PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado

ESTUDIO DEL MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN LAS FICHAS DEL CICLO VII DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Raúl Villafuerte Olazabal

Asesor:

Cintya Sherley Gonzales Hernández

Lima, 2025

Informe de Similitud

Yo, Cintya Sherley Gonzales Hernández, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis titulada Estudio del modelo praxeológico dominante de las funciones cuadráticas en las fichas del ciclo VII de Educación Secundaria, del autor Raúl Villafuerte, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 1%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el 02/07/2025.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

Lima, 07 de julio de 2025.

<table>
<tr><td colspan="2">Apellidos y nombres de la asesora:
Gonzales Hernández Cintya Sherley</td></tr>
<tr><td>DNI: 42741882</td><td rowspan="2">Firma:
</td></tr>
<tr><td>ORCID: 0000-0003-2130-1710</td></tr>
</table>

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo caracterizar el modelo dominante de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII de la Educación Secundaria. El estudio se orienta a responder la siguiente pregunta: ¿Cuál es la organización matemática de la función cuadrática en dichas fichas? Para ello, se adopta un enfoque cualitativo de tipo bibliográfico, sustentado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), empleando conceptos como praxeologías, generadores de tareas, variables didácticas y alcance de las técnicas. Metodológicamente, se sigue el modelo propuesto por Chaachoua (2014). La revisión de investigaciones relacionadas a nuestro objeto de estudio, documentos oficiales, como el el Currículo Nacional de la Educación Básica y las fichas de matemática del ciclo VII, permite la construcción de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR). A partir de este análisis, se identifican siete tipos de tareas, catorce tareas específicas, dieciséis técnicas y diversos discursos tecnológicos que muestran la praxeología matemática en estudio.

Entre las tareas identificadas, predomina aquellas orientadas a obtener la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de contextos extramatemáticos, mediante la identificación de variables y la relación directa entre ellas. Se destacan dos técnicas representativas para dicho propósito: una basada en la modelación del área de un rectángulo como función cuadrática, y otra que permite hallar la expresión general a partir de tres pares ordenados. Estas técnicas resultan fundamentales para establecer la regla de correspondencia de la función. Por otro lado, las técnicas vinculadas al vértice $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$ son las más empleadas en tareas que implican determinar el valor máximo o mínimo de la función, lo que evidencia su presencia tanto en el alcance institucional como en el pragmático. Finalmente, el análisis de la estructura y relación entre tareas, a partir del MPR, permite establecer una secuencia lógica y funcional entre ellas, reconociendo cómo ciertas tareas forman parte de técnicas utilizadas en otras, lo que contribuye a una caracterización más precisa del sistema de tareas propuesto.

Palabras clave: Función cuadrática, praxeología matemática, alcance de la técnica, TAD.

Abstract

This research aims to characterize the dominant model of the quadratic function in the mathematics texbooks of Cycle VII in Secondary Education. The study seeks to answer the following question: What is the mathematical organization of the quadratic function in these textbooks? To address this, a qualitative, bibliographic approach is adopted, grounded in the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), employing key concepts such as praxeologies, task generators, didactic variables, and the scope of techniques. Methodologically, the model proposed by Chaachoua (2014) is followed. The review of relevant research, along with official documents—such as the National Curriculum for Basic Education and the Cycle VII mathematics worksheets—supports the construction of a Reference Praxeological Model (RPM). Through this analysis, seven types of tasks, fourteen specific tasks, sixteen techniques, and various technological discourses are identified, which together reveal the mathematical praxeology under study.

Among the identified tasks, those aimed at obtaining the algebraic expression of the quadratic function from extra-mathematical contexts predominate. These involve identifying variables and establishing a direct relationship between them. Two representative techniques stand out for this purpose: one based on modeling the area of a rectangle as a quadratic function, and another that derives the general expression from three ordered pairs. These techniques are fundamental in determining the function's rule of correspondence. Additionally, the vertex-related techniques $\tau_{vertex\text{-}1}$ and $\tau_{vertex\text{-}2}$ are the most frequently used in tasks that require identifying the maximum or minimum value of the function, indicating their relevance both institutionally and pragmatically. Finally, the analysis of the structure and interrelation of tasks, based on the RPM, allows for the establishment of a logical and functional sequence among them, revealing how certain tasks are embedded within techniques employed by others, thereby contributing to a more precise characterization of the proposed task system.

Keywords: quadratic function, mathematical praxeology, scope of the technique, TAD.

DEDICATORIA

Escriba aquí su dedicatoria

Gracias a Dios por darme fortaleza y constancia.

A mi esposa e hija, por todo su apoyo y aliento constante.

Agradecimientos

A mi asesora Mg. Cintya Sherley Gonzales Hernández por su paciencia y apoyo en la elaboración de la tesis.

A la Dra. Maritza Luna por sus valiosas y relevantes contribuciones durante el desarrollo del proyecto.

Al Dr. Francisco Ugarte por su retroalimentación detallada y exhaustivas sugerencias.

A mis padres, Abdón y Sara, por su apoyo incondicional en superar las dificultades de la vida.

A mi familia, por ser la fuente de mi inspiración y mi fuerza para seguir creciendo como persona cada día.

Índice

Capítulo I: El problema de investigación 16

1.1 Investigaciones de referencia. 16

1.2 Justificación. 42

Capítulo II: Marco Teórico y Metodológico 48

2.1 La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) 48

2.2 Praxeologías 48

2.3 Elementos de la praxeología matemática. 48

2.4 Clases de praxeología. 54

2.5 Objetos ostensivos y no ostensivos 55

2.6 Modelo epistemológico de referencia (MER) 56

2.7 Modelo praxeológico de referencia (MPR) 56

2.8 Metodología 57

Capítulo III: Estudio de la función cuadrática 61

3.1 Aspecto histórico epistemológico 61

3.1.1 La noción de la función cuadrática 61

3.1.2 Concepto y propiedades de la función cuadrática 64

3.1.3 Cambio de tamaño vertical u horizontal de la gráfica de la función cuadrática 67

3.2 La función cuadrática en los programas curriculares. 70

3.2.1 La función cuadrática en el DCN 2005. 71

3.2.2 La función cuadrática en el DCN 2009 72

3.2.3 La función cuadrática en las rutas de aprendizaje 73

3.2.4 La función cuadrática en los mapas de progreso del aprendizaje. 76

3.2.5 La función cuadrática en el DCN 2016 78

Capítulo IV: Estudios preliminares de la función cuadrática 81

4.1 Estudio de organizaciones matemáticas propuestas 81

4.1.1 Organización matemática de Santos (2017) 81

4.1.2 Organización matemática de Ibarra et al. (2011). 83
4.1.3 Modelo praxeológico de referencia de la función cuadrática. 84
4.2 Variación de segundo orden 102
4.3 Técnicas y su alcance teórico y pragmático 108
4.4 Análisis de las praxeologías enseñadas 116
Capítulo V: Análisis de la praxeología de las fichas de trabajo 132
5.1 Descripción de los cuadernos de trabajo 132
5.2 Análisis de los cuadernos de trabajo 133
5.2.1 Ficha de matemática 4° de secundaria 134
5.2.2 Ficha de matemática 5° de secundaria 158
5.2.3 Cuaderno de trabajo de matemática 3° de secundaria 179
5.2.4 Cuaderno de trabajo de matemática 4° de secundaria 197
5.2.5 Cuaderno de trabajo de matemática 5° de secundaria 203
5.3 Estructura y relación entre las tareas. 209
5.3.1 Ficha de matemática de cuarto de secundaria 2024. 210
5.3.2 Ficha de matemática de quinto de secundaria 2024. 212
5.3.3 Cuaderno de trabajo de matemática de tercero de secundaria 2020. 214
5.3.4 Cuaderno de trabajo de matemática de cuarto de secundaria 2020. 215
5.3.5 Cuaderno de trabajo de matemática de quinto de secundaria 2020. 217
Propuesta de organización de tareas para tercero de secundaria. 218
Propuesta de organización de tareas para cuarto de secundaria. 221
Propuesta de organización de tareas para quinto de secundaria. 222
Propuesta de Jolivet et al., (2021). 223
Conclusiones 238
Referencias 240

Lista de tablas

Tabla 1. Investigaciones relacionadas a la Teoría Antropológico de lo Didáctico. 28
Tabla 2. Investigaciones relacionadas a la dificultad del estudiante sobre las funciones cuadráticas. 30
Tabla 3. Investigaciones relacionadas sobre el análisis de los libros de texto. 40
Tabla 4. Desempeño de la función cuadrática. 42
Tabla 5. Generador de tipo de tarea sobre la forma general de la función cuadrática. 52
Tabla 6. Representación y característica de la función cuadrática 64
Tabla 7. Logros de aprendizaje y la componente relacionada a la función cuadrática 72
Tabla 8. Capacidades y conocimientos relacionados con la función cuadrática 73
Tabla 9. Competencia, capacidades e indicadores de desempeño relacionado a la función cuadrática 74
Tabla 10. Situación problemática relacionado con la función cuadrática 76
Tabla 11. Descripción del Mapa de Cambio y Relaciones, así como su desempeño. 76
Tabla 12. Desempeños por grado de la función cuadrática 79
Tabla 13. Categorías de análisis 81
Tabla 14. Tabla de tareas de función cuadrática 83
Tabla 15.GT1: [Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1] 85
Tabla 16.GT2: [Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1] 86
Tabla 17.GT3: [Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1] 87
Tabla 18. Generador de tareas: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática 88
Tabla 19.GT5: [Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V_3; V_4] 90
Tabla 20.GT6: [Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (f(x)= ax^2+bx+c), V_3; V_4] 92
Tabla 21.GT7: [Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V_3; V_4] 98
Tabla 22. Praxeologías puntuales de la función cuadrática 108
Tabla 23. Relación de los subtipos de tareas y sus alcances tanto institucionales como pragmáticos. 130
Tabla 24. Ubicación de la función cuadrática en sus respectivas fichas 132
Tabla 25. Cantidad de ejercicios sobre función cuadrática en libro de matemática de secundaria 133

Tabla 26.Síntesis del análisis praxeológico ficha de trabajo 4° de secundaria 2024 157
Tabla 27.Síntesis del análisis praxeológico ficha de trabajo 5° de secundaria 2024 177
Tabla 28.Síntesis del análisis praxeológico cuaderno de trabajo 3° de secundaria 2020 .. 194
Tabla 29.Síntesis del análisis praxeológico del cuaderno de trabajo 4° de secundaria 2020 202
Tabla 30.Síntesis del análisis praxeológico cuaderno de trabajo 5° de secundaria 2020 .. 206
Tabla 31. Relación entre las tareas 211
Tabla 32. Relación entre las tareas 213
Tabla 33. Relación entre las tareas 215
Tabla 34. Relación entre las tareas 217
Tabla 35. Relación entre las tareas 218

Lista de figuras

Figura 1 Problema asociado a determinar la expresión algebraica de la función cuadrática. 49
Figura 2Técnica para representación algebraica de la función cuadrática. 50
Figura 3 Proposición 5 62
Figura 4 Duplicación de un cubo 63
Figura 5 Demostración de Galileo 63
Figura 6 Gráfica de la forma normal de una función cuadrática 65
Figura 7 Valor máximo y mínimo de una función cuadrática. 66
Figura 8 Traslación vertical de una función cuadrática 66
Figura 9 Traslación horizontal de una función cuadrática 67
Figura 10 Cambio de tamaño de la función cuadrática 68
Figura 11 Elementos de una función cuadrática 69
Figura 12 Representación y elementos de la función cuadrática 70
Figura 13 Evolución del currículo. 71
Figura 14 Marco agrandado sobre covarianza. 103
Figura 15 Esquema entre F y h_{mi} generan la familia de funciones $y=m_i x$ como un objeto único. 103
Figura 16 Esquema del MER de la función cuadrática. 107
Figura 17 Situación significativa A 116
Figura 18Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,4}$ 117
Figura 19 Situación significativa B 118
Figura 20Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,7}$ 119
Figura 21 Situación significativa C 120
Figura 22Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,7}$ 120
Figura 23 Situación A: cercamos un terreno 121
Figura 24Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{5,4}$ 121
Figura 25 Situación B: programador de videojuego 122
Figura 26Técnica institucional del subtipo de tarea $t_{2,1}$ 123
Figura 27 Situación C: Área de un terreno 123
Figura 28Técnica institucional del subtipo de tare $t_{6,4}$ 124
Figura 29 Situación B: Beneficios de una empresa 125
Figura 30Técnica institucional del subtipo de tarea $t_{6,7}$ 126
Figura 31 Situación A: Modelamos el salto de una rana 126
Figura 32Técnica institucional de los subtipos de tarea. $t_{5,6}$; $t_{6,6}$ y $t_{2,1}$. 128

Figura 33 Situación C: trayectoria del lanzamiento de un balón 129
Figura 34Técnica institucional del subtipo de tarea. $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$ 129
Figura 35 Entradas al teatro 134
Figura 36 Resolución de problema. 136
Figura 37 Situación A: Cercamos un terreno 138
Figura 38 Situación B: programador de videojuego 141
Figura 39 Situación C: Área de un terreno 143
Figura 40 Problema 1 146
Figura 41 Problema 2 147
Figura 42 Problema 3 149
Figura 43 Problema 4 150
Figura 44 Problema 5 151
Figura 45 Problema 6 152
Figura 46 Problema 7 154
Figura 47 Problema 8 155
Figura 48 Construimos canales de máximo volumen 159
Figura 49 Situación A: Modelamos el salto de una rana 162
Figura 50 Situación B: Beneficios en una empresa 164
Figura 51 Situación C: Trayectoria del lanzamiento de un balón 166
Figura 52 Problema 1 167
Figura 53 Problema 2 y 3 169
Figura 54 Problema 4 170
Figura 55 Problema 5 171
Figura 56 Problema 6 173
Figura 57 Problema 7 174
Figura 58 Problema 8 175
Figura 59 El recorrido de una esfera 179
Figura 60 Situación significativa A 180
Figura 61 Situación significativa B 182
Figura 62 Situación significativa C 183
Figura 63 Problema 1 184
Figura 64 Problema 2 185
Figura 65*Problema 3* 186
Figura 66 Problema 4 187
Figura 67 Problema 5 188
Figura 68 Problema 6 189
Figura 69 Problema 7 190

Figura 70 Problema 8 192
Figura 71 Problema 9 193
Figura 72 Problema 10 194
Figura 73 Problema 1 197
Figura 74 Problema 2 198
Figura 75 Problema 4 199
Figura 76 Problema 7 200
Figura 77 Problema 9 201
Figura 78 Problema 5 203
Figura 79 Problema 6 204
Figura 80 Problema 9 205
Figura 81 Ejemplo de la tarea $t_{5,\ 2}$ Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática 219
Figura 82 Describir y reconocer la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que se movía el punto A. 222

Introducción

La función cuadrática ha estado presente a lo largo de las diferentes versiones de la Currículo Nacional. En particular, en la versión del 2016 ha adquirido una gran notoriedad al ser abordada en los grados de tercero, cuarto y quinto de nivel secundaria (cuyas edades están comprendidas entre 14 y 17 años), correspondientes al ciclo VII de la Educación Básica Regular. Este objeto de estudio se convierte en una herramienta fundamental para que el estudiante pueda entender y comprender el mundo que lo rodea a través de su modelación algebraica y representación gráfica. En la misma línea, diversos investigadores (Díaz et al., 2013, Gyedu, et al. 2020, Henao & Vanegas,2012) enfatizan que el concepto de función cuadrática es fundamental porque es utilizado por diversos campos matemáticos en la modelización de fenómenos y situaciones problemáticas. Por otro lado, este objeto de estudio requiere que el estudiante tenga idea de razonamiento covariacional y tasa de cambio; la cuales permiten en el estudiante que pueda transitar entre la función lineal y grados superiores (Belín et al., 2024 y Ozaltun & Bukova,2017)

Este estudio se contextualiza en el campo epistemológico, ya que se centra en el conocimiento matemático de la función cuadrática y en cómo este se encuentra representada en las fichas y cuadernos de matemática; asimismo, estos recursos son necesarios para los estudiantes y docentes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Varios autores (Meza, 2023, Perovano et al., 2022, Fan et al., 2013 y Bittar, 2021) destacan que estos materiales son esenciales al ser trasmisores del currículo en el aula y desempeñar un rol clave como facilitadores del aprendizaje.

Por otro lado, desde mi experiencia como docente, he observado algunas deficiencias de los estudiantes en resolver tareas relacionados a la función cuadrática, así como la falta de comprensión de este objeto matemático. Esta detección es respaldada por diversas investigaciones como Isfan et al., (2019), Fatahillah et al. (2020) y Mutambara et al., (2019) quienes manifiestan que entre los principales desafíos de los estudiantes radica en la dificultad de modelizar situaciones problemáticas a su representación algebraica en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$"; así como la falta interpretación de los parámetros a, b y c; cuya comprensión es fundamental para la generación de su representación gráfica.

A partir de lo expuesto anteriormente, se realiza la investigación de la función cuadrática en base a los marcos conceptuales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y los generadores de tareas. Permitiendo analizar los componentes praxeológicos matemáticos presentes en las fichas trabajo que son distribuidos a las instituciones educativas a nivel nacional. En este contexto, se formula la siguiente pregunta de investigación ¿Cuál es la organización matemática de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII en el nivel secundaria?

La estructura de la tesis está conformada por cinco capítulos, mediante las cuales se fundamenta el desarrollo de la investigación.

En el primer capítulo, se presenta investigaciones de la función cuadrática desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dificultad del estudiante, estudios relacionados con el análisis de libros de texto y la problemática de investigación, incluyendo las preguntas y objetivos de nuestro estudio.

En el segundo capítulo, se detalla los elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que son relevantes para nuestra investigación. Tales elementos son: praxeología, elementos de la praxeología, generados de tarea y variable didáctica, alcance de la técnica, clases de praxeología; así como la definición del modelo ´praxeológico de referencia que es fundamental para nuestro estudio. Y, por último, la metodología que guía nuestro trabajo para el logro de los objetivos de investigación.

El tercer capítulo, se detalla el estudio de la función cuadrática desde la perspectiva histórica y epistémica, abarcando la evolución del concepto largo de la historia desde la perspectiva matemática, pasando por ecuaciones, cónicas, cinemática y funciones. Además, se examinó la influencia y se confirmó su mayor alcance de este objeto matemático en los programas curriculares del 2005, 2009 y 2016.

En el cuarto capítulo, presentamos investigaciones relacionadas a las organizaciones matemáticas de nuestro objeto de estudio, así, como la construcción de un “Modelo Praxeológico de Referencia (MPR)” asociado a la función cuadrática. Este MPR se elaboró con el apoyo de investigaciones vinculadas a la TAD y al análisis de las fichas de matemática del ciclo VII del nivel secundario.

En el quinto capítulo, se lleva a cabo el análisis de las fichas de matemática del ciclo VII, donde se detallan los elementos praxeológicos con la función cuadrática con el apoyo del marco teórico de la TAD. Asimismo, se realiza un análisis de la estructura y relación entre las tareas descritas en las fichas de trabajo con el apoyo del MPR propuesto en nuestro estudio.

Por último, a partir de nuestra investigación se incluye una nueva propuesta para la organización de tareas para cada grado del ciclo VII. Asimismo, se presenta los resultados y conclusiones de nuestro estudio.

Capítulo I: El problema de investigación

En este capítulo, se aborda la problemática de la investigación mediante el análisis de artículos científicos que constituyen los antecedentes que permiten sustentar la importancia de nuestra investigación. Entre los trabajos revisados, se presentan investigaciones que abordan la función cuadrática desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Asimismo, se consideran estudios de los aspectos cognitivos de los estudiantes sobre la dificultad en la comprensión de nuestro objeto matemático. Finalmente, se examina artículos relacionados sobre la importancia del análisis de los libros de texto como recursos didácticos y su rol fundamental en la planificación del aprendizaje

1.1 Investigaciones de referencia.

A partir de nuestra investigación, se propone analizar la praxeología matemática de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII del nivel secundaria. Por tal motivo, se revisaron una serie de estudios publicados entre 2010 y 2023 que están en concordancia con el objetivo de estudio. Para ello, se utilizaron palabras claves como praxeología, TAD, Organización matemática, educación secundaria, función cuadrática y modelo praxeológico de referencia, lo que permitieron ubicar nuestras fuentes bibliográficas en las plataformas de Google académico, SciELO, SpringerLink, Dialnet, ProQuest, repositorios universitarios, entre otras.

Asimismo, es preciso mencionar que el análisis de libros de textos permitió entender y comprender la organización matemática de un conocimiento matemático que imparte las instituciones. Por esta razón, se utiliza aspectos de la TAD como la estructura del libro, el análisis ecológico, ostensivos y el análisis praxeológico. Estos elementos permiten discutir entre la teoría y el estudio de los libros de texto, orientando así a la construcción modelo de análisis adecuado (Bittar, 2017).

Por otro lado, es necesario precisar que nuestro objeto matemático de estudio tiene como finalidad realizar una reconstrucción de un modelo praxeológico de referencia, en el que debe estar incluida la organización matemática de la función cuadrática, elaborada a partir de los aportes de la Teoría Antropológica de lo didáctico. Según García (2005), la organización matemática se vuelve más articulada y compleja en relación a otra organización matemática anterior.

Investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio y marco TAD

Hurtado y Zúñiga (2011) realizaron una investigación que tiene como propósito analizar las praxeologías matemática de la función cuadrática en dos textos escolares Delta y Espiral de noveno grado. Utiliza como marco teórico la Teoría Antropológica de lo

Didáctico (TAD). La metodología aplicada a dicho estudio es cualitativa donde se desarrolló la rejilla de análisis. Esto permitió realizar el estudio de los textos escolares. Para la elaboración de la rejilla, se tomó los siguientes elementos: primero, están los criterios para determinar las Praxeologías Matemáticas tanto puntuales como locales; segundo, el documento Análisis de texto escolar que permite seleccionar el libro de texto a evaluar; y tercero, el Currículo Nacional de Colombia, donde abordaron el concepto de función cuadrática.

Para el análisis de las praxeologías en los textos escolares, se aplicaron los siguientes criterios: clasificación de las tareas en relación a los componentes del currículo (conocimientos básicos, procesos generales y contexto), definición la técnica que especifica la manera en que cada tarea debe realizarse, y la tecnología que justifica a la técnica mediante teoremas, axiomas y definiciones. Posteriormente, se analizó el nivel de integración de las praxeologías para verificar el grado de completitud de la Organización Matemática Local.

Las investigadoras llegan a las siguientes conclusiones: primero, en cuanto al concepto de la función cuadrática, manifiestan que su relación con las propiedades y elementos de la representación gráfica de la parábola, la OM del texto Delta 9 se establece un alto grado de completitud, mientras en el texto Espiral 9 el grado de completitud es baja; segundo, en cuanto a la función cuadrática expresada en su representación algebraica factorizada, ambos libros presentan un bajo grado de completitud de las OM con respecto a su solución con ecuación cuadrática; tercero, sobre la función cuadrática por el método de completar cuadrados donde se tiene que analizar la discriminante, ambos textos tienen un alto grado de completitud de su OM; cuarto, por la solución de la fórmula cuadrática y de allí la obtención de la expresión de obtener el vértice, ambos libros tienen un alto grado de completitud de su OM; finalmente, en cuanto al máximo y mínimo de la función cuadrática, el texto espiral 9 tiene mayor grado de completitud del texto Delta 9 en su OM.

Otro estudio es el de Carrillo (2013) quien realizó una investigación que tiene como objetivo describir y analizar la praxeología matemática de la función cuadrática en los libros de texto que se utilizan en la Facultad de Economía. Se apoya de la teoría antropológica de lo didáctico como el marco teórico, lo que le permitió la elaboración de una organización matemática de referencia (OMR) y con ello definió los elementos de la praxeología (tareas, técnicas y tecnologías) en relación a la función cuadrática. Utiliza el método cualitativo de tipo bibliográfico para su estudio.

La autora, en su investigación, analizó otras investigaciones que tengan relación con la ecología de la función cuadrática. Para ello, toma como referencia las dificultades de los estudiantes y cómo se aborda su organización matemática. Seguidamente, ella elabora una Organización Matemática de Referencia (OMR) con el apoyo de investigaciones anteriores que tratan sobre las praxeologías asociadas a la función cuadrática, donde solo se analizan los tipos de tareas y las técnicas. En la T1 que se encarga de determinar el dominio y el rango de la función cuadrática expresado algebraicamente presenta las siguientes técnicas: el dominio de $f(x)$ consiste todos los números reales; la imagen de f está expresado por el intervalo [k;+∞[cuando la concavidad abre hacia arriba; y] $-\infty$; k] cuando la concavidad abre hacia abajo; finalmente, está el método de completar cuadrados para hallar la imagen.

En la T2, se encarga de hallar los ceros cuando se expresa algebraicamente la función cuadrática. En esta se presenta las siguientes técnicas: la aplicación de la factorización para obtener las raíces o el uso de la fórmula Bhaskara. Con respecto a la T3, se encarga de calcular la intersección de los ejes en el plano cartesiano dado una expresión algebraica de una función cuadrática. Para ello, se utilizan las técnicas de T2 y cuando x=0 en la expresión algebraica se obtiene la intersección con el eje Y. En la T4, identifica si la representación gráfica es cóncava o convexa en una expresión algebraica de la función cuadrática. La técnica utilizada es analizar el coeficiente de la variable cuadrática. Sobre la T5, consiste en realizar la gráfica; para esto, se le presenta una expresión algebraica de la función cuadrática. La técnica utilizada es la siguiente: identifica el vértice, y analiza el coeficiente de la variable cuadrática y la intersección con el eje X e Y. Con respecto al T6, analiza la expresión algebraica de la función cuadrática cuando los coeficientes están expresados como parámetros. Se encarga de reemplazar los valores de a, b y c en la expresión algebraica de la función. La T7 determina la expresión algebraica de la función que utiliza como punto de partida su respectivo gráfico. La técnica correspondiente es graficar e identificar los puntos de corte generado entre la parábola y los ejes coordenados.

En la T8 , consiste en hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática cuando se le brinda su expresión algebraica. Las técnicas utilizadas son completar cuadrados, identificar el vértice y reconocer el intervalo de recorrido de la función.

Finalmente, está la T9 que representa la función cuadrática de fenómenos del mundo real. Las técnicas utilizadas son identificar el problema y relacionarlas con la función cuadrática. Además, traduce los datos del problema expresado en un lenguaje verbal a un lenguaje matemático y utiliza los diferentes métodos de solución de la función para usarlos en la resolución del problema.

Por otra parte, Carrillo (2013) define los criterios para elaborar la descripción y el análisis de la praxeología del objeto matemático de estudio en los libros de texto. Para ello, ella toma en cuenta las dificultades que enfrenta los estudiantes. Después, realiza la descripción y el análisis de las praxeologías matemáticas de la función cuadrática en los dos libros de matemática. Para esto, considera los criterios dados anteriormente. Finalmente, examina y presenta recomendaciones para la reorganización de una organización didáctica en la presentación de los libros estudiados.

La investigadora realiza las siguientes conclusiones. Con respecto al primer libro, hay presencia de técnicas para siete tipos de tarea y se evidencia justificaciones adecuadas para cuatro de diez tipos de tareas. Además, señala que la Organización Matemática local está más o menos completa. Sobre el segundo libro, se presenta ocho tipos de tareas que evidencia al menos una técnica y en tres tipos de tareas. Estas presentan una justificación y señala también que la Organización Matemática local está más o menos completa.

Por otro lado, presenta como sugerencia una organización didáctica en donde debe considerarse las tareas que permitan la conexión entre las representaciones gráficas y analíticas, lo que favorece en la comprensión de la definición de función cuadrática. También, considera el tipo de tareas que evidencie la relación de un lenguaje verbal a un lenguaje algebraico.

Otra investigación relevante es la de Gonzales (2014) quien realizó un estudio sobre la organización matemática de escala y proporción en un texto universitario. Su investigación está basada en el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Tuvo como objetivo describir y analizar la praxeología matemática del objeto matemático estudiado en un libro que utilizan los estudiantes del primer ciclo de la carrera de Arquitectura.

La autora en su estudio desarrolla una metodología cualitativa con un enfoque documental. Para ello, se centra en la recopilación de investigaciones relacionadas al objeto matemático orientado a identificar los tipos de tarea y las técnicas que permiten su resolución. Luego, clasifica las investigaciones recolectadas de acuerdo al objeto matemático, a la teoría y a la metodología. Posteriormente, define tres criterios que le permiten realizar el análisis de la Organización Matemática (OM). El primero se centra en las actividades resueltas y el nivel de modelización del objeto matemático presente el texto de enseñanza. La segunda trata sobre los tipos de tareas presente en el texto y el tercero explica sobre las diferentes clases de tareas que se abordan del objeto matemático. Finalmente, describe y analiza el texto.

Entre sus conclusiones, la autora señala que, para la mejora de la organización didáctica de un libro, es necesario identificar nuevas tareas y técnicas; para esto, se necesita del análisis de una organización matemática, pues permitirá encontrar o definir la tarea y la técnica. Con respecto a la metodología para el análisis de texto, los criterios fueron adecuados y basados en el análisis de la TAD, lo que le permitió alcanzar los objetivos señalados.

Los trabajos de investigación mencionados en párrafos anteriores serán los cimientos para el presente estudio que se pretende realizar. Esto se debe a que el análisis de la función cuadrática es relevante cuando se aborda desde el enfoque de la Teoría Antropológico de lo Didáctico.

Quentasi (2015) analiza la praxeología matemática en un libro escolar de primero de secundaria, y aborda como objetos matemáticos de estudio la función lineal y la proporcionalidad. El objetivo de la investigación consistió en analizar la organización matemática de función y proporcionalidad en un libro de texto oficial y, con base a ello, establecer si existe la articulación entre estos objetos matemáticos. La investigación se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico; además, empleó una metodología cualitativa y es de tipo bibliográfico. Asimismo, utiliza componentes de la OM para la organización de la investigación, y usa los indicadores de completitud OM local y los niveles de algebrización para el respectivo análisis.

Los resultados del estudio son los siguientes: se encontró 17 tipos de tareas, 42 tareas, 38 técnicas, 18 tecnologías y 2 teorías. Asimismo, el autor menciona que las técnicas presentes en el texto solo pueden aplicarse a 13 tareas de un total de 42 y se identifica 4 tareas y 9 ejemplos con solución. Por tal motivo, la OM del libro de texto no es conveniente para el grado estudiado. Además, el grado de completitud de la OM respecto a las tareas del libro de texto es menos completa, porque no se constata en forma precisa los indicadores de completitud. El autor sugiere realizar nuevas investigaciones en el análisis de textos de secundaria con la finalidad de estudiar el nivel de algebrización del segundo y tercer nivel.

Otra investigación importante es la de Chaves (2016) que tuvo como propósito analizar los diversos tipos de tareas (situaciones problemáticas) relacionadas con el vértice de la función cuadrática en los libros de matemática del primer año de bachillerato. Utilizó la noción de organización praxeológica correspondiente a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); además, la metodología aplicada en dicho estudio es cualitativa con carácter documental.

Con respecto a la metodología en esa investigación, él realiza una serie de procedimientos. En primer lugar, selecciona seis colecciones de libros de matemática que fueron distribuidos y aprobados por el Plan Nacional de Libros de Texto de la Enseñanza Media (PNLEM). En segundo lugar, elige y enumera situaciones problemáticas planteadas en los libros de matemática relacionadas al vértice de la función cuadrática. En tercer lugar, identifica a qué contexto (vida cotidiana del estudiante, problemas relacionados con la historia de la matemática, otras disciplinas de estudio y el área de la matemática) corresponde las situaciones problemáticas para realizar un análisis praxeológico del estudio del vértice de la función cuadrática. En cuarto lugar, cuantifica las situaciones problemáticas en los libros de matemática mediante la lectura de los tipos de contexto e identificación de las tareas y técnicas. Por último, realiza el análisis de las organizaciones matemáticas de las situaciones problemáticas que toma como criterio su identificación adecuada, su razón de ser en la actividad y su relevancia frente a las necesidades del conocimiento matemático del estudiante.

Finalmente, en esta investigación, Chaves (2016) concluye que existen situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana correspondiente a la modelación matemática por coordenadas que representa la curva de dicha realidad. Asimismo, manifiesta que los tipos de tareas utilizan la misma técnica y la misma justificación. En segundo lugar, manifiesta que hay situaciones problemáticas relacionadas a la disciplina de la Física como corriente eléctrica, potencia, velocidad y distancia de recorrido de una bala. Para el desarrollo de ello, se utiliza la misma técnica, justificadas por la misma tecnología. Además, indica que los estudiantes no usan técnicas más elaboradas para la solución de los problemas. Por último, evidencia situaciones problemáticas relacionadas con la matemática, articuladas al álgebra y la geometría analítica, que también son tareas relacionadas a la gráfica de la curva y la ley de formación de la función cuadrática. Esto se resuelve utilizando diferentes técnicas para llegar a la solución de las tareas.

Santos (2017) realizó una investigación que tiene por objetivo identificar si los libros de texto de matemática de primer año de secundaria a través de las actividades de la función cuadrática permiten al estudiante transitar del bloque práctico-técnico al bloque tecnológico-teórico. Se apoya de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como marco teórico. La metodología aplicada en dicha investigación es cualitativa con un enfoque documental.

Utilizó la noción de praxeología para identificar las categorías de los tipos de tareas del concepto de función cuadrática en base a los Parámetros Curriculares de Matemáticas para la Educación Primaria y Secundaria (PCPE). La investigación se basó en las expectativas de aprendizaje de los estudiantes asociados al estudio al finalizar su nivel secundario propuestos en ese documento. Asimismo, él identifica algunos tipos de tareas, que son muy amplios, por ende, lo subdivide en subtipos lo que le permite realizar un mejor análisis. Estos subtipos de tareas también son actividades que tratan aspectos específicos de la tarea principal.

Santos (2017) identifica ocho categorías de tipos de tareas. Primero, se reconoce la representación gráfica y algebraica de la función cuadrática, que está representado en la figura de la parábola. Luego, se presenta las subtareas y explica cómo las identifica a través de su representación algebraica. Además, se identifica los coeficientes, halla el vértice para entender la relación entre par ordenado y función; luego, se grafica la parábola y se determina el dominio y la imagen. Segundo, se reconoce como modelo matemático a la función cuadrática como estudio de variaciones entre cantidades del mundo natural o social. Estas son tareas de situaciones problemáticas relacionadas con la geometría, finanza o la física. Tercero, se reconoce las restricciones de dominio en actividades de la física y la geometría. Cuarto, se identifica la relación de la función cuadrática con sus respectivos elementos al representarlo gráficamente. Luego, se presenta los siguientes subtipos de tareas, que es identificar el eje de simetría de la parábola, reconocer la imagen de la función, identificar y comprender la importancia de la discriminante, y estudiar el vértice y su importancia en la función. Quinto, se relaciona los cambios de coeficientes de la función y las transformaciones que sufre en su gráfica. Esta tarea permite al estudiante relacionar la expresión algebraica y representación gráfica en todas sus posibilidades. Sexto, se delimita los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función cuadrática en relación con la abscisa del vértice. Séptimo, se reconoce al movimiento uniformemente variado como una función de segundo orden. Octavo, se soluciona y se desarrolla las actividades que se puede expresar mediante ecuaciones de segundo grado. El investigador analizó y clasificó las actividades propuestas en los libros de texto según de los tipos de tareas y se identificó las técnicas utilizadas. Entre las técnicas que utilizaron son aplicar la ley general de formación, calcular las coordenadas del vértice, completar cuadrados, usar la fórmula de Bhaskara y elaborar una construcción gráfica.

Santos (2017) concluye que, desde una perspectiva praxeológica entre los tipos de tarea, hay que determinar las coordenadas de un vértice de una parábola y calcular el mínimo o máximo de la función cuadrática en donde se aplica la misma técnica. Sobre el tipo T4 en relación a sus técnicas, tareas y tecnología llega a una praxeología regional. Los tipos de tareas T5, T4; T3 y T6 están presentes como actividad en el libro y forman una praxeología local. En la mayoría de las actividades del libro, se resolvían con una misma técnica. Por este motivo, se consideraban praxeologías puntuales. Asimismo, indica que es necesario planificar las actividades en diferentes tareas y distintas técnicas, lo que permite promover al estudiante en establecer conexiones adecuadas, entre el concepto y sus representaciones que permita justificar las técnicas utilizadas.

Otra investigación relevante es la de Gómez (2018) que desarrolló una investigación cuyo propósito fue analizar en los libros de texto la praxeología matemática de las inecuaciones lineales. Para su estudio, utilizó los libros didácticos del nivel secundario brindados por el Ministerio de Educación (MINEDU). El análisis de su estudio se apoya en la Teoría Antropológica de lo didáctico como marco teórico para su investigación.

La metodología aplicada en este estudio es cualitativa y para cumplir con el objetivo de la investigación analizó la relación entre dos instituciones. La institución del saber matemático (disciplina), que le permitió elaborar un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno al aspecto histórico-epistemológico al análisis de texto matemático del Álgebra de Lehmann e investigaciones relacionadas al objeto matemático de estudio. La otra institución es MINEDU, donde se realizó el análisis de los libros matemáticos del nivel secundaria. Para ello, usa dos criterios. El primero consiste el análisis ecológico donde se observa cómo está abordado la inecuación lineal en el Currículo Nacional de educación Básica (CNEB). El segundo criterio aborda el análisis praxeológico donde se realizó una descripción de los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría de las inecuaciones lineales. Finalmente, toma los indicadores de completitud y las características del modelo epistemológico dominante (MED) para determinar el grado de completitud de la praxeología matemática.

Con respecto a los resultados de estudio, el investigador concluye en dos aspectos. En primer lugar, la praxeología matemática reconstruida es un conglomerado de praxeologías matemáticas puntuales conectadas de manera parcial por la extensión de técnicas. Por ese motivo, se denominan praxeologías matemáticas puntuales integradas de manera parcial. En segundo lugar, la praxeología matemática reconstruida cumple parcialmente con los indicadores de completitud, por tal motivo, él afirma que es una praxeología matemática relativamente completa.

Por otra parte, Najarro (2018) realizó un estudio que tiene como objetivo describir las características del modelo epistemológico dominante en los textos oficiales del nivel secundario. La investigación que desarrolló es cualitativa con enfoque bibliográfico, ya que revisa documentos de Rutas de Aprendizaje, el Currículo Nacional, textos escolares y Manuales para el docente. Para el análisis de estos documentos, se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Sobre esa base, él reconstruyó un Modelo Epistemológico de Referencia en relación con la proporcionalidad. Ello le ha permitido describir la Organización Matemática (OM) en los libros de texto. Asimismo, el autor realiza una secuencia de pasos para cumplir con sus objetivos. En primer lugar, identifica el objeto matemático proporcionalidad en las Rutas de Aprendizaje y el Currículo Nacional con el fin de reconocer en qué competencia se encuentra y predecir si la OM es clásica. En segundo lugar, identifica y describe los elementos de la Organización Matemática que se está estudiando. Y, por último, reconoce qué características del modelo epistemológico de referencia presenta la organización matemática.

La investigación identificó 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos al analizar los textos escolares; también, 6 tipos de tareas, 8 discursos tecnológicos, 15 tareas y 23 técnicas en los manuales de los docentes.

El análisis de los textos escolares muestra 6 tipos de tareas, 11 tareas, 17 técnicas y 8 discursos tecnológicos. Por otro lado, en los manuales para docentes, Najarro (2018) identificó los mismos discursos tecnológicos y la misma cantidad de tipos de tareas compuestas por 15 tareas y 23 técnicas. Él concluye que la modelización predominante en el nivel secundario es la discursiva y la proporcional. Además, refiere que es una organización matemática clásica de la proporcionalidad.

Centeno (2019) realizó una investigación que tiene por objetivo analizar las praxeologías matemáticas y didácticas de la función cuadrática en los textos escolares de tercer grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación. Utilizó como marco teórico la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) y su metodología fue descriptiva-cualitativa con un enfoque documental.

Con respecto a su metodología, Centeno (2019) realizó un análisis epistemológico y cognitivo de la función cuadrática para describir cómo es el tratamiento didáctico de dicho objeto matemático en la currícula nacional, mapas de progreso y rutas de aprendizaje. Luego, llevó a cabo un análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas de la función cuadrática en los textos escolares de tercer grado de secundaria. Por último, investigó qué cambio sufre el saber matemático de la función cuadrática al realizarse la transposición didáctica en los libros de textos escolares. Para ello, revisó y analizó la currícula nacional del Perú.

El investigador, clasifica en dos tipos de tareas. La primera está relacionada con la gráfica de la función cuadrática y el segundo aborda situaciones problemáticas de modelación de dicha función. En cuanto a la técnica, emplea la tabulación de puntos, el cálculo de las coordenadas del vértice, traslación vertical y la determinación de las coordenadas del vértice, entre otros. Además, señala que en los libros de texto no presentan de manera clara las tecnologías que respalden a la justificación de la técnica utilizada. Respecto a la Teoría, se basa en el concepto de la función cuadrática y la regla del trinomio cuadrado con coeficientes reales. Él concluye que no hay una estrecha relación entre la praxis y los logos de la función cuadrática en los textos escolares por falta de un fundamento teórico del objeto matemático estudiado en los libros. Además, observa la presencia de tareas contextualizadas donde no hay una claridad en la praxeología generada. Asimismo, indica que en su resolución utiliza representación gráfica y la tabulación de puntos aleatorios, pero no se aplica la intersección de la curva con los ejes coordenados ni se utiliza una técnica apropiada para la tabulación.

En el trabajo de Kaspary (2020), se planteó como propósito estudiar el efecto de las evaluaciones de los libros de texto del nivel primaria y las praxeologías del campo aditivo de los números enteros positivos. El elemento teórico utilizado es la Teoría Antropológica de lo didáctico de Yves Chevallard. El investigador utilizó tres etapas para la metodología: construcción de una organización praxeológica de referencia, descripción de los documentos de evaluación y el análisis de los libros de texto.

En esta investigación, Kaspary (2020) construyó un modelo praxeológico de referencia basado en el marco didáctico T4TEL donde T4 hace referencia a la praxeología tradicional y TEL a tecnología de aprendizaje. Además, elabora un modelo de tarea. Para ello, utiliza el generador de subtipos de tareas con 5 variables (ostensivos, idea de la situación, información encubierta, par de números conocidos y necesidad de realizar cambios en los números). También, necesitó de la caracterización del alcance de la técnica, puesto que describe a un conjunto de tipos de tareas. Asimismo, el investigador indica que la técnica se dirige a una evolución de sus algoritmos lo que puede generar la limitación de la existencia de otras técnicas dentro de una institución.

Menacho (2020) llevó a cabo una investigación con el propósito de elaborar un modelo praxeológico de referencia desde una perspectiva epistemológica y ecológica de la noción de proporcionalidad. El fin consistió en identificar y explicar cómo se manifiesta este objeto matemático en la educación primaria. Él analizó la colección de cuadernos de trabajo correspondientes desde tercero hasta sexto grado de nivel primario. Ese estudio se enmarca en una investigación de tipo cualitativo con una perspectiva bibliográfica. Presenta como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico y utiliza la noción de praxeología como unidad de análisis.

En ese trabajo, se analizaron los libros de texto que sirven como punto de partida para iniciar cuestionamientos desde una perspectiva ecológica o antropológica. Para la elección del libro, era necesario que cumplan ciertos criterios. Primero, está la representatividad, que por ser obligatorios se elige los cuadernos de trabajo distribuidos por el estado. Segundo, tiene que ver con la estructura, pues indica cómo está dividido el cuaderno de trabajo y qué actividades presenta. En tercer lugar, está el análisis praxeológico, pues permite identificar las tarea, técnicas, tecnología y teoría que presenta los cuadernos de trabajos. Además, elaboró un modelo epistemológico de referencia (MPR). Para ello, se toma como aporté el cuarteto praxeológico $[\mathrm{T}, \tau, \theta, \Theta]$ y el generador de tareas **GT**$_{i}$, así como sus respectivas variables didácticas $\boldsymbol{V_i}$. Esto se debe a que permite establecer conexiones entre los especifico y lo genérico al organizar los tipos de tareas, así como elaborar nuevos subtipos de tareas. De lo anterior, se establece que $\boldsymbol{T_2}$: Encontrar la relación entre cantidades; V_1: Dos magnitudes proporcionales; V_2: Dos magnitudes proporcionales; **GT**$_2$**:** [Encontrar la relación entre cantidades, dos magnitudes proporcionales o no proporcionales]; $t_{2,1}$: Reconocer la relación entre cantidades de magnitudes no proporcionales; $t_{2,2}$: Reconocer la relación entre cantidades de dos magnitudes proporcionales; $\tau_{2,1}$: Relación de no proporcionalidad; $\tau_{2,2}$: Relación de proporcionalidad; $\boldsymbol{\theta}_5$: Relación directa entre dos magnitudes X e Y que se presenta para cualquier par de valores x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ si se cumple que $y_i < y_j$. De manera análoga, se establece que tienen relación inversa para cualquier par de valores x_i, x_j de X con $x_i < x_j$ si se verifica que $y_j < y_i$. Finalmente, está la $\boldsymbol{\Theta}_1$: Teoría de razones y proporciones. Con la descripción y el análisis de los elementos de MPR, el investigador realizará el análisis de los cuadernos de trabajo de primaria.

El autor concluye en su investigación que se necesita de una OM para los textos que inicie con las tareas de $T_{2;}$ en consecuencia, le siga la tarea de tipo T_3 y para finalizar con las tareas de T_1. Los generadores de un tipo de tarea le permitieron identificar los subtipos de tareas y las variables didácticas $V_{i.}$ Además, estableció una relación entre lo específico y lo genérico. Con respecto a quinto de primaria, él descubrió una variedad de tareas y técnicas mientras que en sexto de primaria no se detectó un avance en la diversificación de tareas y técnicas. Por último, Menacho (2020) percibe un modelo dominante que consiste en utilizar tareas predefinidas de proporcionalidad directa, lo que implica la ausencia de tareas que planteen cuestiones si la situación dada es proporcional o no.

Por otra parte, Dávila (2021) plantea una investigación que tiene como propósito identificar dentro de una colección de textos de primaria una organización matemática de los problemas aritméticos. Seleccionó los libros de la editorial Scholastic Education International (Singapore) del nivel primario. Su estudio se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que presenta los elementos de la praxeología. La investigación se lleva a cabo dentro del modelo cualitativo, pues utiliza la técnica de análisis documental. Esto se debe a que analiza libros didácticos.

Para esa investigación, Dávila (2021) realiza la construcción del Modelo Epistemológico de Referencia (MER). Para ello, utiliza como insumos los problemas aritméticos, su definición y clasificación; además, se apoya del MER para construir una organización matemática del objeto matemático estudiado. Él reconstruye una praxeología matemática relacionada con los problemas aritméticos. Para ello, toma en cuenta una serie de pasos. En primer lugar, realizó un análisis de la colección de libros didácticos de la editorial Scholastic del nivel primario que fueron autorizado por el Ministerio de Educación de Singapur. En segundo lugar, de los libros analizados, describe la praxeología matemática reconstruida tomando como referencia el MER para poder clasificar las tareas, identificar las técnicas asociadas y las tecnologías que aparecen como propiedades.

En esta investigación, él deduce que la praxeología matemática encontrada en los libros de texto de los problemas aritméticos y las tareas halladas se ajustan a las técnicas sugeridas en el MER. Además, concluye que la praxeología matemática reconstruida en esa investigación se encuentra en el nivel de praxeologías puntuales, porque están asociadas por medio de las técnicas.

Llanos y Otero (2022) realizaron una investigación que tiene como propósito analizar la praxeología de la parábola en 188 libros de matemática del nivel secundaria en los últimos 80 años. Ellas usan la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), noción de praxeología, nociones de transposición didáctica y escala de niveles de codeterminación como marco teórico.

En ese estudio, las investigadoras seleccionan 188 libros de matemática publicadas desde 1940 hasta 2020. Los libros según su fecha de edición son clasificados en uno de los cuartos periodos. Estos periodos son generados por los cambios curriculares producto por las reformas educativas en Argentina. Para realizar el análisis praxeológico de la función cuadrática, utilizan los componentes del bloque práctico-técnico y tecnológico-teórico en cada uno de los libros. Esto permite diferenciar su evolución en cada periodo. En el periodo I (1940-1973) se identifica tres tipos de tareas. La T1 representa la función de la forma $y=ax^2+bx+c$. La T2 calcula el vértice, la ecuación del eje y el valor de los parámetros F y la T3 analiza las transformaciones cuando $a \neq 0$ y $b=c=0$; a, $c \neq 0$ y $b=0$; y a, $b \neq 0$ y $c=0$. Asimismo, ellas identifican tres técnicas (obtener factor común, completar cuadrados de un binomio, y suma binomial de cuadrados y propiedades de distribución). En el periodo II (1974-1994), identifican dos tipos de tareas. La T1 identifica $f{:}x \rightarrow ax^2+bx+c$ y grafica la función. La T2 analiza las variaciones de la forma $y=ax^2$ y relaciona los parámetros a, b y c. En estas se identifican las siguientes técnicas: construir una tabla de valores, graficar los puntos en el plano cartesiano, cambiar los parámetros uno a uno y observar la gráfica. En el periodo III (1995-2007), reconocen cuatro tipos de tareas. La T1 identifica $f{:}x \rightarrow ax^2+bx+c$, y reconoce parámetros y gráficas. La T2 analiza el desplazamiento lateral y vertical de $f(x)=x^2$. La T3 descubre la forma canónica que presenta el vértice y un punto. Finalmente, está la T4 que descubre la forma factorizada usando la fórmula de Bhaskara. Asimismo, identifican las siguientes técnicas: construir una tabla de valores, graficar los puntos en el plano cartesiano, y reemplazar las coordenadas del vértice en la fórmula y los ceros en los factores de la forma factorizada.

Con respecto a la investigación, las autoras concluyen que la praxeología de la función cuadrática está presente en los cuatro periodos y se evidencia en los textos de matemática. Ellas mencionan que, en este último periodo, debido a las reformas educativas, la esencia del ser del conocimiento de función cuadrática se reduce y se distorsiona.

De Souza et., (2024) realizaron una investigación que tiene como propósito identificar los números primos en un intervalo dado por medio de un Modelo Praxeológico Alternativo. Utilizan en este estudio como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y emplean una metodología cualitativa con un enfoque bibliográfico.

Describen el Modelo Epistemológico de Referencia (MER), pues les permite identificar los números primos. Este MER es una propuesta didáctica que está sujeto a cambios y modificaciones para futuras investigaciones con el propósito de optimizar las enseñanzas de las matemáticas. Este MER es generado por el desarrollo evolutivo de Organizaciones Matemáticas anteriores (OM), lo que indica que cada contribución de una nueva OM con sus respectivos componentes contribuyen en elaborar una OM más completa.

