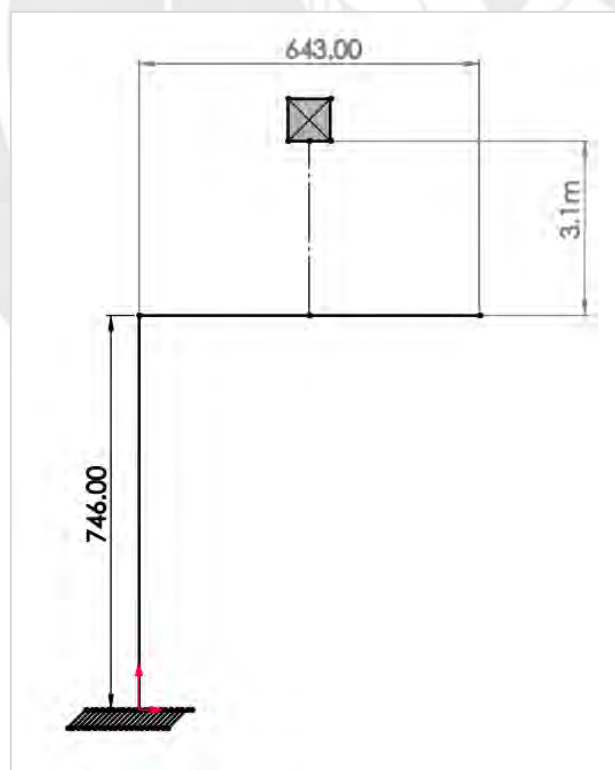


Figura 36. Geometría y dimensiones de la estructura simplificada

Para realizar el cálculo se tuvieron las siguientes consideraciones:

- La carga de impacto se dividió en dos, ya que la estructura es simétrica respecto al plano donde el objeto de impacto actúa.
- Se calcularon las deformaciones por separado (de cada elemento estructural) y luego se superpuso cada efecto para visualizar el comportamiento de la estructura en total.
- El cálculo analítico se realizó en el rango elástico lineal.
- El cuerpo que impactó sobre la estructura fue completamente rígido, por lo cual no se consideró ninguna deformación sobre él.
- El perfil de las viga y columna de la estructura fue de tipo tubo rectangular y no se consideraron los redondeos de las esquinas de las estructuras.

De esta forma, pudo procederse al cálculo del momento de inercia de la estructura en estudio:

$$I_{x-x} = \frac{b \cdot d^3 - b_1 \cdot d_1^3}{12} \quad (66)$$

Donde:

- b : ancho del perfil.
- d : alto del perfil.
- b_1 : ancho de interior del perfil.
- d_1 : alto interior del perfil.

Teniendo en cuenta la geometría del perfil que se muestra en la figura 37 se remplazaron los valores, obteniéndose el siguiente resultado:

$$I_{x-x} = 7.671(10^6)mm^4 \quad (67)$$

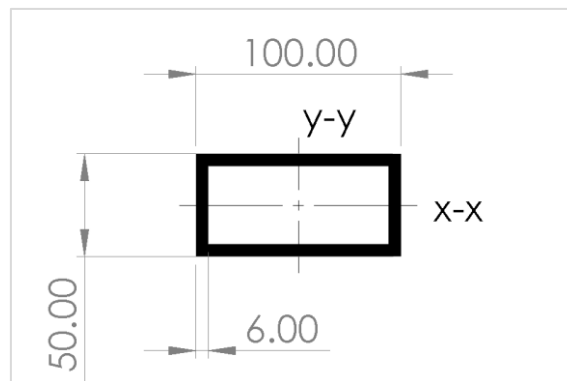


Figura 37. Geometría y dimensiones del perfil de la estructura

Se inició el cálculo separando la viga de la columna para determinar su deformación por el impacto, para ello, como se vio en el apartado 2.2, se realizó el cálculo de la deformación por la aplicación de la carga aplicada directamente sobre la viga como un efecto estático de soportar el objeto de impacto sobre la viga, dado que la carga de impacto se dividió en dos por la simetría de la estructura y para simplificar el análisis la primera configuración estructural quedó como se muestra en la figura 38.

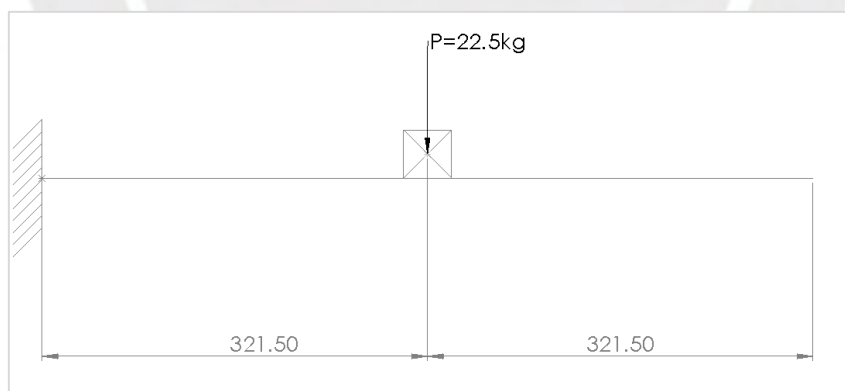


Figura 38. Primera configuración de la estructura de análisis

Se calculó la deflexión estática en la zona de aplicación de la carga, tomando la fórmula de deflexión estática en viga empotrada, la cual se especifica como:

$$f_{est} = \frac{F_{est} \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} \quad (68)$$

Donde:

- f_{est} : Flexión estática en el punto de aplicación de la carga
- L : Longitud de la viga
- F_{est} : Fuerza estática, (la carga apoyada sobre la viga)
- E : Módulo de elasticidad del acero
- I : Momento de inercia del perfil de la viga

Para el caso abordado se obtuvo que:

$$f_{est} = \frac{22.5(9.81)(0.643 \times 10^3)^3}{24(2.1 \times 10^5)(7.671 \times 10^6)} = 0.152 \times 10^{-2} \text{ mm} \quad (69)$$

Posteriormente, se realizó el cálculo de la deflexión dinámica de acuerdo a lo explicado en el apartado 2.2 en la ecuación 70.

$$f_d = f_{est} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{f_{est}}} \right) \quad (70)$$

Donde:

- f_d : Flexión dinámica en el punto de impacto.
- h : Altura desde donde el objeto es soltado para impactar en la viga.

Para nuestro caso de estudio obtendremos:

$$f_d = 0.152 \times 10^{-2} \sqrt{\left(1 + \frac{3.1 \times 10^3}{0.152 \times 10^{-2}} \right)} = 3.0698 \text{ mm} \quad (71)$$

Entonces, se procedió a calcular la deformación en la columna, trasladando la fuerza y la torsión dinámicas que actúan sobre ella de manera independiente, como se muestra en la figura

39, determinándose la deformación debido a la fuerza dinámica y luego la deformación debido al momento producido por la fuerza dinámica.

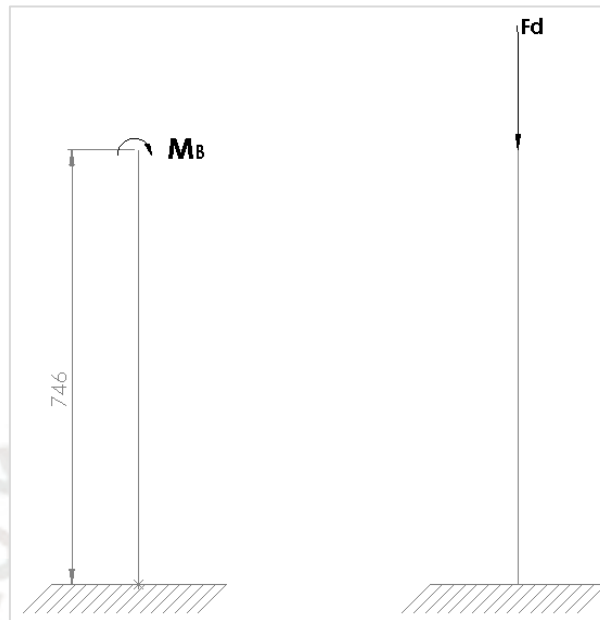


Figura 39. Configuración de la estructura de análisis

Para esta etapa del análisis se calculó la fuerza dinámica con ayuda de la ecuación 4, determinándose así el factor de multiplicación de la fuerza que impacta sobre la columna, aplicándose la siguiente ecuación:

$$F_d = n \cdot F_{est} \quad (72)$$

Donde:

- F_d : Fuerza dinámica de impacto.
- n : Factor multiplicador debido al impacto.

Con ayuda de la ecuación 4 se calculó n :

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{0.152 \times 10^{-2}}} = 2.021 \times 10^3 \quad (73)$$

Con ello se determinó la F_d con ayuda de la ecuación 74, obteniéndose que:

$$F_d = 2.021 \times 10^3 \cdot (22.5 \times 9.81) = 446.085 \times 10^3 N \quad (74)$$

A continuación, se calculó la deformación en la columna debido a la fuerza de impacto F_d , haciéndose uso de la ecuación de deformación de barras axialmente cargadas:

$$\delta = \frac{F.L}{E.A} \quad (75)$$

Donde:

- δ : Deformación debido a la carga axial sobre el elemento estructural.
- F : La fuerza axial aplicada (para nuestro caso está fuerza será F_d).
- L : Longitud del elemento estructural.
- A : Área de la sección transversal del elemento estructural.
- E : Módulo de elasticidad del acero.

Al reemplazar los valores conocidos se obtuvo la siguiente deformación.

$$A = (50 \times 100) - (88 \times 38) = 1656 \text{ mm}^2 \quad (76)$$

$$\delta = \frac{446.085 (746 \times 10^3)}{2.1 \times 10^5 \times 1656} = 0.957 \text{ mm} \quad (77)$$

Posteriormente, se calculó la deformación producida por la torsión ejercida en la estructura, como se mostró en la figura 35. Para ello se calculó el momento M_B , el cual es producido por la F_d que se aplicó a la mitad de la viga. Por ello el cálculo de M_B es:

$$M_B = \frac{643}{2} (446.085 \times 10^3) = 143.416 \times 10^3 N \cdot mm \quad (78)$$

Para determinar la deformación debido a la torción se hizo uso de la ecuación de

deformación para una viga empotrada y la aplicación de torsión en el extremo de dicha viga, dado que el comportamiento de la deformación es igual para el caso de la viga como la columna para este caso:

$$\Delta = \frac{M_B \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (79)$$

Donde:

- M_B : Deformación debido a la carga axial sobre el elemento estructural.
- Δ : Deformación de flexión en el punto de aplicación del momento de torsión.

De la ecuación 80 se obtuvo que:

$$\Delta = \frac{143.416 \times 10^6 \cdot (746^2)}{2(2.1 \times 10^5)(7.671 \times 10^6)} = 24.779 \text{ mm} \quad (80)$$

Con los diferentes valores de las deformaciones obtenidas se procedió a superponer cada efecto en el conjunto estructural, así mismo para hacer la gráfica de deformación final se diagramaron las deformaciones a lo largo de los componentes estructurales para ver el efecto de deformación total, por ello con ayuda de una hoja de cálculo se halló la deformación a lo largo de cada elemento estructural y luego estos fueron graficados y ensamblados con la ayuda de un programa CAD. Las fórmulas usadas para la hoja de cálculo dependieron del punto de aplicación de la fuerza y para el elemento viga se empleó la siguiente

$$y = \frac{Px^3}{6EI} (3a - x) \text{ para } (0 \leq x \leq a) \quad (81)$$

$$y = \frac{Pa^3}{6EI} (3x - a) \text{ para } (a \leq x \leq b) \quad (82)$$

Considerando la figura 40.

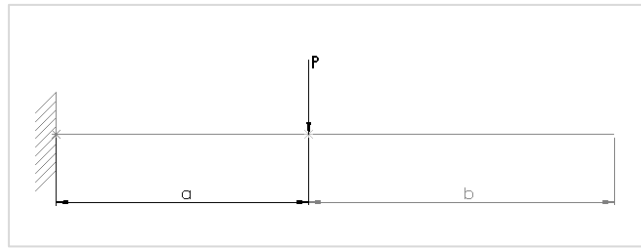


Figura 40. Carga aplicada en una viga empotrada

Para el elemento columna pudo usarse la siguiente formula:

$$y = \frac{M_B x^3}{2EI} \quad (83)$$

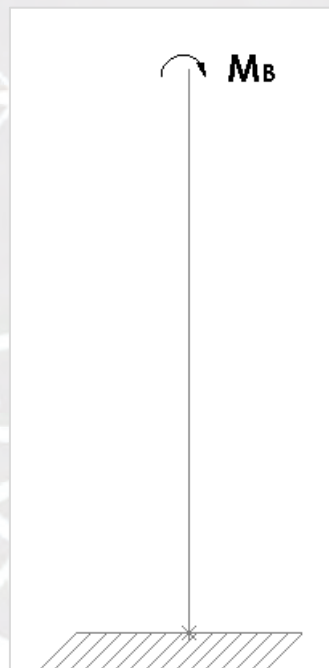


Figura 41. Torsión aplicada en una columna empotrada

Para las fórmulas 80, 81 y 82 se utilizaron los siguientes datos:

Tabla 5

Datos de la viga y la columna

Símbolo	Cantidad	Unidad	Descripción
L	643	mm	Longitud de viga
P	446085	N	Carga dinámica
E	210000	N/mm ²	Módulo de elasticidad
I	7671000	mm ⁴	Momento de inercia
M	143416000	N/mm	Momento de flexión en columna

Para obtener la deformación a lo largo de la viga se determinó la deformación cada 20 mm y se obtuvo el siguiente cuadro:

Tabla 6

Deformación de la viga en cada punto

Viga			
$(0 \leq x \leq a)$		$(a \leq x \leq b)$	
$Y = (Px^3) / 6EI (3a-x)$		$Y = (Pa^3) / 6EI (3x-a)$	
X (mm)	Y (mm)	X (mm)	Y (mm)
0	0.000	321.5	-3.0674
20	-0.017	334	-3.2463
30	-0.039	340	-3.3321
40	-0.068	350	-3.4753
50	-0.106	360	-3.6184
60	-0.150	370	-3.7615
70	-0.202	380	-3.9046
80	-0.261	390	-4.0477
90	-0.327	400	-4.1908
100	-0.399	410	-4.3339
110	-0.477	420	-4.4770
120	-0.561	430	-4.6202
130	-0.651	440	-4.7633
140	-0.746	450	-4.9064
150	-0.846	460	-5.0495
160	-0.951	470	-5.1926
170	-1.060	480	-5.3357
180	-1.173	490	-5.4788
190	-1.290	500	-5.6219
200	-1.411	510	-5.7651
210	-1.536	520	-5.9082
220	-1.663	530	-6.0513

230	-1.793	540	-6.1944
240	-1.926	550	-6.3375
250	-2.061	560	-6.4806
260	-2.198	570	-6.6237
270	-2.337	580	-6.7668
280	-2.477	590	-6.9100
290	-2.618	600	-7.0531
300	-2.760	610	-7.1962
310	-2.903	620	-7.3393
321.5	-3.067	630	-7.4824
		643	-7.6685

Para obtener la deformación a lo largo de la columna se determinó la deformación cada 20 mm, obteniéndose el siguiente cuadro:

Tabla 7

Deformación de la columna en cada punto

Columna		Columna	
$Y = (M B x^3) / 2EI$		$Y = (M B x^3) / 2EI$	
X (mm)	Y (mm)	X (mm)	Y (mm)
0	0.000	400	-7.122
20	-0.018	420	-7.852
40	-0.071	440	-8.618
60	-0.160	460	-9.419
80	-0.285	480	-10.256
100	-0.445	500	-11.128
120	-0.641	520	-12.037
140	-0.872	540	-12.980
160	-1.140	560	-13.960
180	-1.442	580	-14.974
200	-1.781	600	-16.025
220	-2.154	620	-17.111
240	-2.564	640	-18.233
260	-3.009	660	-19.390
280	-3.490	680	-20.583
300	-4.006	700	-21.812
320	-4.558	720	-23.076
340	-5.146	740	-24.376

360	-5.769	746	-24.773
380	-6.428		

Al graficar los puntos para la viga y columna y armarlos en conjunto se obtuvo el siguiente diagrama de deformaciones, en donde se puede apreciar que la deformación máxima en la viga es de 50,3 mm.

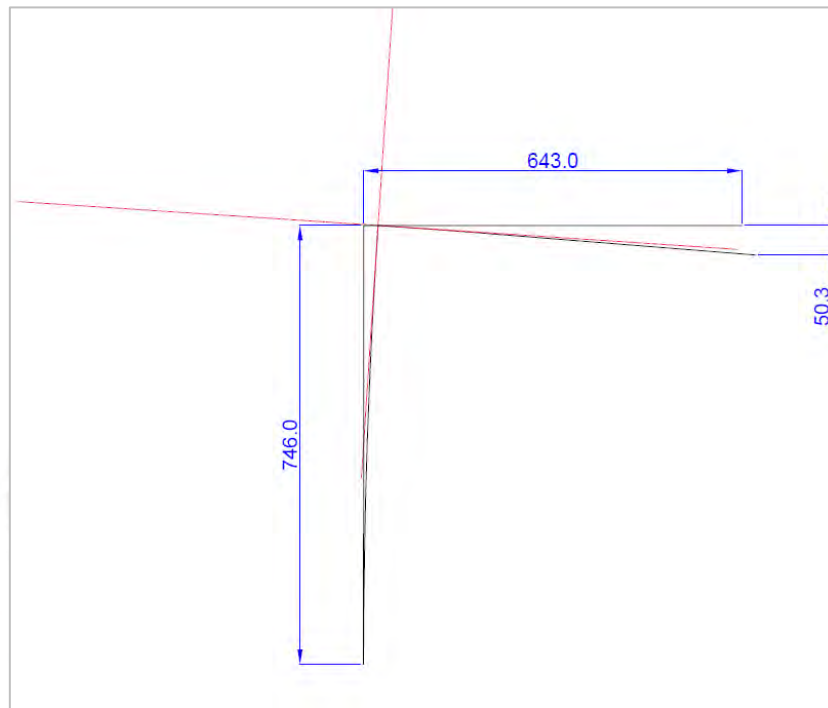


Figura 42. Deformación total de la estructura en análisis

4.3.4. Seleccionar el Programa Computacional.

Luego de haber entendido qué tipos de simulaciones se requería realizar para simular una estructura en los escenarios de ensayos FOPS y ROPS, se entendió que el programa tenga la capacidad de hacer simulaciones del tipo Dinámico Explícito y No Lineal, con herramientas variadas para preparar el modelo o maqueta 3D a un modelo sencillo que represente el comportamiento estructural, además de ello debía tener herramientas que permitiesen

modificar, mejorar y controlar la discretización del modelo (mallado), lo cual ayudó a que los resultados que se obtengan no tengan inconsistencia o errores por algún elemento finito mal ubicado o dimensionado. Los programas de simulación numérica por lo general tienen licencias muy costosas y poco accesibles a estudiantes e investigadores, otro punto que se debe evaluar es la información que se encuentra disponible para el aprendizaje de uso del programa. Al realizar una búsqueda de programas de simulación numérica que cuente con módulos de simulación de impacto y no lineal robustos conocidos en el medio nacional, se decidió utilizar el programa Ansys Workbench, ya que éste cuenta con los módulos de Análisis Dinámico Explícito y No Lineal, con una cantidad amplia de herramientas para la optimización del mallado, pero el motivo principal que favoreció el uso de dicho programa es que se pudo descargar una versión estudiantil que cuenta con todos los módulos disponibles, así como una gran cantidad de cursos online que abarcan diferentes tópicos de simulación que permiten entender y aplicar de manera clara todas las herramientas con las que cuenta el programa. Haciendo un resumen, se pudo responder a las preguntas que indican el porqué del uso de Ansys Workbench:

- ¿Cuál es el costo de la licencia? No tiene costo porque tiene una licencia para estudiantes con todos los módulos disponibles.
- ¿Cuenta con el módulo de análisis deseado? Cuenta con módulos de Análisis Dinámico Explícito y No Lineal.
- ¿Cuenta con herramientas para el mejoramiento de la malla? Si cuenta con diferentes herramientas, como la capacidad de elegir el tipo de elemento a usar, indicar diversos tamaños de elementos finitos por zonas, a selección del diseñador, ayudas visuales para indicar la calidad del mallado, detección de elementos finitos que tienen potenciales problemas en la simulación, entre otras muchas más herramientas.

- ¿Cuenta con asistencia local? Si cuenta con asistencia local por que existe un representante comercial en el país.
- ¿Tiene casos de existo en simulaciones similares? Si, diversas industrias locales, utilizan dicho programa.
- ¿Es reconocido por la comunidad académica o empresarial? Si, la comunidad académica usa este programa en diversos estudios y desarrollos de tesis relacionados a la simulación numérica.
- ¿Es compatible con el tipo de archivo de la maqueta virtual o alguno genérico? Sí, el programa permite abrir modelos en formato genérico STEP.

4.3.5. Geometría de la Estructura a Representar.

De acuerdo con lo explicado en la sección 3.3.5, se procedió a revisar las normas para identificar las recomendaciones que indiquen que parte del chasis es requerido para los ensayos, para ello se comenzó con la norma ISO 3449, la cual indica los detalles para el ensayo FOPS. Para el ensayo ISO 3449 se indica que la estructura FOPS debe ser identificada y montada en la estructura, por lo tanto, se procedió a identificar la estructura FOPS, como se puede apreciar en la figura 43, remarcándose en el cuadro en color rojo la zona donde se encuentra la estructura FOPS. Así mismo, para tener un mejor detalle de la estructura a analizar, se procedió a revisar el manual de partes para identificar los componentes estructurales de la zona donde se encuentra la estructura FOPS.



