

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD
CATÓLICA**
DEL PERÚ

**“GÉNESIS INSTRUMENTAL DEL CIRCUNCENTRO CON EL USO
DEL GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE NIVEL SECUNDARIO”**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADA POR:

Marycruz Silva Puente Arnao

ASESORA

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

JURADO

Dr. Jhony Alexander Villa Ochoa

Mg. Daysi Julissa García Cuéllar

LIMA – PERÚ

2017





Dedicada a mis padres y hermanos por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A mi estimada asesora, la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por guiarme y apoyarme permanentemente en la elaboración de esta investigación y en mi formación como investigadora.

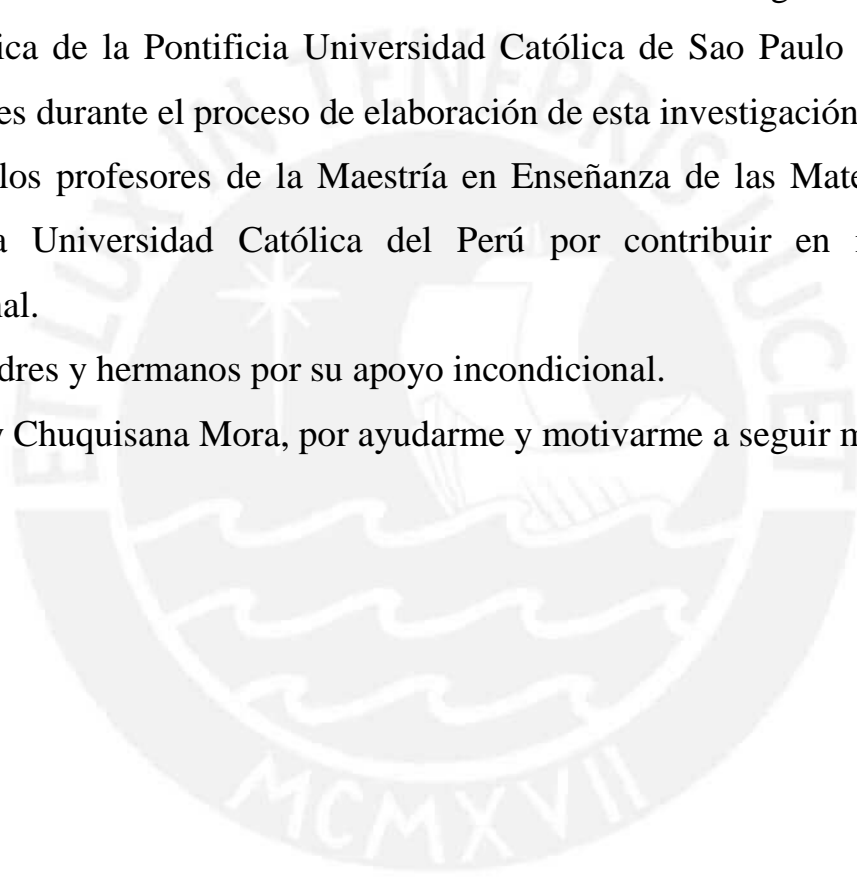
A los profesores Jhony Alexander Villa Ochoa y Daysi García Cuéllar por sus valiosas contribuciones en la presente tesis.

A la Dra. María José Ferreira Da Silva de la Escuela de Posgrado en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo en Brasil, por sus aportes durante el proceso de elaboración de esta investigación.

A todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por contribuir en mi formación profesional.

A mis padres y hermanos por su apoyo incondicional.

A Freddy Chuquisana Mora, por ayudarme y motivarme a seguir mis metas.



RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar cómo ocurre el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes de 14 y 15 años del tercer grado de Educación Secundaria, en una secuencia de actividades en la que utilizan el Geogebra. Debido a que nuestro estudio está centrado en la génesis instrumental, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo ocurre el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que utilizan el Geogebra?* Para este estudio tomamos como marco teórico al Enfoque Instrumental de Rabardel y como marco metodológico algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue. En el análisis identificamos en los estudiantes el desarrollo de esquemas de uso y de acción instrumentada cuando desarrollan una secuencia de actividades que moviliza nociones del circuncentro.

Palabras claves: Circuncentro, Instrumentación, Instrumentalización, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.	VENTANA INICIAL DEL GEOGEBRA	13
FIGURA 2.	VISTA DE GEOMETRÍA DEL GEOGEBRA	14
FIGURA 3.	HERRAMIENTA NUEVO PUNTO	14
FIGURA 4.	HERRAMIENTA INTERSECCIÓN DE DOS OBJETOS	15
FIGURA 5.	HERRAMIENTA PUNTO MEDIO	15
FIGURA 6.	HERRAMIENTA SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS	16
FIGURA 7.	HERRAMIENTA POLÍGONO	16
FIGURA 8.	HERRAMIENTA ÁNGULO	17
FIGURA 9.	HERRAMIENTA DISTANCIA O LONGITUD	17
FIGURA 10.	HERRAMIENTA RECTA PERPENDICULAR	18
FIGURA 11.	HERRAMIENTA MEDIATRIZ	18
FIGURA 12.	HERRAMIENTA CIRCUNFERENCIA DADOS TRES DE SUS PUNTOS	19
FIGURA 13.	COMPONENTES DE UN INSTRUMENTO	23
FIGURA 14.	MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO	33
FIGURA 15.	MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO	34
FIGURA 16.	EJERCICIOS	34
FIGURA 17.	MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO	34
FIGURA 18.	MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO	35
FIGURA 19.	PUNTOS NOTABLES	36
FIGURA 20.	MEDIATRIZ	37
FIGURA 21.	MEDIATRIZ	38
FIGURA 22.	MEDIATRIZ	38
FIGURA 23.	MEDIATRIZ	38
FIGURA 24.	TEOREMA DEL CIRCUNCENTRO	39
FIGURA 25.	CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN LAS RUTAS DE APRENDIZAJE	41
FIGURA 26.	CIRCUNCENTRO	43
FIGURA 27.	CIRCUNCENTRO	43
FIGURA 28.	CIRCUNCENTRO	44
FIGURA 29.	RECTA DE EULER	44
FIGURA 30.	MEDIATRIZ	45
FIGURA 31.	CIRCUNCENTRO	45

FIGURA 32. EXPLORACIÓN DE LA HERRAMIENTA SEGMENTO ENTRE DOS PUNTOS	51
FIGURA 33. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1A	52
FIGURA 34. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1B	53
FIGURA 35. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1B	54
FIGURA 36. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2	54
FIGURA 37. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2	55
FIGURA 38. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2A	55
FIGURA 39. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2B	56
FIGURA 40. EXPLORACIÓN DE LA HERRAMIENTA RECTA PERPENDICULAR	56
FIGURA 41. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1A	57
FIGURA 42. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1B	57
FIGURA 43. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1B	58
FIGURA 44. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2	58
FIGURA 45. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2	59
FIGURA 46. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2A	59
FIGURA 47. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2B	59
FIGURA 48. CIRCUNFERENCIA POR TRES PUNTOS	63
FIGURA 49. MEDIATRICES DEL TRIÁNGULO ABC	63
FIGURA 50. PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS MEDIATRICES	64
FIGURA 51. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA AL TRIÁNGULO	64
FIGURA 52. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1. ÍTEM 1	66
FIGURA 53. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1. ÍTEM 2	66
FIGURA 54. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1. ÍTEM 3	67
FIGURA 55. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 1. ÍTEM 4	68
FIGURA 56. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1.1	69
FIGURA 57. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1.2	69
FIGURA 58. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1.3	70
FIGURA 59. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 1.4	70
FIGURA 60. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD	74
FIGURA 61. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2	75
FIGURA 62. RESPUESTA DE DIEGO EN LA ACTIVIDAD 2	75
FIGURA 63. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2	76

FIGURA 64. RESPUESTA DE ANA EN LA ACTIVIDAD 2	77
---	----

LISTAS DE TABLAS

TABLA1. DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES	48
--	----

LISTAS DE CUADROS

CUADRO 1. LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES	42
------------------------------------	----



ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES	3
CAPITULO I: PROBLEMÁTICA.....	4
1.1 Antecedentes	4
1.2 El Geogebra	13
1.3 Justificación, pregunta y objetivos de la investigación.....	19
CAPITULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS	22
2.1 Enfoque instrumental.....	22
2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica	288
CAPITULO III: EL CIRCUNCENTRO	32
3.1 Aspectos históricos y matemáticos del circuncentro.....	32
3.2 Documentos oficiales y libros de texto.....	40
CAPITULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS.....	477
4.1 Desarrollo de la investigación	477
4.2 Las actividades y sus análisis	48
CONSIDERACIONES FINALES	78
REFERENCIAS	81

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente tesis aborda el proceso de Génesis Instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario.

A continuación presentamos nuestro trabajo en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación, consideramos una serie de antecedentes relacionados con el uso del Geogebra, el Enfoque Instrumental y nuestro objeto matemático el circuncentro. Además, presentamos la justificación, pregunta y objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo tratamos aspectos teóricos y metodológicos, consideramos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), respectivamente.

En el tercer capítulo hacemos referencia a aspectos históricos y matemáticos del circuncentro. Identificamos en los documentos oficiales la noción de circuncentro y cómo se presenta este contenido en los libros de matemática del tercer año de Educación Secundaria (las edades de los estudiantes fluctúan entre 14 y 15 años) del sistema educativo peruano.

El último capítulo está referido al experimento y análisis de la investigación. Presentamos a los sujetos de nuestra investigación y el escenario donde aplicamos nuestro estudio. Incluimos las actividades propuestas y sus respectivos análisis a priori y a posteriori. Por último, presentamos las consideraciones finales de la investigación.

CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo presentamos la problemática de la investigación. Para ello, consideramos investigaciones de referencia, que llamamos antecedentes. También, presentamos algunas herramientas del Geogebra, la justificación, la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1 Antecedentes

Como estamos interesados en el proceso de génesis instrumental del circuncentro con el Geogebra en estudiantes de nivel secundario, presentamos antecedentes como bases para nuestro estudio. Dentro de nuestra investigación hemos considerado investigaciones relacionadas con el Geogebra, este software es un ambiente de geometría dinámica gratuito que le permite al estudiante realizar exploraciones geométricas e ir construyendo sus conocimientos. Por esta razón también hemos buscado investigaciones de referencia relacionadas con la tecnología digital, las cuales consideran diferentes softwares que involucran ambientes de geometría dinámica.

Cabe señalar que vivimos en un mundo globalizado donde la tecnología evoluciona rápidamente. Involucrarnos en el entorno tecnológico e implementar las tecnologías de la información y comunicación en la enseñanza de la geometría es clave en la formación de nuestros estudiantes. “Las tecnologías cumplen un papel fundamental en la transformación del entorno de aprendizaje actual” (Semenov, 2005, p.12).

Además, las rutas de aprendizaje aseguran que la forma de enseñanza de la geometría ha sido tradicionalmente mediante el empleo del lápiz y el papel o la pizarra y la tiza como únicos recursos didácticos.

Presentamos la investigación de Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2005) quienes señalan que las tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se configuran en un objeto actual de investigación. En este sentido, la tecnología digital permite que los procesos de enseñanza y aprendizaje se presenten centrados en entornos de aprendizajes dinámicos, en los cuales el conocimiento de los estudiantes se moviliza a partir de situaciones nuevas y diversas.

Los autores señalan que se debe prestar atención a las potencialidades de la tecnología digital en un ambiente de clase, es decir, las tecnologías a través de un software matemático permite tener una mayor visualización sobre las diferentes construcciones matemáticas que puedan ir elaborando los estudiantes.

Lagrange et al. (2005) mencionan que la tecnología digital puede ser integrada en las prácticas existentes y en los planes de estudio, a fin de facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos con diversas visualizaciones de construcciones geométricas de manera precisa, lo cual permite que los estudiantes observen las propiedades de la gran variedad de representaciones matemáticas que pueden elaborarse.

Considerando la integración de la tecnología digital en el aprendizaje de las matemáticas, Trouche (2002) afirma que:

La aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como “recursos que resuelven y solucionan” problemas en el aprendizaje (p. 1).

El autor señala que la integración de herramientas tecnológicas en situaciones de enseñanza y aprendizaje permite una visualización dinámica de los diversos objetos matemáticos y sus formas de representación.

Cabe señalar que la tecnología digital está presente en todo lo que nos rodea, es pertinente que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para vivir en una sociedad enfocada en el conocimiento tecnológico. La tecnología digital en un ambiente educativo contribuye a la comprensión de diversos temas de geometría, ya que a través de diversos softwares se pueden realizar diversas construcciones dinámicas que les permiten a los estudiantes realizar conjeturas. Además, a partir de nuestra experiencia profesional nos hemos podido dar cuenta que cuando los estudiantes utilizan el lápiz y papel, no logran visualizar con precisión sus trazos ya que sus construcciones no presentan precisión. Con los softwares matemáticos los estudiantes pueden generar una gran cantidad de construcciones que les permitan lograr una mayor comprensión del tema matemático en desarrollo durante las sesiones de clase.

En el mismo sentido que Lagrange et al. (2005) y Trouche (2002), los autores Barrera, Barahona y Vaca (2015) mencionan que:

Las tecnologías son herramientas que permiten a los maestros revolucionar los modelos pedagógicos e incursionar en nuevos paradigmas que generen la anhelada formación de calidad. Este paradigma cambia el rol del profesor, motiva el utilizar eficientemente las tecnologías (p. 3).

Los autores señalan que las diferentes herramientas para la exploración a través de la geometría dinámica propicia la construcción de conocimientos. Es por ello que la geometría dinámica es pertinente en la creación de ambientes de aprendizaje.

Barrera et al. (2015) señalan que:

Las nuevas generaciones de estudiantes han encontrado en las TICs herramientas importantes para comunicarse socialmente, por lo que los docentes deben aprovechar ese conocimiento, incorporando herramientas que faciliten la comunicación mediada pedagógicamente para promover la colaboración, el desarrollo de la criticidad y el conocimiento en los estudiantes (p. 9).

Como la tecnología digital que utilizamos en la tesis es el Geogebra el cual es un software de geometría dinámica, presentamos la investigación de Morales y Poveda (2007) relacionada con el software de geometría dinámica denominado Geómetra Sketchpad. En este estudio se aborda la representación de las líneas y puntos notables de un triángulo en el Sketchpad, el cual permite representar y manipular objetos matemáticos. Los autores presentan dos aplicaciones que se pueden desarrollar a través de este software.

En la primera aplicación se pueden graficar las mediatrices de un triángulo, ubicar el punto notable denominado circuncentro y, por último, graficar una circunferencia circunscrita al triángulo. Los autores señalan que se puede mover cualquiera de los vértices de un triángulo y siempre se cumple que las tres mediatrices concurren en un punto denominado circuncentro, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Otra aplicación que presentan los autores es la de verificar que dado un triángulo cualquiera, existe una circunferencia que contiene a los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas sobre los lados del triángulo y a los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.

Los investigadores explican que a través de exploraciones que realizan los estudiantes con el software, ellos realizan conjeturas de propiedades geométricas.

Los investigadores señalan que:

La utilidad del Geometra Sketchpad no es solamente hacer que el estudiante realice una serie de dibujos geométricos, y pensar que con solo el hecho de usar tecnología se están alcanzando los objetivos propuestos. Se debe guiar al estudiante a través de una serie de pasos que lo lleven al descubrimiento de propiedades geométricas y así lograr un aprendizaje significativo con la tecnología (Morales y Poveda, 2007, p. 6).

También presentamos la investigación de León (2012) que realiza un estudio con un grupo de estudiantes de 2^{do} grado de educación secundaria a partir de los resultados obtenidos de un cuestionario sobre el tema de triángulos. Una de las preguntas de la parte experimental de la investigación hacía referencia a la propiedad de la existencia de un triángulo, los estudiantes mostraron una falta de conocimiento sobre dicho tema al no responder la pregunta. No

obstante, la autora desarrolló una sesión con el Geogebra para que los estudiantes comprendan la propiedad de la existencia de triángulos.

León (2012) menciona que:

Con el Geogebra se pueden hacer construcciones de figuras geométricas en 2D, usando una serie de pasos sencillos. Este software es muy útil para comprender conceptos en geometría, pues una vez hecha la construcción de una figura, la puedes alterar, mover, y esto, hace que se generen conclusiones de acuerdo a un objetivo planteado (p. 250).

La autora desarrolló una sesión de 80 minutos referida a la propiedad de la existencia de triángulos utilizando el Geogebra. Para el desarrollo de la sesión se utilizó una computadora y una pizarra inteligente. Se formaron ocho grupos de cuatro integrantes y se les dieron las indicaciones en una hoja de papel. De cada grupo se acercaban al lado de la pizarra de 2 a 3 representantes y realizaban las construcciones correspondientes. Luego, regresaban a su lugar y respondían de modo grupal las preguntas que contenía la hoja de papel.

La investigadora señala que en cada actividad se obtuvieron las respuestas grupales de los estudiantes, las cuales eran presentadas en hojas de acuerdo a lo que habían realizado usando el Geogebra. La autora menciona que seis de los ocho grupos respondieron de modo preciso a la pregunta sobre existencia de triángulos, las respuestas en su mayoría fueron las esperadas, buscando que los estudiantes lleguen solos a sus respuestas. Se promovió la comprensión de la propiedad de existencia de triángulos con el Geogebra. La autora señala que observó motivación constante y predisposición al trabajar con el software y afirma que:

Lo idóneo hubiese sido facilitar una computadora para cada estudiante y así tener respuestas más precisas de cada uno en las actividades planteadas. Quedaría como propuesta volver a hacer la actividad pero en la que cada estudiante utilice una computadora y por supuesto el software Geogebra (León 2012, p. 257).

La autora menciona que hubiera sido interesante que cada estudiante tenga su propia computadora para que llegue a conclusiones a través de construcciones individuales con el Geogebra.

Por otro lado, la investigación de Gamboa, Fernández, Borrego y Carmenate (2005) presenta una secuencia de actividades referida a las líneas y puntos notables en triángulos, que puede ser aplicada con niños de etapa escolar. A partir de un triángulo dibujado en la pizarra, los autores señalan que se trazan y ubican cada una de las líneas y puntos notables de un triángulo. Los investigadores señalan que la herramienta tecnológica, como la computadora, permite que los trazos sean más precisos con respecto a los trazos obtenidos a través de lápiz y papel. En ese sentido, Gamboa et al (2005) afirman que implementar una secuencia de

actividades con el uso de la tecnología digital, tales como el Geogebra, Cabri, etc.; mejora la precisión de las construcciones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Otra investigación que presentamos es la de Cotic (2014), en el que explicitan que el uso de un software de representaciones dinámicas en las secuencias didácticas, especialmente en geometría, permite a los estudiantes descubrir propiedades, así como relaciones entre elementos de figuras y cuerpos. Por ejemplo, el Geogebra brinda diversas herramientas que a través de su exploración dinámica, facilita el aprendizaje de diversos contenidos.

El investigador dice que:

Lograr la integración de las TIC en el aula de matemática, dependerá del interés y la capacidad de los docentes para generar un ambiente de aprendizaje que favorezca la producción de conocimientos con clases dinámicas, estimulando el aprendizaje continuo (p.6).

Además, el investigador se basa en lo establecido en los Estándares Curriculares del *National Council of Mathematics Teachers* (1989) en donde se establece que la tecnología no sólo ha hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas, también ha cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a la matemática y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos. La tecnología digital ofrece la posibilidad de resolver problemas que sin ella no serían resueltos de manera precisa.

Ante esto, el Enfoque Instrumental reconoce que todo aprendizaje de un objeto matemático se encuentra mediado por instrumentos y que dicha mediación influye en la naturaleza transpuesta del saber matemático, las acciones del profesor, la construcción del conocimiento por parte del estudiante y la organización particular de la clase.

En el sentido de la tecnología digital desde la postura de la didáctica de las matemáticas, Salazar (2015) analiza la génesis instrumental de estudiantes de primer ciclo en el curso de matemáticas respecto a la traslación horizontal y vertical de la representación de función cuadrática por medio del Geogebra.

La investigadora señala que:

El poder identificar tanto la traslación horizontal como la vertical de la función cuadrática, usando este ambiente de geometría dinámica, favoreció los procesos de génesis instrumental de los estudiantes respecto al objeto matemático abordado, ya que los estudiantes lograron la transformación del artefacto función cuadrática en instrumento. Además, este software permitió que los estudiantes verifiquen y/o validen sus conjeturas (p.57).

Para el análisis, la autora considera algunos elementos teóricos del Enfoque Instrumental. La investigadora estudia la transformación de artefacto a instrumento y considera los esquemas

de utilización que el sujeto desarrolla. En este estudio participaron quince estudiantes de primer ciclo del curso de matemáticas de Nivel Superior. Se analizaron las acciones de un estudiante.

La parte experimental de la investigación se desarrolló en el laboratorio de cómputo y consistió en una secuencia de seis actividades a través de una ficha de trabajo, con el fin de movilizar nociones de traslación horizontal y vertical de la función cuadrática.

Por medio de las tres primeras actividades se movilizaron en los estudiantes características intrínsecas de la función cuadrática. La cuarta actividad constó de cuatro ítems y se desarrolló a partir de un archivo previamente creado en Geogebra. En esta actividad los estudiantes debían representar gráficamente funciones cuadráticas dadas en su forma canónica a partir de la función cuadrática base.

Salazar (2015) explica que el estudiante analizado mostró el desarrollo del proceso de génesis instrumental. La autora afirma que en varios momentos de la parte experimental se percibieron aspectos de la instrumentación e instrumentalización debido a que por ejemplo, en uno de los ítems se le pedía que arrastre el punto h del deslizador y lo coloque en $h = -1$. A continuación, se le pedía que explique lo que sucedía con la función.

Salazar (2015) señala que:

Las acciones de Luis muestran que está instrumentado con las nociones movilizadas e instrumentalizado, quizás localmente, con el arrastre del software Geogebra. Es decir, que en él el proceso de génesis instrumental está aconteciendo (p.65).

Notamos que en esta investigación el Geogebra permite que los estudiantes verifiquen sus conjeturas. Además, este software posee ventajas debido a su dinamismo al explorar diversas propiedades de objetos matemáticos.

También, la investigación de Gómez (2014) muestra la relación que existe entre la mediatriz como objeto de estudio y el Geogebra, que nos interesa utilizar en la investigación. En este trabajo, la autora presenta una actividad en la que un grupo de estudiantes peruanos de 2do grado de educación secundaria (edades entre 11 y 12 años) realizan un viaje a la ciudad del Cusco-Perú, en donde a partir de un problema deducen la condición geométrica de la mediatriz, la cual consiste en ubicar un hotel que se encuentre a la misma distancia de tres lugares turísticos en la ciudad del Cusco. Para ello, utilizan herramientas del Geogebra, como: compas, recta, mediatriz, etc. y la aplicación de *google maps*.

Además de utilizar las herramientas tecnológicas antes mencionadas, para ubicar los tres lugares turísticos del Cusco, los estudiantes movilizaron nociones de mediatriz, intersección de rectas y circuncentro.