En esa investigación, ellos parten de la OM para identificar un número primo y contribuye en generar otra OM (reconocer números compuestos) con el fin de brindar aportes en la elaboración de una OM (identificar grupos de números primos), hasta construir otra OM (método alternativo de identificación de números primos), lo que conlleva al desarrollo de nuevos tipos de tareas y técnicas.

Ellos concluyen que la nueva técnica que implementa en esta investigación surgió debido a las dificultades que presentan los estudiantes con el uso inadecuado de la técnica para identificar los números primos por la criba de Eratóstenes. Esta técnica está constituida por dos fórmulas que facilita identificar los números primos para cualquier rango de números. Esta nueva OM facilitará en la comprensión adecuada de los números primos y su contribución a difundir de este objeto matemático en las escuelas.

La tabla 1 presenta un resumen de las investigaciones relacionadas con la TAD, lo que destaca la relevancia de este marco teórico para el análisis de los libros de texto. Asimismo, resalta la importancia de representar el conocimiento matemático a través de los cuatro elementos que conforman la praxeología matemática.

Tabla 1

Investigaciones relacionadas a la Teoría Antropológico de lo Didáctico.

Autor y año	Objetivo	Aplicado	Teoría/ metodología	conclusiones
Hurtado (2011)	Establecer las características curriculares y las Praxeologías Matemáticas de algunos textos escolares colombianos alrededor de la función cuadrática	Dos textos escolares de noveno grado	Teoría Antropológico de lo Didáctico /cualitativo de tipo bibliográfico.	El análisis de la OM del concepto de función cuadrática, en el texto Delta 9 se establece un alto grado de completitud, mientras que en el texto Espiral 9 el grado de completitud es baja.
Carrillo (2013)	Describir y analizar las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la escuela de Economía	Dos libros de texto que se utilizan en la facultad de economía	Teoría Antropológico de lo Didáctico /Investigación cualitativa de tipo bibliográfico	Hay presencia de tipos de tareas, técnicas y señala que la Oorganización Matemática es local y está más o menos completa.
	Describir y analizar la Organización		Teoría	Para la mejora de la organización didáctica de

Gonzales (2014)	Matemática propuesta para la enseñanza de los conceptos de escala y proporción del texto Matemático para Arquitectos desarrollado por los profesores del curso de Matemáticas de la FAU- PUCP para el primer ciclo de la carrera	Textos matemáticos que utilizan los estudiantes del primer ciclo	Antropológico de lo Didáctico /cualitativo de enfoque documental	un libro, es necesario identificar nuevas tareas y técnicas; para ello, se necesita del análisis de una organización matemática, pues nos permite encontrar o definir la tarea y la técnica.
Quentasi (2015)	Analizar la organización matemática de función y proporcionalidad en un libro de texto oficial y, con base a ello, establecer si existe la articulación entre estos objetos matemáticos	Libro de texto oficial	Teoría Antropológico de lo Didáctico /cualitativo de tipo bibliográfico	El grado de completitud de la Organización Matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa es relativamente menos completo.
Santos (2017)	Clasificar en diferentes tipos de tareas las actividades de Función Cuadrática	Libro de texto Novo Olhar Matemática de primero de secundaria	Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) /cualitativa con un análisis documental	Se obtuvo de esta investigación que, en la mayoría de las actividades del libro, se resolvían con una misma técnica. Por este motivo, se consideraba praxeologías puntuales.
Najarro (2018)	Describir las características del modelo epistemológico dominante presente en los textos de matemática de educación secundaria	Textos oficiales del nivel secundario	Teoría Antropológico de lo Didáctico /cualitativo de enfoque bibliográfico	Manifiesta que la Organización Matemática es local y que las modelizaciones dominantes son la discursiva y la proporcional.
Gómez (2018)	Analizar la praxeología matemática de las inecuaciones lineales	Libros escolares del nivel secundario que brinda el	Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) /cualitativa con un análisis	Praxeología matemática generada cumple parcialmente con los indicadores de completitud de Fonseca.

		Ministerio de Educación del Perú.	documental	
Menacho (2020)	Construir un modelo praxeológico de referencia de la noción de proporcionalidad a partir de un estudio epistemológico y ecológico para así determinar, describir y caracterizar la presencia de este objeto matemático en el nivel primario	Libros de texto oficial del nivel primario	Teoría Antropológico de lo Didáctico /cualitativo de enfoque bibliográfico	Se cumplió en construir una organización praxeológica de la proporcionalidad a partir de un estudio epistemológico y ecológico para así determinar, describir y caracterizar la presencia de este objeto matemático en el nivel primario.
Kaspary (2020)	Estudiar el efecto de las evaluaciones de los libros de texto del nivel primaria y las praxeologías del campo aditivo de los números enteros positivos	Análisis de los libros de texto	Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard.	La técnica se dirige a una evolución de sus algoritmos lo que puede generar la limitación de la existencia de otras técnicas dentro de una institución.
Dávila (2021)	Identificar contenidos matemáticos, también las condiciones que se presentan en la dimensión económico institucional y las restricciones que presenta la dimensión ecológica	Se selecciona los libros de la editorial Scholastic Education International (Singapore) del nivel primario.	La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)/ método cualitativo con un enfoque documental	La praxeología matemática reconstruida que son praxeologías matemáticas puntuales está integrada de manera parcial por medio de la técnica. Está presente en 6 tipos de tareas.

Fuente: Adaptado propia.

Investigaciones sobre la función cuadrática desde la dificultad del estudiante

Según el estudio de Félix (2009), existen dificultades que muestran los estudiantes. Primero, en la actividad relacionada a la función cuadrática, los alumnos a partir de una tabla de datos no son capaces de distinguir si es una relación cuadrática ni tampoco pueden simbolizarla. Un pequeño grupo de ellos no pueden distinguir el vértice, las intersecciones en el eje, relación entre las variables y su variación conjunta. Además, al visualizar la gráfica, un grupo reducido de estudiantes puede identificar el valor del vértice, identificar la concavidad y las intersecciones con los ejes. En segundo lugar, al visualizar la gráfica de la parábola, los alumnos pueden determinar dónde los intervalos de la función crecen y decrece. Sin embargo, algunos alumnos se confunden en la simbolización de los intervalos y se equivocan al determinar si los valores extremos del intervalo se incluyen o no.

Díaz et al., (2013) plantearon como propósito describir y explorar sobre las dificultades que presenta los estudiantes en la articulación de registros gráficos y algebraicos de la función cuadrática. El estudio se realizó a 109 estudiantes del primer año de las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional del Litoral. Esta investigación se fundamenta en la Teoría sobre Registros de Representación Semióticas (TRRS). En este estudio, se muestran los resultados de la dificultad y errores de los estudiantes en la función cuadrática.

En lo referido a la función $y=ax^2+bx+c$, $a>0$, $c<0$ y $b\neq 0$, sin proporcionar valores numéricos específicos a los coeficientes a, b y c, los estudiantes tuvieron dificultades en dibujar correctamente la gráfica de la función debido a tres razones. En primer lugar, no interpretaron correctamente los signos del coeficiente cuadrático, que determina la orientación de la concavidad de la curva. En segundo lugar, el mayor error se produjo cuando relacionaron incorrectamente el coeficiente $b\neq 0$ con el eje de simetría del eje Y al graficar la función. Por último, establecieron la conexión entre la ubicación del vértice cuando $b=0$ o $b\neq 0$.

Con respecto a la gráfica de la función cuadrática (simétrico con el eje y), al representarlo algebraicamente, se obtuvieron tres resultados. Primero, al expresarla en su forma general $y=ax^2+bx+c$, los estudiantes presentaron dificultades para obtener el valor de "c" al no relacionar la gráfica con la intersección del eje "Y". También, tuvieron problemas al no obtener el valor de "b=0", debido a que no lograron vincular la simetría de la gráfica con el eje "y". Además, no relacionaron la concavidad de la curva con el signo del coeficiente "a". Segundo, al expresarlo en su forma factorizada $y = a(x - r_1)(x - r_2)$, se encontraron con dificultades en obtener el valor, el signo y la dirección de la concavidad que depende del parámetro "a". Por último, al expresarlo en su forma canónica $y = a\ (x - h)^2 + k$, no lograron relacionar el valor del vértice con los parámetros de h y k ni identificar correctamente el valor y el signo del coeficiente "a".

Ante ello, los autores concluyen que el mayor desafío es empezar con el registro gráfico antes de que el algebraico, pues se hace más evidente las dificultades de los estudiantes al realizar las actividades en el aula. Estas dificultades obstaculizan su capacidad de hacer generalizaciones, formaciones y abstracciones.

Ozaltun et al., (2017) analizaron la revelación de los pensamientos sobre el estudiante Ozgurt en relación a una función cuadrática sobre conceptos y sus razones subyacentes. Tuvo como objetivo de investigación revelar los conceptos en la mente de un estudiante y sus razones subyacentes mientras analiza la función cuadrática y su respectivo gráfico. Para esto, usaron la entrevista clínica y la metodología de estudio cualitativo aplicada al estudiante Ozgurt que cursa el 11° grado.

Con respecto a la entrevista clínica, según Ozultun et al. (2017) es un método que permite evaluar el pensamiento de los estudiantes y su respectivo aprendizaje matemático. La entrevista empieza con una pregunta general que consiste en la expresión algebraica de la función cuadrática permitiendo evaluar el proceso cognitivo de Ozgurt (citado en Hunting, 1997).

Esa investigación es un estudio de caso cualitativo, pues se centra en el estudiante y sus pensamientos. Además, permite examinar la función cuadrática y su gráfica a través de cómo se revela el concepto en la mente del estudiante de secundaria.

Además, los resultados de la investigación en la entrevista a Ozgurt consistió en que logró dibujar la gráfica de la función cuadrática y deducir que esta presenta un eje de simetría. Comprendió que dicho eje permite determinar el vértice y otros puntos de la función cuadrática. Sin embargo, se evidencia como mayor dificultad el no poder relacionar entre la expresión algebraica y gráfica. Aun así, identifica que la gráfica de la función cuadrática es una parábola que puede abrir hacia arriba o hacia abajo. Otra dificultad identificada es la poca comprensión del concepto, las propiedades y gráfica de la función cuadrática.

Asimismo, se evidencia un conocimiento limitado sobre cómo la gráfica de la función $f(x) = ax^2+bx+c$ varía por medio de los valores cambiantes de los coeficientes a, b y c. Además, presenta un error conceptual al confundir el parámetro “a” como la pendiente de la función cuadrática.

Por último, para que el estudiante aprenda adecuadamente las funciones cuadráticas es necesario diseñar tareas eficientes, y que permitan cambiar de la representación algebraica a la representación gráfica.

Isfan et al., (2019) realizaron una investigación que tiene como propósito determinar los tipos de errores que presentan los estudiantes en la resolución de funciones cuadráticas. El estudio se realizó a los estudiantes de la clase X_3 de SMA Negeri 1. Para ello, utilizaron un método descriptivo cualitativo. Entrevistaron a 6 estudiantes de la clase X_3 y sus resultados se compararon con los datos de la prueba escrita.

En esta investigación, ellos concluyeron, en primer lugar, dado la $f(x)=ax^2+bx+c$ los estudiantes no pudieron obtener el valor de los coeficientes. No interpretaron de manera adecuada la discriminante y se le dificultó determinar el punto máximo de la función. También, tuvieron problemas para calcular el vértice, así como su representación gráfica de la función. Además, pudieron comprender el signo del coeficiente cuadrático de la función, así como para encontrar los puntos de intersección con los ejes coordenados. No pudieron obtener los valores x e y de la función cuadrática y mostraron falta de compresión del concepto de la función cuadrática. Tuvieron dificultades para calcular el rango de la función y para determinar los parámetros de los coeficientes de la función cuadrática. Finalmente, al representar gráficamente la función cuadrática, no demostraron dominio en el uso del sistema de coordenadas.

Mutambara et al. (2019) realizaron un estudio sobre la comprensión del concepto de función cuadrática a 24 estudiantes de magisterio de Zimbabue concluyeron que los estudiantes tienen una confusión en el concepto de función cuadrática al presentarles en las tres formas (general, factorizada y del vértice). Además, tienen problemas en diferenciar la palabra función con ecuación (piensa que son lo mismo). Luego, presentan dificultades en entender el significado del vértice y su representación en la gráfica. Además, no comprenden los valores de los coeficientes (a, b y c) de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ y otro error conceptual es que "c" lo considera como gradiente de la función.

Por otro lado, Fatahillah et al. (2020) realizan un estudio en la escuela pública de Jember (Java Oriental) a 33 estudiantes. Indican que la matemática es una materia abstracta y uno de los temas que le cuesta aprender a los estudiantes por su grado de dificultad es la función cuadrática. Esta dificultad corresponde a comprender el concepto de la función, identificar y aplicar conceptos aritméticos a los valores a, b y c de la $f(x)=ax^2+bx+c$ para calcular la discriminante y realizar la representación gráfica.

Asimismo, Gyedu et al., (2020) realizaron estudio sobre el rendimiento de 80 estudiantes del nivel secundario e identificaron las dificultades que presentan en aprender la función cuadrática. Se evidencia que existe una falta de compresión en la interpretación gráfica de la función cuadrática, y la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática. Además, los estudiantes prefieren solo trabajar con la forma general de la función cuadrática ($f(x)=ax^2+bx+c$) y no pueden establecer conexiones entre el aspecto algebraico y gráfico de la función cuadrática.

Díaz y Flores (2022) realizaron una investigación de la resolución de tipos de problemas contextualizados y el análisis de errores en un estudio de caso. Tuvo como objetivo en determinar el rendimiento académico y errores de los estudiantes en el contenido de función cuadrática al realizar la resolución de los problemas. Este estudio utiliza un enfoque cualitativo descriptivo con estudio de caso para los estudiantes de secundaria de la Región de Los Lagos y Ríos de Chile. Asimismo, elaboraron y aplicaron una prueba de matemática con problemas de respuesta abierta y un cuestionario de opinión.

En este trabajo, utilizaron la clasificación de errores propuesta por Socas (1997) las cuales son las siguientes: Errores que tienen su origen en un obstáculo (conocimiento adquirido), errores que tienen su origen en la ausencia del sentido (origen en la aritmética, procedimientos y mala interpretación del lenguaje) y errores de tipo afectivo y emocional. Ellos concluyen que la mayoría de los errores al resolver los problemas son de tipo de ausencia del sentido, específicamente en el procedimiento. Los estudiantes no pueden comprender la existencia de punto máximo o mínimo de la función cuadrática y diferenciar la variable dependiente de la independiente. Además, los alumnos no pudieron resolver efectivamente los tipos de problemas, porque solo pueden realizar procesos algebraicos y memorísticos.

En la tabla 2 se evidencia un resumen de las investigaciones relacionadas a la función cuadrática desde la perspectiva de las dificultades de los estudiantes. Entre los obstáculos más destacados se encuentra la incapacidad para interpretar y manipular los parámetros a, b y c que favorecen en la representación gráfica de la función. Asimismo, a partir de su registro visual, el estudiante no puede distinguir adecuadamente los elementos que integran este objeto matemático, lo que dificulta en su conversión a las diferentes formas de la representación algebraica. Finalmente, se evidencia limitaciones al modelizar la regla de correspondencia de la función al presentarse actividades en un lenguaje escrito. Estos estudios, además, permiten identificar los diferentes tipos tareas y técnicas en los libros de texto de matemática.

Tabla 2

Investigaciones relacionadas a la dificultad del estudiante sobre las funciones cuadráticas.

Autor y año	Objetivo	Aplicado	Teoría/ metodología	conclusiones
Félix (2009)	Validar el uso de tecnologías visuales que permitan al estudiante comprender el rol fundamental de los parámetros en las transformaciones de funciones	28 alumnos del primer semestre del nivel universitario de la carrera de Administración.	Aplicación del Modelo 3UV (tres usos de variables) que permiten el diseño de fichas de actividades	El estudiante no establece la regla de correspondencia de la función a partir de su representación tabular o grafica. Del mismo modo, presenta dificultades en identificar los elementos que componen este objeto matemático.
Díaz et al., (2013)	Describir las dificultades que presenta los estudiantes al articular las representaciones gráficas y algebraicas de la función	109 estudiantes de la carrera de ingeniería	Teoría sobre Registros de Representación Semióticas/ enfoque descriptivo y exploratoria	No logra representar la gráfica de la función cuadrática entre sus diferentes formas de expresión.

	cuadrática.			
Ozaltun et al., (2017)	Revelar los conceptos en la mente de un estudiante y sus razones subyacentes mientras analiza la función cuadrática y su respectivo gráfico	El estudiante Ozgur que cursa el 11° grado	Entrevista clínica /enfoque de estudio cualitativo	El estudiante presenta dificultades en la conversión entre registros del algebraico al gráfico, así como limitaciones en la interpretación de los parámetros de la función cuadrática que facilitan la posición y forma de la parábola en el plano cartesiano.
Isfan et al., (2019)	Determinar los tipos de errores que presentan los estudiantes en la resolución de funciones cuadráticas.	Estudiantes de la clase X3 de SMA Negeri 1	La metodología de investigación es descriptivo cualitativo.	Dificultad en modelizar un contexto de la situación real a su expresión algebraica ($f(x)$ =ax^2+bx+c).
Mutambara et al. (2019)	Analizar las construcciones mentales de los profesores en relación a la función cuadrática	24 maestros que realizan su estudio de diplomadura en la universidad de Zimbabwe.	APOS/ investigación cualitativa.	Con respecto a la función cuadrática ($f(x)$ =ax^2+bx+c), presentaban errores de compresión, así como dificultad en identificar y determinar sus elementos característicos. Un ejemplo relevante sería que confundían la interpretación del parámetro C como la pendiente de la parábola.
Fatahillah et al. (2020)	Desarrollar un medio de aprendizaje utilizando las TIC que facilita la comprensión de la función cuadrática	33 estudiantes de la escuela pública de Jember (Java Oriental)	Modelo 4-D/Recopilación de datos .	Dificultad en comprender e interpretar los parámetros a, b y c , así como el discriminante en la representación gráfica de la función cuadrática.
Gyedu et al., (2020)	Explorar cómo el geometer's sketchpad (GSP) mejora la comprensión de los	Ochenta estudiantes del nivel secundario	Investigación cualitativa y cuantitativa	Presenta dificultad en relacionar coherentemente la ecuación cuadrática con la función cuadrática, así

	estudiantes en gráficos cuadráticos.			como la falta de dominio de expresar este objeto matemático en otras formas de representación algebraica
Díaz y Flores (2022)	Determinar el desempleo académico y los errores que presenta los estudiantes en la función cuadrática al resolver los diferentes tipos de problemas.	Se aplicó a 275 estudiantes chilenos.	Enfoque cualitativo y descriptivo de casos	Entre las dificultades que presentan los estudiantes se encuentran la identificación de las variables de la función cuadrática y la resolución inadecuada de los problemas por la falta de comprensión del objeto matemático.

Fuente: Adaptado propia

Investigaciones sobre análisis de libros de texto

En la investigación de Vivas (2010), se centra en el estudio de la función cuadrática a través de los libros de texto por dos motivos principales. En primer lugar, es uno de los conceptos importantes de la matemática que se ve en los últimos años del nivel secundaria. En segundo lugar, la importancia en los diversos fenómenos en la que el concepto de función cuadrática está involucrado.

También, menciona que el libro de texto se erige como uno de los pilares básicos en la que se apoya la acción del docente en la enseñanza en cualquiera de los niveles educativos y se convierte en el referente del saber científico tanto en la perspectiva del docente como del alumno. Según Villella (2002), al realizar el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y los libros de texto se convierten en referentes para la investigación. Además, el libro de texto puede ser mirado de diferentes formas: objeto de estudio, material de consulta, registro de actividades del alumno y recopilación de ejercicios para resolver (citado por Vivas, 2010).

Además, se refleja en los libros de texto el contenido escolar como producto de la transposición didáctica, en la que consiste en la transformación del saber sabio a saber enseñando; es decir, el conocimiento científico es reducido o simplificado con el fin de que el estudiante pueda acceder.

Fan et al. (2013), en su estudio, ratifican que la investigación de libros de texto en las últimas décadas ha logrado un avance trascendental en el uso y análisis de los mismos en los procesos educativos. Su propósito consistió en analizar y revisar las diferentes investigaciones dirigidas al libro de texto de matemática, lo que ha permitido así sugerencias sobre orientación y dirección de futuros estudios.

Los autores establecen cuatro categorías de análisis en la investigación de los libros de texto de matemática. En primer lugar, reconocen la importancia del papel de los libros de texto debido a su secuencia estructurada del conocimiento para el proceso de enseñanza y aprendizaje en las aulas. Además, actúa como difusores y mediadores de la política curricular hacia los profesores y estudiantes.

En segundo lugar, con respecto al análisis y la comparación de libros de texto, ellos se centran en cómo abordan los diferentes temas o contenidos matemáticos, así como las actividades o resolución de problemas que se relacionan con la cognición y la pedagogía. La influencia de la cultura y los valores afectan en la relación con los planes de estudio, así como en el desarrollo y evaluación de los libros de texto. Además, comparan la semejanza y la dificultad de los libros de texto en el contexto pedagógica, el grado de abstracción y complejidad del tema, así como las respuestas que el libro de texto genera en el comportamiento del estudiante.

En tercer lugar, el uso de los libros de texto está dirigido tanto a estudiantes como a profesores con el objetivo de centrarse en su utilización y en cómo influyen en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Por último, ellos exploran otras áreas donde se analizan y se comparan los textos tradicionales con los electrónicos, así como la relación entre el libro y el rendimiento de los estudiantes. Se concluye que los libros de texto desempeñan un papel importante en el currículo, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las investigaciones sobre los libros de texto se centran principalmente en el análisis y la comparación de los textos, así como en su uso. Es necesario contar con un fundamento teórico más sólido que permita consolidar el papel de los libros, la relación entre ellos, el currículo, el proceso de enseñanza-aprendizaje, y que el contexto educativo y social sea más amplio.

Glasnovic (2018) realizó un estudio para componer un marco de cinco dimensiones que permita la evaluación de las tareas de los libros de texto de los grados sexto, séptimo y octavo grado. Para realizar el análisis del objeto de estudio, él estableció el marco multidimensional. Este marco se formó con el apoyo de las fuentes de estándares educativos austriacos y el análisis de las tareas en el texto matemático. Su metodología es cualitativa con un enfoque de análisis de contenido.

En esta investigación, se examinaron cada tarea del libro de texto para identificar a qué categoría le corresponde (contenido, tareas matemáticas, niveles de dificultad, forma de resolución y características contextuales). Además, cada categoría le brinda un código respectivo a la tarea al ser analizado. Se concluye que las tareas se resuelven con cálculos elementales utilizando números concretos y no son aplicables a la realidad. Además, son de exigencia cognitiva de bajo nivel y son cerradas, porque tienen una sola respuesta al desarrollarse. Por otra parte, las tareas no se vuelven complejas cuando el estudiante pasa de grado de sexto a octavo grado. Y, por último, recomienda poner en práctica la actividad matemática en los currículos nacionales para implementar las tareas que presenten actividades de modelación y argumentación.

La investigadora Bittar (2021) menciona que los libros de texto es una herramienta esencial para los profesores, porque presenta el conocimiento institucional oficial. Y, está diseñado para ser enseñado por el docente, lo que proporciona un acercamiento del contenido que se encuentra en el libro y sea transmitido a los estudiantes. Asimismo, al realizar el análisis de los libros de textos, conlleva a que pueda haber un modelo praxeológico dominante. Con ello facilita la construcción de un modelo praxeológico de referencia lo que favorece a la elaboración de actividades o tareas para los estudiantes con la finalidad de contribuir en su aprendizaje.

Luego, la autora menciona que para realizar un mejor análisis del libro de texto es necesario dividir en dos partes. El primero es el *curso*, donde se encuentra las definiciones, propiedades y los ejercicios resueltos. Además, se identifica las tareas que se agrupan en tipo de tareas y donde se genera el cuarteto de la praxeología matemática. El segundo consiste en las *actividades propuestas*, en donde se reconoce la tarea y la técnica que pertenece a la praxeología ya identificada.

La autora menciona que el avance de la investigación en los libros de texto de matemática debe centrarse en varios aspectos fundamentales: establecer un fundamento teórico sobre la labor del libro de texto, analizar la relación entre libro y el aprendizaje del estudiante, investigar el proceso de elaboración del libro, así como explorar el uso y desarrollo de libros electrónicos.

Perovano et al. (2022) enfatizan que la producción académica sobre los libros de texto de matemática está creciendo y consolidándose en los últimos años. Este fenómeno se ha observado en la Conferencia Internacional sobre Investigación y Desarrollo de Libros de Texto de Matemáticas (ICMT), donde se presentaron la mayor cantidad de estudios, discusiones y reflexiones sobre los libros de texto. Posteriormente, estas investigaciones se dividieron en cuatro categorías. En primer lugar, los libros de texto digitales, donde se analizan cuatro investigaciones, abordan la colaboración de estos libros con los estudiantes, lo que les proporciona nuevas habilidades que los impresos no pueden generar. En segundo lugar, está el uso de libro, donde se clasifican ocho investigaciones que abordan el uso por parte del alumno, profesor o ambos. En tercer lugar, otros, donde se encuentra ocho investigaciones, establece la discusión entre distribución de libros de texto y la redacción es estos recursos por medio de un plan de estudio o desde la perspectiva filosófica entre los libros de texto. En cuarto lugar, está el análisis de libros, donde se encuentra la mayor cantidad de investigaciones. Esto está dividido en tres perspectivas de debate: los sujetos que examina los libros de texto (realizado por investigadores, profesores, estudiantes y autores de libros), cómo se examina los libros de texto (comparación de libros entre diferentes países o un solo país, así como examinar los contenidos específicos, tareas y conceptos) y qué se examina en los libros de texto (examinar en los libros de matemática un determinado contenido o tema). La idea es mostrar las dificultades y limitaciones de los profesores al realizar la práctica docente. Entre las conclusiones que se genera, en el análisis de libro de texto, se realizó la mayor cantidad de producciones de investigaciones abordando el nivel primario, secundaria y la enseñanza superior, pero no se ha investigado la educación infantil.

Meza (2023) enfatiza la importancia de la investigación de libros de texto en matemática, porque a lo largo del tiempo ha cambiado el rol de los libros. Antes, eran simplemente una recopilación de conocimientos de una respectiva materia para el uso de pocas personas como sacerdotes o clérigos, quienes se encargaban de aumentar el conocimiento científico. Sin embargo, con la apertura de la educación y la escolarización, los libros han ampliado su rol de ser solo un repositorio del conocimiento a ser parte del proceso de la enseñanza y aprendizaje de una materia.

La investigadora menciona que, en los libros de textos, el analizar el conocimiento implica verificar si está adecuado, completo y organizado correctamente; en cuanto a la función didáctica, se evalúa si el estudiante se involucra en el uso del texto y si las tareas son adecuadas tanto para el estudiante como para el docente. Considera las normas de saber, cómo se construyó, quién lo usa y cómo se produce. Además, analiza la responsabilidad social y cómo influye el conocimiento matemático en la sociedad. Estos indicadores surgen como consecuencia de la evolución de los libros a través de la historia, lo que nos permite justificar la importancia de investigar los libros de texto y su uso como recurso de consulta en actividades para los estudiantes, además de identificar las praxeologías involucradas.

Por último, debido a los cambios históricos, las reformas educativas, la relevancia de medir el desempeño escolar, así como características de los estudiantes, entre otros aspectos, la investigación de libros de texto presenta tres corrientes de principales. Primero, como objeto de estudio, donde se analiza la organización del contenido, se posiciona al estudiante como simple receptor y cumplidor de tareas, mientras que el docente es ignorado como lector. Segundo, como insumo para el estudio, se examina el impacto del uso del libro en el aprendizaje, se analiza sobre el diseño de los libros y el efecto en el desempeño de los libros de texto. Finalmente, como componente junto a otros elementos, implica a todos los integrantes de una institución (estudiante, maestro, libros de texto, familia, el rol del estudiante y el maestro, y la matemática en su importancia en la sociedad), se adapta al estudiante en el cumplimiento de sus objetivos y metas, y promueve el desarrollo de las capacidades del maestro.

Souza y Santos (2023) realizaron un estudio que tiene como objetivo analizar la formación del concepto de función definida por partes en los libros de texto propuesto por el Programa Nacional de Libro y Material Didáctico (PNLD). Analizaron las 10 colecciones aprobadas por PNLD. La investigación es exploratoria con un enfoque cualitativo.

En esta investigación, la metodología se realizó en dos etapas. En primer lugar, consistió en identificar las colecciones de libros de texto de matemática aprobadas por PNLD para abordar las funciones definidas por partes. En segundo lugar, era examinar cómo los libros de texto abordan la conceptualización del objeto matemático estudiado. Para analizar los datos generados por esta investigación, se utilizó la técnica de análisis de contenido.

En esta investigación, se concluye que es necesario realizar mejoras en los libros de texto en base a la formalización de la definición de función definida en trozos, destacando sus propiedades, su dominio y el comportamiento en diferentes intervalos. Por último, indican que es importante incluir ejemplos más diversos que cubran diferentes aspectos del objeto matemático.

En la tabla 3, se evidencia un resumen de las investigaciones relacionadas sobre la importancia de los libros de texto. Entre los aspectos más relevantes se destaca lo siguiente: en primer lugar, son herramientas que tiene como rol fundamental la representación del plan curricular; en segundo lugar, estos materiales presentan conocimientos adecuados para el aprendizaje del estudiante (esto se debe al proceso de transformación del saber sabio en saber enseñado?; por último, dichos conocimientos se representan en un análisis de la organización matemática, lo que permite elaborar problemas más adecuados dentro de los libros de matemática.

Tabla 3

Investigaciones relacionadas sobre el análisis de los libros de texto.

Autor y año	Objetivo	Aplicado	Teoría/ metodología	conclusiones
Vivas (2010)	Analizar libros de texto tomando como eje principal el concepto de función cuadrática	188 libros de matemática del nivel secundaria	Teoría Antropológica de lo Didáctico/Investigación no experimental desde la perfectiva longitudinal	El libro de texto es el resultado de la transformación del saber sabio al saber enseñado, proceso conocido como transposición didáctica.
	Analizar y revisar las investigaciones	Cien investigaciones	Clasificación de la investigación por	Los contenidos de los libros de texto presentan

Fan et al. (2013)	relacionadas a los libros de texto de matemática que nos permite guiarnos a futuros estudios	relacionadas a los libros de texto de matemática	medio de cuatro categorías	una desconexión del plan curricular, y esto afecta en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, existe mayor cantidad de investigaciones de libros de texto en el nivel primaria.
Glasnovic (2018)	Incorporar un marco de quinta dimensión que permite evaluar las tareas de los libros de texto de matemática.	22000 tareas de los libros de matemática.	Investigación cualitativa/análisis de contenido	La mayoría de las tareas no son abiertas, puesto que presenta una sola respuesta lo que genera en el estudiante un pensamiento cognitivo bajo.
Bittar (2021)	Presentar un modelo de análisis para los libros de texto desde la perspectiva de la TAD permite identificar las praxeologías propuesta en dichos materiales.	Libros de texto de matemática	Teoría Antropológico de lo Didáctico/ cualitativa y documental.	Para un mejor análisis de los libros de texto se estudia por separado el marco teórico del objeto matemático y, por otro lado, las actividades propuestas desde la perspectiva del tipo de tarea y técnicas.
Perovano et al., (2022)	Mapear las perspectivas de las investigaciones relacionadas al análisis de libros de texto de matemática en la tercera edición del ICMT.	Treinta investigaciones	Enfoque cualitativo en la modalidad de mapeo.	No hay una correlación entre el plan de estudio oficial y los contenidos de los libros de texto. Asimismo, existe mayor cantidad de investigaciones respecto al análisis de libros matemáticos.
Meza (2023)	Analizar la importancia de los libros de texto y su rol cambiante a lo largo del tiempo.	Libros de texto	Enfoque cualitativo .	El análisis de libros de texto se divide en tres corrientes principales (objeto de estudio, insumo para el estudio y como complemento para

				los integrantes de la institución).
Souza y Santos (2023)	Analizar la formación del concepto de función definida por partes en los libros de texto propuesto por el Programa Nacional de Libro y Material Didáctico (PNLD).	10 libros aprobados por PNLD	Investigación exploratoria en un enfoque cualitativo	Son herramientas educativas esenciales que guían al estudiante en su el proceso de aprendizaje. Por esta razón, resulta necesario el desarrollo constante de los libros tanto en su contenido como actividades propuestas.

Fuente: Adaptado propia

1.2 Justificación.

En esta parte, se presenta los motivos que respaldan en la realización de la investigación que proponemos llevar a cabo. Para fundamentar nuestra propuesta, se considera investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje de la función cuadrática (Díaz et al., 2013, Gyedu, et al. 2020 y Isfan et al., 2019), el Currículo nacional de la Educación Básica (2016) y el papel esencial que desempeñan los libros de texto en la enseñanza de las matemáticas (Perovano et al., 2022; y Souza y Santos 2023).

Se inicia la justificación con la importancia de la función cuadrática como conocimiento utilizado en diversos campos matemáticos como la economía, las finanzas, la biología, etc. Además, esta función es una herramienta fundamental que permite modelar situaciones problemáticas reales como el movimiento de los cuerpos y la optimización de las áreas; en la ingeniería, se usa en antenas parabólicas, lámparas y lentes; y en el análisis numérico, se utiliza a través de tablas de valores (Huapaya, 2012, Vivas, 2010, Tocto, 2015, Henao y Vanegas 2012).

La función cuadrática es un concepto matemático que ha sido desarrollado por diversas culturas a lo largo de tres periodos de la historia. El primer periodo corresponde al desarrollo de la noción del concepto de ecuación promovido por culturas como la griega, babilónica y árabe. En el segundo periodo, la cultura griega descubrió las secciones cónicas y en el siglo XVII, estas fueron definidas mediante ecuaciones de grado con variables x e y. El último periodo se atribuye a la construcción del concepto de función, donde sus más grandes representantes fueron Descartes y Fermat. Ellos introdujeron la geometría analítica, que vincula la resolución geométrica con ecuaciones de dos variables. Todo lo expuesto anteriormente toma como evidencia que la construcción de nuestro objeto de estudio fue validada por los conocimientos matemáticos generados por grandes representantes de esta disciplina a lo largo de la historia de la matemática (Mesa y Villa ,2007).

Entre las dificultades que presenta los estudiantes en la función cuadrática está el cambio de registro del gráfico al algebraico o viceversa. Esto se debe al obstáculo de entender el concepto y las propiedades de dicho objeto matemático, así como a la falta de identificación de los parámetros de las diferentes representaciones algebraicas como la forma general, la factorizada y la canónica (Díaz et al., 2013 y Gyedu, et al. 2020). Por otro lado, los estudiantes cometen errores al resolver actividades de la función cuadrática debido a cuatro aspectos: no pueden determinar los valores a, b y c de la expresión $f(x)=ax^2+bx+c$, no interpretan adecuadamente la discriminante, no determinan los puntos de intersección con el eje de coordenadas en la gráfica de la función y no calculan adecuadamente el vértice (Isfan et al., 2019; Fatahillah et al. 2020; Mutambara et al.,2019; Félix, 2009).

Por otro lado, los libros de texto en las últimas décadas han cambiado su rol de ser simplemente recopiladores de conocimientos de una materia usados por pocas personas a ser parte indispensable en los procesos educativos de una educación escolar obligatoria. Por ese motivo, las investigaciones de los libros de texto están dirigidas para analizar la estructura de su contenido, su función frente al profesor y estudiante, así como su papel de replicador de la política educativa nacional, entre otros (Meza, 2023). Asimismo, se destaca que los libros de texto, al ser traductores y trasmisores del currículo, se han convertido en recursos esenciales por el constante uso en el aula tanto para el profesor como el alumno y su papel de facilitador en la planificación del aprendizaje (Perovano et al., 2022 y Fan et al., 2013).

Los libros de textos presentan contenidos que son el resultado de la transposición didáctica de la transformación del saber sabio al saber enseñado, lo que facilita la conversión del conocimiento científico a un conocimiento más accesible para el estudiante. Además, es un recurso que tiene diferentes aplicaciones para el estudiante como objeto de estudio, material de consulta, actividades desarrollas y recopilación de tareas para resolver (Vivas, 2010). Al realizar el análisis de los libros de textos, se permite identificar y entender las dificultades que genera el material en el proceso de enseñanza, así como plantear actividades adecuadas que faciliten superar dichas dificultades. En ese sentido, al estudiar ese recurso, se identifica el modelo praxeológico dominante, lo que a su vez nos permite generar un modelo praxeológico de referencia para la construcción de actividades dirigidas a los estudiantes con el fin ayudar en su aprendizaje (Bittar, 2021). Las investigaciones de Santos (2017), Carrillo (2013), y Hurtado y Zuñiga (2011) señalan que, en los libros de textos que analizaron en su organización matemática, es necesario proponer actividades diversas y que no solo basta con ejercitación de la técnica para obtener la solución. Es necesario reorganizar las actividades que incluyan diferentes tipos de tareas con nuevas técnicas que faciliten la adecuada relación con los conceptos y propiedades del objeto matemático.

Por otro lado, en el Perú, se han producido cambios curriculares significativos. Hasta el año 1997, en el nivel secundaria, se utilizaban programas curriculares por asignatura; es decir, la educación estaba centrado en contenidos academicistas y de corte memorísticos (Neira y Rodrich, 2008). Asimismo, se enfocaba en el alumno y su aprendizaje, donde los conocimientos adquiridos daban la idea de que era el resultado de una construcción sociocultural (Neira y Rodrich, 2008). Además, como consecuencia de los resultados obtenidos por los estudiantes, al realizar las pruebas de rendimiento aplicadas a los grados de segundo y sexto de primaria, así como tercero y quinto de secundaria, alcanzaron solo el 10% de un nivel ideal de competencia matemática. Concluyeron que el aprendizaje de los estudiantes en relación a la función es deficiente. Esto se debe por la falta de dominio de sus conceptos y propiedades (Luque, 2007 citado en Gaita et al., 2009).

Con la finalidad de elevar la calidad en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje, se realizaron importantes cambios curriculares pasándose de competencias a capacidades, que son ahora los ejes que permite organizar el aprendizaje. En el año 2005, se implementó el Currículo Nacional que está integrada por la articulación de los niveles de inicial, primaria y secundaria. Asimismo, se centra en el estudiante, en el desarrollo de sus capacidades, la flexibilidad en la programación para contextos locales y elaboración de instrumentos de evaluación (Neira y Rodrich, 2008).

En el Diseño Curricular Nacional 2005 en el área de matemática, la función cuadrática correspondiente a la componente Números, Relaciones y Funciones se centra:

> *En las relaciones entre cantidades y las formas de representación de relaciones matemáticas. Trabajar con relaciones y funciones es más que manipular símbolos, los estudiantes necesitan comprender sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones presentadas (p.166)*

Solo en cuarto año de nivel secundaria se desarrolla la función cuadrática como un subtema de Funciones y Progresiones. También, está representado este objeto matemático en el área de Ciencia, Tecnología y Ambiente dentro del tema de movimiento (MRUV, Caída Libre y movimiento parabólico) correspondiente a 5to grado de nivel secundaria.

Posteriormente se cambia al DCN (2009) donde se agrega tres capacidades básicas que los alumnos deben desarrollar su pensamiento matemático: Razonamiento y Demostración, Comunicación Matemática y Resolución de problemas. Además, se observa cambios radicales en la estructura de los temas y la forma como se aborda la función cuadrática. Este objeto matemático se estudia en el tercer año de nivel secundaria en a la competencia Números, Relaciones y Funciones, donde el estudiante debe lograra los siguientes incisos al finalizar el año académico: Identificar la preimagen y la imagen de la función cuadrática, construye modelos de fenómenos de la realidad utilizando funciones, describe las funciones cuadráticas en tablas, gráficas y expresiones algebraicas y resuelve problemas contextualizados con el apoyo de la función cuadrática.

Según Las Rutas de Aprendizaje 2013, enfatiza que las dificultades que tienen los estudiantes en resolver situaciones problemáticas en relación al tema de función cuadrática corresponden a que no puede relacionarlos con fenómenos de la física. Por ese motivo, para superar esa dificultad, es necesario implementar proyectos de aprendizaje que faciliten al estudiante en su comprensión. Asimismo, en los proyectos matemáticos que presenta las rutas de aprendizaje se observa un vacío tanto en la técnica, tecnología y teoría (Centeno. 2019).

Finalmente, se observa que el tema de función cuadrática se encuentra presente el nivel VII (desde tercero hasta quinto de secundaria). Además, la función cuadrática está incluida en la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, donde se indica los siguiente:

> *Consiste en el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos* (Ministerio de Educación,2016, p. 156)

Además, tiene como capacidades traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas, comunica su compresión sobre las relaciones algebraicas, usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales y argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. Asimismo, en la tabla 4, en el área de matemática del ciclo VII se muestra algunos desempeños relacionados a la función cuadrática que se indica en la Programación Curricular de educación Secundaria (2016).

Tabla 4.

Desempeño de la función cuadrática.

Ciclo VII	Desempeños
Tercer grado de secundaria	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencias o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas a funciones cuadráticas ($f(x)=x^2$, $f(x)=ax^2+c$, $\forall a \neq 0 \text{ y } a \in \mathbb{Q}$.) con

	coeficientes enteros. Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría y vértice. Plantea afirmaciones sobre cambio que produce el signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica.
Cuarto grado de secundaria	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencias o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas a funciones cuadráticas ($f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall a \neq 0$ y $a \in Q$.) Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría, vértice, orientación, su compresión sobre el dominio y rango, para interpretar su solución en el contexto de la situación.
Quinto grado de secundaria	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas de la función cuadrática. Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la dilatación, la contracción, los desplazamientos horizontales y verticales, las intersecciones con los ejes de una función cuadrática. Plantea afirmaciones sobre relaciones de cambio que observa entre las variables de una función cuadrática. Justifica y comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra o de un caso especial mediante ejemplos, contraejemplos, conocimientos geométricos, o razonamiento inductivo y deductivo.

Fuente: Adaptado de la Programación curricular de educación Secundaria (2016, pp,160-161)

En la tabla 4, según Programa Curricular de Educación Secundaria (2016), los desempeños mostrados anteriormente, describen el proceso hacia el nivel esperado ciclo VII al resolver los problemas de la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. También, describe el nivel de logro esperado en la competencia al terminar el ciclo VII los estudiantes.

Basándonos en lo expuesto, justificamos la necesidad de realizar una investigación orientada a realizar un estudio praxeológico de la función cuadrática en los textos escolares utilizados en la educación secundaria, suministrados por el estado. Este estudio toma como marco teórico la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD).

Pregunta y objetivo de la investigación

Por lo expuesto en párrafos anteriores, se realiza la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la organización matemática de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII en el nivel secundaria?

Objetivo general

Analizar la organización matemática de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII en la Educación Secundaria.

Objetivos específicos

- Realizar un estudio epistemológico de la función cuadrática
- Describir los elementos praxeológicos de este objeto matemático en la Educación Secundaria.
- Reconstruir un modelo praxeológico de referencia asociado a la función cuadrática.

Capítulo II: Marco Teórico y Metodológico

En este capítulo, se describe algunos elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que son pertinentes en nuestra investigación, así como los procedimientos metodológicos que nos ayudarán a alcanzar nuestros objetivos planteados.

2.1 La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) fue propuesto por Chevallard (1999) a finales de los años de 1980. Él sostiene que toda actividad matemática se manifiesta como un conjunto de actividades humanas e instituciones sociales. Afirma que la didáctica de la matemática se representa como una actividad humana y que esta debe estar regularmente realizada, ya que se conceptualiza como un modelo único llamado praxeología.

Asimismo, Lucas (2010) enfatiza que la TAD se centra en el estudiante que aprende y enseña la estructura matemática por medio de las actividades humanas en contraste con el saber científico que presentan las instituciones sociales. Además, la TAD analiza cómo las actividades humanas y didácticas permiten condicionar su desarrollo en un entorno institucional determinado, así como resaltar las dificultades y restricciones que entorpecen la aplicación de las actividades.

Bosch et al. (2006) indican que la aparición de la TAD se debe al desarrollo de la teoría de las Situaciones Didácticas donde comparten varios principios fundamentales. Asimismo, consideran dos problemáticas que permitieron el origen de la TAD. El primero consiste en independizarse de los modelos epistemológicos dominantes presentes en las instituciones por parte del investigador, lo que significa que la TAD nos permite representar de otra forma el conocimiento y la actividad matemática de las instituciones. El segundo consiste el análisis de las dificultades y limitaciones que influyen la trasmisión del conocimiento matemático.

Por último, García (2005) establece que para describir y analizar la complejidad de la actividad matemática depende de un modelo epistemológico generado por la TAD. Y este modelo se convierte en una herramienta indispensable que permite estudiar los procesos de creación y difusión del saber matemático, así como situar la dicotomía de lo matemático y no matemático a través de un modelo único.

2.2 Praxeologías

Según Chevallard (2019) define a la praxeología como un cuarteto de elementos más o menos integrados: un tipo de tarea T; una técnica τ, la que permite solucionar tareas de tipo T; una tecnología θ, que es un discurso racional de la técnica; y una teoría Θ que justifica y legitima a la tecnología. Asimismo, él indica que una praxeología está representado por $\wp = [T/\tau/\theta/\Theta]$, donde su nombre está formado por la unión de las palabras praxis $[T/\tau]$ y logos $[\theta/\Theta]$.

En la misma línea Almouloud (2015), manifiesta que la palabra praxeología se describe como una estructura organizada conformada por cuatro ingredientes [T, τ, θ, Θ]. Además, la palabra praxeología se divide en dos palabras griegas: praxis, que significa "práctica", que corresponde al bloque practico técnico [T/τ] y logos que significa "razón o discurso razonado", que corresponde al bloque teórico-tecnológico [θ/Θ].

Para Lucas (2010), la noción de praxeología, también llamado Organización Matemática (OM), es una herramienta fundamental que permite la modelización de la actividad matemática dentro de una actividad humana desde la perspectiva de la TAD. La OM aparece como respuestas a una serie de interrogantes que se generan en una determinada institución mediante tareas problemáticas.

Las tareas problemáticas, también denominadas cuestiones asociadas de una OM, acaban generando diversos tipos de problemas derivados del desarrollo de la actividad matemática. Asimismo, si en una institución, un tipo de problema es admitido, eso indica que no solo presenta una técnica matemática para su desarrollo, sino que también permite generar más problemas del mismo tipo.

Para Chevallard (1999), la noción de praxeología u organización matemática sirve como principal instrumento para representar cualquier actividad matemática. Está compuesta por dos bloques. En primer lugar, está el bloque práctico-técnico (praxis), que consiste ciertos tipos de tareas y técnicas que permiten su resolución. En segundo lugar, está el bloque tecnológico-teórico (logos), donde se sitúa la tecnología que explica, describe y justifica la técnica, así como la teoría, que representa un nivel superior de descripción, explicación y justificación de la tecnología.

2.3 Elementos de la praxeología matemática.

La organización praxeológica está compuesta por los tipos de tareas (T), la técnica (τ), tecnología **(θ)** y la teoría **(Θ)**. Chevallard (2019) lo define como la unidad mínima de la actividad matemática compuesto por un cuarteto de elementos.

2.3.1Tipos de tareas (T)

Según Chevallard (1999), el primer elemento de una estructura organizada de una praxeología u OM está representada por las nociones de tarea t y tipos de tareas T. Sostiene que una o varias tareas t forma el tipo de tarea T y se representa con t ∈T. De lo anterior, se concluye qué tipos de tareas están conformados por una asociación de una o más tareas que guardan cierta relación. Para identificar una tarea o tipos de tareas, se comienza con un verbo de acción (reconocer diferentes tipos de funciones, calcular el área de una circunferencia, determinar la media aritmética de cinco números enteros positivos).

Además, Kaspary (2020) sostiene que, en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, una actividad humana se representa por medio de una tarea a realizar, la cual es un artefacto que existe dentro de una institución. A través de las tareas, se modela el primer elemento praxeológico llamado tipos de tareas.

En la figura 1, se presenta un ejemplo de tipo de tarea que es determinar la representación algebraica de la función cuadrática en un ostensivo lenguaje escrito.

Figura 1

Problema asociado a determinar la expresión algebraica de la función cuadrática.

> **Situación A: Cercamos un terreno**
>
> Un horticultor cuenta con 400 m de malla para delimitar un terreno rectangular. Si quiere aprovechar un muro ya existente para cercar uno de los lados, ¿cuál es la expresión que representa el área del terreno rectangular?

Nota. Ficha de matemática de cuarto grado de secundaria, Minedu, 2024, p.25

2.3.2 Técnica (τ)

Según Chevallard (1999), para una tarea t, que están relacionada con un tipo de tarea T, se necesita de un procedimiento para su solución y esta forma de realizarlo recibe el nombre de técnica τ. Proviene del griego tekhnê que significa saber hacer. Simultáneamente con el tipo de tarea T, se nombra el bloque práctico-técnico $[T/\tau]$. Además, menciona que una técnica puede ser superior a otra y puede resolver mayor cantidad de tareas, a lo que se denomina “alcance de la técnica”. Kaspary (2020) indica que, al haber varias técnicas, la institución puede elegir la preferencia de una técnica o impulsar la evolución de una técnica más eficaz o de menor costo de su implementación. Asimismo, la técnica representa un conjunto de procedimientos no necesariamente algorítmicos que permite resolver una parte o la totalidad de las tareas de tipo T a través de ciertos dispositivos y medios (Castela, 2017).

Por ejemplo, se describe la técnica que permite resolver la tarea representada en la figura 2 que es la siguiente: dibujar un rectángulo y asignar medidas x e y a sus lados, escribir la expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo en función de x e y (2x+y=P), despejar el valor de y en función de x, escribir la expresión algebraica que representa el área del rectángulo en función de x e y, sustituir el valor de y en la expresión algebraica que representa el área del rectángulo y aplicar la propiedad distributiva para obtener la expresión algebraica de la forma $A(x)=ax^2+bx$.

Figura 2

Técnica para representación algebraica de la función cuadrática.

Resolución

Representamos el terreno con sus medidas. Para ello, denotamos con x la medida (en metros) del ancho del terreno que se debe cercar.

- En un diagrama tabular, relacionamos y completamos los valores del ancho, largo y área del terreno.

  Variable independiente: ancho del terreno (x)

  Variable dependiente: área del terreno $A(x) = xy$

  * Del dato:

  $x + x + y = 400$

  $y = 400 - 2x$

- Observamos que el área del terreno está dada por:

$$A(x) = 400x - 2x^2$$
$$A(x) = -2x^2 + 400x$$

Nota. Ficha de matemática de cuarto grado de secundaria, Minedu, 2024, p.25

2.3.3 Tecnología (θ)

Según Chevallard (1999), la tecnología justifica racionalmente a la técnica y lo hace entendible al momento de realizar las tareas de tipo T. La tecnología permite determinar por qué funciona una técnica a través de la explicación, descripción y justificación. Además, en toda institución, la técnica que soluciona a un tipo de tarea T, siempre está acompañada, al menos por un vestigio de tecnología. Por último, la producción de técnicas es uno de los atributos de la tecnología, lo que implica que la tecnología tiene dos perspectivas: uno como explicación y otro como producción de la técnica. De lo anterior, Serrano (2013) concluye que la tecnología contribuye dándole importantes elementos que favorezcan al desarrollo de la técnica con el fin de ampliar su alcance, vencer sus limitaciones y posibilitar la producción de nuevas técnicas.