Figura 43. Identificación de la cabina del operador

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.

Al revisar el manual del equipo HS10E se ubicó la figura 44, la cual muestra el despiece del chasis del operador, en dicha figura se puede apreciar que la estructura de protección frente a caída de objetos es el ítem 28, el cual es fijado a la estructura del chasis por medio de pernos en las patas de la estructura y en el respaldar del chasis principal. Puede afirmarse entonces que la estructura FOPS es el ítem 28, dado que es la estructura que recibe el impacto del objeto de prueba.

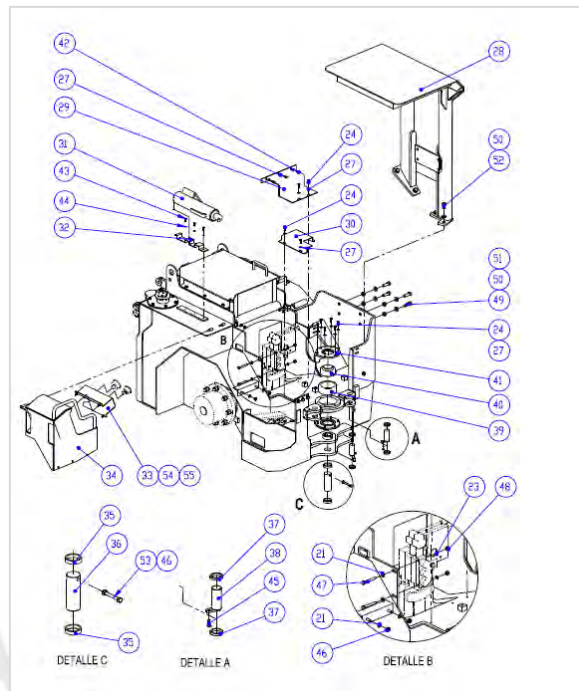


Figura 44. Ensamble de la cabina del operador

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021.

Se procedió a revisar la norma ISO 3471, la que indica los detalles para el ensayo ROPS, en dicha norma se encuentran las indicaciones de la estructura representativa para el ensayo ROPS. La norma indica que el ensayo para el ROPS no requiere de una máquina completa, pero si debe estar representada toda la estructura que absorbe energía en el caso de un vuelco de la máquina, por lo que todos los elementos que no brinden un aporte estructural pueden ser retirados. Para equipos con articulación, como en el caso en estudio, solo se debe representar la estructura que cuente con la estructura ROPS. La estructura representativa ROPS debe ser fijada a una estructura base que tenga como mínimo la misma rigidez y resistencia que la estructura general. Para el caso de estructuras con articulación se verifica la ubicación de la estructura ROPS y puede separarse la estructura de la articulación y solo analizar aquella en la que se encuentre instalada la ROPS. Con estos criterios se procedió a determinar la porción de estructura requerida para el correspondiente análisis.

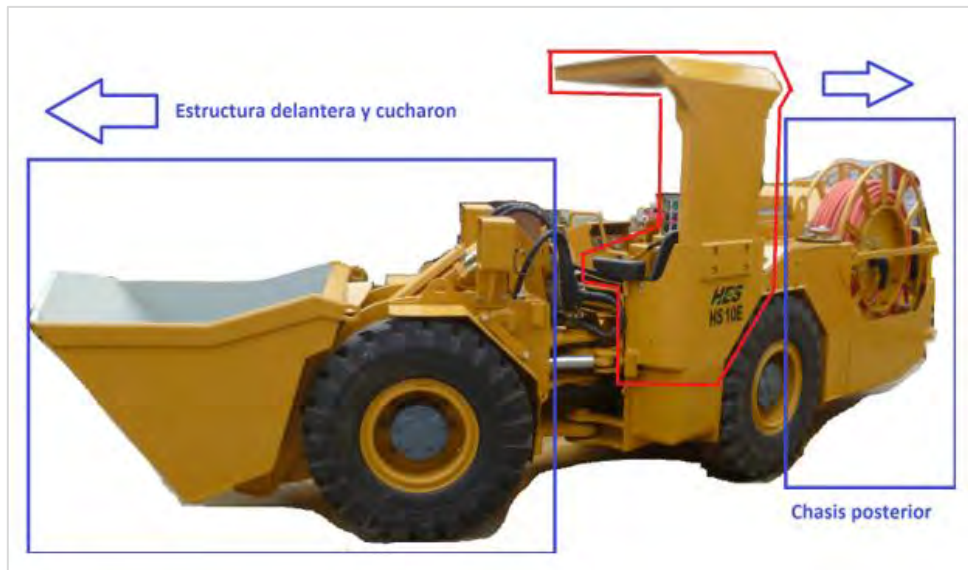


Figura 45. Identificación de la estructura ROPS para el ensayo

Tomado de Alianza CCM-Eleva, 2021 y modificado por el investigador.

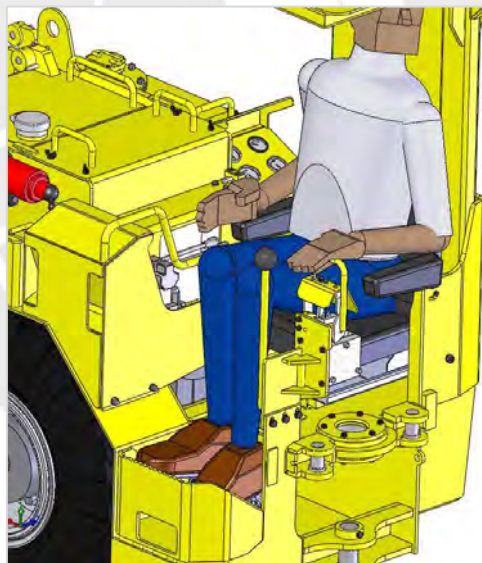


Figura 46. Operador ubicado en la cabina de operación

Como se muestra en la figura 45, se remarcó de color rojo la zona que pertenece a la estructura ROPS, la que comprende el techo, el respaldo de protección y la zona del asiento del chasis, además de ello se pudo observar que el chasis delantero y el chasis posterior no

aportan estructuralmente a la estructura ROPS, por lo que pudo procederse a retirarlos y quedarse con la zona definida en color rojo exclusivamente (ya que es la estructura que absorbería toda la energía de vuelco de la maquina).

4.3.6. Cargas, Apoyos y Materiales Involucrados.

Para determinar las cargas a aplicar, tanto en ubicación, dirección y magnitud, se siguieron las indicaciones de las normas ya mencionadas a lo largo del estudio. Para el caso FOPS, en base a la lista de exigencias la estructura debió ser diseñada para soportar el ensayo nivel I, por lo tanto, la estructura soportó una energía de impacto de 1365J. Para obtener dichas condiciones se usó un objeto de impacto con masa de 45 kg, además, la geometría del objeto de impacto se adecuó a lo mostrado en la figura 14 – a. Para determinar la altura de caída del objeto se tomó la información de la figuras 12 y 13, las cuales indican que dicha altura debe ser de 3,1 mm. Para identificar el punto de aplicación de la carga de impacto se ubicó el DLV dentro de la estructura FOPS, de acuerdo a las indicaciones de la norma SAE J397, como se muestra en la figura 47 (imagen diseñada para el presente estudio):

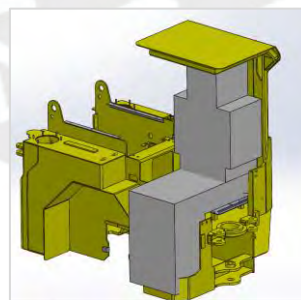


Figura 47. DLV ubicado de acuerdo con la norma SAE J397

Luego de ubicar el DLV en la estructura FOPS se ubicó el punto de impacto, para ello, como se muestra en la figura 48, con la proyección de la parte superior de la cubierta FOPS, se identificó el centro geométrico del área ABCD comprendida por los miembros estructurales

que cubren la proyección superior del DLV, también se pudo notar que el punto donde se presentarían las máximas deformaciones coincide con el centro geométrico del área ABCD.

Así, se ubicó la carga en dicho punto (imagen diseñada para el presente estudio):

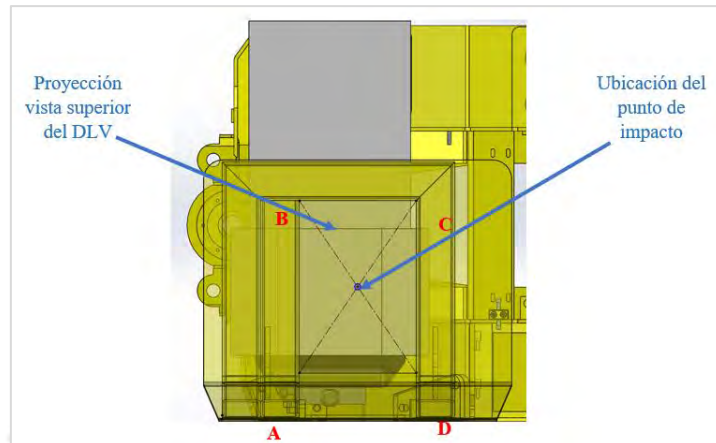


Figura 48. Ubicación del punto de aplicación de la carga de impacto según ISO 3449

Finalmente, para la estructura FOPS, se determinaron los puntos de apoyo (imagen diseñada para el presente estudio):

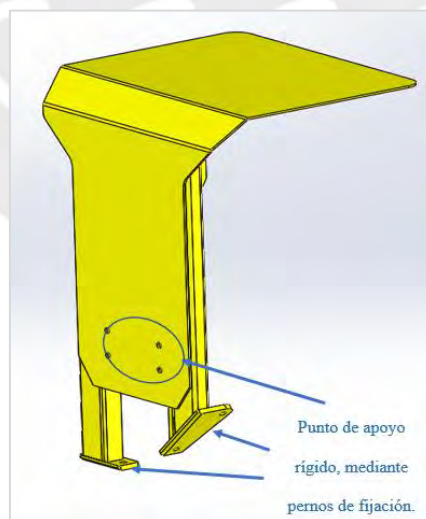


Figura 49. Ubicación de apoyos para el análisis FOPS

Para el caso ROPS, siguiendo las indicaciones de la norma ISO 3471, se determinó la

dirección, magnitud y ubicación de las cargas, lateral, longitudinal y vertical, requeridas para el ensayo. A continuación, se muestran las ubicaciones de dichas cargas para el presente caso de estudio. La carga lateral fue ubicada en un componente estructural superior del ROPS que es el más cercano al asiento (visto desde la proyección superior). El punto de aplicación de la fuerza debe estar en la línea de cambio de dirección de los postes verticales de la estructura ROPS. En dicha línea el punto debe estar fuera de la distancia $L/3$, para este caso se definió que la carga esté centrada entre las líneas de proyección vertical del DLV sobre la estructura ROPS como se muestra en las figuras 50 y 51 (imágenes diseñadas para el presente estudio):

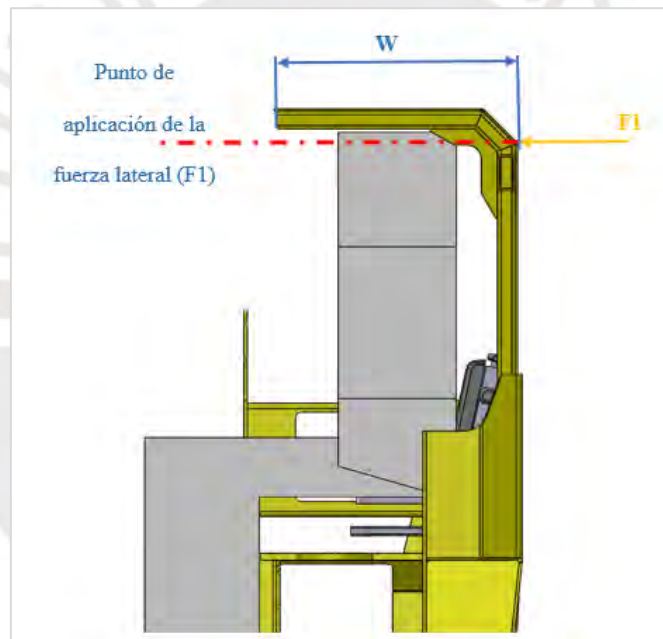


Figura 50. Ubicación de la carga lateral $F1$ en vista frontal

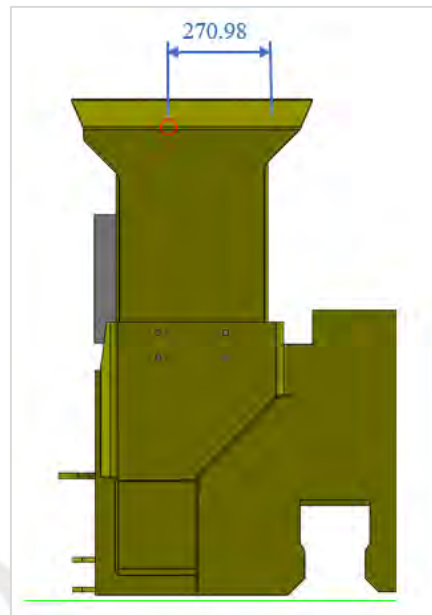


Figura 51. Ubicación de la carga lateral centrada con la proyección de la DLV

La carga vertical debe ser aplicada luego de la carga lateral, ubicándose en el mismo plano vertical centrado a la mitad del ancho W de la estructura en la parte superior de la ROPS, dicho plano vertical es perpendicular a la línea central longitudinal de la estructura ROPS. La carga se distribuyó a lo largo de la línea que forma el plano vertical de aplicación de la carga con el plano horizontal de la estructura como se muestra en la figura 52 (imagen diseñada para el presente estudio):

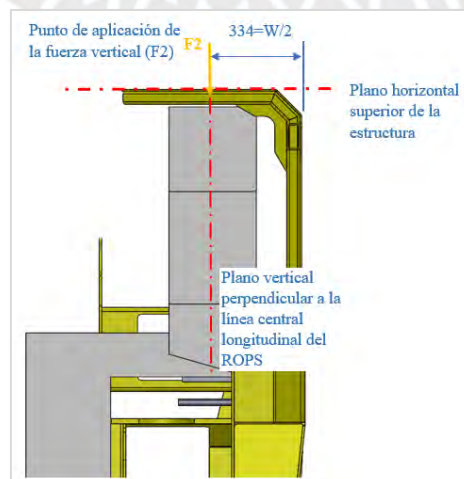


Figura 52. Ubicación de la carga vertical F2 en vista frontal

La carga longitudinal se aplicó (en los componentes superiores de la ROPS) a lo largo de la línea central de la ROPS, por lo que el punto de aplicación fue determinado mediante la intersección de los planos frontal y superior. Así, la carga debió ser aplicada en la dirección donde se producirían los mayores requerimientos estructurales, por lo que esta fue aplicada inicialmente de manera horizontal (imagen diseñada para el presente estudio):

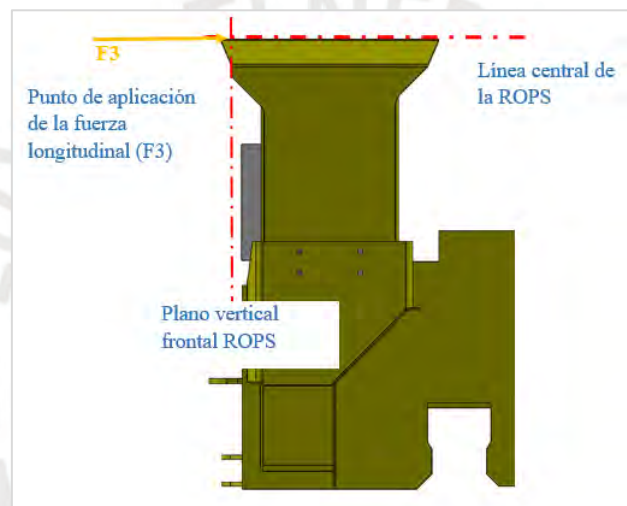


Figura 53. Ubicación de la carga longitudinal F3 en vista frontal

Para determinar las magnitudes de las cargas se usó la tabla 2, la cual requiere el valor de la masa para seleccionar en que rango se encuentra y de acuerdo con ello calcular la magnitud de cada carga en base a las ecuaciones preestablecidas. Para el presente caso la masa del equipo fue de 3785 kg (con los tanques llenos como indica la norma), por lo tanto, las magnitudes obtenidas fueron las siguientes (imagen diseñada para el presente estudio):

Maquinaria para movimiento de tierras sobre ruedas: Cargadores, Hojas de empuje, Tiendetubos, Cargadores compactas, retro excavadoras, zanjadoras				
Masa de la Máquina m kg	Fuerza lateral F N	Carga de energía lateral U J	Fuerza vertical F N	Fuerza Longitudinal F N
3100	22710	3711.01	74223.85	18168

Figura 54. Fuerzas y energía calculadas para el caso microscop HS10E

Finalmente, para el caso ROPS se ubicó el punto de fijación que de acuerdo con la norma debe ser la zona donde el eje de la maquina es montada y el eje de articulación del chasis como se muestra en la figura 55 (imagen diseñada para el presente estudio):

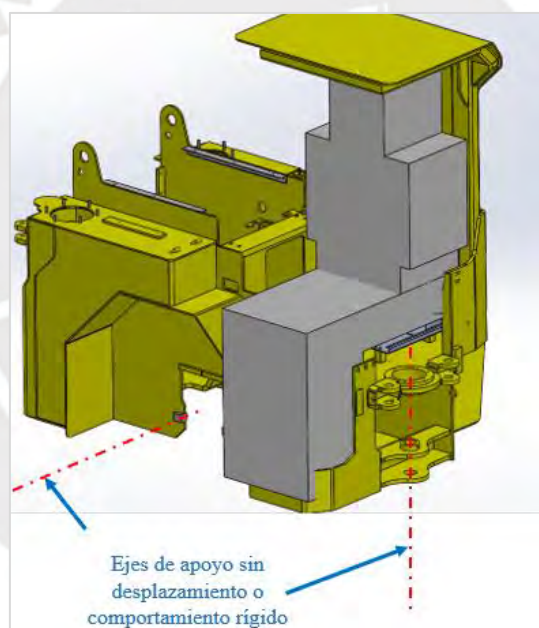


Figura 55. Ubicación de apoyos para el análisis ROPS

Los materiales para este tipo de aplicación son conocidos en la industria y de acuerdo con la disponibilidad del mercado se contó con los siguientes materiales: para los tubos rectangulares del techo, el ASTM A-500, por sus propiedades de resistencia estructural mecánica.

Propiedades físicas		Métrico
Densidad		7,80 g / cc
Propiedades mecánicas		Métrico
Resistencia a la tracción, Ultimate		310 MPa
Resistencia a la tracción, rendimiento		270 MPa
Alargamiento a la rotura		25%
Módulo de volumen		160 GPa
Módulo de corte		80,0 GPa
Propiedades de los elementos componentes		Métrico
Carbono, C		<= 0,30%
Cobre, Cu		<= 0,18%
Hierro, Fe		99%
Fósforo, P		<= 0,050%
Azufre, S		<= 0,063%

Figura 56. Propiedades mecánicas del acero ASTM A 500 grado A

Para elementos estructurales de poca exigencia mecánica se usó el ASTM A572, como por ejemplo los guarda fangos, placas laterales de chasis, tapas de cajas y tanques hidráulicos, entre otros.

Propiedades físicas		Métrico
Densidad		7,80 g / cc
Propiedades mecánicas		Métrico
Dureza, Brinell		135
Dureza, Rockwell B		74
Resistencia a la tracción, Ultimate		450 MPa
Resistencia a la tracción, rendimiento		345 MPa
Alargamiento a la rotura		18%
		21%
Módulo de volumen		160 GPa
Módulo de corte		80,0 GPa
Propiedades de los elementos componentes		Métrico
Carbono, C		<= 0,23%
Hierro, Fe		98%
Manganeso, Mn		1,35%
Fósforo, P		<= 0,040%
Silicio, Si		<= 0,40%
Azufre, S		<= 0,050%

Figura 57. Propiedades mecánicas del acero ASTM A 572 grado 50

Para elementos de mayor exigencia que se encuentren sometidos a grandes requerimientos de resistencia mecánica, como por ejemplo los elementos que soportan pines,

brazo de movimiento de cuchara o las placas que conforman la ROPS o FOPS, entre otros, se empleó el ASTM A 514.

Propiedades físicas	Métrico
Densidad	7,80 g / cc
Propiedades mecánicas	Métrico
Dureza, Brinell	235 - 293 @ Espesor 9,50 mm
Dureza, Knoop	289
Dureza, Rockwell B	98
Dureza, Rockwell C	26
Dureza, Vickers	278
Resistencia a la tracción, Ultimate	760 - 895 MPa
Resistencia a la tracción, rendimiento	690 MPa @ deformación 0,200%
Alargamiento a la rotura	18%
Módulo de volumen	160 GPa
Módulo de corte	80,0 GPa
Propiedades de los elementos componentes	Métrico
Boro, B	<= 0,0025%
Carbono, C	0,15 - 0,21%
Cromo, Cr	0,50 - 0,80%
Hierro, Fe	97%
Manganeso, Mn	0,80 - 1,1%
Molibdeno, Mo	0,18 - 0,28%
Fósforo, P	0,035%
Silicio, Si	0,40 - 0,80%
Azufre, S	0,040%
Circonio, Zr	0,050 - 0,15%

Figura 58. Propiedades mecánicas del acero ASTM A 514 grado A

4.4. Preprocesamiento

En esta etapa se procedió a trabajar con el programa seleccionado para realizar la simulación numérica, siguiendo los pasos indicados en el capítulo 3.