La investigadora Gómez (2014) señala como sugerencia de mejora asociar el punto de corte de las mediatrices con el circuncentro, el cual se constituye en objeto de interés para nuestra investigación.

Hemos presentado una serie de investigaciones referentes a la pertinencia de la tecnología digital, ya que interfiere de manera positiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático. Por lo tanto, estas investigaciones nos dan subsidios para entender la necesidad de interactuar con tecnologías digitales.

A continuación, presentamos la investigación de García-Cuéllar (2014) que aborda el proceso de instrumentación de la simetría axial mediada por Geogebra, considera como marco teórico el Enfoque Instrumental y como método aspectos de la Ingeniería Didáctica.

El objetivo general de esa investigación fue propiciar la instrumentación de la noción simetría axial mediado por el Geogebra en estudiantes de primer grado de educación secundaria.

Para ello, García-Cuéllar (2014) diseñó una secuencia de actividades, en la que identificó, por medio de los conceptos en acto y reglas de acción de los estudiantes, los posibles esquemas de utilización.

En el análisis a posteriori, la autora identificó problemas en las acciones de los estudiantes durante el desarrollo de cada actividad. Por ejemplo, en una de las actividades las estudiantes priorizaron lo visual en desmedro de las propiedades de la simetría axial para justificar sus procedimientos, que era lo que se deseaba.

Por otro lado, a través de su estudio, la investigadora logró que los estudiantes instrumenten la noción y las propiedades de la simetría axial, además de apenas identificar la instrumentalización local de algunas herramientas del Geogebra como punto, recta, punto medio, etc; las cuales fueron utilizadas en el aprendizaje de la simetría axial.

La autora señala que la instrumentación de la noción de simetría mediada por el Geogebra fue observada a través de los conceptos en acto y las reglas de acción de las estudiantes por medio de las actividades planteadas utilizando el Geogebra y por medio de las conclusiones escritas en la ficha de actividades. Luego, los posibles esquemas de utilización desarrollados por las estudiantes contribuyeron a percibir indicios del desarrollo del proceso de Génesis Instrumental, especialmente de la instrumentación de la noción de simetría axial y sus

propiedades, lo cual contribuyó al momento de analizar las acciones de los estudiantes durante su aprendizaje.

Durante el proceso de experimentación, García-Cuéllar (2014) observó la disposición presente en las estudiantes al desarrollar las actividades propuestas. Todo ello, permitió afirmar que los estudiantes se encontraban motivados con las actividades que se desarrollaban.

Otra investigación relacionada con el Enfoque Instrumental y el uso del software Geogebra, es la de Chumpitaz (2013) que analiza las acciones de los estudiantes de los cursos de Análisis Matemático I de las carreras de ingeniería en la aplicación de una secuencia de aprendizaje de la función definida por tramos mediada por el Geogebra.

Por medio del Enfoque Instrumental de Rabardel, el investigador estudia las acciones de los estudiantes, mediadas por el Geogebra, cuando trabajan nociones de la función definida por tramos en una secuencia de aprendizaje.

Para el estudio de los procesos de instrumentalización en la secuencia didáctica diseñada, el autor considera el análisis de la movilización o transposición de esquemas de uso, nuevos o preexistentes. Utiliza el modelo de Situaciones de Actividades Instrumentadas (SAI), propuesto por Rabardel, para identificar en las acciones de los estudiantes el instrumento y el objeto.

Chumpitaz (2013) muestra que los estudiantes movilizan esquemas de uso preexistentes logrando minimizar las dificultades en la secuencia de aprendizaje.

Otra investigación que resaltamos por el análisis desde el enfoque Instrumental y el uso del software Geogebra es la de León (2014), que tiene como finalidad propiciar la instrumentalización de la noción de elipse de un grupo de estudiantes, pertenecientes al curso de Matemática I en una Universidad particular de la ciudad de Lima, cuando trabajan una secuencia de actividades mediada por el Geogebra.

A través de diez actividades, los estudiantes identificaron la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, extremos del eje menor, el trazo del lado recto y vincularon la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente, identificando la relación entre los semiejes de la curva elíptica y los elementos de dicha expresión algebraica. El autor señala que la secuencia de actividades permitió observar el surgimiento de la condición geométrica de la elipse como medio para la comprensión de otras propiedades de este objeto matemático.

Para analizar las acciones de los estudiantes, el autor al igual que García-Cuéllar (2014) y Chumpitaz (2013), eligió como referencial teórico el Enfoque Instrumental de Rabardel y el software Geogebra.

En ese estudio, León (2014) afirma que el Geogebra permitió la elaboración de construcciones geométricas, la interacción, exploración y manipulación de las actividades propuestas. Según el investigador, en el análisis a posteriori de la secuencia de actividades se evidenció, la movilización por parte de los estudiantes de los esquemas previos los cuales facilitaron el desarrollo de las actividades y minimizaron las dificultades presentadas. Los esquemas de acción instrumentada de los estudiantes evolucionaron a esquemas de uso y facilitaron las actividades propuestas en la secuencia de aprendizaje, minimizando las dificultades que se pudieron haber presentado.

En este estudio, el investigador señala que se movilizan esquemas de uso como segmento, mediatriz de un segmento para alcanzar la comprensión de varias propiedades de este objeto matemático.

Las investigaciones de García-Cuéllar (2014), Chumpitaz (2013) y León (2014) dejan abierta la posibilidad para futuros estudios.

El estudio de García-Cuéllar (2014) señala que se podría realizar un estudio sobre el aprendizaje de la simetría central mediado por el Geogebra en ambos procesos de la Génesis instrumental, la instrumentación y la instrumentalización. Chumpitaz (2013) menciona que se podría estudiar el proceso de instrumentación en el aprendizaje de la función definida por tramos mediada por el Geogebra. León (2014) señala que son necesarias otras investigaciones, de tal forma que la elipse pueda ser aplicada como instrumento en distintos campos del saber. Por ejemplo, en el área de arquitectura con aplicaciones en arcos semielípticos.

Por otro lado, el estudio de Hegedus (2005) señala que en el proceso en el que se realizan construcciones geométricas se va dando la génesis instrumental, cuando un artefacto se va transformando en instrumento, es decir, el artefacto pasará a ser un instrumento cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes. También menciona que con una construcción con lápiz, regla y papel no es posible manipular construcciones geométricas, además, las construcciones en papel son imprecisas.

En ese sentido, los softwares de geometría dinámica permiten desarrollar el sentido espacial y el razonamiento geométrico. Es decir, poder representar mentalmente objetos geométricos del

espacio. El autor menciona que seleccionar, construir o manipular objetos matemáticos ayudan a que los estudiantes establezcan conjeturas. Además, el profesor puede optar por interactuar con una serie de objetos matemáticos para una variedad de fines pedagógicos porque el entorno dinámico permite la interacción de múltiples construcciones.

Hemos presentado una serie de antecedentes, algunos relacionados con la tecnología digital, como el software Geogebra, otros relacionados con el enfoque instrumental y otros que abordan diferentes contenidos matemáticos. Estas investigaciones nos dan subsidios para poder realizar el análisis de nuestra investigación.

A continuación, presentamos algunas herramientas del Geogebra con las cuales trabajaremos en nuestra investigación.

1.2 El Geogebra

Nos basamos en la investigación de García-Cuéllar (2014) para realizar una descripción del software Geogebra.

Cabe señalar que el Geogebra es un software de geometría dinámica de libre acceso que permite realizar diferentes construcciones, en donde los estudiantes pueden verificar y validar sus conjeturas.

A continuación presentamos la ventana inicial del Geogebra (Figura 1).

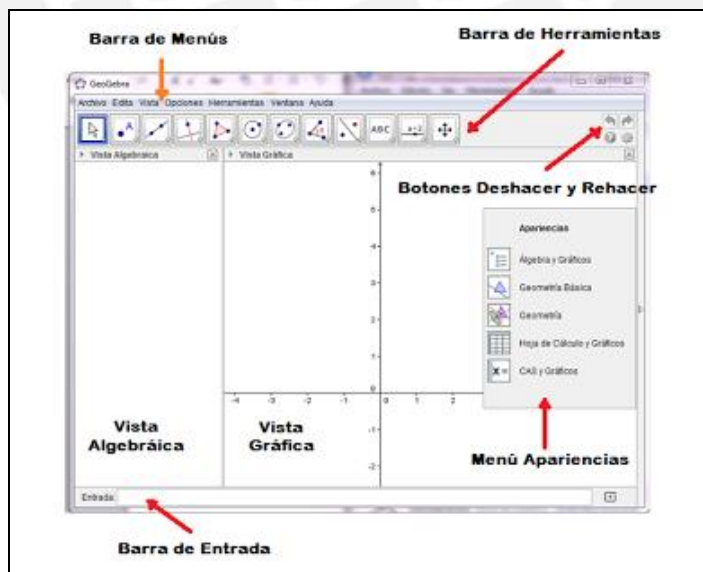


Figura 1. Ventana inicial del Geogebra

Como en nuestro estudio consideramos el circuncentro, mostramos la vista de geometría del Geogebra que usamos en nuestra investigación (Figura 2).

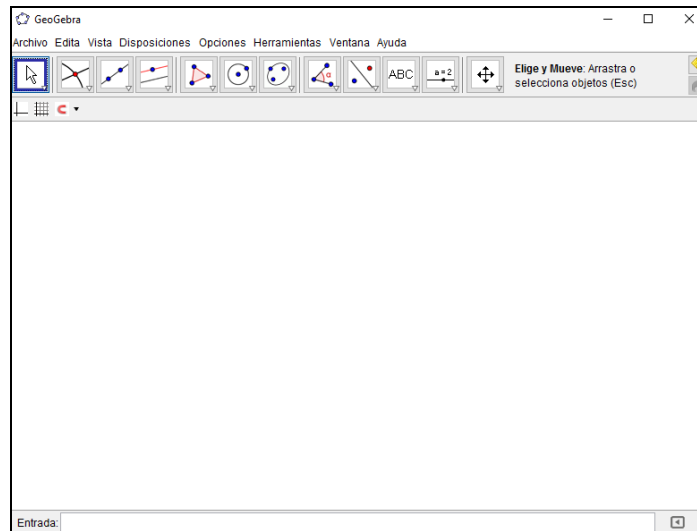


Figura 2. Vista de geometría del Geogebra

A continuación mencionamos algunas herramientas del Geogebra que involucra el desarrollo de la parte experimental de nuestra investigación y cómo son utilizadas en diferentes construcciones.

- Herramienta nuevo punto: Permite crear un punto en el plano.

La figura 3 nos muestra que utilizando la herramienta nuevo punto hemos creado los puntos A, B y C.

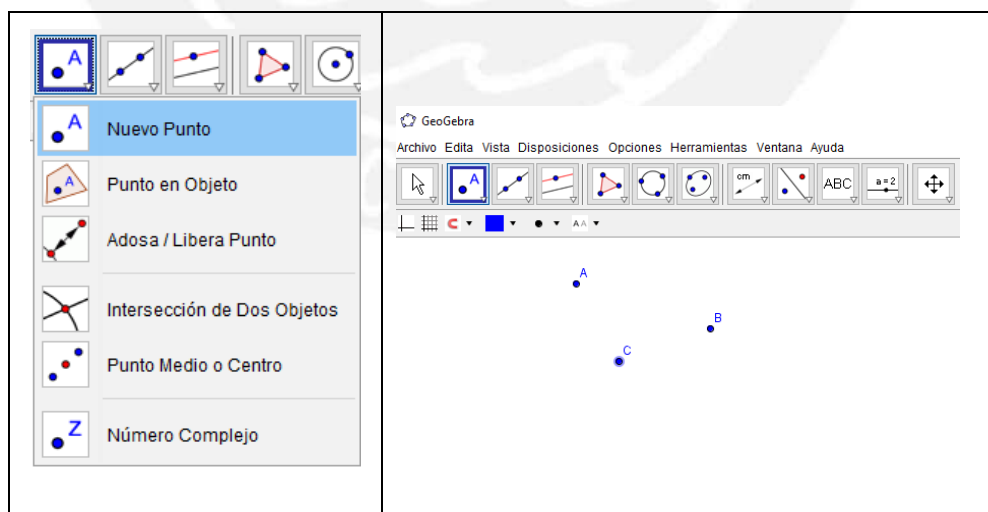


Figura 3. Herramienta nuevo punto

- Herramienta intersección de dos objetos: Permite ubicar el punto de intersección de dos objetos.

La figura 4 nos muestra que luego de crear un segmento AB y una recta que se intersectan, hemos utilizado la herramienta intersección de dos objetos para ubicar el punto C, que es la intersección del segmento AB con la recta construida.

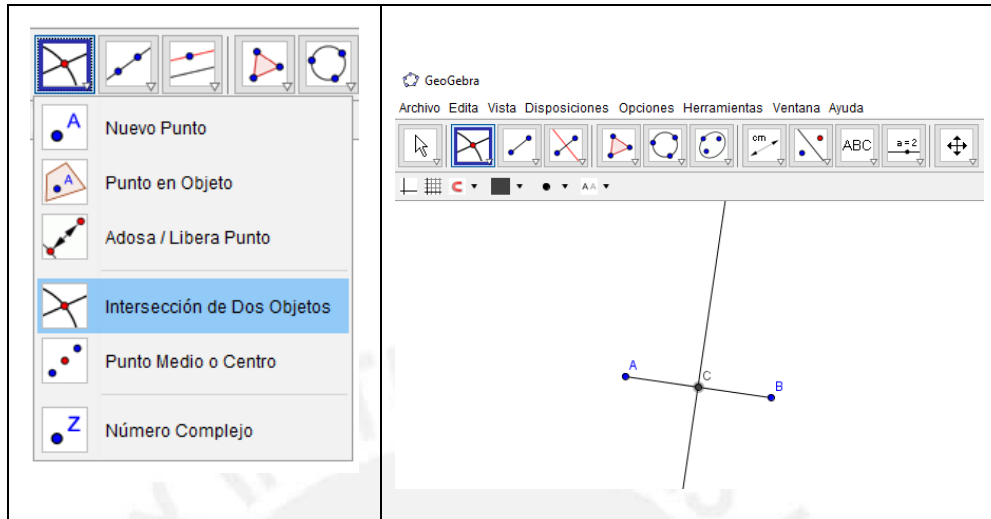


Figura 4. Herramienta intersección de dos objetos

- Herramienta punto medio: Permite ubicar el punto medio de un segmento.

La figura 5 nos muestra que luego de construir el segmento AB, utilizamos la herramienta punto medio o centro y encontramos el punto medio del segmento AB, denotándolo con el punto C.

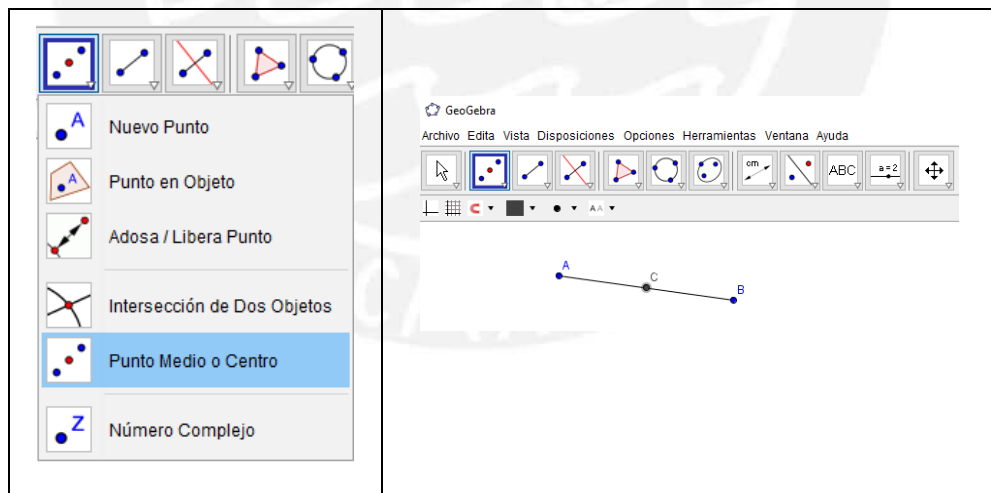


Figura 5. Herramienta punto medio

- Herramienta segmento entre dos puntos: Permite crear un segmento entre dos puntos dados.

La figura 6 nos muestra que luego de crear el punto A y el punto B, utilizamos la herramienta segmento entre dos puntos para crear el segmento AB.

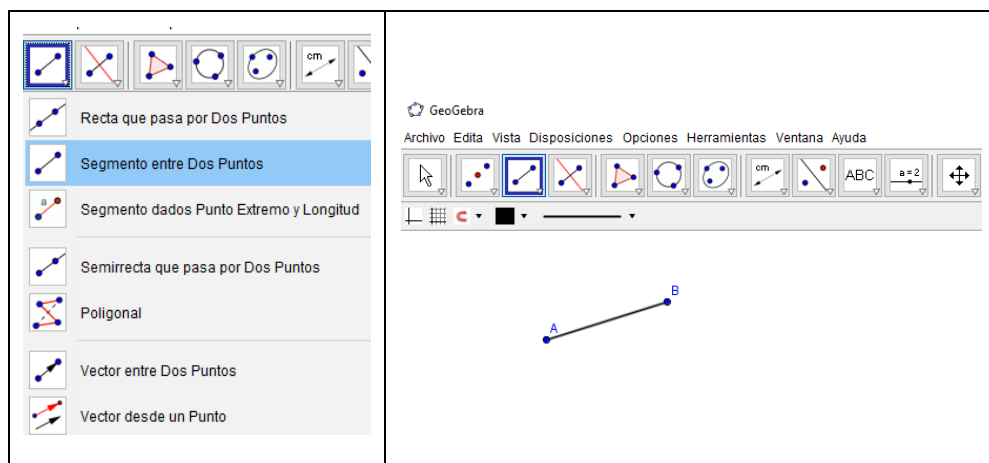


Figura 6. Herramienta segmento entre dos puntos

- Herramienta polígono: Permite construir un polígono determinado.

La figura 7 nos muestra que utilizando la herramienta polígono hemos creado un triángulo ABC.

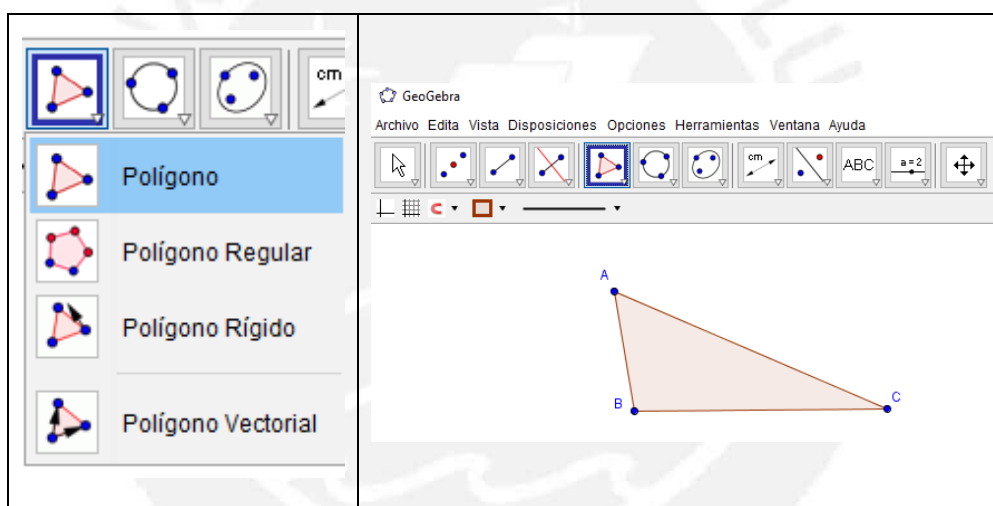


Figura 7. Herramienta polígono

- Herramienta ángulo: Permite medir los ángulos de alguna figura geométrica.

La figura 8 nos muestra que con la herramienta ángulo hemos podido obtener la medida de los ángulos A, B y C del triángulo ABC.

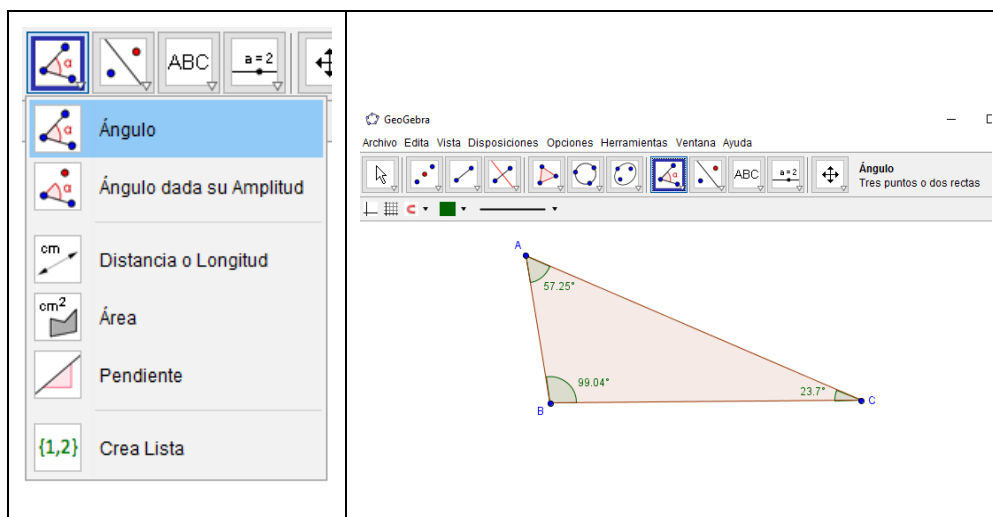


Figura 8. Herramienta ángulo

- Herramienta distancia o longitud: Permite medir la distancia de un segmento.

La figura 9 nos muestra que utilizando la herramienta distancia o longitud hemos medido la longitud del segmento AB.

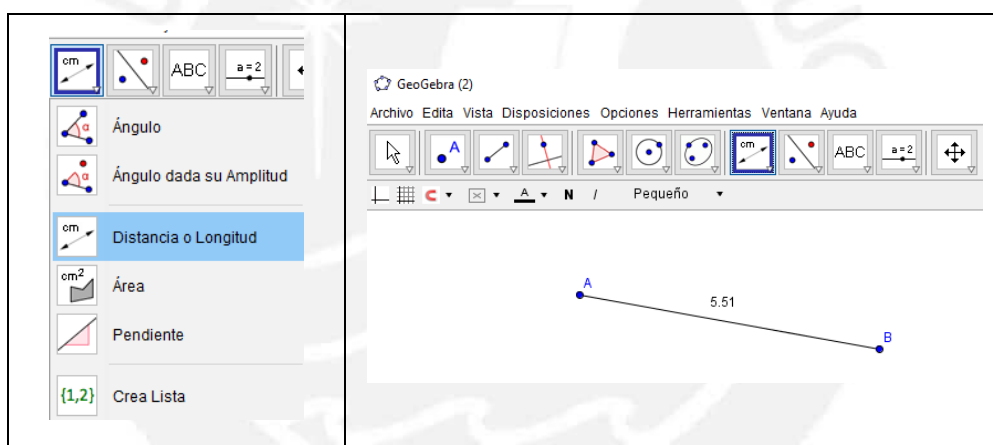


Figura 9. Herramienta distancia o longitud

- Herramienta recta perpendicular: Permite trazar la recta perpendicular a un segmento o a una recta por un punto determinado previamente.