En la misma línea, Castela (2017) menciona que la tecnología es el discurso racional en relación con la técnica y no se reduce a simples teoremas al emplearse en el desarrollo de las tareas contemporáneas. Asimismo, la tecnología favorece el mejoramiento de la eficacia y la reducción de los errores de la técnica al desarrollar el tipo de tareas. Además, evalúa a la técnica en relación con su eficiencia, adaptabilidad y limitaciones en comparación con otras técnicas respecto a los diferentes tipos de tareas.

La tecnología que se utiliza en la figura 2 es la expresión algebraica de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ y propiedades de los números reales, así como propiedades de la geometría como medida de lados (longitud de lados) y el área de región rectangular.

2.3.4 Teoría (Θ)

Chevallard (1999) manifiesta que la Teoría representa un nivel superior de justificación, explicación y validación de la tecnología, a su vez justifica la aplicación de ciertas técnicas para el desarrollo de un conjunto de tareas. La teoría respalda la autenticidad de la tecnológica y en conjunto con ella conforma el bloque tecnológico-teórico. Asimismo, Serrano (2013) expresa que la teoría es el discurso superior de la justificación de la tecnología y en relación a la actividad matemática representa por decisión metodológica el último nivel de justificación. Además, la teoría está conformado por principios y verdades ya asumidas por la institución, que enfrentan los problemas y dificultades cuando se cuestiona la existencia de un tipo de tarea o la forma cómo se debe resolver. Por ejemplo, las teorías que se representa en la tarea de la figura 2 utilizan propiedades de los números reales (Θ_1) y también de la Geometría (Θ_2).

2.3.5 Generador de tipo de tareas (GT_i) y variables didácticas (V_i)

Según Chaachoua (2018) se presenta la noción de generador de tipos de tareas que, al tener un sistema de variables, permite la creación de diferentes tipos y subtipos de tarea según una estructura específica que considere las relaciones de lo más general a lo más específico. Se define la estructura de generador de tipos de tarea por $\mathrm{GT} = [\text{verbo de acción};\ \text{sistema de variables}]$, donde la pareja verbo de acción y el complemento corresponde a un tipo de tarea, así como el sistema de variable que corresponde a un catálogo de diferentes variables con sus respectivos valores que pueda tomar. Un ejemplo sería el generador de tipos de tareas GT= [calcular la suma de dos números enteros, V_1=el tamaño del primer número en relación a dos dígitos, V_2=tamaño del segundo número en relación a tres de dígitos] en donde el complemento es la suma de dos números enteros. De lo mencionado, el tipo de tarea más genérico es T= (Calcular la suma de dos números enteros).

Un ejemplo de ello es 12 (2 dígitos) + 345 (3 dígitos) = 357 (sí cumple) y 5 (1 dígito) + 20 (2 dígitos) = 25 (No cumple).

El generador de tareas no se debe confundir como un tipo de tarea, sino que su principal función es facilitar en formar nuevos tipos de tareas. En la tabla 5, se muestra un ejemplo en función a nuestro objeto de investigación, donde GT= [reconocer la representación algebraica de la función cuadrática, V_1=forma de la expresión algebraica, V_2=ostensivos, V_3=Naturaleza de los coeficientes].

Tabla 5

Generador de tipo de tarea sobre la forma general de la función cuadrática.

GT: Reconocer la representación algebraica de la función cuadrática, V_1; V_2; V_3		
V_1: Forma de la expresión algebraica	**V_2: Ostensivos**	**V_3: Naturaleza de los coeficientes**
1.ax^2+c	1.Lenguaje natural o	1.Números enteros

	escrito	
2.ax^2+bx	2.Pictográfico	2.Números racionales
3.ax^2+bx+c	3.Tabular	

Fuente. Autoría propia

2.3.6 Alcance de la técnica

De las investigaciones de Kaspary, Chaachoua y Bessot, (2020) se tomará la noción de alcance de una técnica.

El alcance teórico de la técnica PTh(τ): Es un conjunto de tareas donde la técnica facilita en el desarrollo de cada uno de las tareas integrantes de ese conjunto sin tener en cuenta las condiciones de su ejecución. Se analiza la técnica desde el punto epistemológico sin considerar el aspecto cognitivo de la parte del sujeto.

Por ejemplo, la tarea $\mathrm{t}1$(graficar la función $f(x) = x^2 + 4x + 4$)pertenece al alcance teórico de las técnicas τ(generar una tabla de valores) y τ(graficar puntos en el sistema de ejes cartesianos), puesto que la única condición es que la técnica mencionada resuelva la tarea t_1.

Alcance pragmático de una técnica P(τ): Es el conjunto de tareas donde la técnica es confiable, es decir, con bajo riesgo de error y a un costo aceptable. La técnica generalmente es efectiva dentro de este intervalo, pero falla fuera de él.

Un ejemplo de ello es la tarea $\mathrm{t}1$(graficar la función $f(x) = x^2 + 4x + 4$). En esta, se presentan estas técnicas que resuelven la tarea mencionada que son τ(generar una tabla de valores) y τ(graficar puntos en al sistema de ejes cartesianos). Según lo mencionada en el párrafo anterior, la τ (generar una tabla de valores) es menos costosa que τ (graficar puntos en el sistema de ejes cartesianos) para resolver la tarea t1. En conclusión, la tarea t1 pertenece al alcance pragmático de τ(generar una tabla de valores).

Alcance institucional de una técnica asociada a un tipo de tara T (PI(τ)): Es el conjunto de tareas donde esta técnica es demandada por una institución. Este alcance está definido por las condiciones y restricciones de la aplicación de la técnica τ dentro de la institución.

Un ejemplo de ello se evidencia en la tarea t1(graficar la función $f(x) = x^2 + 4x + 4$). Se moviliza la demanda de las técnicas esperadas por la institución, que son τ(generar una tabla de valores) y τ(graficar puntos en a sistema de ejes cartesianos).

Núcleo de la técnica: Es definida como una técnica que está representada por una agrupación de tipos de tareas. Para efectuar esta tarea, es necesario utilizar ostensivos adecuados, que presenta valencia instrumental apropiada para su solución. Asimismo, los ingredientes de las técnicas son diversos y variados que depende del grado en la que se ubica su descripción.

Con respecto a la t_1: Calcular el punto máximo de la $f(x) = x^2 + 4x + 4$; para realizarlo, se utiliza ostensivo de lenguaje algebraico y la fórmula del vértice V(h,k) donde h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

Para t_2: Calcular el punto máximo de la $f(x) = x^2 - 4x + 1$; también, se utiliza el ostensivo algebraico para calcular el vértice V(h ;k) . Además, se usa h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$). Se observa que estas dos técnicas son diferentes, porque utilizan diferentes dispositivos. Asimismo, Kaspary (2020) señala que para que exista equivalencia tiene que existir un núcleo cuya descripción permita resolver uno o varios tipos de tareas. A modo de ejemplo, $\tau_{\text{vértice-3}}$ utiliza como núcleo obtener el vértice por medio de completar cuadrados f(x)=$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2.a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right] + c$, donde a$\neq 0$ f(x)=a$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c. En base a este núcleo y los diversos ostensivos, se puede realizar una variedad de tipos de tareas que estén integrados con esta técnica.

2.4 Clases de praxeología.

Según Chevallard (1999) propone diferentes tipos de praxeologías u organizaciones matemáticas como herramientas que permiten analizar en forma precisa la actividad matemática en una determinada institución. Esta clase permite determinar el grado de complejidad creciente de las praxeologías las cuales son puntuales, locales, regionales y globales.

Organización Matemática Puntual (OMP): Es un único tipo de tarea que se asocia una tripleta formada por una técnica, una tecnología y una teoría. Se concluye que una praxeología puntual es representa en la forma $[T/\tau/\theta/\Theta]$, la cual está constituido por un bloque práctico-técnico y por un bloque tecnológico-teórico. Lucas (2010) menciona que en esta primera OM predomina los tipos de problemas y la técnica. Asimismo, indica que son raros estos tipos de praxeologías, porque generalmente para una teoría le corresponde varias tecnologías y a su vez esta justifica a varias técnicas lo que permite resolver varios tipos de problemas.

Organización Matemática Local (OML): Este tipo de praxeología son la combinación e integración de varias OM puntuales centrados por una misma tecnología [Ti, τi, θ, Θ]. Asimismo, Lucas (2010) menciona que esta tecnología permite la justificación, explicación y producción de técnicas de todas las praxeologías puntuales que forma parte de ella. Estas praxeológicas permiten responder a ciertas interrogantes problemáticas que no pueden ser resueltos por otras praxeologías puntuales.

Organización Matemática Regional (OMR): Son aquellas praxeologías locales que están coordinadas, articuladas e integradas por medio de una teoría común [Tij, τij, θi, Θ].

Lucas (2010) confirma que el discurso teórico desempeña un papel fundamental en la integración de las praxeologías locales. Además, esta teoría se caracteriza por describir, justificar y producir diversas tecnologías de las praxeologías locales, lo que permite su integración en una praxeología regional.

Organización Matemática Global (OMG): Corresponde a la integración de varias praxeologías regionales a partir de la agrupación de diversas teorías [$Tijk$, τijk, θjk, Θk].

2.5 Objetos ostensivos y no ostensivos

Se define ostensivo a todo objeto dotado de una forma física perceptible; es decir, aquellos objetos que se ven, se tocan, se oyen, etc. Además, son objetos que presentan cierta materialidad y que pueden ser percibidos en la realidad por el sujeto como los sonidos, las escrituras, los gráficos, los gestos o discursos (Bosch, 2000).

Los objetos ostensivos presentan un rasgo distintivo, puesto que son objetos con el poder de ser manipulables por el sujeto. Por ejemplo, los sonidos pueden ser emitidos como recibidos, y los gestos pueden realizarse y percibirse. Además, los objetos ostensivos presentan de dos formas. En primer lugar, está la valencia instrumental, que está presente en las técnicas que permite realizar el desarrollo de tareas específicas. Esta forma de valencia presenta dos rendimientos de variable, por ejemplo, la notación de $\sqrt{\ }$ y su representación exponencial como ½ son equivalentes en términos de su instrumentabilidad, pero $x^{1/2}$ tiene mayor instrumentalidad al realizar la derivada de la función que $\sqrt{x}$, ya que, en la primera, se emplea una técnica más avanzada que en la segunda. En segundo lugar, la valencia semiótica consiste en utilizar el objeto ostensivo en diversas actividades lo que genera a que esta valencia esté siempre abierta. Puede representar diferentes objetos en relación al tipo de actividad que se considere. Asimismo, al ser movilizado por una técnica concreta, permite adquirir su semiótica efectiva. Esto indica que no se puede sustituir la notación $log\, x$ por la notación $\sqrt{x}$ (Bosch 1994).

Los objetos no ostensivos son todo objeto cuya existencia es reconocida institucionalmente, aunque su existencia no pueda ser percibida ni mostrada directamente por sí mismos como las ideas, los conceptos, creencias, etc. Sin embargo, se pueden invocar o evocar estos objetos mediante la manipulación de una serie de objetos ostensivos adecuados; sin embargo, dicha manipulación siempre está dirigida y controlada por los propios objetos no ostensivos. Un ejemplo es el concepto de función cuadrática. No existiría sin una serie de actividades manipulativas de objetos ostensivos como son elementos lingüísticos, gráficos, gestuales, escritos y la manipulación concreta de objetos materiales (Bosch 2000).

Por último, los ostensivos son empleados para generar las praxeologías matemáticas, así como permiten la descripción de cada uno sus componentes. Lo ostensivo nos brinda una comprensión de cómo afecta en la evolución de la praxeología matemática y la reducción de la mismas en el tipo de tarea, la técnica, tecnología y teoría (simplifican y controlan estos elementos). Los ostensivos son objetos de discusión de la noosfera, porque se movilizan para brindar vida a las praxeologías matemáticas. Asimismo, se divide en dos criterios como herramienta. En primer lugar, los ostensivos nos permite realizar observaciones directas. En segundo lugar, la noosfera los toma en consideración para realizar criterios de juicios al realizar la interacción con las instituciones (Kaspary, 2020).

2.6 Modelo epistemológico de referencia (MER)

Según Gascón (2014) el modelo epistemológico de referencia (MER), al ser construido en el ámbito de la TAD, se constituye como hipótesis, conjeturales o tipos de ideas que desempeñan el rol de herramienta en la emancipación epistemológica de la didáctica de las matemáticas, alejándose de los modelos epistemológicos dominantes presentes en las instituciones que forman parte el objeto del estudio. Además, los fenómenos didácticos ganaron notoriedad a partir de la elaboración del MER y se incrementó el saber de dichos fenómenos al proporcionar herramientas para plantear problemas didácticos.

En la misma línea Fonseca et al. (2007) menciona que el MER se representa como una hipótesis provisional que se modifica y revisa constantemente, al ser contrastado experimentalmente. Además, Gascón (2011) señala que, en el ámbito de la TAD, el MER se representa un modelo matemático, y la estructura del MER se concibe como una red de praxeologías matemáticas donde cada praxeología anterior se amplia y completa, generando dicho modelo.

Según García, Barquero, Florense y Bosch (2019) señalan que la construcción del MER debe estar relacionado en el ámbito de la actividad matemática de estudio; además, debe ser compleja y laboriosa en su elaboración. Esto implica abordar el análisis e interrogantes de múltiples fuentes de información tales como fuentes sabias, generadas por instituciones productoras del conocimiento en el campo de las matemáticas. Otras fuentes son las escolares, que corresponde a las matemáticas de aquellas instituciones que se dedican a la enseñanza de las mismas. Finalmente, están las fuentes históricas, que permiten rastrear conocimiento matemático a lo largo del tiempo e identifica su origen y evolución en las instituciones.

Por último, García y Sierra (2015) mencionan que la transposición didáctica resalta la importancia de explorar los aspectos epistemológicos. Sirve como fundamento para comprender los factores que facilitan, condicionan e incluso obstaculizan la construcción de ciertos saberes en una institución determinada. Además, aborda cómo se proponen construir dichos saberes en una institución específica. Desde la perspectiva de las instituciones, se desarrolla un modelo teórico básico con el fin de analizar la transición y evolución de los saberes en distintas instituciones.

2.7 Modelo praxeológico de referencia (MPR)

La noción del Modelo Epistemológico de Referencia (MER) como resultado del desarrollo de la TAD ha evolucionado a un modelo praxeológico de referencia (MPR). Esto se debe a las praxeologías propias del MER, pues cambian, desaparecen, renacen entre las instituciones (Gascón, 2014). Además, el MPR consiste en una descripción explícita de los elementos praxeológicos (T, τ, θ, Θ) de alguna actividad humana y que utilizamos como referencia para estudiar esa actividad. Al ser un modelo puede ser más o menos detallado lo que dependerá de las necesidades de nuestro objeto de estudio (Wijayanti y Winslow 2017). En la misma línea, el MPR permite observar, describir y analizar las praxeologías matemáticas. Asimismo, se modela la praxeología presente en los documentos curriculares y manuales lo que permite la descripción de praxeologías u organizaciones matemáticas (Bosch y Gascón, 2004, citado por Vilca, 2021).

Para Quijano y Corica (2017), y San Román (2021), la estructura del MPR consiste en describir un sistema de praxeologías matemáticas por medio de un mapa de recorrido relacionado al objeto matemático de estudio. Es decir, a partir Q_0, se desarrolla una estructura praxeológica que puede ser descrita mediante preguntas y respuestas. También, mencionan que el MPR es una hipótesis provisional que es susceptible a ser modificado y revisado constantemente al ser contrastado experimentalmente.

2.8 Metodología

Nuestro trabajo se desarrolla dentro del ámbito de la investigación cualitativa. Según Taylor y Bogdan (1986), quienes indican: “la frase metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable” (p.20). En otras palabras, la investigación cualitativa tiene como objetivo en observar, describir y analizar el fenómeno estudiado que se muestran en su ambiente natural.

Desde esta aproximación, Hernández, Fernández y Baptista, 2010 especifican lo siguiente:

> La investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto.
>
> El enfoque cualitativo se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los

participantes perciben subjetivamente su realidad. (citado por Quentasi, 2015, p.364).

También, nuestra investigación se centra en un enfoque bibliográfico, ya que nos enfocaremos en el análisis de los libros de texto de matemática correspondientes al ciclo VII distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú en los colegios nacionales como el Diseño Curricular Nacional y mapas de progreso. En este sentido, Gil (2002) menciona:

> Una investigación bibliográfica es desarrollada con base en el material ya elaborado, constituido principalmente de libros y artículos científicos. Aunque, en casi todos los estudios se ha exigido algún tipo de trabajo de esta naturaleza, ya hay investigaciones desarrolladas exclusivamente a partir de fuentes bibliográficas. (p.44)

Marconi y Lakatos (2003) sostienen lo siguiente:

> La investigación bibliográfica no es una mera repetición de lo que ya fue dicho o escrito sobre algún asunto, sino que propicia el examen de un tema bajo un nuevo enfoque, llegando a conclusiones innovadoras. (p.183)

En nuestra investigación, para realizar el análisis de libros de texto, se centra en el modelo metodológico propuesto por Almouloud (2015). Se considera que este análisis se puede complementar con el diseño curricular nacional, documentos oficiales, revistas, entre otros, puesto que contribuye como principal aporte a la investigación ecológica o antropológica. Además, se presenta los componentes que detallan “las características del libro de texto, el contexto que se produce y una característica de la relación institucional” (Chaachoua y Comiti, 2010 citado en Almouloud, 2015, p.13).

Por otra parte, Chaachoua y Comiti (2010) plantean diversos elementos para el análisis de los libros de texto tales como el momento de publicación del libro didáctico, la representatividad del material, la estructura del libro, el análisis ecológico y praxeológico.

El momento de publicación del libro didáctico: Chaachoua (2014) afirma que el sistema educativo no es estático, sino que se transforma en cada período, siendo uno de las referencias de esa transformación el currículo. Esto implica que el libro de texto, como portador del currículo, debe ser una herramienta generada mediante una selección adecuada de contenidos que favorezcan en su representación en concordancia con las características específicas de las matemáticas y los requisitos de lo que demanda la sociedad.

La estructura del libro: El estudio de la estructura de este material nos describe la ubicación específica de las actividades, la presencia o ausencia de ejercicios resueltos y, sobre todo, los comentarios de los propios autores sobre el rol de los estudiantes y profesores al trabajar con este recurso (Chaachoua, 2014).

La representatividad del libro: En países con una variedad de libros de texto disponibles, resulta indispensable seleccionar uno o más manuales acorde con la exigencia del docente (Almouloud, 2015). En nuestro caso, se analiza los libros de texto del nivel VII que distribuye el estado, ya que su utilización es obligatoria en los colegios públicos a nivel nacional.

El análisis ecológico: Es un concepto generado por dos nociones: hábitat, que se designa al lugar donde vive este objeto matemático que se va analizar; y nicho, que designa la función de este objeto matemático y su interrelación con otros objetos de su entorno (Chaachoua y Comiti ,2010).

Según este análisis, tiene como objetivo intentar dar respuesta a las siguientes preguntas: "¿El objeto de conocimiento forma parte de las recomendaciones curriculares para la educación básica? ¿Está presente en los libros didácticos? ¿Cómo se presenta y con qué finalidad?" (Almouloud, 2015, p.15). Si este saber se trabaja efectivamente en la escuela, ¿en qué circunstancias lo realiza? Si no se consigue, ¿cuáles son las causas de este saber que queda excluido? Asimismo, con las respuestas de estas interrogantes, facilitan la comprensión del propósito de este saber en la institución escolar.

El análisis praxeológico: Desde la perspectiva de la TAD, el análisis praxeológico permite estudiar la relación institucional. Este análisis facilita la identificación del cuarteto de elementos de las organizaciones matemáticas $(T, \tau, \theta, \Theta)$ relacionadas con el objeto matemático estudiado (Chaachoua, 2014).

La TAD establece que toda actividad humana se reduce a la realización de una tarea t de un tipo de tarea T, utilizando una técnica τ, respaldada por una tecnología θ, que a su vez está justificada por una teoría Θ. En resumen, toda actividad humana implica una organización $(T, \tau, \theta, \Theta)$ denominado praxeología u organización praxeológica (Chaachoua y Comiti ,2010).

Revisión los libros de texto: Según Almouloud (2015), el análisis de los libros se realiza con la siguiente estructura.

- Identificación de los tipos de tarea: Se analizan las actividades propuestas del objeto matemático estudiado que esté presente en el texto. Al examinar los problemas o actividades en el libro, se clasifican según el tipo de tarea que le corresponde. En concordancia con Artaud (2005), se enfatiza que la agrupación de tareas consiste en analizar si son suficientemente cercanas (citado en Chaachoua y Comiti, 2010). Por ese motivo, se representa un tipo de tarea. Asimismo, dicha agrupación con respecto a su tamaño depende del modelo epistemológico, en qué institución se sitúa y cómo se lleva acabo el trabajo.

- Identificación de técnicas: Después que se han identificado las tareas, se procede a caracterizar las técnicas que facilita su resolución. Posteriormente, en los problemas propuestos, se analiza su carácter matemático.
- Identificación de tecnologías: A partir del análisis de las opiniones de los autores en los libros, se construye las tecnologías, ya que son importantes para la justificación de las técnicas.

Evaluar tareas, técnicas y tecnologías: Chevallard (1999) propone tres criterios para evaluar los tipos de tareas. En primer lugar, está la identificación, que corresponde si los tipos de tareas están bien definidos y se presenta en forma clara. En segundo lugar, está la razón de ser si los tipos de tareas están explicados de manera correcta. En tercer lugar, está la relevancia. Esta consiste en que los tipos de tareas se encuentran con mayor frecuencia en escenarios matemáticas y son significativos a las necesidades de los estudiantes.

Con respecto a las técnicas, también son evaluadas tomando los mismos criterios de evaluación de los tipos de tareas. Asimismo, estas técnicas tienen que brindar respuestas a ciertas preguntas: ¿si están bien elaboradas o solo se insinúa?, ¿son convenientes para utilizar?, ¿son significativa en su relevancia y fiables dadas su forma de uso? o ¿son suficientemente comprensibles?

Por último, en la evaluación del bloque tecnológico-teórico, se debe contestar a ciertas preguntas: ¿las formas de justificación son apropiadas para la valides desde la perspectiva de la matemática?, ¿están ajustados a la solución de los problemas diseñados? o ¿son científicamente legítimos los argumentos usados?

Construir un modelo praxeológico de referencia.

A partir de las descripciones realizadas sobre el objeto de estudio en las fichas de matemática, se recomienda una organización matemática relacionada a la función cuadrática, donde se considera el cuarteto de elementos que genera la praxeología como son los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías predominantes a nuestro objeto de investigación. Para tal fin, la presente investigación se apoya del modelo praxeológico de Chevallard (1999) y del generador de tareas propuesto por Chaachoua et al, (2019). Esta consiste en que el generador de un tipo de tareas ($\boldsymbol{GT}$i) y sus variables didácticas (Vi) permiten establecer una relación entre lo específico y lo genérico al organizar los tipos de tarea y desarrollar un conjunto de subtipos de tareas.

Capítulo III: Estudio de la función cuadrática

En este capítulo, realizaremos un estudio sobre la función cuadrática en el que se explica los aspectos históricos y epistémicos. Asimismo, se identificarán las condiciones que posibilitan su origen y desarrollo. Además, se analizará desde una perspectiva matemática y su tratamiento desde el Currículo nacional (CN).

3.1 Aspecto histórico epistemológico

3.1.1 La noción de la función cuadrática

Según Posada y Villa (2008), en relación con las nociones cuadráticas, se identifican cuatro momentos clave: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. Esto confirma que, desde una perspectiva histórica, las ecuaciones y las funciones tuvieron una génesis independiente, dado que las relaciones funcionales formales emergieron únicamente cuando el lenguaje algebraico alcanzó un cierto nivel de desarrollo.

Al respecto, el concepto de ecuación, ha estado presente a lo largo de la historia a través de diversas culturas, particularmente vinculado a situaciones que involucran nociones cuadráticas. Los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), según señalan los autores, desarrollaron estrategias de cálculo de carácter retórico, alejadas de una notación simbólica formal. Si bien sus métodos no eran explícitamente geométricos, como lo serían los griegos posteriormente, no se puede descartar que en algunos casos hayan pensado en términos geométricos. Un problema típico del algebra babilónica según Kline (1992) es “hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado" (p.26). En la notación contemporánea, x y $\bar{x}$ eran los números buscados por los babilonios, tales que $x\bar{x} = 1$ y $x + \bar{x} = b$.

Estas representaciones conducen a la ecuación cuadrática $x^2-bx+1=0$, cuyas raíces son $\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$ y $\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$; en la que se demuestra que los babilonios concebían el “cuadrado” como el producto de una cantidad consigo mismo. Asimismo, utilizaban un álgebra retórica, donde las operaciones matemáticas se escribían completamente en texto escrito, sin la utilización de notaciones simbólicas formales.

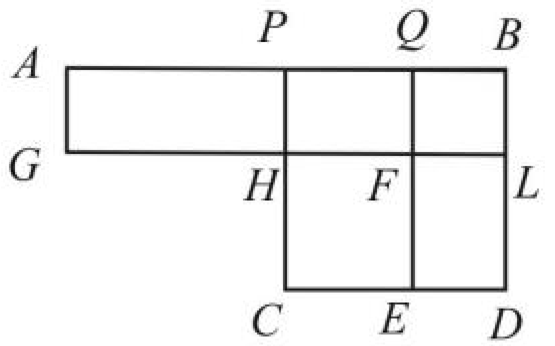
Por otra parte, en la cultura griega (300 a.C. - 200 d.C.), las nociones cuadráticas estuvieron intrínsecamente vinculadas a su enfoque geométrico, basado en razonamientos deductivos. La expresión "al cuadrado" o "es el cuadrado de..." hacía referencia a áreas y superficies, siendo representada de forma retórica y sin notación algebraica formal. En el Libro II de *Los Elementos* de Euclides, se presenta una noción más estructurada del concepto cuadrático desde una perspectiva geométrica. Por ejemplo, en la Proposición 5 se afirma según Ortiz (2005):

“si una línea recta es dividida en partes iguales, y también en partes desiguales, el rectángulo contenido por las partes desiguales, junto con el cuadrado sobre la línea entre los puntos de sección, es igual al cuadrado sobre la mitad de la línea (p.83).

En la figura 3 ilustra esta relación geométrica, mostrando como una proposición puede interpretarse considerando un segmento de línea recta AB, dividido en partes iguales en P y en partes desiguales en Q. Matemáticamente, se expresa como:$(AO)(QB)+(PQ)^2=(PB)^2$.

Figura 3

Proposición 5



Nota. Tomado de Ortiz, 2005, p. 84.

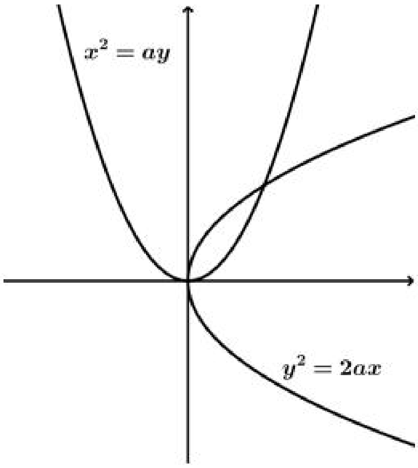
Esta proposición ilustra cómo Euclides integró las nociones cuadráticas dentro de un enfoque geométrico, estableciendo relaciones fundamentales que posteriormente sirvieron como base para el desarrollo de la geometría algebraica.

El matemático Diofanto, siete siglos después, aporto avances en el empleo de un álgebra sincopada para expresar potencias desde la perspectiva geométrica. Más tarde, los matemáticos árabes adoptaron y expandieron las construcciones geométricas griegas, definiendo el "cuadrado" como una cantidad geométrica basada en la definición euclidiana. Sin embargo, este enfoque limitó el desarrollo del concepto de números negativos, ya que carecían de una representación geométrica que los hiciera "evidentes" o "reales".

El estudio de las cónicas está intrínsecamente ligado a Apolonio de Perga (260 a.C.), quien realizó un tratado fundamental sobre las secciones cónicas. Este trabajo tuvo un impacto significativo en el desarrollo posterior de la geometría analítica y los estudios del movimiento. Asimismo, en el trabajo de Hipócrates de Quíos (s. V a.C.), quien, al abordar el problema de la duplicación del cubo, introdujo nociones relacionadas con las cónicas al determinar medios proporcionales, que, en notación algebraica, siendo x e y se tiene que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$ entonces, $x^2=ay$ e $y^2=2ax$, cuya representación gráfica se muestra en la figura 4.

Figura 4

Duplicación de un cubo



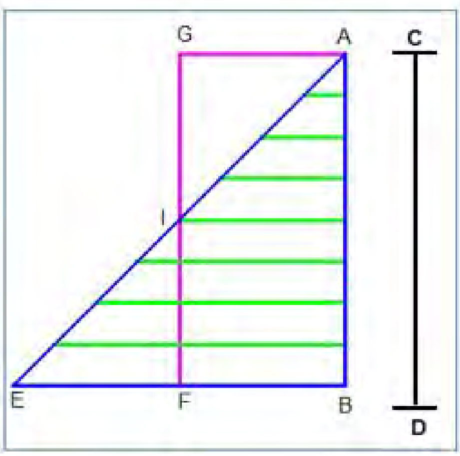
Nota: Tomado de Ortiz, 2005, p. 90

Dentro de la cinemática y su relación con las nociones cuadráticas, los trabajos de Galileo Galilei marcaron un hito al transformar la ecuación cuadrática, originalmente asociadas a superficies geométricas, en un recurso para modelar matemáticamente fenómenos físicos, especialmente en el estudio del movimiento.

En la figura 5, Galileo se muestra visualmente el movimiento uniformemente acelerado, donde el tiempo de movimiento se traza como un segmento de línea recta (AB). El incremento uniforme de la velocidad se representa en el triángulo (AEB), cuya área es equivalente con el área del rectángulo (BAGF), que simboliza el movimiento uniforme.

Figura 5

Demostración de Galileo



Nota: Tomada de Cantoral, 2001, p. 15.

La noción de función se remonta a tiempos antiguos pero su consolidación como concepto es reciente. Newton fue uno de los primeros en consolidad el concepto de función y construyo el cálculo diferencial con la utilización de la geometría analítica, así como del álgebra simbólica.

Según Newton (1687, citado en Villa y Mesa, 2008), se establece una relación entre los cuadrático y la geometría analítica al “Descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada” tipo de tarea (p.5). Newton utilizó un plano cartesiano primitivo basado en la intersección de dos rectas perpendiculares, lo que permitió demostrar esta proposición. Generando un paso para la conceptualización de la función en tanto se pueda hallar la relación entre cualquier instante y un punto especifico de la parábola. En conclusión, la ecuación de segundo grado es el estudio analítico de la parábola (Villa y Mesa 2009). En el trabajo, Newton relaciona las situaciones cuadráticas en el plano mediante una expresión algebraica, la cual se interpreta como un conjunto de puntos representadas por dos magnitudes. Posteriormente, se realiza el análisis de la curva utilizando una ecuación cuadrática, que da lugar a una función cuadrática.

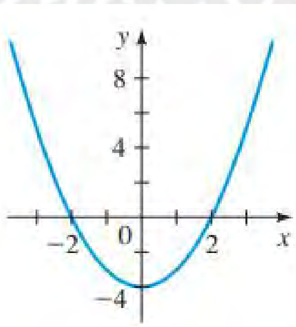
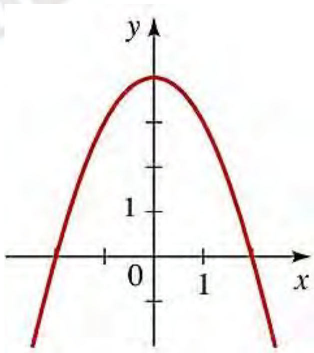
Por tanto, todo lo anterior evidencia cómo el desarrollo del concepto de función cuadrática no fue lineal, sino un proceso basado en conocimientos previos que se reformularon para generar nuevos conceptos. Esto resalta la importancia de integrar saberes empíricos en un sistema racional, convirtiéndolos en una fuente de innovación matemática.

3.1.2 Concepto y propiedades de la función cuadrática

Stewart et al., (2012) define como **función cuadrática** a un polinomio de grado 2, que tiene la forma: $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde a ≠ 0, cuya representación gráfica tiene la forma de una parábola.

Tabla 6

Representación y característica de la función cuadrática

Representación grafica		
Representación algebraica	$P(x) = x^2$ -4	$P(x) = -2x^2 + 3x + 1$

Característica	La representación gráfica de la función cuadrática es cóncavahacia arriba si $a > 0$ y es cóncava hacia abajo si $a < 0$

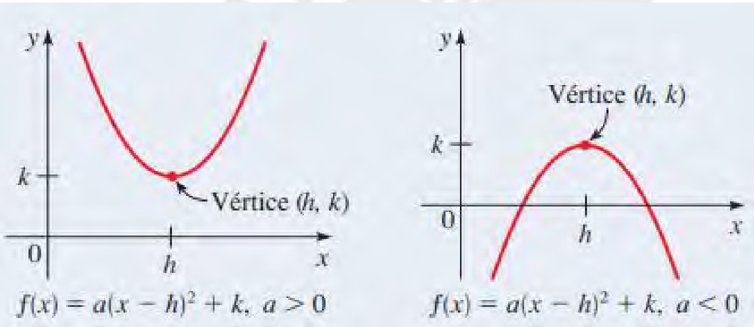
Fuente. Adaptado de Stewart et al., (2012, p. 189)

En la Tabla 6, se observa que la representación gráfica de la función cuadrática está determinada por el coeficiente principal (el coeficiente del término cuadrático). Si este coeficiente es mayor que cero, la gráfica es cóncava hacia arriba; en caso contrario, es cóncava hacia abajo.

Por otra parte, el mismo autor, señala que una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ se puede expresar en la forma normal $f(x) = a(x-h)^2+k$ mediante el método de completando cuadrados. La figura 6, se observa que la gráfica de f es una parábola con vértice (h, k). La orientación de la parábola depende del signo del coeficiente a: se abre hacia arriba si a>0 y hacia abajo si a < 0.

Figura 6

Gráfica de la forma normal de una función cuadrática



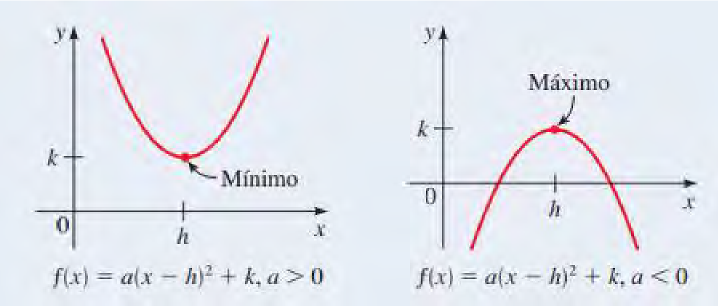
Nota: Tomada de Stewart et al., 2012, p. 224.

A partir de lo anterior, se puede reconocer que el valor mínimo o máximo en una función cuadrática, como se ilustra en la figura 7, se determina f en su forma estándar $f(x) = a(x-h)^2+k$. Además, el valor máximo o mínimo de f ocurre cuando x=h.

- Si a>0, el valor mínimo de f es f(h)=k.
- Si a<0, el valor máximo de f es f(h)=k.

Figura 7

Valor máximo y mínimo de una función cuadrática.



Nota: Tomada de Stewart et al., 2012, p. 225

Ahora analizamos que ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Stewart et al., (2012), considera las siguientes transformaciones: traslación vertical u horizontal; cambio de tamaño vertical u horizontal y reflexión. Además, estas propiedades tienen un valor relevante para poder realizar la gráfica de la función y su comprensión facilita el desarrollo en el proceso de graficar.

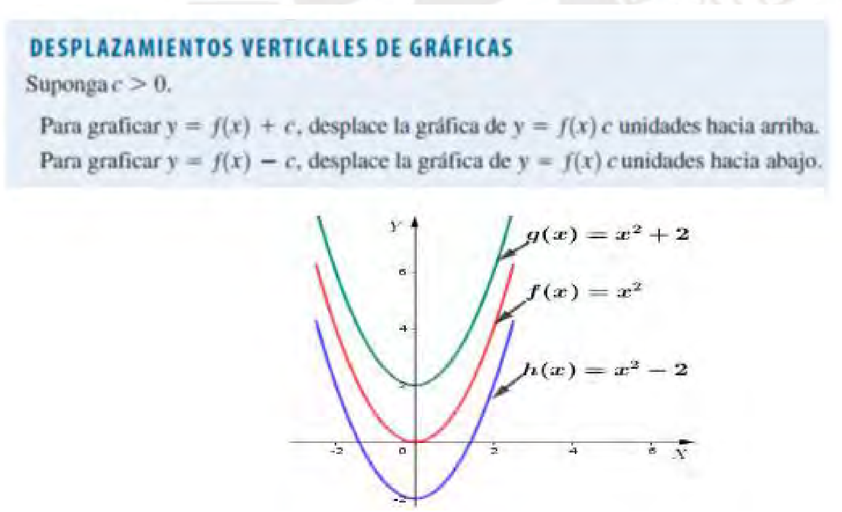
Traslación vertical (Suponga c > 0).

Para graficar y=f(x)+c, desplace la gráfica de y=f(x), c unidades hacia arriba.

Para graficar y=f(x)-c, desplace la gráfica de y=f(x), c unidades hacia abajo.

Figura 8

Traslación vertical de una función cuadrática



Nota: Tomada de Stewart et al. 2012, p. 180

En la figura 8, en la representación gráfica de la función cuadrática se observa que el vértice de g se desplaza a 2 unidades arriba del vértice a f y el vértice de h se desplaza 2 unidades hacia debajo de la función f.

Stewart et al. (2012) presenta las propiedades de desplazamiento horizontal, donde menciona que el vértice de este objeto matemática se traslada de posición sobre el eje x.

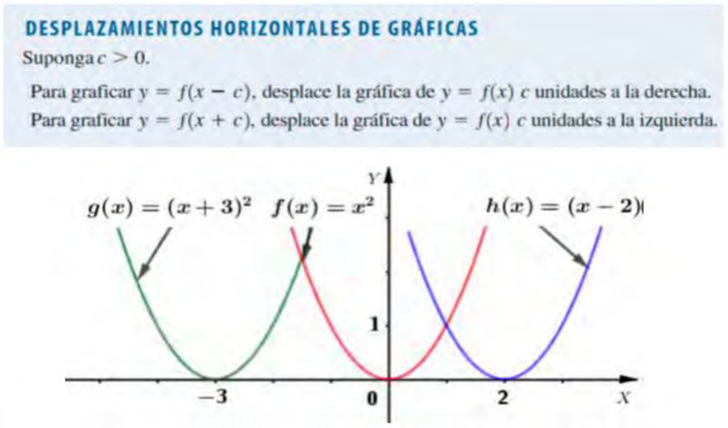
Traslación horizontal (Suponga c > 0).

Para graficar y=f(x – c), desplace la gráfica de y=f(x), c unidades a la derecha.

Para graficar y=f(x + c), desplace la gráfica de y=f(x), c unidades a la izquierda.

Figura 9

Traslación horizontal de una función cuadrática



Nota: Tomada de Stewart et al. 2012, p. 181

En la figura 9, se muestra que para trasladar hacia la izquierda la representación gráfica de f se suma una constante positiva a x. Para trasladar hacia la derecha la representación gráficade la función, se suma una constante negativa a x.

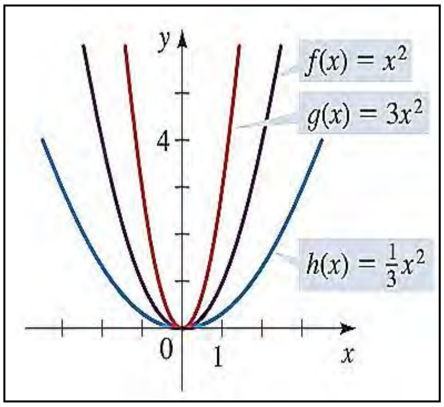
3.1.3 Cambio de tamaño vertical u horizontal de la gráfica de la función cuadrática

De acuerdo con Stewart et al. (2012), cambiar de tamaño de la representación gráfica de una función f significa estirar la gráfica o comprimirla, ya sea vertical u horizontalmente. Esto se logra multiplicando f o la variable independiente x por una constante apropiada c, donde $c \in R$.

En la figura 10, se observa que, la parábola $f(x) = 3x^2$ se estira verticalmente y comprime horizontalmente respecto a la función $f(x) = x^2$. De forma similar, $f(x) = \frac{1}{3}x$ se comprime verticalmente y estira horizontalmente en relación a $f(x) = x^2$.

Figura 10

Cambio de tamaño de la función cuadrática



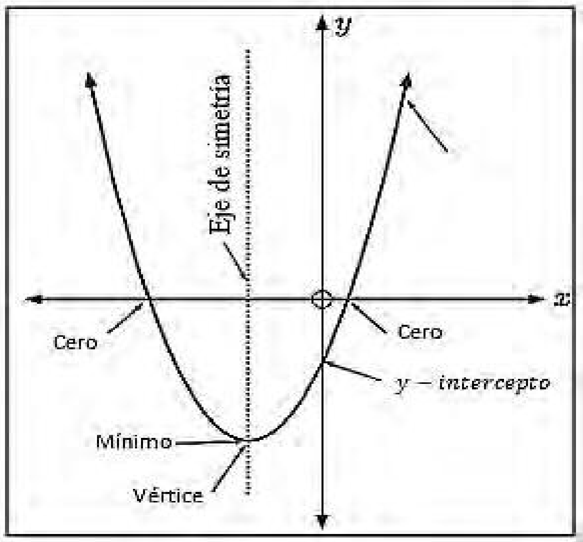
Nota: Tomada de Stewart et al. 2012, p. 183

Matemáticas Nivel Superior (2012) del bachillerato internacional, expresa los elementos y terminologías de la función cuadrática de la siguiente forma: La gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, se denomina parábola. El punto donde gira el gráfico se llama vértice. Si el gráfico se abre hacia arriba, la coordenada del vértice es el punto de giro mínimo o el *punto de inflexión mínimo* y el gráfico es *cóncava hacia arriba.* Si el gráfico se abre hacia abajo, la coordenada y el vértice es el *punto de giro máximo* o el *punto de inflexión máximo* y el gráfico es *cóncava hacia abajo.* La línea vertical que pasa a través del vértice se llama *eje de simetría*. Cada parábola *es* simétrica respecto a su eje de simetría. El punto (si existen) donde la gráfica cruza el eje x son las raíces de la ecuación $y = 0$.

En la figura 11, se visualiza la gráfica de la parábola que abre hacia arriba. Se identifica el vértice, representando como el punto mínimo, así como el eje de simetría que divide a la función cuadrática en dos partes iguales. Además, se observan los puntos de intercepción del eje vertical (o,c) y eje horizontal (raíces donde la curva corta con el eje x).

Figura 11

Elementos de una función cuadrática

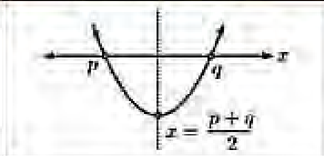
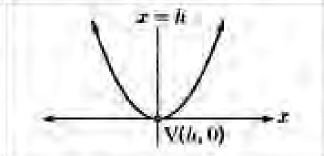
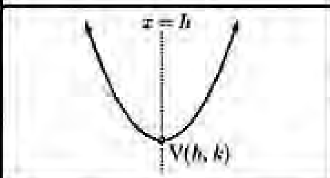
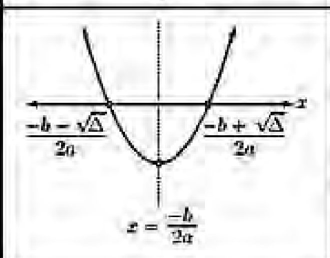


Nota: Tomada de Matemáticas Nivel Superior 2012, p. 28

En la figura 12, se presenta un resumen sobre función cuadrática, en el cual se muestra la representación algebraica de sus diferentes formas, la representación gráfica y los elementos que se obtienen a partir de cada una de sus representaciones

Figura 12

Representación y elementos de la función cuadrática

Forma cuadrática $a \neq 0$	*Representación Gráfica*	*Caraterísticas*
$f(x) = a(x-p)(x-q)$ p, q *son reales*		*Las intersecciones en el eje* x *es* p *y* q *El eje de simetría es* $x = \frac{p+q}{2}$ *El vértice es* $\left(\frac{p+q}{2}, f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$
$f(x) = a(x-h)^2$ h *es real*		*Toca el eje* x *en* h *El eje de simetría es* $x = h$ *El vértice es* $(h, 0)$
$f(x) = a(x-h)^2 + k$		*El eje de simetría es* $x = h$ *El vértice es* (h, k)
$f(x) = ax^2 + bx + c$		*El eje de simetría es* $x = \frac{-b}{2a}$ *El vértice es* $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ *Los interceptos con el eje* x *cuando* $\Delta \geq 0$ *son* $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ *dónde* $\Delta = b^2 - 4ac$

Nota: Tomada de Matemáticas Nivel Superior 2012, p. 30

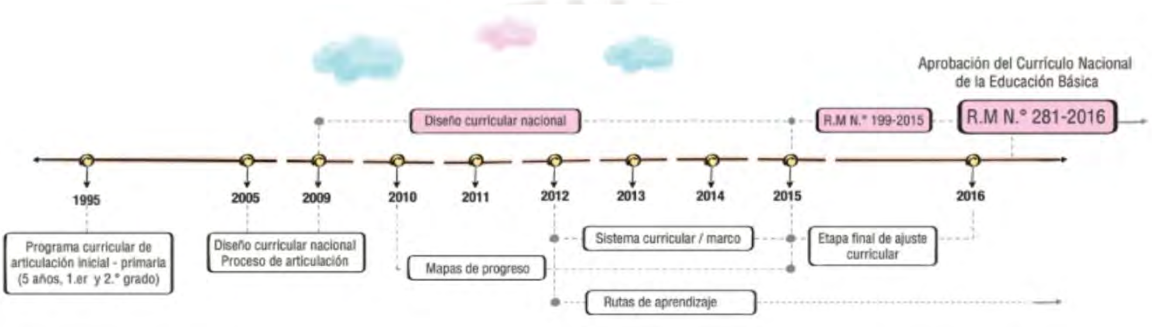
Finalmente, siendo la función cuadrática un objeto matemático, es el resultado de la integración de aspectos históricos, epistemológicos y formales para su análisis. Su evolución se genera desde la antigüedad hasta la formalización moderna, donde se expresa conceptos fundamentales como el cuadrado y las potencias, que son el resultado del desarrollo progresivo de la geometría, el algebra y la modelización de fenómenos físicos. Con el apoyo de la geometría de Descartes y Fermat marcó un precedente al relacionar con ecuaciones de la curva, así como Galileo y newton utilizaron estas ideas como herramienta para describir el movimiento. En la actualidad, la función cuadrática se presenta como un recurso didáctico que facilita el entendimiento de relaciones funcionales y su aplicación en contextos diversos.

3.2 La función cuadrática en los programas curriculares.

En el año 2005, el Perú implementó un currículo integrado, como resultado de la unión de los currículos de los tres niveles (inicial, primaria y secundaria) que anteriormente funcionaban de manera independiente. Posteriormente, en el año 2009, se introdujo una segunda versión mejorada del Currículo Nacional, la cual adoptó un enfoque por competencias por ciclo. Este enfoque permite el desarrollo del estudiante a través de un conjunto de capacidades, conocimientos y actitudes detalladas en cada competencia (Salazar y Gaita, 2015). Finalmente, en el año 2016 se aprueba el nuevo Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) presentando modificaciones en los programas curriculares de los tres niveles. Con la finalidad de aplicar el nuevo enfoque curricular por competencias permitiendo al estudiante ser orientado a trasformar su realidad, resolver problemas, alcanzar objetivos y asumir responsabilidades. En la figura 13, se visualizar los cambios de la curricular nacional desde el año 2005 hasta el 2016.

Figura 13

Evolución del currículo.



Nota. MINEDU (2016)

3.2.1 La función cuadrática en el DCN 2005.

De acuerdo con el Decreto Supremo N° 013-2004-ED, mediante la Resolución Ministerial N° 0068-2005-ED, el 7 de noviembre del 2005 se aprobó el "Diseño Curricular de la Educación Básica Regular" para los tres niveles de Educación Inicial, Primaria y secundaria. Este currículo establece una serie de contenidos matemáticos adaptados a cada etapa escolar. Permitiendo en el estudiante el desarrollo de las capacidades relacionadas al pensamiento lógico-matemático, así como solucionar situaciones problemáticas de diferentes contextos.

Nos centraremos en analizar a la educación secundaria en el ciclo VII del área de Matemática. Donde los contenidos matemáticos se organizan en componentes como son: Números, relaciones y operaciones; Geometría y medición; y Estadística.

La función cuadrática se estudia en el cuarto grado de secundaria dentro del componente de Números, relaciones y funciones como un subtema de funciones y progresiones. Esta componente se enfoca en trabajar con relaciones y funciones, incluyendo la habilidad para manipular símbolos, comprender conceptos, las estructuras y fundamentos que rigen el tratamiento de los símbolos, y utilizar gráficos para registrar y analizar las situaciones presentadas.

Tabla 7

Logros de aprendizaje y la componente relacionada a la función cuadrática

Logros de aprendizaje en ciclo VII	**Componente: Número, relaciones y funciones**
Grafica e interpreta funciones reales de variable real. Interpreta el resultado obtenido al modelar y resolver la situación problemática de la vida real.	Funciones y progresiones - Función. Dominio y rango. Representaciones gráficas. - Composición de funciones. - Funciones: inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente y decreciente. - Función inversa. -Funciones reales de variable real. Operaciones. - **Funciones** algebraicas: lineal afín, **cuadrática**, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero. - Sucesiones. - Progresiones aritméticas y geométricas.

Fuente. Adaptado del DCN 2005

En la tabla 7, se evidencia la presencia de nuestro objeto de estudio y su importancia en los logros de aprendizaje de los estudiantes en el ciclo VII. Asimismo, pueden resolver problemas de diferentes contextos al modelar por medio de la función cuadrática.