4.4.1. Generación de la Maqueta Virtual.

Como se explicó en el capítulo 3, dado que ya se identificó la geometría involucrada en el análisis, se preparó la maqueta inicial, dado que este se modelo en el SolidWorks con todos los detalles para fabricación, primero se eliminaron los elementos que no tiene contribución en la resistencia estructural y luego las geometrías como redondeos y chaflanes que tampoco tiene

un aporte estructural. Para la simulación FOPS la principal estructura es el techo y las zonas donde la estructura del techo se fija rígidamente al chasis, formando la cabina del operador, como se muestra en la figura 59 (el modelo 3D detallado que incluye el 100% de los componentes de la máquina).

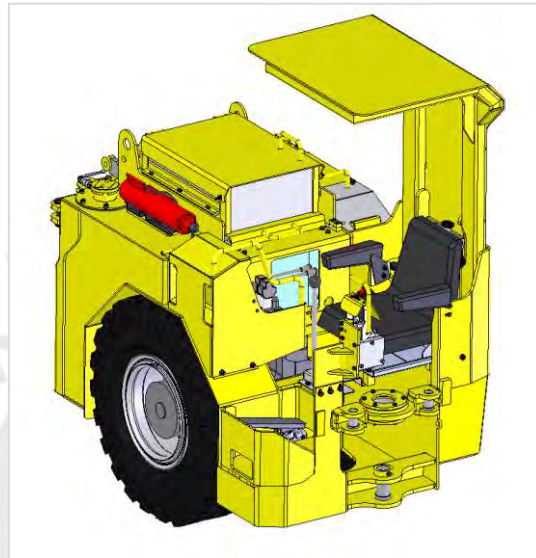


Figura 59. Modelo detallado de la cabina del operador

Al realizar un análisis de los elementos estructurales que componen el FOPS, se simplificó el modelo 3D de tal modo que solo se contó con los componentes que contribuyen en la resistencia estructural del FOPS, además al entender que el elemento estructural techo trabaja rígidamente unido al chasis por medio de la placa de respaldar y las placas de los pies de la estructura que se encuentran soldadas rígidamente al chasis principal, el modelo o maqueta virtual quedó simplificado, como se muestra en la figura 60.



Figura 60. Modelo simplificado 3D para simulación FOPS

El modelo simplificado quedó así listo para optimizarlo y el archivo 3D se guardó en formato STEP. De inmediato se empleó el programa Space Claim de Ansys en la eliminación de redondeos, chaflanes y posibles geometrías que puedan generar conflictos en la simulación. Además de ello, dado que los elementos que se usan para la estructura son tubos y placas, se transformó la geometría sólida a elementos de superficie con los espesores de cada elemento de acuerdo al modelo original. Por lo tanto, la maqueta virtual final quedó como se muestra en la figura 61 (imagen diseñada para fines del presente estudio):

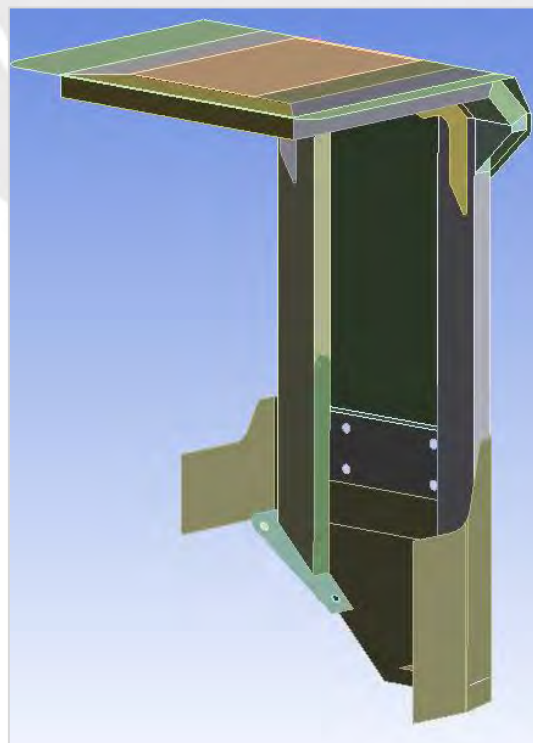


Figura 61. Modelo optimizado 3D para simulación FOPS

Para la simulación ROPS se eliminaron los elementos que no contribuían a la rigidez estructural. Así, se simplificó la maqueta virtual, como se muestra en la figura 62 (imagen diseñada para fines del presente estudio), donde para el chasis del operador solo se mantuvieron las placas laterales, centrales y un guardafango, ya que dichos componentes sirven para soportar el techo y son los principales componentes estructurales que luego se acoplan al eje de transmisión. Para la estructura techo se consideraron todos los componentes (tal cual como se previó para el análisis FOPS).

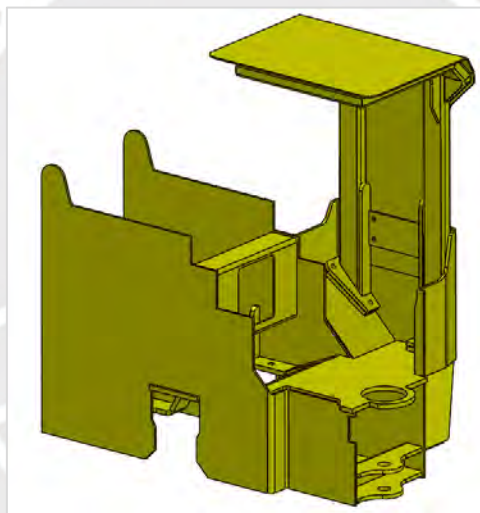


Figura 62. Modelo simplificado para simulación ROPS

El modelo simplificado, tal como se realizó para el análisis FOPS, fue optimizado usando el programa Space Claim de Ansys, eliminándose características geométricas del modelo que no contribuían a la resistencia estructural y que podían generar algún conflicto en el mallado del ensamble. Los elementos sólidos del cual está compuesto la estructura son placas de diferentes tipos de espesores y materiales. Por lo tanto, la maqueta virtual final quedó como se muestra en la figura 63 (especialmente diseñada para el presente trabajo de investigación).

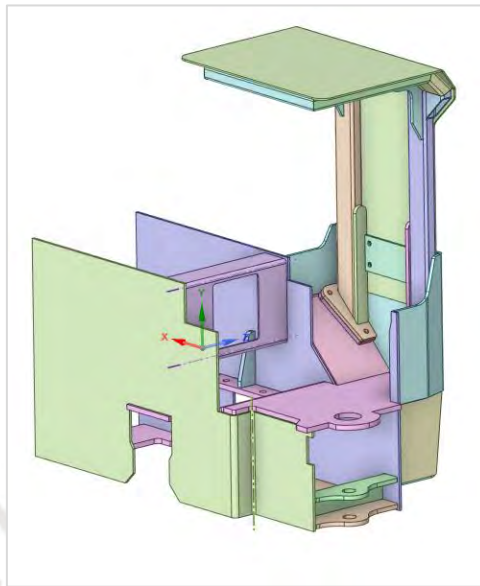


Figura 63. Modelo simplificado para simulación ROPS

4.4.2. Propiedades del Material.

Ansys cuenta con una amplia librería de materiales para diversos tipos de análisis, para el caso del análisis FOPS se aplicaron materiales de tipo estructural con comportamiento lineal que cuentan con las propiedades de los materiales que fueron seleccionados para su fabricación. Ingresando a la librería de *Ansys* se encontró el material Elástico Isotrópico de la carpeta Lineal Elástico, el cual cuenta con las propiedades fundamentales de los aceros como es el módulo de elasticidad (cuyo valor es 200GPa). Luego, se editó el valor del límite de elasticidad para cada material según las fichas técnicas, renombrándose los materiales creados (como se muestra en las figuras (64, 65 y 66, especialmente diseñadas para el presente estudio):

Properties of Outline Row 3: ASTM A500 GRADO A				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7850	kg m ⁻³	
4	Isotropic Elasticity			
5	Derive from	Young's Modulus and Poisson...		
6	Young's Modulus	2E+11	Pa	
7	Poisson's Ratio	0.3		
8	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa	
9	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa	
10	Specific Heat Constant Pressure, C _p	434	J kg ⁻¹ C ⁻¹	

Figura 64. Material lineal ASTM A 500

Properties of Outline Row 4: ASTM A514 GRADO A				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7850	kg m ⁻³	
4	Isotropic Elasticity			
5	Derive from	Young's Modulus and Poisson...		
6	Young's Modulus	2E+11	Pa	
7	Poisson's Ratio	0.3		
8	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa	
9	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa	
10	Specific Heat Constant Pressure, C _p	434	J kg ⁻¹ C ⁻¹	

Figura 65. Material lineal ASTM A 514

Properties of Outline Row 5: ASTM A572 GRADO 50				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7850	kg m ⁻³	
4	Isotropic Elasticity			
5	Derive from	Young's Modulus and Poisson...		
6	Young's Modulus	2E+11	Pa	
7	Poisson's Ratio	0.3		
8	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa	
9	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa	
10	Specific Heat Constant Pressure, C _p	434	J kg ⁻¹ C ⁻¹	

Figura 66. Material lineal ASTM A 572

Para el caso del análisis ROPS se aplicaron materiales del tipo estructural *Bilineal Isotropic Hardening* de la carpeta de plasticidad, que cuentan con las propiedades de los materiales que fueron seleccionados para su fabricación, dado que durante la simulación se esperaba que las deformaciones que se producirán por la aplicación de la fuerza sobre la estructura serían permanentes, por lo que el material tuvo requerimientos fuera de los límites

de fluencia, es por ello que el material para la simulación debía ser bilineal, para simular el comportamiento del material por fuera del límite de fluencia. Para el caso de materiales no lineales fue necesario crear los materiales que intervienen en la fabricación del chasis, esto debido a que el límite de fluencia si tiene un papel importante dado que, al sobrepasar el límite de fluencia, el material modifica su comportamiento elástico por un comportamiento plástico. Para cada material se ingresó el límite de fluencia y el límite a la rotura, donde entre el límite de fluencia y el límite de la rotura el material tendrá un comportamiento plástico lineal, como se muestran en las siguientes figuras (67, 68 y 69, imágenes generadas en el marco del presente estudio):

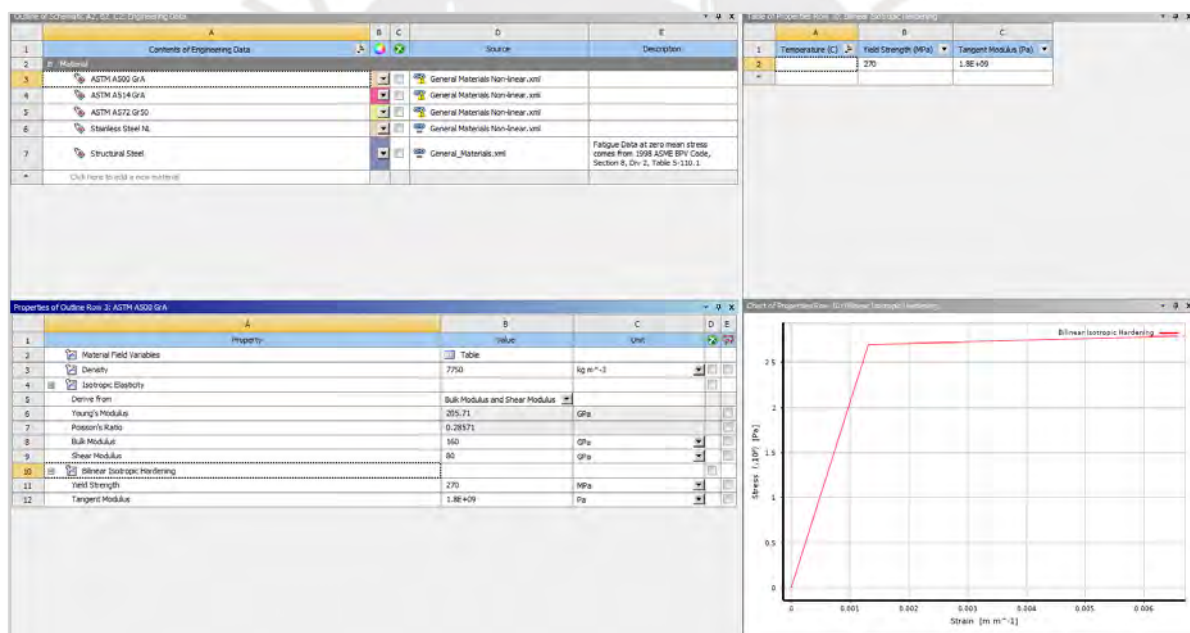


Figura 67. Material no lineal ASTM A 500

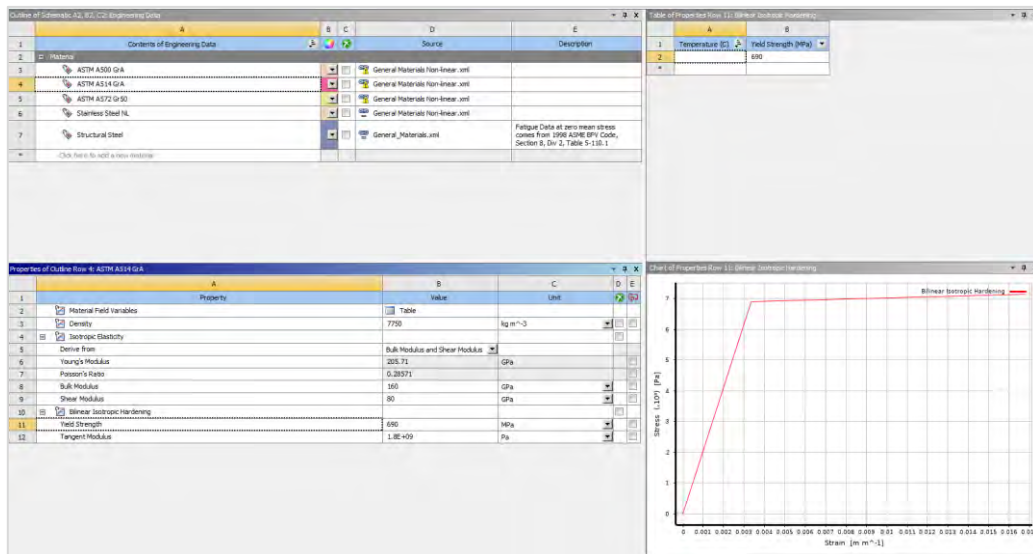


Figura 68. Material no lineal ASTM A 514

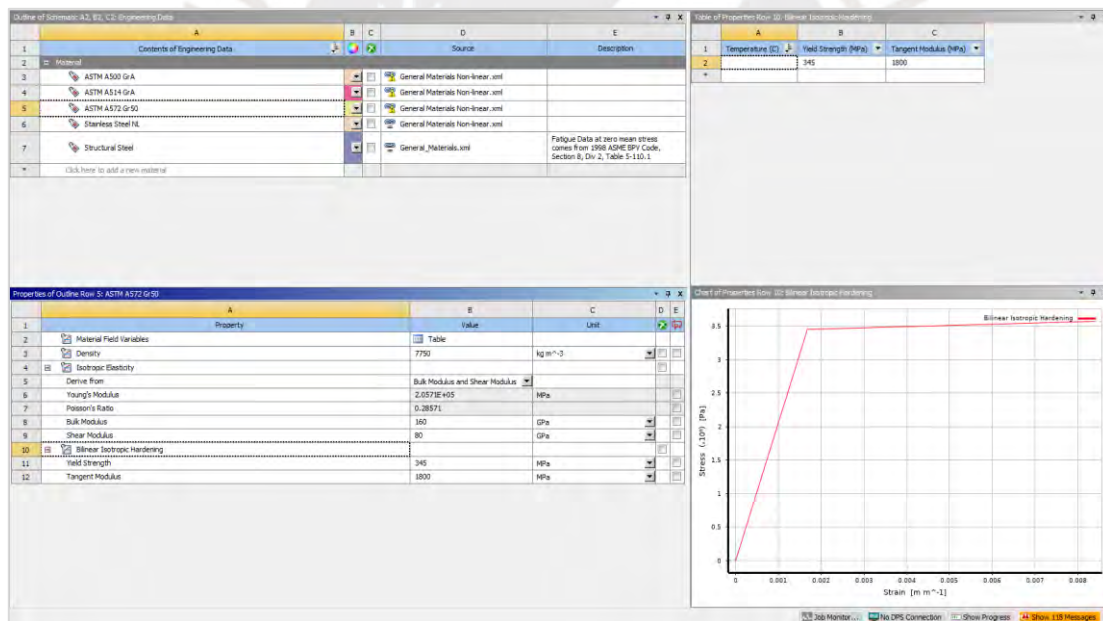


Figura 69. Material no lineal ASTM A 572

4.4.3. Generación de la Malla.

Para el caso del análisis FOPS se realizó el mallado con elementos tipo placa, dado que los componentes estructurales están fabricados con placas de acero plegadas y soldadas para hacer un cuerpo estructural, el elemento que impacta sobre la estructura será mallado con

elementos tipo tetraédrico dado que este elemento cuenta con dimensiones representativas en las tres dimensiones y debe replicar el comportamiento de un elemento sólido tridimensional que impacta sobre una superficie. Para obtener una malla de buena calidad se ajustó el mallado que se obtiene de manera automática en el software. Para el objeto de impacto, debido a que tiene una forma cilíndrica unida a una semi esfera, el elemento tridimensional que mejor se acomoda a este tipo de formas es el tetraédrico, esta configuración se logra aplicando la herramienta *Patch Conforming Method*, cuya configuración se muestra en la figura 70 (generada para fines del presente estudio). Así mismo, dado que el objeto de impacto contiene formas curvas, fue necesario reducir el tamaño de los elementos a 15 mm para que la calidad del mallado sea buena, la configuración se realizó con la herramienta *Body Sizing*.

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Body
Definition	
Suppressed	No
Method	Tetrahedrons
Algorithm	Patch Conforming
Element Order	Use Global Setting

Figura 70. Configuración de *Patch Conforming Method* para el objeto de impacto

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Body
Definition	
Suppressed	No
Type	Element Size
<input type="checkbox"/> Element Size	15.0 mm
Advanced	
<input type="checkbox"/> Defeature Size	Default (0.125 mm)
Behavior	Soft
<input type="checkbox"/> Growth Rate	Default (1.2)
Capture Curvature	No

Figura 71. Configuración de *Body Sizing* para el objeto de impacto

Cuando se realizó el mallado automático se observó que varios de los componentes

estructurales tipo tubo rectangular los cuales se muestran en color azul en la figura 72 (generada para el presente estudio), presentaron zonas donde los cuadriláteros tenían ángulos demasiado agudos, esto puede generar problemas de convergencia o que aparezcan zonas de altos valores de estrés que no corresponderían con la realidad. Para evitar este tipo de elementos se usó la herramienta *Multizone Quad / Tri Method*, la cual permite al software reacomodar los elementos de manera que pueda mezclar el uso de elementos cuadriláteros como triángulos dependiendo de la sollicitación de la geometría a mallar. Además de ello se aplicó la herramienta *Body Sizing* para tener elementos más pequeños que se acomoden a la geometría de la estructura el tamaño de elemento finito para las estructuras seleccionadas es de 20 mm, como se muestra en las figuras 72 y 73 (diseñada durante el presente estudio).

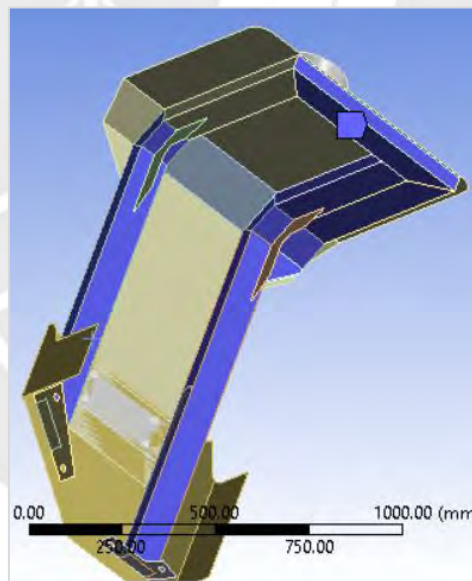


Figura 72. Elementos seleccionados para aplicar *Multizone Quad / Tri Method*

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Body
Definition	
Suppressed	No
Type	Element Size
Element Size	20.0 mm
Advanced	
Defeature Size	Default (0.125 mm)
Behavior	Soft
Growth Rate	Default (1.2)
Capture Curvature	No
Capture Proximity	No

Figura 73. Configuración de *Body Sizing* para elementos de 20 mm

Los elementos de refuerzo tipo cartelas en la parte superior del techo las cuales se muestran en la figura 74 (creada durante el presente estudio), las cuales están resaltadas de color azul debido a que su geometría requiere de elementos finitos de menor tamaño que otros elementos, por lo cual se aplicó la herramienta *Body Sizing* para obtener un tamaño de elementos finito de 15 mm.