La figura 10 nos muestra que utilizando la herramienta recta perpendicular hemos creado una recta que es perpendicular al segmento AB.

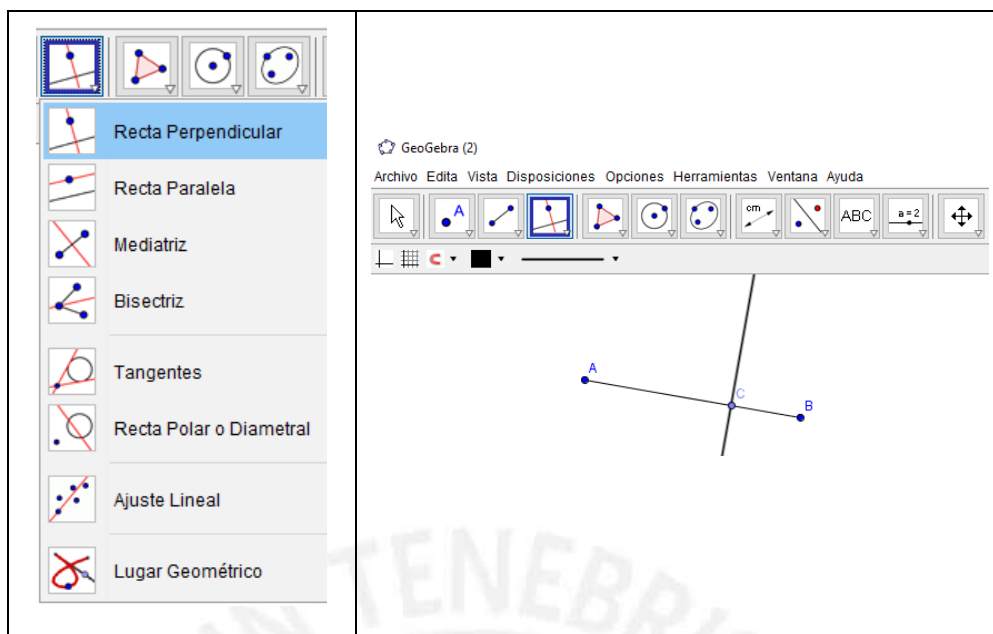


Figura 10. Herramienta recta perpendicular

- Herramienta mediatriz: Permite ubicar la mediatriz de un segmento.

La figura 11 nos muestra que utilizando la herramienta mediatriz hemos trazado la mediatriz del segmento AB.

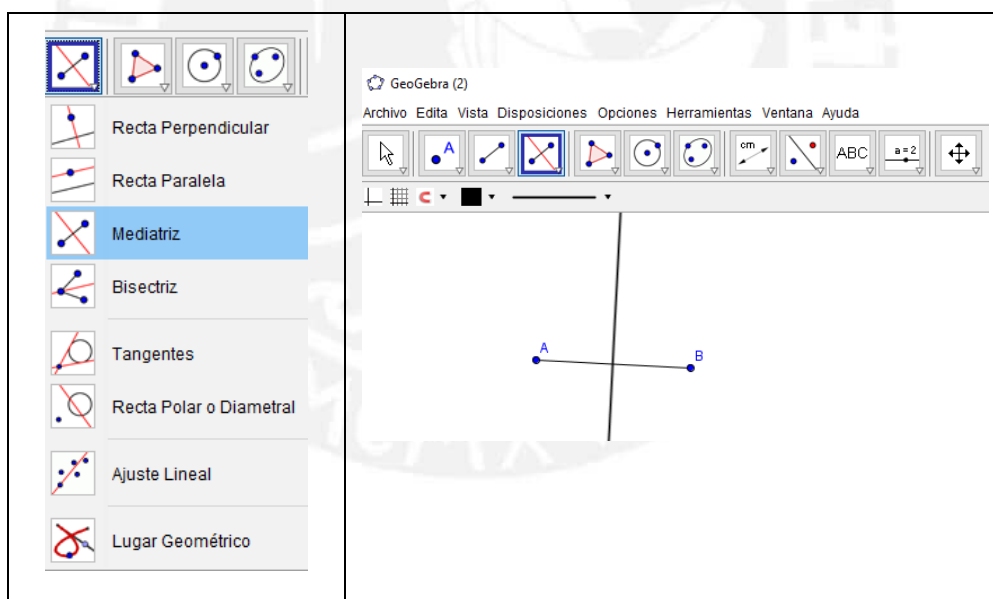


Figura 11. Herramienta mediatriz

- Herramienta circunferencia dados tres de sus puntos: Permite construir una circunferencia considerando tres puntos.

La figura 12 nos muestra que utilizando la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos hemos creado una circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

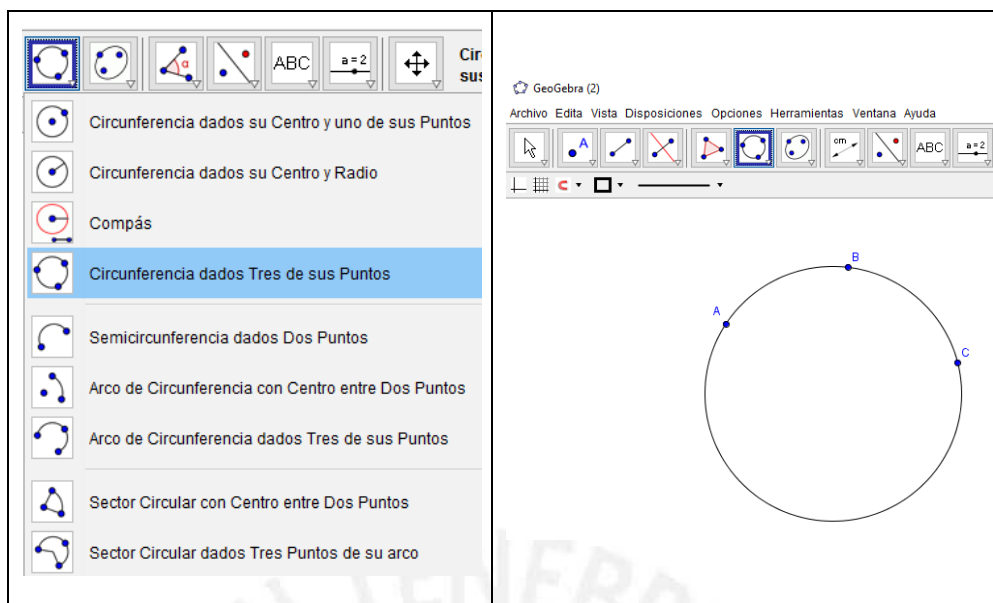


Figura 12. Herramienta circunferencia dados tres de sus puntos

A continuación presentamos la justificación, pregunta y objetivos de nuestra investigación.

1.3 Justificación, pregunta y objetivos de la investigación

Es necesario realizar este estudio debido a que en los antecedentes que hemos buscado en repositorios de tesis y bases de datos hemos encontrado investigaciones que no profundizan el estudio hacia el cual queremos apuntar, en ninguna de ellas hemos encontrado un estudio del objeto matemático que queremos investigar desde el Enfoque Instrumental.

Como nuestro interés es el proceso de génesis instrumental de estudiantes con relación al circuncentro en la que se use el Geogebra, nosotros hemos presentado una serie de antecedentes que guardan relación con nuestro estudio.

Las investigaciones de Barrera, Barahona y Vaca (2015) y de Gamboa, Fernández, Borrego y Carmenate (2005) muestran la pertinencia del uso del Geogebra. Por su parte, León (2012) realiza un estudio en el que utiliza el Geogebra. Sin embargo, estos estudios no utilizan el enfoque instrumental, el cual si es utilizado en nuestro trabajo de investigación.

También, Salazar (2015) realiza una investigación que concierne tanto al Geogebra como al enfoque instrumental, pero no al circuncentro, el cuál es nuestro objeto de interés. Gómez (2014) presenta una conexión entre la mediatriz como objeto de estudio y el Geogebra, tecnología digital que nos interesa; pero no utiliza el enfoque instrumental. García-Cuéllar (2014), Chumpitaz (2013) y León (2014) consideran en sus investigaciones el enfoque

instrumental, el Geogebra y aspectos de la Ingeniería Didáctica pero no trabajan con el circuncentro, que es nuestro objeto matemático.

En las investigaciones que hemos buscado notamos que no se profundiza el estudio hacia el cual estamos interesados.

En base a las investigaciones de referencia notamos la pertinencia del estudio del circuncentro. No hemos encontrado investigaciones que profundicen en el estudio de este objeto matemático con el Enfoque Instrumental de Rabardel y por medio de la tecnología digital, tal como el Geogebra. Pensamos que este objeto matemático aún necesita ser investigado debido a que es un contenido de la Educación Básica Regular del tercer año de educación secundaria en el que las edades de los estudiantes fluctúan entre 14 y 15 años.

Cabe señalar que analizar la génesis instrumental del circuncentro permitirá tener herramientas para la investigación en educación matemática.

Por todo eso, nos planteamos la siguiente pregunta y objetivos de la investigación:

¿Cómo ocurre el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que utilizan el Geogebra?

Objetivo general

Analizar cómo ocurre el proceso de Génesis Instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que se utiliza el Geogebra.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general consideramos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de uso.
- Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de acción instrumentada.
- Distinguir el surgimiento y enriquecimiento de la noción del circuncentro, cuando los estudiantes desarrollan un problema de la secuencia de actividades con el uso del Geogebra.

A continuación, en el siguiente capítulo presentamos aspectos teóricos y metodológicos del enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica respectivamente.



CAPITULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo presentamos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) tales como el origen de dicho enfoque y algunos elementos que utilizamos en el desarrollo de la investigación. Presentamos diferencias fundamentales entre artefacto e instrumento, los esquemas de utilización como los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada, así como los procesos de instrumentación e instrumentalización. También presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) tales como las fases de análisis preliminares, la concepción y análisis a priori, la experimentación, el análisis a posteriori y la validación.

Finalmente, incluimos los procedimientos metodológicos de nuestra investigación.

2.1 Enfoque instrumental

El nacimiento de este enfoque se da en los años 90, cuando la Dirección de Tecnología del Ministerio de Educación Nacional de Francia le solicitó a Michelle Artigue, participar en los trabajos de un grupo de expertos en la utilización de calculadoras y programas computacionales. El propósito fue identificar el potencial ofrecido por los programas computacionales de cálculo formal (CAS) para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundario.

Artigue (2002) señala que:

Familiarizada con la Teoría Antropológica de lo didáctico desarrollada por Chevallard y habituada a colaborar con investigadores en Ergonomía Cognitiva, naturalmente se impuso la idea que una concatenación apropiada entre la TAD y las perspectivas desarrolladas por Rabardel y Vérillon en la Ergonomía Cognitiva pudieran darnos el marco de pensamiento buscado. Es así como nació la aproximación instrumental (p.4).

El enfoque instrumental aborda la dimensión tecnológica de la enseñanza de las matemáticas de una manera nueva y la problematiza. Los desarrollos más recientes de esta aproximación se interesan a nuevos objetos tecnológicos.

En el campo de la Didáctica de la Matemática, el enfoque instrumental ha expuesto la influencia que tiene la emergencia de instrumentos en la construcción del saber matemático y en la actividad matemática.

Rabardel (1995) plantea un enfoque teórico que pretende dar cuenta de la naturaleza compleja del instrumento y la génesis del instrumento en el sujeto, enfatiza en la relación de éste con la actividad humana, pues se plantea que los instrumentos, por ser desarrollos de la historia

social y cultural, presentan una fuerte influencia en el sujeto, por tanto, constituyen estructuras cognitivas que permiten la construcción del conocimiento.

Se presentan diferencias fundamentales entre artefacto e instrumento. Rabardel (1995) reconoce al artefacto como un dispositivo material o simbólico, el cual se ha construido como una expresión de la cultura. La utilización de un artefacto no es neutral para el sujeto, debido a que introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización. Los esquemas de utilización se dirigen a la comprensión de las situaciones, la transformación de situaciones, la obtención de resultados, la orientación y al control de la actividad en la que se trabaja.

El investigador señala que el instrumento es una entidad mixta, que incluye una componente artefactual (un artefacto, una fracción de artefacto o un conjunto de artefactos) y una componente cognitiva (el o los esquemas de utilización).

Según el autor,

Un instrumento está formado por dos componentes; por una parte, un artefacto, material o simbólico, producido por el sujeto o por otros; por otra parte, uno o varios esquemas de utilización asociados, que resultan de una construcción propia del sujeto (p.178).

Es decir, el concepto de instrumento involucra tanto al artefacto como a los esquemas mentales desarrollados por el estudiante cuando realiza una clase de tareas, como se muestra en la Figura 13.

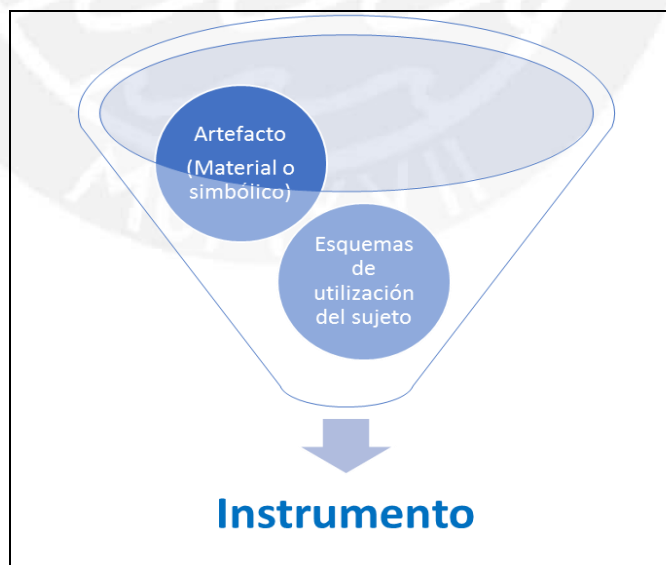


Figura 13. Componentes de un instrumento

Rabardel (1995) señala que el instrumento no existe en sí, sino es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. El artefacto puede ser un medio material o simbólico. Es decir, en nuestro caso, el medio simbólico es la representación del circuncentro de un triángulo. El autor utiliza el término instrumento, para designar el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto, el usuario del instrumento y el objeto sobre el cual se actúa.

Por ejemplo, el descubrimiento progresivo de las propiedades del artefacto circuncentro en términos de propiedades conceptuales, vendrá acompañado por el cambio de significado de la condición geométrica del circuncentro en términos cognitivos y semióticos, es decir el sujeto va asociando nuevos componentes artefactuales a su esquema condición geométrica del circuncentro, generando el enriquecimiento de las propiedades del artefacto circuncentro por parte del sujeto. El investigador señala que el artefacto se transforma en instrumento cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

Para esta investigación, ponemos especial atención al proceso de génesis instrumental del circuncentro en el cual analizamos las acciones de los estudiantes en su interacción con el Geogebra.

El autor señala que el proceso de un artefacto que se convierte en un instrumento se denomina génesis instrumental.

La postura teórica del investigador señala que las génesis hacen parte integral del proceso de aprendizaje de las matemáticas y que por tanto deben de considerarse en el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas. En nuestro estudio no consideramos la génesis instrumental del Geogebra sino que analizamos el proceso de génesis instrumental del circuncentro.

La noción de esquema es concebido por Rabardel (1995) en el sentido de Vergnaud: “un esquema es una organización invariante del comportamientos para una determinada situación (p.2)”. Según Vergnaud (1996) es en los esquemas que se deben investigar los conocimientos en acción del sujeto.

En ese sentido, podemos decir que se trata de un constructo que da cuenta de la organización del pensamiento más o menos estable y estructurado del sujeto. En cuanto a los esquemas de utilización que el sujeto moviliza o desarrolla, Rabardel (1995) considera dos dimensiones, los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada. Los esquemas de uso son los relativos a las tareas segundas, a operaciones, es decir las tareas segundas están referidas a la

manipulación técnica del artefacto. Son relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto.

Según Rabardel (1995):

Los esquemas de uso pueden situarse en el nivel de esquemas elementales. Lo que los caracteriza es su orientación hacia las tareas segundas que corresponden a las acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto (p.172).

Mientras que los esquemas de acción instrumentada están referidos a las tareas primeras, aquellas que se orientan al objeto de la actividad para las que el artefacto sea un medio de realización. Son los relativos a la utilización de un artefacto en vista de realizar una acción.

El autor afirma que:

Los esquemas de acción instrumentada consisten en totalidades cuyo significado está dado por el acto global que tiene como meta operar transformaciones sobre el objeto de la actividad. Estos esquemas incorporan, como constituyentes, los esquemas del primer nivel. Lo que los caracteriza es que son relativos a las tareas primeras (p.172).

Los esquemas de acción instrumentada y los esquemas de uso pertenecen a la clase de esquemas de utilización.

Según el autor, los esquemas de utilización tienen a la vez una dimensión individual y una dimensión social. La dimensión individual es propia de cada individuo mientras que la dimensión social se debe a que los esquemas se elaboran en el curso de un proceso en el que el sujeto no está aislado.

De acuerdo con el autor, la utilización de un artefacto no es neutral para el sujeto. Introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización y llama instrumento al conjunto artefacto y esquemas de utilización relacionados con el artefacto.

La actividad mediada del sujeto requiere previamente la construcción o desarrollo de instrumentos por parte del sujeto, el cual no le está dado desde el principio y es éste el que lo elabora en un proceso que es conocido como Génesis Instrumental, el cual se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización.

Sobre lo anterior, el autor indica que:

Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su

funcionamiento, etc. [...] Los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (p. 5).

En el sentido de Rabardel (1995), entendemos que la instrumentalización se refiere a la aparición y a la evolución de los componentes artefacto del instrumento. El usuario, por su actividad, asigna funciones al artefacto, las cuales pueden integrarse a este. En nuestro trabajo, el artefacto será la noción de circuncentro, entonces tenemos que hacer que evolucionen las componentes de dicha noción con una secuencia de actividades.

La instrumentación es relativa a la aparición y a la evolución de los esquemas de utilización. En nuestra investigación, la instrumentación está referida a la adaptación de los estudiantes a las restricciones que puedan encontrar cuando movilizan algunas nociones al trabajar con el artefacto circuncentro y sus funciones. En primer lugar, los estudiantes movilizan sus esquemas preexistentes, ya que se movilizan esquemas que asocien algo que han hecho antes con lo que van a hacer ahora. Es decir, durante el proceso de experimentación, los estudiantes van a trabajar nociones de mediatriz, intersección de mediatrices. Van a crear nuevos esquemas, a partir de nuevas acciones, para luego desarrollar un problema que moviliza la noción de circuncentro.

El investigador señala que la instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de utilización por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas.

El autor presenta la caracterización de los procesos de instrumentalización e instrumentación.

En lo referente a la caracterización de los procesos de instrumentalización, el investigador señala que la instrumentalización puede definirse como un proceso de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Este proceso se basa en las características y propiedades intrínsecas del artefacto. Dichas propiedades constituyen para el sujeto una propiedad permanente del artefacto. Mientras que la función adquirida es una propiedad extrínseca, la cual es atribuida por el sujeto para que el artefacto pueda ser constitutivo de un instrumento. El autor presenta un ejemplo referente a lo mencionado. Rabardel (1995) señala que “En una llave inglesa, la masa es una propiedad intrínseca, mientras que las funciones que le confiere el sujeto a dicha llave, serían consideradas como propiedades extrínsecas”.

A partir del ejemplo mencionado, se distinguen dos niveles de instrumentalización por atribución de función a un artefacto.

Sobre lo anterior, Rabardel (1995) señala que:

En un primer nivel, la instrumentalización es local, relacionada con una acción singular y con circunstancias de su desarrollo. El artefacto es instrumentalizado momentáneamente.

En un segundo nivel, la función adquirida se conserva de manera durable como propiedad del artefacto en relación con una clase de acciones, de objetos de la actividad y de situaciones. La instrumentalización es durable o permanente (p. 217).

En ambos casos, no ocurren transformaciones materiales del artefacto, solo adopta propiedades extrínsecas nuevas.

El autor afirma que:

Los artefactos a los que se enfrentan los sujetos en situaciones naturales (trabajo, vida cotidiana) se caracterizan precisamente por ser elaborados para realizar funciones previamente definidas, intrínsecas, constitutivas del artefacto. Funciones que es posible considerar como funciones constituyentes.

Las funciones nuevas, extrínsecas, que emergen a partir de los procesos de instrumentalización del artefacto pueden ser consideradas como funciones constituidas (p. 220).

En lo referente a la caracterización de los procesos de instrumentación, el autor señala como constitutivo de esta segunda dimensión, a la génesis de los esquemas, la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas, la cual contribuye a los cambios de significado. En ese sentido explica,

El descubrimiento progresivo que realizan los sujetos de las propiedades del artefacto se acompaña de la acomodación de sus esquemas, pero también, de cambios de significado del instrumento que resultan de la asociación del artefacto con nuevos esquemas (Rabardel 1995, p. 221).

El autor explica que la combinación de estos dos procesos conduce a la reorganización de los esquemas de utilización, es decir se generan nuevos esquemas en los estudiantes.

Con este enfoque analizaremos la génesis instrumental del circuncentro en estudiantes del curso de geometría de tercero de secundario, debido a que se quiere determinar si los estudiantes comprenden el objeto matemático del circuncentro cuando desarrollan actividades mediadas por el Geogebra.

2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

De Faria (2006) se basa en Douady (1996) en donde se menciona que el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos.

En nuestra investigación, utilizaremos la ingeniería didáctica como método de la investigación porque haremos una intervención en clase.

Según Artigue (1995) la noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico, la autora asegura que,

[...] para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue 1995, p. 33).

Artigue (1995) afirma que el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes. Por otra parte, a medida que pone en práctica lo planeado evoluciona de acuerdo a las interacciones que se producen en clase. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase.

La ingeniería didáctica de Artigue (1995) tiene las siguientes fases:

Fase 1. Los análisis preliminares

Se realiza el análisis considerando tres dimensiones: epistemológica, cognitivo y didáctico.

Artigue (1995) señala que:

La dimensión epistemológica está asociada al aspecto histórico y matemático del objeto en estudio. La dimensión cognitiva se asocia a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza y la dimensión didáctica está asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza (p. 40).

En nuestra investigación, la dimensión epistemológica la desarrollamos en el capítulo en el cual vemos una breve reseña histórica y matemática del circuncentro, también presentamos las investigaciones que nos hablan de algunas características cognitivas que presentan los

estudiantes en temas relacionados con el circuncentro. Además, presentamos algunos documentos oficiales tales como los informes de la oficina de medición de la calidad de los aprendizajes, las orientaciones para el trabajo pedagógico, las rutas de aprendizaje, la Resolución Ministerial N° 199-2015 que modifica los contenidos del DCN (2009) y los libros de texto del tercer grado de educación secundaria denominados “Intellectum Evolución” de la editorial San Marcos (2013) y el libro “Lógicamente 3” de la editorial Norma edición (2009).