3.2.2 La función cuadrática en el DCN 2009

De acuerdo con el Decreto Supremo N° 0006-2006-ED, mediante la Resolución Ministerial N° 0440-2008-ED, el 15 de diciembre del 2008 se aprobó el “Diseño Curricular de la Educación Básica Regular”. Donde especifica que la educación peruana está dividida en niveles, en cada nivel se divide en ciclos y en cada ciclo se divide en grados. El currículo tiene como objetivo el desarrollo del pensamiento matemático y lógico del estudiante. Por ese motivo, se desarrollan las capacidades para poder plantear y resolver con una perspectiva analítica los problemas de su entorno y de su realidad. Además, el área de matemática se enseña desde el ciclo III hasta el ciclo VII y está organizado por tres bloques: Números, relaciones y funciones; Geometría y medición; y Estadística.

Es importante señalar que la función cuadrática se enseña en tercer grado de nivel secundaria y se encuentra en el bloque de Números, relaciones y funciones. Donde el estudiante tiene que interiorizar, comprender y utilizar dicho objeto en un contexto real, así como representarlo en un modelo matemático (MINEDU, 2009, p 317).

Tabla 8

Capacidades y conocimientos relacionados con la función cuadrática

Bloque	**Número, relaciones y funciones**
Competencia	Resuelve problemas de programación lineal y funciones; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático
Ciclo VII	**Tercer grado de secundaria**
Conocimientos	**Capacidades**
• Dominio y rango de funciones cuadráticas. • Gráfica de funciones cuadráticas. • Modelación de fenómenos del mundo real con funciones cuadráticas. • Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados.	• Identifica el dominio y rango de funciones cuadráticas. • Elabora modelos de fenómenos del mundo real con funciones cuadráticas. • Representa funciones cuadráticas. • Resuelve problemas que implican la función cuadrática.

Fuente. Adaptado del DCN 2009

En la tabla 8, se observa una mayor presencia de nuestro objeto de estudio con sus características más relevantes en comparación con el DCN 2005. Los estudiantes deben tener la capacidad de realizar modelaciones algebraicas y graficas de problemas relacionados al mundo real. Se observa, la técnica de completar cuadrados para resolver tareas de funciones cuadráticas en los diferentes contextos que son necesarios. Se llega a la conclusión que el DCN 2009 en relación al concepto función cuadrática ha ganado mayor notoriedad.

3.2.3 La función cuadrática en las rutas de aprendizaje

Las Rutas de aprendizaje son una guía pedagógica y didáctica dirigidas al profesor para una enseñanza efectiva de las competencias en cada uno de las áreas del currículo. Presenta una serie de fundamentos sobre la finalidad de una enseñanza por competencia. Especifica las competencias que tienen que ser desarrolladas en la etapa escolar, así como las capacidades que la integran. Describe los desempeños que presenta cada capacidad en determinado ciclo de acuerdo a la competencia.

La educación Básica regular propone cuatro competencias en base a determinadas situaciones que permite entender la finalidad de la matemática. Este fin, permite describir, comprender e interpretar distintos fenómenos de la naturaleza facilitando el desarrollo de una gama de procedimientos y conceptos matemáticos propios de cada situación. Las competencias matemáticas son las siguientes: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad; Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma, movimiento y localización; y, por último; Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre. Asimismo, cada competencia contiene cuatro capacidades las cuales son: Matematiza situaciones; comunica y representa ideas matemáticas; razona y argumenta generando ideas matemáticas; y elabora y usa estrategias.

Se analiza la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio por contener nuestro objeto de estudio. Por ejemplo, el estudiante del ciclo VII sea capaz de identificar las propiedades función cuadrática al enfrentarse a una determinada situación significativa (representar algebraicamente, gráficamente y comprender la orientación de la curva por el coeficiente cuadrático).

En la siguiente tabla se muestran las capacidades en las que se desenvuelve nuestro objeto matemático de estudio.

Tabla 9

Competencia, capacidades e indicadores de desempeño relacionado a la función cuadrática

Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio			
	Tercer grado de secundaria	Cuarto grado de secundaria	Quinto grado de secundaria
MATEMATIZA SITUACIONES	Organiza a partir de fuentes de información, relaciones de variación entre dos magnitudes al expresar modelos referidos a funciones cuadráticas. Compara y contrasta modelos relacionados a las funciones cuadráticas de acuerdo a situaciones afines	Organiza datos en dos variables de fuentes de información al expresar un modelo referido a funciones cuadráticas. Selecciona un modelo referido a funciones cuadráticas al plantear o resolver un problema.	Reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver un problema.
COMUNICA Y REPRESENTA IDEAS	Elabora representaciones graficas de $f(x)= x^2$, $f(x)= ax^2+c$, $f(x)= ax^2+bx+c$, $\forall a\neq0$. Describe como la variación de los valores de a, b, c afecta la gráfica de una función $f(x)=ax^2$, $f(x)= ax^2+c$, $f(x)= ax^2+bx+c$, $\forall a\neq0$. Reconoce las funciones	Expresa que la gráfica de una función cuadrática se describe como una parábola. Describe la relación entre los elementos que componen una función cuadrática.	Reconoce las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas. Describe la dilatación y contracción gráfica de una función cuadrática.

	cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas.		
ELABORA Y USA ESTRATEGIAS	Determina el eje de simetría, los interceptos, el vértice y orientación de una parábola, en problemas de función cuadrática. Adapta y combina estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros para resolver un problema de función cuadrática.	Halla el dominio y rango de funciones cuadráticas al resolver problemas. Resuelve problemas de función cuadrática dado un gráfico, una descripción de una relación, o dos pares de entrada-salida (incluye lectura de estos de una tabla).	Emplea procedimientos y estrategias, recursos gráficos y otros al resolver problemas relacionados a funciones cuadráticas.
RAZONA Y ARGUMENTA GENERANDO IDEAS MATEMÁTICAS	Plantea conjeturas a partir de reconocer el valor que cumplen los componentes y signos de una función cuadrática. Explica los procesos de reflexión de una función cuadrática respecto al eje X. Justifica el valor que tiene el intercepto, intervalo de crecimiento o decrecimiento, etc. de una función cuadrática.	Plantea conjeturas respecto al valor de “p” al comparar las gráficas de un conjunto de funciones de la forma $f(x)=ax^2+p$, y a la de $f(x)=ax^2$, $\forall$ $a\neq0$. Justifica por qué una determinada función en la forma $f(x)=a(x-p)^2+p$, $\forall$ $a\neq0$ es cuadrática. Generaliza utilizando el razonamiento inductivo, una regla para determinar las coordenadas de los vértices de las funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a(x-p)^2+q$, $\forall$ $a\neq0$.	Generaliza utilizando el razonamiento inductivo, una regla para determinar las coordenadas de los vértices de las funciones cuadráticas de la forma $f(x)=a(x-p)^2+q$, $\forall a\neq0$.

Fuente. Adaptado de la Rutas de aprendizaje 2015

En la respectiva tabla 9, se concluye que el objeto matemático función cuadrática tiene mayor presenta que en el DCN 2005, por que aborda a todos los grados del ciclo VII. Así mismo, las funciones cuadráticas son tomadas en la resolución de situaciones problemáticas para su respectiva modelación. Además, especifica que el aprendizaje de la función cuadrática tiene que ser abordado mediante el desarrollo de proyectos, así se logra el propósito de la participación del estudiante en la resolución de una situación problemática.

En la tabla 10, se muestra un tipo de problema de un contexto de un contexto extramatematico, el cual requiere ser modelado para obtener la expresión algebraica de la función cuadrática.

Tabla 10

Situación problemática relacionado con la función cuadrática

Situación Problemática
Este año los estudiantes de la promoción Mario Vargas llosa de la IE Santa Isabel de Huancayo tienen planificado viajar a la majestuosa ciudadela de Machu Picchu. Por ello, realizan todas las gestiones posibles para que este anhelo se haga realidad con dos años de anticipación; inclusive, ya reservaron hospedaje. Sin embargo, temen no poder hacer el añorado viaje por los altos costos de pasajes que suben a fin de año. Y ni pensar viajar en avión. El tutor de la promoción les comunica que el pasaje de ida debe estar alrededor de S/. 70 por estudiante. Solo una empresa, Cielo azul, tiene la siguiente oferta: por cada estudiante adicional que viaje, el costo de pasajes por estudiante bajará en S/.1. Por ello, el tutor ha solicitado buscar alguna estrategia para abaratar costos de manera que no supere los S/.3000, monto que se recaudará con la cotización mensual de los padres de familia hasta 15 días antes del viaje. Además, ha pedido que no deje de asistir ningún estudiante, y, si es posible, incluir a algunos de la otra sección que solo tendrán fiesta de promoción.

Fuente. Adaptado de las Rutas de Aprendizaje 2013

3.2.4 La función cuadrática en los mapas de progreso del aprendizaje.

El Marco curricular contiene una agrupación de aprendizajes indispensables que todos los estudiantes deben lograr al finalizar la educación básica. Por tal motivo, los Mapas de progreso son una guía que describe con precisión los saberes que deben adquirir los estudiantes, y como ellos deben usarlo y valorarlo manera secuencial en cada ciclo de la educación. Además, presentan reglas específicas para el monitoreo y evaluación de los aprendizajes del estudiante.

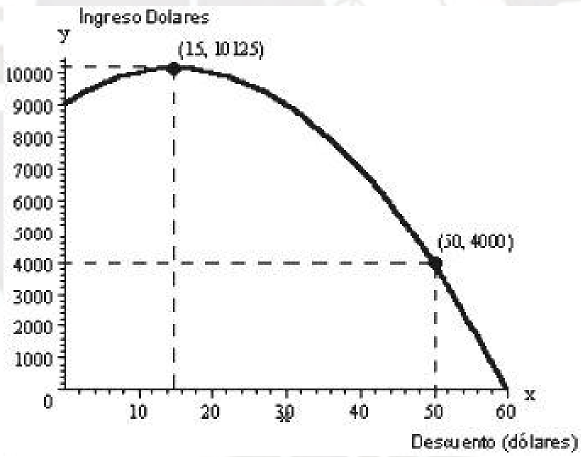
Los mapas de progreso se han formado de los estándares de aprendizaje, lo que permite describir el progreso de las competencias en cada ciclo. Estos mapas se organizan en niveles, muestran los aprendizajes de una manera más concisa y en un lenguaje accesible que facilita su comprensión. Además, cuentan una serie de indicadores de desempeño que ayudan a determinar si el estudiante ha logrado el nivel correspondiente.

Los mapas de progreso han organizado a las competencias de matemática en cuatro partes: Números y operaciones; cambio y relaciones; Geometría; y Estadística y probabilidad. Nuestro objeto matemático se encuentra en el mapa de progreso de cambio y relaciones que se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 11

Descripción del Mapa de Cambio y Relaciones, así como su desempeño.

Descripción (Ciclo VII)	Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números

	racionales e irracionales, las utiliza para representar el cambio y formular conjeturas respecto del comportamiento de la sucesión. Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela diversas situaciones de cambio mediante **funciones cuadráticas**, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.
Desempeño de la función cuadrática	Discrimina si un conjunto de pares ordenados o un gráfico cartesiano representa a una función lineal, cuadrática o exponencial, a partir de las características de crecimiento de cada función. Interpreta y describe modelos de funciones cuadráticas; por ejemplo, interpreta los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función y = $-5x^2 + 150x + 9000$, que define la relación entre ingreso y descuento.  Identifica cómo se generan otras magnitudes a partir de funciones lineales o cuadráticas entre magnitudes; por ejemplo, identifica que el producto de masa por aceleración genera la fuerza y que el cociente de distancia entre tiempo genera la velocidad. Argumenta sus predicciones sobre el comportamiento lineal o cuadrático de la relación entre dos magnitudes.

Fuente. Adaptado de Mapas de Progreso 2013

En la tabla 11, se muestra la importancia que tiene la función cuadrática y su relevancia para en el DCN 2016. Se observa que los indicadores de desempeño que relaciona en forma implícita a varios tipos de tareas, las cuales son: Describir en la función cuadrática el intervalo de crecimiento o decrecimiento; identificar como se generan otras magnitudes a partir de la función cuadrática; y modelar diversas situaciones problemáticas mediante una expresión algebraica y gráfica de la función cuadrática.

3.2.5 La función cuadrática en el DCN 2016

Según la Resolución Ministerial N° 281-2026-MINEDU de conforma con la ley N° 28044, se aprobó el nuevo Currículo Nacional de la Educación Básica el 2 de junio del 2016. Este currículo presenta el perfil de egreso al finalizar la Educación Básica, establece los enfoques transversales, detalla la progresión de los aprendizajes desde el inicio hasta la culminación de la escolaridad. En consecuencia, presenta una serie de competencias, capacidades y estándares de aprendizaje que guían en lo que debe aprender el estudiante en forma integral y progresiva en la etapa escolar.

Este documento manifiesta que el aprendizaje de la matemática se centra en entender y analizar el mundo que rodea a los estudiantes. Es por este motivo, que el área de matemática se centra en el enfoque de Resolución de Problemas permitiendo en el estudiante el desarrollo de las cuatro competencias.

Se analiza la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios donde se encuentra nuestro objeto matemático de estudio. Según el DCN (2016), esta competencia consiste que el estudiante logre determinar y generalizar patrones; entender sobre el uso correcto de las ecuaciones e inecuaciones; y manejar adecuadamente las relaciones y funciones entre diferentes magnitudes. Además, en relación a la función cuadrática el estudiante tiene que lograr realizar la representación gráfica y algebraica, comprender su concepto y propiedades, así como el uso correcto de su lenguaje algebraico y demás representaciones.

No obstante, en la tabla 12 solo se mostrarán los desempeños vinculantes a dicho objeto, ya que nos permitirá conocer el nivel de logro esperado de dicha competencia. Se observas la utilización de ostensivos para este objeto matemático como son los gráficos, tabulaciones, símbolos algebraicos y lenguaje escrito. Además, en base a los indicadores de desempeño se revelar una serie de tareas como son: Transformar la función cuadrática de una expresión algebraica a gráfica. Analizar los máximos y mínimos de la función cuadrática. Encontrar el eje de simetría tanto algebraicamente como gráficamente. Hallar la intersección de los ejes con la función cuadrática. Analizar los desplazamientos horizontales y verticales de la función cuadrática. Analizar los coeficientes de la función cuadrática y los cambios que produce en su representación gráfica. Modelizar las magnitudes en relación a una expresión algebraica de la función cuadrática.

Tabla 12

Desempeños por grado de la función cuadrática

	DESEMPEÑOS		
	Tercer grado de secundaria	**Cuarto grado de secundaria**	**Quinto grado de secundaria**
COMPETENCIA RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO.	• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencias o variación entre magnitudes. **Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas a funciones cuadráticas** ($f(x)=x^2$, $f(x)=ax^2+c$, $\forall a \neq 0$ y $a \in Q$.). • Expresa, con diversas **representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática**, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría y vértice. Plantea afirmaciones sobre cambio que	• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencias o variación entre magnitudes. **Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas a funciones cuadráticas** ($f(x)=ax^2+bx+c$, $\forall a \neq 0$ y $a \in Q$.) • Expresa, con diversas **representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el dominio y rango de la función cuadrática**, la relación entre la variación de sus coeficientes, y los cambios que se observan en su representación gráfica, para	• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. **Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas** (modelos) de la función cuadrática con coeficientes racionales. • Expresa, con diversas **representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión** sobre la dilatación, la contracción, los **desplazamientos horizontales y verticales**, **las intersecciones con los ejes de una función cuadrática** al variar sus coeficientes.

	produce el **signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica.,** **relaciones entre coeficientes y variación en la gráfica,** u otras relaciones que descubre. Justifica y comprueba la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos, propiedades matemáticas o razonamiento inductivo o deductivo.	interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones. • Plantea afirmaciones sobre **relaciones de cambio** que observa entre las variables de una función cuadrática. Justifica o descarta la validez de afirmaciones mediante un contraejemplo, propiedades matemáticas, o razonamiento inductivo y deductivo.	Plantea afirmaciones sobre relaciones de cambio que observa entre las variables de una función cuadrática. Justifica y comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra o de un caso especial mediante ejemplos, contraejemplos, conocimientos geométricos, o razonamiento inductivo y deductivo.

Fuente. Adaptado del DCN 2016

A continuación, se presenta algunos aportes de carácter didáctico y metodológicos que contribuye al estudio de la noción de función cuadrática.

.

Capítulo IV: Estudios preliminares de la función cuadrática

En este capítulo presentaremos algunas investigaciones que contribuyen al estudio de la noción de función cuadrática desde el punto de vista de lo Didáctico y de la educación Matemática. En este trabajo consideraremos analizar las organizaciones matemáticas de nuestro objeto de estudio.

4.1 Estudio de organizaciones matemáticas propuestas

4.1.1 Organización matemática de Santos (2017)

Presenta en su investigación sobre "El concepto de función cuadrática en los libros de texto de secundaria" basada en el currículo de Matemática para la secundaria (PCPE), utilizando las expectativas de aprendizaje de dicho objeto matemático. En la cual el estudiante sea capaz de reconocer tanto la representación algebraica como gráfica de la función cuadrática y su respectiva asociación en la curva de una parábola.

Por lo tanto, el estudio se centra en clasificar las actividades propuestas en el libro de texto con respecto a tipos de tareas y subtipos de tareas asociadas a la función cuadrática. En la tabla 13, en relación a lo mencionado anteriormente, y el análisis del libro de texto, se presenta las siguientes tareas.

Tabla 13

Categorías de análisis

Categorías de tipo de tarea
T.1-Reconocer la representación algebraica y representación gráfica de una Función Cuadrática, asociando la curva a una parábola.
T.1.1 - Reconocer una Función Cuadrática a través de su ley de formación algebraica.
T.1.2 - Identificar los coeficientes de la Función Cuadrática.
T.1.3 - Determinar la ley de la función conociendo tres pares ordenados de la función. O elementos como las coordenadas de los vértices, los ceros, el punto (0, c).
T.1.4 - Comprender la relación de pertenencia entre el par ordenado y la función, es decir, si $(x, y) \in f$ entonces $f(x) = y$
T.1.5 - Dibujar la gráfica.
T.1.6 - Determinar la imagen $f(x)$ de una x dada en el dominio.
T.2 - Reconocer la Función Cuadrática como modelo matemático para estudiar variaciones entre cantidades en el mundo natural o social
T.3 - Identificar el dominio de validez y situaciones de continuidad y discontinuidad (por ejemplo: reconocer que la cantidad tiempo no puede

tener un dominio negativo o que una gráfica que relaciona el valor de la ganancia en función del número de piezas vendidas no puede representarse por una línea en lugar de por puntos)
T.4 - Reconocer, en la representación gráfica de la Función Cuadrática, elementos como ceros, intersección con el eje de ordenadas, eje de simetría, concavidad y puntos de máximo/mínimo.
T.4.1 - Identificar el eje de simetría de la parábola que representa la gráfica de la Función Cuadrática y sus propiedades (si a y b son equidistantes de x = xv entonces f(a) = f(b))
T.4.2 - Reconocer el conjunto de imágenes de una función $f(x)$ =ax^2 + bx + c conociendo su gráfica o su ley de formación. Si a > (<) 0 entonces el conjunto IM={y∈ ℝ/ y> (<) yv}, con yv = − Δ /4a..
T.4.3 - Asociar el número de ceros de la función con el discriminante de la función, es decir Δ>0, Δ<0 o Δ=0.
T.4.4 -Determinar las coordenadas del vértice de la parábola.
T.5 - Relacionar las transformaciones que sufre la gráfica de la Función Cuadrática con los cambios en los coeficientes de su expresión algebraica.
T.6 - Determinar intervalos de crecimiento y disminución de la Función Cuadrática.
T.7 - Reconocer la Función Cuadrática como modelo de movimiento uniformemente variado.
T.8 - Resolver y elaborar problemas que puedan representarse mediante ecuaciones cuadráticas.

Fuente. Adaptado de santos (2017, p.49)

Según Santos (2017) desarrolla las tareas T_1 y T_4 utilizando una serie de técnicas.

T_1: Reconocer la representación algebraica y representación gráfica de una Función Cuadrática, asociando la curva a una parábola.

A este tipo de tarea se presenta 5 subtipos de tarea que muestran los diferentes puntos de vista de la tarea y sus respectivas técnicas que permiten su resolución.

$\boldsymbol{\tau_{1,1}}$: En una expresión algebraica realizar las operaciones con monomio o polinomio. Posteriormente, reconocer la función cuadrática mediante la forma polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\boldsymbol{\tau_{1,2}}$: Reconocer la función mediante la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Posteriormente identificar los valores de los coeficientes a, b y c. Puesto que, coeficientes son importantes para generar los puntos que permiten realizar la representación gráfica de la función.

$\boldsymbol{\tau_{1,3}}$: Determinar la ley general de la función con el apoyo de puntos de la representación gráfica (tres puntos, coordenadas del vértice y el punto (0,c); y los ceros de la función y un punto). Donde se utiliza el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de la función.

$\boldsymbol{\tau_{1,4}}$: Reconocer si el punto $(x_1; y_1)$ y la función f se $(x_1; y_1)\epsilon\, f$ por lo que genera que $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$. Determinar el valor de k, con los coeficientes expresado en la función con la variable k (una función de f(x)= $f(x) = g(k)x^2 + h(k)x + j(k)$.

$\boldsymbol{\tau_{1,5}}$: Para realizar la construcción gráfica de la función: primero, en la función determinar su concavidad; segundo, generar el eje de simetría que pasa por el vértice; y tercero, obtener el coeficiente c por medio de $f(0)$=c.

$\boldsymbol{\tau_{1,6}}$: Dado el valor x=x_1 que pertenece al dominio de la función f, donde se determina su imagen en $f(x_1)$.

T_2: Reconocer la Función Cuadrática como modelo matemático para estudiar variaciones entre cantidades en el mundo natural o social. La técnica consiste $\boldsymbol{\tau_2}$: modelar la función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y, posteriormente, calcular su máximo o mínimo, así como los ceros de la función.

4.1.2 Organización matemática de Ibarra et al. (2011).

Ibarra et al. (2011) en su investigación sobre “Evaluación de la función cuadrática en diferentes contextos”, manifiesta que el objeto matemático mencionado aparece en los Diseños curriculares de los primeros años de la educación secundaria. En este estudio, las funciones cuadráticas se focalizan en OM locales mediante diversas tareas. Además, en la tabla 14, en relación a las practicas del aula y el análisis de los libros de texto, se presenta clasificación de un conjunto de tareas.

Tabla 14

Tabla de tareas de función cuadrática

Descripción de Tarea
T1: Descubrir la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
T2: Graficar una función cuadrática a partir de la expresión f(x)=x^2.
T3: Hallar dominio e imagen dada la representación gráfica de la función cuadrática.
T4: Determinar el dominio e imagen de la función cuadrática definida por su expresión algebraica.
T5: Determinar a partir de la gráfica, las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.
T6: A partir de la expresión algebraica de la función cuadrática deducir las coordenadas del vértice de la curva.
T7: Encontrar los puntos de intersección de la función cuadrática con el eje de abscisas.
T8: Analizar la gráfica de la función cuadrática teniendo en cuenta los ceros de la función.
T9: Estudiar, a partir de la gráfica de la función cuadrática, el concepto de simetría

respecto de un eje vertical.
T10: Hallar el eje de simetría de la expresión algebraica de la función cuadrática.
T11: Analizar los máximos y mínimos de la gráfica de la función cuadrática.
T12: Estudiar los máximos y mínimos a partir de la expresión algebraica de la función cuadrática.
T13: Comparar las variaciones de las curvas al variar el/los parámetros.
T14: Modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones
T15: Graficar una función cuadrática a partir tablas presentadas con intervalos encajados.

Fuente. Adaptado de Ibarra et al. (2011, p.5)

A modo de ejemplo, Ibarra (2011) desarrolla las tareas T_1 y T_5 con sus respectivas técnicas.

a) T_1: Descubrir la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica.
   $\boldsymbol{\tau_{11}}$: A partir de la gráfica, se reconoce varios puntos importantes que pertenece a la curva y deben ser representado en pares ordenados.
b) T_5: Determinar a partir de la gráfica las coordenadas del vértice de la curva que representa función cuadrática.
   Existen diversas técnicas que permite resolverlo mediante distintos procedimientos.
   $\boldsymbol{\tau_{5,1}}$: Encontramos las raíces x_1 y x_2 de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ al igualar a cero. Ubicamos las raíces en el eje X. Obtenemos la abscisa del vértice $x_v=\frac{x_1+x_2}{2}$ y la ordenada del vértice $y_v=f(x_v)$
   $\boldsymbol{\tau_{5,2}}$: Es sabido que el vértice de una parábola de ecuación $f(x)=ax^2+bx+c$, tiene abscisa $x=-\frac{b}{2a}$ luego la ordenada es $y=f(-\frac{b}{2a})$.

   $\boldsymbol{\tau_{5,3}}$: Siendo y la ordenada de vértice se obtiene a partir de la ecuación $y=f(x)=ax^2+bx+c$ de incógnita x, siendo la única solución cuando y=o. El problema se transforma en encontrar las raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c-y=0$. La solución es única cuando el discriminante es igual a cero, $\Delta = b^2-4a(c-y)=0$ es decir $y=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. La abscisa del vértice $x=\frac{-b}{2a}$

4.1.3 Modelo praxeológico de referencia de la función cuadrática.

En esta sección, se presenta la reconstrucción del MPR, en base a la revisión previa de las fichas de matemática. Asimismo, se tomó los conceptos del marco teórico que son el generador de Tipo de tarea (GT) y las variables didácticas (V_i).

Se presenta las siguientes notaciones:

Ti : tipos de tareas

GTi: Generador de tipos de tareas i

$t_{i,j}$: Subtipo de tarea.

V_i : Variables

τ: Técnica

θ: Tecnología

Θ: Teoría

Tipos de tarea Ti

Tipo de tarea T_1: Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática.

En la tabla 15, se muestra el tipo de T_1 y los diferentes componentes de la variable 1.

Tabla 15

GT1: [Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1]

GT1: [Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1]
V_1: Forma
1.General $f(x) = ax^2+bx+c$ 2.Canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Fuente. Autoría propia

$t_{1,1}$ Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{1,1}$

Paso 1: Identificamos los parámetros a, b y c.

Paso 2: Calculamos el vértice V(h,k) utilizando $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$t_{1,2}$: Hallar el vértice de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica.

$\tau_{1,2}$

Paso 1: completamos cuadrados a $f(x) = ax^2+bx+c$

$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$, donde $a \neq 0$

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$

Paso 2: Calculamos el vértice V(h,k) utilizando $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Tipo de tarea T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

En la tabla 16, se muestra el tipo de T_2 y los diferentes componentes de la variable 1.

Tabla 16

GT2: [Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1]

*GT2: [*Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática*, V_1]*
V_1: Forma
1.General $f(x) = ax^2+bx+c$ 2.Canónica $f(x) = a\,(x-h)^2 + k$

Fuente. Autoría propia

$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{2,1,1}$

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 3: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

$\tau_{2,1,2}$:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: el ancho del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

$\tau_{2,1,3}$:

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

$t_{2,\ 2}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica en su forma canónica.

$\tau_{2,2}$

Paso 1: Se realiza la transformación $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$ a la forma $f(x) = ax^2+bx+c$.

Paso 2: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 3: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 4: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

Tipo de tarea T_3: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática.

En la tabla 17, se muestra el tipo de T_3 y los diferentes componentes de la variable 1

Tabla 17

GT3: [Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1]

GT3: [Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1]
V_1: Forma
1.General $f(x) = ax^2+bx+c$ 2.Canónica $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$

Fuente. Autoría propia

$t_{3,\ 1}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{3,1}$

Paso 1: Se identifica los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

Paso 3: Dada la función.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

$\boldsymbol{\tau}_{3,2}$

Paso 1: completamos cuadrados a $f(x)$=ax^2+bx+c

$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$, donde a$\neq 0$

$f(x)$=a$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$+c

Paso 2: El dominio de la función cuadrática corresponde a todos los números reales.

Paso 3: dada la función cuadrática a(x-h)^2+k.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

$\boldsymbol{t}_{3,\,2}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica.

Paso 1: dada la función cuadrática a(x-h)^2+k, se identifican a, h y k.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 2: El dominio de la f(x) son todos los números reales.

Tipo de tarea T4: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática.

GT4: [Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1; V_2]

En la tabla 18, se muestra el tipo de T_4 y los diferentes componentes de la variable 1 y 2.

Tabla 18

Generador de tareas: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática

GT4: [Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática, V_1; V_2]	
V_1: Forma	**V_2: Puntos de la parábola**
1.General $f(x)=$ ax^2+bx+c 2.Canónica $f(x) = a\,(x-h)^2+k$	1. Vértice y una raíz. 2. Vértice y ceros

Fuente. Autoría propia

Subtipos de tareas:

$t_{4,1}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y una raíz.

$\tau_{4,1}$

Paso 1: Reconocer la forma canónica de la función cuadrática $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 2: Sustituir las coordenadas del vértice en $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 3: Posteriormente reemplazar la raíz (x_1,0) en f(x) para obtener el valor de "a".

Paso 4: Convertir $f(x)$ a la expresión algebraica y=ax^2+bx+c

$t_{4,2}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y los ceros.

$\tau_{4,2}$

Paso 1: Reconocer la forma general de la función cuadrática $f(x)$ =ax^2+bx+c, a≠0.

Paso 2: Conociendo el vértice y los ceros de la parábola $f(x)$ =ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$t_{4,\ 3}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica teniendo como datos al vértice y una raíz.

$\tau_{4,3}$

Paso 1: Reconocer la forma canónica de la función cuadrática $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 2: Sustituir las coordenadas del vértice en $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 3: Posteriormente reemplazar la raíz (x_1,0) en f(x) para obtener el valor de "a".

$t_{4,\ 4}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica teniendo como datos al vértice y los ceros.

Paso 1: Reconocer la forma general de la función cuadrática $f(x)$ =ax^2+bx+c, a≠0.

Paso 2: Conociendo el vértice y los ceros de la parábola $f(x)$ =ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Completamos cuadrados

$f(x)=a\left[\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{b}}{a}\mathrm{x}+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+\mathrm{c}$, donde a$\neq 0$

$f(x)$=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 5: Se forma la función cuadrática $f(x)$ =a(x-h)^2+k.

Tipo de tarea T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

En la tabla 19, se muestra el tipo de T_5 y los diferentes componentes de la variable 3 y 4.

Tabla 19

GT5: [Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V_3; V_4]

GT5: [Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V_3; V_4]	
V_3: contexto	**V_4: Ostensivo**
1.Intramatemático 2.Extramatemático	1.Lenguaje natural o escrito. 2.Gráfico. 3.Tabular.

Fuente. Autoría propia

$t_{5,\,1}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

τ **5**,1

Paso 1: Identificar los puntos del lenguaje natural y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) =$ ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$t_{5,\,2}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo gráfico.

τ **5**,2

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) =$ ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$t_{5,\,3}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo tabular.

τ **5**,3

Paso 1: Convertir del ostensivo tabular al ostensivo de lenguaje algebraico por medio de un sistema de ecuaciones.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la $f(x) =$$ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$t_{5,\,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

τ **5,4,1**

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles “x” e “y” a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)$ =x.y

Paso 6: Sustituir la medida de “y” en la expresión algebraica del área del rectángulo.

$\tau_{5,4,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de $f(x)$ como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

$\tau_{5,4,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo de lenguaje aritmético.

Paso 3: Si c=0 entonces $f(x)=ax^2+bx$ y se conoce dos puntos de la parábola.

Paso 4: Reemplazamos los dos puntos y generamos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Paso 5: Solucionamos el sistema de ecuaciones lineales y obtenemos los valores de a y b.

$\tau_{5,4,4}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico

Paso 2: Dibujar un rectángulo disminuyendo “x” a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x.

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

$\tau_{5,4,5}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo de lenguaje aritmético.

Paso 2: En $f(x)=ax^2+bx+c$ se conoce tres puntos de la parábola.

Paso 3: Reemplazamos los tres puntos y generamos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 4: Solucionamos el sistema y obtenemos los valores de a, b y c.

$\tau_{5,4,6}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico

Paso 2: Dibujar un círculo, donde la variable independiente es el radio "r".

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del circulo en función de su radio (r).

$\boldsymbol{t}_{5,\,5}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico.

$\tau_{5,5,1}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)$ = ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$\boldsymbol{t}_{5,\,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo Tabular.

$\tau_{5,6}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c

Tipo de tarea T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) = ax^2+bx+c$)

En la tabla 20, se muestra el tipo de T_6 y los diferentes componentes de la variable 3 y 4.

Tabla 20

GT6: [Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$), V_3; V_4]

GT6: [Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($\boldsymbol{f(x)}$= ax^2+bx+c), *V_3; V_4*]	
V_3: contexto	**V_4: Ostensivo**
1.Intramatemático	1.Lenguaje natural o escrito.
2.Extramatemático	2.Gráfico.
	3.Tabular.

4. Lenguaje algebraico.

Fuente. Autoría propia

$\boldsymbol{t}_{6,1}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\boldsymbol{\tau}_{6,\,1}$:

Paso 1: Identificar los puntos del lenguaje natural y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)$ = ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Aplicamos para calcular el vértice $V(h,k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 5: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{t}_{6,2}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo gráfico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,1}$:

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)$ = ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

$\boldsymbol{t}_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,1}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice $V(h,k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,2}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,3}$:

Paso 1: Completamos cuadrados

$f(x)$=$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde a$\neq$ 0

$f(x)$=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$)

Paso 3: Se forma la función cuadrática $f(x)$ =a(x-h)^2+k.

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{t}_{6,\ 4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{6,4,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) en relación de la variable independiente como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Se calcular el vértice $V(h\,;k)$ utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

$\tau_{6,4,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)$ = (x+a)(x+b)

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

τ 6, 4,3:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: Altura del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma $V(x)$ =ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

τ 6, 4,4

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)$ =x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales x(x+a)=x^2+ax

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

τ 6, 4,5

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+2y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

τ **6, 4, 6**

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+2y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)$ =x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

$\boldsymbol{t}_{6,5}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo gráfico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,5,1}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

τ **6,**5,2

Paso 1: Dada la función cuadrática $f(x)=a(x-h)^2+k$ donde V(h, k)

Paso 2: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{t}_{6,6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

τ 6, 6

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 4: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f(-\frac{b}{2a})$

$\boldsymbol{t}_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,1}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice $V(h,k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa), entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava), entonces la imagen de la función es $]-\infty,k]$

τ 6, 7,2:

Paso 1: Completamos cuadrados

$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde $a\neq 0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2+c$

Paso 2: Se obtiene el vértice $V(-\frac{b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a})$

Paso 3: Dada la función cuadrática $a(x-h)^2+k$.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty,k]$

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,3}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,4}$

Paso 1: Multiplicamos dos binomio de términos iguales $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Paso 2: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 4: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

τ 6, 7,5:

Paso 1: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Identificamos los parámetros a, b y c de la función cuadrática.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

En la tabla 20, se muestra el tipo de T_7 y los diferentes componentes de la variable 3 y 4.

Tabla 21

GT7: [Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V_3; V_4]

GT7: [Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general, V3; V4]	
V_3: contexto	**V_4: Ostensivo**
1.Intramatemático 2.Extramatemático	1.Lenguaje natural o escrito. 2.Gráfico. 3.Tabular.

4. Lenguaje algebraico.

Fuente. Autoría propia

$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{7,1,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles “x” e “y” a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Sustituir la medida de “y” en la expresión algebraica del área del rectángulo.

Paso 7: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 8: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 9: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 10: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 11: Intercepción con el eje Y, cuando igualamos x=0

Si: c>0, el punto c esta arriba de eje x; c>0, el punto c esta debajo de eje x; y c=0, el punto c se encuentra sobre el eje x.

Paso 11: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 12: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

$\tau_{7,1,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=(x+a)(x+b)

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 7: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 8: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 11: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

$\tau_{7,1,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: Altura del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma (V)= Área de la base (A)$\times$altura(h), entonces V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común $(x)(x+b)=x^2+bx$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f(-\frac{b}{2a})$

Paso 7: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 8: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 9: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

$\boldsymbol{t}_{7,\,2}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

$\tau_{7,2}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Reemplazar los parámetros a, b y c en la expresión algebraica de la función.

Paso 4: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 6: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 7: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 8: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

$\boldsymbol{t}_{7,\,3}$: Graficar de la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico.

$\tau_{7,3,1}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

$\tau_{7,3,2}$

Paso 1: Dada la función f(x) se idéntica los parámetros a, b y c.

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se elabora una tabla de valores.

x					
f(x)					

Paso 4: Ubicar los puntos obtenidos del vértice y de la tabla de valores en el plano cartesiano.

$\boldsymbol{t}_{7,\,4}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\tau_{7,4,1}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

$\tau_{7,4,2}$

Paso 1: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 2: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 3: Se analiza la abertura de las ramas de la parábola.

Si 0<$|a|$<1, en la parábola sus ramas son más abiertas.

Si 1<$|a|$, en la parábola sus ramas son más cerradas.

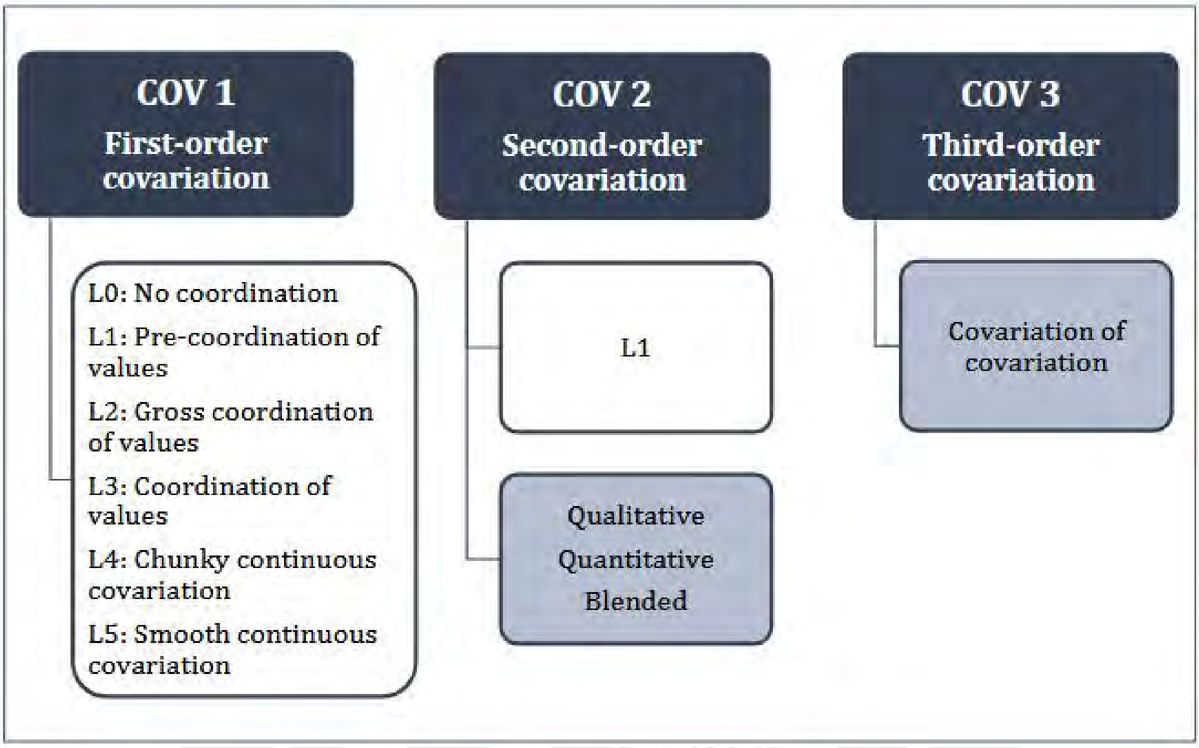
4.2 Variación de segundo orden

Asenova et al., (2023) afirma que el concepto de función es de gran relevancia en al área de las matemáticas, puesto que es una herramienta fundamental que permite la modelización de fenómenos reales o modelos matemáticos representativos. Así como desarrollar representaciones gráficas y fórmulas que permitan representar adecuadamente la variación de una cantidad respecto a la otra.

Por otro lado, resulta fundamental en establecer una definición general del razonamiento covariacional, el cual es definido por Bagossi (2022) como “una persona razona covariacionalmente cuando es capaz de visualizar adecuadamente las relaciones entre dos o más objetos matemáticos” (p.191). En la misma línea, Thompson y Carlson (2017, citado en Asenova et al., 2023), menciona que el razonamiento covariacional de un sujeto consiste en representa dos cantidades que cambian conjuntamente de tal manera que exista una dependencia relacional entre sus valores. Además, para que estudiante pueda alcanzar un nivel superior de razonamiento covariacional, es necesario una conceptualización más profunda de la función como objeto matemático, lo cual permite una ampliación de la conceptualización matemática desde una perspectiva epistemológica. Asimismo, este tipo de razonamiento es fundamental para actividades de modelado matemático. En Bagossi (2022) amplia el marco teórico de la covariación como una forma de extender el razonamiento, integrando el objeto matemático con las relaciones mutuas y donde se representa un orden diferente en la complejidad de los objetos matemáticos implicados.

Figura 14

Marco agrandado sobre covarianza.



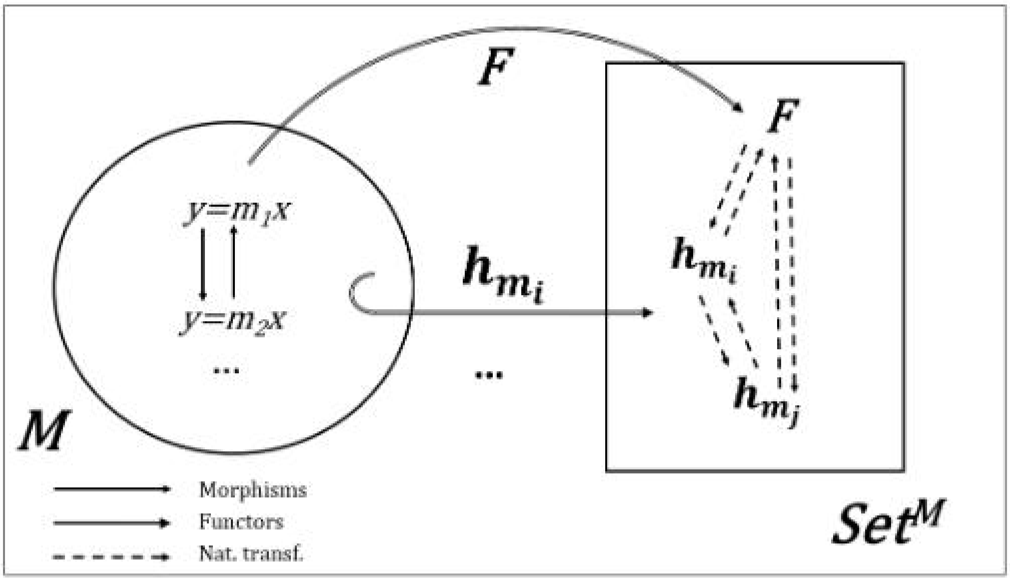
Nota: Tomada de Bagossi, 2022, p. 192.

En la figura 14, se presenta la covariación de primer orden (COV 1), el cual se expone la taxonomía de los 6 niveles razonamiento covariaciones. Esta se define como la habilidad de comprender la correspondencia constante entre dos cantidades cuyos valores cambian simultáneamente. Asimismo, las variables constituyen los objetos matemáticos involucrados, ya que representan cantidades y la forma en que estas pueden variar conjuntamente.

Por otra parte, la covariación de segundo orden (COV2) se refiere a la capacidad de visualizar una relación adicional dentro de una familia de relaciones invariantes entre dos o más cantidades variables, en la que se reconoce la presencia de uno o más parámetros. Su importancia radica en el modelado de fenómenos reales, análisis de situaciones dinámicas y estudio de funciones paramétricas (Bagossi, 2024).

Figura 15

Esquema entre F y h_{mi} generan la familia de funciones $y=m_i x$ como un objeto único.



Nota: Tomada de Bagossi, 2022, p. 222.

En la figura 15, se observa como las trasformaciones naturales entre F y h_{mi} generan la familia de funciones $y=m_ix$ de un solo objeto y que se describe en la covariación de segundo orden: m ⟼ y= mx

T_8: Modelar un fenómeno real que presenta una variación de segundo orden.

$\boldsymbol{t}_{8,\,1:}$ Dado un fenómeno real, registrar los datos en una tabla de tabulación.

τ **8,1**

Paso 1: Registrar los datos en un organizador de tabla.

Paso 2: Reconocer la variable independiente como dependiente.

Paso 3: Calcular $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Paso 4: Calcular $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

θ: La función cuadrática su $\Delta^2 y_i$ es constante, permitiendo modelar el fenómeno como una parábola de curvatura constante.

$\boldsymbol{t}_{8,\,2:}$ Dado un fenómeno real representado en tabla, examinar la curvatura asociada a la variación de segundo orden.

τ **8,2**

Paso 1: Reconocer las variaciones de primer y segundo orden.

Paso 2: Representar gráficamente los pares ordenados generados en la tabla.

Paso 3: Analizar los puntos de corte con los ejes de coordenadas y el vértice.

Paso 4: Dibujar tangentes y comparar sus pendientes.

Paso 5: Analizar el crecimiento o decrecimiento en relación a la pendiente de la recta tangente.

θ: La función cuadrática su $\Delta^2 y_i$ es constante, indicando que su crecimiento es acelerado y tasa de cambio variable.

$t_{5,5}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo gráfico.

$\tau_{5,5,2}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Calcular $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Paso 3: Calcular $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$, si el resultado es constante es una función cuadrática.

Paso 4: Seleccionar puntos de tabla y formar sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Paso 5: Resolver el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes a, b y c.

Paso 6: Modelar la función cuadrática de la forma $f(x)$=ax^2+bx+c.

θ: Tasa de cambio variable, sistema de ecuaciones y propiedades de los números reales.

T_9: Analizar la función cuadrática ($f(x) =$ ax^2+bx+c) cuando los valores de cada parámetro cambian.

$t_{9,1}$: Dado la expresión algebraica de la función cuadrática $f(x) =$ax^2+bx+c, analizar el parámetro a, manteniendo constante b y c.

$\tau_{9,1}$

Paso 1: Representar gráficamente la función dando valores diferentes al parámetro a: a=-2; -1, 0,5, 1, 2…

Paso 2: Reconocer la dilatación y comprensión de la parábola.

Paso 3: Calcular el vértice para cada función al usar la formula $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v)$

Paso 4: Construir una tabla con valores de $f(x)$ para valores diferentes de a.

Paso 5: Calcular las variaciones de primer y segundo orden.

Paso 6: Analizar los diferentes cambios de la curvatura con respecto al parámetro a.

Paso 7: Analizar el crecimiento de la parábola con respecto al parámetro a.

θ: El parámetro “a” afecta la curvatura y orientación de la función cuadrática.

Si $|a|$ aumenta la parábola se vuelve más cerrada.

Si $|a|$ disminuye la parábola se vuelve más ancha.

a>0: curvatura se orienta hacia arriba (mínimo).

a<0: curvatura se orienta hacia abajo (máximo).

$t_{9,2}$: Dado la expresión algebraica de la función cuadrática $f(x) =$ax^2+bx+c, analizar el parámetro b, manteniendo constante a y c

$\tau_{9,2}$

Paso 1: Representar gráficamente la función $f(x)$ para valores distintos a “b”: b=−4, −2, 0, 2, 4…

Paso 2: Interpretar el desplazamiento del vértice en forma horizontal según “b”.

Paso 3: Calcular el vértice usando la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v)$

Paso 4: Comparar la simetría y la forma de las parábolas.

Paso 5: Analizar el impacto de b en la representación gráfica y algebraica sobre el eje de simetría, las raíces y el vértice.

θ: La posición horizontal del vértice es afectado por el parámetro “b” puesto que $x_v = -\frac{b}{2a}$. Asimismo, “b” modifica la posición del punto máximo y mínimo de la curvatura. Por último “b” modifica la cantidad y naturaleza de las raíces de la función cuadrática ($\Delta=b^2-4ac$).

$\boldsymbol{t}_{9,\,3}$: Dado la expresión algebraica de la función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, analizar el parámetro c, manteniendo constante a y b.

τ **9,3**

Paso 1: Realizar la representación gráfica de la función cuadrática para distintos valores del parámetro “c”: donde c=−2, 0, 1, 3…

Paso 2: Observar el desplazamiento vertical de la parábola.

Paso 3: Calcular el vértice usando la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ y $y_v = f(x_v)$

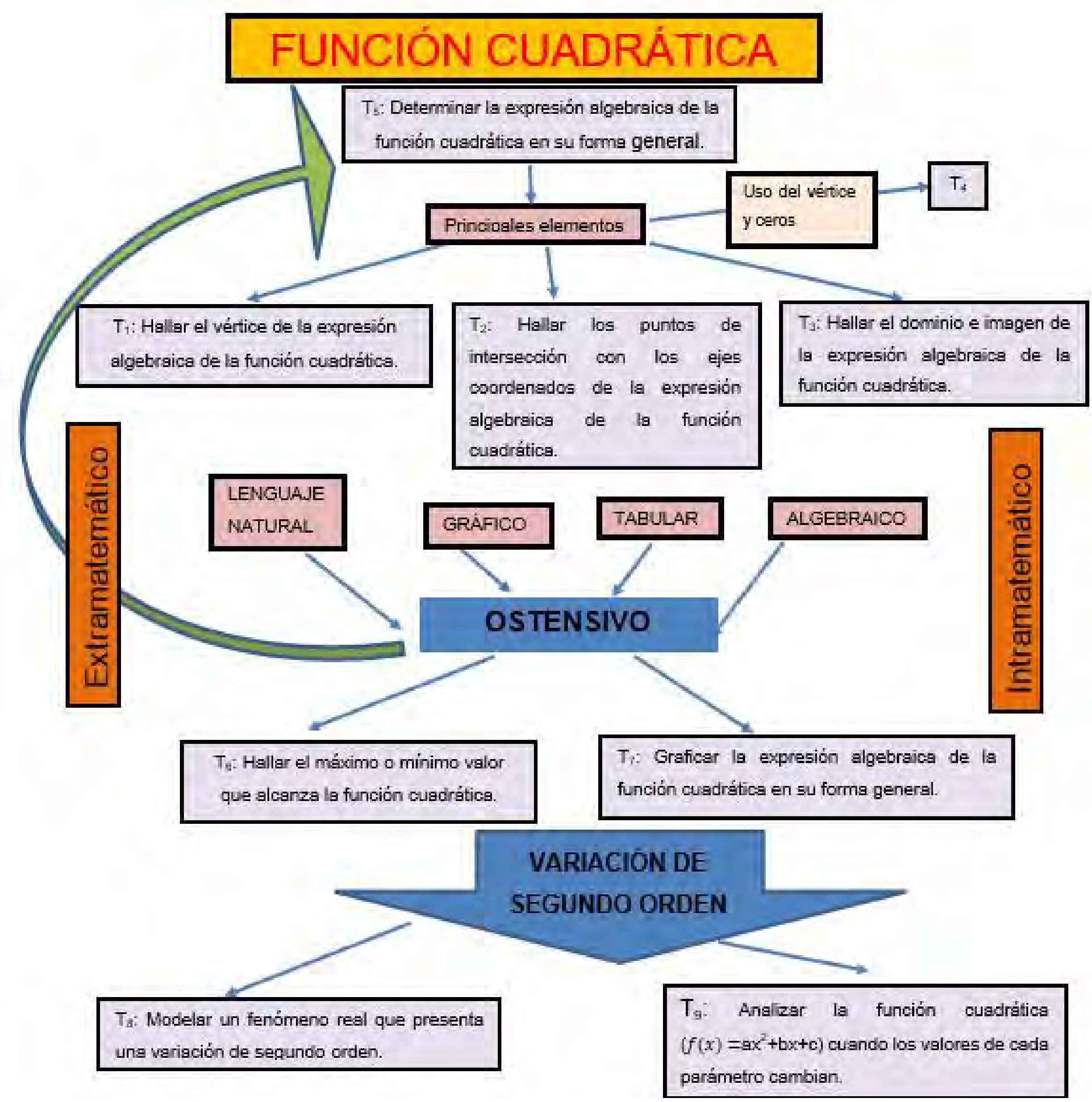
Paso 4: Interpretar el cambio del valor del vértice y la intercepción con el eje y.