Figura 74. Elementos seleccionados para aplicar *Body Sizing*

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	2 Bodies
Definition	
Suppressed	No
Type	Element Size
Element Size	15.0 mm
Advanced	
Defeature Size	Default (0.125 mm)
Behavior	Soft
Growth Rate	Default (1.2)
Capture Curvature	No
Capture Proximity	No

Figura 75. Configuración de *Body Sizing* para elementos de 15 mm

Luego de revisado y verificado que no tenían más elementos finitos que puedan tener problemas durante el análisis numérico se actualizó el mallado, como se muestra en la figura 76 (generada para el presente estudio):

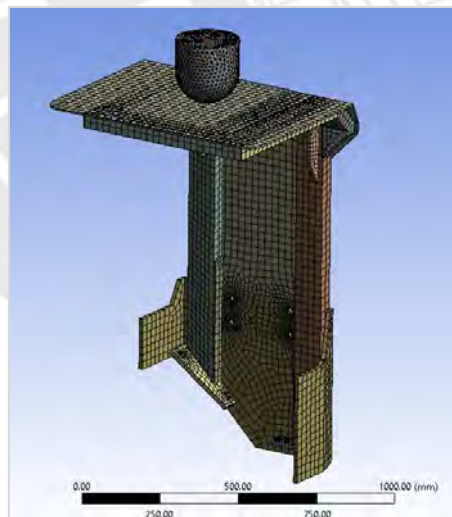


Figura 76. Mallado de la maqueta virtual para análisis FOPS nivel I

A continuación, se revisó la calidad del mallado aplicando la herramienta *Quality* en el *Display Style* de las opciones de configuración de malla, donde los elementos más cercanos al

valor uno, en la escala de colores, presentan una calidad óptima. En la figura 77 se muestra el mallado con la representación de escala de colores, donde no se visualizan grandes zonas de color rojo, pero para saber si la mayoría de los elementos tienen una calidad adecuada, se solicitó una gráfica de barras como se muestra en la figura 78, apreciándose que la mayoría de los elementos están por arriba de 0,5 de calidad. Así, se confió en que no habría problemas en el cálculo relacionados a un mallado pobre o elementos finitos con geometría que generen errores o falsos valores en la simulación.

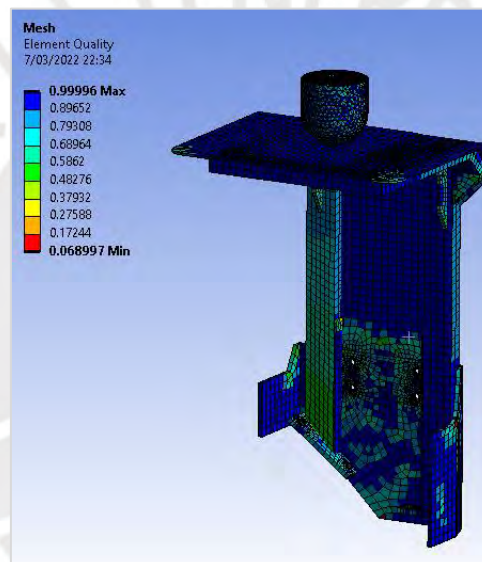


Figura 77. Calidad de mallado de la maqueta virtual para análisis FOPS nivel I

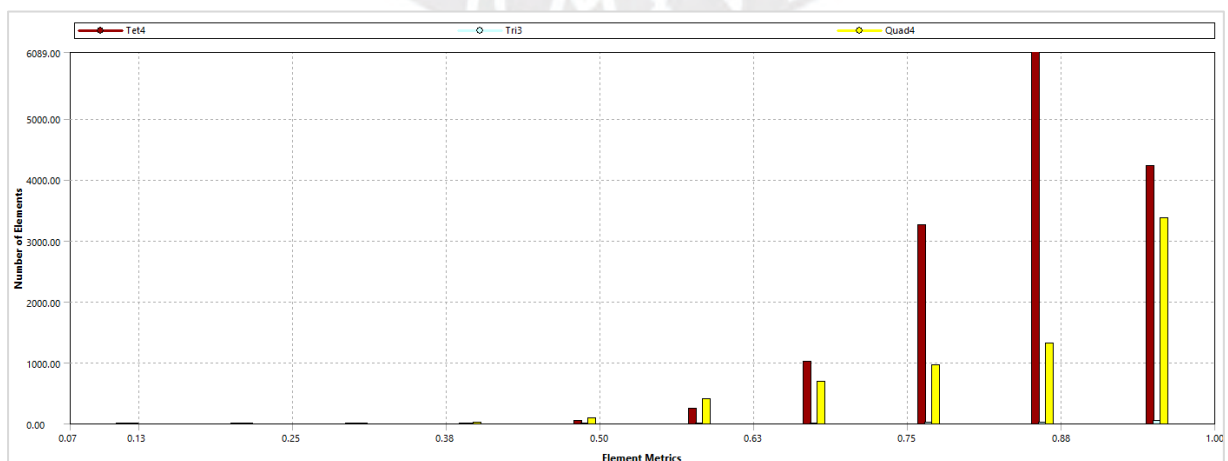


Figura 78. Gráfica de calidad del mallado

Luego de hacer las mejoras en el mallado para obtener una buena calidad en el mismo, se contabilizó un total de 21 754 elementos. Para el caso de análisis ROPS, al igual que para el caso FOPS, los componentes que forman la estructura son placas de acero unidas mediante soldadura, por lo cual se usaron elementos tipo placa, el elemento finito en general tuvo una dimensión de 20 mm. Para obtener un buen mallado de la maqueta virtual se realizaron algunas configuraciones adicionales que eliminaron los elementos que podían ocasionar problemas durante el cálculo numérico del programa. Para ello se usó la herramienta *Body Sizing* en diferentes elementos, ya sea seleccionando el elemento para aplicar la dimensión de mallado requerido o aplicando una esfera de influencia para solo aplicar el cambio de dimensiones de mallado en los elementos que se ven influenciados dentro del volumen de dicha esfera. En la figura 79 se muestran las zonas donde se aplicó el *Body Sizing*, las dimensiones aplicadas para los elementos son de diferentes medidas, desde 10 mm hasta 5 mm. Luego de este afinamiento de la malla se obtuvo un mallado como se muestra en figura 80. De inmediato, se verificó la calidad del mallado con la herramienta *Quality* en el *Display Style* de las opciones de configuración de malla, obteniendo el mallado en escala de colores como se muestra en la figura 81, con el mismo criterio explicado para el caso del mallado para el análisis FOPS. En este caso se puede apreciar que no hay zonas de mallado de color rojo que alerten de algún problema de mallado. Finalmente, para corroborar lo que se muestra visualmente en la figura 81, se solicitó la gráfica de barras como se muestra en la figura 82, apreciándose que casi todos los elementos tienen valores mayores a 0,5; con lo cual puede confiarse en el mallado realizado.

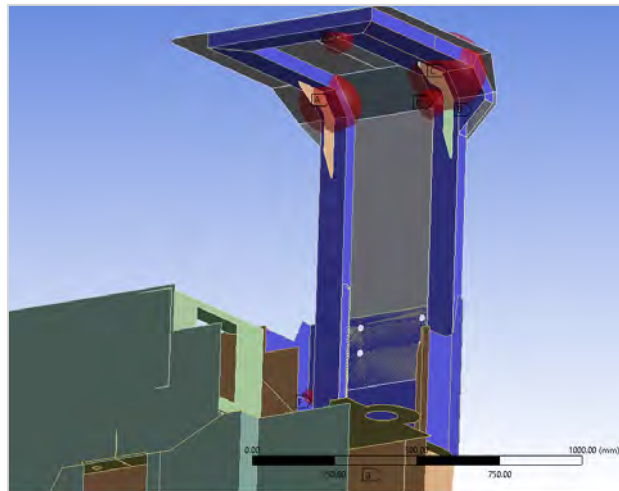


Figura 79. Gráfica de calidad del mallado

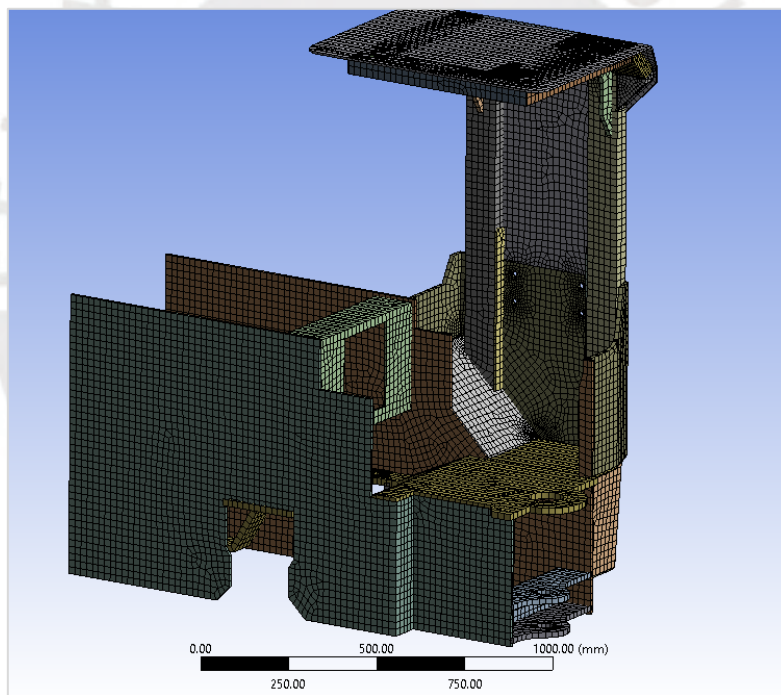


Figura 80. Gráfica de calidad del mallado

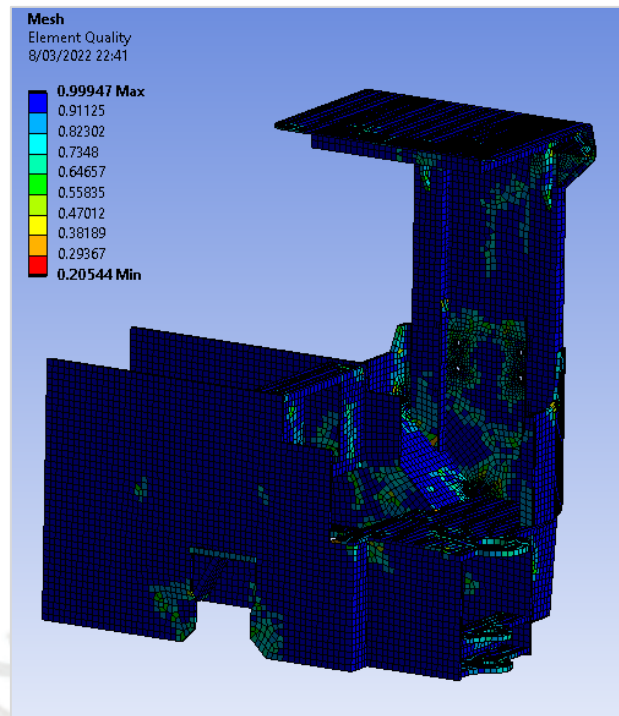


Figura 81. Gráfica de calidad del mallado

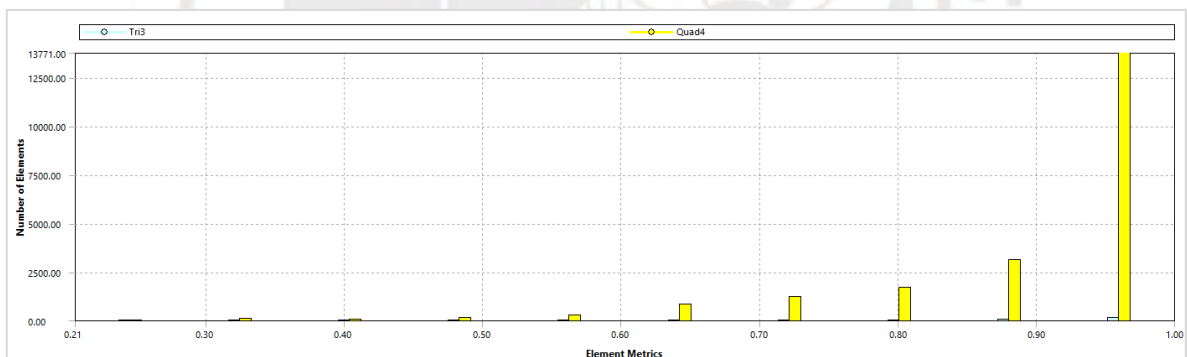


Figura 82. Gráfica de calidad del mallado

4.4.4. Definición de Apoyos y Cargas.

Luego de realizar el mallado, se procedió a aplicar los apoyos y las cargas previamente definidas en el apartado 4.3.6., haciendo uso de las herramientas del programa. Esta configuración se realiza dentro de condiciones iniciales. Para el caso FOPS el tipo de apoyo que representa el comportamiento de superficie fijas es *Fixed Support*, este tipo de apoyo

restringe a la superficie seleccionada en sus 6 grados de libertad, es decir las superficies seleccionadas están unida a la estructura mayor, de manera rígida o soldada. En la figura 83 se muestran las superficies seleccionadas para los apoyos tipo *Fixed Support*.

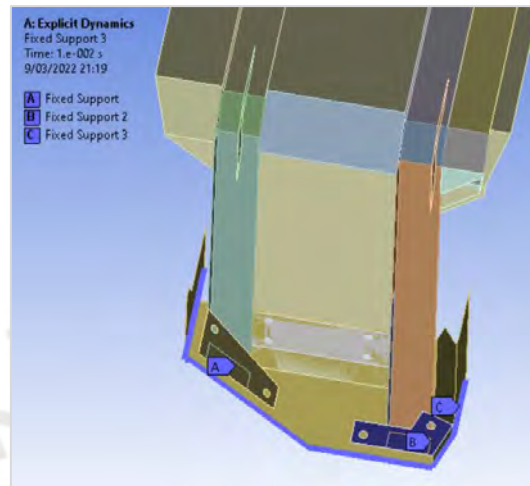


Figura 83. Superficies seleccionadas tipo *Fixed Support*

Luego de definir los apoyos, se configuró la carga de impacto, que de acuerdo al apartado 4.3.2. se calculó que la velocidad de impacto es de $\frac{7.788m}{s}$, este valor fue ingresado en las condiciones iniciales, así mismo y finalmente, para tener un escenario de acuerdo a las condiciones ambientales se activó la fuerza de gravedad para el sistema en análisis, dejando la configuración como se muestra en la figura 84.

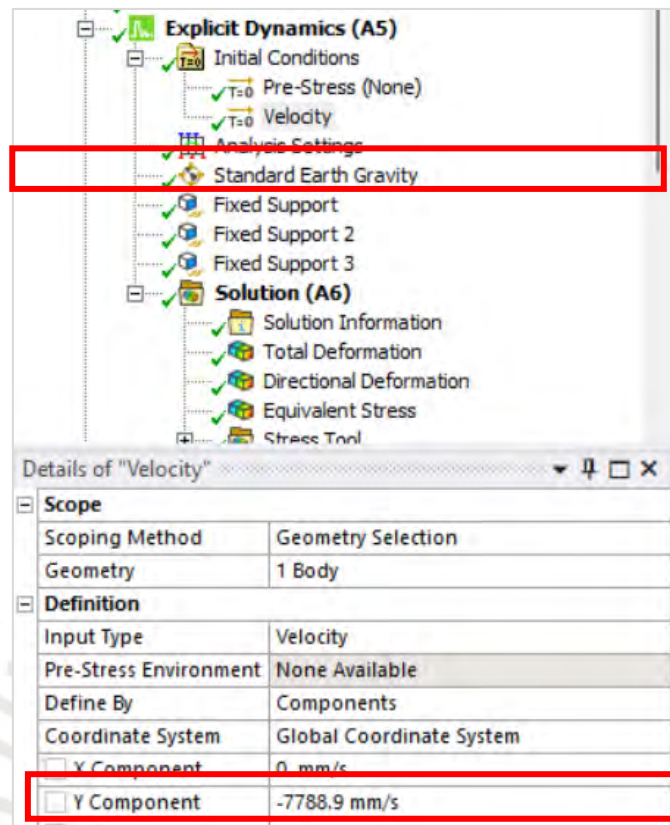


Figura 84. Configuraciones de velocidad de impacto y gravedad

Para el caso ROPS, de acuerdo con el apartado 84, se ubicaron las zonas donde se aplicaron los apoyos tipo *Fixed Support*, los cuales fueron seleccionados como se muestra en la figura 85.

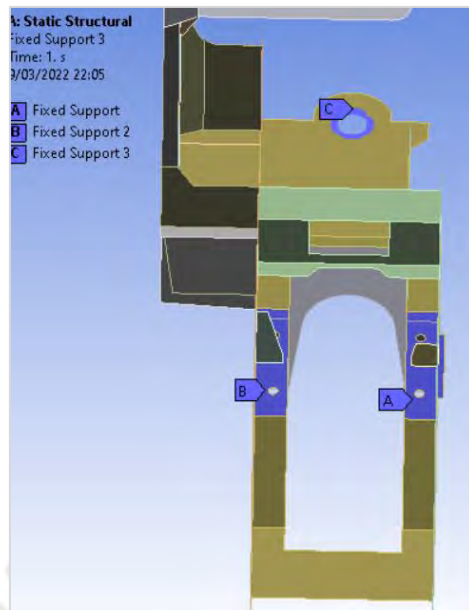


Figura 85. Superficies seleccionadas tipo *Fixed Support*

Con posterioridad, se ubicaron las fuerzas en los puntos identificados, teniendo en cuenta el orden de aplicación de las fuerzas, el valor de cada fuerza fue de acuerdo con lo indicado en la figura 54. Según lo explicado en el apartado mencionado, las fuerzas se aplican lentamente en un incremento lineal, cuando la fuerza llega hasta el valor requerido debe ser descargada lentamente de manera lineal para aplicar la fuerza que continua bajo el mismo procedimiento, para lograr este efecto se procedió a configurar en que en el *step* la fuerza llegue a su máximo valor y en que *step* se descargue (figuras 86, 87 y 88, creadas en el marco del proceso investigativo descrito en el presente informe de tesis).

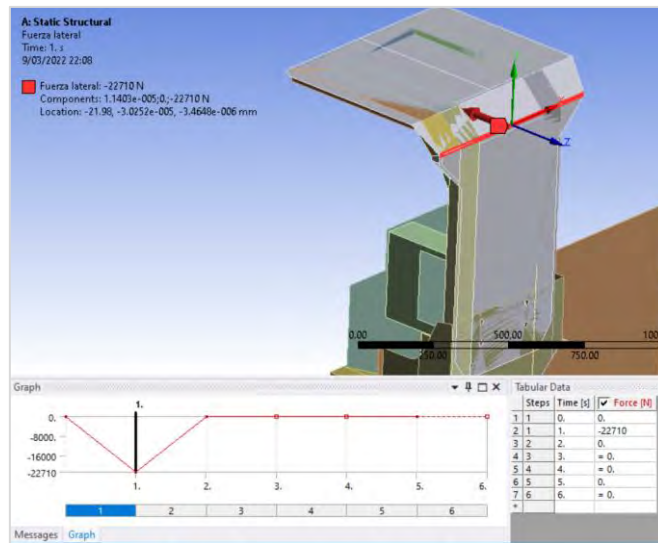


Figura 86. Ubicación de la fuerza lateral

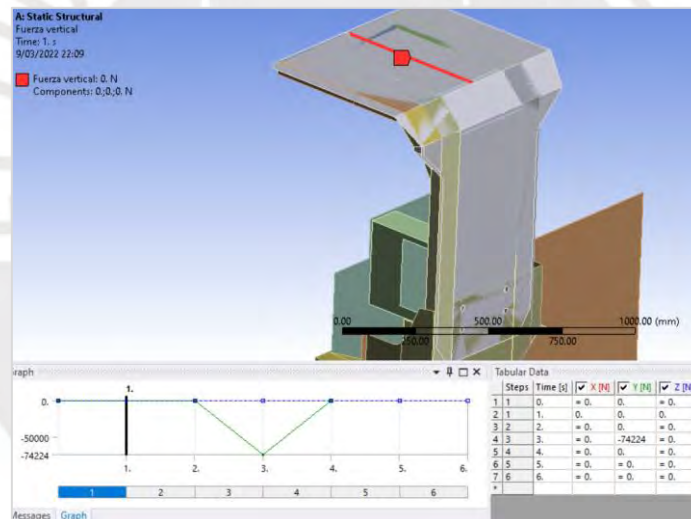


Figura 87. Ubicación de la fuerza vertical

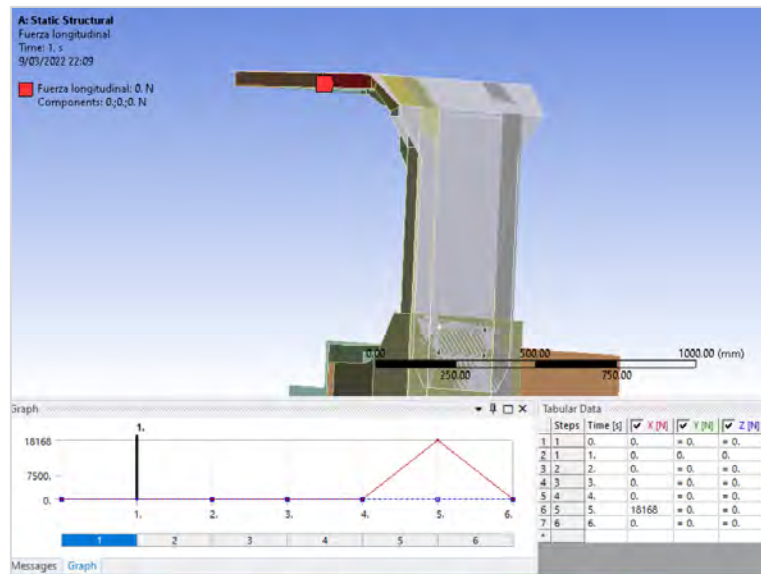


Figura 88. Ubicación de la fuerza longitudinal

4.5. Solución

Luego de realizar las configuraciones necesarias, las cuales se realizaron en los apartados anteriores (como propiedades de materiales, generación de mallas, definición de apoyos y cargas), se indicó al programa que ejecute la solución por elementos finitos. En esta etapa se puede ir monitoreando el avance de la solución. Para el análisis FOPS, al ser un análisis explícito de impacto para hacer el monitoreo, se solicitó el reporte de *Energy Summary*, observándose la evolución de la energía cinética y de la energía interna, sin embargo, para esta etapa lo más importante fue verificar que la gráfica *Energy Error* siempre mantuviese valores por debajo del 5% de la energía que se estaba desarrollando (como se muestra en la figura 89), ya que valores superiores podían generar problemas en el análisis. También se debió ver la gráfica *Energy Summary*, en el cual se verificó que los valores de *Hourglass Energy* siempre deben ser valores por debajo de las energías cinética e interna, como se muestra en la figura 90, de lo contrario el análisis tendría resultados erróneos que pueden inducir a un error en el análisis de los resultados.