Fase 2. Concepción y análisis a priori

Después de construida nuestra problemática, de estudiar el circuncentro y de definir nuestro marco teórico, el enfoque instrumental; con todos esos insumos construimos una secuencia de actividades en la cual queremos que el artefacto circuncentro se transforme en instrumento. Para ello vamos a trabajar con un grupo de estudiantes de tercero de secundaria, cuyas edades fluctúan entre 14 y 15 años, del sistema educativo peruano en una secuencia de dos actividades y un problema contextualizado para observar esa transformación.

De acuerdo con Artigue (1995) en esta fase se realiza el conjunto de supuestos sobre lo que harán los estudiantes.

En nuestra investigación proponemos posibles resultados esperados antes de la presentación de la propuesta didáctica (análisis a priori).

El análisis a priori según Artigue (1995) comprende una parte descriptiva y una predictiva. Se describen las selecciones del nivel local y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden. Además, se predicen los posibles comportamientos y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado.

Fase 3. Experimentación

Según Artigue (1995), en esta fase se tiene en cuenta la aplicación de materiales diseñados por el investigador y se llevan a cabo los registros de observación de la experiencia, por medio de la recolección de información de las producciones escritas de los estudiantes, intervenciones de los estudiantes en clase, grabaciones en video y entrevistas individuales a los estudiantes.

En nuestra investigación utilizamos las fichas de actividades como un medio para recolectar la información de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia de actividades. Utilizamos las producciones escritas de los estudiantes, grabamos sus intervenciones en la sala de informática así como los archivos que los estudiantes desarrollaron en el Geogebra y no fue necesario realizar entrevistas.

En esta etapa predomina el acercamiento entre el docente investigador y los sujetos de la investigación. En nuestra investigación, desarrollamos la parte experimental en un colegio particular de Lima, Perú. En esta fase, dimos a los estudiantes las instrucciones de la secuencia de actividades relacionadas con el Geogebra y realizamos el registro de observaciones correspondiente.

Fase 4. Análisis a posteriori y validación

Artigue (1995) señala que el análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación.

En esta etapa consideramos las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes. En nuestra investigación, en base al enfoque instrumental describimos y analizamos las acciones de los estudiantes al haber desarrollado la secuencia de actividades basados en el Enfoque Instrumental porque estábamos interesados en cómo se produce la génesis instrumental del circuncentro.

Además, en esta fase, la investigadora afirma que se desarrolla un diálogo entre las conclusiones del análisis a priori y los resultados obtenidos en la experimentación. Es por ello que consideramos el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia. Analizamos los datos recolectados en los encuentros realizados con los estudiantes y los contrastamos con el análisis a priori para validar la investigación.

Cabe mencionar que para recolectar la información de nuestra investigación, utilizamos: Fichas de la secuencia de actividades, grabaciones en video y los archivos en Geogebra de las actividades de cada estudiante participante.

Procedimientos metodológicos

Aplicamos la secuencia de actividades en el aula de informática de un colegio particular de Lima, Perú; en donde hicimos uso de tres computadoras y una pizarra acrílica.

La fase de experimentación se llevó a cabo en dos sesiones de 60 minutos.

En estas sesiones, los estudiantes utilizaron el Geogebra para desarrollar tres fichas de actividades. En la actividad 0, los estudiantes respondieron dos preguntas. En la actividad 1 respondieron cuatro preguntas y en la actividad 2 resolvieron un problema que moviliza la noción de circuncentro.

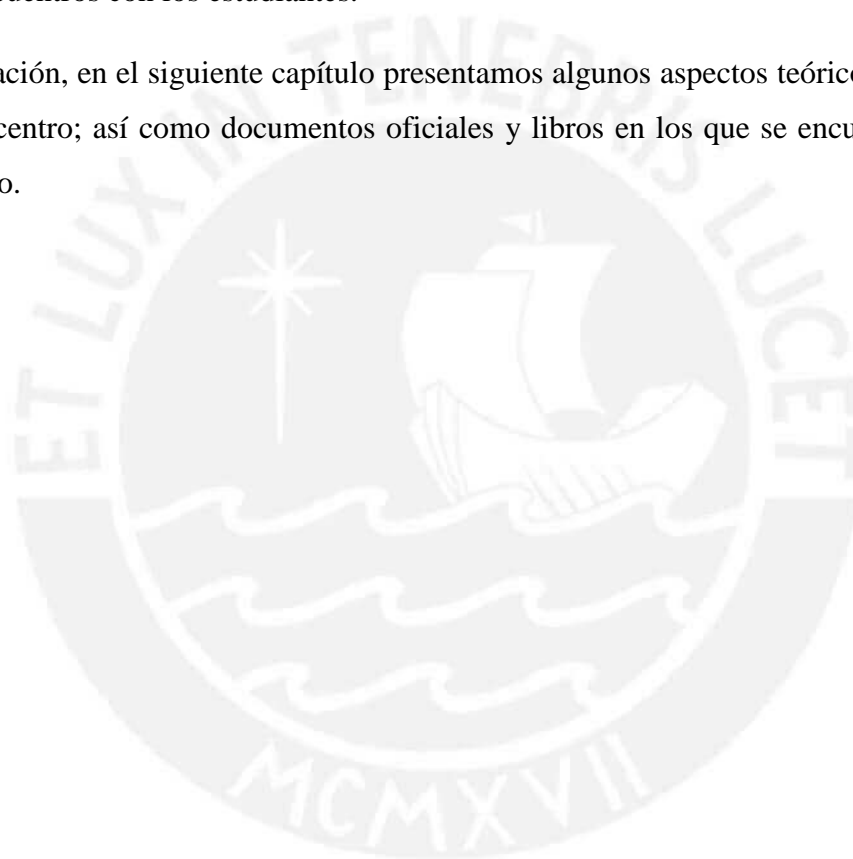
Luego de las actividades 0 y 1, la profesora tuvo interacciones con los estudiantes, aclarando sus dudas y permitiendo que los estudiantes conjeturen a través de las preguntas que hacía el

investigador, para finalmente dar la definición de la mediatriz y del circuncentro, a lo que llamamos formalización sobre la mediatriz y el circuncentro.

Posteriormente, procedimos a recoger los datos de la investigación a través de los archivos de Geogebra de cada estudiante, que estaban grabados en el escritorio de cada computadora. Estos archivos se revisaron a través de la herramienta del Geogebra denominada protocolo de la construcción. Además, recogimos las fichas de actividades 0, 1 y 2 desarrolladas por cada estudiante.

Durante el desarrollo de la secuencia de actividades, se realizaron grabaciones de cada uno de los dos encuentros con los estudiantes.

A continuación, en el siguiente capítulo presentamos algunos aspectos teóricos y matemáticos del circuncentro; así como documentos oficiales y libros en los que se encuentra este objeto matemático.



CAPITULO III: EL CIRCUNCENTRO

En este capítulo presentamos aspectos históricos y matemáticos del circuncentro desarrollados en el libro de los Elementos de Euclides. Además, consideramos la información que desarrollan otros autores con respecto a nuestro objeto matemático denominado circuncentro, autores tales como Romero (1959), De La Cruz (1974), Vega (1985).

Utilizamos aspectos de Darío (2015) para determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo, aspectos de Verástegui (2012) y Corredor (2011) para definir la línea notable denominada mediatriz y aspectos de Álvarez (2003) para demostrar el teorema del circuncentro.

Incluimos la presentación de documentos oficiales tales como los informes de la oficina de Medición de la calidad de los aprendizajes, las orientaciones para el trabajo pedagógico, la Resolución Ministerial N° 199-2015 así como las rutas de aprendizaje.

Finalmente presentamos el desarrollo del contenido matemático del circuncentro en los libros de texto del tercer grado de educación secundaria, tales como Lógicamente 3 (2009) e Intelectum (2013).

3.1 Aspectos históricos y matemáticos del circuncentro

Como nuestro objeto de estudio es el circuncentro señalamos algunos aspectos históricos y matemáticos de este objeto matemático.

A lo largo de la historia, van apareciendo diversos elementos geométricos. El libro los Elementos de Euclides es una pieza fundamental para hacer referencia a los triángulos y el circuncentro, por ello señalamos algunos aspectos primordiales del desarrollo de la geometría.

El libro IV de los Elementos de Euclides contiene 7 definiciones y 16 proposiciones relativas a polígonos regulares inscritos y circunscritos en círculos. En su libro, se describe cómo se puede construir con regla y compás polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados.

La primera proposición hace referencia a cómo inscribir un segmento en un círculo. En la segunda y tercera proposición se explica cómo inscribir y circunscribir un triángulo en círculos, en la cuarta y quinta proposición se enseña cómo inscribir y circunscribir un círculo en un triángulo. En las proposiciones sobre el triángulo inscrito y circunscrito aparecen, respectivamente, las importantes cuestiones geométricas de las bisectrices y su punto de intersección, el incentro; y las mediatrices y su punto de intersección, el circuncentro. En la

décima proposición, Euclides construye el llamado Triángulo Áureo. Este triángulo es utilizado para construcciones sobre el pentágono.

La proposición del Libro IV de Euclides señala lo siguiente:

- Proposición IV.5. Circunscribir un círculo en un triángulo dado: solución al problema de encontrar la circunferencia que pasa por tres puntos, las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita.

En las proposiciones IV.4 y V.5 de los Elementos de Euclides se resuelven problemas de la Matemática escolar en donde se inscribe y circunscribe un triángulo dado un círculo, relacionados con líneas notables como las bisectrices (y su punto de intersección, el incentro) y las mediatrices (y su punto de intersección, el circuncentro que es el centro de la circunferencia circunscrita).

En 1767, Euler demuestra que en cualquier triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están siempre alineados, llamando a esa recta, la recta de Euler.

A continuación, presentamos el tema de mediatriz y circuncentro en algunos textos antiguos de los años 1959, 1974 y 1985. Presentamos ambos contenidos porque nuestro objeto de estudio es el circuncentro y para ubicar este punto notable, es pertinente considerar a la mediatriz, ya que a través de la intersección de las tres mediatrices de un triángulo obtenemos el circuncentro.

Romero (1959) presenta la definición de mediatriz y circuncentro tal y como lo muestra la figura 14.

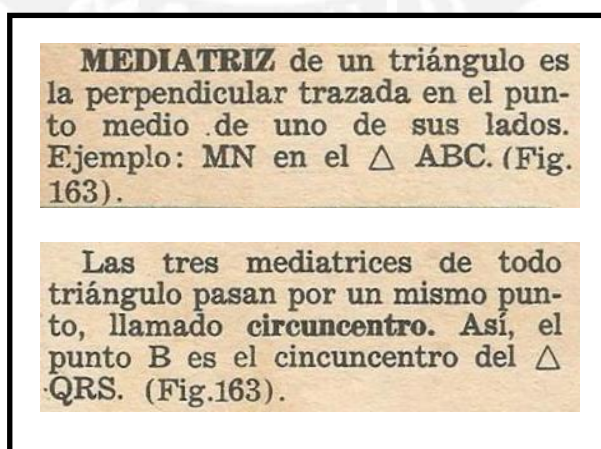


Figura 14. Mediatriz y circuncentro

Fuente: Romero (1959, p.86)

Romero (1959) acompaña la información de mediatriz y circuncentro con la figura 15.

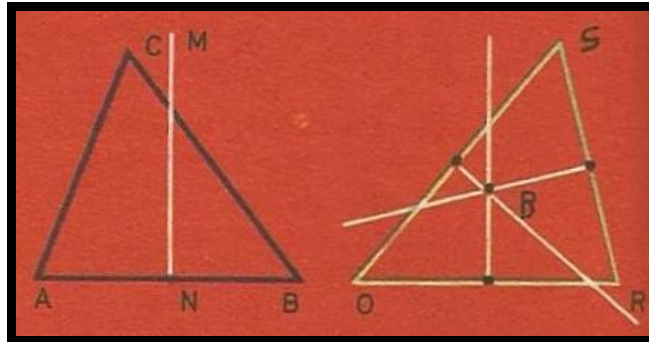


Figura 15. Mediatriz y circuncentro

Fuente: Romero (1959, p.86)

A continuación, el autor propone los ejercicios que se muestran en la figura 16.

EJERCICIO N° 18

4. Trace cuatro triángulos y señale: sus alturas, en el 1º, sus medianas, en el 2º; sus mediatrices, en el 3º; sus bisectrices en el 4º.

5. ¿Cómo se llaman, respectivamente, los puntos de intersección de las tres alturas, de las tres medianas, de las tres bisectrices y de las tres mediatrices de un triángulo?

Figura 16. Ejercicios

Fuente: Romero (1959, p.87)

De La Cruz (1974) presenta el concepto de mediatriz y circuncentro tal y como se muestra en la figura 17.

MEDIATRIZ de un lado de un triángulo es la perpendicular trazada en el punto medio de dicho lado, tal como \overline{MR} . (Fig. 130)

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro** (Fig. 131). Este punto equidista de los vértices del triángulo.

Figura 17. Mediatriz y circuncentro

Fuente: De La Cruz (1974, p.54)

Posteriormente, se le pide al estudiante que dibuje un triángulo rectángulo y trace sus tres mediatrices.

En el libro de Vega (1985) se presenta la definición de mediatriz y circuncentro tal como lo muestra la figura 18.

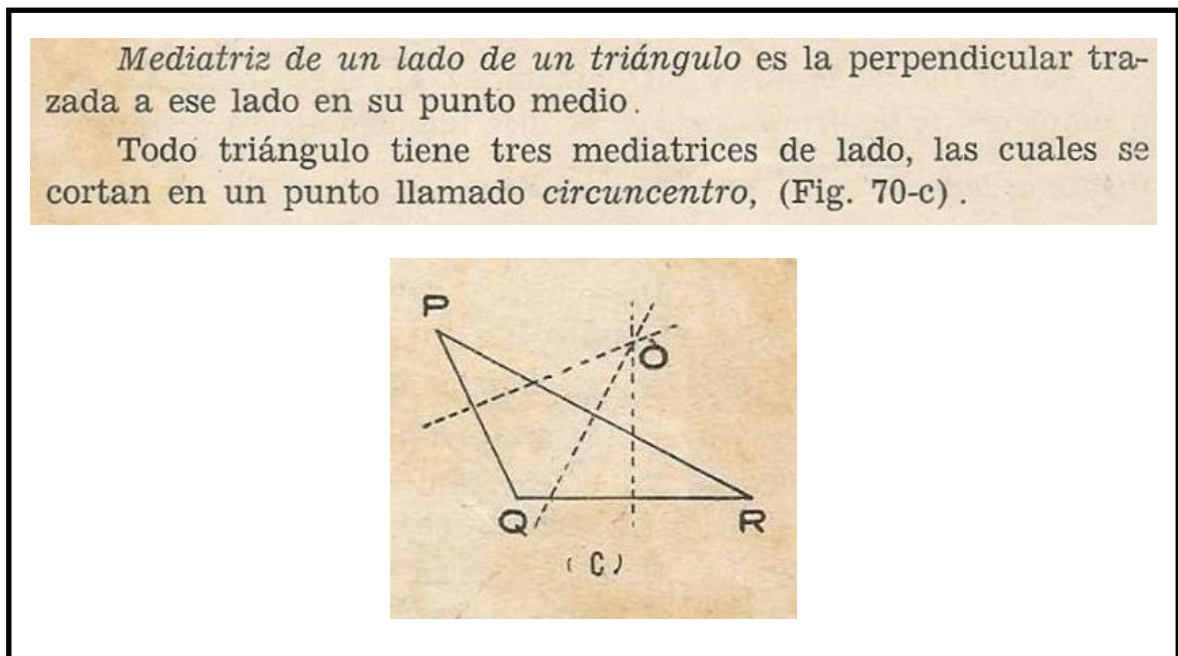


Figura 18. Mediatriz y circuncentro

Fuente: Vega (1985, p.46)

A continuación se les pide a los estudiantes que dibujen un triángulo rectángulo y construyan sus tres mediatrices. Se les pregunta qué observan.

Notamos que en estos tres textos, se presenta la definición de mediatriz y circuncentro de manera directa, es decir, se inicia con las definiciones conocidas de estos objetos matemáticos. Además, consideramos que se deberían tomar en cuenta las representaciones de esta línea y punto notable en diferentes tipos de triángulos para que los estudiantes puedan darse cuenta que el circuncentro puede estar dentro, fuera o en el contorno del propio triángulo. En el sentido de Rabardel, Romero (1959), De La Cruz (1974) y Vega (1985) asumen que la información presentada es suficiente para que los conocimientos de mediatriz y circuncentro ya sean instrumentos para los estudiantes. Nos podemos dar cuenta que la información presentada no posee una explicación profunda sobre su modo de obtenerla.

También, consideramos que si los estudiantes no poseen esquemas preexistentes sobre estos temas, es decir, nociones previas sobre triángulos, recta perpendicular, intersección, punto; será muy complicado que puedan resolver problemas que involucren tanto a la mediatriz

como al circuncentro. Se debería promover la movilización de nociones previas de los estudiantes.

Mota, D. y Valles, R. (2015) señala que:

Es evidente la gran importancia que tienen los conocimientos previos en la adquisición de nuevos conocimientos, se hace imprescindible que el estudiante tenga sólidas bases para poder aprender con éxito los nuevos saberes, esto debido a que esos conocimientos de base sirven de anclaje para la adquisición del nuevo conocimiento (p. 89).

Por todo ello, señalamos algunos aspectos matemáticos sobre triángulos, líneas y puntos notables, para luego centrarnos finalmente en el circuncentro.

Utilizamos aspectos de Darío (2015) quien afirma que en todo triángulo ABC con lados de medida “a” opuesto al vértice A, medida “b” opuesto al vértice B y medida “c” opuesto al vértice C, se puede determinar la ubicación de los puntos notables baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro, en términos de los lados del triángulo, cuando las medidas de los lados son conocidos. Para determinar la ubicación del punto notable, se establece como punto de referencia el vértice B del triángulo y se determinan la distancia de punto a punto correspondiente a la medida del segmento que va desde el punto notable hasta el lado BC o su prolongación y es perpendicular a éste, y la medida “d” correspondiente a la medida del segmento sobre la línea que contiene a BC, que va desde el vértice B hasta el pie de la perpendicular de medida “e”, con lo cual las coordenadas del punto notable serán P(d,e) (ver figura 19).

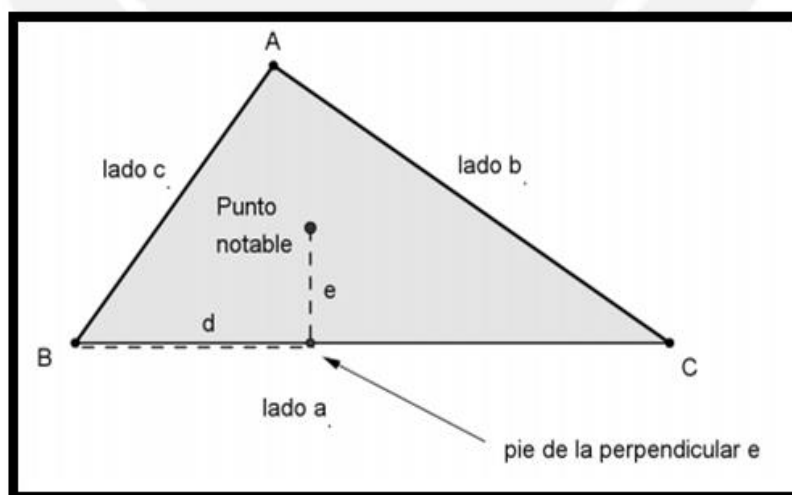


Figura 19. Puntos notables

Fuente: Darío (2015, p.2)

La medida de la longitud del segmento “d” se considera positiva hacia la derecha de B y se considera negativa hacia la izquierda de B. La medida de la longitud del segmento “e” se considera positiva hacia arriba de BC y se considera negativa hacia abajo de BC.

También consideramos la siguiente definición dada por Verástegui (2012).

Definición: Dado un triángulo ABC; la mediatriz del lado \overline{BC} es la recta L_M perpendicular al lado \overline{BC} que pasa por el punto medio M de \overline{BC} , es decir, L_M es la mediatriz del segmento \overline{BC} (ver figura 20).

Análogamente se tienen las rectas L_N y L_P mediatrices de los lados \overline{AC} y \overline{AB} , con N y P puntos medios de \overline{AC} y \overline{AB} , respectivamente; es decir, todo triángulo admite tres mediatrices y se interceptan en un punto llamado circuncentro del triángulo.

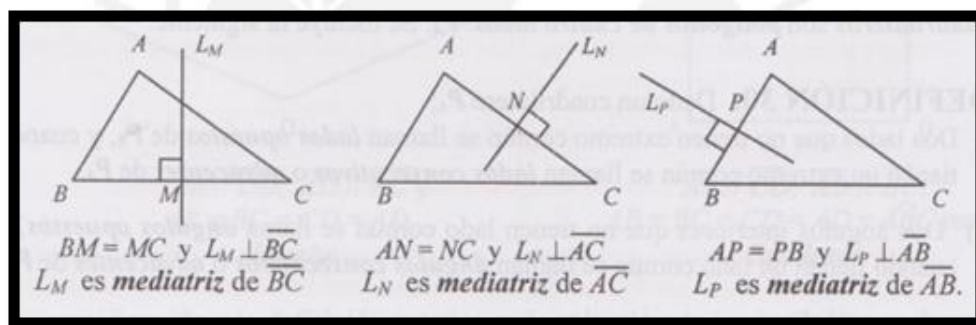


Figura 20. Mediatriz

Fuente: Verástegui (2012, p.57)

Corredor (2011) presenta el siguiente teorema de la mediatriz:

La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos de dicho segmento.

Demostración:

Caso 1

Si C es el punto medio de AB se tiene, de manera inmediata, que la longitud del segmento AC es igual a la longitud del segmento BC (Figura 21).

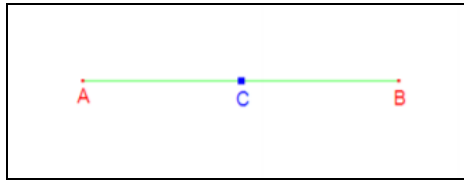


Figura 21. Mediatriz

Fuente: Corredor (2011, p.27)

Caso 2

Sea el triángulo ABC, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

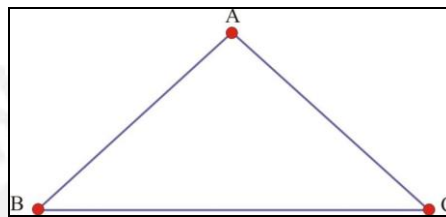


Figura 22. Mediatriz

Fuente: Corredor (2011, p.28)

Localizamos el punto medio de \overline{BC} y lo denotamos por X. Trazamos \overline{AX} .