Paso 5: Analizar cómo afecta la cantidad y la naturaleza de las raíces cuando “c” cambia.

θ: El parámetro “c” corresponde a la ordenada del origen cuando $f(0)$ =0. Al modificar el valor de “c” produce la traslación de la parábola en forma vertical. Con respecto al vértice el valor de $y_v$varía, pero el valor x_v permanece constante. Por último, “c” influye la naturaleza de las raíces de la discriminante ($\Delta=b^2-4ac$).

Figura 16

Esquema del MER de la función cuadrática.



Nota. Elaboración propia.

Se aprecia en la figura 14 el recorrido que sigue la función cuadrática desde su OM para determinar la representación algebraica hasta su OM de variación de segundo orden. Asimismo, se utilizan los ostensivos para generar subtipos de tareas de lo especifico a lo general.

4.3 Técnicas y su alcance teórico y pragmático

Se lleva a cabo el estudio de las técnicas y sus alcances relacionadas a los tipos de tareas presentes en la función cuadrática. Para ello, se utiliza las técnicas detalladas en nuestro MPR y las nociones de alcance teórico y pragmático de la técnica.

Tabla 22

Praxeologías puntuales de la función cuadrática

Técnica	Descripción de la técnica	Tecnología de la técnica
$\tau_{\text{vértice-1}}$	➢ Identificamos los valores de los parámetros a, b y c. ➢ Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$ ➢ Si Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa). Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava)	Propiedad de los números reales.
$\tau_{\text{vértice-2}}$	➢ Identificamos los valores de los parámetros a, b y c. ➢ Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$) ➢ Si Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa). Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava)	Propiedad de los números reales.
$\tau_{\text{vértice-3}}$	➢ Completamos cuadrados f(x)=$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde a$\neq 0$ f(x)=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c ➢ Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$) ➢ Si Si a>0, la función cuadrática se abre	Propiedad de los números reales. Completar cuadrados.

	hacia arriba (convexa). Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava)	
$\tau_{\text{ceros-1}}$	➢ Se modela a su expresión algebraica. ➢ Factoriza la f(x)=ax^2+bx ➢ Igualamos y=0 ➢ Se obtiene las raíces x_1 y x_2 que son los ceros de la función.	Propiedad de los números reales
$\tau_{\text{ceros-2}}$	➢ Factoriza la f(x)=ax^2+bx+c ➢ Igualamos y=0 ➢ Se obtiene las raíces x_1 y x_2 que son los ceros de la función.	Propiedad de los números reales
$\tau_{\text{ceros-3}}$	➢ Se utiliza la formula cuadrática ➢ $x_{1,2}$=$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ➢ Además: $b^2-4ac>0$, entonces las dos raíces son números reales. $b^2-4ac=0$, entonces las dos raíces son iguales. $b^2-4ac<0$, entonces las dos raíces son números complejos.	Propiedad de los números reales
$\tau_{\text{rango-1}}$	➢ Dada la función f(x)=ax^2+bx+c. ➢ Se calcular el vértice V(h,k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$. ➢ Si; a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$. a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty,k]$	Propiedad de los números reales
$\tau_{\text{rango-2}}$	➢ Dada la función f(x)=ax^2+bx+c. ➢ Se calcular el vértice V(h,k) se utiliza Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$) ➢ Si; a>0, entonces la imagen de la	Propiedad de los números reales

	función es $[k; +\infty[$. a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$	
$\tau_{\text{rango-3}}$	➢ Dada la función f(x)=ax^2+bx+c. ➢ Completamos cuadrados f(x)=$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2.a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right] + c$, donde $a \neq 0$ f(x)=a$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c ➢ Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$) ➢ Si; a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$. a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$	Propiedad de los números reales. Completar cuadrados.
$\tau_{\text{tabular-forma general}}$	➢ Conociendo tres puntos de la f(x)=ax^2+bx+c. ➢ Se forma un sistema de ecuaciones lineales de 3x3. ➢ Se obtiene los parámetros a, b y c.	Propiedad de los números reales y sistema de ecuaciones lineales.
$\tau_{\text{grafica-forma general}}$	➢ Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular. ➢ Conociendo tres puntos de la función f(x)=ax^2+bx+c Se forma un sistema de ecuaciones lineales de 3x3. ➢ Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.	Propiedad de los números reales y sistema de ecuaciones lineales.
$\tau_{\text{prisma-f. general}}$	➢ Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados. ➢ Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x). Variable dependiente: Área del terreno A(x)=(x+a)(x+b) ➢ Resolver el producto de dos	Propiedad de los números reales Productos notables Propiedades geométricas

	binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática	
$\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$	➢ Dibujar un rectángulo asignando cuya medida de sus lados son "x" e "y". Expresar el área del rectángulo en función de x ($f(x)=ax^2+bx$). ➢ Dibujar un rectángulo incrementando a sus lados una medida de x. Expresar el área del rectángulo en función de x ($f(x)=ax^2+bx+c$).	Propiedad de los números reales Productos notables Propiedades geométricas
$\tau_{\text{producto-binomios}}$	➢ Se modela la función con el producto de dos expresiones algebraicas lineales $(ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+cb)x+bd$	Propiedad de los números reales Productos notables
$\tau_{\text{forma general-grafica1}}$	➢ Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$. ➢ Se analiza el coeficiente de la variable cuadrática. Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa). Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava). ➢ Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ ➢ Interceptar con el eje X, cuando igualamos $y=0$. Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función. ➢ Intercepción con el eje Y, cuando igualamos $x=0$. Si: $c>0$, el punto c esta arriba de eje x; $c>0$, el punto c esta debajo de eje x; y $c=0$, el punto c se encuentra sobre el eje x.	Propiedad de los números reales

	➢ Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.	
τforma general-grafica2	➢ Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$. ➢ Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ ➢ Se elabora una tabla de valores. x | | | | | f(x) | | | | | ➢ Ubicar los puntos obtenidos del vértice y de la tabla de valores en el plano cartesiano.	Propiedad de los números reales

Fuente. Autoría propia

En la tabla 13, mostramos las técnicas, descripción de la técnica y la tecnología que lo justifica.

T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

Subtipo de tarea $t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. En concordancia con nuestro MPR, se presenta las siguientes técnicas que resuelven el subtipo de tarea $t_{2,1}$ las cuales son: τ ceros-1, τ ceros-2 y τ ceros-3. En la tabla 20, se observa las descripciones de la técnicas y tecnologías relacionadas con $t_{2,1}$.

Además, el subtipo de tarea $t_{2,1}$ se encuentra dentro del al alcance teórico de las tres técnicas mencionadas anteriormente. Esto se debe que su resolución de la tarea mediante estas técnicas no depende de los errores en su ejecución. Esto significa, que las técnicas son consideradas desde una perspectiva epistemológica y no cognitiva.

Por otro lado, en el subtipo de tarea $t_{2,1}$, al analizar el alcance pragmático de la técnica sobre su competencia se identifican tres técnicas. La técnica τ ceros-2 es más efectiva y menos costosa que las técnicas τ ceros-1 y τ ceros-3. En consecuencia, $t_{2,1}$ pertenece al alcance pragmático τ ceros-2 y se encuentran fuera de los alcances pragmáticos de τ ceros-1 y τ ceros-3. Por último, el alcance pragmático de una técnica se simbólica por P.

T_3: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática.

Subtipo de tarea $t_{3,1}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. La técnica que da solución a este subtipo de tarea

$t_{3,1}$ son tres y son las siguientes: $\tau_{rango\text{-}1}$, $\tau_{rango\text{-}2}$ y $\tau_{rango\text{-}3}$. En la tabla 18, se describe las técnicas y tecnologías asociadas a $t_{3,1}$.

Asimismo, el subtipo de tarea $t_{3,1}$ presenta el alcance teórico de las tres técnicas $\tau_{rango\text{-}1}$, $\tau_{rango\text{-}2}$ y $\tau_{rango\text{-}3}$. Además, el subtipo de tarea $t_{3,1}$, presenta la competencia de tres técnicas; por lo tanto, las técnicas $\tau_{rango\text{-}1}$ y $\tau_{rango\text{-}2}$ son más efectivas y por consiguiente menos costosa que la técnica $\tau_{rango\text{-}3}$. Por consiguiente, $t_{3,1}$ está en el ámbito pragmático de $\tau_{rango\text{-}1}$ y $\tau_{rango\text{-}2}$ y excluye al alcance pragmático de $\tau_{rango\text{-}3}$.

Tipo de tarea T_4: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Subtipo de tarea $t_{4,\,1}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y los puntos de intersección con los ejes X e Y. La técnica que resuelve esta tarea es $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ que consiste utilizar los siguientes pasos.

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ Se forma un sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

Subtipo de tarea $t_{5,3}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo tabular. La técnica que resuelve esta tarea es $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ que consiste utilizar los siguientes pasos.

Paso 1: Convertir del ostensivo tabular al ostensivo de lenguaje algebraico por medio de un sistema de ecuaciones de 3x3.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la $f(x)=ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Subtipo de tarea $t_{5,\,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. Las técnicas que soluciona el subtipo de tarea $t_{5,\,4}$ son las siguientes: $\tau_{rectángulo\text{-}f.\ general}$, $\tau_{producto\text{-}binomios}$ y $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$. En la tabla 18 se muestra la descripción de las técnicas y tecnologías. Se afirma que el subtipo de tarea $t_{5,\,4}$ pertenece al alcance teórico de las tres técnicas, puesto que esas técnicas resuelven a $t_{5,\,4}$.

Además, no hay competencia entre las tres técnicas porque cada una de ellas resuelven diferentes tipos de problemas de contexto extramatemtico. Por ejemplo,el estudiante utiliza la técnica $\tau_{rectángulo\text{-}f.\ general}$ para modelar el la parabola a traves del perimetro de un rectángulo; pero usando la $\tau_{\text{producto-binomios}}$ modela la función cuadrática como el producto de dos dos funciones lineales.

Subtipo de tarea $t_{5,\,5}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico. La técnica que da solución a este subtipo de tarea es $\tau_{\text{tabular-forma general}}$ y cuyos pasos son: Conociendo tres puntos de la $f(x)=ax^2+bx+c$; se forma un sistema de ecuaciones lineales de 3x3; y se obtiene los parámetros a, b y c.

Subtipo de tarea $t_{5,\,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo Tabular. Para solucionar este subtipo de tarea se usa la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$. Cuya descripción de la técnica y tecnología se encuentra en la tabla 18. Asismismo, los pasos corresponden a formar un sistema de ecuaciones lineales, obtener los parametros a, b y c; y por último generar la función $f(x)=ax^2+bx+c$.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$)

Subtipo de tarea $t_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. Las técnicas que dan solución al subtipo de tarea $t_{6,3}$ son $\tau_{\text{vértice-1}}$, $\tau_{\text{vértice-2}}$ y $\tau_{\text{vértice-3}}$, lo que se deduce que el subtipo de tarea $t_{6,3}$ pertenece al alcance teórico de estas tres técnicas.

Por otra parte, hay una competencia entre las tres técnicas, lo que se deduce, que la técnica, $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$ son menos costoso para resolver $t_{6,3}$ en comparación con la $\tau_{\text{vértice-3}}$. Lo que significa, que los estudiantes presentan mayor dificultad en el procedimiento de completar cuadrados al utilizar la técnica $\tau_{\text{vértice-3}}$. Por consiguiente, el subtipo de tarea $t_{6,3}$ da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de las técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$.

Subtipo de tarea $t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. Hay una combinación de técnicas que dan solución a este subtipo de tarea, las cuales son: $\tau_{\text{producto-binomios}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$; $\tau_{\text{producto-binomios}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$; $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$; $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$; lo que se deduce que el tipo de tarea $t_{6,4}$ pertenece al alcance teórico de esas técnicas.

Por otro lado, hay una competencia entre esas cuatro técnicas, lo que significa, que la técnica $\tau_{\text{producto-binomios}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$; y $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ son menos costoso para resolver $t_{6,4}$ en comparación con las técnicas $\tau_{\text{producto-binomios}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$; y $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$. Por tal motivo, el subtipo de tarea da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de las técnicas $\tau_{\text{producto-binomios}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$; y $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$.

Subtipo de tarea $t_{6,5}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo gráfico. Hay una combinación de técnicas que dan solución a este subtipo de tarea, las cuales son: $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$; y $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$. Se llega a la conclusión que el subtipo de tarea $t_{6,5}$ pertenecen al alcance teórico de la combinación de estas técnicas.

Por otro lado, hay una competencia entre la combinación entre estas técnicas, entonces se afirma, que las técnicas $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$ son más optimas (menos costosas) para resolver $t_{6,5}$ en comparación con la combinación de técnicas $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$. Por lo tanto, el subtipo de tarea $t_{6,5}$ da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de las técnicas combinadas $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{grafica\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$.

Subtipo de tarea $t_{6,6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular. Hay una combinación de técnicas que dan solución a este subtipo de tarea, las cuales son: $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$; y $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$. Se llega a la conclusión que el subtipo de tarea $t_{6,6}$ pertenecen al alcance teórico de la combinación de estas técnicas.

Por otro lado, hay una competencia entre la combinación entre estas técnicas, entonces se afirma, que las técnicas $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$ son menos costosos para resolver $t_{6,6}$ en comparación con la combinación de técnicas $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$. Por lo tanto, el subtipo de tarea $t_{6,6}$ da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de las técnicas combinadas $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}1}$; $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$.

$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. Las técnicas que dan solución al subtipo de tarea $t_{6,7}$ son $\tau_{vértice\text{-}1}$, $\tau_{vértice\text{-}2}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$, lo que se deduce que el subtipo de tarea $t_{6,7}$ pertenece al alcance teórico de estas tres técnicas.

Por otra parte, hay una competencia entre las tres técnicas, lo que se deduce, que la técnica, $\tau_{vértice\text{-}1}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$ son menos costoso para resolver $t_{6,7}$ en comparación con la $\tau_{vértice\text{-}3}$. Lo que significa, que los estudiantes presentan mayor dificultad en el procedimiento de completar cuadrados al utilizar la técnica $\tau_{vértice\text{-}3}$. Por consiguiente, el subtipo de tarea $t_{6,7}$ da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de las técnicas $\tau_{vértice\text{-}1}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$.

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

Subtipo de tarea $t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. La combinación de técnicas que resuelve este subtipo de tarea es $\tau_{\textbf{rectángulo}\text{-f. general}}$ y τ_{forma}

$_{\text{general-grafica1}}$; y $\tau_{\textbf{prisma}\text{-f. general}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$ cuya descripción de la técnica y tecnología se encuentra en la tabla 18.

Subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,2}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo tabular. La combinación de técnicas que resuelve este subtipo de tarea es $\tau_{\text{tabular-forma general}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$; cuya descripción de la técnica y tecnología se encuentra en la tabla 18.

Subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,\,3}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico. Las técnicas que dan solución al subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,3}$ son $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$ lo que se deduce que el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,3}$ pertenece al alcance teórico de estas dos técnicas.

Por otra parte, hay una competencia entre estas dos técnicas, lo que se deduce, que la técnica, $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$ es menos costoso para resolver $\boldsymbol{t}_{7,3}$ en comparación con la $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$. Lo que significa, que los estudiantes presentan mayor dificultad en realizar cálculos aritméticos y algebraicos al utilizar la técnica $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$. Por consiguiente, el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,3}$ da como resultado la pertenencia al alcance pragmático de la técnica $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$.

4.4 Análisis de las praxeologías enseñadas

En la figura 17, se muestra una actividad que pertenece al tipo de tarea; hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática.

Figura 17

Situación significativa A

Situación significativa A

Jorge decidió cercar una parte de su terreno, para lo cual compró en oferta 300 m de malla. El deseo de Jorge es cercar el máximo terreno rectangular posible. ¿Cuáles serían las dimensiones del terreno cercado y qué área tendría?

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 30)

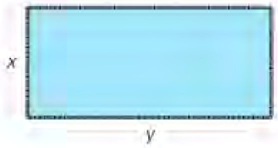
De la figura 17, se pide calcular el área máxima del terreno y posteriormente indicar las dimensiones de los lados; pertenece al subtipo de tarea “Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito”. La institución para resolver esta actividad utiliza las siguientes técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$, es decir, modeliza la función cuadrática del área del rectángulo en función de uno de sus lados, se analiza la concavidad y convexidad de la curva y se calcula el vértice de la función.

En la figura 18, la institución presenta las descripciones de las técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ que son empleadas para resolver los subtipos de tarea $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$

Figura 18

Técnica institucional del subtipo de tarea. $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$

Representamos mediante un rectángulo el terreno, para plantear una ecuación relacionando los lados del terreno y, así, hallar el perímetro y el área:



Ancho del terreno: x
Largo del terreno: y

Como se conoce el perímetro, se tiene:

$2x + 2y = 300$

$x + y = 150 \rightarrow y = 150 - x$

Calculamos el área: $A = x \cdot y$

Reemplazamos "y": $A = x(150 - x)$

$A = -x^2 + 150x$

Obtenemos una función cuadrática donde el coeficiente del término cuadrático es negativo. Entonces, la gráfica de esta función será una parábola que se abre hacia abajo.

Se pide hallar el área máxima. Entonces, como estrategia utilizaremos la fórmula para hallar el vértice, ya que este punto será el valor máximo de la función; además, de $A = -x^2 + 150x$, obtenemos $a = -1$, $b = 150$ y $c = 0$.

Reemplazamos y resolvemos: $V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-(150)}{2 \cdot (-1)}; \frac{-150^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)}\right) = (75; 5625)$

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 30)

Entonces, $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ son parte del alcance institucional de la técnica vinculado al subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que aplicar estas dos técnicas para resolver el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ esta dentro del alcance pragmático de la técnica a $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$. Se concluye que hay una coincidencia entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$.

En la figura 19, se muestra una actividad que pertenece al tipo de tarea; Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática.

Figura 19

Situación significativa B

Situación significativa B

Un vendedor de frutas tiene 100 kg de naranja para la venta a S/2 por kilogramo; además, cada día que pasa se estropea 1 kg. Cuando baja la oferta de la fruta, el precio se incrementa en S/0,10 por kilogramo. Entonces, la función que representa el ingreso por la venta de todas las naranjas en relación con el número de días que transcurren está dada por el producto de la cantidad por el precio:

$$F(x) = (100 - x)(2 + 0{,}1x)$$

Donde: "x" representa los días. ¿En cuántos días debe vender las naranjas para obtener el máximo ingreso? ¿Cuánto es el máximo ingreso que obtiene?

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 32)

De la figura 19, se pide calcular el máximo ingreso que se obtiene por la venta de frutas; pertenece al subtipo de tarea "Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico". La institución para resolver esta actividad utiliza la combinación de técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$, es decir, que primero se calcula el vértice, seguidamente se elabora una tabla de valores y por último los puntos obtenidos en la tabla se ubican en el plano cartesiano.

En la figura 20, la institución presenta las descripciones de las técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$ que son empleada para resolver subtipos de tarea $t_{6,\ 7}$

Figura 20

Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,\,7}$

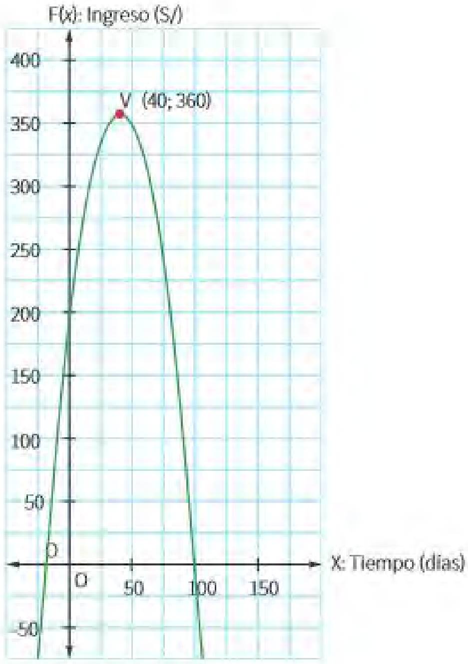
Resolución

Tabulamos y organizamos en una tabla los resultados obtenidos con la función *ingreso*:

$$F(x) = (100 - x)(2 + 0{,}1x)$$

Tiempo (días)	0	20	40	60	80	100
Ingreso (S/)	200	320	360	320	200	0

Es posible obtener las coordenadas del vértice utilizando el software GeoGebra, por lo que esta situación también puede resolverse con las TIC. El vértice representa el punto máximo de la función, ya que la parábola se abre hacia abajo:



Respuesta: Las naranjas se deben vender en 40 días para obtener el máximo ingreso, que será S/360.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 32)

Entonces, $\tau_{vértice\text{-}1}$ y $\tau_{forma\ general\text{-}grafica2}$ son parte del alcance institucional de la técnica vinculado al subtipo de tarea $t_{6,\,7}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que aplicar esas técnicas para resolver el subtipo de tarea $t_{6,\,7}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{vértice\text{-}1}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$ esta dentro del alcance pragmático de la técnica a $t_{6,\,7}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{6,\,4}$.

En la figura 21, se muestra una actividad que pertenece al tipo de tarea; Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática de la forma $f(x)$ =ax^2+bx+c.

Figura 21

Situación significativa C

Situación significativa C

El pueblo Zeta fue invadido por una plaga de mosquitos. Los enfermeros del centro de salud recibieron la medicina para la cura, con la indicación de administrar a los niños la dosis mínima de la expresión $R(x) = x^2 - 50x + 2500$, donde "x" es la dosis en miligramos. Calcula la dosis mínima de la medicina que los enfermeros deben administrar a los niños para curarlos de la picadura de los mosquitos.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 32)

De la figura 21, se pide calcular la dosis mínima de medicina para administrar a los niños; pertenece al subtipo de tarea "Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico". La institución para resolver esta actividad utiliza la combinación de técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$, es decir, que primero se identifica los parámetros a, b y c de la función, seguidamente se calcula el vértice, posteriormente se analiza el signo del coeficiente para analizar la concavidad de la curva.

En la figura 22, la institución presenta las descripciones de las técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ que son empleada para resolver subtipos de tarea $t_{6,\,7}$.

Figura 22

Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,\,7}$

Resolución

Por las características de la función cuadrática:

$R(x) = x^2 - 50x + 2500$

Se puede deducir que su gráfica será una parábola que se abre hacia arriba ($a = 1$, entonces $a > 0$). Por tanto, su vértice representará los valores mínimos de la función.

Calculamos utilizando la fórmula para hallar el vértice:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{-(50)}{2 \cdot (1)}; \frac{-50^2 + 4 \cdot (1) \cdot 2500}{4 \cdot (1)}\right) = (-25\,;\,1875)$$

Respuesta: Recordemos que "x es la dosis en miligramos". Por lo tanto, el valor mínimo es de −25 mg, dosis que los enfermeros deberán administrar a los niños para curarlos.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 32)

Entonces, $\tau_{\text{vértice-1}}$ es parte del alcance institucional de la técnica vinculado al subtipo de tarea $t_{6,\,7}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que aplicar esa técnica para resolver el subtipo de tarea $t_{6,\,7}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$ esta dentro del alcance pragmático de la técnica a $t_{6,\,7}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{6,7}$.

En la figura 23, se muestra una actividad que pertenece al tipo de tarea; determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

Figura 23

Situación A: cercamos un terreno

Situación A: Cercamos un terreno

Un horticultor cuenta con 400 m de malla para delimitar un terreno rectangular. Si quiere aprovechar un muro ya existente para cercar uno de los lados, ¿cuál es la expresión que representa el área del terreno rectangular?

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 25)

De la figura 23, se pide representar el área del terreno rectangular en función de uno de sus lados; pertenece al subtipo de tarea "determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito". En la figura 24, la institución presenta la descripción de la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ empleada para resolver el subtipo de tarea $t_{5,4}$.

Figura 24

Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{5,4}$

Resolución

Representamos el terreno con sus medidas. Para ello, denotamos con x la medida (en metros) del ancho del terreno que se debe cercar.

- En un diagrama tabular, relacionamos y completamos los valores del ancho, largo y área del terreno.

  Variable independiente: ancho del terreno (x)

  Variable dependiente: área del terreno $A(x) = xy$

  * Del dato:

  $x + x + y = 400$

  $y = 400 - 2x$

- Observamos que el área del terreno está dada por:

$$A(x) = 400x - 2x^2$$
$$A(x) = -2x^2 + 400x$$

Nota. Ficha de trabajo de Matemática 4 (2024, p. 25)

Por lo tanto, $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ es parte del alcance institucional de la técnica vinculado al subtipo de tarea $t_{5,4}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que aplicar esa única técnica para resolver el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{5,\,4}$. Asimismo, la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ esta dentro del alcance pragmático de las técnicas a $\boldsymbol{t}_{5,\,4}$. Llegando a la conclusión que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $\boldsymbol{t}_{5,\,4}$.

En la figura 25, se presenta una actividad que pertenece al tipo de tarea; Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

Figura 25

Situación B: programador de videojuego

Situación B: Programador de videojuego

Para la programación de un nuevo videojuego, Luis ha usado la función $y = -x^2 + 12x - 20$ para describir la trayectoria de un misil, que está al ras del agua y que es lanzado desde un submarino hacia un barco que se encuentra a 13 m de distancia. Un compañero le comenta a Luis que en el juego el misil no alcanza al barco. ¿La función expresada es la correcta? Si no es así, ¿cuál es la distancia que recorre el misil?

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 26)

Se pide calcular la distancia del recorrido del misil al realizar una trayectoria parabólica; esta actividad pertenece al subtipo de tarea, “hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general”. En la figura 26, la institución presenta la descripción de la técnica $\tau_{\text{ceros-2}}$ empleada para resolver el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{2,\,1}$.

Figura 26

Técnica institucional del subtipo de tarea $t_{2,1}$

Recuerda

El aspa simple es uno de los métodos que existen para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo

Resuelve esta ecuación:

$4x^2 - x - 3 = 0$

Aplicamos el método del aspa simple:

$4x^2 - x - 3 = 0$

$$\begin{array}{lcr} 4x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & +3 \\ x & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -1 \end{array}$$

La ecuación factorizada es la siguiente:

$(4x + 3)(x - 1) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$4x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Por tanto, C. S. = $\{-\frac{3}{4}; 1\}$.

Nota. Ficha de trabajo de Matemática 4 (2024, p. 26)

Por consiguiente, $\tau_{\text{ceros-2}}$ es parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{2,1}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $t_{2,1}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{ceros-2}}$ esta dentro del alcance pragmático de la técnica a $t_{2,1}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{2,1}$.

La figura 27, se presenta una actividad que pertenece al tipo de tarea; Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$).

Figura 27

Situación C: Área de un terreno

Situación C: Área de un terreno

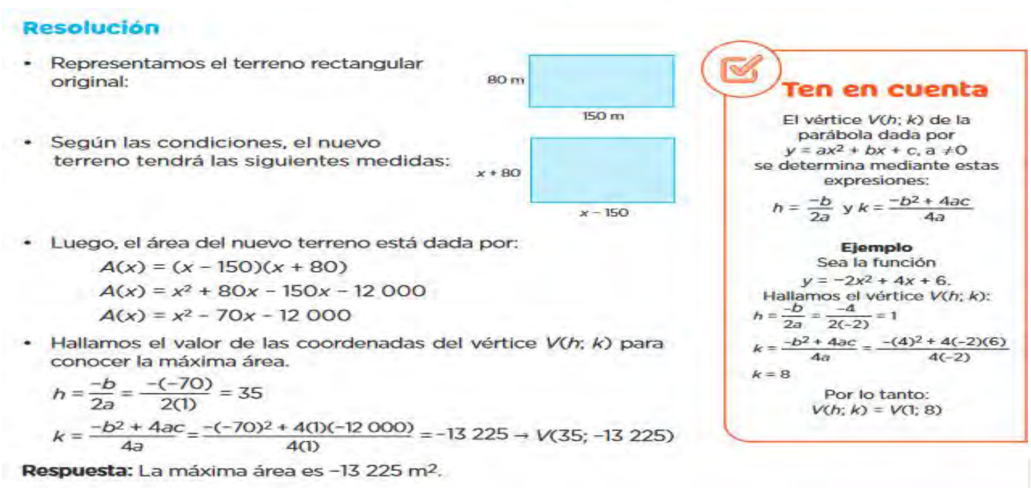
La Municipalidad de Pisco dispone de un terreno rectangular de 150 m por 80 m destinado para el tratamiento de residuos sólidos. En este sentido, debe recortar en x m el lado más largo e incrementar en x m el lado más corto. Representa la expresión algebraica del área del nuevo terreno y determina la máxima área.

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 27)

Además, este tipo de tarea se pide resolver dos ítems; primero modelar en una función cuadrática el área de un terreno rectangular al ampliar la medida de sus lados; y segundo determinar el área máxima de dicha función. Esta actividad pertenece al subtipo de tarea, “hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito”. En la figura 28, la institución presenta las descripciones de la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$, cuya combinación permite resolver el subtipo de tarea $t_{6,4}$.

Figura 28

Técnica institucional del subtipo de tare $t_{6,4}$



Resolución

- Representamos el terreno rectangular original:

- Según las condiciones, el nuevo terreno tendrá las siguientes medidas:

- Luego, el área del nuevo terreno está dada por:

$A(x) = (x - 150)(x + 80)$

$A(x) = x^2 + 80x - 150x - 12\ 000$

$A(x) = x^2 - 70x - 12\ 000$

- Hallamos el valor de las coordenadas del vértice $V(h; k)$ para conocer la máxima área.

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-70)}{2(1)} = 35$

$k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-70)^2 + 4(1)(-12\ 000)}{4(1)} = -13\ 225 \rightarrow V(35; -13\ 225)$

Respuesta: La máxima área es $-13\ 225\ m^2$.

Ten en cuenta

El vértice $V(h; k)$ de la parábola dada por $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ se determina mediante estas expresiones:

$h = \frac{-b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Ejemplo

Sea la función $y = -2x^2 + 4x + 6$.

Hallamos el vértice $V(h; k)$:

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$

$k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(4)^2 + 4(-2)(6)}{4(-2)}$

$k = 8$

Por lo tanto: $V(h; k) = V(1; 8)$

Nota. Ficha de trabajo de Matemática 4 (2024, p. 27)

Por lo tanto, las técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ son parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{6,4}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que utilizar esas técnicas para solucionar el subtipo de tarea $t_{6,4}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ son parte del alcance pragmático de la técnica a $t_{6,4}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{6,4}$. Por último, en esta actividad el estudiante tienen que descubrir cual es el error de procedimiento al aplicar en forma inadecuada la técnica $\tau_{\text{vértice-1}}$.

En figura 29, se observa la siguiente actividad al tipo de tarea; Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c).

Figura 29

Situación B: Beneficios de una empresa

Situación B: Beneficios en una empresa

El contador de una empresa de comida rápida, especializada en la venta de pizzas, concluyó que los beneficios anuales dependen del número de repartidores con los que cuenta; además, que estos beneficios se determinan según el siguiente modelo matemático: $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9855$, donde $B(x)$ es el beneficio anual en soles para x repartidores.

a. ¿Cuántos repartidores debe tener la empresa para que su beneficio anual sea máximo?

b. ¿Cuál será el valor de dicho beneficio máximo?

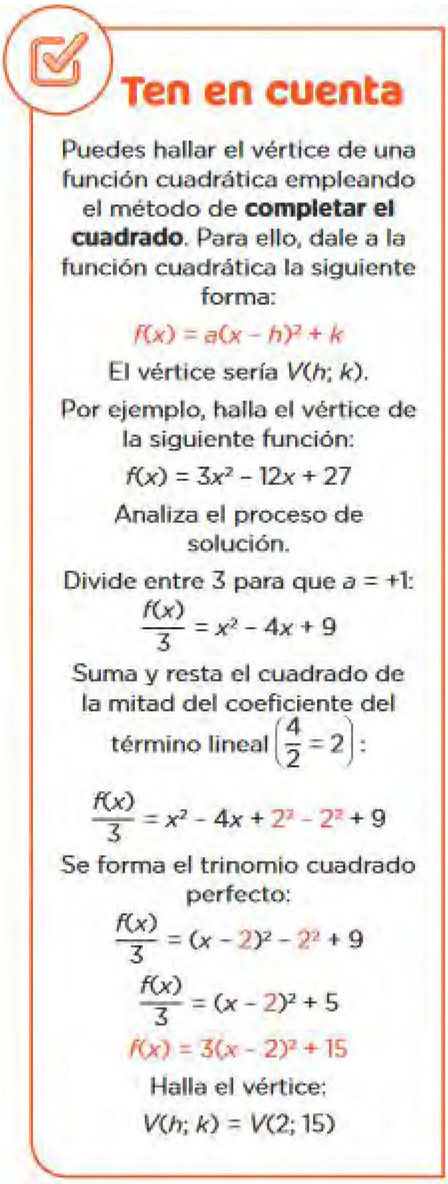
Fuente: Shutterstock

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 27)

Además, este tipo de tarea presenta dos ítems; primero, el número de repartidores de la empresa de comida; y segundo, determinar el máximo beneficio que genera la empresa. Esta actividad pertenece al subtipo de tarea, “hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico”. En la figura 30, la institución presenta la descripción de la técnica $\tau_{\text{vértice-3}}$ empleada para resolver el subtipo de tarea $t_{6,\,7}$.

Figura 30

Técnica institucional del subtipo de tarea $t_{6,7}$



Ten en cuenta

Puedes hallar el vértice de una función cuadrática empleando el método de **completar el cuadrado**. Para ello, dale a la función cuadrática la siguiente forma:

$f(x) = a(x - h)^2 + k$

El vértice sería $V(h; k)$.

Por ejemplo, halla el vértice de la siguiente función:

$f(x) = 3x^2 - 12x + 27$

Analiza el proceso de solución.

Divide entre 3 para que $a = +1$:

$$\frac{f(x)}{3} = x^2 - 4x + 9$$

Suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$:

$$\frac{f(x)}{3} = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 9$$

Se forma el trinomio cuadrado perfecto:

$$\frac{f(x)}{3} = (x - 2)^2 - 2^2 + 9$$

$$\frac{f(x)}{3} = (x - 2)^2 + 5$$

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 15$$

Halla el vértice:

$V(h; k) = V(2; 15)$

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 27)

Por consiguiente, la técnica $\tau_{\text{vértice-3}}$ son parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{6,7}$, lo que se llega a la conclusión, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $t_{6,7}$. Asimismo, la técnica $\tau_{\text{vértice-3}}$ no es parte del alcance pragmático de la técnica a $t_{6,7}$. Donde se concluye que no hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{6,7}$.

Figura 31

Situación A: Modelamos el salto de una rana

Situación A: Modelamos el salto de una rana

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. Luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que la altura que alcanzaba la rana en cada instante del salto podía modelarse con una función cuadrática. En la tabla adjunta, se muestra la altura (h) en metros que alcanza la rana, en un mismo salto, en cinco tiempos (t) diferentes expresados en segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2
h	0	0,75	1	0,75	0

a. Halla la función cuadrática que modela la situación que planteó el experto en anfibios.

b. Determina algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y el tiempo que emplea en llegar ahí.

c. ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 66)

En la figura 31, se observa la siguiente actividad que presente tres items para responder: La primera, determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Esta tarea pertenece al subtipo de tarea, “determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular”. La institución para la resolución de esta actividad utiliza la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$. La segunda, hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Esta tarea pertenece al subtipo de tarea, “hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular”. La institución para la resolución de esta actividad utiliza la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$. Y, por último, hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática. Esta tarea pertenece al subtipo de tarea, “hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general”. La institución para la resolución de esta actividad utiliza la técnica $\tau_{\text{ceros-2}}$.

En la figura 32, la institución presenta las descripciones de las técnicas $\tau_{\text{tabular-forma general}}$, $\tau_{\text{vértice-2}}$ Y $\tau_{\text{ceros-2}}$ que son empleada para resolver subtipos de tarea. $t_{5,6}$; $t_{6,6}$ y $t_{2,1}$.

Figura 32

Técnica institucional de los subtipos de tarea. $t_{5,6}$; $t_{6,6}$ y $t_{2,I}$.

Resolución

a. La función cuadrática tendrá la forma $h(t) = at^2 + bt + c$, donde h es la altura en metros y t es el tiempo en segundos.

De los datos de la tabla, tomamos $t = 0$; $h = 0$.

Reemplazamos y obtenemos $0 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 0$.

Similarmente con $t = 1$; $h = 1$:

$$1 = a(\ldots)^2 + b(\ldots) + c \rightarrow 1 = \ldots\ldots \quad \ldots \text{(I)}$$

Ahora con $t = 2$; $h = 0$:

$$0 = a(\ldots)^2 + b(\ldots) + c \rightarrow 0 = 4a + 2b \rightarrow 0 = \ldots + \ldots \quad \ldots \text{(II)}$$

Luego de resolver el sistema, obtenemos $b = 2$ y $a = -1$.

Por lo tanto, la función es $h(t) = \ldots\ldots$

b. En $h(t) = -t^2 + 2t$, vemos que $a = -1 < 0$; entonces la parábola se abre hacia abajo. Por lo tanto, la altura h tendrá su máximo valor en el vértice de la parábola.

Hallamos el vértice $V(m; n) \in h$, donde $b = 2$ y $a = -1$.

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{\ldots}{2(\ldots)} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

Hallamos n; para ello, reemplazamos $m = \ldots$ en la función $h(t) = -t^2 + 2t$. Entonces, $n = -(\ldots)^2 + 2(\ldots) \rightarrow n = \ldots = \ldots$

Luego, obtenemos que $n = \ldots$; por lo tanto, el vértice es $V(1; 1)$.

A partir del vértice, podemos afirmar que la mayor altura alcanzada por la rana es .... m en un tiempo de .... segundo.

c. Para hallar el tiempo que demora en volver a tocar el suelo la rana, debemos considerar que en ese instante la altura es 0 metros ($h = 0$).

Reemplazamos $h = 0$ en $h(t) = -t^2 + 2t$.

Obtenemos $0 = -t^2 + 2t \rightarrow 0 = t(-t + 2)$.

Luego de resolver lo anterior, tenemos $t = 0$; $t = 2$.

Tomamos el valor 2 porque el tiempo 0 corresponde al punto de inicio del salto. Por tanto, a los 2 segundos, la rana llega al suelo nuevamente.

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 66)

Por consiguiente, la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$ son parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{5,6}$, lo que significa, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $t_{5,6}$. Seguidamente, la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$ es parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{6,6}$, lo que significa, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $t_{6,6}$. Asimismo, la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$ es parte del alcance pragmático de la técnica a $t_{6,6}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{6,6}$. Por último, la técnica $\tau_{\text{ceros-2}}$ es parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $t_{2,1}$, lo que significa, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $t_{2,1}$. Asimismo, la técnica $\tau_{\text{ceros-2}}$ es parte del alcance pragmático de la técnica a $t_{2,1}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $t_{2,1}$.

En esta figura, se presenta una actividad que pertenece al tipo de tarea; Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$).

Figura 33

Situación C: trayectoria del lanzamiento de un balón

Situación C: Trayectoria del lanzamiento de un balón

El profesor Manuel, para motivar a sus estudiantes a quienes les gusta el fútbol, plantea el siguiente problema:

Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está adelantado 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento del balón, el jugador puede escoger entre las dos trayectorias siguientes, donde f y g representan la altura en metros, y x, el tiempo en segundos.

$$f(x) = 0{,}4x - 0{,}05x^2$$
$$g(x) = 1{,}6x - 0{,}2x^2$$

¿Cuál de los dos modelos matemáticos presentados es el más adecuado para que el jugador anote el gol?, ¿por qué?

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 70)

De la figura 33, se pide identificar la altura máxima que alcanza la pelota. Esta actividad pertenece al subtipo de tarea, "hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico". La institución para la resolución de esta actividad utiliza la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$, cuya descripción se encuentra presente en la siguiente figura.

Figura 34

Técnica institucional del subtipo de tarea. $t_{6,4}$

Resolución

Ambas funciones tienen como gráfica una parábola que se abre hacia abajo. Entonces, luego de hallar la abscisa del vértice, determinaremos la altura máxima que alcanza cada modelo de trayectoria.

- Para $f(x) = 0{,}4x - 0{,}05x^2 \rightarrow a = -0{,}05$ y $b = 0{,}4$

  Aplicamos la fórmula: $h = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0{,}4}{2(-0{,}05)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}1} = 4$

- Para $g(x) = 1{,}6x - 0{,}2x^2 \rightarrow a = -0{,}2$ y $b = 1{,}6$

  Aplicamos la fórmula: $h = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1{,}6}{2(-0{,}2)} = \dfrac{1{,}6}{0{,}4} = 4$

Respuesta: Es indistinto aplicar cualquier modelo, porque se obtiene el mismo resultado.

Nota. Ficha de trabajo de Matemática 5 (2024, p. 70)

En la figura 34, la institución presenta la descripción de la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$ que son empleada para resolver subtipos de tarea $\boldsymbol{t}_{6,4}$.

Por lo tanto, la técnica $\tau_{\text{vértice-2}}$ son parte del alcance institucional de la técnica relacionado al subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,7}$, lo que significa, que la institución tiene que utilizar esa técnica para solucionar el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,7}$. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{vértice-1}}$ y $\tau_{\text{vértice-2}}$ son parte del alcance pragmático de la técnica a $\boldsymbol{t}_{6,7}$. Donde se concluye que hay una técnica que coincide entre el alcance pragmático e institucional de la técnica en $\boldsymbol{t}_{6,7}$.

La tabla 23, se observa el análisis de los subtipos de tareas relacionados con las técnicas institucionales y pragmáticas.

Tabla 23

Relación de los subtipos de tareas y sus alcances tanto institucionales como pragmáticos.

Técnicas	$\boldsymbol{t}_{2,1}$	$\boldsymbol{t}_{3,1}$	$\boldsymbol{t}_{4,1}$	$\boldsymbol{t}_{5,3}$	$\boldsymbol{t}_{5,4}$	$\boldsymbol{t}_{5,5}$	$\boldsymbol{t}_{5,6}$	$\boldsymbol{t}_{6,3}$	$\boldsymbol{t}_{6,4}$	$\boldsymbol{t}_{6,5}$	$\boldsymbol{t}_{6,6}$	$\boldsymbol{t}_{6,7}$	$\boldsymbol{t}_{7,1}$	$\boldsymbol{t}_{7,2}$	$\boldsymbol{t}_{7,3}$
$\tau_{\text{vértice-1}}$								P	P,P_I	P	P	P,P_I			
$\tau_{\text{vértice-2}}$							P_I	P	P	P	P	P,P_I			
$\tau_{\text{vértice-3}}$												P_I			
$\tau_{\text{ceros-1}}$															
$\tau_{\text{ceros-2}}$	P, P_I														
$\tau_{\text{ceros-3}}$															
$\tau_{\text{rango-1}}$		P													
$\tau_{\text{rango-2}}$		P													
$\tau_{\text{rango-3}}$												P_I			
$\tau_{\text{tabular-forma general}}$				P		P	P,P_I				P			P	
$\tau_{\text{grafica-forma general}}$			P							P					
$\tau_{\text{prisma-f. general}}$													P		
$\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$					P,P_I				P,P_I				P		
$\tau_{\text{producto-binomios}}$					P				P						
τ_{forma}													P	P	

general-grafica1															
τ_{forma} general-grafica2												P_I			P

Fuente. Autoría propia

A continuación, desarrollaremos los elementos praxeológicos que se analizaran en las fichas y cuadernos de trabajó del ciclo V.

Capítulo V: Análisis de la praxeología de las fichas de trabajo

En el presente capítulo se realiza la descripción y análisis de la praxeología matemática de la función cuadrática en las fichas y cuadernos de trabajos distribuidos por el Ministerio de educación. Asimismo, son utilizadas por los estudiantes en zonas urbanas del nivel secundaria en la actualidad.

5.1 Descripción de los cuadernos de trabajo

Los textos seleccionados llevan por título “Ficha de matemática 4”, “Ficha de matemática 5”, “Cuaderno de trabajo de matemática 3”, “Cuaderno de trabajo de matemática 4” y “Cuaderno de trabajo de matemática 5”. Estos textos están dirigidos a los grados de 3°, 4° y 5° de secundaria, y son editados por el Ministerio de Educación. En relación a las fichas de trabajo de dividen en 8 partes y en los cuadernos de trabajo se dividen en 16 partes.

En la actualidad, por Resolución Ministerial N°335-2024 Minedu, el 05 de julio del 2024, se realizó la actualización de los materiales educativos para la educación Básica, que fueron aprobadas con RM N°365-2023-MINEDU. Asimismo, solo las fichas de matemática de 4° y 5° de secundaria se mantiene presente nuestro objeto matemático de estudio. Además, cabe resaltar que en la ficha de 3° no se a considerado este objeto función cuadrática como tema para la enseñanza, sin embargo, este contenido si está presente en la programación anual de los colegios, para lo cual el maestro utiliza los materiales del 2020 que están disponibles en el portal institucional del Ministerio de educación.

A continuación, en la tabla 24, se describen las fichas y cuadernos de trabajo relacionados con nuestro objeto matemático de la función cuadrática.

Tabla 24

Ubicación de la función cuadrática en sus respectivas fichas

Ficha de matemática 4	Parte 2: ¿Cómo representamos y comprendemos los valores máximos y mínimos en diversas situaciones? ➢ Construimos nuestros aprendizajes ➢ Comprobamos nuestros aprendizajes ➢ Evaluamos nuestros aprendizajes
Ficha de matemática 5	Parte 6: ¿Cómo optimizamos recursos en la vida cotidiana mediante la función cuadrática? ➢ Construimos nuestros aprendizajes ➢ Comprobamos nuestros aprendizajes

	➢ Evaluamos nuestros aprendizajes
Cuaderno de trabajo 3	Parte 2: El recorrido de una esfera ➢ Aplicamos nuestros aprendizajes ➢ Comprobamos nuestros aprendizajes ➢ Evaluamos nuestros aprendizajes
Cuaderno de trabajo 4	Parte 6: Entradas al teatro ➢ Aplicamos nuestros aprendizajes ➢ Comprobamos nuestros aprendizajes Evaluamos nuestros aprendizajes
Cuaderno de trabajo 5	Parte 6: Construyendo canales ➢ Aplicamos nuestros aprendizajes ➢ Comprobamos nuestros aprendizajes ➢ Evaluamos nuestros aprendizajes

Fuente. Autoría propia

5.2 Análisis de los cuadernos de trabajo

En esta sección se describe y analiza los elementos praxeológicos de la función cuadrática detallados en el capítulo anterior.

En la tabla 25, se presenta la cantidad total de ejercicios de los grados de 3°, 4° y 5| de secundaria, junto con la cantidad de actividades que han sido resueltos.

Tabla 25

Cantidad de ejercicios sobre función cuadrática en libro de matemática de secundaria

GRADO	N° total de ejercicios	N° total de ejercicios resueltos	N° total de ejercicios propuestos
Tercero de secundaria 2020	14	4	**10**
Cuarto de secundaria 2020	14	4	**10**
Quinto de secundaria 2020	14	4	**10**
Cuarto de secundaria 2024	13	5	**8**

Quinto de secundaria 2024	12	4	**8**

Fuente. Autoría propia

5.2.1 Ficha de matemática 4° de secundaria

Figura 35

Entradas al teatro

Como parte de un proyecto artístico, los estudiantes de una institución educativa realizarán una función de teatro. El auditorio tiene capacidad para 500 asistentes y se fija el precio de la entrada en S/10. Sin embargo, debido a gastos adicionales, los responsables de la organización se ven en la necesidad de incrementar el precio para obtener mayores ingresos, y consideran que, por cada S/1 de incremento, desistirán 10 personas de asistir a dicha función.

Fuente: Erik Mclean

a. ¿Cuánto es el máximo incremento que se puede hacer de modo tal que se obtenga el mayor ingreso posible?

b. ¿Cuál será el precio de la entrada según la condición expresada?

c. ¿A cuánto equivale el máximo ingreso?

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 21)

En la figura 35, se presenta el siguiente tipo de tarea T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) = ax^2+bx+c$).

$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{6,4,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) en relación de la variable independiente como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Se calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

El problema mostrado corresponde a un contexto extramatemático, donde se genera la modelación de la función cuadrática. Asimismo, Corresponde al tipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,\,4}$ donde se aplica la técnica $\tau_{6,\,4,1}$. Además, este problema presenta cuatro anexos que explican las propiedades de nuestro objeto matemático las cuales son: Primero, clasifica los términos de la función cuadrática $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (término cuadrático, término lineal y término independiente) e indica quien es la variable independiente y dependiente. Segundo, define lo que es una expresión algebraica y da algunos ejemplos de ello. Tercero, presenta la definición de la función cuadrática mencionando la importancia del vértice como un punto máximo o mínimo al representar su gráfica. Y, por último, explica la relación entre la gráfica y su representación tabular de la función como los puntos coordenados (x; f(x)). Según Chaves y Almouloud (2016), este problema se presenta como una situación problemática que se necesita resolver en un determinado contexto cotidiano. Además, la técnica y tecnología que se utiliza en este problema de estudio lo clasifica como una tarea del contexto gráfico, puesto que su solución se necesita de una gráfica para el análisis del vértice. Chaves (2016) menciona que la razón de este problema es la representación de un modelo matemático de la función cuadrática en una situación de la vida cotidiana y en un contexto extramatemático. Además, su solución permita modelar las coordenadas de la curva que representa esta situación problemática.

Por otro lado, en la investigación de Palm (2008) se destaca que este tipo de actividad es considera como una tarea autentica ya que presenta un contexto de la vida real. Asimismo, presenta preguntas que relacionan entre la tarea de un contexto escolar y una situación extraescolar de un contexto de la realidad. Además, el contexto de la tarea, tiene como propósito para el estudiante, en conseguir una solución idónea de la actividad desde un punto de vista de la realidad.