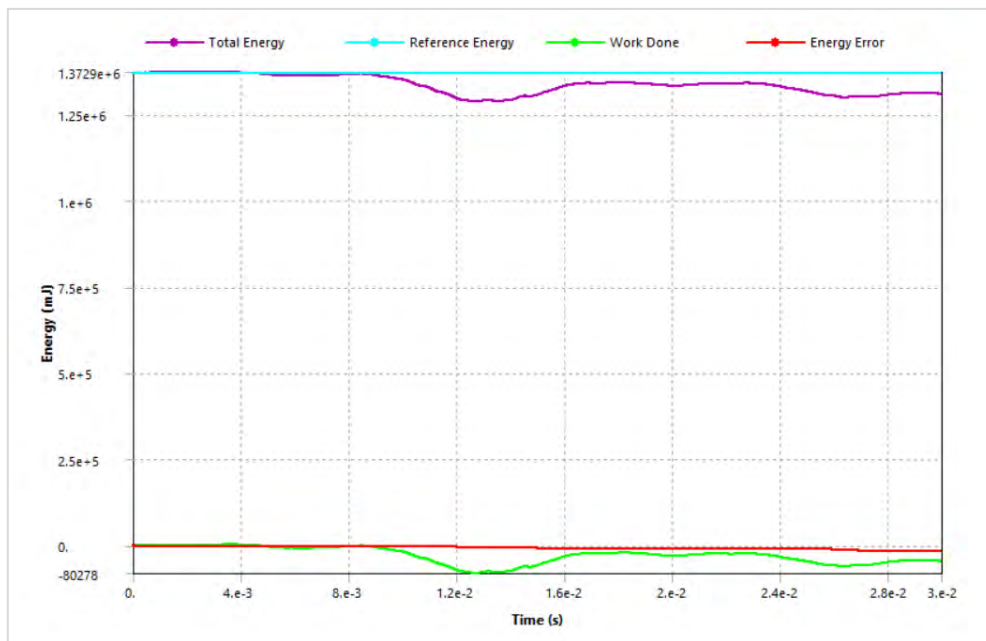


Figura 89. Gráfica de *Energy Conservation*

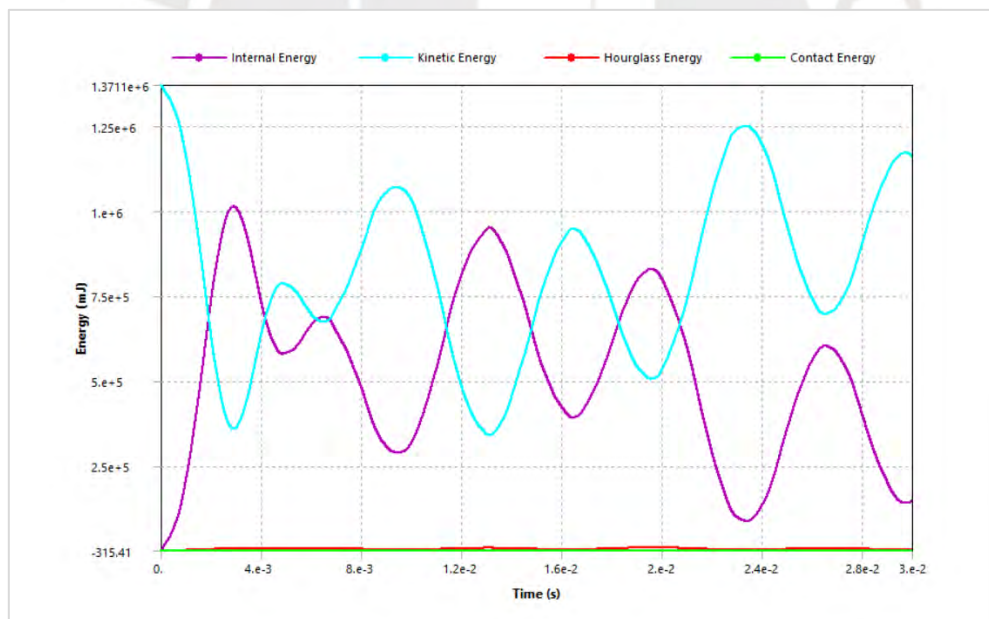


Figura 90. Gráfica de *Energy Summary*

Para el caso de análisis ROPS se realizó el monitoreo verificando la gráfica de *Force Convergence*, evaluándose así si *Force Convergence* tenía tendencia de valores por debajo de *Force Criterion* en cada *substep*, como se muestra en la figura 91; de lo contrario, sería un

aviso de que el análisis tiene problemas de convergencia por algún problema en los parámetros ingresados antes de iniciar la solución.

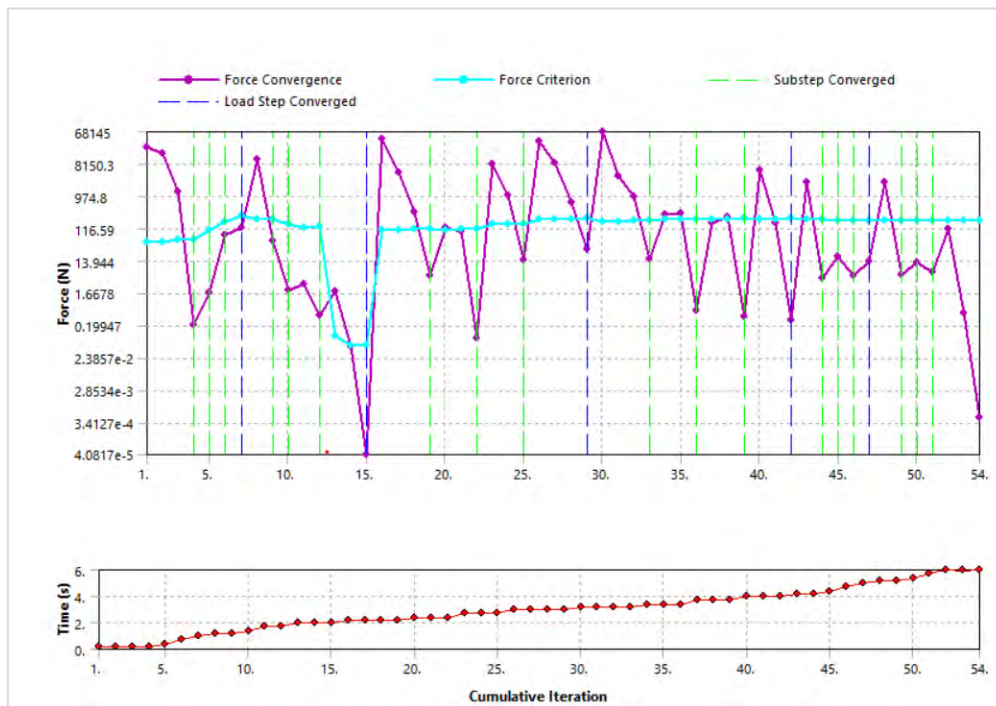


Figura 91. Gráfica de Force Convergence

4.6. Post-Procesamiento

Para esta etapa se seleccionaron las gráficas requeridas para comprender el comportamiento estructural de la simulación en base a las configuraciones realizadas. En ambos casos de análisis (FOPS y ROPS) se solicitaron las gráficas: a) Gráfica de deformación total, para detectar donde se presentan las máximas deformaciones durante toda la etapa de la simulación (que serán muy útiles para entender donde la estructura puede entrar en contacto con el DLV); b) Gráficas de esfuerzos de esfuerzos máximos también fueron requeridas para verificar si la estructura tendrá alguna falla fuera de los límites de fluencia y rotura y c) Para el caso de simulación FOPS se obtuvo la gráfica denominada *end time* de 0,01s, el cual es el tiempo límite hasta donde se realizará la simulación, este valor seleccionado es corto dado que

este tipo de análisis son simulaciones de eventos que suceden en tiempos muy cortos. Como primera simulación procedemos a revisar la gráfica de deformaciones solicitada. En la gráfica de la figura 92 se puede observar como la deformación evolucionó a través del tiempo, siendo el máximo valor para el tiempo 0.007s, por lo tanto, se solicitó al programa la gráfica de variaciones de deformaciones en la malla, el cual se muestra en la figura 93, apreciándose que el máximo valor es de 29,007 mm (los componentes con colores más cercanos al rojo son aquellos que se acercan más al valor máximo de deformación).

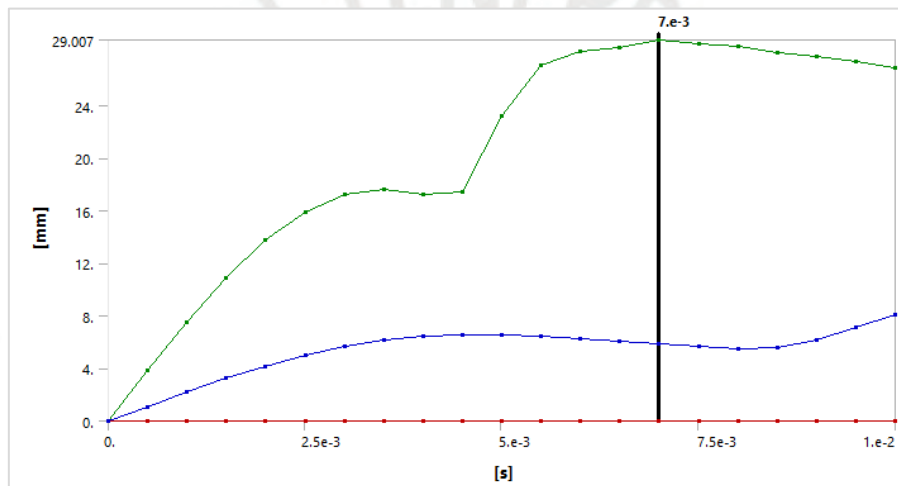


Figura 92. Gráfica de deformaciones durante el impacto

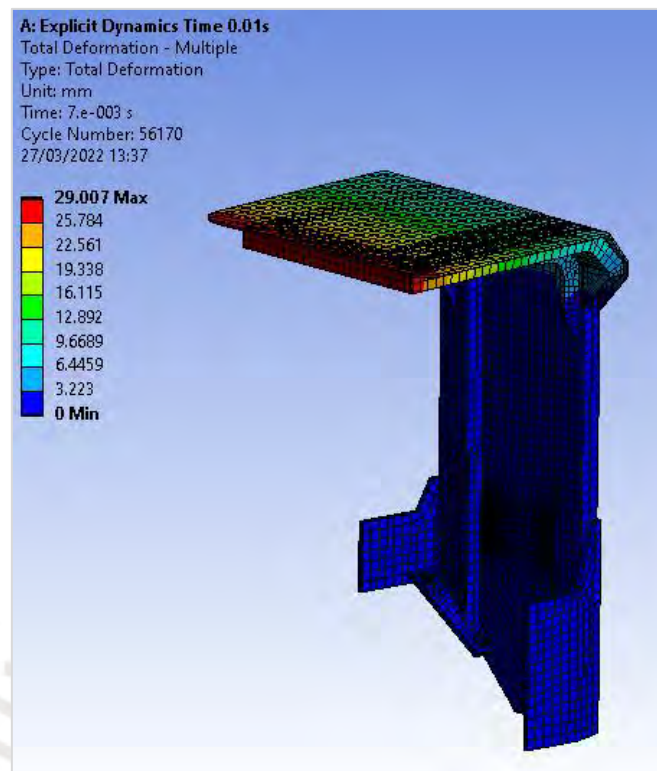


Figura 93. Gráfica de deformaciones en mallado para la máxima deformación

Durante el impacto se puede observar cómo evoluciona el valor de los esfuerzos, también se puede notar que cuando se produce el impacto el valor del esfuerzo tiene un valor máximo y luego de ello se va reduciendo y estabilizando a un valor menor por lo que tomaremos los valores que se producen luego del impacto y como se transfieren los esfuerzos a la estructura, así, en la figura 95 se muestra la gráfica de esfuerzos en el mallado, apreciándose el estado de esfuerzos al finalizar los 0,01s.

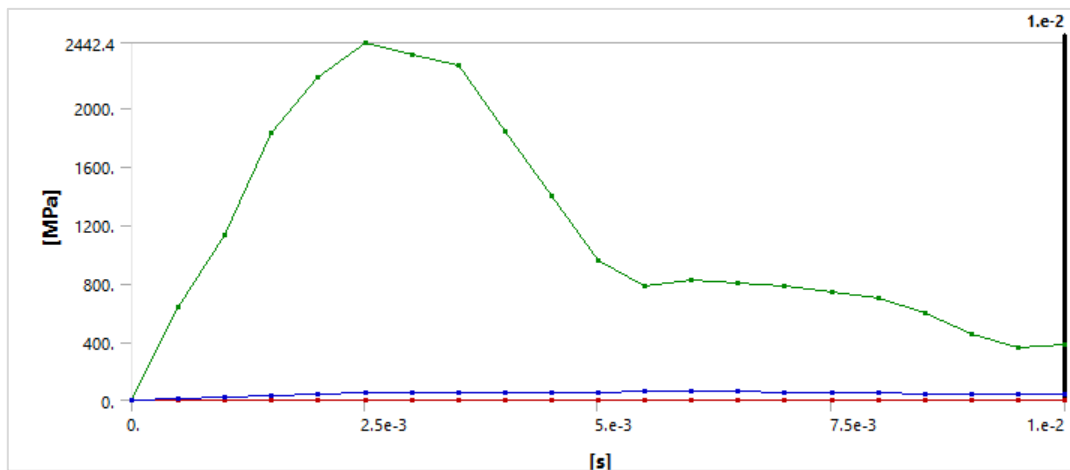


Figura 94. Gráfica de esfuerzos durante el impacto

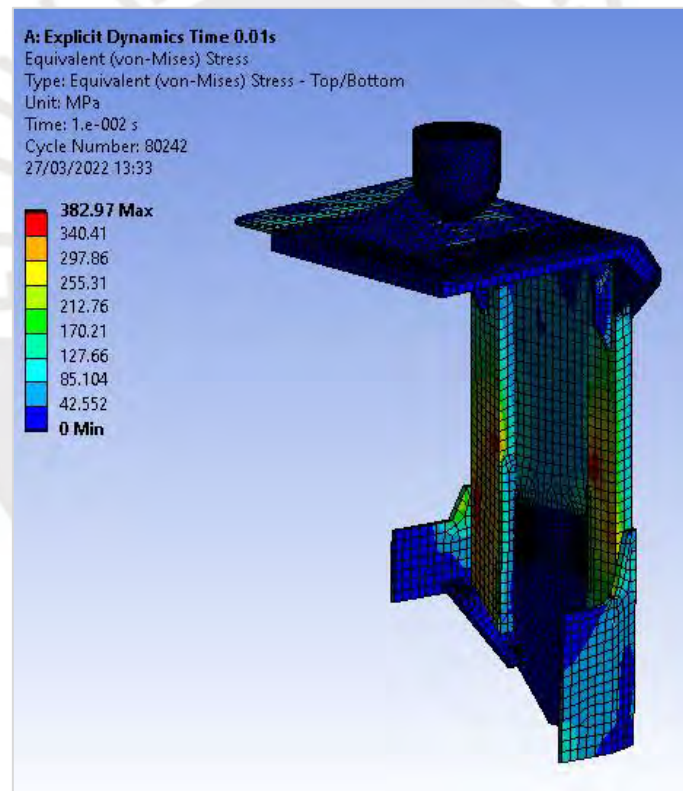


Figura 95. Gráfica de esfuerzos en mallado al final del tiempo 0,01s

Para asegurarse que el tiempo de análisis asignado para la simulación captura la máxima deformación durante el impacto, se procedió a realizar una segunda simulación más con el valor de *end time* de 0.03s, el cual tuvo todas las condiciones de borde idénticas a la primera

simulación. Con ello se solicitaron las gráficas de deformaciones durante el impacto, gráfica de deformaciones para la máxima deformación durante el impacto, gráfica de esfuerzos durante el impacto y la gráfica de esfuerzos en mallado al final de la simulación con tiempo de 0,03s; estos resultados fueron analizados en la etapa de interpretación de resultados.

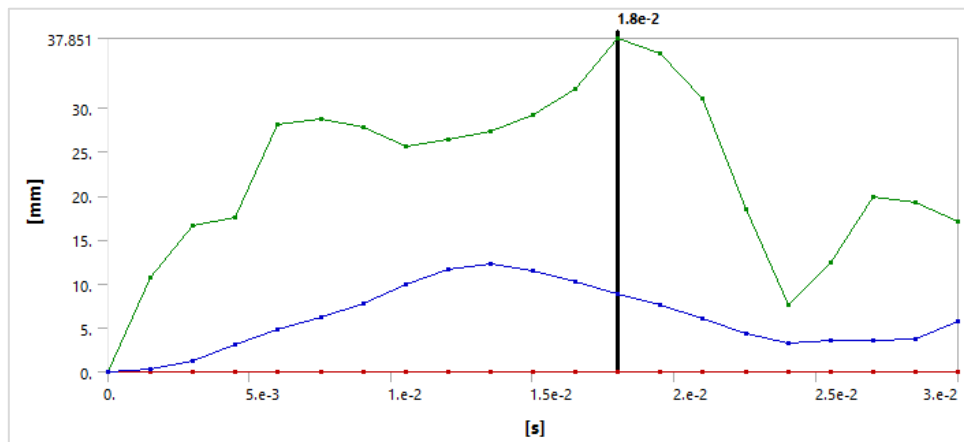


Figura 96. Gráfica de deformaciones durante el impacto

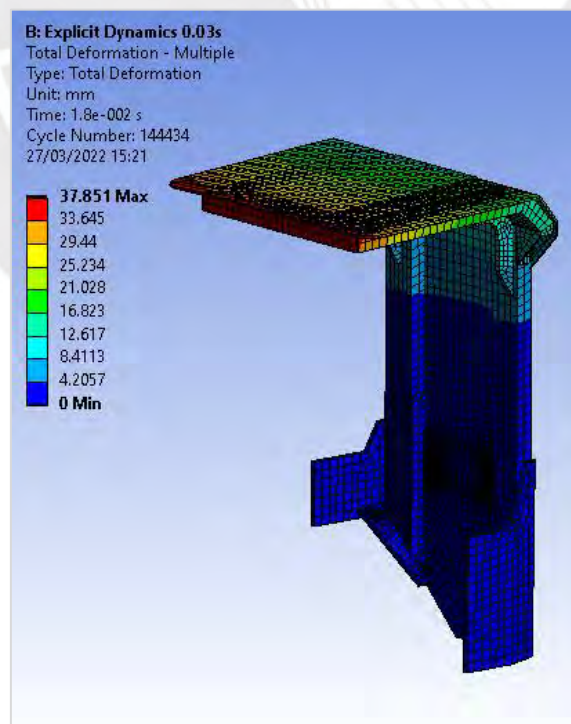


Figura 97. Gráfica de deformaciones en mallado para la máxima deformación

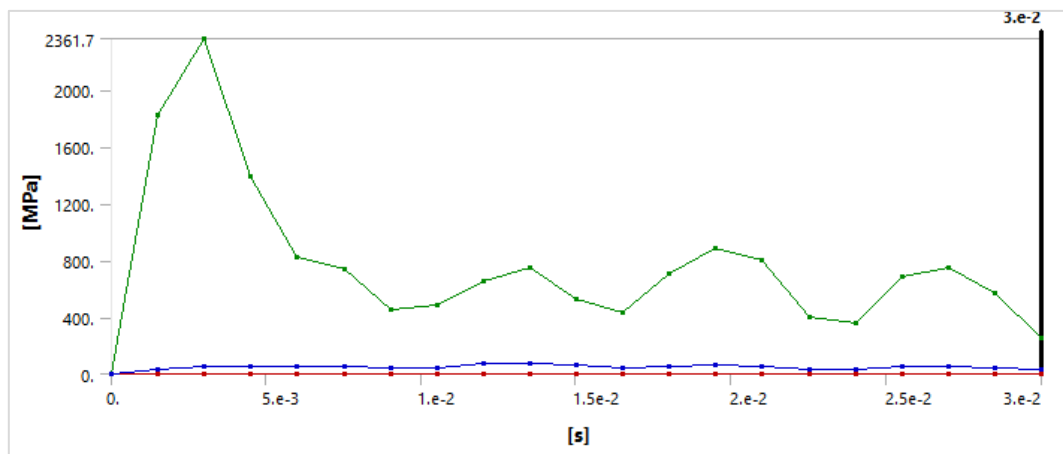


Figura 98. Gráfica de esfuerzos durante el impacto

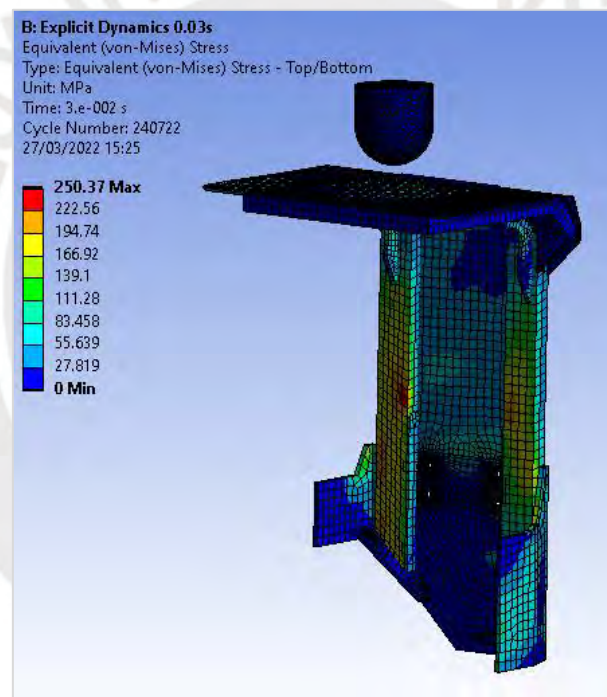


Figura 99. Gráfica de esfuerzos en el mallado al final del tiempo 0,03s

Para el caso ROPS se solicitaron los resultados de graficas de deformaciones, así como los esfuerzos en el mallado, para entender el comportamiento estructural. Para ello se tuvo en cuenta lo ya explicado en el apartado de definición de cargas, en donde se indicó que las cargas no son simultaneas y se aplican una a continuación de otra, lo que genera seis *steps* y estos a

su vez generan sub *steps* para los cálculos, por lo tanto, la deformación y los esfuerzos mostraran cambios a lo largo del análisis. Para el primer análisis se ha considerado hacer un análisis con materiales bilineales que simularan el comportamiento no lineal del material cuando se sobrepase el límite de fluencia, en estos resultados no estarán los efectos de la no linealidad geométrica ya que no se activara la opción *large deflection*, esto permite hacer un primer acercamiento al análisis y al comportamiento estructural del diseño en estudio. De acuerdo con el grafico de deformaciones que se muestra en la figura 100, la máxima deformación se produce en el *step* 3, por lo que se solicitó la gráfica de deformaciones en el mallado para dicho *step*, la cual se muestra en la figura 101, siendo el valor máximo de deformación de 417,79 mm.