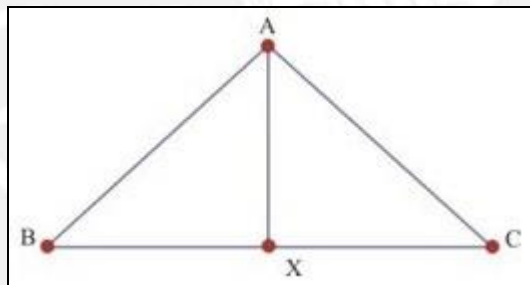


Figura 23. Mediatriz

Fuente: Corredor (2011, p.28)

Demostraremos que AX es la mediatriz del lado \overline{BC} .

Notamos que el triángulo ABX es congruente con el triángulo ACX

Luego,

$$\angle AXB \cong \angle AXC$$

$$m\angle AXB = m\angle AXC = 90^\circ$$

Por tanto, AX es la mediatriz del lado \overline{BC} .

En nuestra investigación, nos basamos en Corredor (2011) para presentar la demostración del teorema del circuncentro.

Álvarez (2003) presenta el siguiente teorema.

Teorema:

Las mediatrices de los lados de un triángulo ABC se encuentran en un mismo punto, que es equidistante de los tres vértices (ver figura 24).

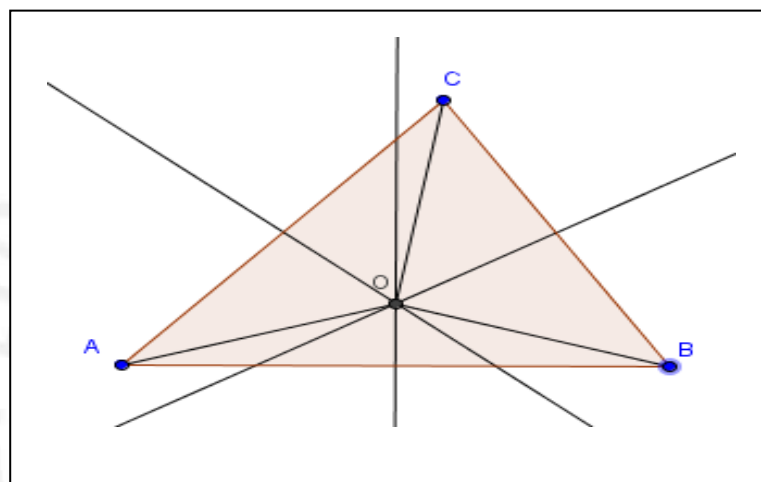


Figura 24. Teorema del circuncentro

Fuente: Álvarez (2003, p.50)

Demostración:

Las mediatrices de los lados AC y BC no son paralelas, luego se encuentran en un punto O. Como cada punto de la mediatriz equidista de los extremos de un segmento, se tiene que:

$$OA = OC$$

$$OB = OC$$

Entonces:

$$OA = OB$$

Luego, el punto O pertenece a la mediatriz del lado AB.

Al punto de encuentro de las mediatrices de los lados del triángulo se le llama circuncentro.

El estudio del teorema del circuncentro contribuye en nuestra investigación para reconocer elementos matemáticos inmersos en la demostración de dicho teorema.

3.2 Documentos oficiales y libros de texto

Consideramos que es importante mostrar cómo se presenta la noción de circuncentro en los libros y documentos oficiales. Para ello, presentamos algunos documentos oficiales y libros de texto de matemática de tercero de secundaria de la editorial Norma y de la editorial San Marcos.

Presentamos algunos informes, tales como los brindados a través de la oficina de medición de la calidad de los aprendizajes, la cual señala que luego de aplicar la Evaluación Censal de Estudiantes del 2015, los resultados de los estudiantes de segundo de secundaria en matemáticas solo lograron obtener un nivel satisfactorio el 9.5% de estudiantes. Los bajos rendimientos en matemáticas son muy preocupantes.

La oficina de medición de la calidad de los aprendizajes menciona que la enseñanza de la geometría se constituye en una problemática actual debido a que se deja de lado la priorización del desarrollo de capacidades referidas a la geometría.

El documento de la oficina de medición de la calidad de los aprendizajes señala que:

No se está apuntando al desarrollo de las capacidades de los estudiantes, sino a la transmisión de información, como nombres de figuras u objetos y enunciados verbales que definen propiedades cuyo significado no es comprendido. Los estudiantes no son aún capaces de identificar las partes constitutivas y los atributos de los objetos geométricos. Esto limita la posibilidad de clasificar objetos y la capacidad para comprender, identificar o establecer propiedades (p. 98).

Notamos que la cita señala que sólo se está apuntando a la transmisión de información matemática, dejando de lado el razonamiento de los estudiantes.

El documento de la oficina de medición de la calidad de los aprendizajes señala que:

Se debe cambiar el enfoque de enseñanza de la geometría ligado sobre todo al cálculo de distancias, longitudes, áreas, volúmenes, etc. por un enfoque que priorice el desarrollo de habilidades y destrezas, es decir, la comprensión de las principales nociones geométricas (p. 201).

Por su parte, las orientaciones para el trabajo pedagógico mencionan que las tecnologías de la información y comunicación permiten obtener recursos de aprendizajes individuales y colectivos. A partir de nuestra experiencia profesional, podemos afirmar que los estudiantes no logran graficar el circuncentro con precisión en triángulos usando regla y compás, lo cual se logra de modo preciso a través del Geogebra. Cabe señalar que el tema matemático del

circuncentro de un triángulo está presente en el currículo peruano y en otros documentos oficiales tales como las rutas de aprendizaje y la Resolución Ministerial N° 199-2015.

La Resolución Ministerial N° 199-2015 que modifica los contenidos del DCN (2009) incluye el tema de líneas y puntos notables de triángulos dentro de la competencia actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización del área de matemática de tercer grado de educación secundaria. En el mismo sentido, las rutas de aprendizaje presentan el contenido de líneas y puntos notables en triángulos, tal como se muestra en la figura 25.

3.º sec.	
•	Expresa relaciones y propiedades de los triángulos relacionados a su congruencia, semejanza y relaciones de medidas.
•	Expresa líneas y puntos notables del triángulo usando terminologías matemáticas.
•	Representa triángulos a partir de reconocer sus lados, ángulos, altura, bisectriz y otros.

Figura 25. Contenidos matemáticos en las rutas de aprendizaje

Fuente: Rutas de aprendizaje (2015, p.53)

Basados en los documentos oficiales mencionados, presentamos a continuación el libro de texto del tercer grado de educación secundaria denominado *Lógicamente 3* del año 2009, en el que en el capítulo de geometría desarrolla el objeto matemático de la presente investigación, es decir, el punto notable denominado circuncentro. Cabe resaltar que analizamos este texto porque es utilizado en la red privada de colegios de Lima y de otros departamentos del Perú y porque presenta de manera detallada aspectos del objeto matemático del presente estudio.

El libro *Lógicamente 3* (2009) presenta un cuadro en el que brinda directamente las características de cada línea y punto notable (ver cuadro 1) sin ninguna explicación previa ni ejemplos que favorezcan la movilización de conocimientos previos.

Pensamos que si el estudiante no concibe movilizar nociones previas, en términos de Rabardel (1995), esquemas preexistentes sobre las líneas notables tales como bisectriz, mediana, altura y mediatriz, que debieron ser desarrollados en segundo año de educación secundaria, será difícil que logre la comprensión directa de la tabla y cree nuevos esquemas.

Además, sabemos que en geometría es importante utilizar tanto el lenguaje natural así como las representaciones de figuras.

Cuadro 1. Líneas y puntos notables

Línea	Característica	Punto de intersección	El punto pertenece
Bisectriz	Segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto, dividiendo el ángulo en dos ángulos congruentes.	Incentro (I)	El incentro pertenece a la región interior en todo triángulo.
Mediana	Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.	Baricentro (B)	El baricentro pertenece a la región interior en todo triángulo.
Altura	Segmento que une un vértice con la recta que contiene al lado opuesto, siendo perpendicular a ella.	Ortocentro (O)	El ortocentro pertenece a la región interior del triángulo acutángulo. El ortocentro pertenece al propio triángulo rectángulo. El ortocentro pertenece a la región exterior del triángulo obtusángulo.
Mediatriz	Recta perpendicular a uno de los lados y que pasa por el punto medio de éste.	Circuncentro (C)	El circuncentro pertenece a la región interior del triángulo acutángulo. El circuncentro pertenece al propio triángulo rectángulo. El circuncentro pertenece a la región exterior del triángulo obtusángulo.

Fuente: Adaptado de editorial Norma (2009, p.375)

Luego del cuadro 1, el libro muestra una imagen de un triángulo acutángulo, al cual se le trazaron tres mediatrices y se le ubicó el punto notable denominado circuncentro (ver figura 26). Notamos que no hay una conexión con la tabla. Además, no genera una actividad en donde el estudiante pueda realizar algún tipo de construcción.

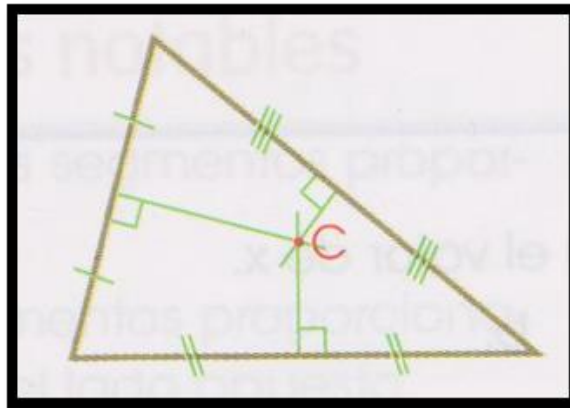


Figura 26. Circuncentro

Fuente: Editorial Norma (2009, p.375)

Luego, se le pide al estudiante que resuelva ejercicios donde determine la mediatriz (ver figura 27). El autor supone que los conocimientos anteriores ya son instrumentos para el estudiante.

Analiza las medidas de los ángulos y **determina** qué líneas notables se han trazado en el $\triangle ABC$.

a.

\overline{PM} es mediatriz
 \overline{BN} es altura

b.

\overline{BQ} es altura
 \overline{AP} es bisectriz

Figura 27. Circuncentro

Fuente: Editorial Norma (2009, p.375)

Luego, se presenta una nota sobre el circuncentro, tal como se muestra en la figura 28.

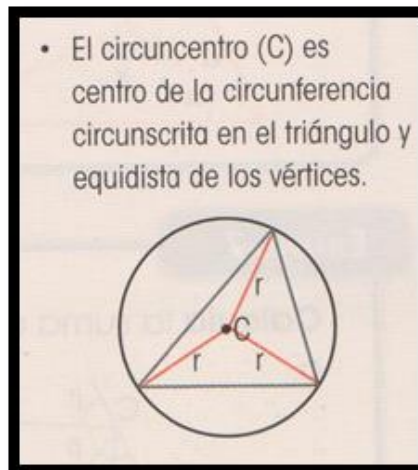


Figura 28. Circuncentro

Fuente: Editorial Norma (2009, p.375)

Por último, como una nota que presenta el libro Lógicamente 3 (2009), hace referencia a la recta de Euler. Menciona que dicha recta pasa el ortocentro (O), circuncentro (C) y baricentro (B) de un triángulo. Dichos puntos siempre van a estar alineados. Para este caso, presenta la figura 29. No hay ninguna explicación de ésta.

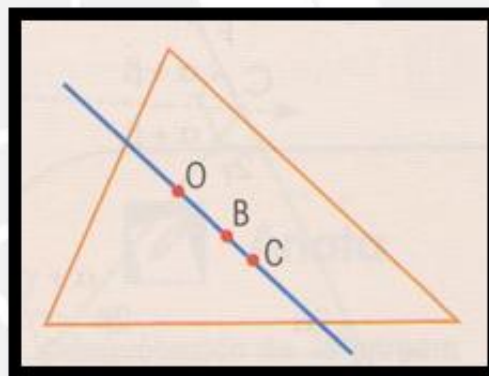


Figura 29. Recta de Euler

Fuente: Editorial Norma (2009, p.375)

Podemos notar que el libro Lógicamente 3 (2009) no presenta actividades que permitan a los estudiantes ubicar el circuncentro. Creemos que la tabla presentada inicialmente debería ir en la parte final a modo de conclusión. Además, se deberían de promover la movilización de nociones previas de los estudiantes.

También presentamos el libro Intelectum evolución de la editorial San Marcos edición 2013 de tercer grado de educación secundaria que utilizan en el colegio donde aplicamos nuestra investigación, el cual desarrolla la mediatriz tal y como lo muestra la figura 30.

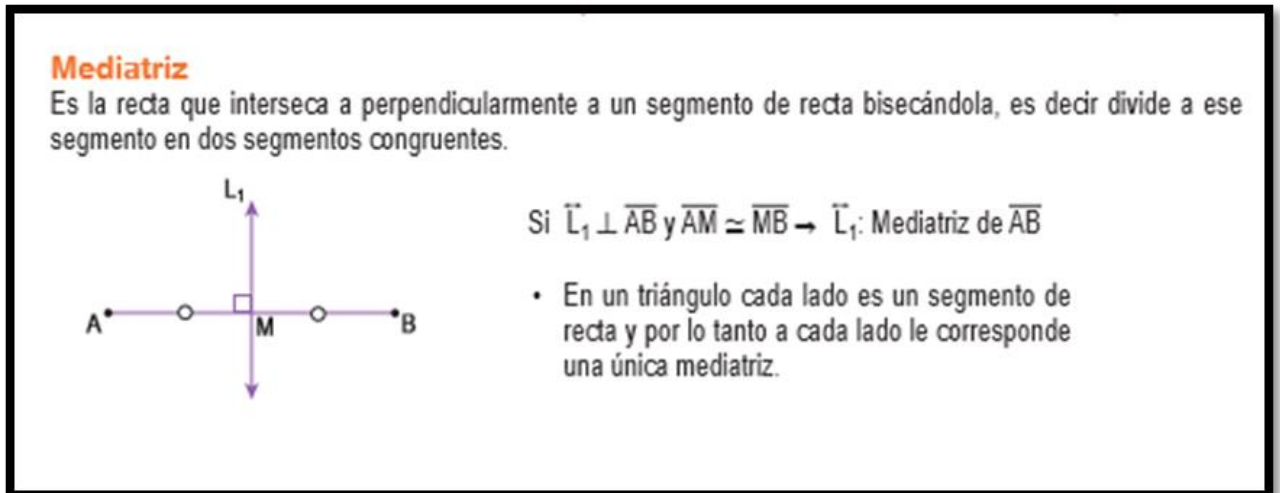


Figura 30. Mediatriz

Fuente: Editorial San Marcos (2013, p.13)

A continuación, presenta el punto notable denominado circuncentro en tres tipos de triángulos (ver figura 31).

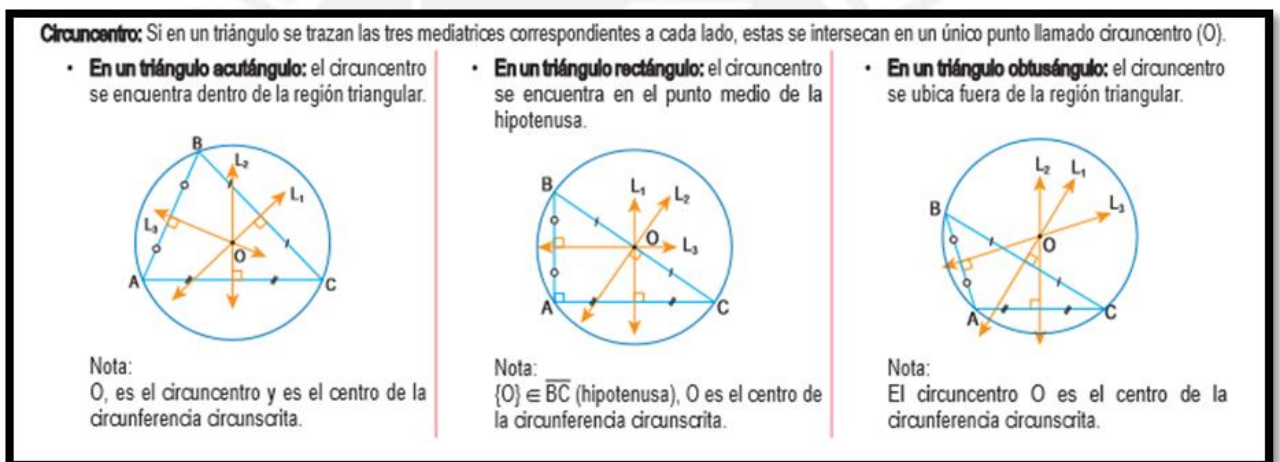


Figura 31. Circuncentro

Fuente: Editorial San Marcos (2013, p.13)

En las Figuras 30 y 31 el libro presenta la definición de mediatriz y de circuncentro de manera directa. Ubica el circuncentro en cada tipo de triángulo según sus ángulos. Luego se les pide que establezcan ciertas relaciones con respecto a los puntos notables.

Consideramos que la información se brinda de manera muy directa, lo cual no permite que el estudiante movilice nociones preexistentes como punto, segmento, recta perpendicular, etc.; las cuales les permitirán realizar la construcción del circuncentro.

En ambos libros se podrían considerar problemas, ya que cuando los estudiantes resuelvan estos problemas podremos identificar en las acciones de los estudiantes, que se ha dado el

proceso de génesis instrumental. Cabe señalar que estos contenidos están dentro de la Resolución Ministerial N° 199-2015 y de las rutas de aprendizaje en el ciclo VII y en el tercer año de educación secundaria.

A continuación, en el siguiente capítulo presentamos el experimento y análisis respectivo.



CAPITULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

Dentro de este capítulo consideramos el lugar donde se desarrolló la investigación, los sujetos y la secuencia de las actividades 0, 1 y 2. La actividad 0 está relacionada con la exploración de algunas herramientas del Geogebra, la actividad 1 es la intersección de mediatrices y la actividad 2 es un problema que moviliza la noción de circuncentro. En la actividad 0 presentamos un análisis descriptivo ya que no consideraremos la génesis instrumental del Geogebra sino que analizaremos el proceso de génesis instrumental del circuncentro. En las actividades 1 y 2 desarrollamos sus respectivos análisis a priori y a posteriori en términos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995).

4.1 Desarrollo de la investigación

En nuestra investigación desarrollamos la parte experimental en la sala de informática de un colegio particular de Lima, Perú. La experimentación no se dió dentro del horario escolar; ya que ofrecimos un taller los días viernes 14 y miércoles 19 de octubre del 2016 a las 4pm, en donde voluntariamente se inscribieron 5 estudiantes de 14 y 15 años de edad del tercero de secundaria de un colegio particular de Lima-Perú, de los cuales analizamos a 2 estudiantes que estuvieron presentes en los dos encuentros y participaron activamente durante el desarrollo de las tres actividades.

Para la parte experimental se realizaron dos encuentros de 60 minutos en la sala de informática entre el docente investigador y el grupo de estudiantes, los cuales tuvieron a su disposición una computadora para desarrollar las actividades vinculadas con el Geogebra. Además, se les entregaron fichas de actividades que fueron resueltas por los estudiantes.

Descripción de las actividades

La Tabla 1 hace referencia a las actividades propuestas que se realizaron en dos encuentros en la sala de informática.

Tabla1. Descripción de las actividades

Encuentro	I	II
Actividad	Actividad 0	Actividad 1 Actividad 2
Contenido	- Explorando algunas herramientas del Geogebra	- Intersección de las mediatrices - Aplicaciones

En el primer encuentro se desarrolló la actividad 0 que les permitió a los estudiantes explorar el Geogebra para adquirir nociones sobre algunas herramientas de este software. Además, realizaron la construcción de la mediatriz, con el objetivo de reforzar este concepto que posteriormente les ayudó a ubicar el circuncentro en triángulos.

En el segundo encuentro, la actividad 1 permitió que los estudiantes desarrollen esquemas de utilización nuevos y preexistentes del circuncentro. Finalmente, en la actividad 2 se desarrolla un problema.

Organización de la colecta de datos

En nuestro estudio, una vez realizada la experimentación, recolectamos la información a través de:

Fichas de actividades: consideramos tres actividades, la actividad 0, denominada explorando algunas herramientas del Geogebra; la actividad 1, denominada intersección de las mediatrices y la actividad 2 referida a un problema que moviliza la noción de circuncentro.

Grabaciones: durante el desarrollo de las actividades, grabamos las intervenciones de los estudiantes al desarrollar cada una de las tres actividades. Pretendimos evidenciar si realizaban preguntas que sean relevantes para un posterior análisis.

Recepción de los archivos de Geogebra: grabamos cada uno de los archivos de Geogebra que contengan las construcciones de cada actividad por parte de cada estudiante, para posteriormente realizar un análisis de éstas.

4.2 Las actividades y sus análisis

Presentamos las actividades 0, 1 y 2. En la actividad 0 presentamos un análisis descriptivo ya que en esta actividad no se analizó profundamente el proceso de génesis instrumental.

Consideramos el proceso de génesis instrumental del circuncentro y no del Geogebra. En las actividades 1 y 2 presentamos el respectivo análisis a priori y a posteriori.

Actividad 0:

El objetivo de esta actividad fue conseguir que los estudiantes exploren las herramientas del Geogebra, tales como nuevo punto, segmento entre dos puntos, polígono, recta perpendicular, distancia o longitud, ángulo, punto medio, intersección de dos objetos y mediatriz.

A continuación, presentamos la ficha de trabajo correspondiente a la actividad 0.



Actividad 0: Introducción al Geogebra

Nombres y apellidos:

.....

NOTA: Use cualquier herramienta del Geogebra para realizar las siguientes construcciones. Luego de realizar cada construcción, grabe su archivo en el escritorio en la carpeta Geogebra.

- 1) Abra el Geogebra y explore la barra de herramientas del Geogebra, para ello clique en cada una de las herramientas.



- a) Enumere por lo menos tres herramientas de la barra y explique qué características puede observar que tiene cada una de ellas:
-

- b) Construya un triángulo ABC cualquiera. Mida sus lados y ángulos (sentido antihorario), arrastre cualquiera de los vértices del triángulo. Mencione los tipos de triángulos que se forman según sus lados o según sus ángulos.
-

- 2) Ahora, trace una recta perpendicular al lado AB del triángulo tal que lo divida en dos partes iguales. Marque un punto cualquiera en la recta y una dicho punto con los extremos del segmento AB. Mida los segmentos AE y BE. En seguida haga clic derecho en el punto E y active rastro. Arrastre el punto E.

- a) Explique lo que observa:
-
-

- b) ¿Cómo se denomina dicha recta perpendicular al segmento? Justifique
-
-

En seguida presentamos el análisis descriptivo de la actividad introductoria de algunas herramientas del Geogebra.

Análisis descriptivo de la actividad 0

Esta actividad no se analizó bajo el Enfoque Instrumental debido a que el interés de nuestra investigación fue analizar el proceso de génesis instrumental del circuncentro y no del Geogebra. A pesar de que sabemos que existen otras génesis, el foco de nuestra investigación es la génesis instrumental de un artefacto simbólico como es el circuncentro y no del artefacto Geogebra.

Desarrollo de la actividad 0:

Acciones de Diego

En el ítem 1 (ver Figura 32) Diego exploró las herramientas del Geogebra tales como; segmento entre dos puntos, distancia, recta, triángulo.