Según Tocto (2015), las dificultades que enfrentaron los estudiantes en la solución del problema son las siguientes: Primero, la limitada interpretación de los enunciados verbales al ser muy compleja impide identificar correctamente los datos y sus variables, tanto independientes como dependientes. Segundo, esta falta de comprensión de los enunciados verbales dificultó la conversión a su forma tabular, lo que a su vez impidió la relación entre las variables; además, la desorganización de la información obstaculiza la generación a su forma algebraica. Por último, al intentar representarlo a su forma algebraica, cometieron errores relacionados con algoritmos, la reducción de términos semejantes y la aplicación de la propiedad distributiva.

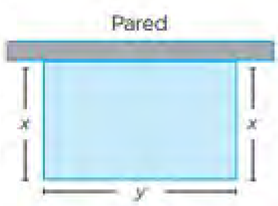
Gaita et al., (2022) señala que este problema pertenece a un contexto abierto, ya que permite el uso de diversas estrategias de resolución permitiendo obtener diferentes soluciones. A partir de ello, no resulta indispensable convertir este problema expresión algebraica; puesto que por medio de tablas y a través de un razonamiento numérico se interpreta que es una función cuadrática cóncava hacia abajo. No obstante, en este tipo de problemas, resulta pertinente realizar una modelización mediante una función ya que esta práctica favorece al interés del estudiante y contribuye un aspecto esencial de la matemática. Además, al no ser trabajadas en el ámbito escolar representaría un desafío para el estudiante para representar de un contexto verbal a uno algebraico.

Según Belin et al., (2024) en este problema empieza desde un enfoque de covariación, donde se identifican las variables primarias (la variable independiente es el número de asistentes y la variable dependiente el ingreso total). Además, hay una coordinación directa con respecto al aumento y disminución de sus variables. Posteriormente, se identifica un patrón con los valores tabulares generando la forma general de la función cuadrática obteniéndose una concepción en un enfoque correlacional. Además, el vértice es generado por la relación de los parámetros a, b y c; y por medio de ellos es más sencillo examinar el comportamiento de la función.

Figura 36

Resolución de problema.

Analiza la situación: Lucía tiene 16 m de malla para cercar un corral de forma rectangular para sus pavos. Si uno de los lados coincide con una pared, ¿cuáles son las variables? ¿Qué representa la relación entre las variables?



Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 22)

En la figura 36, se presenta el siguiente tipo de tarea T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{5,4}$: Determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito

$\tau_{5,4,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles “x” e “y” a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Sustituir la medida de “y” en la expresión algebraica del área del rectángulo.

Paso 7: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Para este problema, se debe dibujar un rectángulo asignándole medidas a los lados del rectángulo en función de x. Se escribe la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x. Se debe aplicar la propiedad distributiva para obtener la función cuadrática de la forma $A(x)=ax^2+bx$. Además, Arcavi et al., (2016) enfatiza que el algebra es difícil de enseñar si solo se presenta ecuaciones o fórmulas al desnudo, es por ese motivo, que los estudiantes deben trabajar problemas que presente una situación de contexto significativo que favorezcan a un modelado y genere el punto de partida en toda actividad algebraica. Además, estos tipos de problemas son catalogados por los autores como artificiales o no reales (no significativas) puesto que no se presta como ejemplos de la fenología didáctica. Asimismo, al tratarse de problemas artificiales, producen en los estudiantes, dificultades de concentración y confusión en los estudiantes, lo que puede llevar a que no realicen la actividad matemática. Por otro lado, Almonacid (2018) señala que estos tipos de problemas requieren un gran esfuerzo por parte de los estudiantes para su resolución y generalización de la función cuadrática a su expresión algebraica. Esto se bebe a que la enseñanza de la función cuadrática se centra en un tratamiento algebraico, sin que se establezcan relaciones con otros tipos de registros de representación. Además, los estudiantes presentan dificultades en identificar las variables de independientes y dependientes en estos problemas contextualizados.

Belin et al., (2024) en este problema empieza en un contexto de una situación de la vida real por lo que se opera dentro de un enfoque covariacional. Se debe identifica las variables primarias tanto independientes como dependientes. Asimismo, se debe establecer una coordinación directa entre los cambios de una cantidad que ocurre simultáneamente con los cambios de la otra. Posteriormente, se genera la forma general de la función cuadrática obteniéndose una concepción en un enfoque correlacional. Por otro lado, Palm (2008) considera a esta tarea como una variante autentico, puesto que representa una simulación adecuada al reflejar aspectos propios de situaciones de la vida real. Asimismo, su resolución se basa en aspectos fundamentales como los conocimientos del mundo real que aporta los estudiantes y las estrategias de solución más reflexivas, lo que se permite obtener la modelación algebraica, que es el objetivo de la pregunta.

Figura 37

Situación A: Cercamos un terreno

Situación A: Cercamos un terreno

Un horticultor cuenta con 400 m de malla para delimitar un terreno rectangular. Si quiere aprovechar un muro ya existente para cercar uno de los lados, ¿cuál es la expresión que representa el área del terreno rectangular?

Ahora, respondemos las siguientes preguntas en tu cuaderno:

1. ¿Para qué valor de *x* se tiene la mayor área del terreno?
2. Representa la expresión matemática del área del terreno en un plano cartesiano.

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 25)

En la figura 37, se presenta el siguiente tipo de tarea T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{5,4}$: Determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito

$\tau_{5,4,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles "x" e "y" a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de "y" en función de "x".

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Sustituir la medida de "y" en la expresión algebraica del área del rectángulo.

Paso 7: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

En este problema observamos la presencia de tres interrogantes: la primera, consiste en obtener la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general de la forma $f(x)=ax^2+bx$. La segunda consiste en hallar el máximo valor que alcanza la función cuadrática. El tercero, realizar el cambio de registro algebraico al registro gráfico. Además, en este problema presenta como anexo propiedades relacionadas a la orientación de la concavidad de la función cuadrática.

En este problema, Díaz y Flores (2022) menciona que los estudiantes cometen errores en calcular el vértice y relacionarlo con el punto máximo o mínimo de la función cuadrática. Esto se debe a un obstáculo en la comprensión del concepto y propiedades de dicha función, lo que afecta la resolución de problema y genera respuestas inadecuadas. Además, presenta errores en el procedimiento para hallar los puntos de intersección de los ejes coordenados con la función cuadrática, lo que dificulta la realización adecuada de su gráfica.

Por otro parte, al apoyarnos en el estudio de Palm (2008), se concluye que esta actividad es una tarea autentica puesto que presenta un acontecimiento de la simulación de un contexto de la realidad. Además, el estudiante, para alcanzar una solución en una perspectiva realista, emplea dos aspectos fundamentales: la estrategia de resolución adecuadas y conocimientos del mundo real que presenta el estudiante.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c)

$t_{6,\ 4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatematico y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{6,4,7}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles “x” e “y” a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Este problema para obtener el punto máximo de la función cuadrática es necesario realizar su modelación en la forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Según Arcavi et al., (2016) categoriza a esta actividad como un contexto no real puesto que no son significativas para el estudiante. Además, Almonacid (2018) enfatiza para estos tipos de tareas es necesario realizar primero un tratamiento en el ostensivo tabular, así el estudiante no va tener dificultades en las cuantificaciones de la variación del área

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{7,1,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles "x" e "y" a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de "y" en función de "x".

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Sustituir la medida de "y" en la expresión algebraica del área del rectángulo.

Paso 7: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 8: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 9: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 10: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 11: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 12: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

En este problema, tiene como finalidad realizar la conversión de la función de su expresión algebraica a su representación gráfica. Se utilizando la técnica $\tau_{7,1,1}$ que corresponde al subtipo de tarea $t_{7,1}$.

Según Tocto (2015), para representar en su forma gráfica la función cuadrática a partir de su expresión algebraica, los estudiantes presentan varias dificultades: En primer primero, el desconocimiento de reglas o propiedades provoca errores en los procedimientos algorítmicos necesario para su representación gráfica. Segundo lugar, muchos estudiantes no saben cómo hallar el domino y el rango de la función. Y, por último, al calcular el vértice y los puntos de paso de la función cuadrática, los estudiantes no saben interpretar adecuadamente su significado.

Belin et al., (2024) en este problema al realizar su modelización a su expresión algebraica de la función cuadrática su concepción está en un enfoque correlacional. Se identifica las variables primarias que son variables independientes o dependientes. Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuyen. Además, el vértice es uno de los elementos representativos de la representación gráfica. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 38

Situación B: programador de videojuego

Situación B: Programador de videojuego

Para la programación de un nuevo videojuego, Luis ha usado la función $y = -x^2 + 12x - 20$ para describir la trayectoria de un misil, que está al ras del agua y que es lanzado desde un submarino hacia un barco que se encuentra a 13 m de distancia. Un compañero le comenta a Luis que en el juego el misil no alcanza al barco. ¿La función expresada es la correcta? Si no es así, ¿cuál es la distancia que recorre el misil?

1. Representa en el plano cartesiano la función $y = -x^2 + 12x - 20$. Luego, interpreta el punto máximo.

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 26)

En la figura 38, se presenta los siguientes tipos de tarea T_2 y T_7.

T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{2,1,1}$

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

En este problema se presenta dos ítems de preguntas que están relacionadas a obtener las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función cuadrática. Se aplicar la técnica $\tau_{2,1}$ que corresponde al tipo de tarea $t_{2,1}$, permitiendo calcular las coordenadas (0; x_1) y (0; x_2) que representa los puntos de interceptar la función con el eje x. Además, se observa que en este problema de las fichas de matemática 4 (2024) presenta una teoría relacionada al método del aspa simple para resolver ecuaciones de segundo grado y obtener una ecuación factorizada que permite obtener los puntos de intersección en el eje x a diferencia del cuaderno de trabajo de matemática 4 (2020) que no lo presenta. Díaz y

Flores (2022) explica que, en estos problemas, los estudiantes presentan dificultades en errores de procedimiento, puesto que usan de manera inadecuada la fórmula de la ecuación cuadrática o la regla de aspa simple para hallar los puntos de intersección con los ejes x.

Belin et al., (2024) en esta actividad por presentar la expresión algebraica de la función cuadrática, permite a la persona conceptualizar dicha función en un enfoque de correspondencia (estática). Lo que permite, por medio de elementos del dominio y mediante un procedimiento, obtener un elemento del rango o en su forma inversa. Y, la utilización de la ecuación cuadrática que permiten obtener los ceros para poder representar la gráfica de dicha función. Asimismo, se identifica las variables primarias; donde la distancia del proyectil es la variable dependiente y su altura la variable independiente. Por último, presenta una coordinación directa en la relación como aumenta o disminuye las variables.

Según Palm (2008), esta actividad escolar presenta una situación contextualizada de la vida real, que representa la modelación de la trayectoria del misil que se lanza desde un submarino, clasificándolo como una tarea escolar autentica. Además, en cuanto a la interrogante que presenta la actividad existe una coherencia entre la situación contextualizada y el propósito de la pregunta. Esto permite en el estudiante obtener una solución realista, respaldado por el uso de un lenguaje adecuado que describe en forma apropiada la información de los datos de la tarea.

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{7,\ 3}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico.

$\tau_{7,3}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

En este problema, consiste en transformar del registro algebraico al gráfico, para ello se debe obtener el vértice y los puntos de intersección de la parábola con los ejes coordenados. Según Tocto (2015), en su investigación observa que los estudiantes presentan una serie de dificultades al convertir de la representación algebraica al gráfico, las cuales son: El uso inapropiado de las reglas y propiedades de este objeto matemático, junto con el desconocimiento de interpretar adecuadamente el vértice y los puntos de paso de la función cuadrática.

Figura 39

Situación C: Área de un terreno

Situación C: Área de un terreno

La Municipalidad de Pisco dispone de un terreno rectangular de 150 m por 80 m destinado para el tratamiento de residuos sólidos. En este sentido, debe recortar en *x* m el lado más largo e incrementar en *x* m el lado más corto. Representa la expresión algebraica del área del nuevo terreno y determina la máxima área.

Representa la expresión algebraica del área del nuevo terreno en un plano cartesiano. Interpreta el punto máximo.

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 27)

En la figura 36, se muestra una actividad “área de un terreno” en donde se abordan los tipos de tarea T_5 y T_7.

T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{5,4}$: Determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito

$\tau_{5,4,4}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=(x+a)(x+b)

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$)

$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{6,4,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=(x+a)(x+b)

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

En este problema parte de un contexto no real cuyo objetivo es modelar la función cuadrática y calcular el punto máximo. Esta actividad presenta una teoría relacionada a como calcular el vértice V(h;k) de una función cuadrática de la forma $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ($h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$). Además, Arcavi et al., (2016) enfatiza que el algebra es difícil de enseñar si solo se presenta ecuaciones o fórmulas al desnudo, es por ese motivo, que los estudiantes deben trabajar problemas que presente una situación de contexto significativo que favorezcan a un modelado y genere el punto de partida en toda actividad algebraica. Además, estos tipos de problemas son catalogados por los autores como artificiales o no reales (no significativas) puesto que no se presta como ejemplos de la fenología didáctica. Asimismo, al tratarse de problemas artificiales, producen en los estudiantes, dificultades de concentración y confusión en los estudiantes, lo que puede llevar a que no realicen la actividad matemática.

En a la investigación de Palm (2008), clasifica esta actividad en una tarea autentica porque presenta una situación de un contexto real. Además, muestras preguntas que establece con claridad el propósito de la actividad, como son la modelación de la función y la obtención del área máxima de un terreno rectangular, donde se varias sus lados en relación a “x”.

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{7,1,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)=(x+a)(x+b)$

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 7: Interceptar con el eje X, cuando igualamos $y=0$

Paso 8: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 11: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

En este problema, se pide la trasformación a su representación gráfica utilizando el sistema de coordenadas, por ese motivo se debe obtener los puntos de intersección en los ejes coordenados y su respectivo vértice para realizar dicha conversión. Según Tocto (2015), para representar en su forma gráfica la función cuadrática a partir de su expresión algebraica, los estudiantes presentan varias dificultades: En primer primero, el desconocimiento de reglas o propiedades provoca errores en los procedimientos algorítmicos necesario para su representación gráfica. Segundo lugar, muchos estudiantes no saben cómo hallar el domino y el rango de la función. Y, por último, al calcular el vértice y los puntos de paso de la función cuadrática, los estudiantes no saben interpretar adecuadamente su significado.

Belin et al., (2024) en este problema al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuye y sus respectivas propiedades. Además, el vértice es uno de los elementos representativos de la representación gráfica. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 40

Problema 1

Julio y su familia han emprendido un negocio en el rubro de turismo y, para promocionarlo, ofrecen la siguiente oferta: por 30 personas, el costo de cada boleto para el *tour* es S/100; pero, si el número de personas aumenta, el costo del boleto disminuirá en S/1 por cada persona adicional. Determina la expresión algebraica que representa la recaudación total en función de la cantidad de personas adicionales (x).

a) $f(x) = -x^2 + 30x + 3000$
b) $f(x) = 3000 + 70x - x^2$
c) $f(x) = x^2 - 40x + 3100$
d) $f(x) = -x^2 + 100x + 10\,000$

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 28)

En la figura 40, se presenta el siguiente tipo de tarea T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\boldsymbol{t}_{5,\,4}$: Determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{5,4,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

En este problema, su resolución conlleva a crear un ostensivo tabular con la finalidad relacionar los datos e identificar las variables involucradas, así como generalizar la expresión algebraica de la función correspondiente. Tocto (2015) menciona que las dificultades que enfrentaron los estudiantes en la solución de este problema son las siguientes: Primero, la limitada interpretación de los enunciados verbales al ser muy compleja impidió identificar correctamente los datos y sus variables, tanto independientes como dependientes. Segundo, esta falta de comprensión de los enunciados verbales dificultó la conversión a su forma tabular, lo que a su vez impidió la relación entre las variables; además, la desorganización de la información obstaculiza la generación a su forma algebraica. Por último, al intentar representarlo a su forma algebraica, cometieron errores relacionados con algoritmos, la reducción de términos semejantes y la aplicación de la propiedad distributiva. Chaves (2016) la razón de este problema es la representación de un modelo matemático de la función cuadrática en una situación de la vida cotidiana y en un contexto extramatemático. Además, su solución permita modelar las coordenadas de la curva que se representa por medio una expresión algebraica.

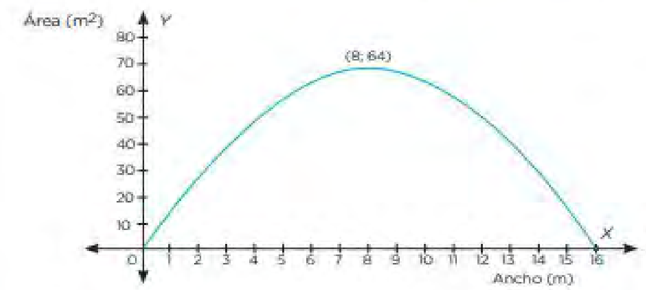
En el estudio de Palm (2008) se establece que este tipo de problema se considera como una tarea autentica, ya que presenta una situación extraescolar y un contexto adecuado de la tarea. La interrogante de esta actividad consiste en la modelación de la recaudación total en función a la cantidad de personas, por lo cual es estudiante debe hacer uso de sus conocimientos de la realidad y aplicar estrategias de solución bien pensadas para el desarrollo de esta actividad, consiguiendo que su resolución se encuentre en un contexto de la real.

Belin et al., (2024) por ser un problema de un contexto de situación de la vida real genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso). Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuye y sus respectivas propiedades. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción de la función es un enfoque correlacional.

Figura 41

Problema 2

La municipalidad de un distrito propone a los pobladores el sembrado de árboles como parte de un proyecto de reforestación en su comunidad. La primera tarea fue delimitar el terreno rectangular donde se prepararán los almácigos; para ello, los responsables les entregan a los pobladores 32 metros de malla para cercar el terreno, y solicitan que se delimite la máxima área. La gráfica mostrada representa la relación entre el área y el ancho del terreno.



Considerando la información de la gráfica, ¿cuál es la máxima área que pueden conseguir los pobladores con el total de malla? ¿Cuánto medirá el ancho del terreno?

a) Área = 8 m²; ancho = 64 m
b) Área = 64 m²; ancho = 8 m
c) Área = 16 m²; ancho = 8 m
d) Área = 32 m²; ancho = 16 m

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 28)

En la figura 41, se presenta el siguiente tipo de tarea T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$)

$\boldsymbol{t}_{6,5}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico.

$\tau_{6,5}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola f(x)=ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

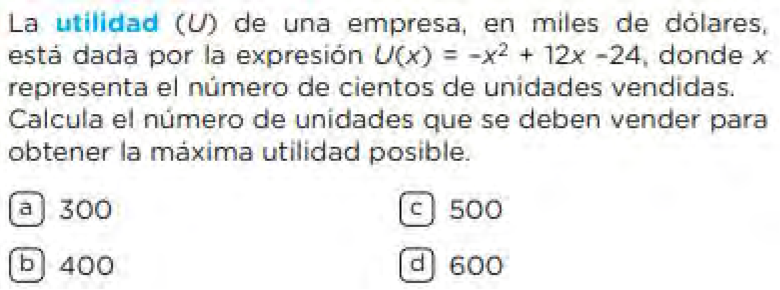
Este problema, presenta un ostensivo grafico cuya finalizar es identificar los tres puntos que lo integran. Posteriormente se generar la expresión algebraica de la función calculando los parámetros por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Finalizando con el cálculo del vértice se analiza el punto máximo de la función. Tocto (2015), los estudiantes, debido a su escaso dominio de las reglas de formación de sistemas de ecuaciones, tienen dificultad para realizar la trasformación de lo grafico a lo algebraico para modelar esta función. Uno de las causas probables es el poco desarrollo de estos tipos de problemas en la clase, lo que conlleva a una falta de dominio de las propiedades y elementos que conforman la representación gráfica de la función cuadrática, así como los errores algorítmicos al resolver los sistemas de ecuaciones. Además, Díaz et al., (2013) los estudiantes presentaron dificultad en identificar el parámetro “c” en forma directa en la gráfica y al analizar la orientación de la curva de la parábola se confunden con el signo del parámetro “a”.

En el estudio de Palm (2008) se establece que este tipo de problema se considera como una tarea menos autentica, ya que la solución de la interrogante se obtiene en forma directa con solo analizar los componentes del vértice de la función cuadrática representada en el plano cartesiano. Además, en esta actividad incluye un dato no utilizado (32 metros de malla) que podría contribuir en la modificación de la pregunta y permitiendo realizar un análisis más profundo en el contexto real de esta tarea.

Belin et al., (2024) por ser un problema de un contexto de situación de la vida real genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso). La representación gráfica corresponde una fila de puntos en una relación dinámica de las variables. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuye y sus respectivas propiedades. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Donde el vértice es uno de los elementos representativos de la representación gráfica. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 42

Problema 3



La **utilidad** (U) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresión $U(x) = -x^2 + 12x - 24$, donde x representa el número de cientos de unidades vendidas. Calcula el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible.

a) 300 c) 500

b) 400 d) 600

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 29)

En la figura 42, se presenta el siguiente tipo de tarea T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c).

$t_{6,\ 7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\tau_{6,7,1}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

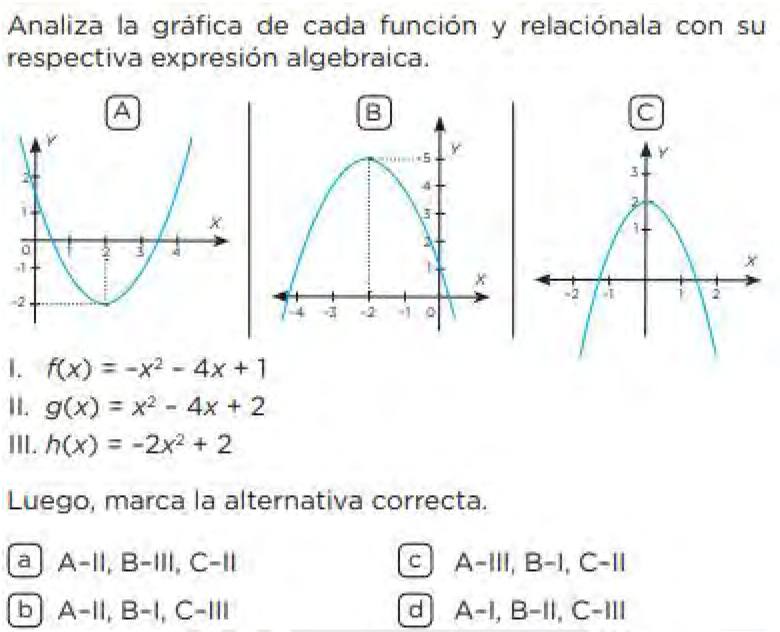
Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, para obtener su solución solo debemos calcular la abscisa del vértice (h= $-\frac{b}{2a}$) de la función cuadrática y posteriormente se determina el valor máximo alcanzado por el ciento de unidades vendidas. Asimismo, Díaz y Flores (2022) establece que los estudiantes presentan errores en calcular el vértice de la parábola puesto que presenta dificultades en aplicar procedimientos de contexto aritmético. Y, error de procedimiento puesto que al utilizar la fórmula para obtener el vértice lo realizan de manera inadecuada. Por otra parte, Palm (2008) clasifica a esta actividad como una tarea autentica por presentar la modelación de la utilidad de la empresa expresado en una representación algebraica (situación contextualizada de la realidad). La obtención de su solución se realiza de manera directa, utilizando la formula del vértice o completando cuadrados, y que está en concordancia con el contexto de la actividad.

Belin et al., (2024) en este ejercicio se presenta la expresión general de la función cuadrática, permitiendo en el estudiante que desarrolle una concepción de la función por correspondencia. Asimismo, se obtiene el vértice que representa un ingrediente en la representación gráfica de la función. Además, se identifica las variables primarias; donde el número de cientos de unidades vendidas representa la variable independiente y la utilidad la variable independiente. Por último, presenta una coordinación directa en la relación como aumenta o disminuye las variables.

Figura 43

Problema 4



Analiza la gráfica de cada función y relaciónala con su respectiva expresión algebraica.

I. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

II. $g(x) = x^2 - 4x + 2$

III. $h(x) = -2x^2 + 2$

Luego, marca la alternativa correcta.

a) A-II, B-III, C-II

b) A-II, B-I, C-III

c) A-III, B-I, C-II

d) A-I, B-II, C-III

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 29)

En la figura 43, se presenta el siguiente tipo de tarea T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c).

$\boldsymbol{t}_{6,\ 3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,3}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Para resolver este problema; primero se identificaron los valores a, b y c que son parámetros de la función cuadrática; segundo, se calcula el vértice (h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$); y, por último, para relacionar f(x)=ax^2+bx+c con su respectiva grafica se analiza el coeficiente cuadrático para determinar la concavidad de la curva. Según Isfan et al., (2019) las dificultades para resolver este problema por parte de los estudiantes son: Primero, cometen el error de no saber relacionar el vértice con el punto máximo o mínimo de la función; segundo, no comprender el concepto del plano cartesiano al representar la gráfica de la función cuadrática; y por último errores en habilidades de cálculo al realizar operaciones aritméticas y algebraicas de manera incorrecta para calcular el vértice o los puntos de intersección de los ejes. Por otro lado, Palm (2008) señala que este tipo de actividad corresponde a una tarea no autentica, puesto que no presenta una situación contextualizada de la realidad. Además, la tarea conduce a una respuesta esperada, que se obtiene en forma directa por medio de las propiedades de la función cuadrática, por lo que se hace inconsistente con la realidad.

Belin et al., (2024) en esta actividad de desarrolla la conceptualización de la función en un enfoque por correspondencia, donde el estudiante concibe en la idea de que los valores función cambian con los valores de la entrada de la función. Asimismo, para analizar la posición del vértice se analiza el parámetro b junto con el parámetro a.

Figura 44

Problema 5

Un edificio tiene 60 minidepartamentos que pueden ser alquilados en su totalidad a S/500 cada uno. Por cada S/10 de aumento en el alquiler, 2 minidepartamentos quedarán sin ser alquilados. Modela el ingreso de los alquileres en este edificio mediante una expresión algebraica.

a) $I(x) = 20x^2 + 400x + 30\ 000$

b) $I(x) = -20x^2 - 400x + 30\ 000$

c) $I(x) = 20x^2 - 400x + 30\ 000$

d) $I(x) = 20x^2 + 400x - 30\ 000$

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 29)

En la figura 44, se muestra una actividad llamada problema 5 en donde se abordan el tipo de tarea T_5.

T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\boldsymbol{t}_{5,\,4}$: Determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{5,4,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común (ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

En este problema, su resolución conlleva a crear un ostensivo tabular con la finalidad relacionar los datos e identificar las variables involucradas, así como generalizar la expresión algebraica de la función correspondiente. Además, Este ejercicio corresponde a un contexto extramatemático de tipo de tarea $t_{5,\ 4}$ donde se aplica la técnica $\tau_{5,\ 4,2}$. Tocto (2015), los estudiantes presentan dificultades como; no saber interpretar los enunciados verbales del problema lo que conlleva a no identificar la variable independiente y dependiente; asimismo, no saber interpretar los datos al realizar la conversión a su forma tabular llegando a la conclusión que no puede establecer relaciones entre las variables; y por último comete errores de tipo algorítmico al no representarlo a su forma algebraica.

Palm (2008) designa a este tipo de problema como una tarea autentica, ya que plantea una situación de contexto de la vida real. Al usar la información presente en el problema y con el apoyo de estrategias bien analizadas, el estudiante genera una respuesta realista.

Belin et al., (2024) en este ejercicio genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso) porque el problema corresponde a un contexto de situación de la realidad. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables independientes y dependientes en como aumenta y disminuye y su respectiva propiedad. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Donde el vértice es considerado como un elemento representativo de la gráfica de la parábola. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 45

Problema 6

De las cuatro esquinas de una pieza rectangular de latón, se cortan cuadrados de 1 cm de lado. De esta manera, al doblar los extremos salientes, se obtiene una caja abierta sin tapa, de modo que las medidas de su base difieren en 3 cm. Si la caja resultante presenta 28 cm^3 de volumen, ¿qué medidas tiene la pieza original de latón?

a) 3 cm × 9 cm
b) 6 cm × 18 cm
c) 6 cm × 9 cm
d) 3 cm × 18 cm

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 29)

En la figura 45, se muestra una actividad llamada problema 6 en donde se abordan el tipo de tarea T_2.

Tipo de tarea T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$\boldsymbol{t}_{2,\ 1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\boldsymbol{\tau}_{2,1,2}$:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: el ancho del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Para resolver este problema, el estudiante debe conocer ciertas nociones matemáticas (el volumen y ecuación de segundo grado) para poder realizar la generalización de la función a su expresión algebraica.

Según Ozultun et al., (2017), los estudiantes tienen dificultades en encontrar los puntos de intersección con el eje x; utilizan el método de prueba y error para obtener raíces x_1 y x_2. Esto se debe a que no recordaban el procedimiento de obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Da Silva et al., (2024), este ejercicio corresponde a una tarea contextualizada donde se modeliza para representarlo en una función cuadrática. Y, utilizando el objeto ostensivo algebraico se consigue calcular el vértice y los puntos de intersección en los ejes x e y. Entre los objetos no ostensivos que presenta este problema son el volumen de un prisma rectangular y las raíces de la ecuación cuadrática. Además, Palm (2008) designa a esta actividad como tarea autentica porque describe una simulación de la realidad. Además, su resolución tiene como propósito el de generar un modelo matemático, con la utilización de la información específica y no superflua que describe la actividad.

Belin et al., (2024) en este ejercicio genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso) porque el problema corresponde a un contexto de situación de la realidad. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables de la longitud del latón y su respectivo volumen. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Se aplica la resolución de la ecuación cuadrática que permiten obtener los ceros que facilita la representación gráfica de la función.

Figura 46

Problema 7

Un campo petrolero tiene 30 pozos, cada uno de los cuales produce 18 000 barriles diarios de petróleo. Se sabe que, por cada nuevo pozo perforado en el campo, la producción diaria de cada uno de los pozos disminuye en 5 barriles. Determina el número de nuevos pozos que maximiza la producción total P del campo petrolífero.

a) 2400 b) 600 c) 1785 d) 1550

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 30)

En la figura 46, se muestra una actividad llamada problema 7 en donde se abordan el tipo de tarea T_6.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c)

$t_{6,\ 4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

$\tau_{6,4,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) en relación de la variable independiente como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Se calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

En este problema, corresponde a un contexto extramatemático, donde se genera la modelación de la función cuadrática. Asimismo, Corresponde al tipo de tarea $t_{6,\ 4}$ donde se aplica la técnica $\tau_{6,4,1}$.

Según Chaves y Almouloud (2016), este problema se presenta como una situación problemática que se necesita resolver en un determinado contexto cotidiano. Además, la técnica y tecnología que se utiliza en este problema de estudio lo clasifica como una tarea del contenido gráfico, puesto que su solución se necesita de un bosquejo grafico para la interpretación del vértice. Díaz y Flores (2022) establece que los estudiantes presentan errores en calcular el vértice de la parábola puesto que presenta dificultades en aplicar procedimientos de contexto aritmético. Y, error de procedimiento puesto que al utilizar la fórmula para obtener el vértice lo realizan de manera inadecuada. Por otro lado, Palm (2008) indica que esta actividad es una tarea autentica, ya que describe una simulación de una situación de la realidad. Además, la solución de esta actividad debe incluir la modelización de la situación que permite determinar el cálculo de los componentes del vértice.

Belin et al., (2024) en este ejercicio genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso) porque el problema corresponde a un contexto de situación de la realidad. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Existe una coordinación directa en las variables del número de pozos y número de barriles en como aumentan. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Donde el vértice es considerado como un elemento representativo de la gráfica de la parábola. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 47

Problema 8

Una empresa dedicada a empacar y transportar huevos ha proyectado sus ingresos (I), según los miles de huevos empacados (h), con la siguiente función:

$I(h) = -100h^2 + 1000h + 7500$, con $h \geq 0$

¿Para qué valores de h se alcanzan el ingreso máximo y el ingreso nulo respectivamente?

a) $h = 0{,}5$ y $h = 10$ c) $h = 5$ y $h = 15$

b) $h = 10$ y $h = 0{,}5$ d) $h = 12$ y $h = 15$

Nota. Fichas de matemática 4 (2024, p. 30)

En la figura 47, se muestra una actividad llamada problema 8 en donde se abordan los tipos de tarea T_6 y T_2.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$)

$\boldsymbol{t}_{6,\ 7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,1}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, para obtener su solución solo debemos calcular la abscisa del vértice ($h = -\frac{b}{2a}$) de la función cuadrática y posteriormente se determina el valor máximo alcanzado por el ciento de unidades vendidas. Asimismo, Díaz y Flores (2022) establece que los estudiantes presentan errores en calcular el vértice de la parábola puesto que presenta dificultades en aplicar procedimientos de contexto aritmético. Y, error de procedimiento puesto que al utilizar la fórmula para obtener el vértice lo realizan de manera inadecuada.

Tipo de tarea T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$\boldsymbol{t}_{2,\ 1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{2,1,1}$:

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

En este problema se presenta unas preguntas que están relacionadas a obtener las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función cuadrática. Se aplicar la técnica $\tau_{2,1}$ que corresponde al tipo de tarea $\boldsymbol{t}_{2,\ 1}$. Asimismo Díaz y Flores (2022) explica que en estos ejercicios los estudiantes presenta errores de procedimiento, puesto que usan de manera inadecuada la fórmula de la ecuación cuadrática o la regla de aspa simple para hallar los puntos de intersección con los ejes x. Por último, Ozultun et al., (2017), los estudiantes tienen dificultades en encontrar los puntos de intersección con el eje x; utilizan el método de prueba y error para obtener raíces x_1 y x_2. Esto se debe a que no recordaban el procedimiento de obtener las raíces de una ecuación cuadrática.

Belin et al., (2024) en este ejercicio, el estudiante desarrolla la concepción de la función en un enfoque por correspondencia, ya que se presenta una regla que corresponde a la expresión general de la función cuadrática. Asimismo, se obtiene el vértice que representa un ingrediente en la representación gráfica de la función. Además, se identifica las variables primarias tanto independiente como dependiente. Por último, presenta una coordinación directa en la relación como aumenta o disminuye las variables en forma simultánea.

Por último, Palm (2008) esta actividad por presentar una simulación de la realidad en forma específica se considera como una tarea autentica. Sin embargo, en cuanto a su solución que obtiene el estudiante, al aplicar estrategias superficiales y directas (propiedades de la función cuadrática y ecuación cuadrática) conduce a una resolución superficial poco realista.

A continuación, en la siguiente tabla, se menciona un resumen de las tareas, tipos de tareas, técnicas y los ejercicios de la ficha de trabajo 4° de secundaria 2024.

Tabla 26

Síntesis del análisis praxeológico ficha de trabajo 4° de secundaria 2024

Tipo de tarea T_i	Tarea $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\tau_{i,j}$ (Técnica asociada a la tarea)	Nombre del ejercicio
T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{2,1,1}$ $\tau_{2,1,2}$	Situación B, problema 6 y problema 8
T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{5,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{5,4,1}$ $\tau_{5,4,2}$ $\tau_{5,4,4}$	Situación A, situación C, problema 1, problema 5
T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)$ = ax2+bx+c)	$t_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.	$\tau_{6,3}$	Problema 4
	$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{6,4,1}$ $\tau_{6,4,2}$ $\tau_{6,4,7}$	Entradas al teatro, situación A Situación C, problema 7

	$t_{6,5}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico.	$\tau_{6,5}$	Problema 2
	$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.	$\tau_{6,7,1}$	Problema 3, problema 8
T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{7,1,1}$ $\tau_{7,1,2}$	Situación A, situación C
	$t_{7,3}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico	$\tau_{7,3}$	Situación B

Fuente. Autoría propia

5.2.2 Ficha de matemática 5° de secundaria

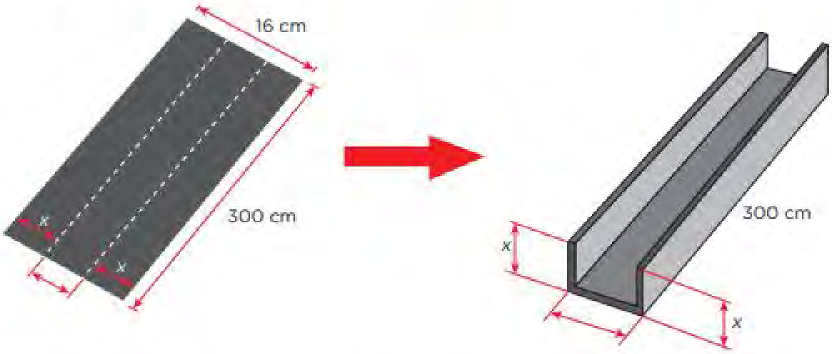
Figura 48

Construimos canales de máximo volumen

Construimos canaletas de máximo volumen

Martín Fernández necesita diseñar y elaborar canaletas para el techo de su casa y así enfrentar las inminentes lluvias que el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú (Senamhi) ha pronosticado. Para ello, cuenta con planchas metálicas delgadas de 300 cm de largo por 16 cm de ancho con recubrimiento de zinc, que las hace resistentes a la acción corrosiva de la humedad. Para concretar su proyecto, él decide doblar hacia arriba algunos centímetros a cada lado de la plancha, como se muestra en la figura.


Fuente: Denise Santos



Tomando en cuenta la información brindada, responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué valores puede tomar la altura de la canaleta en el diseño que muestra la figura?

b. ¿Cuál es la función que modela el volumen que tendrá la canaleta?

c. ¿Qué tipo de función es y qué forma tiene su gráfica?

d. ¿Cuántos centímetros debe tener la altura de la canaleta para que su volumen sea mayor?

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 61)

En la figura 48, se presenta la actividad donde se abordan el tipo de tarea T_6, que consiste en "hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$)". Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6, 4}$, el cual corresponde a hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica utilizada para resolver este subtipo de tarea.

$\tau_{6, 4,3}$:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: Altura del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma (V)= Área de la base (A) $\times$ altura(h), entonces V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

En este ejercicio que se encuentra en la ficha de matemática 5 (2024) presenta una serie de anexos que describen las definiciones que permiten desarrollar del problema: Primero, define el perímetro y el área de un rectángulo con sus respectivas representaciones; segundo, define lo que es el volumen y la capacidad de un recipiente; tercero, presenta las propiedades del prisma como calcular el volumen, el área de su base; cuarto define los que son inecuaciones en los números reales, este le permite representar los intervalos de rango de una función cuadrática; quinto, especifica la definición de función cuadrática y los elementos que los integran; sexto, define el dominio y el rango de una función cuadrática; y por último, define lo que es un eje de simetría y su relación con el vértice. Además, este ejercicio corresponde a una tarea contextualizada donde se modeliza para representarlo en una función cuadrática. Y, utilizando el objeto ostensivo algebraico se consigue calcular el vértice y los puntos de intersección en los ejes x e y. Entre los objetos no ostensivos que presenta este problema son los conceptos de volumen de un prisma rectangular y las raíces de la ecuación cuadrática. Asimismo, Díaz y Flores (2022) establece que los estudiantes presentan errores en calcular el vértice de la parábola puesto que presenta dificultades en aplicar procedimientos de contexto aritmético. Y, error de procedimiento puesto que al utilizar la fórmula para obtener el vértice lo realizan de manera inadecuada. Por último, Palm (2008) señala a esta actividad como una situación autentica, además de ello, se observa que las preguntas que lo conforman están alineadas con la situación del contexto real y sociocultural del estudiante; lo que permite generar una resolución realista por parte del estudiante al utilizar sus conocimientos generales y estrategias específicas.

Gaita et al., (2022) al realizar el análisis de este tipo de ejercicio establece que para calcular el máximo volumen de la canaleta no es necesario generar una expresión algebraica; ya que solo basta con realizar una tabla dando valores enteros a la altura de la canaleta. Asimismo, los autores realizan una modificación a este tipo de problema utilizando parámetros de ancho (H) y largo (L) de la canaleta para representar las expresiones de área ($A(x) = (H - 2x) \times x$) como de volumen ($V(x) = L \times (H - 2x) \times x$).

En la figura 48, aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,\ 1,}$ el cual corresponde a graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\tau_{7,1,3}$ que se utilizada para resolver este subtipo de tarea.

$\tau_{7,1,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: Altura del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma (V)= Área de la base (A) $\times$ altura(h), entonces V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 7: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 8: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 9: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

Según Gaita et al., (2022) la representación gráfica de la función permite al estudiante comprender la relación entre la longitud del dobles de la canaleta y su respectivo volumen. Con la utilización del plano cartesiano se establece la relación entre la expresión algebraica y la gráfica de la parábola, e interpretar la conexión con la longitud de la plancha.

Belin et al., (2024) en esta actividad genera una concepción de la función enfocada a la covariación (visión proceso). Esto es debido, a que el ejercicio está en un contexto de una situación de la vida real. Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes). Se analiza la tasa de cambio, donde un aumento lento o rápido entre las variables corresponde a una cuantificación bruta. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Donde el vértice es considerado como un elemento representativo de la gráfica de la parábola. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Figura 49

Situación A: Modelamos el salto de una rana

Situación A: Modelamos el salto de una rana

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. Luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que la altura que alcanzaba la rana en cada instante del salto podía modelarse con una función cuadrática. En la tabla adjunta, se muestra la altura (h) en metros que alcanza la rana, en un mismo salto, en cinco tiempos (t) diferentes expresados en segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2
h	0	0,75	1	0,75	0

a. Halla la función cuadrática que modela la situación que planteó el experto en anfibios.

b. Determina algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y el tiempo que emplea en llegar ahí.

c. ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 66)

En la figura 49, se observa el problema en donde se presenta los siguientes tipos de tarea T_5, T_6 y T_2.

T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general

$t_{6,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

$\tau_{5,6}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$

$t_{6,6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

$\tau_{6,6}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 4: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f(-\frac{b}{2a})$

T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\tau_{2,1,1}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 5: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

En este problema se destaca 3 preguntas que tienen que ser contestado; la primera, es modelar la función cuadrática en relación a los datos que presenta la tabla; la segunda, para calcular la altura máxima se tendrá que obtener las coordenadas del vértice ($h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f(-\frac{b}{2a})$) y representado por V(h;k). Y, en el último, consiste en obtener los puntos de intersección del eje x de la función cuadrática en su forma general de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

Además, presenta dos definiciones que permiten al estudiante recordar las propiedades de la función cuadrática. Primero, define el vértice y la fórmula de cómo obtenerlo, asimismo, de un ejemplo ($y=-x^2+6x+12$) para calcular el vértice. Por último, te dan una serie de pasos para graficar la función cuadrática, empezando con analizar la concavidad de la curva, seguida de obtener el vértice de la función, realizar un ostensivo tabular para obtener varias coordinas de la función que sean cercanos al vértice y finalizando con la gráfica de la función en el plano cartesiano. En esta actividad, se observa una serie de punto que describen la trayectoria del salto de la rana. Además, para calcular el vértice es necesario la modalización de la función a su expresión algebraica con el apoyo de un sistema de ecuaciones de 3x3. Ansaldo et al., (2018) enfatiza que los estudiantes presentan dificultades al no lograr expresar la función, esto se debe al no utilizar adecuadamente el algebra para resolver estos sistemas de ecuaciones de 3x3. Además, Palm (2008) indica que esta actividad es una simulación adecuada de un contexto de la realidad, por lo que se denomina como una tarea autentica. Las preguntas que conforman a la actividad tienen propósitos claros que están acordes con el contexto de la situación (modelación a través de una expresión algebraica, identificar los componentes del vértice, y los ceros de la función); Para obtener una solución autentica es necesario por parte del estudiante aplicar estrategias de resolución adecuadas.

Belin et al., (2024) en esta actividad por ser situación de la vida real genera una concepción de la función enfocado a la covariación (visión proceso), donde se establece una relación dinámica entre las variables. Además, se identifica las variables primarias, donde la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente es la altura que salta la rana. También, se analiza la tasa de cambio relacionándolo como un punto, si es positiva aumenta el rango y si es negativa se disminuye el rango, esto corresponde a una cuantificación bruta. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional. Donde el vértice es considerado como un elemento representativo de la gráfica de la parábola.

Figura 50

Situación B: Beneficios en una empresa

Situación B: Beneficios en una empresa

El contador de una empresa de comida rápida, especializada en la venta de pizzas, concluyó que los beneficios anuales dependen del número de repartidores con los que cuenta; además, que estos beneficios se determinan según el siguiente modelo matemático: $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9855$, donde $B(x)$ es el beneficio anual en soles para x repartidores.

a. ¿Cuántos repartidores debe tener la empresa para que su beneficio anual sea máximo?

b. ¿Cuál será el valor de dicho beneficio máximo?

Fuente: Shutterstock

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 68)

En la figura 50, se presenta la actividad donde se abordan el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraica. A continuación, se describe la técnica $\tau_{6,\ 7,2}$ que se utilizada para resolver este subtipo de tarea.

$\tau_{6,\ 7,2}$:

Paso 1: Completamos cuadrados

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c\text{, donde } a\neq 0$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2+c$$

Paso 2: Se obtiene el vértice $V(-\frac{b}{2a};\ \frac{-b^2+4ac}{4a})$

Paso 3: Dada la función cuadrática $a(x-h)^2+k$.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, presenta dos propiedades de la función cuadrática: Primero, el método de completar cuadrados ($f(x)= a(x-h)^2+k$) que permite calcular el vértice V(h;k) y presenta un ejemplo de cómo usar el método respectivo. La segunda, que toda función cuadrática de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ se transforma a f(x)= $f(x)= a(x-h)^2+k$, y la gráfica de esta última función corresponde a la traslación de $f(x)=ax^2$. Además, Genicio et al., (2005) menciona que al utilizar el método de completar cuadrados en las funciones cuadráticas permiten a los estudiantes de una manera sencilla obtener las coordenadas del vértice. Además, con este método se permite en el estudiante entender cómo se construye la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Carabalí (2019) menciona que al realizar la conversión de la forma general a la canónica (completar cuadrados) los estudiantes cometen varios errores de tratamiento algebraico. Palm (2008) clasifica esta actividad como una tarea auténtica, además, la solución se obtiene aplicando métodos en forma directa en la que consiste en la utilización de la formula del vértice o completando cuadrados.

Belin et al., (2024) en este ejercicio la función cuadrática esta expresado en su forma general, permitiendo en el estudiante que desarrolle una concepción de dicho objeto matemático por el enfoque de correspondencia (visión acción). Hay un análisis de los elementos que representa los aspectos figurativos de la gráfica de la parábola como son el vértice y su estreches o amplitud de la curva. Además, se identifica las variables primarias; donde el número de repartidores representa la variable independiente y el beneficio anual representa la variable independiente. Por último, hay una relación entre el aumento y disminución de la variable que corresponde a una coordinación directa.

Figura 51

Situación C: Trayectoria del lanzamiento de un balón

Situación C: Trayectoria del lanzamiento de un balón

El profesor Manuel, para motivar a sus estudiantes a quienes les gusta el fútbol, plantea el siguiente problema:

Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está adelantado 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento del balón, el jugador puede escoger entre las dos trayectorias siguientes, donde f y g representan la altura en metros, y x, el tiempo en segundos.

$$f(x) = 0{,}4x - 0{,}05x^2$$
$$g(x) = 1{,}6x - 0{,}2x^2$$

¿Cuál de los dos modelos matemáticos presentados es el más adecuado para que el jugador anote el gol?, ¿por qué?

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 70)

En la figura 51, se presenta la actividad trayectoria del lanzamiento de un balón, donde contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraica. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,7,2}$ que se utilizada para su resolución.

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,2}$

Paso 1: Completamos cuadrados

f(x)=$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde a$\neq 0$

f(x)=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$)

Paso 3: Dada la función cuadrática $a(x-h)^2+k$.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,3}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, contiene un resumen teórico acerca de la importancia del vértice como uno de los principales elementos de la función cuadrática. Además, esta actividad está implícito en hallar la ordenada del vértice de la función, con el objetivo de obtener la altura máxima que alcanza el balón de futbol. Carabalí (2019) enfatiza que, en la solución de estas tareas, los estudiantes presentan dificultades en la interpretación del vértice como un punto máximo o mínimo de la función. Por último, Villa-Ochoa (2012) el diseño de actividades significativas desde la perspectiva variacional enfatiza en el desarrollo de los procesos procedimentales que facilitan el cálculo de elementos de la función cuadrática (vértice, puntos máximos o mínimos, etc.)

Belin et al., (2024) en esta actividad esta expresado por una regla, permitiendo en el estudiante que desarrolle una concepción de la función cuadrática por el enfoque de correspondencia (visión acción). Asimismo, hay un análisis de un elemento que representa un aspecto de la gráfica de la parábola la cual es el vértice, en la cual se obtiene de la coordinación de los coeficientes de la forma canónica $f(x)$= a(x-h)^2+k o la forma general h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f$\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Por último, hay una relación entre el aumento y disminución de la variable que corresponde a una coordinación directa.

Por otro lado, Palm (2008) resalta la importancia de las actividades matemáticas que simulan situaciones de la vida real, también llamadas tareas auténticas; ya que estimula al estudiante a utilizar estrategias de análisis bien estructuradas, lo que permiten obtener soluciones acordes con la realidad. Por ejemplo, el propósito de esta actividad, es identificar que expresión algebraica que representa la trayectoria de la pelota está más acorde con la realidad de esta situación significativa.

Figura 52

Problema 1

Escribe V si la proposición es verdadera o F si es falsa.

- La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero y se abre hacia abajo si es menor que cero. ( )
- La función cuadrática está bien definida cuando su representación simbólica es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. ( )
- En la función cuadrática de la forma $f(x) = -x^2$, el vértice se encuentra en el origen de coordenadas y la parábola que la representa se abre hacia abajo. ( )

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 71)

En la figura 52, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,3}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,3,2}$ que se utilizada para la resolución de este subtipo de tarea.

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,2}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, presenta tres ítems: La primera consiste en analizar el coeficiente cuadrático para identificar hacia donde se abre las ramas de la parábola dentro del plano cartesiano; la segunda, consiste la descripción de la forma general de la función cuadrática; y la tercera, es analizar $f(x) =- x$, utilizando las reglas y propiedades de este objeto matemático. Huapaya (2012) los estudiantes tienen dificultad en la noción de función cuadrática, ya que no logran entender este concepto, ni sus reglas ni sus procedimientos. Asimismo, no pueden interpretar situaciones representativas en relación a este objeto matemático. Po último, Palm (2008) señala que esta actividad no es una tarea autentica; puesto que no hay una relación con la situación de un contexto de la realidad. Además, su resolución se obtiene por medio de un método directo, ya que utilizan las propiedades de la función cuadrática.

Belin et al., (2024) en esta actividad al presentar una regla de formación de la función cuadrática genera una conceptualización de la función en un enfoque correlacional. Además, al analizar el coeficiente cuadrático, que indica la dirección de las ramas de la parábola y el coeficiente lineal, indica la posición del vértice, el estudiante está considerando los aspectos figurativos de la representación gráfica de la parábola al explicar las propiedades geométricas que intervienen.