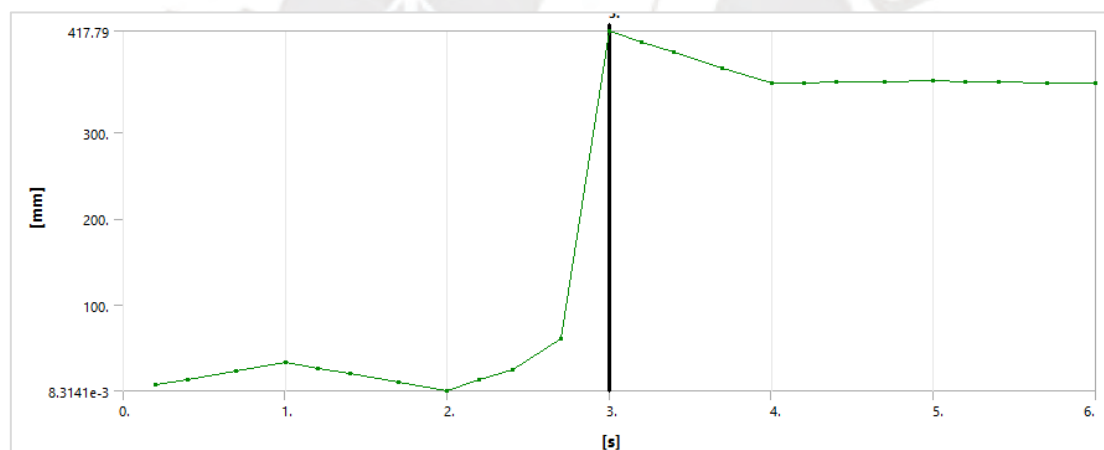


Figura 100. Gráfica de deformaciones a lo largo de la simulación

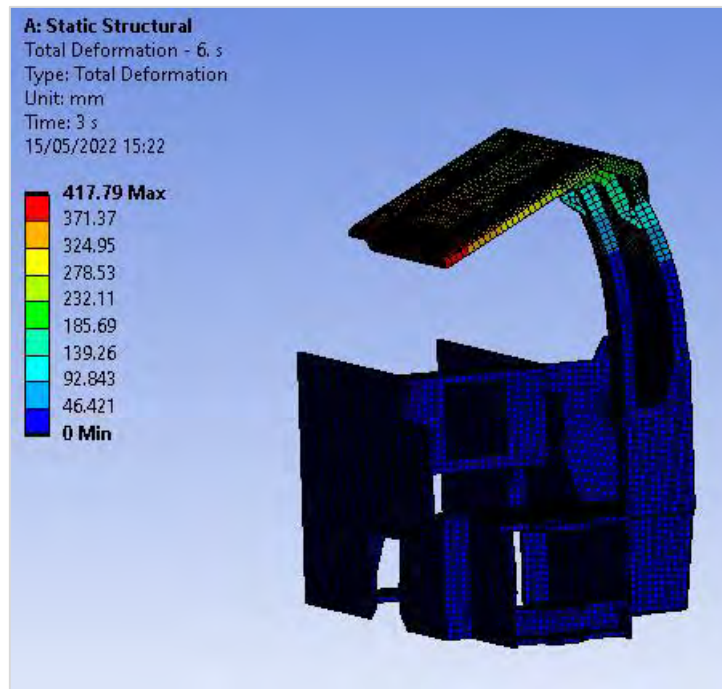


Figura 101. Gráfica de máxima deformación en el mallado para el *step* 3

Para tener un panorama completo de la primera simulación se solicita la gráfica de esfuerzos en el cual se puede apreciar como el esfuerzo máximo evoluciona a lo largo de la simulación siendo el máximo valor para el *step* 3 cuyo valor de esfuerzo máximo es de 692,57 Mpa.

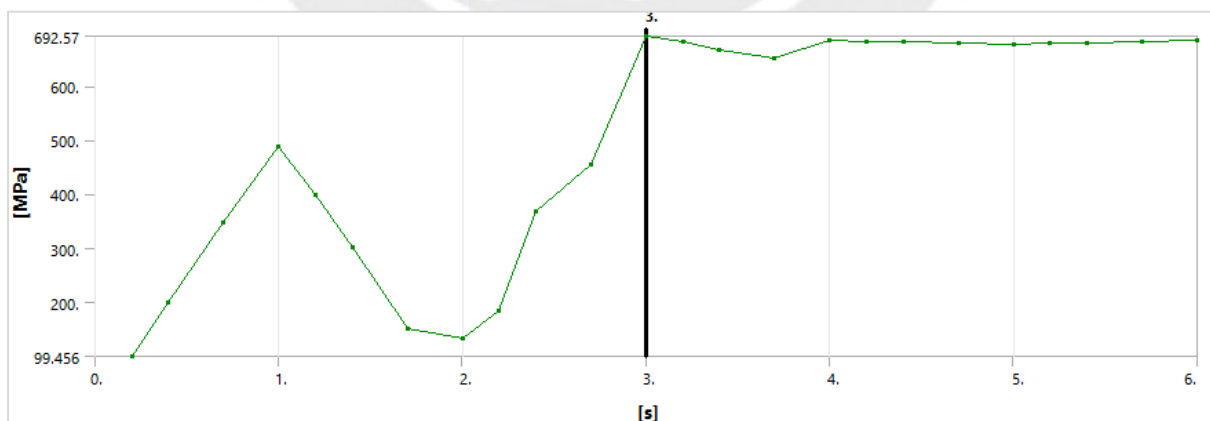


Figura 102. Gráfica de máximos esfuerzos durante la simulación

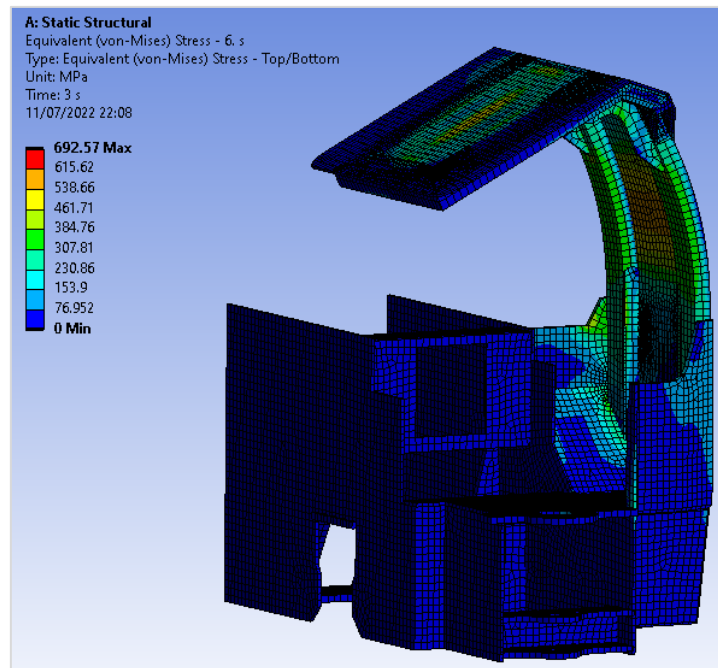


Figura 103. Gráfica de máximos esfuerzos en el mallado para el step 3

Bajo las mismas condiciones de contorno del primer análisis se efectuó una simulación activando la opción *Large Deflection* dentro de las configuraciones de *Analysis Settings*, por tanto, se representó un entorno de no linealidad del material y no linealidad geométrica. Al ejecutarse la solución y solicitarse las gráficas se pudo observar que este modelo tenía problemas de convergencia, por lo que la solución no pudo continuarse y solo se entregó una solución hasta el *step 3*, como se muestra en la gráfica de deformaciones de la figura 104.

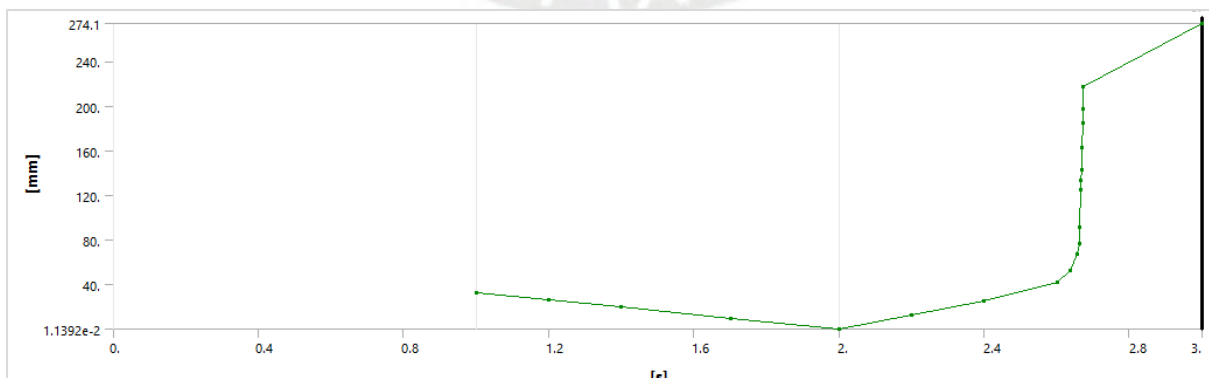


Figura 104. Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación

Para esta simulación se solicitó la gráfica de máxima deformación en el mallado para saber cómo es el comportamiento de la estructura previo al error de simulación, el cual se muestra en la figura 105.

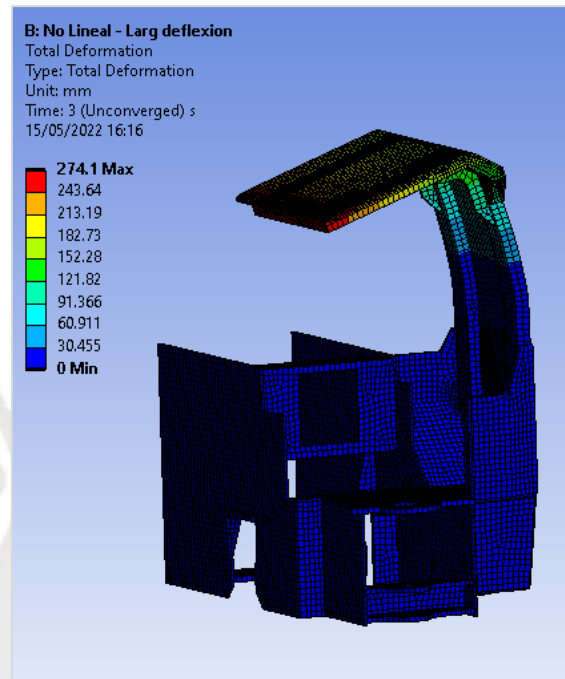


Figura 105. Gráfica de máxima deformación en el mallado

Para hacer un análisis completo del motivo por el cual el programa no logró obtener la convergencia, se solicitó la gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación como se muestra en la figura 106, además, se solicitó el gráfico de esfuerzos en el mallado para el último *step* que pudo realizar el programa, el cual se muestra en la figura 107.

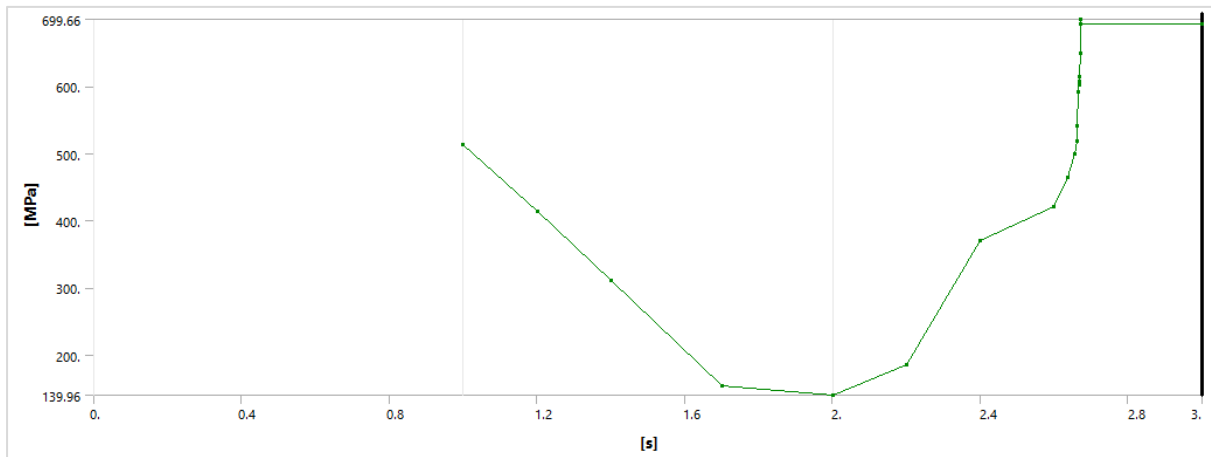


Figura 106. Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación

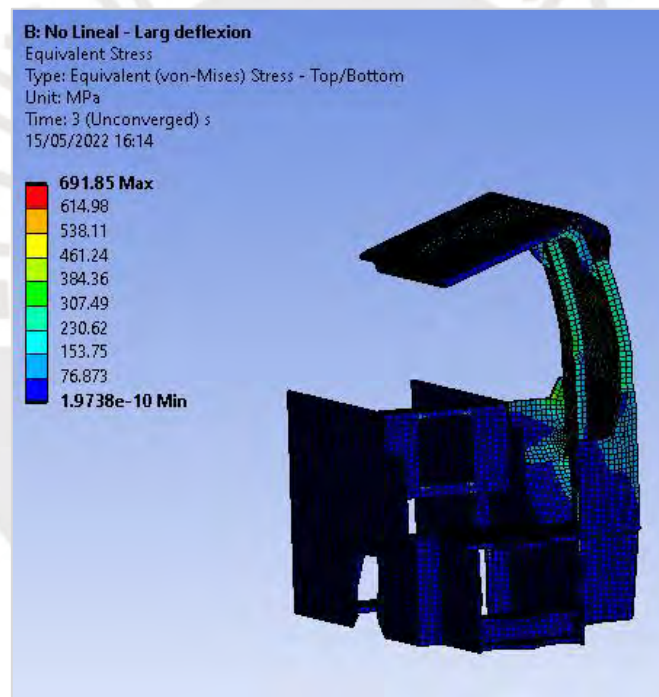


Figura 107. Gráfica de máximo esfuerzo en el mallado

Finalmente, dado que el programa reportó un error en la simulación, se solicitó la gráfica de convergencia, como se muestra en el gráfico de la figura 108, donde la línea de color morada es la fuerza de convergencia, la cual, para cada *sub step*, debe estar por debajo de la fuerza de criterio que es la línea de color magenta. Los resultados que obtuvo el programa en el último

sub step, mostraron que la fuerza de convergencia no pudo llegar por debajo de la fuerza de criterio, es por ello que el programa decidió detener la solución e indicar que no encuentra convergencia, este resultado y la no convergencia fueron analizados en el siguiente apartado.

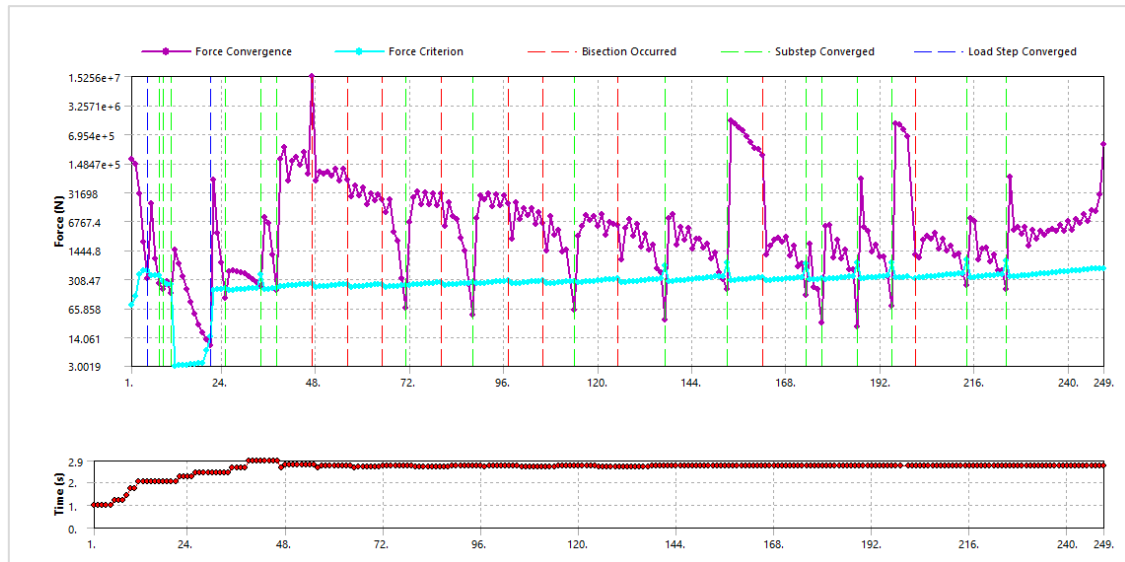


Figura 108. Gráfica de *Force Convergence* para la simulación con grandes desplazamientos

4.7. Interpretación de los Resultados Obtenidos

En este apartado se presenta un análisis de los resultados obtenidos de cada simulación con la finalidad de poder entender el comportamiento estructural que tendría el chasis al ser sometidas a las pruebas de FOPS y ROPS. Para el caso de las simulaciones FOPS se realizaron dos simulaciones, en el cual se cambió el parámetro *end time* de 0,01s a 0,03s, notándose que en los primeros instantes del impacto existió un máximo valor de esfuerzo localizado. Para tener un panorama más claro de lo que sucedió en ese instante se solicitaron las gráficas del comportamiento de esfuerzos en el mallado, la cual se muestra en la figura 109, donde la imagen de la izquierda representa el momento inicial del impacto para la gráfica de esfuerzos máximos de la figura 110 y la imagen de la derecha representa el momento inicial de impacto para la gráfica de esfuerzos máximos de la figura 111; ambas imágenes muestran que el

esfuerzo máximo se presenta justo en el inicio del contacto, esto es debido a que al inicio del impacto toda la energía cinética del objeto de impacto se transfiere a la estructura de manera puntual al tener el contacto entre la forma de una esfera y la forma de plano del techo, el impacto en ese instante deformó de manera permanente toda la zona del material que supere el esfuerzo de fluencia del material.