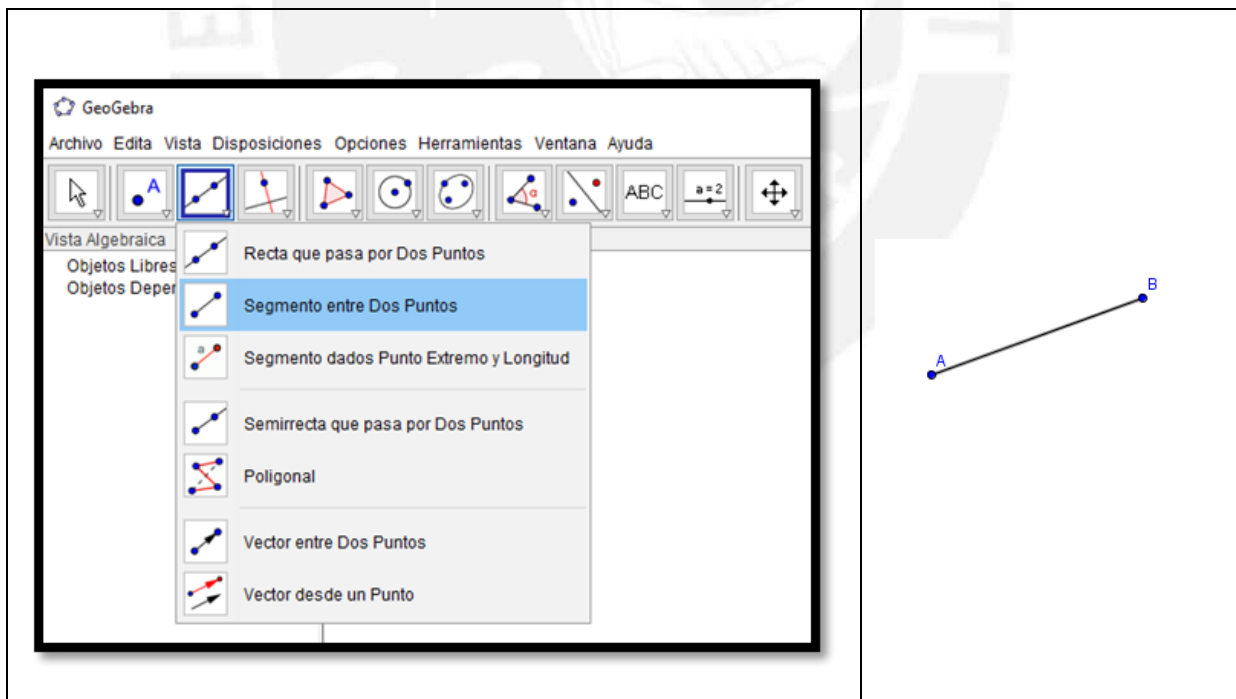


Figura 32. Exploración de la herramienta segmento entre dos puntos

En el ítem 1a) Diego enumeró tres herramientas de la barra y explicó sus características. En la Figura 33, notamos que mencionó las herramientas: punto, recta y ángulo; y explicó con sus propias palabras, una característica de cada uno de estos elementos geométricos que representa la herramienta que encontró mientras exploraba el Geogebra.

Diego señaló lo siguiente:

Cuando escribió punto explica *se dibuja un punto en el plano*; en el caso de recta escribió *se traza una línea que une 2 o más puntos*; y en el caso de ángulo escribió *se dan tres puntos y se describe el ángulo formado entre los 3; $0^\circ < \alpha < 360^\circ$* .




<p>a) Enumere por lo menos tres herramientas de la barra y explique qué características puede observar que tiene cada una de ellas:</p>	
<p>1. Punto: <i>Se dibuja un punto en el plano</i></p>	
<p>2. Recta: <i>Se traza una línea que une 2 o más puntos</i></p> <p>3. Ángulo: <i>Se dan 3 puntos y se describe el ángulo formado entre los 3. $0^\circ < \alpha < 360^\circ$</i></p>	

Figura 33. Respuesta de Diego en la actividad 1a

Notamos que Diego utilizó sus conocimientos previos de punto, recta y ángulo para responder la pregunta 1a).

En el ítem 1b) Diego realizó varios trazos y logró construir un triángulo, medir sus lados y ángulos. Además, hizo clic izquierdo y arrastró el vértice A. Luego identificó diferentes tipos de triángulos según sus ángulos. En la figura 34a) Diego identificó un triángulo acutángulo, en la figura 34b) identificó un triángulo obtusángulo y en la figura 34c) identificó un triángulo rectángulo.

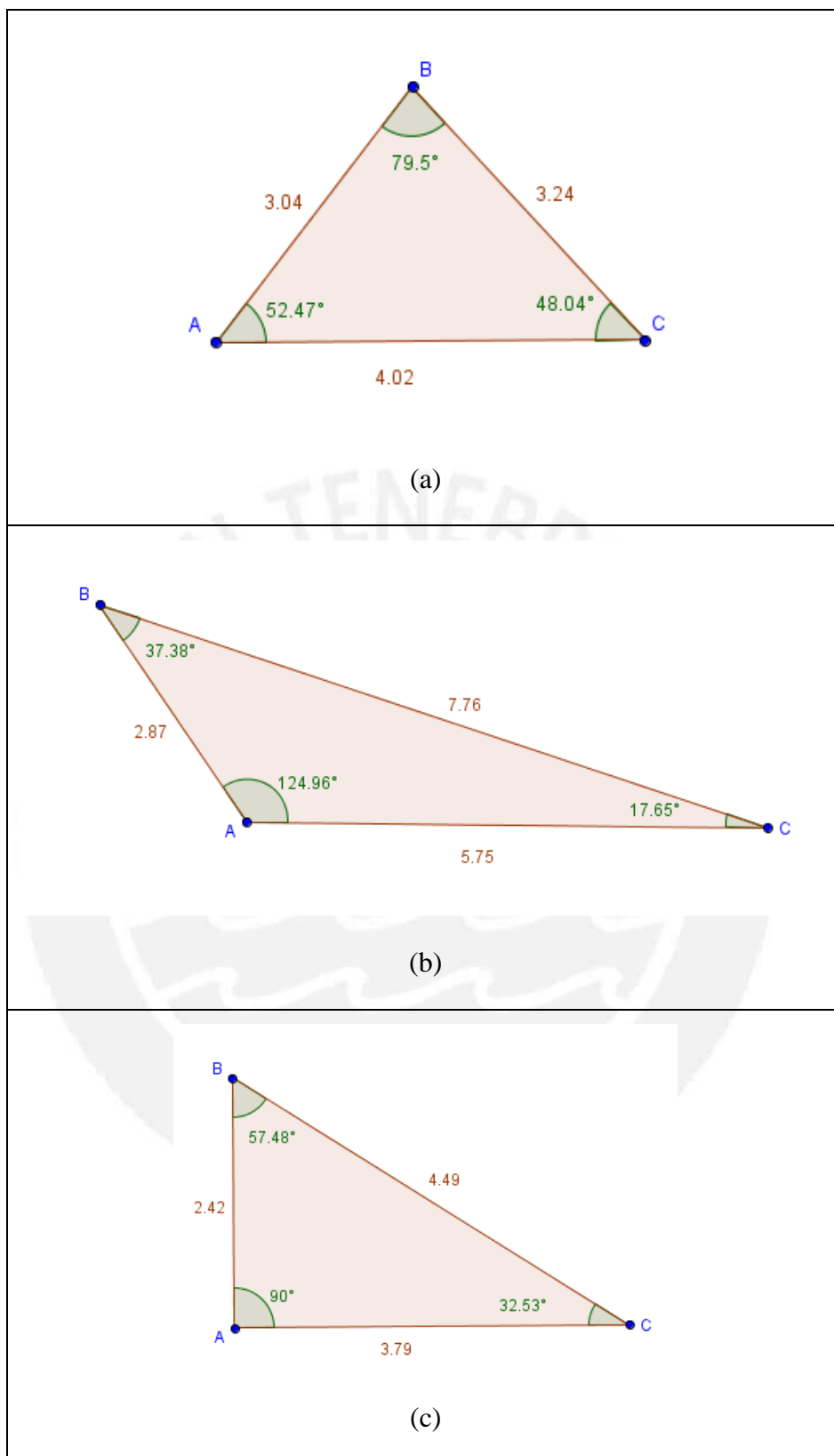


Figura 34. Respuesta de Diego en la actividad 1b

Además, identificó los diferentes tipos de triángulos que se forman según sus lados, tales como triángulos isósceles, escalenos y equiláteros.

En la Figura 35, Diego mencionó que se pueden formar diferentes tipos de triángulos; ya sea según sus lados o según sus ángulos.

b) Construya un triángulo ABC cualquiera. Mida sus lados y ángulos (sentido anti horario), arrastre cualquiera de los vértices del triángulo. Mencione los tipos de triángulos que se forman según sus lados o según sus ángulos.

Lados = $a = 25.37, b = 22.94, c = 22.5$

Ángulos = $\angle A = 67.88^\circ, \angle B = 56.89^\circ, \angle C = 55.23^\circ$

Se forman triángulos: acutángulos, obtusángulos, rectángulos, isósceles, escalenos y equiláteros. (Todos x)

Figura 35. Respuesta de Diego en la actividad 1b

Notamos que Diego tuvo nociones previas sobre los diferentes tipos de triángulos que se pueden formar según los lados o según los ángulos de un triángulo.

En el ítem 2 Diego utilizó la herramienta punto medio para dividir al segmento AB en dos partes iguales y con la herramienta recta perpendicular, trazó una recta perpendicular al segmento AB tal que pasó por su punto medio. Luego utilizó la herramienta segmento para construir los segmentos AE y BE (ver Figura 36).

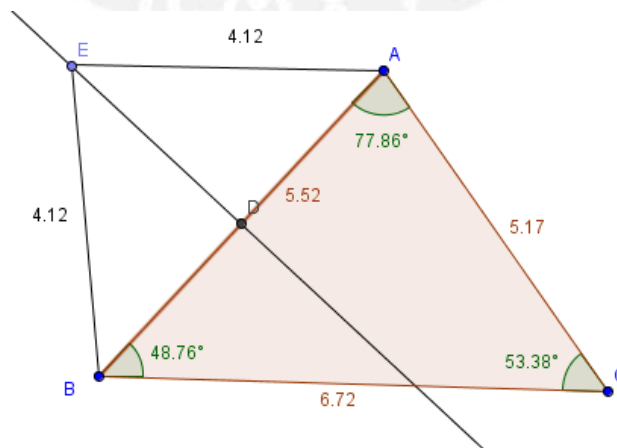


Figura 36. Respuesta de Diego en la actividad 2

Diego hizo clic derecho en el punto E y activó el rastro, logrando construir lo solicitado (ver Figura 37).

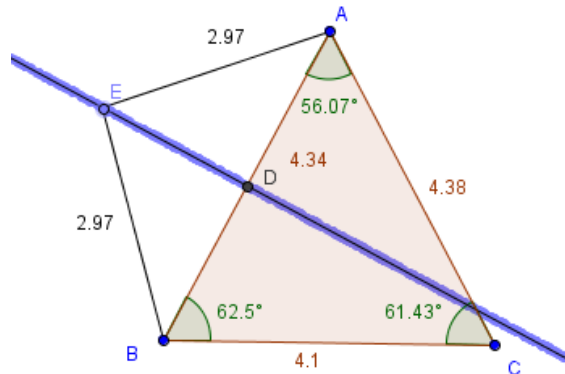


Figura 37. Respuesta de Diego en la actividad 2

En el ítem 2a, el estudiante Diego no logró identificar los triángulos isósceles que se forman al arrastrar el punto de la recta perpendicular, señaló lo siguiente: “muevo dicho punto a lo largo de la recta y aparece el rastro por donde ha pasado mi punto” (Figura 38). Esto sucedió porque Diego centró su atención en el rastro y no en los triángulos isósceles que se iban formando.

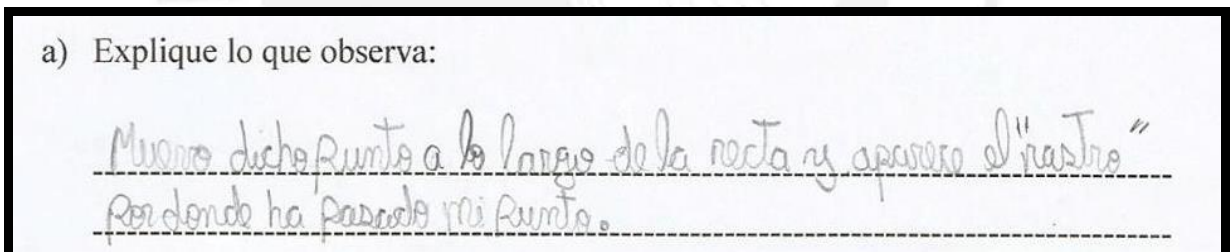


Figura 38. Respuesta de Diego en la actividad 2a

En la actividad 2b, Diego no logró identificar que dicha recta perpendicular que divide al segmento en su punto medio se denomina mediatriz, quizás porque es un objeto matemático que no ha sido estudiado últimamente por Diego. El estudiante señaló que se forma una altura; ya que se traza desde un punto hasta su lado opuesto, tal que al darse la intersección, se forme un ángulo de 90° (Figura 39).

b) ¿Cómo se denomina dicha recta perpendicular al segmento? Justifique

Se denomina altura; es la que se traza desde un punto hasta su lado opuesto, tal que al darse la intersección, se forme un ángulo de 90° .

$90^\circ = \text{ángulo recto}$

Figura 39. Respuesta de Diego en la actividad 2b

Acciones de Ana

En el ítem 1 (ver Figura 40) Ana exploró las herramientas del Geogebra tales como; punto, segmento, recta perpendicular, ángulo; utilizando sus esquemas preexistentes.

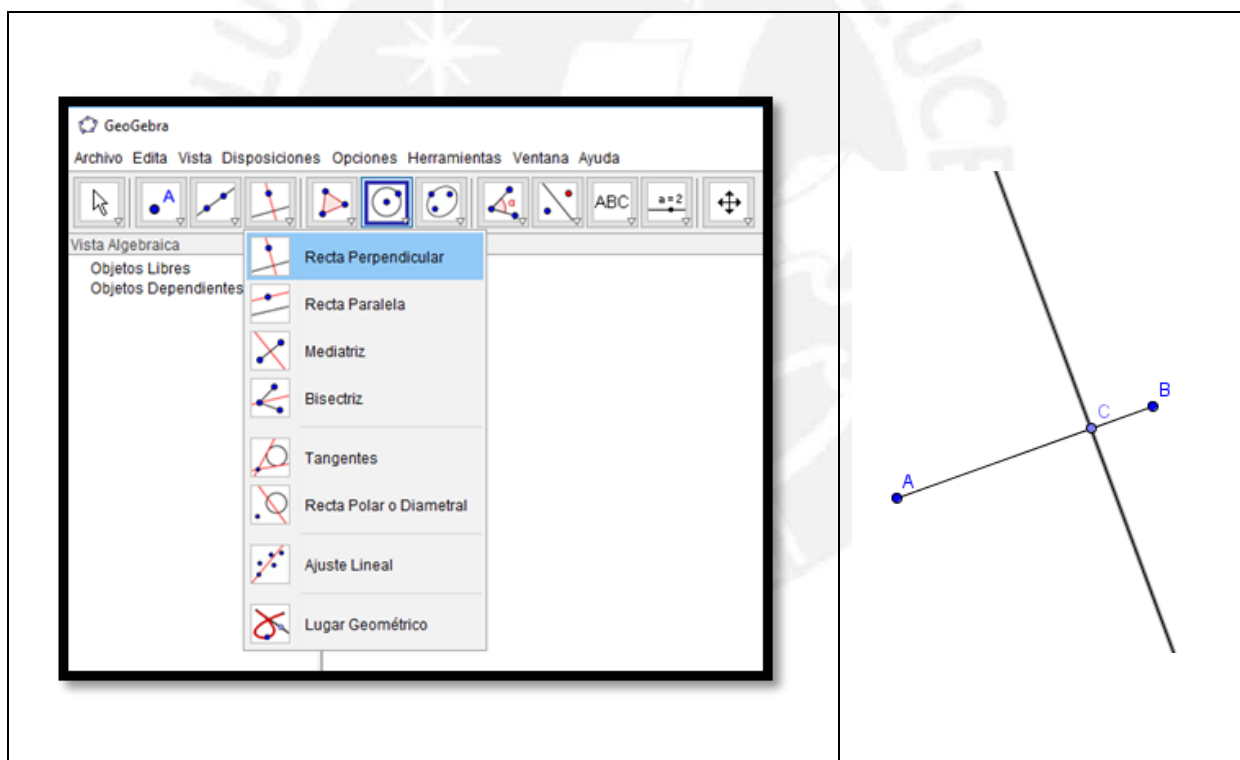


Figura 40. Exploración de la herramienta recta perpendicular

En el ítem 1a) Ana enumeró tres herramientas de la barra y explicó sus características. En la figura 41, notamos que Ana mencionó las herramientas circunferencia, intersección y recta paralela; y explicó con sus propias palabras, una característica de cada uno de estos elementos geométricos que representa la herramienta que encontró mientras exploraba el Geogebra.

Ana señala lo siguiente; *circunferencia (centro, radio): es una herramienta que dibuja una circunferencia con un radio incluido; intersección: es el punto de choque entre dos o más líneas; recta paralela: es una línea al costado la cual no llega a chocar.* Notamos que Ana señaló que la circunferencia posee un radio y un centro. Además, mencionó que la intersección es el punto en común de ambas rectas. Luego, no podemos asegurar que Ana tuvo clara la noción de recta paralela.




<p>a) Enumere por lo menos tres herramientas de la barra y explique qué características puede observar que tiene cada una de ellas:</p>	
<p>-Circunferencia (centro, radio): es una herramienta que dibuja una circunferencia con un radio incluido.</p>	
<p>-Intersección: es el punto de choque entre dos o más líneas</p> <p>-Recta paralela: es una línea al costado la cual no llega a chocar.</p>	

Figura 41. Respuesta de Ana en la actividad 1a

En la actividad 1b, la estudiante Ana realizó la construcción de la figura 42. Identificó rápidamente la herramienta polígono y construyó un triángulo, midió sus lados y ángulos con las herramientas distancia y ángulo correspondientemente. Hizo clic izquierdo y arrastró el vértice A.

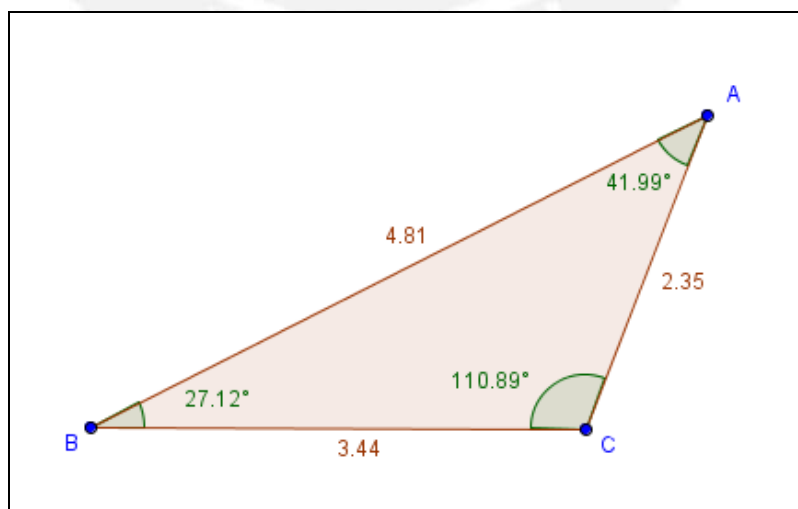


Figura 42. Respuesta de Ana en la actividad 1b

En la figura 43 notamos que Ana señaló que solo se forma un triángulo obtusángulo y escaleno. Pero no logró darse cuenta que se puede formar cualquier tipo de triángulo.

b) Construya un triángulo ABC cualquiera. Mida sus lados y ángulos (sentido anti horario), arrastre cualquiera de los vértices del triángulo. Mencione los tipos de triángulos que se forman según sus lados o según sus ángulos.

Lado a = 4.06 cm → Ángulo α = 50.83°
Lado b = 4.83 cm Ángulo β = 67.32°
Lado c = 4.62 cm Ángulo γ = 61.84°

- Se forma un triángulo obtusángulo y un triángulo escaleno.

Figura 43. Respuesta de Ana en la actividad 1b

En el ítem 2, la estudiante Ana utilizó las herramientas punto medio, recta perpendicular y segmento (ver Figura 44).

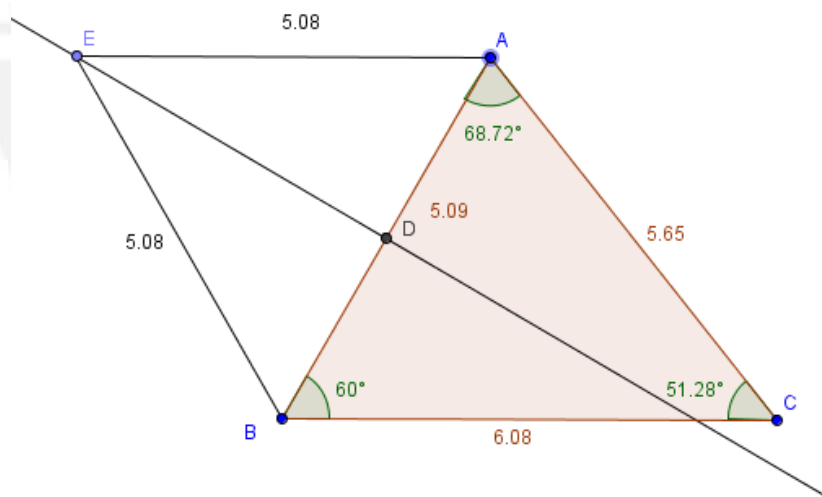


Figura 44. Respuesta de Ana en la actividad 2

Ana hizo clic derecho en el punto E, activó el rastro y logró construir lo solicitado (ver Figura 45).

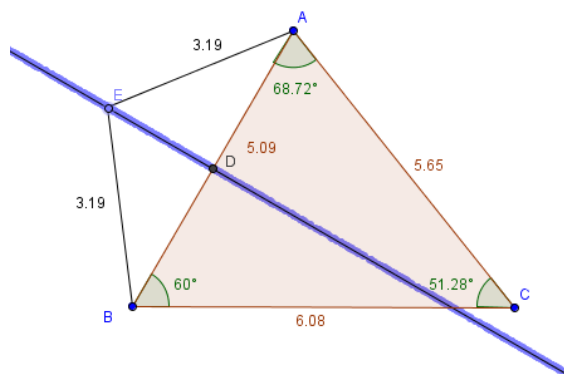


Figura 45. Respuesta de Ana en la actividad 2

En el ítem 2a, la estudiante Ana señaló lo siguiente: *se observa que los extremos unidos con el punto A y B cambia la longitud del lado y se queda un pequeño sombreado en lo que has realizado y arrastrado el punto E* (ver Figura 46).

a) Explique lo que observa:

Se observa que los extremos unidos con el punto A y B cambia la longitud del lado y se queda un pequeño sombreado en lo que has realizado y arrastrado el punto E.