Figura 53

Problema 2 y 3

Un delfín salta con trayectoria parabólica dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t$, donde $0 \leq t \leq 6$; además, t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante lo logra.
   - a) La altura máxima fue 3 m a los 9 s.
   - b) La altura máxima fue 9 m a los 3 s.
   - c) La altura máxima fue 27 m a los 3 s.
   - d) La altura máxima fue 12 m a los 3 s.

3. Averigua cuánto tiempo demora en caer el delfín desde que alcanza la altura máxima.
   - a) 6 s   b) 9 s   c) 3 s   d) 12 s

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 71)

En la figura 53, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\tau_{6,7,2}$ y $\tau_{6,7,3}$ que se utilizan para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,7,2}$

Paso 1: Completamos cuadrados

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c, \text{ donde } a\neq 0$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2+c$$

Paso 2: Se obtiene el vértice $V(-\frac{b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a})$

Paso 3: Dada la función cuadrática $a(x-h)^2+k$.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\tau_{6,7,3}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

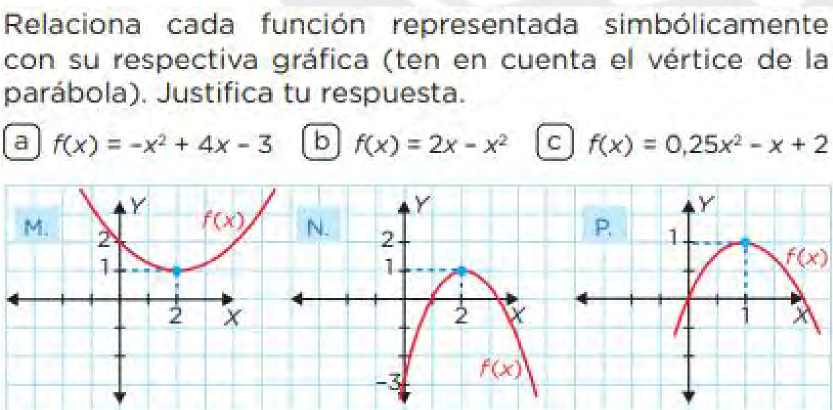
Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, se establece la relación entre dos magnitudes, donde la variable independiente es el tiempo y la variable dependiente la altura. Además, utiliza como estrategia calcular e interpretar al vértice para responder los dos ítems de esta actividad. Carabalí (2019) enfatiza que, en la solución de estas tareas, los estudiantes presentan dificultades en la interpretación del vértice y la relación con las variables tanto independientes como dependientes. Por otro lado, Palm (2008) clasifica esta actividad como una tarea de cierto grado de autenticidad, puesto que su contexto, basado en una situación de la vida real, representa una simulación. Asimismo, las preguntas de la actividad presentan coherencia entre su propósito y el contexto de la tarea. Además, sus respuestas se obtienen de los cálculos en forma directa al aplicar estrategias pocos superficiales como por ejemplo al utilizar la técnica del vértice.

Belin et al., (2024) en este ejercicio, el estudiante desarrolla la concepción de la función en un enfoque por correspondencia, a través de una regla que representa a la expresión general de la función cuadrática. Asimismo, se obtiene el vértice que es un elemento de la representación gráfica de la función. Además, se identifica las variables primarias tanto independiente como dependiente. Por último, presenta una coordinación directa en la relación como aumenta o disminuye las variables en forma simultánea.

Figura 54

Problema 4



Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 71)

En la figura 54, la actividad contiene el tipo de tarea T_4, que consiste en hallar la expresión algebraica de la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{4,2}$, el cual corresponde a hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y los puntos de intersección con los ejes X e Y. A continuación, se describe la técnica $\tau_{4,2}$ que se utilizada para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{4,2}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Se reemplaza los parámetros a, b y c en $f(x)=ax^2+bx+c$.

En la actividad, se debe realizar el tratamiento de la representación gráfica a la expresión algebraica, por tal motivo, es fundamental identificar los tres puntos de la parábola, para generar un sistema de ecuaciones lineales y determinar los parámetros a, b y c. Según Tocto (2015) para este tipo de problemas, los estudiantes presentan dificultades para realizar la conversión de los grafico a lo algebraico, debido a que cometen errores de tratamiento algorítmico al resolver sistema de ecuaciones.

Belin et al., (2024) en esta actividad de desarrolla la conceptualización de la función en un enfoque por correspondencia, donde el estudiante concibe en la idea de que los valores función cambian con los valores de la entrada de la función. Asimismo, para analizar la posición del vértice se estudia el parámetro b junto con el parámetro a. Por último, Palm (2008) especifica que para generar un grado de autenticidad de la tarea es necesario realizar una modificación de su texto correspondiente.

Figura 55

Problema 5

En un partido de fútbol, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma la parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$, donde y es la altura en metros que alcanza la pelota, y x representa la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento se debe patear la pelota, respectivamente?

a) 2,45 m y 7 m
c) 4,2 m y 7 m
b) 7,35 m y 7 m
d) 5,6 m y 7 m

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 72)

En la figura 55, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,7,2}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,2}$

Paso 1: Completamos cuadrados

f(x)=$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde a$\neq 0$

f(x)=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V$(-\frac{b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a})$

Paso 3: Dada la función cuadrática a(x-h)^2+k.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty,k]$

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,1}$

Paso 1: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, se centra en obtener el punto máximo de la trayectoria de la pelota, promoviendo un razonamiento covariacional entre dos magnitudes, donde la variable independiente es el desplazamiento horizontal de la pelota y la variable dependiente es la altura que alcanza la pelota. Además, utiliza como estrategia calcular e interpretar el punto máximo (vértice) que alcanza la pelota al realizar una trayectoria parabólica. Carabalí (2019) enfatiza que, que en la resolución de esta actividad los estudiantes presentan obstáculos procedimentales y dificultades para la interpretación del vértice.

Belin et al., (2024) en este ejercicio, expresado en su forma general de la función, permitiendo en el estudiante que desarrolle una concepción de dicho objeto matemático por el enfoque de correspondencia. Además, se identifica las variables primarias; la coordinación directa en la variable independiente y dependiente.

Palm (2008) señala que esta actividad es una simulación de un contexto real. Asimismo, su solución se obtiene en forma directa al utilizar la técnica $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$ para obtener las coordenadas del vértice. Además, el propósito de la resolución de la actividad presenta una coherencia con su respectivo contexto.

Figura 56

Problema 6

Una empresa brinda servicio de cable y actualmente cuenta con 8000 clientes, a quienes cobra S/50 mensuales. Para incrementar el número de clientes rebajará en S/5 el cobro mensual, con lo cual tendría 1000 nuevos clientes.
Determina el modelo cuadrático para calcular el número de clientes que tendrá la empresa.

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 72)

En la figura 56, la actividad contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{5,4}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\tau_{5,4,3}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,4,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo de lenguaje aritmético.

Paso 3: Si c=0 entonces $f(x)=ax^2+bx$ y se conoce dos puntos de la parábola.

Paso 4: Reemplazamos los dos puntos y generamos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Paso5: Solucionamos el sistema de ecuaciones lineales y obtenemos los valores de a y b.

En esta actividad, tiene como propósito determinar la expresión algebraica de la función cuadrática ($y=f(x)=ax^2+bx$). Se establece una correlación entre la variable independiente (pago mensual por servicio de cable) y la variable dependiente (número de clientes). Asimismo, se aplica la estrategia de generar dos sistemas de ecuaciones lineales para obtener los parámetros a y b. Ansaldo et al., (2018) enfatiza que los estudiantes presentan dificultades en generar la función en su expresión algebraica. Esto se debe al no utilizar adecuadamente el algebra para resolver los sistemas de ecuaciones que permiten obtener los parámetros de la función.

Belin et al., (2024) en este problema al realizar su modelización a su expresión algebraica de la función cuadrática su concepción está en un enfoque correlacional. Se identifica las variables primarias que son variables independientes o dependientes. Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuyen. Además, el vértice es uno de los elementos representativos de la representación gráfica. Por último, los parámetros a, b y c corresponde la dirección y posición de la función cuadrática en el plano cartesiano.

Palm (2008) indica que esta actividad presenta una simulación de un contexto real, por lo que se denomina una tarea autentica. El objetivo de la pregunta de esta actividad planteada, es generar la modelación en su expresión algebraica de la función cuadrática. Además, para alcanzar una solución de cierto grado de autenticidad, los estudiantes deben aplicar estrategias específicas como la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$, que facilita el análisis de los datos para su correspondiente modelización.

Figura 57

Problema 7

Para economizar malla metálica, Julia García construye un corral rectangular utilizando uno de sus muros. Ella emplea 18 m de malla metálica para cercar el corral. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el corral si Julia usó el área máxima?

a) 20,12 m² b) 20,05 m² c) 20,25 m² d) 40,5 m²

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 72)

En la figura 57, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6,4}$, el cual corresponde en Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\tau_{6,4,3}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea

$\tau_{6,4,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Este problema para obtener el punto máximo de la función cuadrática es necesario realizar su modelación en la forma f(x)=ax^2+bx+c. Según Arcavi et al., (2016) categoriza a esta actividad como un contexto no real puesto que no son significativas para el estudiante. Además, Almonacid (2018) enfatiza para estos tipos de tareas es necesario realizar primero un tratamiento en el ostensivo tabular, así el estudiante no va tener dificultades en las cuantificaciones de la variación del área.

Belin et al., (2024) en este problema al realizar su modelización a su expresión algebraica de la función cuadrática su concepción está en un enfoque correlacional. Se identifica las variables primarias que son variables independientes o dependientes. Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuyen en forma simultánea. Además, el vértice es uno de los elementos representativos de la gráfica e indica su posición al analizar de los parámetros a, b y c.

En el estudio de Palm (2008), se concluye que esta actividad presenta de un grado de autenticidad, ya que representa una simulación de un contexto real. Además, el propósito de la actividad consiste en general una representación algebraica de dicha situación real, por lo que se emplea estrategia de solución adecuada.

Figura 58

Problema 8

Un granjero ha comprado 80 m de listones de madera para cercar el establo contiguo a su granero. Él afirma que con esta cantidad de madera le basta para cercar su establo de forma rectangular, que tiene un área máxima de 800 m^2, 40 m de largo y 20 m de ancho. ¿Será cierta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Nota. Fichas de matemática 5 (2024, p. 72)

En la figura 58, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,4}$, el cual corresponde en Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,4,4}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea

$\tau_{6,4,4}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación $2x+2y=2p$

Paso 4: Expresar la medida de "y" en función de "x".

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)=x.y$

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\ ;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

En esta actividad se empieza con un modelo rectangular del establo, conociendo su perímetro (80 metros) se modela el área en función de uno de sus lados. Para responde esta actividad se debe maximizar el área utilizando la formula del vértice que corresponde a la función cuadrática. Según Arcavi et al., (2016) categoriza a esta actividad como un contexto no real puesto que no son significativas para el estudiante. Por otra parte, Palm (2008) establece que toda actividad que presenta un contexto se situación real se denomina una tarea autentica. Y, el grado de autenticidad depende si la simulación del contexto es lo más cercano a lo real. Además, el propósito de la pregunta es verificar si las dimensiones del establo cumplen con los datos presentes en la tarea. Por tal motivo, el estudiante debe generar estrategias de solución adecuadas desarrollar la expresión forma de la función y calcular del vértice.

Carabalí (2019) recalca que, en el desarrollo de esta actividad, los estudiantes presentan dificultades en la interpretación del vértice como un punto máximo o mínimo de la función cuadrática. Belin et al., (2024) en este problema al realizar su modelización a su expresión algebraica el estudiante genera una concepción en un enfoque correlacional. Se identifica las variables primarias que son variables independientes o dependientes. Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuyen en forma simultánea. Además, el vértice es uno de los elementos representativos de la gráfica e indica su posición al analizar de los parámetros a, b y c.

A continuación, en la tabla 27, se menciona un resumen de las tareas, tipos de tareas, técnicas y los ejercicios de la ficha de trabajo 5° de secundaria 2024.

Tabla 27

Síntesis del análisis praxeológico ficha de trabajo 5° de secundaria 2024

Tipo de tarea T_i	Tarea $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\tau_{i,j}$ (Técnica asociada a la tarea)	Nombre del ejercicio
T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{2,1,1}$	Situación A
T_4: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$).	$t_{4,1}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y los puntos de intersección con los ejes X e Y.	$\tau_{4,1}$	Problema 4
T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general	$t_{5,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{5,4,3}$	Problema 6, problema 7
	$t_{5,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.	$\tau_{5,6}$	Situación A

$\boldsymbol{T_6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) =$ ax^2+bx+c)	$t_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico	$\tau_{6,3,2}$	Problema 1
	$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{6,4,3}$ $\tau_{6,4,4}$	Construimos canales de máximo volumen, problema 8
	$t_{6,6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.	$\tau_{6,6}$	Situación A
	$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraica.	$\tau_{6,7,1}$ $\tau_{6,7,2}$ $\tau_{6,7,3}$	Situación B, situación C, problema 2, problema 3, problema 5
T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito	$\tau_{7,1,3}$	Construimos canales de máximo volumen

Fuente. Autoría propia

5.2.3 Cuaderno de trabajo de matemática 3° de secundaria

Figura 59

El recorrido de una esfera

El recorrido de una esfera

Manuel es un estudiante muy observador. Él ha realizado el experimento de dejar caer una esfera desde una determinada altura, lo que constituye un movimiento vertical de caída libre.

En este tipo de movimiento vertical, la velocidad inicial es cero y, conforme va transcurriendo el tiempo de la caída libre (en segundos), la velocidad aumenta a razón de 9,8 m/s. El cuerpo está afectado por la aceleración de la gravedad, que es 9,8 m/s² en el planeta Tierra.

Con ayuda de un cronómetro (para medir el tiempo en segundos) y una *wincha* (cinta métrica para medir la altura en metros), Manuel mide la altura desde la cual deja caer la esfera. La altura está relacionada con el tiempo que le toma a la esfera llegar hasta el suelo.

Para el experimento de dejar caer libremente una esfera desde una determinada altura, Manuel halló los siguientes resultados:

Tiempo (s)	0	1	2	3	...
Altura (m)	0	5,0	19,8	44,0	...

A partir de ello:

1. ¿Cuál sería la expresión matemática que permite modelar la caída de la esfera?
2. Representa la caída de la esfera con una gráfica en el plano cartesiano.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 27)

En la figura 59, el problema “el recorrido de una esfera” contiene los tipos de tarea T_5 y T_7. A continuación, se detallan las praxeologías asociadas a los subtipos de tarea $t_{5,6}$ y $\boldsymbol{t}_{7,2}$.

T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{5,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

$\tau_{5,6}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

En este problema se destaca 2 preguntas que tienen que ser contestado; la primera, es modelar la función cuadrática en relación a los datos que presenta la tabla por medio de un sistema de ecuaciones de 3x3; la segunda, representar en el plano cartesiano de representación gráfica de la función cuadrática. Ansaldo et al., (2018) enfatiza que los estudiantes presentan dificultades en resolver sistemas de ecuaciones 3x3, por tal motivo, no puede generar la expresión general de la función cuadrática.

Palm (2008) señala que esta actividad representa la descripción de una tarea autentica. El objetivo de esta pregunta es generar solución que represente la simulación de esta situación real a través de desarrollar una expresión algebraica. Utiliza estrategias específicas como la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$ para responder a esta interrogante mediante la aplicación de sistema de ecuaciones

T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$t_{7,\,2}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.

$\tau_{7,2}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Reemplazar los parámetros a, b y c en la expresión algebraica de la función.

Paso 4: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 6: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 7: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 8: Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY.

Según Tocto (2015), entre las dificultades que presentan los estudiantes para la representación gráfica de la función cuadrática son los siguientes: En primer primero, el uso inadecuado de las reglas o propiedades que provoca errores en los procedimientos algorítmicos. Segundo lugar, errores de los estudiantes en calcular el dominio y rango de la función. Y, por último, no saben interpretar adecuadamente el vértice de la función.

Figura 60

Situación significativa A

Situación significativa A

Jorge decidió cercar una parte de su terreno, para lo cual compró en oferta 300 m de malla. El deseo de Jorge es cercar el máximo terreno rectangular posible. ¿Cuáles serían las dimensiones del terreno cercado y qué área tendría?

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 30)

En la figura 60, la actividad contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,4}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,4,5}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,4,5}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+2y=2p

Paso 4: Expresar la medida de "y" en función de "x".

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

En esta actividad se empieza con un modelo rectangular del establo, conociendo su perímetro (300 metros) se modela el área en función de uno de sus lados. Para responde esta actividad se debe maximizar el área utilizando la formula del vértice que corresponde a la función cuadrática. Según Arcavi et al., (2016) categoriza a esta actividad como un contexto no real puesto que no son significativas para el estudiante. Por otra parte, Palm (2008) clasifica a esta actividad como una tarea autentica porque presenta una descripción simulada de un contexto de la vida real. Esta actividad permite en el estudiante generar soluciones realistas al realizar estrategias de reflexiones más profundas en relación a los datos y preguntas de la situación.

Belin et al., (2024) en este problema genera una concepción en un enfoque correlacional, ya que el objetivo es realizar la modelización en la forma general de la función cuadrática. Se identifica las variables primarias como el ancho y área del terreno. Existe una coordinación directa en las variables en como aumenta o disminuyen en forma simultánea. Además, enfatiza en el análisis de los parámetros a, b y c que permite establecer la relación entre la gráfica y propiedades de la función.

Figura 61

Situación significativa B

Situación significativa B

Un vendedor de frutas tiene 100 kg de naranja para la venta a S/2 por kilogramo; además, cada día que pasa se estropea 1 kg. Cuando baja la oferta de la fruta, el precio se incrementa en S/0,10 por kilogramo. Entonces, la función que representa el ingreso por la venta de todas las naranjas en relación con el número de días que transcurren está dada por el producto de la cantidad por el precio:

$$F(x) = (100 - x)(2 + 0{,}1x)$$

Donde: "x" representa los días. ¿En cuántos días debe vender las naranjas para obtener el máximo ingreso? ¿Cuánto es el máximo ingreso que obtiene?

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 32)

En la figura 61, el problema situación significativa B contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,7,4}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\boldsymbol{\tau}_{6,7,4}$

Paso 1: Multiplicamos dos binomio de términos iguales $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Paso 2: Identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 4: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Este problema, se centra en obtener el punto máximo de la función cuadrática, donde la variable independiente representa el número de días y la variable dependiente representa el ingreso de ventas de naranjas. Carabalí (2019) enfatiza que, que en la resolución de esta actividad los estudiantes presentan obstáculos procedimentales y dificultades para la interpretación del vértice. Palm (2008) este problema corresponde a una tarea autentica. Y, al resolver la pregunta se aplica una estrategia directa como la utilización de la fórmula para calcular el vértice. Por otra parte, Belin et al., (2024) en este problema genera una concepción en un enfoque correlacional. Asimismo, permite establecer una relación entre la forma canónica y forma del vértice para deducir la siguiente expresión que es h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$c-(-\frac{b}{2a})^2$

Figura 62

Situación significativa C

Situación significativa C

El pueblo Zeta fue invadido por una plaga de mosquitos. Los enfermeros del centro de salud recibieron la medicina para la cura, con la indicación de administrar a los niños la dosis mínima de la expresión $R(x) = x^2 - 50x + 2500$, donde "x" es la dosis en miligramos. Calcula la dosis mínima de la medicina que los enfermeros deben administrar a los niños para curarlos de la picadura de los mosquitos.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 34)

En la figura 62, el problema situación significativa C contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,7}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,7,5}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,\,7,5}$:

Paso 1: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Identificamos los parámetros a, b y c de la función cuadrática.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Este problema, para obtener su solución solo debemos calcular la abscisa del vértice ($h=-\frac{b}{2a}$) de la función cuadrática y posteriormente se determina la mínimo cantidad de dosis para suministrar a los niños. Asimismo, Díaz y Flores (2022) establecen que los estudiantes al calcular el vértice de la función presentan varias dificultades; primera, cometen errores al realizar procedimientos aritméticos; segunda, utilizan de manera inadecuado la fórmula del vértice; y, por último, experimentan falta de concentración u olvido de cómo llevar a cabo la solución. Asimismo, Tocto (2015) menciona que la dificultad que tiene los estudiantes para realizar este problema se debe a que no han comprendido a relacionar la representación algebraica con la gráfica de la función, así como a la falta de domino al aplicar la técnica $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ para calcular el vértice.

Palm (2008) señala que esta actividad presenta un cierto grado de autenticidad. Aplica estrategias de resolución directa como la formula del vértice para responder la pregunta que presenta la tarea. Por último, Belin et al., (2024) en este ejercicio al estudiante permite el desarrollo de la concepción de la función cuadrática en un enfoque de correspondencia. El vértice de la función cuadrática permite relacionar la forma y posición de la curva al realizar su representación gráfica. Se idéntica las variables primarias y su respectiva coordinación directa.

Figura 63

Problema 1

A Rubén le gusta jugar tiro al blanco y quiere saber cómo podría calcular el área de cada círculo del tablero. Su profesor le dice: "El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado del radio de la circunferencia y el valor de pi (π) sería la constante". A partir de esta información, ¿cuál es la representación matemática de la función *área del círculo* A(c) que Rubén debe emplear para encontrar el área de cada círculo?

a) $A(r) = \pi r^2$ b) $A(r) = \pi r^3$ c) $A(x) = 2\pi$ d) $A(x) = \pi r^3$

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 35)

En la figura 63, el problema 1 contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{5,4}$, el cual corresponde en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{5,4,6}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,4,6}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico

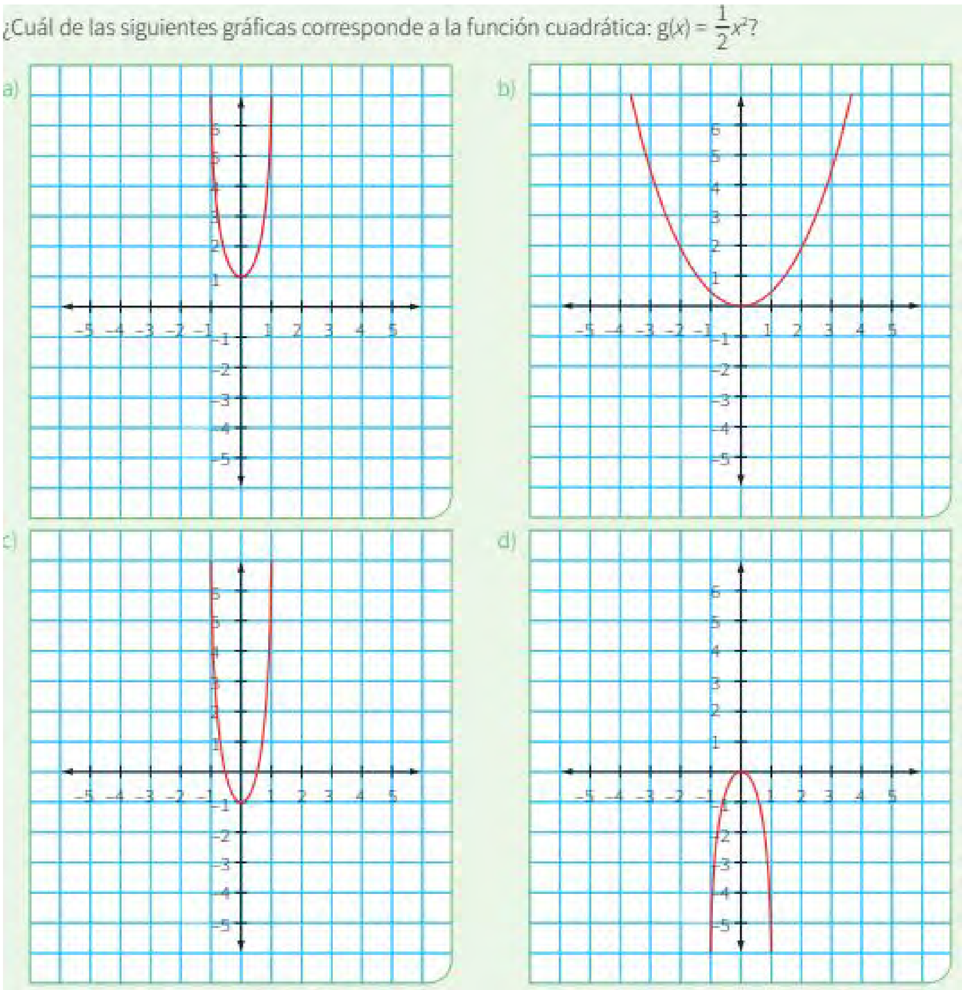
Paso 2: Dibujar un círculo, donde la variable independiente es el radio "r".

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del circulo en función de su radio (r).

En esta actividad, se solicita expresar el área de circulo en función de su radio. La función cuadrática que genera tiene la forma de $f(x)=ax^2$, donde presenta los siguientes elementos que lo constituye: Eje de simetría que coincide con el eje y; el vértice corresponde a la coordenada (0,0); eje de reflexión que coincide con el eje x; y concavidad que corresponde la posición de los puntos de la parábola con respecto al eje de reflexión. Según, Tocto (2015) para estos ejercicios, los estudiantes presentan dificultades para realizar la conversión de lo verbal a lo algebraico porque no saben identificar las variables tanta independientes como dependientes. Además, Palm (2008) para obtener la solución de esta actividad se aplica estrategias en forma directa al relacionar el área de la circunferencia y la función incompleta de la forma $f(x)=ax^2$.

Figura 64

Problema 2



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 36)

En la figura 64, el problema 2 contiene el tipo de tarea T_7, que consiste en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{7,3}$, el cual corresponde en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\tau_{7,3,1}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{7,3,1}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

En este problema, se pide la trasformación del registro algebraico al registro gráfico de la función cuadrática. Por tal motivo, se debe obtener los puntos tanto de la intersección de los ejes coordenados como del vértice. Posteriormente, se analiza el coeficiente cuadrático para analizar la concavidad de la curva. Según Tocto (2015), los estudiantes presentan una serie de dificultades para representarlo al registro grafico las cuales son: el desconocimiento de reglas o propiedades provoca errores en los procedimientos algorítmicos necesario para su representación gráfica. Errores en hallar el domino y el rango de la función. Y, no saben interpretar adecuadamente el valor de vértice y los puntos de los ejes coordenados. Por otro lado, Palm (2008), establece que esta tarea para cambiar el grado de autenticidad es necesario incorporar una situación de un contexto de la vida real, ya que permite en el estudiante realizar reflexiones más profundas sobre la utilización de los conocimientos de la función cuadrática para obtener su solución. Por último, Belin et al., (2024) en esta actividad se analiza el comportamiento de la regla sin considerar la relación que se establece entre las variables x e y. Se establece un enfoque por correspondencia donde se centra en el aspecto figurativo de la gráfica.

Figura 65

Problema 3

Identifica la tabla o tablas de valores que pueden ser funciones cuadráticas. Justifica tu respuesta.

a)

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	3	2	5	12	23

b)

x	0	1	2	3	4
$f_2(x)$	1	-3	-7	-11	-15

c)

x	0	1	2	3	4
$f_3(x)$	5	4	5	-4	-11

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 36)

En la figura 65, el problema 3 contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{5,6}$, el cual corresponde en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje tabular. A continuación, se describe la técnica $\tau_{5,6}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,6}$

Paso 1: Conociendo tres puntos de la parábola ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

En este ejercicio, según Rivera (2009) cuando se da una representación tabular de puntos de coordenadas de la función cuadrática ($y=ax^2+bx+c$), los estudiantes no presentan dificultades en identificar la ordenada como el parámetro “c” cuando la accisa es cero. Esto significa que los puntos de la tabla no nos revelan cuales son los valores de los parámetros a y b de la función cuadrática a simple vista. Para obtener estos valores es necesario utilizar el método de resolución de sistema de ecuaciones para realizar la conversación a la representación algebraica de la función. Utilizando este método, los estudiantes presentan errores o dificultad en su solución como; realizar sustituciones incorrectas, confusión en realizar operaciones aritméticas y generan un desarrollo incompleto para obtener los parámetros. Palm (2008) indica que esta actividad no representa a una tarea autentica. Para obtener su solución el estudiante tiene dificultades en generar estrategias de reflexión adecuadas para responder al propósito de la pregunta. Belin et al., (2024) en esta actividad la concepción de la función corresponde a un enfocado a la covariación (visión proceso), puesto que permite una relación dinámica entre las variables. Además, se identifica las variables primarias, así como el análisis la tasa y su respectiva cuantificación bruta. Asimismo, al realizar su modelización a su expresión algebraica su concepción está en un enfoque correlacional.

Figura 66

Problema 4

Dada la siguiente función: $f(x) = (ax + m)^2$, donde "a" es un número real mayor que $\frac{7}{3}$ pero menor que 100,34 ¿hacia dónde sería la orientación de la parábola?, ¿por qué?

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 37)

En la figura 66, contiene el tipo de tarea T_6 en la que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) =$ ax2+bx+c). Además, tiene como subtipo de tarea a $\boldsymbol{t}_{6,3}$ (hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico).

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,3}$:

Paso 1: Completamos cuadrados

$f(x)=a\left[\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{b}}{a}\mathrm{x}+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+$ c, donde a$\neq 0$

$f(x)=$a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$)

Paso 3: Se forma la función cuadrática $f(x)$ =a(x-h)^2+k.

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

En esta actividad, se pide analizar la orientación de la curva, por tal motivo se debe analizar el signo del coeficiente cuadrática de la función $f(x)$. Según, Díaz y Flores (2022) menciona que los estudiantes cometen errores en la identificar la orientación de las ramas de la parábola. Esto se debe a un obstáculo epistemológico sobre los conceptos y propiedades de la función, lo que conlleva a generar respuestas inadecuadas. Por otro lado, Palm (2008) indica que esta actividad no corresponde a una situación de contexto real. Esto conlleva a que los estudiantes no generen soluciones realistas a la falta de información del contexto y a la utilización de estrategias superficiales e inadecuadas.

Figura 67

Problema 5

¿Qué sucedería con la gráfica de una función cuadrática $g(x) = (x + 1)^2 + n$, sabiendo que n es un número natural, si aumentáramos el valor de n en cinco unidades?

El vértice de la parábola se desplazaría cinco unidades hacia abajo en el eje de las ordenadas.

El vértice de la parábola se desplazaría cinco unidades hacia arriba en el eje de las ordenadas.

El vértice de la parábola se desplazaría una unidad hacia la derecha en el eje de las abscisas.

El vértice de la parábola se desplazaría una unidad hacia la izquierda en el eje de las abscisas.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 38)

En la figura 67, contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,3}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,3,3}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\boldsymbol{\tau}_{6,3,3}$:

Paso 1: Completamos cuadrados

$f(x)$=$a\left[\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{b}}{a}\mathrm{x}+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+\mathrm{c}$, donde a$\neq 0$

$f(x)$=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$)

Paso 3: Se forma la función cuadrática $f(x)$ =a(x-h)^2+k.

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

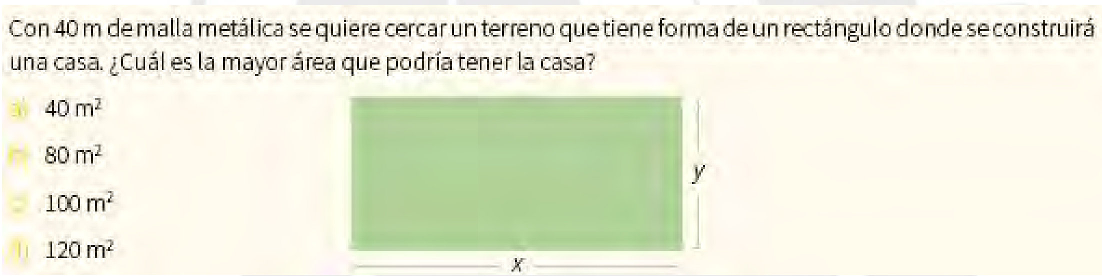
a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

En este problema, su solución consiste en analizar el desplazamiento de la parábola, por tal motivo, es necesario calcular el vértice de la función. Tocto (2015) los estudiantes presentan dificultad en interpretar el vértice al realizar el desplazamiento de la función cuadrática dentro del plano cartesiano. Palm (2008) indica que no corresponde a una tarea autentica. Su solución corresponde a realizar estrategias de manera directa como utilizar los conocimientos de desplazamiento de la función cuadrática en forma vertical. Belin et al., (2024) señala que esta actividad corresponde a un enfoque por correspondencia desde la practica matemática de una persona. Asimismo, se centra en las propiedades geométricas de su respectiva gráfica, como es el caso de analizar el desplazamiento de $g(x) = (x + 1)^2 + n$ al agregar cierta cantidad de unidades a "n".

Figura 68

Problema 6



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 38)

En la figura 68, contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (*f(x)*= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,4}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,4,6}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,4,6}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo dando valores "x" e "y" a cada uno de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+2y=2p

Paso 4: Expresar la medida de "y" en función de "x".

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno A(x)=x.y

Paso 6: Multiplicamos un monomio con un binomio de términos iguales $x(x+a)=x^2+ax$

Paso 7: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

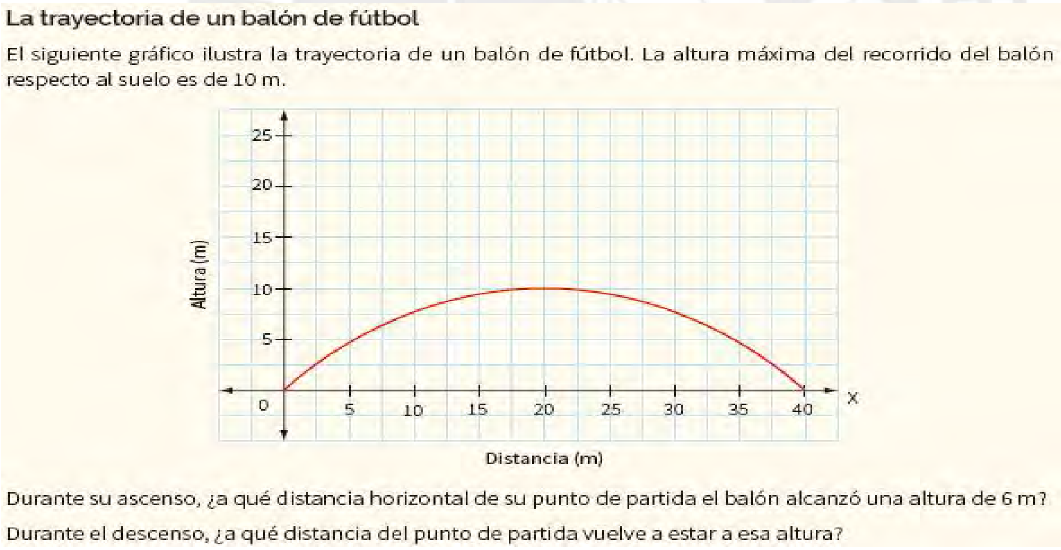
Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 8: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

En este problema, se pide obtener el área máxima del terreno para realizar la construcción de la casa. Conociendo su perímetro (40 metros) se modela el área en función de uno de sus lados. Se calcula el vértice de la función cuadrática para obtener el punto máximo de la función. Según Arcavi et al., (2016) categoriza a esta actividad como un contexto no real puesto que no son significativas para el estudiante. Según Belin et al., (2024) al generar la expresión algebraica de la función su concepción está en un enfoque correlacional. Asimismo, se identifica las variables primarias y se establece la coordinación directa entre las variables.

Figura 69

Problema 7



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 39)

En la figura 69, contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{5,5}$, el cual corresponde en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico. A continuación, se describe la técnica $\tau_{5,5}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,5}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

En este problema, se presenta como interrogante calcular la distancia horizontal que recorre el balón a una determina altura. Por tal motivo, de su expresión gráfica se debe realizar el tratamiento a su expresión algebraica. Según tocto (2015), los estudiantes, debido a su escaso dominio de las reglas de formación de sistemas de ecuaciones, tienen dificultad para realizar la trasformación de lo grafico a lo algebraico para modelar esta función. Asimismo, Díaz et al., (2013) enfatiza que los estudiantes presentaron poca dificultad en identificar el parámetro “c” y el signo del parámetro “a” que están expresados en la gráfica de la función.

Belin et al., (2024) señala que este problema genera una concepción enfocada a la covariación (visión proceso). Se identifica las variables primarias (variables independientes y dependientes) en la gráfica. Asimismo, esta representación corresponde a una secuencia de puntos que se relacionan dinámicamente las variables.

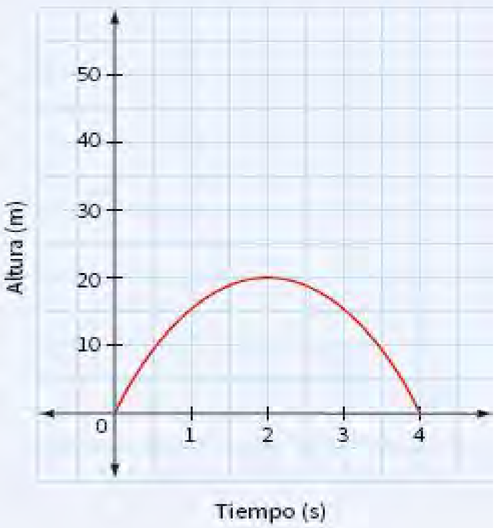
Palm (2008) se establece que este tipo de problema se considera como una tarea de cierto grado de autenticidad. Además, la solución de la interrogante se obtiene al realizar estrategias específicas para realizar la modelización de la función por medio del sistema de ecuaciones lineales.

Figura 70

Problema 8

El recorrido de una bengala de socorro

Una bengala es disparada desde una pequeña embarcación hacia el cielo. La altura h(t) (en metros) donde se ubica la bengala con relación a la embarcación en un tiempo t (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento puede modelarse con la siguiente expresión matemática: $h(t) = -5 (t - 2)^2 + 20$. El siguiente gráfico representa a la función h(t).



Por desgracia, este lanzamiento fue un fracaso. Normalmente, la altura máxima que alcanza este tipo de bengala es cuatro veces la altura que alcanzó en la situación descrita y su recorrido lo realiza en el doble del tiempo mostrado en el gráfico. ¿Cuál es la regla de correspondencia de esta nueva función?

a) $h(t) = -5 (t - 4)^2 + 80$

b) $h(t) = -5 (t - 2)^2 + 80$

c) $h(t) = -5 (t - 8)^2 + 80$

d) $h(t) = 5 (t - 2)^2 + 80$

Not

a. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 40)

En la figura 70, contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{6,5}$, el cual corresponde en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,5,2}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,5,2}$

Paso 1: Dada la función cuadrática $f(x)=a(x-h)^2+k$ donde V(h, k)

Paso 2: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si $a>0$, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

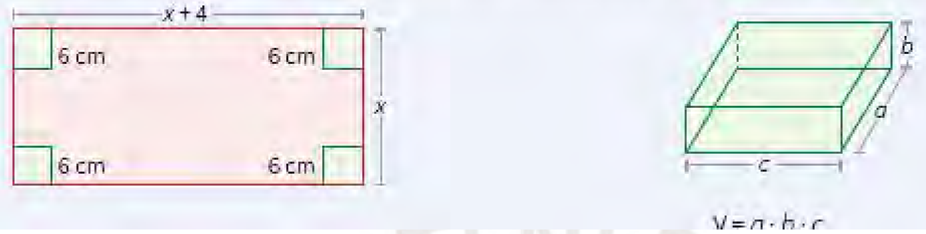
Si $a<0$, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

En este problema, su solución consiste en analizar el desplazamiento de la parábola, por tal motivo, es necesario calcular el vértice de la función. Tocto (2015) los estudiantes presentan dificultad en interpretar el vértice de la parábola como el punto máximo o mínimo de la función cuadrática, esto se debe a la desconexión entre su representación gráfica y algebraica de dicho objeto matemático. Asimismo, presenta dificultades en la interpretación de los parámetros h, k y a en su representación canónica. Además, Díaz et al., (2013) enfatiza que la transformación de la función cuadrática de la forma general a la forma canónica se necesita del procedimiento de completar cuadrados, por tal motivo, este proceso a los estudiantes resulta difícil por la complejidad algebraica.

Figura 71

Problema 9

Una pieza de cartón que tiene la forma de un rectángulo es 4 cm más larga que ancha. Con este cartón se construye una caja cuyo volumen debe medir 840 cm^3. Para construirla, se corta un cuadrado de 6 cm de lado y en cada esquina se doblan los bordes para formar la caja sin tapa. ¿Cuáles serán las dimensiones que debe tener la pieza de cartón? (El volumen de la caja se determina multiplicando las longitudes del alto, largo y ancho).



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 41)

En la figura 71, contiene el tipo de tarea T_2, que consiste en hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{2,1}$, el cual corresponde en Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. A continuación, se describe la técnica $\tau_{2,1,2}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{2,1,2}$:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico (rectángulo).

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: el ancho del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común $a(x)(bx+c)=(abx)^2+acx$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Para resolver este problema, el estudiante debe conocer ciertas nociones matemáticas (el volumen y ecuación de segundo grado) para poder realizar la generalización de la función a su expresión algebraica. Según Ozultun et al., (2017), los estudiantes tienen dificultades en encontrar los puntos de intersección con el eje x; utilizan el método de prueba y error para obtener raíces x_1 y x_2. Esto se debe a que no recordaban el procedimiento de obtener las raíces de una ecuación cuadrática.

Figura 72

Problema 10

Un biólogo introdujo en una isla una cantidad de garzas blancas, que en un principio se reprodujeron rápidamente. Pero, debido al cambio climático, los alimentos empezaron a escasear; por tanto, la población decreció. Según el último registro, el número de garzas blancas está representado por la siguiente expresión matemática:

$f(x) = -x^2 + 22x + 104$, donde "x" representa el tiempo en años que transcurrieron desde el momento en que se introdujeron en la isla.

Se desea conocer la cantidad inicial de garzas y en cuántos años se extinguirán por completo, a fin de tomar medidas de protección de esta especie.

Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 3 (2020, p. 42)

Tipo de tarea T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$\boldsymbol{t}_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$\boldsymbol{\tau}_{2,1,1}$:

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 3: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

En la figura 72, se presenta el problema 10, el cual incluye dos actividades: la primera, consiste en conocer la cantidad de garzas cuando x es igual a 0 años, por tal motivo, se tiene que obtener el término independiente de la función cuadrática. La segunda, consiste en hallar los años que demoran en extinguirse las garzas, donde se determina los x_1 y x_2 que representa los ceros de la función. Según Ozultun et al., (2017), los estudiantes tienen dificultades en encontrar e interpretar los puntos de intersección con el eje x; puesto que no recuerdan los procedimientos (factorización, fórmula general y completar cuadrados) que permiten obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Además, tiene deficiencia en entender el papel representativo de la discriminante $(b^2 - 4ac)$ para determinar la cantidad de soluciones que genera la intersección de la parábola con el plano cartesiano.

A continuación, en la tabla 28, se menciona un resumen de las tareas, tipos de tareas, técnicas y los ejercicios en el cuaderno de trabajo 3° de secundaria 2020

Tabla 28

Síntesis del análisis praxeológico cuaderno de trabajo 3° de secundaria 2020

Tipo de tarea T_i	Tarea $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\boldsymbol{\tau}_{i,j}$ (Técnica asociada a la	Nombre del ejercicio

		tarea)	
T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{2,1,1}$ $\tau_{2,1,2}$	Problema 9 Problema 10
T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general	$t_{5,\ 4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{5,4,6}$	Problema 1
	$t_{5,5}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico.	$\tau_{5,5}$	Problema 7
	$t_{5,\ 6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.	$\tau_{5,6}$	El recorrido de una esfera, problema 3
T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) =$ ax2+bx+c)	$t_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico	$\tau_{6,3,3}$:	Problema 4, problema 5
	$t_{6,4}$: Hallar el máximo o	$\tau_{6,\ 4,\ 5}$	Situación A,

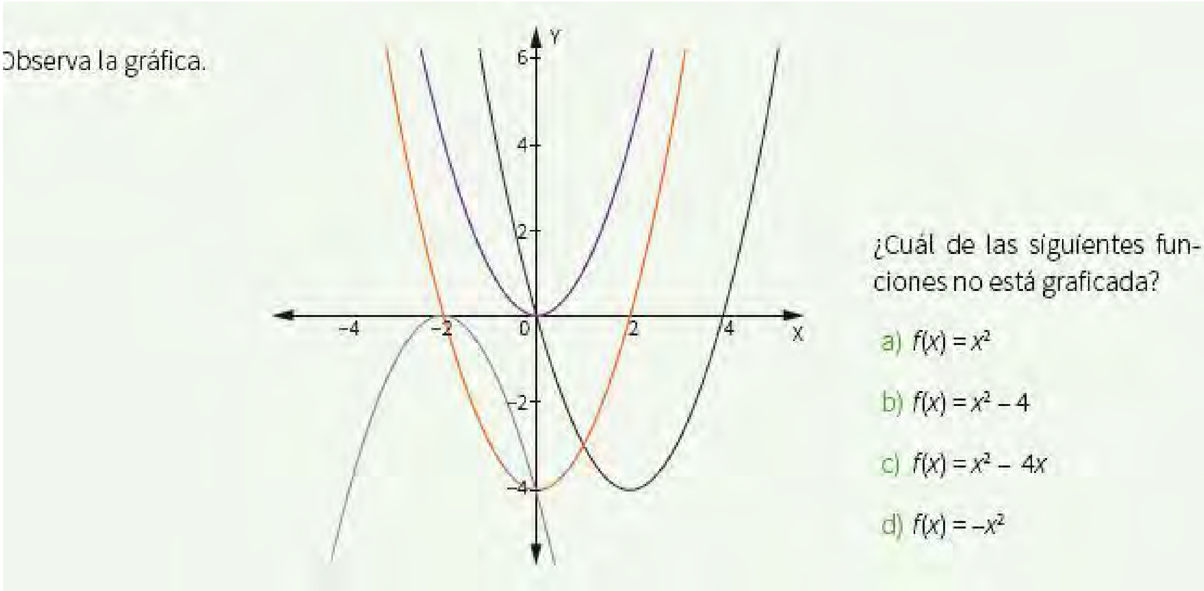
	mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{6,4,6}$	problema 6
	$t_{6,5}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo gráfico.	$\tau_{6,5,2}$	Problema 8
	$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.	$\tau_{6,7,4}$ $\tau_{6,7,5}$	Situación B Situación C
T$_7$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{7,2}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.	$\tau_{7,2}$	El recorrido de una esfera,
	$t_{7,3}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje algebraico.	$\tau_{7,3,1}$	Problema 2

Fuente. Autoría propia

5.2.4 Cuaderno de trabajo de matemática 4° de secundaria

Figura 73

Problema 1



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 4 (2020, p. 87)

En la figura 73, contiene el tipo de tarea T_7, que consiste en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{7,4}$, el cual corresponde en Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{7,4,1}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{7,4,1}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

En este problema, se observan el ostensivo gráfico y lenguaje algebraico; y los no ostensivo la noción de función cuadrática y plano cartesiano. Para resolver la tarea se utiliza el marco de la geometría analítica. Según, Díaz et al., (2013) el estudiante presenta las siguientes dificultades para representar la gráfica de la función de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$:

No asocian la gráfica con la forma general de la función cuadrática, esto se debe a los errores en la compresión de los signos de los coeficientes de la expresión algebraica de la parábola; otro error corresponde b≠0, puesto que al realizar la gráfica su eje de simetría lo relaciona con el eje y; y por último, no relaciona la ubicación del del vértice con los valores de b=0 0 b≠0.

Figura 74

Problema 2

Dada la función $g(x) = x^2 - 8x + 18$, ¿cuál de las siguientes alternativas representa el rango de dicha función en el conjunto de los números reales?

a) [2 ; +∞[b) [4 ; +∞[c) [2 ; 4 [d) [0 ; +∞[

Nota. Fichas de matemática 4 (2020, p. 88)

En la figura 74, contiene el tipo de tarea T_3, que consiste en hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{3,1}$, el cual corresponde en hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{3,1}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\boldsymbol{\tau}_{3,1}$

Paso 1: Se identifica los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k$=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

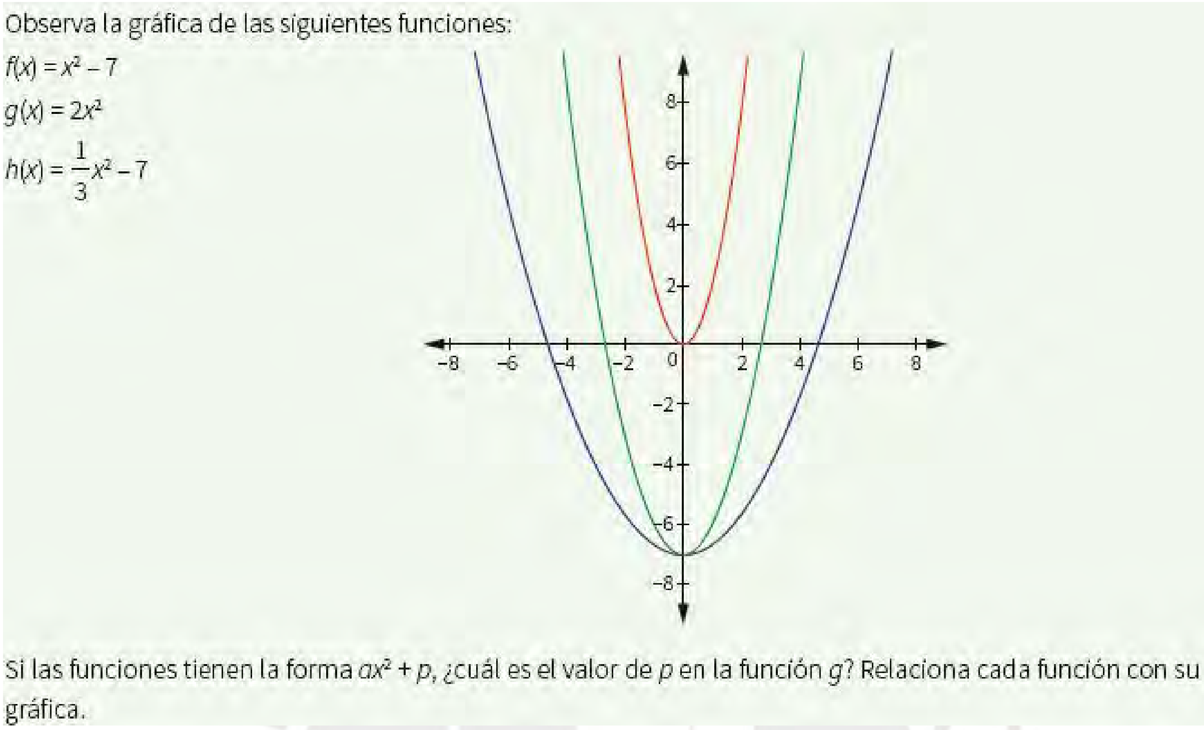
Paso 3: Dada la función.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Figura 75

Problema 4



Nota. Cuaderno de trabajo de Matemática 4 (2020, p. 88)

En la figura 75, contiene el tipo de tarea T_7, que consiste en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{7,4}$, el cual corresponde en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\tau_{7,4,1}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{7,4,1}$

Paso 1: Analizar si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Calcular el vértice V(h ;k) utilizando h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Interceptar con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizar la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función

Paso 5 Ubicar los puntos obtenidos de la función cuadrática en el plano cartesiano XY

$\tau_{7,4,2}$

Paso 1: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 2: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 3: Se analiza la abertura de las ramas de la parábola.