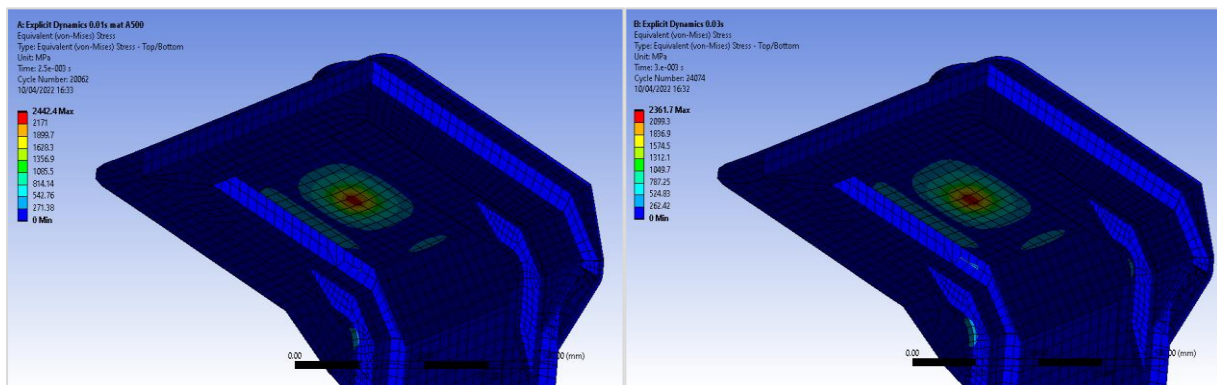


Figura 109. Gráfica comparativa de máximo esfuerzo en el mallado

A pesar de que en los instantes mencionados se produjeron los máximos valores de esfuerzos, las máximas deformaciones se produjeron en instantes posteriores, como se aprecia en la figura 110 para el *time step* 0,01 y en la figura 111 para el *time step* 0,03; lo que se debe a que al transmitirse la energía de impacto a lo largo de la estructura se generaron esfuerzos que en seguida produjeron deformaciones y para el interés de nuestro análisis debió verificarse si en algún instante de esta simulación se presentó alguna deformación que toque el DLV, tomándose el máximo valor de deformación para el análisis del *time step* 0,03; el cual es el que se muestra en la figura 111, donde se indica que la máxima deformación es de 37,851 mm. Para saber si la estructura de protección pasa la prueba de FOPS se importó el modelado de mallado en su máxima deformación obtenida y se lo ensambló en el programa CAD que se utilizó inicialmente para realizar la maqueta virtual.

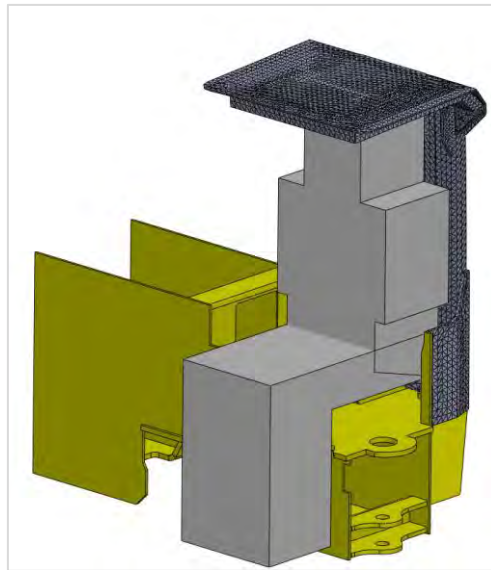


Figura 110. Ensamble de la estructura deformada a la maqueta virtual del chasis

Al revisar este ensamble puede verificarse que existe una interferencia entre el sólido de la estructura de protección FOPS y el DLV (ver la figura 111), por lo que se puede decir que la estructura de protección diseñada no cumple con protección FOPS bajo la norma ISO 3449.

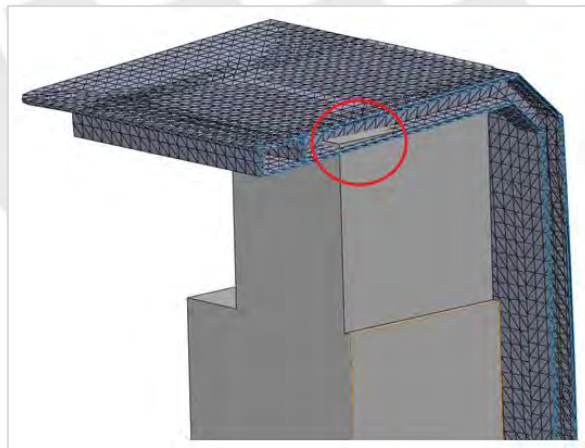


Figura 111. Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para la simulación FOPS

Al examinar este análisis la estructura debe ser rediseñada en los puntos de máxima exigencia de esfuerzos luego de los primeros instantes del impacto en el cual se puede apreciar que los elementos estructurales verticales que se encuentran a la espalda del DLV sufren

esfuerzos que provocan un pandeo de dichos elementos por lo que un rediseño en dicha zona o una mejora en el material puede ayudar a que los valores de máxima deformación se reduzca y que por lo tanto pueda pasar la prueba FOPS, sin embargo, el análisis de mejora o rediseño es caso de un estudio adicional, ya que el objetivo de la metodología es que se pueda ejecutar las veces necesarias y replicar este ejemplo para otras estructuras de protección que el diseñador desee realizar. Para el caso de la simulación del ensayo ROPS, se han mostrado los resultados de dos análisis, el primero es un análisis con material no lineal y comportamiento geométrico lineal (sin considerar efectos por grandes desplazamientos) y en el segundo se agregó la condición de no linealidad geométrica. Para la primera simulación se observó que la máxima deformación ocurre en el *step* 3, además se verifica que el valor del máximo esfuerzo también se presenta en el *step* 3, cuyo valor es de 692,57 Mpa, pudiendo afirmarse que la carga vertical de este análisis es la que tiene un mayor efecto sobre la estructura, pues contribuye a alcanzar los máximos esfuerzos y las máximas deformaciones. El elemento estructural que soporta el máximo esfuerzo de la estructura son los parantes verticales que componen el techo, estas estructuras son de material ASTM A500 y como se mostró en las propiedades del material en la figura 58, el límite a la fluencia es de 270 Mpa y el límite a la rotura es de 310 Mpa. Estos valores comparados con el máximo esfuerzo obtenido son claramente superados, pero al ser un análisis lineal este no considera el comportamiento plástico del material, por lo tanto, este análisis ha calculado las deformaciones considerando que el módulo de elasticidad de dicho material constante incluso si se ha superado el límite de fluencia, por lo que los valores de deformación obtenidos son el primer acercamiento del comportamiento estructural. Para la segunda simulación se ha considerado activar la opción *Large deflection*, por lo que el programa tuvo en consideración los efectos del material al sobrepasar los límites de fluencia, el comportamiento del material fue como el que muestra la figura de esfuerzo y deformaciones unitarias 112 para el material ASTM A500, como se puede apreciar luego de sobrepasar el

límite de fluencia del material este tiene un cambio en el módulo de elasticidad y recalculará las deformaciones, sin embargo el máximo esfuerzo que soporta el material en la figura 112 es de 280MPa, además, si se considera la máxima deformación que se obtiene en el step 3 de acuerdo a la figura 3,52 es de 692.57 Mpa, lo cual genera un conflicto en la solución porque al realizar los cálculos la simulación no encontró un módulo de elasticidad y por lo tanto las matrices de las ecuaciones no encontraron resultados lógicos haciendo que la simulación no converja.

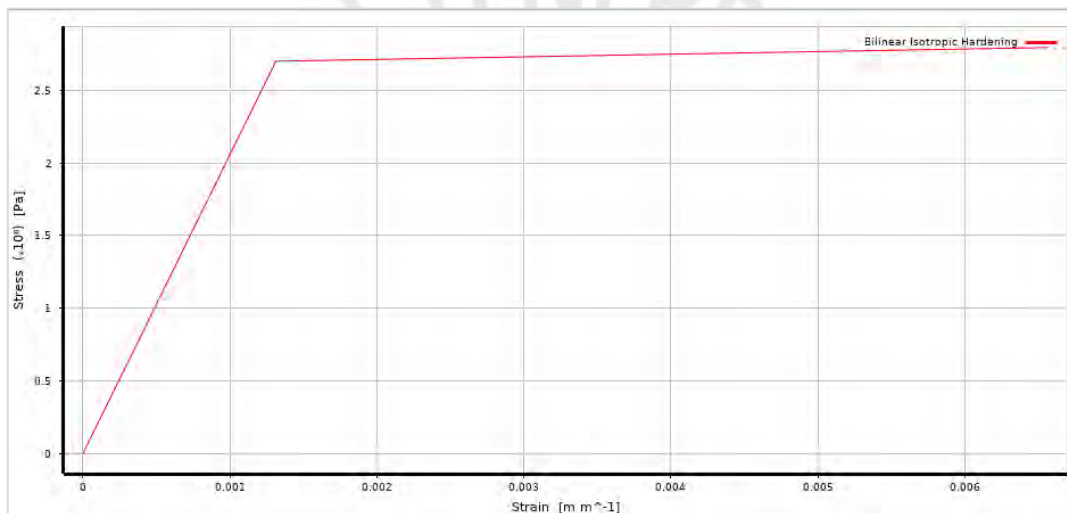


Figura 112. Gráfica material estructural A500 para los soportes de estructura ROPS

Para verificar si la estructura cumple con los requerimientos ROPS según el estándar ya explicado en capítulos anteriores se debió exportar el sólido de la figura 3,56 el cual es el mallado con la máxima deformación en el *step* 3, a un programa CAD, como se realizó en el caso FOPS para la verificación del cumplimiento, revisando si el DLV tiene interferencia con el sólido deformado. Al realizar el ensamble de la estructura con el DLV se obtuvo la figura 113, observándose claramente que existe interferencia entre la estructura de protección y el DLV, indicándose que esta estructura no cumple con el requerimiento para ser ROPS.

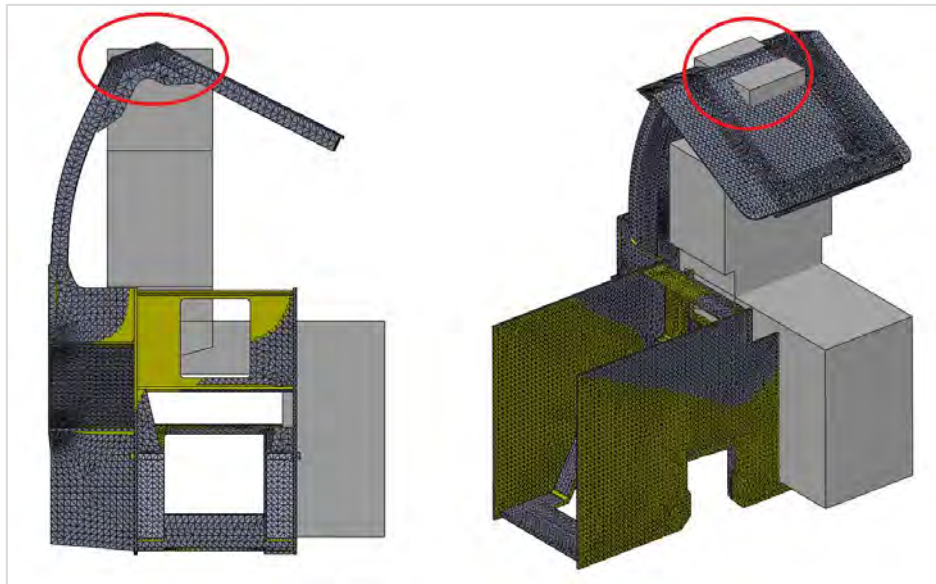


Figura 113. Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para la simulación ROPS

Sin embargo, dado que en la simulación de esta misma estructura para el caso *large deflection* se obtuvo para la máxima deformación un valor de 274,1 es oportuno pensar que la simulación lineal geométrica no está considerando los efectos de *stres stiffnesings*, el cual es el efecto que se produce en las placas al ser sometidas a cargas donde aparecen esfuerzos tangenciales que aportan una rigidez a la estructura, el cual reduce los valores de deformación y esfuerzos, por lo que el primer análisis para ROPS puede estar sobre estimado y podría incurriarse en descartar la estructura. Para corroborar lo indicado se realizó un análisis adicional a modo de verificación, considerando cambiar el tipo de material para las estructuras verticales, que son justo donde se concentran los máximos esfuerzos. Sí al realzar la simulación en *large deflexión* para la misma geometría no obtienen errores en la simulación, se demostraría que el segundo análisis es correcto, pero al tener un material con bajo límite de fluencia se llegó a un error en la simulación. Para ello se usó el material ASTM A514, cuya grafica de esfuerzo y deformación unitarias se muestra en la figura 114, cuyo máximo valor de esfuerzo en la zona plástica es de 717 Mpa, el cual supera los valores de máximos esfuerzos obtenidos en la

segunda simulación (el cual fue de 692.57 Mpa), los elementos estructurales con cambio de material fueron los tubos estructurales verticales que se encuentran resaltados en color verde en la figura 115; en donde se obtuvieron los máximos esfuerzos para las dos primeras simulaciones.

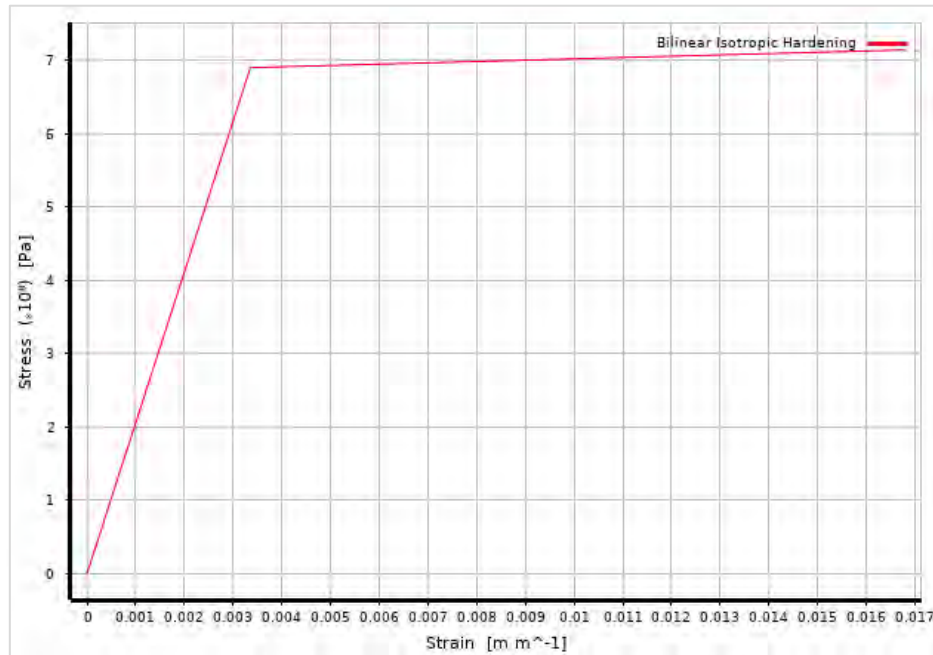


Figura 114. Gráfica material estructural A514 para los soportes de estructura ROPS

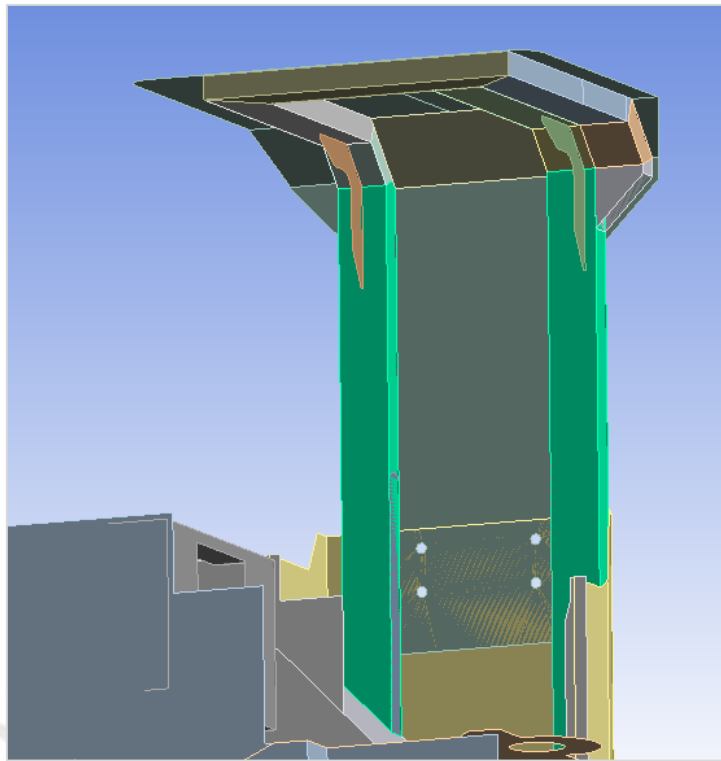


Figura 115. Soportes estructurales resaltados que cambiaran de material a ASTM A514

Se procedió a realizar la simulación y se solicitó la gráfica de máximos esfuerzos y deformaciones durante la simulación, las cuales son las que se muestran en las figuras 116 y 117 respectivamente. En estas graficas puede apreciarse que el máximo esfuerzo obtenido fue de 674,32 MPa y una deformación máxima de 56,714 mm.

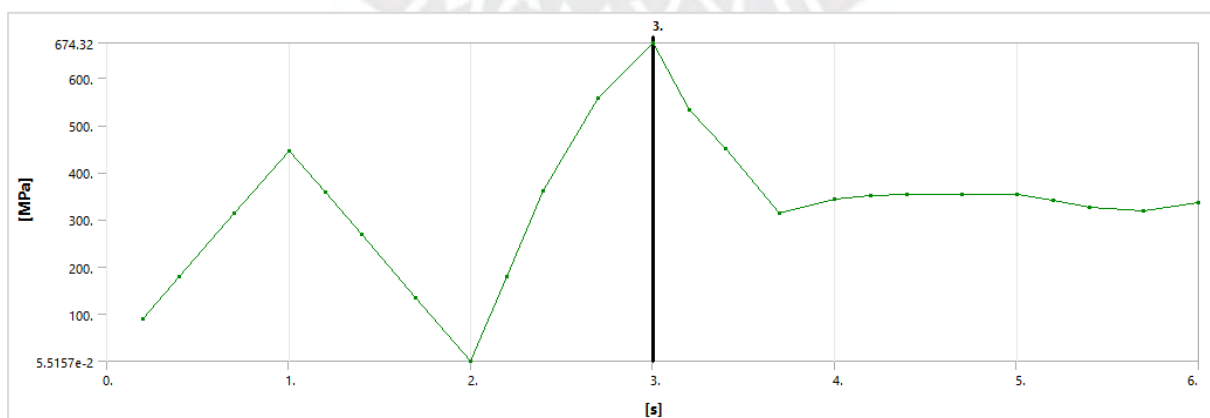


Figura 116. Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación

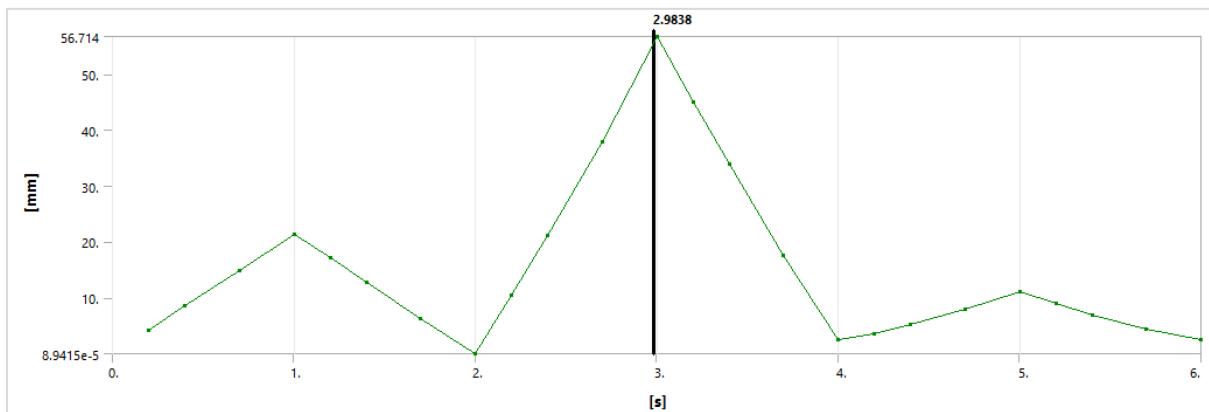


Figura 117. Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación

Para tener el panorama completo del comportamiento de esta estructura se solicitaron las gráficas de máximo esfuerzo en el mallado y de máxima deformación, las cuales se muestran en las figuras 118 y 119 respectivamente, además, en la figura 119 se puede observar que el máximo esfuerzo se encuentra en la zona de la cartela de refuerzo, sin embargo, esto era de esperar, dado que la fuerza vertical es la de mayor magnitud si somete a la estructura vertical, así mismo la máxima deformación se redujo respecto a las dos primeras soluciones, debido a que ahora el programa ha considerado el efecto del *stress stiffnesing* que se presenta en los elementos tipo placa, además, de ellos puede verificarse que al tener un material con mayor capacidad de soportar esfuerzos en la zona plástica la simulación no presentó errores. En la zona de los máximos esfuerzos las ecuaciones han obtenido convergencia dado que existía un módulo de deformación para los puntos solicitados.