Figura 46. Respuesta de Ana en la actividad 2a

La estudiante Ana identificó la mediatriz pero señaló que dicha recta divide al triángulo en dos partes iguales (ver Figura 47).

b) ¿Cómo se denomina dicha recta perpendicular al segmento? Justifique

Se llama mediatriz interior porque es un punto medio "E" y se encuentra en medio dividiendo en dos partes iguales el triángulo.

Figura 47. Respuesta de Ana en la actividad 2b

Comparación entre las acciones de Diego y Ana

Inicialmente, Diego y Ana se iban familiarizando con las herramientas del software a través de su exploración, ya que anteriormente no habían trabajado con el Geogebra. Ambos realizaron diferentes trazos.

En el ítem 1a) cabe señalar que ambos estudiantes exploraron diferentes herramientas y tenían nociones matemáticas sobre diferentes elementos geométricos con lo cual realizaron una breve descripción de las tres herramientas de la barra del Geogebra que mencionan en su ficha de actividades.

En el ítem 1b) los estudiantes construyen triángulos de diferentes tipos, utilizan las herramientas correspondientes y miden sus lados y ángulos. Arrastran el vértice A del triángulo y mencionan los tipos de triángulos que observan. Mientras que Diego identificó correctamente la formación de todos los tipos de triángulos, Ana solo señaló la formación de un triángulo obtusángulo y un triángulo escaleno.

En el ítem 2, Diego y Ana luego de manipular el Geogebra, lograron realizar de manera correcta la construcción solicitada.

En el ítem 2a), ninguno de los dos estudiantes lograron mencionar que se formaban triángulos isósceles.

En el ítem 2b), Diego no identificó la mediatriz ya que mencionó que se trata de la altura, mientras que Ana identificó la mediatriz pero señaló de manera incorrecta que dicha recta divide al triángulo en dos partes iguales. Debió mencionar que divide a un segmento en dos partes iguales y no al triángulo. Notamos que Ana no entendió la definición de mediatriz de manera correcta, quizás porque cuando activó el arrastre, en algún momento pensó que se formaban dos triángulos aparentemente iguales y creyó que esa era la característica de la mediatriz.

Intervención docente - investigadora

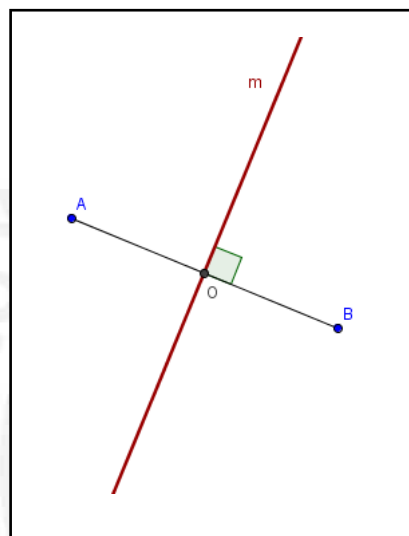
Luego de la actividad 0 explicamos la definición de algunos conceptos que escribieron los estudiantes en su ficha de trabajo. Realizamos la construcción de un triángulo cualquiera y a través del arrastre fuimos identificando los diferentes tipos de triángulos que se formaban ya que percibimos que no tenían claras estas nociones. Además hicimos la construcción del ítem 2 ya que percibimos que los estudiantes no habían logrado identificar los triángulos isósceles que se iban formando. A partir de ello, despejamos las dudas que habían presentado los

estudiantes en la actividad 0. Además, hicimos una formalización del saber matemático que está en juego. Es decir, una formalización de la mediatriz a partir de las conclusiones de los estudiantes al desarrollar la actividad 0. Después de tener interacciones con los estudiantes, formalizamos de la siguiente manera:

Definición:

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento trazada por su punto medio. Cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

Representación:



Donde: $OA = OB$

Actividad 1:

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de utilización (esquemas de uso/ esquemas de acción instrumentada) al intersectar las mediatrices de un triángulo cualquiera y ubicar su punto de intersección. A continuación, presentamos la ficha de trabajo correspondiente a la actividad 1.

Actividad 1: Intersección de las mediatrices

Nombres y apellidos:

NOTA: Use cualquier herramienta del Geogebra para realizar las siguientes construcciones. Luego de realizar cada construcción, grabe su archivo en el escritorio en la carpeta Geogebra.

1) Con la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos, construya una circunferencia por tres puntos. En seguida, construya el triángulo ABC. Explique su procedimiento de construcción:

2) Trace las mediatrices del triángulo. Explique su procedimiento de construcción:

3) Ubique el punto de intersección de las tres mediatrices (punto D). Ahora arrastre cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿Dónde cae el punto D? Explique.

4) ¿Cuál es la relación entre los segmentos AD, BD y CD, con la circunferencia?

Análisis a priori:

En el ítem 1 creemos que los estudiantes con la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos, construirán una circunferencia por tres puntos y en seguida, con la herramienta polígono construirán un triángulo ABC, tal como lo muestra la Figura 48.

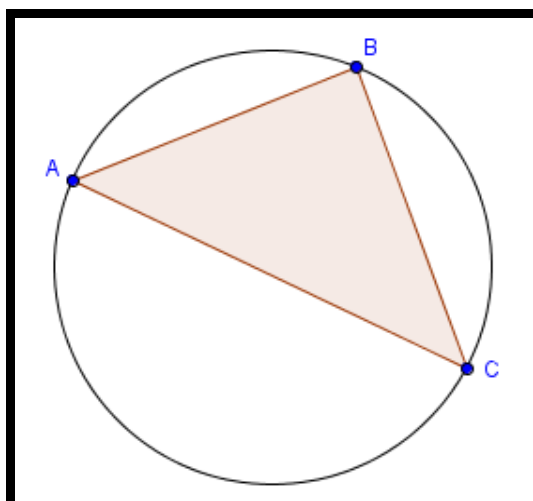


Figura 48. Circunferencia por tres puntos

Pensamos que señalarán que utilizaron dichas herramientas del Geogebra para realizar sus construcciones. Esperamos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: circunferencia, triángulo, punto.

En el ítem 2 suponemos que los estudiantes utilizarán la herramienta mediatriz para trazar las tres mediatrices del triángulo (ver Figura 49), señalando en su ficha de trabajo que utilizaron dicha herramienta.

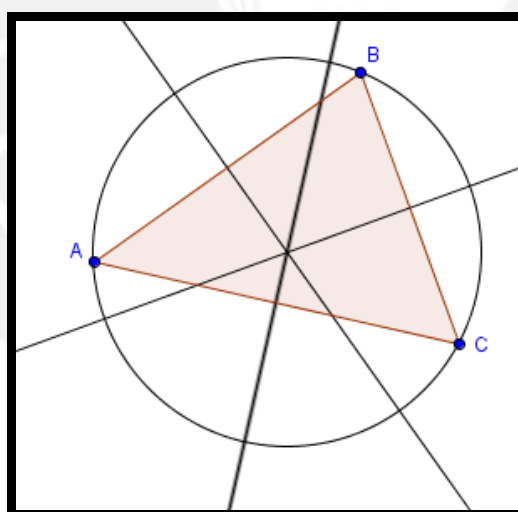


Figura 49. Mediatrices del triángulo ABC

Esperamos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: mediatriz de un segmento, triángulo.

Pensamos que los estudiantes utilizarán la herramienta intersección de dos objetos para ubicar el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo y arrastrarán el vértice A del triángulo ABC como mostramos en la Figura 50. Además, creemos que mencionarán que el punto de intersección de las mediatrices puede estar dentro, fuera o en el mismo triángulo.

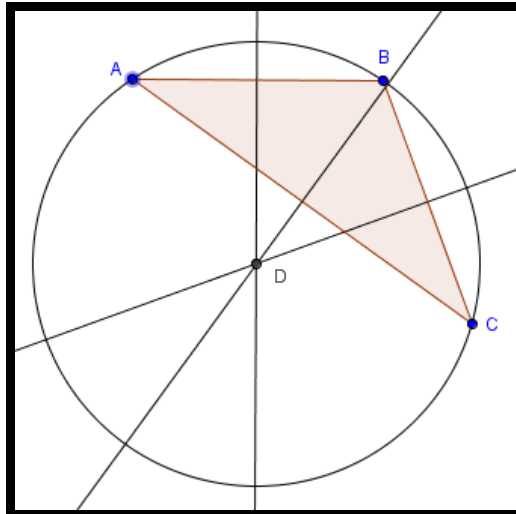


Figura 50. Punto de intersección de las mediatrices

Creemos, a priori, que movilicen sus esquemas de uso: punto de intersección, mediatriz, vértice, triángulo, punto.

En el ítem 4, posiblemente los estudiantes utilizarán la herramienta segmento entre dos puntos para crear los segmentos AD, BD y CD y los medirán utilizando la herramienta distancia. Pensamos que los estudiantes concluirán que los segmentos AD, BD y CD tienen la misma medida y corresponden al radio de la circunferencia con centro en el punto de intersección de las tres mediatrices, dándose cuenta que dicha circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo y el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo siempre coincide con el centro de la circunferencia circunscrita a éste (ver Figura 51).

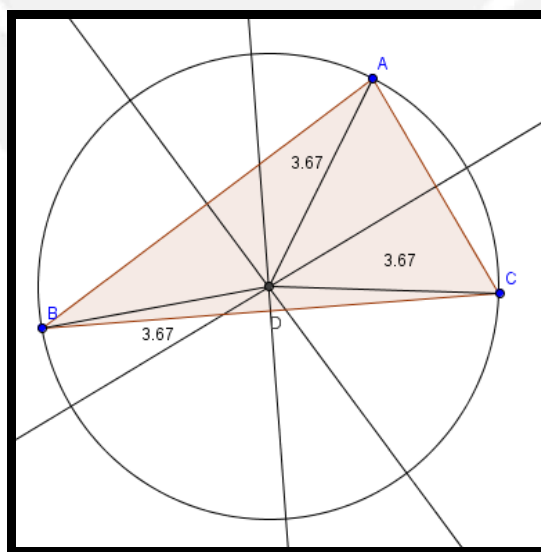


Figura 51. Circunferencia circunscrita al triángulo

A priori, un posible esquema de acción instrumentada podría ser la ubicación del punto de intersección de las tres mediatrices (circuncentro).

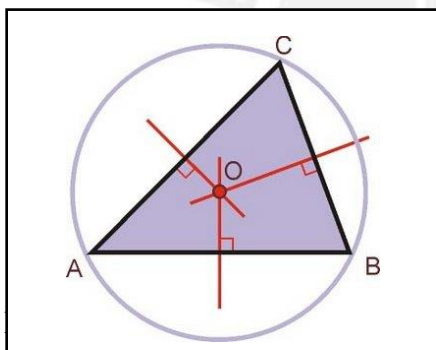
También esperamos que movilicen sus esquemas de uso: segmentos, circunferencia, distancia, radio, punto de intersección, mediatrices, vértices, centro de la circunferencia.

Luego de la actividad 1 haremos una formalización del saber matemático que está en juego. Es decir, haremos una formalización del circuncentro a partir de las conclusiones de los estudiantes al desarrollar la actividad 1. Después de tener interacciones con los estudiantes, formalizamos de la siguiente manera:

Definición:

El circuncentro de un triángulo es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados. Dicho punto equidista de los vértices del triángulo y, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Representación:



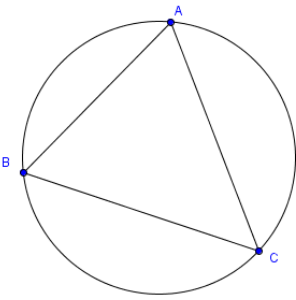
Donde:

El punto O es el circuncentro del triángulo ABC.

A continuación presentamos el análisis a posteriori de la actividad 1.

Análisis a posteriori del estudiante Diego

En el ítem 1, el estudiante Diego utilizó la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos. Luego construyó un triángulo ABC a partir de 3 segmentos (ver Figura 52). Utilizó esquemas de uso: circunferencia, segmento, triángulo y punto.



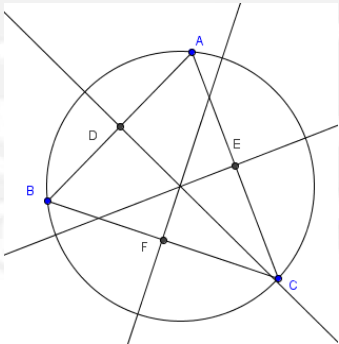
1) Con la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos, construya una circunferencia por tres puntos. En seguida, construya el triángulo ABC. Explique su procedimiento de construcción:

Selecciono la herramienta: Circunferencia por 3 puntos, luego trazo los segmentos uniendo así los puntos.

Figura 52. Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 1.

Utilizó de modo parcial los esquemas previstos en el análisis a priori, ya que también consideró el esquema de uso de segmento.

En el ítem 2, el estudiante utilizó las herramientas: punto medio y recta perpendicular para construir las mediatrices del triángulo (ver Figura 53).



2) Trace las mediatrices del triángulo. Explique su procedimiento de construcción:

Selecciono la opción punto medio y lo hallo en cada segmento, después uso la herramienta recta perpendicular y hallo la mediatriz.

Figura 53. Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 2

Sus acciones nos muestran que utilizó esquemas de utilización pre-existentes diferentes de los que habíamos previsto a priori. Suponíamos que utilizaría el esquema de uso de mediatriz de un segmento.

En el ítem 3, tal como lo previsto a priori, Diego ubicó el punto de intersección de las mediatrices y utilizó la función arrastre, para “mover” el vértice A del triángulo ABC. Luego, responde tal y como se muestra en la figura 54.

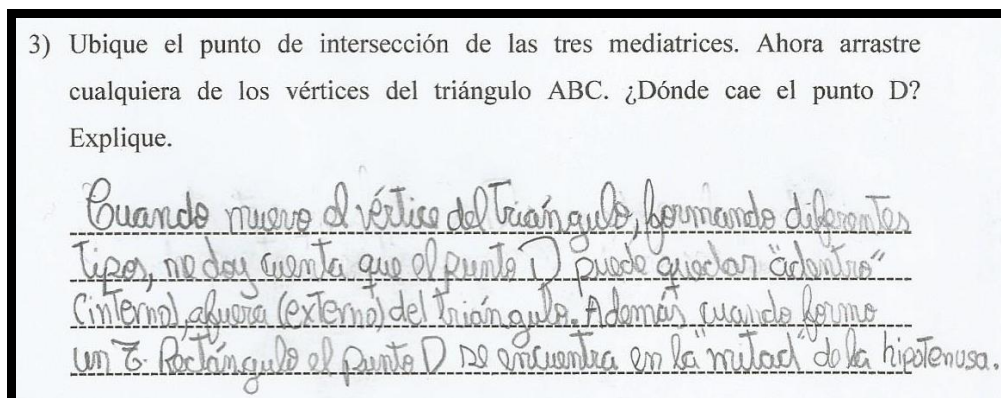


Figura 54. Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 3

Observamos en las acciones de Diego que movilizó sus esquemas de uso como: tipos de triángulos, punto de intersección, triángulo rectángulo. Además, pensamos que desarrolló un posible esquema de acción instrumentada, como lo habíamos previsto a priori, ya que percibió que el arrastre le permite generar diferentes tipos de triángulos y que el punto D (intersección de las tres mediatrices-*circuncentro*) puede estar en diferentes posiciones: dentro, fuera o en la hipotenusa del triángulo ABC.

En el ítem 4, Diego trazó y midió los segmentos AD, BD y CD. Además señaló que dichos segmentos son los radios de la circunferencia (ver Figura 55), tal como se había previsto en el análisis a priori. Las acciones de Diego muestran que movilizó sus esquemas de uso, al igual que en ítem anterior y además otro esquema: comparación de medidas.

4) ¿Cuál es la relación entre los segmentos AD, BD y CD, con la circunferencia?

La relación sería que los 3 son radios de la circunferencia, ya que nacen desde el punto central y acaban en un punto de la circunferencia.

Figura 55. Respuesta de Diego en la actividad 1. Ítem 4.

Pensamos que Diego desarrolló un esquema de acción instrumentada, que no habíamos previsto a priori, ya que al construir los segmentos AD, BD y CD y utilizar la función “arrastre” percibió que cualquiera sea el tipo de triángulo que se genere con esta acción, el centro de la circunferencia es siempre el punto de intersección de las tres mediatrices (circuncentro) del triángulo ABC.

Análisis a posteriori de la estudiante Ana

En el ítem 1 la estudiante Ana logra hacer la construcción solicitada, utiliza la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos para obtener la circunferencia, luego utiliza la herramienta polígono para construir el triángulo ABC. Moviliza esquemas de uso como circunferencia, puntos, triángulo (ver Figura 56).

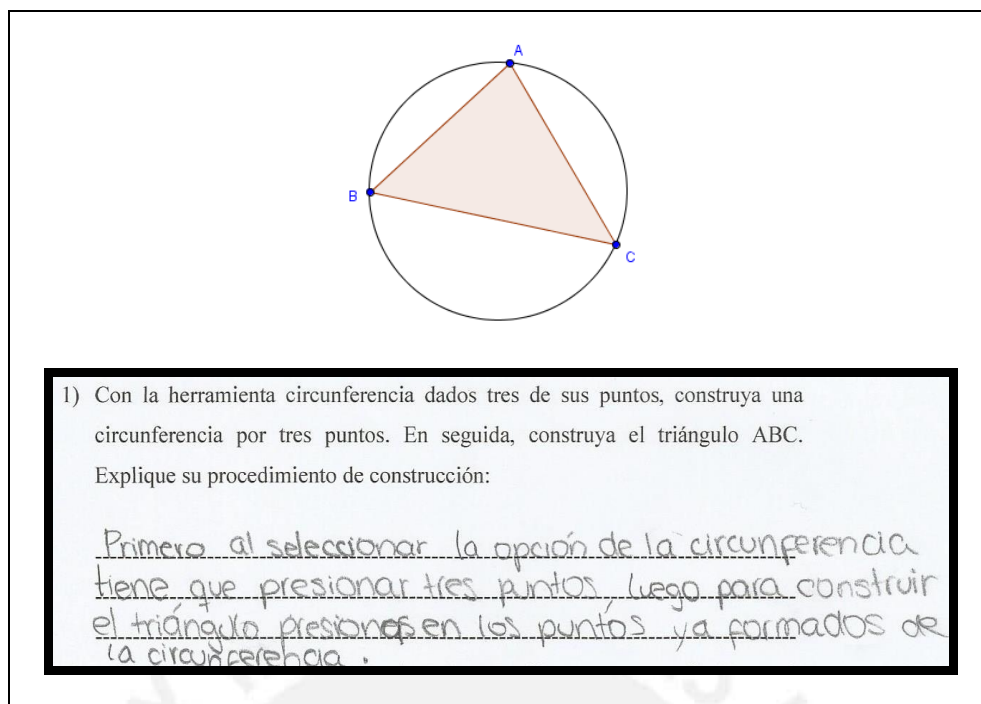


Figura 56. Respuesta de Ana en la actividad 1.1

La estudiante Ana movilizó los esquemas previstos en el análisis a priori.

En el ítem 2, Ana construye las mediatrices del triángulo de manera directa, es decir, utilizando la herramienta mediatriz. Movilizó sus esquemas de uso como triángulo y mediatriz, tal como lo previsto a priori (ver Figura 57).

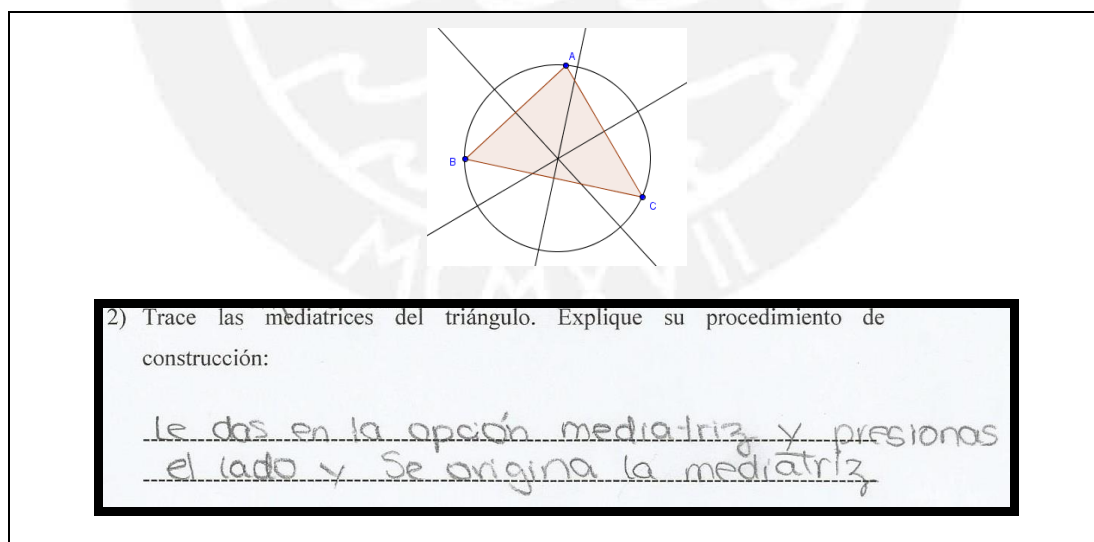


Figura 57. Respuesta de Ana en la actividad 1.2

En el ítem 3, Ana ubicó y mencionó donde cae el punto D con respecto al triángulo que se forma y utilizó la función arrastre, para “mover” el vértice A del triángulo ABC. Señala que cuando se forma un triángulo obtuso, el circuncentro cae fuera del triángulo, cuando el

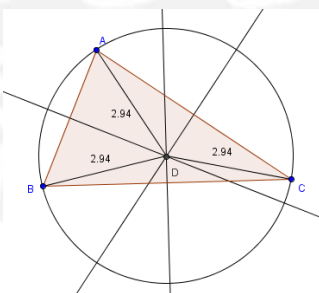
triángulo es acutángulo, el circuncentro cae dentro del triángulo y cuando es rectángulo, el circuncentro cae en la hipotenusa del triángulo (ver Figura 58). Notamos que Ana movilizó esquemas de uso como mediatriz, vértice, tipos de triángulos, punto, tal como fue previsto a priori. Además, pensamos que desarrolló un posible esquema de acción instrumentada, como lo habíamos previsto a priori, ya que percibió que el arrastre le permite generar diferentes tipos de triángulos y que el punto D (intersección de las tres mediatrices-circuncentro) puede estar en diferentes posiciones: dentro, fuera o en la hipotenusa del triángulo ABC.

3) Ubique el punto de intersección de las tres mediatrices. Ahora arrastre cualquiera de los vértices del triángulo ABC. ¿Dónde cae el punto D? Explique.

Al mover el punto D: Al formar un triángulo obtuso el punto D cae afuera del triángulo, al formar un triángulo acutángulo el punto D cae adentro del triángulo y al formar un triángulo recto el punto D cae en la hipotenusa del triángulo.

Figura 58. Respuesta de Ana en la actividad 1.3

En el ítem 4, Ana identifica que los segmentos miden igual. A partir de ello, la docente investigadora le vuelve a hacer la pregunta dada. La estudiante reflexiona y logra darse cuenta que son los radios de la circunferencia (ver Figura 59). Notamos que Ana movilizó sus esquemas de uso como segmento, circunferencia, distancia, radio, punto de intersección, mediatriz, vértice, centro de la circunferencia.



4) ¿Cuál es la relación entre los segmentos AD, BD y CD, con la circunferencia?

La relación es que los segmentos AD, BD y CD son y miden igual. Que son los radios de la circunferencia.

Figura 59. Respuesta de Ana en la actividad 1.4

Podemos darnos cuenta que en Ana se dio el proceso de instrumentación, ya que logró movilizar sus esquemas de utilización para resolver la ficha de actividades.

Comparación entre las acciones de Diego y Ana

Inicialmente, en el ítem 1 Diego y Ana utilizaron la herramienta circunferencia dados tres de sus puntos. Sin embargo, Ana encontró dicha herramienta de manera más rápida que Diego, el cuál intentaba realizar dicha construcción ubicando tres puntos y luego con la opción circunferencia trataba de hacer la construcción pedida. Luego de que la docente volvió a leer el ítem 1, Diego ubicó la herramienta correspondiente y realizó la construcción solicitada.

En el ítem 2 cabe señalar que ambos estudiantes realizaron la construcción pedida. Sin embargo, Ana ubicó las mediatrices del triángulo de manera directa a través de la herramienta mediatriz; mientras que Diego, utilizó las herramientas punto medio y recta perpendicular para hacer la construcción.

Inicialmente, en el ítem 3 ambos estudiantes mencionaron que al movilizar un vértice del triángulo, el punto de intersección de las tres mediatrices se ubicaba en las mediatrices. A partir de ello, la docente les pidió que arrastren un vértice del triángulo y observen donde se ubicaba el punto de intersección de las mediatrices con respecto al triángulo construido previamente. Ambos estudiantes lograron darse cuenta que dependiendo del tipo de triángulo formado, dicho punto de intersección podía caer dentro, fuera o en la hipotenusa del triángulo. Cabe señalar que adicionalmente a ello, Diego mencionó que cuando se trata de un triángulo rectángulo, dicho punto de intersección cae en la mitad de la hipotenusa.

En el ítem 4, ambos estudiantes identificaron que los segmentos que unen el punto de intersección de las mediatrices y los vértices de un triángulo tienen las mismas medidas. Diego identificó rápidamente que estos segmentos correspondían al radio de la circunferencia, mientras que Ana demoró mayor tiempo para darse cuenta de ello. Luego de que la docente le vuelva a hacer la pregunta a la estudiante Ana, ésta reflexionó y respondió que se trataba del radio de la circunferencia.

Notamos que durante el desarrollo de la actividad 1, Diego y Ana han movilizado diversos esquemas de uso. Por ello, en cada ítem hemos señalado la movilización de los esquemas de uso de cada estudiante.

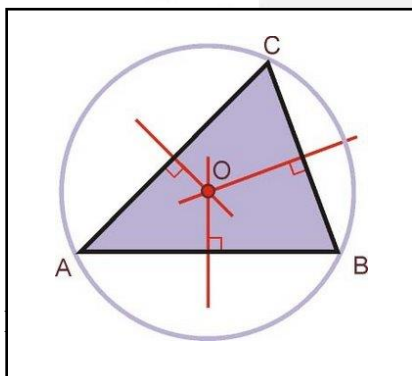
Intervención docente-investigadora

Luego de la actividad 1 aclaramos las dudas de los estudiantes. A través del arrastre de un vértice del triángulo ABC, fuimos mostrando a los estudiantes donde puede caer el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Luego, al medir los segmentos que unen el punto de intersección de las mediatrices y los vértices de un triángulo, los estudiantes notaron que éstos tienen las mismas medidas y que forman el radio de la circunferencia. A partir de ello, aclaramos las dudas que habían presentado los estudiantes en la actividad 1. Además, hicimos una formalización del saber matemático que está en juego. Es decir, hicimos una formalización del circuncentro a partir de las conclusiones de los estudiantes al desarrollar la actividad 1.

Definición:

El circuncentro de un triángulo es el punto donde se cortan las mediatrices de los lados. Dicho punto equidista de los vértices del triángulo y, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Representación:



Donde:

El punto O es el circuncentro del triángulo ABC.

Actividad 2:

El objetivo de esta actividad fue que los estudiantes movilicen sus esquemas de utilización para resolver un problema y lo relacionen con la noción de circuncentro. A continuación, presentamos la ficha de trabajo correspondiente a la actividad 2.

Actividad 2: Asentamientos humanos padecen por falta de agua

Nombres y apellidos:

NOTA: Use cualquier herramienta del Geogebra para realizar las siguientes construcciones. Luego de realizar cada construcción, grabe su archivo en el escritorio en la carpeta Geogebra.



Los pobladores de los asentamientos humanos María Goretti, Víctor Raúl y Chiclayito del distrito de Castilla, en la provincia de Piura, sufren por la restricción del servicio de agua, el cual solo llega por algunas horas. Por este motivo, los vecinos hicieron una huelga exigiendo una pronta solución. Ante esta problemática, el gobierno regional ha decidido construir una cisterna repartidora de agua en el distrito de Castilla de tal manera que quede aproximadamente a la misma distancia de los 3 asentamientos humanos.

Abra el archivo actividad_3.ggb y en base a la información dada responda la siguiente pregunta:

¿Dónde se deberá construir dicha cisterna? Explique detalladamente.

Análisis a priori:

Pensamos que los estudiantes utilizarán la herramienta polígono para construir un triángulo que tenga en cada vértice uno de los asentamientos humanos. Luego, creemos que utilizarán la herramienta mediatriz para ubicar dicha línea notable en cada uno de los tres lados del triángulo. Por último, pensamos que los estudiantes ubicarán el punto de intersección de las tres mediatrices con la herramienta intersección de dos objetos. Finalmente, asumimos que mencionarán que dicho punto de intersección es el lugar indicado para construir la cisterna repartidora de agua en el distrito de Castilla de tal manera que quede aproximadamente a la misma distancia de los 3 asentamientos humanos, ya que es un punto que equidista de los tres lugares.

Creemos que los estudiantes estarán instrumentalizados, ya que consiguen resolver un problema. En esta actividad pensamos que el artefacto circuncentro se transformará a instrumento, es decir; acontecerá el proceso de génesis instrumental, ya que los estudiantes serán capaces de resolver un problema que moviliza la noción de circuncentro. Pensamos que movilizarán sus esquemas de uso como triángulo, mediatriz y punto de intersección para poder realizar los trazos correspondientes y ubicar el circuncentro.

La Figura 60 muestra una posible solución de la actividad.

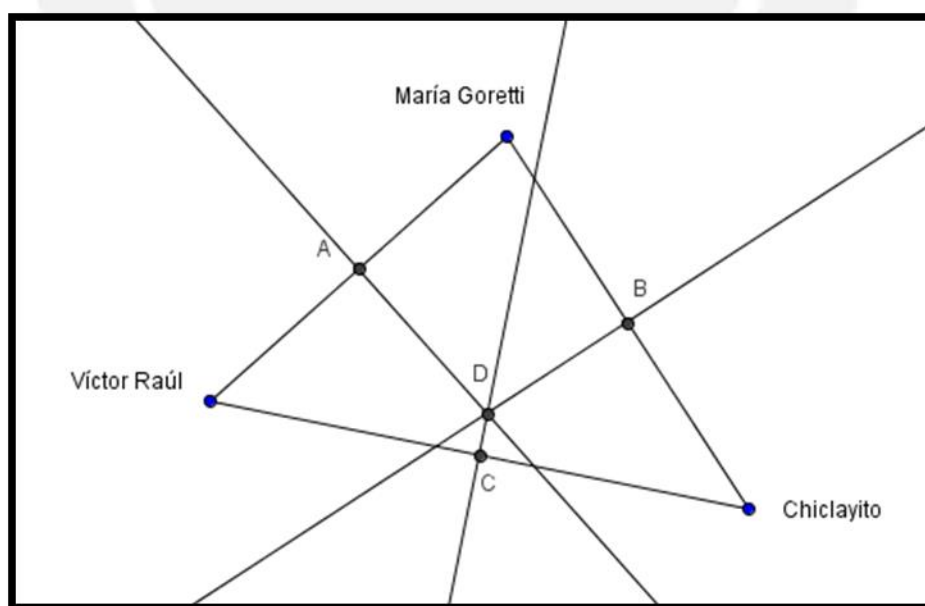


Figura 60. Desarrollo de la actividad

Análisis a posteriori del estudiante Diego

El estudiante Diego abrió el archivo actividad_3.ggb, realizó la construcción pedida tal y como lo muestra la figura 61.

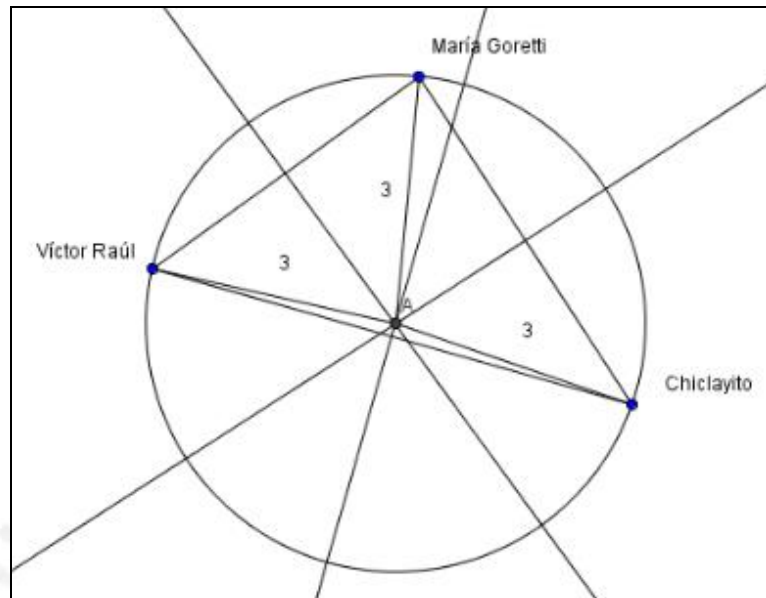


Figura 61. Respuesta de Diego en la actividad 2

Luego de realizar la construcción en el Geogebra, Diego respondió a la pregunta planteada tal y como lo muestra la figura 62.

Abra el archivo actividad_3.ggb y en base a la información dada responda la siguiente pregunta:

¿Dónde se deberá construir dicha cisterna? Explique detalladamente.

Para calcularlo, debemos hacer los sigtes. pasos:

1. Trazo una circunferencia basada en las 3 ciudades (puntos).
2. Con la herramienta "Polígono" grafico mi triángulo.
3. Aplico la herramienta mediatriz en cada uno de los lados, además le pongo un punto a la intersección de las 3 (circuncentro).
4. Trazo segmentos desde las ciudades hasta el circuncentro.
5. Hallo la longitud de cada segmento (es igual) y lo verifico.

Dicho circuncentro es el punto donde debe ir la cisterna para repartir el agua a las 3 ciudades.

Figura 62. Respuesta de Diego en la actividad 2

Notamos que Diego movilizó esquemas de uso tales como circunferencia, polígono, mediatriz, intersección, segmento, circuncentro, longitud. Respondiendo finalmente que el circuncentro es el punto donde debe ir la cisterna para repartir el agua a las tres ciudades.

Podemos afirmar que en Diego se dio la génesis instrumental de manera local, ya que fue capaz de resolver un problema que moviliza la noción de circuncentro y se encuentra instrumentalizado, es decir, le asignó propiedades al circuncentro, tales como que el circuncentro equidista de los vértices de un triángulo. Además, el circuncentro es el punto de intersección de las tres mediatrices y a su vez es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

Análisis a posteriori de la estudiante Ana

La estudiante Ana abrió el archivo actividad_3.ggb. Para realizar la construcción, primero ubicó una circunferencia que pase por los tres asentamientos humanos y terminó la construcción tal como lo previsto a priori. Ver figura 63.

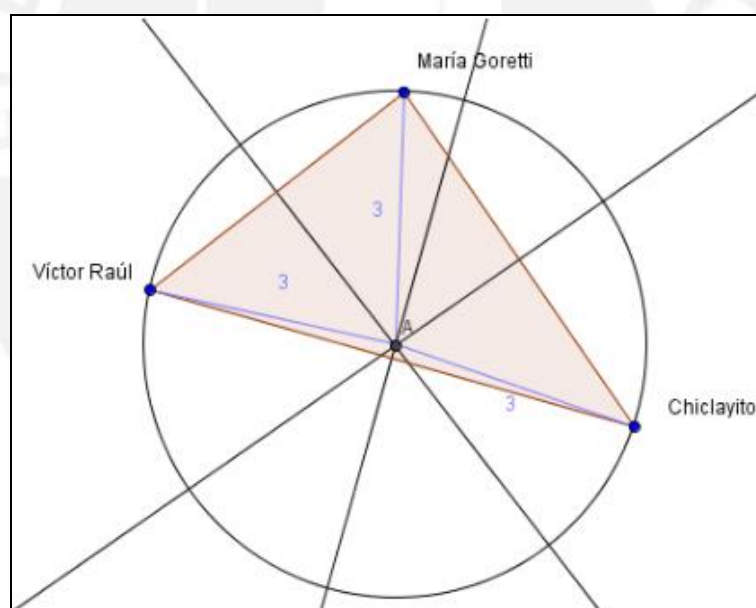


Figura 63. Respuesta de Ana en la actividad 2

Luego de realizar la construcción en el Geogebra, Ana respondió a la pregunta planteada tal y como lo muestra la figura 64.

¿Dónde se deberá construir dicha cisterna? Explique detalladamente.

Primero realicé una circunferencia de los 3 puntos, luego construí un triángulo de los puntos puntos. Después hallé la mediatriz de cada lado del triángulo. Para poder hallar su intersección y esa intersección es el punto A, para verificar si esa era la respuesta, tuve que medir desde los tres puntos (lugares) dados para verificar si tienen igual medida. Como respuesta obtuve que las tres medidas midían 3 cm.

Rpta.: Dicha cisterna se debe construir en la intersección de las mediatrices de los 3 puntos (lugares). O también llamado circuncentro.

Figura 64. Respuesta de Ana en la actividad 2

Notamos que Ana movilizó esquemas de uso tales como circunferencia, triángulo, mediatriz, intersección, punto, distancia. Respondió finalmente que la cisterna se debe construir en la intersección de las mediatrices de los tres lugares, o también llamado circuncentro. Notamos que Ana señala un único punto en donde se debe realizar la construcción de la cisterna.

Podemos afirmar que en Ana se dió la génesis instrumental de manera local, ya que fue capaz de resolver un problema que moviliza la noción de circuncentro y se encuentra instrumentalizada, es decir, le asignó propiedades al circuncentro. Tales como que el circuncentro equidista de los vértices de un triángulo. Además, el circuncentro es el punto de intersección de las tres mediatrices y a su vez es el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestra investigación nos permitió analizar cómo ocurre el proceso de Génesis Instrumental del circuncentro. Los estudiantes exploraron el software Geogebra y realizaron construcciones geométricas relacionadas con nuestro objeto matemático, el circuncentro. Durante el desarrollo de las actividades hemos podido identificar diferentes esquemas de uso y de acción instrumentada por parte de los estudiantes analizados. Notamos que en el desarrollo de algunos ítems de las actividades se procedió de manera diferente a la prevista a priori.

Luego de realizar la actividad 0, notamos que el objetivo de esta actividad se alcanzó debido a que se consiguió que los estudiantes exploren las herramientas del Geogebra, tales como nuevo punto, segmento entre dos puntos, polígono, recta perpendicular, distancia o longitud, ángulo, punto medio, intersección de dos objetos y mediatriz.

Después de realizar el análisis a posteriori de las actividades 1 y 2, notamos que los objetivos de estas actividades fueron alcanzados. El objetivo de la actividad 1 fue que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de utilización (esquemas de uso/ esquemas de acción instrumentada) al intersectar las mediatrices de un triángulo cualquiera y ubicar su punto de intersección; el cuál fue alcanzado. Por otro lado, el objetivo de la actividad 2 también se logró debido a que los estudiantes movilizaron sus esquemas de utilización para resolver un problema y lo relacionaron con la noción de circuncentro.

El objetivo general de nuestra investigación: *Analizar cómo ocurre el proceso de Génesis Instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que se utiliza el Geogebra*, se logró concretar por medio de las actividades de la experimentación.

Para el desarrollo de nuestra investigación, consideramos el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Para lograr nuestro objetivo general hemos tenido en consideración tres objetivos específicos:

- *Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de uso.*

En el desarrollo de la actividad 1 y de la actividad 2 hemos podido identificar diferentes esquemas de uso de los estudiantes Ana y Diego. Es decir, identificamos acciones relativas a las tareas secundarias de cada actividad como circunferencia, segmento, triángulo, punto, mediatriz.

- *Identificar en las acciones de los estudiantes, los posibles esquemas de acción instrumentada.*

En el desarrollo de la actividad 1 y de la actividad 2 hemos podido identificar diferentes esquemas de acción instrumentada de los estudiantes Ana y Diego. Es decir, identificamos acciones relativas a las tareas principales de cada actividad como que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo siempre es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo (circuncentro) y que el circuncentro puede estar dentro, fuera o en el contorno del triángulo.

- *Distincuir el surgimiento y enriquecimiento de la noción del circuncentro, cuando los estudiantes desarrollan un problema de la secuencia de actividades con el uso del Geogebra.*

En el desarrollo de la actividad 2, identificamos diferentes esquemas de uso y de acción instrumentada de los estudiantes Ana y Diego.

Además, el desarrollo de la actividad 2 nos permitió darnos cuenta que ambos se instrumentalizaron con la noción de circuncentro debido a que los dos estudiantes fueron capaces de relacionar la noción de circuncentro con el desarrollo de un problema que moviliza la noción de circuncentro.

Realizamos el análisis de las actividades de la experimentación considerando los procesos de instrumentación e instrumentalización de Rabardel (1995). Además, realizamos la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de las actividades considerando la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Ante lo expuesto, los tres objetivos específicos de nuestra investigación se lograron concretar por medio de las actividades de la experimentación.

El logro de nuestros tres objetivos específicos nos permitió alcanzar el objetivo general de nuestra investigación, respondiendo a la pregunta de nuestra investigación:

¿Cómo ocurre el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que utilizan el Geogebra?

De esta manera, la investigación analiza el proceso de génesis instrumental del circuncentro en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en una secuencia de actividades en la que utilizan el Geogebra.

Cabe señalar que nuestro estudio es un aporte para futuros trabajos, los cuáles podrían considerar:

- Elaborar secuencias en las que utilizando el software Geogebra se pueda identificar la génesis instrumental de otros objetos matemáticos.
- Generar problemas que ayuden a los estudiantes a desarrollar sus esquemas de utilización para que ellos puedan aprender nociones matemáticas.
- Realizar estudios de la recta de Euler en el marco del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y utilizando el software de Geometría dinámica como el Geogebra.



REFERENCIAS

- Álvarez E. (2003). *Elementos de geometría*. Medellín: Editorial Universidad de Medellín.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2002). *Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental*. París, Francia.
- Barrera, O., Barahona, F. y Vaca, B. (2015). *Geogebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil*. En: congreso internacional de educación y tecnología desde una visión transformadora, 1-11.
- Chumpitaz, L. (2013). *La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4514>
- Corredor, L. (2011). *Geometría dinámica y lugares geométricos*. En: Fundación universitaria Konrad Lorenz.
- Cotic, N. (2014). *Geogebra como puente para aprender matemática*. En: Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación, 1-9.
- Darío, H. (2015). *Determinación de los puntos notables de un triángulo en términos de sus lados*. Medellín, Colombia.
- De Faria, E. (2006). *Ingeniería didáctica*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 1 (2). Recuperado de www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria
- De La Cruz, M. (1974). *Introducción a la geometría moderna 4*. Lima: Editorial Arica S.A.
- Gamboa, M; Fernández, H; Borrego, A; Carmenate, O. (2005). *Pizarra, papel y computadora*. En: V Congreso Internacional Virtual de Educación, 1-21.
- García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediado por el Geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación Secundaria*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5651>
- Gómez, C. (2014). *Buscando el hotel más cercano*. En: Coloquio Internacional de enseñanza de las matemáticas, 580-588.

- González, P. (2007). *La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática*. Barcelona, España.
- Hegedus, S. (2005). *Dynamic representations: a new perspective on instrumental genesis*. Department of Mathematics, University of Massachusetts Dartmouth.
- Hernández, R; Fernández, C; Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: grupo editorial Mc Graw Hill.
- Lagrange, J; Artigue, M; Laborde, C; Trouche, L. (2005) *Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation*. En: Memorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5652>
- León, M. (2012). *Comprendiendo la existencia de un triángulo usando geogebra como recurso didáctico*. En: Coloquio Internacional de enseñanza de las matemáticas, 249-257.
- Morales, Y. y Poveda, R. (2007). *Uso del geometra para la Enseñanza de la Geometría*. En: Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, 1-6.
- Mota, D. y Valles, R. (2015). *Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria*. En: Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal.
- Norma (2009). *Lógicamente 3*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C.
- Perú, Ministerio de Educación (2005). *Unidad de Medición de la Calidad de los Aprendizajes*. Recuperado de: http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación (2015). *Unidad de Medición de la Calidad de los Aprendizajes*. Recuperado de: <http://umc.minedu.gob.pe/evaluacion-censal-de-estudiantes-ece-2015/>
- Perú, Ministerio de Educación (2010). *Orientaciones para el trabajo pedagógico*. Lima. Recuperado de <http://www2.minedu.gob.pe/minedu/03-bibliografia-para-ebr/10-otpmatematica2010.pdf>

- Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas del aprendizaje*. Lima. Recuperado de <http://recursos.perueduca.pe/rutas/documentos/Secundaria/Matematica-VII.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2015). *Resolución Ministerial N° 199-2015*. Lima. Recuperado de <http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf>
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>
- Romero, R. (1959). *Geometría plana 4*. Lima: Editorial Universo S.A.
- Salazar, J.V.F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil).
- Salazar, J.V.F. (2015). *Génesis instrumental: el caso de la función cuadrática*. Revista iberoamericana de educación matemática UNIÓN, (41), 57-67.
- San Marcos (2013). *Intelectum evolución 3*. Lima: Ediciones Lexicom.
- Santacruz, M. (2009). *La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental*. Encuentro colombiano de matemática educativa, 1-6.
- Sarabia, E. (2011). *Puntos, rectas y circunferencias notables en el triángulo*. Guadalajara, México.
- Semenov, A. (2005). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza*. Moscú, Rusia.
- Trouche, L. (2002). *Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.
- Vega, F. (1985). *Geometría plana 4*. Callao, Perú.
- Verástegui, T. (2012). *Geometría básica*. Lima, Perú.
- Vergnaud G. (1996). *La teoría de los campos conceptuales*. En: Recherches en Didactique des Mathématiques.