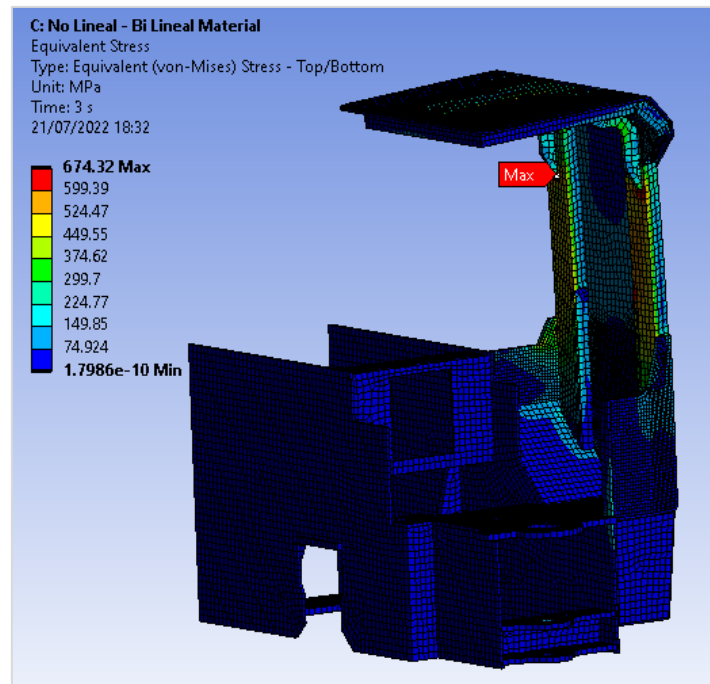


Figura 118. Gráfica de máximo esfuerzo en mallado para el step 3s

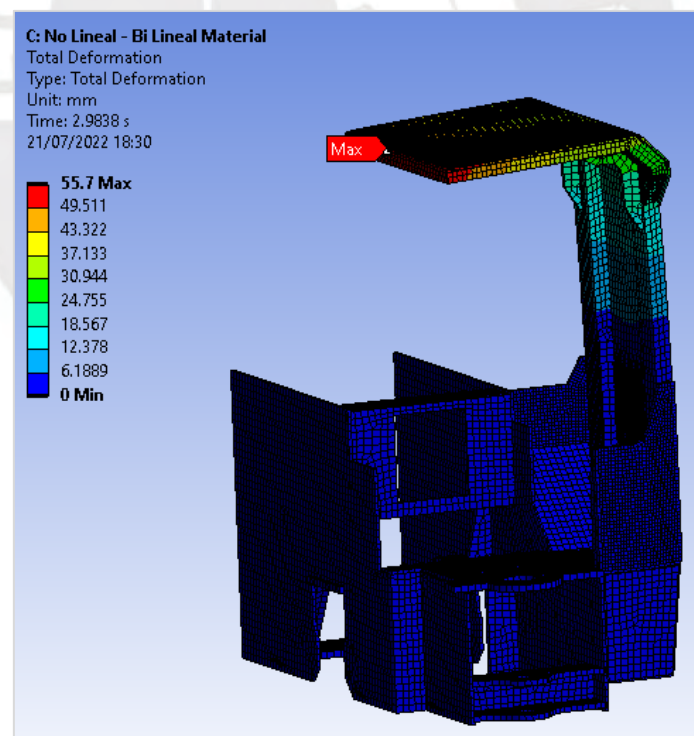


Figura 119. Gráfica de máxima deformación en mallado para el step 3

Finalmente, para hacer una comparativa y verificar si con el nuevo material propuesto la

estructura permite que la estructura pase la prueba ROPS se procedió a exportar el sólido y ensamblarlo en un CAD 3D para verificar interferencia como se ha realizado con el modelo de la primera simulación obteniendo la figura 120, en la cual se muestra que existe una interferencia en la zona superior de la estructura con el DLV, por lo que a pesar de que los soportes verticales cuentan con un material de mayor resistencia la estructura no pasa la prueba ROPS.

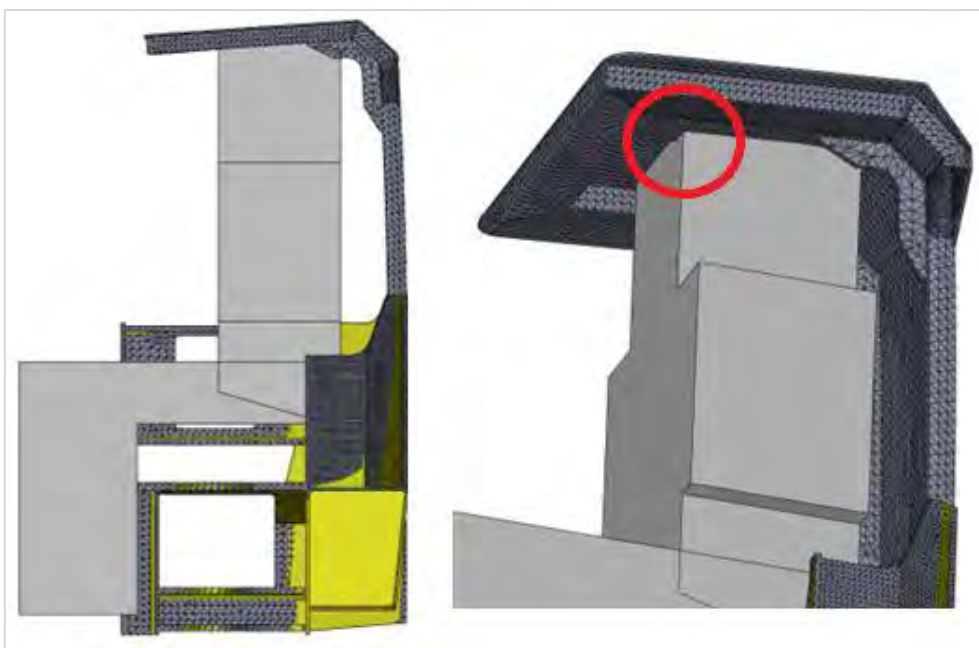


Figura 120. Interferencia entre la estructura de protección y el DLV para simulación ROPS

Dado que se ha simulado la prueba ROPS modificando el material de las estructuras de soporte vertical, como se muestra en la figura 121, correspondió hacer la simulación FOPS para ver el desempeño de este cambio dado que es un material de mayor resistencia y ver si esto tiene algún efecto sobre el desempeño de la estructura, así como para verificar el comportamiento de la simulación. Tomando las mismas configuraciones realizadas en la sección 4.4 y para las simulaciones con *end time* de 0,03, que comprende el preprocesamiento para el caso FOPS, solo se varió el material en los elementos ya indicados, es decir, se mantuvo

la maqueta virtual, el mallado, los apoyos y cargas de las dos primeras simulaciones para esta nueva simulación FOPS. Es por este motivo que se pudo ejecutar de manera directa el post procesamiento, solicitando las gráficas de máximas deformaciones a lo largo de la simulación, como el que se muestra en la figura 121 con la finalidad de obtener el *time step* donde se presentó la máxima deformación y solicitar luego la figura de máxima deformación en el mallado como se muestra en la figura 122.

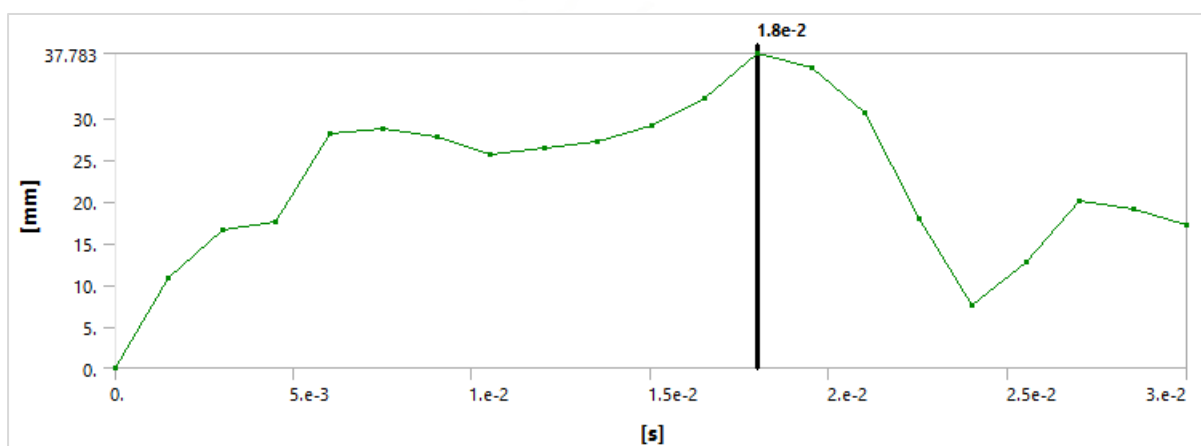


Figura 121. Gráfica de máximas deformaciones a lo largo de la simulación

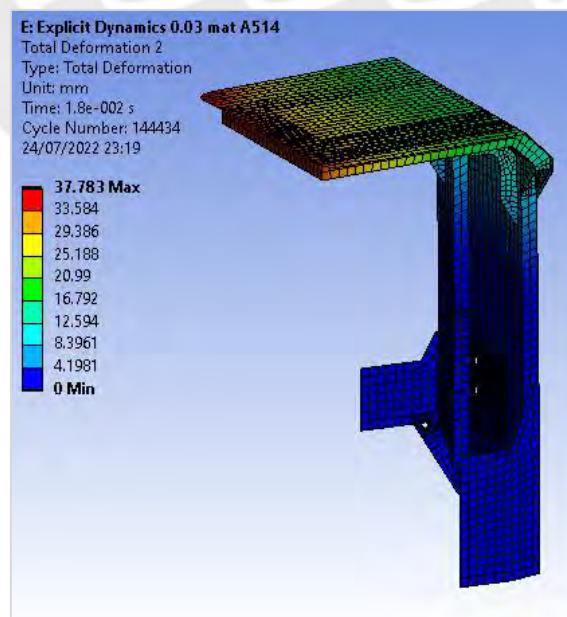


Figura 122. Gráfica de máxima deformación en el mallado para el *time step* 1,8e-2s

Además de ello también se solicitó la gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación, como se muestra en la figura 123, con la finalidad de obtener el *time step* donde se presenta el máximo esfuerzo de deformación en el mallado (figura 124).

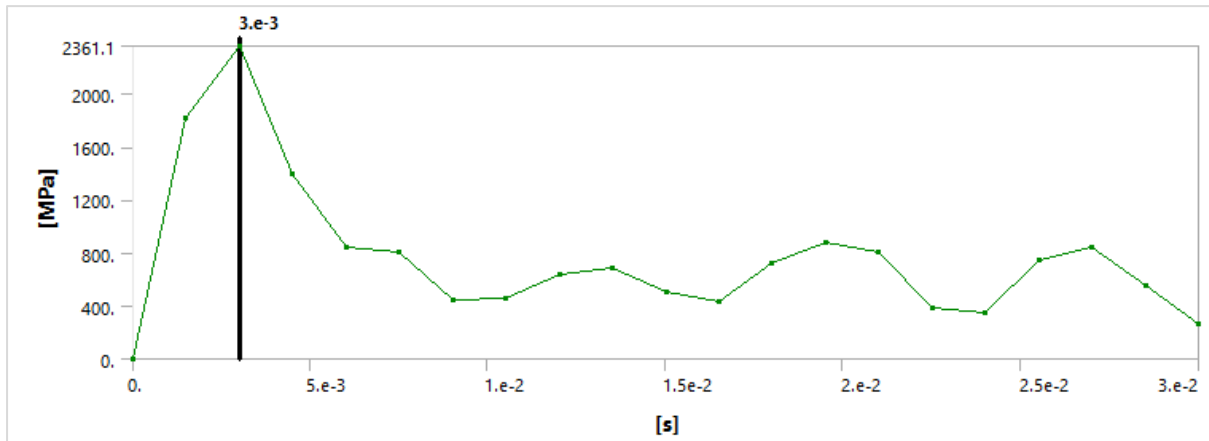


Figura 123. Gráfica de máximos esfuerzos a lo largo de la simulación

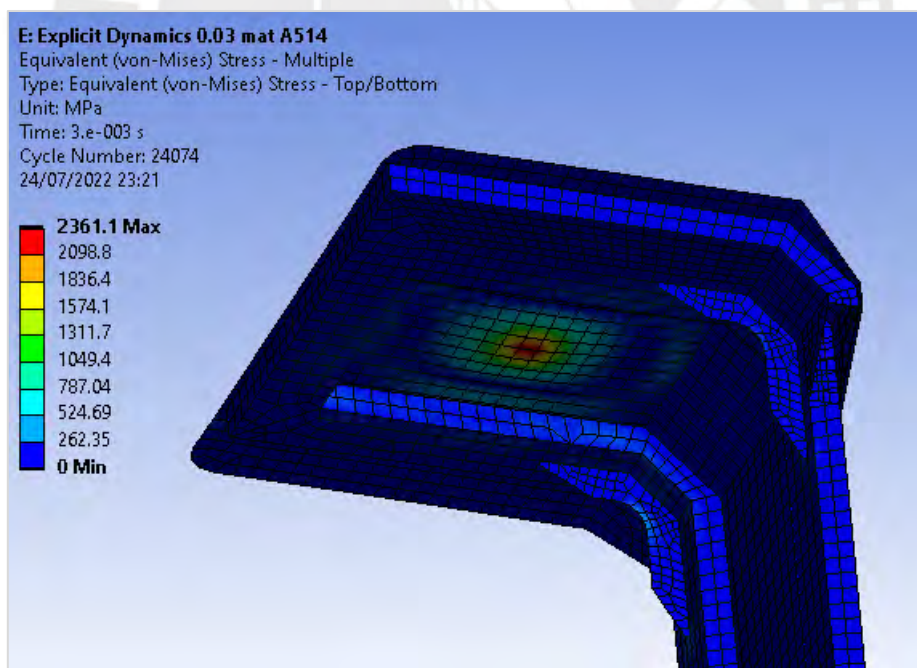


Figura 124. Gráfica de máximo esfuerzo en el mallado para el *time step* 3e-3s

Los resultados obtenidos fueron comparados con los obtenidos en la segunda simulación

FOPS, constatándose que la diferencia radica en el cambio de material de los soportes verticales (eran de ASTM A500 y para esta última simulación fueron de ASTM A514). De esta forma, las gráficas de máxima deformación y esfuerzos a lo largo de la simulación son exactamente las mismas para ambas simulaciones, por lo que pudo entenderse entonces que el material con mayor capacidad de resistencia mecánica no genera un aporte de mejorar el rendimiento de la estructura frente al ensayo FOPS, por lo que la estructura aun no cumpliría con los requerimientos FOPS a pesar de este cambio.



Conclusiones

El método planteado en la presente tesis ha permitido comprender el alcance del análisis, así como ordenar los requerimientos, seleccionar de manera adecuada el tipo de programa a usar y el nivel de análisis requerido para los dos ensayos planteados, además, permitió optimizar los recursos computacionales, ya que al modelar solo lo necesario para que se pueda estudiar el caso reduce la cantidad de elementos finitos requeridos para la simulación. Para el caso del análisis presente, ha permitido, además, identificar como se deben aplicar las restricciones de apoyos y cargas para llevar a la simulación los ensayos que se dan en un laboratorio de pruebas. La metodología propuesta ha demostrado que pueden usarse las herramientas computacionales como una alternativa a los ensayos destructivos ISO 3449 y 3471 y que puede con el mismo ser aplicado a cualquier caso de estudio, ya que la metodología tiene un alcance general. Además, se ha podido conocer e interpretar a profundidad las normas ISO 3449 y 3471, desarrollando y estudiando la norma en el capítulo de II, en el cual se mostró los diferentes requerimientos para aplicar las cargas y como la estructura debe estar fijada, así como entender cuándo la estructura es aceptada como una estructura FOPS o ROPS, por lo que puede ser aplicado para cualquier estructura que el profesional necesite realizar bajo las normas mencionadas. Para el caso de aplicación Scoop HS10E, se ha resuelto analíticamente mediante el uso de fórmulas de resistencia de materiales aplicadas a vigas empotradas en el cual el principal análisis es la obtención de las deformaciones en la estructura bajo el impacto de un objeto que cumple con las exigencias de FOPS nivel I, así mismo, se tuvo que realizar simplificaciones y asumir un comportamiento dentro del rango elástico lineal de la estructura para obtener un primer resultado de las deformaciones. Con la geometría de la estructura de dicho equipo se encontró el valor de la deformación máxima el cual 50,3 mm, este resultado es un valor bastante conservador ya que al no tener en cuenta los fenómenos inerciales y de

propagación de ondas que suceden durante el impacto este no refleja la pérdida de energía en el impacto y todo es llevado directamente a la aplicación de la fuerza directamente a la estructura, generando una deformación, la cual es un valor alto, por lo que al realizar una simulación, teniendo en cuenta los fenómenos mencionados, estos deben ser menores para mantener una coherencia con los resultados analíticos. Por otra parte, se pudo determinar un procedimiento para aplicar elementos finitos para la simulación de los dos ensayos ISO mencionados anteriormente, el cual permite llevar una simulación de manera ordenada y aplicando correctamente los *solver* disponibles en los programas de simulación por elementos finitos, siendo los principales la compresión de la solicitud del diseño, evaluaciones preliminares que permiten determinar la necesidad para realizar una simulación, el tipo de simulación que debemos realizar, como seleccionar un programa computacional adecuado para el análisis, qué geometría es requerida para la simulación (la cual depende del tipo de ensayo ISO a realizar), identificar los puntos de apoyo y carga. Complementariamente, se ha explicado mediante la aplicación del caso seleccionado, como realizar la maqueta virtual, que propiedades del material son requeridos y como punto crítico la generación de la malla de elementos finitos, los cuales deben ser realizados de manera cuidadosa evitando que los elementos finitos generen errores a la hora de aplicar el *solver*. Por último, se ha explicado cómo aplicar las cargas en los diferentes ensayos teniendo en cuenta las normas ISO, siendo este punto el más complejo, ya que el diseñador debe conocer claramente la norma.

Los resultados obtenidos para el caso del presente estudio son los siguientes:

El análisis por elementos finitos para el tipo dinámico explícito, el cual es aplicado para el caso de FOPS nivel I en el equipo HS10E, determinando que la deformación máxima obtenida para un *End Time* de 0,01s es de 29,007 mm y para un *End Time* de 0,03 el valor de 37,851. Estos resultados reflejan bastante bien el escenario, ya que el impacto se da en cortos periodos de tiempo. Los *End Time* de análisis no se podrían obtener de forma más precisa, es

decir, los resultados a obtener serán menores a 37,851 mm y tampoco podemos reducirse el *End Time* por que se caería fuera del rango de un análisis de impacto (como se mostró en la figura 29). Así mismo, se realizó un análisis adicional para verificar si el material genera alguna variación en el resultado de deformación, por lo que el material fue cambiado de un ASTM A572 a un ASTM A514 y para un *End Time* de 0,03s se obtuvo la misma deformación que con el material anterior, por lo tanto, el material no tiene un efecto predominante sobre este ensayo, tal como se pudo verificar en el análisis analítico en el cual en ninguna de las fórmulas usadas se requiere de las propiedades del material, sin embargo, la geometría de la estructura si juega un rol importante en los resultados del análisis, es por ello que si se desea reducir las deformaciones están deben ser enfocadas en mejorar la geometría para que la propagación de la energía de impacto se distribuya mejor y que estos puedan ayudar a absorber los efectos inerciales.

La deformación máxima obtenida en el análisis analítico es de 50,3 mm, comparado con el resultado obtenido en el análisis por elementos finitos el cual es de 37,851 mm, esto es coherente, ya que son valores cercanos la diferencia de los resultados, porqué el análisis analítico al ser un método conservador transfiere toda la energía de impacto a la deformación, mientras que el análisis por elementos contempla los efectos inerciales y la propagación de ondas durante el impacto, sin embargo, a ser resultados cercanos puede concluirse que el análisis a realizar es correcto.

Para el caso ROPS, el procedimiento de análisis mostró que al realizar un análisis no lineal, solo considerando el material, se obtienen deformaciones con valores altos como 417,79 mm, así mismo, al activar la opción de grandes deformaciones del *solver*, este no logra hacer una convergencia, ya que se genera un conflicto pues los esfuerzos superan el esfuerzo de rotura del material donde se ubica el máximo esfuerzo, por lo que al cambiar el material en dicho componente por uno de mayor resistencia a la rotura se obtiene una deformación máxima

de 37,783 mm, concluyéndose que el material tiene un efecto importante sobre esta estructura y que para este tipo de simulaciones debemos asegurar que los esfuerzos estén por debajo de los esfuerzos de rotura.

Para el presente caso de estudio se determina que la estructura debe ser mejorada y requiere de modificaciones para que pueda pasar los ensayos de FOPS nivel I y ROPS.



Bibliografía

Celigüeta Lizarza, J. T. (2011). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*.

Campus Tecnológico de La Universidad de Navarra.

<https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Goicolea, J. M. (2000). *Estructuras Sometidas a Impacto*. Universidad Politécnica de Madrid.

<http://w3.mecanica.upm.es/~goico/ead2000.pdf>

Hibbeler, R. C. (2011). *Mecánica de Materiales*. Pearson Educación.

International Organization for Standardization. (2005). *Earth-moving machinery — Falling-object protective structures — Laboratory tests and performance requirements*.

<https://www.iso.org/standard/32900.html>

International Organization for Standardization. (2008). *Earth-moving machinery — Roll-over protective structures — Laboratory tests and performance requirements*.

<https://www.iso.org/standard/38084.html#:~:text=ISO%203471%3A2008%20specifies%20performance,loading%20on%20a%20representative%20specimen.>

Karliński, J., Rusiński, E., & Smolnicki, T. (2008). Protective structures for construction and mining machine operators. *Automation in Construction* 17, 232 – 244.

<https://doi.org/10.1016/j.autcon.2007.05.008>

Ministerio de Energía y Minas. (2020). *Boletín Estadístico Minero*.

<https://www.minem.gob.pe/minem/archivos/file/Mineria/PUBLICACIONES/VARIABLES/2020/BEMMAR20.pdf>

Olleros, I. R. (2020). *Mecánica de Sólidos*. Universidad Politécnica de Madrid.

Yu, T. X., & Qiu, X. (2018). *Introduction to Impact Dynamics*. Wiley.