Si 0<$|a|$<1, en la parábola sus ramas son más abiertas.

Si 1<$|a|$, en la parábola sus ramas son más cerradas.

En este problema, su solución consiste en relación la expresión algebraica de la función y su respectiva grafica en el plano cartesiano. Se analiza que presenta el ostensivo gráfico y lenguaje algebraico; y los no ostensivo la noción de función cuadrática y plano cartesiano. Según, Díaz et al., (2013) las dificultades que presenta los siguientes estudiantes son las siguientes: primero, no logran asociar la gráfica con la expresión algebraica, esto se debe a la falta de comprensión de los parámetros de la función cuadrática; y por último, saben utilizar el procedimiento para obtener el vértice de la función pero no lo relacionan con los valores b=0 0 b≠0.

Figura 76

Problema 7

Las dimensiones de un parque que tiene la forma de un rectángulo son de 60 m de ancho por 80 m de largo. Al construir una vereda alrededor de él, de ancho uniforme *x*, se elimina parte del jardín. Determina el área del nuevo jardín en función del ancho de la vereda.

Nota. Fichas de matemática 4 (2020, p. 91)

En la figura 76, contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{5,4}$, el cual corresponde en determinarla expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{5,4,4}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,4,4}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico

Paso 2: Dibujar un rectángulo disminuyendo “x” a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x.

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común (ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Este problema, se construye un rectángulo disminuyendo en “x” a cada uno de sus lados y se determina el área del rectángulo considerándolo una función. Entre los objetos ostensivos se utiliza, el figural representado por el estudiante, lenguaje algebraico y /o gráfico. Entre los no ostensivos, noción de área y función cuadrática. Se utiliza la noción de área para movilizar la noción de función cuadrática. Según Arcavi et al., (2016) esta actividad corresponde a un contexto no real(artificial), ya que no es significante para el estudiante. Estos tipos de actividades desconcentran al estudiante por lo conlleva a no realizar la tarea.

Figura 77

Problema 9

Dos automóviles parten del mismo punto y al mismo tiempo; al separarse, sus trayectorias forman un ángulo recto. Si luego de una hora se han separado 20 km y uno de los autos viaja 4 km/h más rápido que el otro, ¿cuál es la velocidad del auto más veloz?

a) 16 km/h b) 20 km/h c) 24 km/h d) 28 km /h

Nota. Fichas de matemática 4 (2020, p. 91)

En la figura 77, contiene el tipo de tarea T_2, que consiste en hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{5,4}$, el cual corresponde en hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{2,1,1}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{2,1,1}$

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización f(x) y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 3: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

En este problema, su solución consiste en hallar los puntos de intersección del eje “x” con la parábola. Utilizan los objetos ostensivos; representación algebraica acompañado de un gráfico. Los objetos no ostensivos son; el teorema de Pitágoras y función cuadrática. Para resolver la tarea utiliza el marco de la geometría y el algebra. Según Ozultun et al., (2017), los estudiantes tienen dificultades en encontrar los puntos de intersección con el eje “x”; ya que no utilizar adecuadamente la formula general de una ecuación cuadrática.

A continuación, en la tabla 29, se menciona un resumen de las tareas, tipos de tareas, técnicas y los ejercicios del cuaderno de trabajo 4° de secundaria 2020.

Tabla 29

Síntesis del análisis praxeológico del cuaderno de trabajo 4° de secundaria 2020

Tipo de tarea T_i	Tarea $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\tau_{i,j}$ (Técnica asociada a la tarea)	Nombre del ejercicio
T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{2,1,1}$ $\tau_{2,1,2}$	Problema 9, situación B, problema 6, problema 10
T_3: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{3,1}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{3,1}$	Problema 2
T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{5,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{5,4,1}$ $\tau_{5,4,2}$ $\tau_{5,4,4}$	Problema 7, situación A, situación C, problema 5
T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) =$ ax^2+bx+c)	$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{6,4,1}$ $\tau_{6,4,2}$ $\tau_{6,4,7}$	Entradas al teatro, situación C, problema 8
	$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje	$\tau_{6,7,1}$	Problema 3, problema 10

	algebraico.		
T_7: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$t_{7,1}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{7,1,1}$ $\tau_{7,1,2}$	Situación A, situación C
	$t_{7,3}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico	$\tau_{7,3}$	Situación B
	$t_{7,4}$: Graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo de lenguaje algebraico.	$\tau_{7,4,1}$ $\tau_{7,4,2}$	Problema 1, problema 4

Fuente. Autoría propia

5.2.5 Cuaderno de trabajo de matemática 5° de secundaria

Figura 78

Problema 5

En un partido de fútbol, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma la parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$, donde y es la altura en metros que alcanza la pelota mientras que x representa la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5 ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento?

Nota. Fichas de matemática 5 (2020, p. 87)

En la figura 78, contiene el tipo de tarea T_6, que consiste en hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x)$= ax^2+bx+c). Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $t_{6,7}$, el cual corresponde en Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{6,7,5}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{6,\,7,5}$:

Paso 1: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.
Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 2: Identificamos los parámetros a, b y c de la función cuadrática.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h ;k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k$=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

En este problema, se pide calcular la altura máxima que recorre la pelota. Se utiliza el ostensivo lenguaje algebraico y no ostensivo función cuadrática y su respectivo vértice. Asimismo, Díaz y Flores (2022) establecen que los estudiantes al calcular el vértice de la función presentan varias dificultades; primera, cometen errores al realizar procedimientos aritméticos; segunda, utilizan de manera inadecuado la fórmula del vértice; y, por último, experimentan falta de concentración u olvido de cómo llevar a cabo la solución. Asimismo, Tocto (2015) menciona que la dificultad que tiene los estudiantes para realizar este problema se debe a que no han comprendido a relacionar la representación algebraica con la gráfica de la función, así como a la falta de domino al aplicar la técnica h$=-\frac{b}{2a}$ y k$=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ para calcular el vértice.

Figura 79

Problema 6

En un partido de fútbol, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma la parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$, donde y es la altura en metros que alcanza la pelota; mientras que x representa la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota.

Si la barrera que forman los jugadores del equipo contrario está a 9,15 m del punto en que se lanzará la pelota y si los jugadores al saltar pueden alcanzar una altura de 2,3 m, ¿pasa el balón por encima de la barrera? ¿Por qué?

Nota. Fichas de matemática 5 (2020, p. 87)

T_0: Hallar un punto de la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.

Paso 1: Se reemplaza el valor de x en la f(x)

Paso 2: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

En la figura 79, se presenta el problema seis, en la cual se pide calcular la altura que alcanza la pelota cuando su distancia horizontal es de 9,15m. Se utiliza el objeto ostensivo, escritura algebraica y /o grafica. Además, el objeto, no ostensivo es la función cuadrática y un punto de la función cuadrática.

Figura 80

Problema 9

Al proyectarse una imagen sobre una pantalla, su tamaño dependerá de la distancia del proyector con respecto a ella. Así, cuando el proyector está a 0,5 m de la pantalla, la imagen proyectada de forma cuadrada tiene un área de 0,0625 m²; cuando se encuentra a 1 m, el área es de 0,25 m²; cuando se halla a 1,5 m, el área es de 0,5625 m², y así sucesivamente. Determina un modelo matemático para hallar el área de la imagen proyectada (y) en función de la distancia entre el proyector y la pantalla (x), siendo este modelo una función cuadrática.

a) $y = 0{,}25x^2$ b) $y = 0{,}75x^2$ c) $y = 25x^2$ d) $y = 75x^2$

Nota. Fichas de matemática 5 (2020, p. 88)

En la figura 80, contiene el tipo de tarea T_5, que consiste en Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general. Asimismo, se aborda el subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{5,4}$, el cual corresponde en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito. A continuación, se describe la técnica $\boldsymbol{\tau}_{5,4,5}$ que se utiliza para la resolución de este subtipo de tarea.

$\tau_{5,4,5}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: En $f(x) =$ax²+bx+c se conoce tres puntos de la parábola.

Paso 3: Reemplazamos los tres puntos y generamos tres ecuaciones con tres incógnitas

Paso 4: Solucionamos el sistema y obtenemos los valores de a, b y c.

En este problema, su solución corresponde a modeliza el área de la proyección de la imagen, a una función cuadrática expresado en su forma general. La técnica, constituye en generar una tabla de valores donde se ubican los datos descritos de la actividad, posteriormente, se genera un sistema de ecuaciones de tres variables, para obtener los parámetros de la función y por último se genera la función $f(x) =$ ax²+bx+c. Los objetos ostensivos son la tabla de valores y el lenguaje algebraico. Objetos no ostensivos son el área, la función cuadrática y los puntos de la función cuadráticas. Ansaldo et al, (2018) menciona que para este tipo de actividades los estudiantes presentan dificultades en modelizar la función cuadrática en su forma algebraica, ya que, cometen errores al aplicar de manera incorrecta los procedimientos algebraicos para resolver los sistemas de ecuaciones.

A continuación, en la tabla 30, se menciona un resumen de las tareas, tipos de tareas, técnicas y los ejercicios del cuaderno de trabajo 5° de secundaria 2020.

Tabla 30

Síntesis del análisis praxeológico cuaderno de trabajo 5° de secundaria 2020

Tipo de tarea T_i	Tarea $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\tau_{i,j}$ (Técnica asociada a la tarea)	Nombre del ejercicio
T_2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.	$t_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.	$\tau_{2,1,1}$	Situación A
T_4: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática ($f(x)= ax^2+bx+c$).	$t_{4,1}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general teniendo como datos al vértice y los puntos de intersección con los ejes X e Y.	$\tau_{4,1}$	Problema 4,
T_5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general	$t_{5,4}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{5,4,3}$ $\tau_{5,4,5}$	Problema 7, problema 9
	$t_{5,6}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extra	$\tau_{5,6}$	Situación A

	matemático y en un ostensivo tabular.		
T_6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática (f(x)= ax^2+bx+c)	$t_{6,3}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraico	$\tau_{6,3,2}$	Problema 1
	$t_{6,4}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo lenguaje natural o escrito.	$\tau_{6,4,3}$ $\tau_{6,4,4}$	Construimos canaletas de máximo volumen, problema 8
	$t_{6,6}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extra matemático y en un ostensivo tabular.	$\tau_{6,6}$	Situación A
	$t_{6,7}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático y en un ostensivo lenguaje algebraica.	$\tau_{6,7,1}$ $\tau_{6,7,2}$ $\tau_{6,7,3}$ $\tau_{6,7,5}$	Situación B, Situación C, problema 2 y 3, problema 5

Fuente. Autoría propia

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

RESULTADOS

5.3 Estructura y relación entre las tareas.

En base a los aportes que proporciona la Teoría Antropológica de lo didáctico se realizó la reconstrucción de un modelo praxeológico de referencia asociado a la función cuadrática lo que permitió examinar 46 ejercicios; y se identificó 7 tipos de tarea, 14 subtipos de tareas y 16 técnicas. Asimismo, en cada subtipo de tarea existe una variedad de ejercicios que lo constituyen, los cuales se expresan mediante ostensivos específicos, tales como el lenguaje natural o escrito, grafico, tabular y lenguaje algebraico. Por otra parte, este MPR fue una herramienta útil, ya que permitió realizar un análisis de la organización matemática (OM) en las fichas y cuadernos de trabajo de matemática.

Respecto al tipo de tarea T_4 (figura 61) solo se puede observar en 5° grado de secundaria como un subtipo de tarea $\boldsymbol{t}_{4,2}$ donde utiliza la técnica $\tau_{\text{grafica-forma general.}}$ Además, Belin et al., (2024) para general la regla de correspondencia es necesario analizar los parámetros a, b y c presentes en la gráfica de la función. Por otro lado, Tocto (2015) menciona que para obtener la expresión algebraica de la parábola, es necesario identificar sus tres puntos de coordenadas y, a partir de ellos, construir un sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Respecto a la $\boldsymbol{t}_{6,\ 4}$ se observa mayor presencia en 4° de secundaria que en 3° y 5°, además, se manifiesta que estos problemas corresponden a contextos reales en la que existe un patrón entre las variables independiente y dependiente, permitiendo la modelación de la función (Chaves y Almouloud,2016, Palm, 2008 y Gaita et al., 2022). Asimismo, según Tocto (2015) para estos tipos de problemas los estudiantes presentan dificultades en la conversión del lenguaje verbal a la expresión algebraica, así como errores algorítmicos para calcular el vértice (y Díaz y Flores ,2022).

En similar situación la $\boldsymbol{t}_{6,7}$ presenta mayor variedad de problemas en 5° de secundaria respecto a los grados anteriores. Asimismo, este tipo de ejercicios al contener su expresión algebraica pretende generar un cierto grado de autenticidad en un contexto de la vida real (Palm ,2008). Además, el método de completar cuadrados representa una forma más adecuada para este tipo de actividades, ya que permite relacionarlo con la forma del vértice cuya expresión es h=$-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$ (Genicio et al., 2005, Belin et al., 2024). Por último, los estudiantes presentan ciertas dificultades en representar estos ejercicios de la forma algebraica a la forma gráfica (Carabalí,2019 y Díaz y Flores, 2022).

En la tarea $\boldsymbol{t}_{5,\ 4}$ que consiste en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática, se observa que este sub tipo de tarea es representativa en 4° grado de secundaria a diferencia de los grados anteriores. Entre las técnicas utilizadas para su resolución se encuentran dos principales: La primera es la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$, la cual permite generar la regla de correspondencia a partir del área de un rectángulo; asimismo, para estos tipos de problemas según Arcavi et al., (2016) son consideradas artificiales, es decir, no reales. La segunda técnica $\tau_{\text{producto-binomios}}$, que consiste en obtener la ley de formación de la función cuadrática como el producto de dos expresiones algebraicas lineales. En este caso, Palm (2008) menciona que estos problemas son considerados como tareas auténticas.

Con respecto a los ejercicios que contienen las tareas descritas en las fichas de trabajo y en el MPR presentado en nuestra investigación sobre la función cuadrática, se establecerá una descripción en relación a la tarea y el ejercicio; así como los conocimientos implicados entre ellos. En ese sentido Jolivet et al. (2022) señal que la estructura del ejercicio representa una relación cronológica entre las tareas y sus respectivas técnicas, las cuales se clasifican en: precede; ser el mismo tipo óptimo de tareas; especialización y generalización; ser una variación de; integrantes de una técnica; y ser útil. Estas relaciones se obtienen al realizar la estructuración del conocimiento del MPR, así como una descripción más puntual en el análisis de los ejercicios.

Con lo expuesto en nuestra investigación, proponemos una propuesta de organización matemática en los grados del ciclo VII del nivel secundario, a través de una secuencia de tareas desde la perspectiva de la función cuadrática.

5.3.1 Ficha de matemática de cuarto de secundaria 2024.

En la situación A (cercamos un terreno), la $t_{5,4}$ precede a la $t_{6,4}$, de la misma forma $t_{6,4}$ precede a la $t_{7,1}$, esto se debe según Jolivet et al. (2022) a la cronología de ejecución que presenta las tareas en el problema. De lo anterior, se puede estipular que a $t_{5,4}$ es útil a la $t_{6,4}$ porque $t_{5,4} \in \tau_{6,4,7}$ y se denota como $t_{5,4} \rightarrow t_{6,4}$; de la misma manera, $t_{6,4}$ es útil a la $t_{7,1}$ porque $t_{6,4} \in \tau_{7,1,1}$ y se denota como $t_{6,4} \rightarrow t_{7,1}$. Asimismo, $t_{6,4}$ necesita de $t_{5,4}$, ya que para calcular la máxima área del terreno rectangular que tenga una existencia real, es necesario de la ejecución de determinar la expresión algebraica del área del terreno rectangular; de la misma forma, $t_{7,1}$ necesita de $t_{5,4}$, ya que para hallar la gráfica de la función cuadrática del área del terreno rectangular y que tenga una existencia real, se tiene que ejecutar el desarrollo de determinar la expresión algebraica de dicha área. La $t_{5,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{7,1}$, puesto que existe la técnica $\tau_{7,1,1}$ que resuelve $t_{7,1}$ tal que $T_{opt}(t_{5,4})$ es un ingrediente de dicha técnica. Por último, la $t_{6,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{7,1}$, puesto que existe la técnica $\tau_{7,1,1}$ que resuelve $t_{7,1}$ tal que $T_{opt}(t_{6,4})$ es un ingrediente de dicha técnica.

En la situación B (Programador de videojuego), la $t_{2,1}$ precede a $t_{7,3}$, esto permite primero hallar la intersección de los ejes coordenados para posteriormente generar la gráfica de la parábola, lo que se deduce, que $t_{2,1}$ es útil para pata $t_{7,3}$ porque $t_{2,1} \in \tau_{7,3}$ y se denota como $t_{2,1} \rightarrow t_{7,3}$. Luego, $t_{7,3}$ necesita de $t_{2,1}$, ya que para realizar el grafico de la función, es necesario de la ejecución de hallar los puntos de intersección de la función con los ejes coordenados. Asimismo, $t_{2,1}$ es un ingrediente de la técnica $t_{7,3}$, puesto que existe la técnica $\tau_{7,3}$ que resuelve $t_{7,3}$ tal que $T_{opt}(t_{2,1})$ es un ingrediente de dicha técnica.

En la situación C (área de un terreno), la $t_{5,4}$ precede a $t_{6,4}$, esto se debe a que primero se determinar la función del terreno rectangular al ser incrementados las medidas de sus lados por “x”. Asimismo, la $t_{5,4}$ precede a $t_{7,1}$, puesto que, para graficar la parábola del área de terreno rectangular, primero se debe determinar la expresión algebraica en función. De lo mencionado anteriormente, se deduce que $t_{5,4}$ es útil a $t_{6,4}$ porque $t_{5,4} \in \tau_{6,4,2}$ ($t_{5,4} \rightarrow t_{6,4}$); de la misma forma, $t_{5,4}$ es útil a la $t_{7,1}$ porque $t_{5,4} \in \tau_{7,1,2}$ ($t_{5,4} \rightarrow t_{7,1}$). Luego, $t_{6,4}$ necesita de $t_{5,4}$, ya que para hallar la máxima área del terreno al incrementarse sus lados y siendo una existencia real, es necesario la ejecución de determinar la función; de la misma forma, $t_{7,1}$ necesita de $t_{5,4}$, ya que para hallar la gráfica de la parábola en el plano cartesiano y siendo una existencia real, se tiene que ejecutar el desarrollo de determinar la expresión algebraica del área del terreno.

Por otro lado, $t_{5,4}$ (situación A) es el mismo tipo de tara óptimo de $t_{5,4}$ (situación C), ya que; en el primer, la medida de uno de sus lados del rectángulo es “x” pero; en el segundo, las medidas de los lados se incrementan a “x”, de lo que se denota que $t_{5,4}$ (situación A)$\sim$ T_{opt}($t_{5,4}$(situación c)). Asimismo, $t_{5,4}$ (situación A) es una especialización de $t_{5,4}$ (situación C) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ (corresponde al alcance institucional de la técnica). Además, $t_{6,7}$ (situación A) es una especialización de $t_{5,4}$ (situación C) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$

En el problema 7, $t_{5,4}$ precede a $t_{6,4}$, donde se deduce que $t_{5,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{6,4}$, puesto que existe la técnica $\tau_{6,4,1}$ que resuelve $t_{6,4}$ tal que $T_{opt}(t_{5,4})$ es un ingrediente de dicha técnica.

A continuación, en la tabla 31, se presenta una recopilación de todas las relaciones existentes entre las tareas asociadas a la función cuadrática, incluidas en la ficha de trabajo correspondientes al cuarto grado de secundaria del año 2024.

Tabla 31

Relación entre las tareas

	$t_{2,1}$	$t_{5,4}$	$t_{6,4}$	$t_{7,1}$	$t_{7,3}$

$t_{2,1}$				$t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{7,1})$	$t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{7,3})$
$t_{5,4}$		$\sim T_{opt}(t_{5,4})$	$t_{5,4} \rightarrow \tau(t_{6,4})$	$t_{5,4} \rightarrow \tau(t_{7,1})$	$t_{5,4} \rightarrow \tau(t_{7,1})$
$t_{6,4}$				$t_{6,4} \rightarrow \tau(t_{7,1})$	

Fuente. Autoría propia

5.3.2 Ficha de matemática de quinto de secundaria 2024.

En la situación A (modelamos el salto de la rana), la $t_{5,6}$ precede a la $t_{6,6}$, según Jolivet et al. (2022) este se debe a cronología en el desarrollo de las tareas, asimismo, primero se tiene que modelar a una función cuadrática, y posteriormente hallar el máximo valor que alcanza la función. De lo anterior, se puede estipular que a $t_{5,6}$ es útil a la $t_{6,6}$ porque $t_{5,6} \in \tau_{6,6,1}$ y se denota como $t_{5,6} \rightarrow t_{6,6}$. La $t_{5,6}$ es un ingrediente de la técnica $t_{6,6}$, puesto que existe la técnica $\tau_{6,6,1}$ que resuelve $t_{6,6}$ tal que $T_{opt}(t_{5,6})$ es un ingrediente de dicha técnica. Además, $t_{6,6}$ necesita de $t_{5,6}$, ya que para calcular el punto máximo de la trayectoria de la rana es necesario de la ejecución de determinar la función de esta situación extra matemática.

Por otro lado, $t_{6,4}$ (problema 7) es una especialización de $t_{6,4}$ (problema) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ (corresponde al alcance institucional de la técnica).

La $t_{6,7}$ (problema 2) precede a la $t_{6,7}$(situación B), puesto que nos el orden que debe estar estos problemas. De lo anterior, se puede estipular que, a La $t_{6,7}$ (problema 2) es útil a la $t_{6,7}$(situación B) porque $t_{6,7}$ (situación 2) $\in \tau_{6,7,2}$ o $\tau_{6,7,2,3}$ y se denota como $t_{6,7}$ (problema 2) $\rightarrow$ $t_{6,7}$(situación B). Asimismo, $t_{6,7}$ (problema 2) es una especialización de $t_{6,7}$ (situación B) porque utiliza las técnicas $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$; $\tau_{\text{vertice 2}}$ y $\tau_{\text{vertice 3}}$(corresponde al alcance institucional de la técnica). Además, la $t_{6,7}$ (problema 2) es un ingrediente de la técnica $t_{6,7}$ (situación B), puesto que existe las técnicas $\tau_{6,7,2}$ o $\tau_{6,7,2,3}$ que resuelve $t_{6,7}$ (situación B), tal que $T_{opt}(t_{6,7}$ problema 2) es un ingrediente de dicha técnica.

La $t_{6,7}$ (problema 2) precede a la $t_{6,7}$(situación C), puesto que nos da una jerarquía en que debe estar estos problemas. De lo anterior, se puede estipular que, a La $t_{6,7}$ (problema 2) es útil a la $t_{6,7}$(situación C) porque $t_{6,7}$ (situación 2) $\in \tau_{6,7,2}$ o $\tau_{6,7,2,3}$ y se denota como $t_{6,7}$ (problema 2) $\rightarrow$ $t_{6,7}$(situación C). Asimismo, $t_{6,7}$ (problema 2) es una especialización de $t_{6,7}$ (situación C) porque utiliza las técnicas $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$; $\tau_{\text{vertice 2}}$ y $\tau_{\text{vertice 3}}$(corresponde al alcance institucional de la técnica). Además, la $t_{6,7}$ (problema 2) es un ingrediente de la técnica $t_{6,7}$ (situación C), puesto que existe las técnicas $\tau_{6,7,2}$ **o** $\tau_{6,7,2,3}$ que resuelve $t_{6,7}$ (situación C), tal que $T_{opt}(t_{6,7}$ problema 2) es un ingrediente de dicha técnica.

La $t_{6,7}$ (problema 2) precede a la $t_{6,7}$(problema 5), puesto que nos hace presente una cronometría de estos problemas. De lo anterior, se puede estipular que, a La $t_{6,7}$ (problema 2) es útil a la $t_{6,7}$(problema 5) porque $t_{6,7}$ (problema 5) $\in \tau_{6,7,2}$ **o** $\tau_{6,7,2,3}$ y se denota como $t_{6,7}$ (problema 2) $\rightarrow$ $t_{6,7}$(problema 5). Asimismo, $t_{6,7}$ (problema 2) es una especialización de $t_{6,7}$ (situación C) porque utiliza las técnicas $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$; $\tau_{\text{vertice 2}}$ y $\tau_{\text{vertice 3}}$(corresponde al alcance institucional de la técnica). Además, la $t_{6,7}$ (problema 2) es un ingrediente de la técnica $t_{6,7}$ (problema 5), puesto que existe las técnicas $\tau_{6,7,2}$ **o** $\tau_{6,7,2,3}$ que resuelve $t_{6,7}$ (problema 5), tal que $T_{opt}(t_{6,7}$ problema 2) es un ingrediente de dicha técnica.

Por otro lado, $t_{5,4}$ (situación A) es el mismo tipo de tara óptimo de $t_{5,4}$ (situación C), ya que; en el primer, la medida de uno de sus lados del rectángulo es “x” pero; en el segundo, las medidas de los lados se incrementan a “x”, de lo que se denota que $t_{5,4}$ (situación A)~ $T_{opt}(t_{5,4}$(situación c)).

En la tabla 32, se presenta una recopilación de todas las relaciones existentes entre las tareas asociadas a la función cuadrática, incluidas en la ficha de trabajo correspondientes al quinto grado de secundaria del año 2024.

Tabla 32

Relación entre las tareas

	$t_{2,1}$	$t_{5,4}$	$t_{5,6}$	$t_{6,6}$	$t_{6,7}$
$t_{2,1}$			$t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{5,6})$		
$t_{4,1}$		$t_{4,1} \rightarrow \tau(t_{5,4})$	$t_{4,1} \rightarrow \tau(t_{5,6})$		
$t_{5,4}$		$\sim T_{opt}(t_{5,4})$			
$t_{5,6}$				$t_{5,6} \rightarrow t_{6,6}$ $\sim T_{opt}(t_{5,6})$	
$t_{6,7}$					$t_{6,7} \rightarrow t_{6,7}$ $\sim T_{opt}(t_{6,7})$

Fuente. Autoría propia

5.3.3 Cuaderno de trabajo de matemática de tercero de secundaria 2020.

En el problema "el recorrido de una esfera la $\boldsymbol{t}_{5,6}$ precede a la $\boldsymbol{t}_{7,2}$, según Jolivet et al. (2022) este se debe a la cronología en la ejecución de las tareas, asimismo, primero se determina la expresión algebraica de la función, y posteriormente se representa su gráfica en el plano cartesiano. Además, del problema anterior se indica que $\boldsymbol{t}_{5,6}$ es útil a la $\boldsymbol{t}_{7,2}$ porque $\boldsymbol{t}_{5,6} \in \boldsymbol{\tau}_{7,2}$ y de representa como $\boldsymbol{t}_{5,6} \rightarrow \boldsymbol{t}_{7,2}$. Asimismo, la $\boldsymbol{t}_{5,6}$ es un ingrediente de la técnica $\boldsymbol{t}_{7,2}$, ya que hay una técnica $\boldsymbol{\tau}_{7,2}$ que desarrolla a $\boldsymbol{t}_{7,2}$ por lo que $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{5,6})$ es un ingrediente de dicha la $\boldsymbol{\tau}_{7,2}$. Finalmente, $\boldsymbol{t}_{7,2}$ necesita de $\boldsymbol{t}_{5,6}$,puesto que primero se determina la expresión algebraica de la función, que corresponde el complemento definitorio para poder realizar la gráfica la parábola en el plano cartesiano.

Por otro lado, $\boldsymbol{t}_{6,7}$ (situación B) precede a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ (problema 3), por lo tanto, $\boldsymbol{t}_{6,7}$ es un ingrediente de la técnica $\boldsymbol{t}_{7,3}$ ya que hay una técnica $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$ que desarrolla a $\boldsymbol{t}_{7,3}$ por lo que $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{6,7})$ es un ingrediente de dicha la $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$, asimismo, la $\boldsymbol{t}_{6,7}$ (situación B) es útil a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ (problema 3) porque $\boldsymbol{t}_{6,7} \in \boldsymbol{\tau}_{7,3}$ y de representa como $\boldsymbol{t}_{6,7} \rightarrow \boldsymbol{t}_{7,3}$. Además, la $\boldsymbol{t}_{6,4}$ (situación C) precede a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ (problema 3), por lo tanto, $\boldsymbol{t}_{6,4}$ es un ingrediente de la técnica $\boldsymbol{t}_{7,3}$ ya que hay una técnica $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$ que desarrolla a $\boldsymbol{t}_{7,3}$ por lo que $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{6,4})$ es un ingrediente de dicha la $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$, asimismo, la $\boldsymbol{t}_{6,4}$ (situación C) es útil a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ (problema 3) porque $\boldsymbol{t}_{6,4} \in \boldsymbol{\tau}_{7,3}$ y se representa como $\boldsymbol{t}_{6,4} \rightarrow \boldsymbol{t}_{7,3}$. Luego, la $\boldsymbol{t}_{2,1}$ (problema 10) precede a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ (problema 3), por lo tanto, $\boldsymbol{t}_{2,1}$ es un ingrediente de la técnica $\boldsymbol{t}_{7,3}$ ya que hay una técnica $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$ que desarrolla a $\boldsymbol{t}_{2,1}$ por lo que $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{2,1})$ es un ingrediente de dicha la $\boldsymbol{\tau}_{7,3}$. La $\boldsymbol{t}_{2,1}$ es útil a la $\boldsymbol{t}_{7,3}$ porque $\boldsymbol{t}_{2,1} \in \boldsymbol{\tau}_{7,3}$ y se representa como $\boldsymbol{t}_{2,1} \rightarrow \boldsymbol{t}_{7,3}$.

La $\boldsymbol{t}_{6,7}$ (Situación C) es una especialización de $\boldsymbol{t}_{6,7}$ (situación B) porque utilizan la misma técnica $\tau_{vertice-1}$, pero antes a la $\boldsymbol{t}_{6,7}$ (situación B) se tiene que realizar el producto de dos binomios para generar la función cuadrática. Luego, la $\boldsymbol{t}_{5,6}$ (el recorrido de una esfera) y $\boldsymbol{t}_{5,6}$ (problema 3) están vinculados a un mismo generador de tipo de tarea, es decir que $\boldsymbol{t}_{5,6}$(el recorrido de una esfera) ~ $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{5,6}$(problema 3)). Además, la $\boldsymbol{t}_{6,4}$ (situación A) y $\boldsymbol{t}_{6,4}$ (problema 6) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $\boldsymbol{t}_{6,4}$(situación A) ~ $T_{opt}(\boldsymbol{t}_{6,4}$(problema 6)).

Por otro lado, $\boldsymbol{t}_{6,3}$ (problema 4) es una especialización de $\boldsymbol{t}_{6,3}$ (problema 5) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{vertice-3}$(corresponde al alcance institucional de la técnica). Asimismo, $\boldsymbol{t}_{5,6}$ (recorrido de una esfera) y $\boldsymbol{t}_{5,6}$ (problema 6) están vinculados a un mismo generador de tipo de tarea, es decir que $\boldsymbol{t}_{5,6}$(el recorrido de una esfera) ~ Topt($\boldsymbol{t}_{5,6}$(problema 6)). La $\boldsymbol{t}_{5,6}$ (problema 3) es una especialización de $\boldsymbol{t}_{5,5}$

(problema 7) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$ (corresponde al alcance institucional de la técnica). La $t_{2,1}$(problema 10) es un ingrediente de la $t_{2,1}$ (problema 9), ya que, hay una técnica $\tau_{2,1,2}$ que desarrolla a la $t_{2,1}$ (problema 9) por lo que $T_{opt}(t_{2,1}$ (problema 10)) es un ingrediente de dicha la $\tau_{2,1,2}$.

A continuación, en la tabla 33, se presenta una recopilación de todas las relaciones existentes entre las tareas asociadas a la función cuadrática, incluidas en la ficha de trabajo correspondientes al tercer grado de secundaria del año 2020.

Tabla 33

Relación entre las tareas

	$t_{2,1}$	$t_{5,6}$	$t_{7,2}$	$t_{7,3}$
$t_{2,1}$	$t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{2,1})$			$t_{2,1} \rightarrow t_{7,3}$ $t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{7,3})$
$t_{5,6}$		$\sim T_{opt}(t_{5,6})$	$t_{5,6} \rightarrow t_{7,2}$	
$t_{6,4}$				$t_{6,4} \rightarrow t_{7,3}$ $t_{6,4} \rightarrow \tau(t_{7,3})$
$t_{6,7}$				$t_{6,7} \rightarrow t_{7,3}$ $t_{6,7} \rightarrow \tau(t_{7,3})$ $\sim T_{opt}(t_{7,3})$

Fuente. Autoría propia

5.3.4 Cuaderno de trabajo de matemática de cuarto de secundaria 2020.

En el problema "situación A" la $t_{5,4}$ precede a la $t_{6,4}$, esto está relacionado a la cronología en la ejecución de las tareas, asimismo, primero se determina la expresión algebraica de la parábola, y posteriormente se calcula el máximo valor que genera la función. La actividad mencionada, se indica que $t_{5,4}$ es útil a la $t_{6,4}$ porque $t_{5,4} \in \tau_{6,4}$ y se representa como $t_{5,4} \rightarrow t_{6,4}$. Asimismo, la $t_{5,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{6,4}$, puesto que, hay una técnica $\tau_{6,4,7}$ que desarrolla a $t_{6,4}$ por lo que $T_{opt}(t_{5,4})$ es un ingrediente de dicha la $\tau_{6,4,7}$. Finalmente, $t_{6,4}$ necesita de $t_{5,4}$, puesto que primero se determina la expresión algebraica de la función, que corresponde el complemento definitorio para poder realizar hallar el máximo valor de la parábola.

Den el mismo problema de “situación A” la $t_{5,\,4}$ precede a la $t_{7,\,1}$, esto se relaciona con la cronología en la ejecución de las tareas, asimismo, primero se determina la expresión formal de la función, y posteriormente se representa la gráfica de la parábola. La $t_{5,\,4}$ es útil a la $t_{7,\,1}$ porque $t_{5,\,4} \in \tau_{7,\,1,1}$ y se representa como $t_{5,\,4} \rightarrow t_{7,\,1}$. Asimismo, la $t_{5,\,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{7,\,1}$, puesto que, hay una técnica $\tau_{7,\,1,1}$ que desarrolla a $t_{7,\,1}$ por lo que T_{opt} ($t_{5,\,4}$) es un ingrediente de dicha la $\tau_{7,\,1,1}$. Finalmente, $t_{7,1}$ necesita de $t_{5,\,4,}$ puesto que primero se determina la expresión algebraica de la función, que corresponde el complemento definitorio para poder representar la gráfica de la parábola.

Por otra parte, la $t_{5,4}$ (situación C) y $t_{5,\,4}$ (problema 7) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{5,4}$ (situación C) ~ Topt($t_{5,\,4}$ (problema 7)) porque presentan los mismas variables del MPR. La $t_{5,4}$ (situación A) y $t_{5,\,4}$ (problema 7) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{5,4}$ (situación A) ~ Topt($t_{5,\,4}$ (problema 7)) porque tienen las mismas variables del MPR. Además, la $t_{7,4}$ (Problema 1) y $t_{7,\,4}$ (problema 4) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{7,4}$ (Problema 1) ~ Topt($t_{7,\,4}$ (problema 4)) porque presentan los mismas variables del MPR. La $t_{2,1}$ (Problema 6) y $t_{2,\,1}$ (problema 9) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{2,1}$ (problema 6) ~ Topt($t_{2,\,1}$ (problema 9)) porque tienen las mismas variables del MPR. La $t_{6,7}$ (Problema 3) y $t_{6,\,7}$ (problema 10) se relaciona con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{6,7}$ (problema 3) ~ Topt($t_{6,\,7}$ (problema 10)) porque tienen las mismas variables del MPR. La $t_{6,4}$ (entradas al teatro) y $t_{6,\,4}$ (problema 8) se relaciona con el mismo generador de tipo de tarea, es decir que $t_{6,4}$ (entradas al teatro) ~ Topt($t_{6,\,4}$ (problema 8)) porque tienen las mismas variables del MPR.

La $t_{2,\,1}$ (problema 10) precede a la $t_{7,\,4}$ (problema 1 y 4), por lo tanto, $t_{2,\,1}$ es un ingrediente de la técnica $t_{7,\,4}$ ya que hay una técnica $\tau_{7,\,4,1}$ que desarrolla a $t_{7,\,4}$ por lo que T_{opt}($t_{2,\,1}$) es un ingrediente de dicha la $\tau_{7,\,4,\,1}$. Luego, La $t_{5,\,4}$ (problema 5) precede a la $t_{6,\,4}$ (entradas al teatro), por lo tanto, $t_{5,\,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{6,\,4}$ ya que hay una técnica $\tau_{6,\,4,1}$ que desarrolla a $t_{6,\,4}$ por lo que T_{opt}($t_{5,\,4}$) es un ingrediente de dicha la $\tau_{6,\,4,\,1}$. Asimismo, La $t_{5,\,4}$ (problema 5) precede a la $t_{6,\,4}$ (problema 8), por lo tanto, $t_{5,\,4}$ es un ingrediente de la técnica $t_{6,\,4}$ ya que hay una técnica $\tau_{6,\,4,1}$ que desarrolla a $t_{6,\,4}$ por lo que T_{opt}($t_{5,\,4}$) es un ingrediente de dicha la $\tau_{6,\,4,\,1}$.

La $t_{2,\,1}$ (Situación B) es una especialización de $t_{2,1}$ (situación 9) porque utilizan la misma técnica $\tau_{\text{ceros-2}}$, pero la $t_{2,\,1}$ (problema 9) se tiene que aplicar el teorema de Pitágoras. Además, La $t_{5,\,4}$ (Situación C) es una especialización de $t_{5,4}$ (situación 7) porque utilizan la misma técnica $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$.

A continuación, en la tabla 34, se presenta una recopilación de todas las relaciones existentes entre las tareas asociadas a la función cuadrática, incluidas en la ficha de trabajo correspondientes al cuarto grado de secundaria del año 2020.

Tabla 34

Relación entre las tareas

	$t_{2,1}$	$t_{5,4}$	$t_{6,4}$	$t_{6,7}$	$t_{7,1}$	$t_{7,4}$
$t_{2,1}$	$\sim T_{opt}(t_{2,1})$					$t_{2,1} \rightarrow \tau(t_{7,4})$
$t_{5,4}$		$\sim T_{opt}(t_{5,4})$	$t_{5,4} \rightarrow t_{6,4}$ $t_{5,4} \rightarrow \tau(t_{6,4})$		$t_{5,4} \rightarrow t_{7,1}$ $t_{5,4} \rightarrow \tau(t_{7,1})$	
$t_{6,4}$			$\sim T_{opt}(t_{6,4})$			
$t_{6,7}$				$\sim T_{opt}(t_{6,7})$		
$t_{7,4}$						$\sim T_{opt}(t_{7,4})$

Fuente. Autoría propia

5.3.5 Cuaderno de trabajo de matemática de quinto de secundaria 2020.

En el problema $t_{6,4}$ (problema 2) precede a la $t_{6,4}$ (construcción de canales), esto se debe en la relación de cronología de ejecución de las tareas, asimismo, la $t_{6,4}$ (problema 2) es útil a la la $t_{6,4}$ (construcción de canales) porque $t_{6,4}$ (problema 2) $\in \tau_{6,4,3}$ (construcción de canales), y se representa como $t_{6,4} \rightarrow t_{6,4}$. La $t_{5,6}$ (situación A) precede a las $t_{5,4}$ (problema 9) y $t_{5,4}$ (problema 7), porque el primero se presenta la tabla de tabulación y en los siguientes se debe construir dicha tabla, asimismo, la $t_{6,4}$ (situación A) es útil a la la $t_{6,4}$ (problema 9) porque $t_{6,4}$ (situación A) $\in \tau_{6,4,3}$ (problema 9), y se representa como $t_{6,4} \rightarrow t_{6,4}$. Además, la $t_{6,7}$ (situación B) precede a las $t_{6,7}$ (problema 5) y $t_{6,7}$ (situación B) porque el primero utiliza coeficientes enteros y los otros coeficientes decimales; y, la $t_{6,7}$ (situación B) es útil a la la $t_{6,7}$ (problema 5) porque $t_{6,7}$ (situación A) $\in \tau_{6,7,5}$ (problema 9), y se representa como $t_{6,4} \rightarrow t_{6,4}$. Asimismo, la $t_{6,4}$ (situación 8) precede a las $t_{6,4}$ (problema 10) por la cronología de ejecución de las tareas.

La $t_{6,7}$ (situación C) y $t_{6,7}$ (problema 2) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea (hallar el máximo valor de la función en un lenguaje algebraico), es decir que $t_{6,7}$ (situación C) $\sim T_{opt}(t_{6,7}$ (problema 2)) porque tienen las mismas variables del MPR. Asimismo, La $t_{5,4}$ (situación 7) y $t_{5,4}$ (problema 9) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea (determinar al expresión algebraica de la función en un lenguaje natural), es decir que $t_{5,4}$ (situación 7) ~ $T_{opt}(t_{5,4}$ (problema 9)) porque presenta la mismas variables del MPR. Luego, la $t_{6,4}$ (situación 8) y $t_{6,4}$ (problema 10) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea (hallar el valor máximo en un lenguaje natural), es decir que $t_{6,4}$ (situación 8) ~ $T_{opt}(t_{6,4}$ (problema 10)) porque presenta la mismas variables del MPR. La $t_{6,7}$ (situación B) y $t_{6,7}$ (situación C) están vinculados con el mismo generador de tipo de tarea (hallar el valor máximo en un lenguaje algebraico), es decir que $t_{6,7}$ (situación B) ~ $T_{opt}(t_{6,7}$ (situación C)) porque presenta la mismas variables del MPR.

Por otro lado, $t_{6,7}$ (situación B) es una especialización de $t_{6,7}$ (situación C) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{vertice\text{-}1}$ o $\tau_{vertice\text{-}2}$ (corresponde al alcance institucional de la técnica). Además, la $t_{5,4}$ (problema 7) es una especialización de $t_{5,4}$ (problema 9) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de la técnica $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$. Asimismo, la $t_{6,4}$ (problema 8) es una especialización de $t_{6,4}$ (problema 10) porque utilizan la misma o el respectivo incremento de las técnicas $\tau_{rectángulo\text{-}f.\ general}$ y $\tau_{vértice\text{-}2}$.

En la tabla 35, se presenta una recopilación de todas las relaciones existentes entre las tareas asociadas a la función cuadrática, incluidas en la ficha de trabajo correspondientes al quinto grado de secundaria del año 2020.

Tabla 35

Relación entre las tareas

	$t_{2,1}$	$t_{5,4}$	$t_{6,4}$	$t_{6,7}$
$t_{2,1}$				
$t_{5,4}$		~ $T_{opt}(t_{5,4})$		
$t_{6,4}$			$t_{6,4} \rightarrow t_{6,4}$ ~ $T_{opt}(t_{6,4})$	
$t_{6,7}$				~ $T_{opt}(t_{6,7})$

Fuente. Autoría propia

Propuesta de organización de tareas para tercero de secundaria.

En el análisis praxeológico realizada en el cuaderno de tercero de secundaria, las tareas mencionadas presentan la siguiente secuencia de la función cuadrática $t_{2,1} \rightarrow t_{5,4} \rightarrow t_{5,5} \rightarrow t_{5,6} \rightarrow t_{6,3} \rightarrow t_{6,4} \rightarrow t_{6,7} \rightarrow t_{6,5} \rightarrow t_{7,2} \rightarrow t_{7,3}$. En base a lo mencionado anteriormente se propone agregar nuevas tareas ($t_{3,1}$, $t_{4,2}$, $t_{5,2}$, $t_{4,1}$, $t_{7,4}$), con lo que se genera la siguiente secuencia se formula la propuesta siguiente $t_{2,1} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{4,1} \rightarrow t_{4,2} \rightarrow t_{5,2} \rightarrow t_{5,4} \rightarrow t_{5,5} \rightarrow t_{5,6} \rightarrow t_{6,3} \rightarrow t_{6,4} \rightarrow t_{6,7} \rightarrow t_{6,5} \rightarrow t_{7,4} \rightarrow t_{7,2} \rightarrow t_{7,3}$.

Es necesario para el tratamiento de la función cuadrática seguir con la segunda tarea $t_{3,1}$ (figura 67), puesto que representa una de las principales dificultades del estudiante en la comprensión del dominio y rango. Esto se debe, a que los estudiantes confunden que el rango de la función con los valores de x. Al presentarles la gráfica de la función cuadrática, presentan errores en identificar correctamente el domino y rango (Sánchez et al., 2011). Por último, estos conceptos permiten entender el comportamiento, la regulación y el uso de la función en varios contextos extramatemáticos.

La tarea $\boldsymbol{t}_{4,2}$ no está presente en la praxeología del cuaderno de trabajo. Pero es necesario para nuestra OM, puesto que permite generar la expresión algebraica de la función al utilizar esos tres puntos, asimismo permite la relación entre la forma general y las raíces de la ecuación de segundo grado. Además, el vértice representa el punto medio de los ceros (h=$\frac{x_1+x_2}{2}$) y la relación de simetría de la parábola con respecto a una línea vertical. Según Gutiérrez (2024), a través del análisis de estos elementos permite al estudiante comprender en profundidad la forma como obtiene la expresión de la función cuadrática. Se presenta una actividad de la tarea $\boldsymbol{t}_{4,2}$ con su respectiva técnica.

Una parábola tiene su vértice en el punto V(3,-4) y pasa por los puntos (1,0) y (5,0). Hallar su expresión algebraica.

$\boldsymbol{\tau}_{4,2}$

Paso 1: Reconocer la forma general de la función cuadrática $f(x)=$ax^2+bx+c, a≠0.

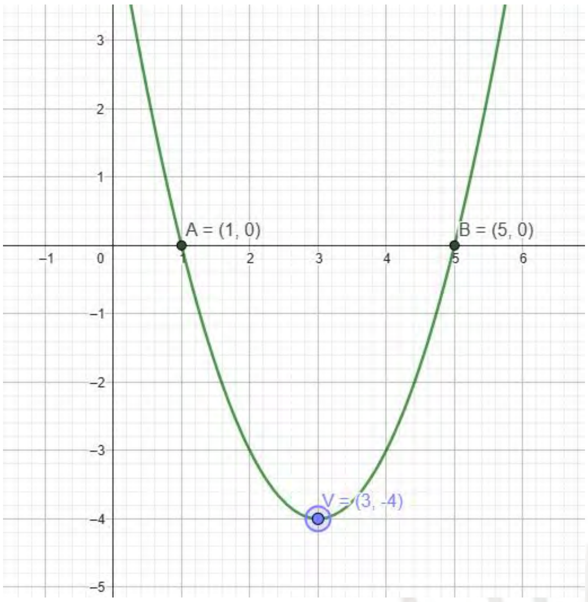
Paso 2: Conociendo el vértice y los ceros de la parábola $f(x)=$ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

La tarea $\boldsymbol{t}_{5,\,2}$ esta implementado en nuestra OM y permite determinar la expresión algebraica de la función por medio de la identificación los puntos presentes en la gráfica de la parábola. Además, estos puntos de la parábola son relevantes como el vértice, raíces, ordenada al origen y un punto particular; puesto que por medio de un sistema de ecuaciones de obtiene los parámetros a, b y c. Además, Díaz et al., (2013) menciona que con la gráfica de la función permite identificar el signo del coeficiente cuadrático de la función y su curva también identifica el termino independiente, así como la interpretación de la gráfica cuando b≠0. Se presenta en la figura 81 la siguiente actividad de la tarea $\boldsymbol{t}_{5,\,2}$ acompañado de su técnica.

Figura 81

Ejemplo de la tarea $\boldsymbol{t}_{5,\,2}$ Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática



Nota. Autoría propia.

$\tau_{5,2}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)$ = ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

La tarea $t_{4,1}$ presenta como dato el vértice y una raíz de una función cuadrática. Y por medio de la utilización de la forma canónica de la función cuadrática se obtener la expresión algebraica de la parábola. Además, el vértice y las raíces son elementos indispensables, puesto que permiten realizar la gráfica de la parábola. Díaz et al., (2013) enfatiza que en la forma canónica $f(x)$=a$(x\text{-}h)^2$+k, el vértice junto con el apoyo de las raíces, facilita al estudiante determinar el signo del parámetro "a" y determinando la orientación de la concavidad de la parábola. A continuación, se presenta la actividad acompañada de su técnica.

Dada la función cuadrática cuyo vértice V(2,-4) y una de las raíces es x=4. Determinar la expresión algebraica de la parábola.

. $\tau_{4,1}$

Paso 1: Reconocer la forma canónica de la función cuadrática $f(x)$=a$(x\text{-}h)^2$+k, a≠0

Paso 2: Sustituir las coordenadas del vértice en $f(x)$=a$(x\text{-}h)^2$+k, a≠0

Paso 3: Posteriormente reemplazar la raíz (x_1,0) en f(x) para obtener el valor de "a".

Paso 4: Convertir $f(x)$ a la expresión algebraica y=ax^2+bx+c

La tarea $t_{7,4}$ tiene que ser la primera actividad en desarrollarse antes que las tareas $t_{7,2}$ y $t_{7,3}$. Por tal motivo se analiza la figura 66 que representa a la tarea $t_{7,4}$. Además, la representación gráfica es indispensable porque permite al estudiante visualizar el comportamiento de la parábola e identificar sus elementos y propiedades. Asimismo, la gráfica permite visualizar los cambios que se pueden aplicar a los parámetros a, b y c de la función, tanto de su estructura como su ubicación. Por último, Díaz et al., (2013) enfatiza la importancia de vincular la representación gráfica con su forma general de la función cuadrática, con el fin de lograr un mejor entendimiento del comportamiento de los parámetros a, b y c; así como el eje de simetría e identificación de los puntos máximos y mínimos.

Propuesta de organización de tareas para cuarto de secundaria.

En el análisis praxeológico de la ficha de trabajo, se presenta la siguiente secuencia de las tareas en relación al tratamiento de la función cuadrática que esta representa de la siguiente forma $t_{6,4} \rightarrow t_{5,4} \rightarrow t_{6,4} \rightarrow t_{7,1} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{7,3} \rightarrow t_{5,4} \rightarrow t_{7,1} \rightarrow t_{6,5} \rightarrow t_{6,7} \rightarrow t_{6,3}$: es decir, el análisis de la función cuadrática comienza con determinar su punto máximo o mínimo. Pero, primero se debe realizar la modelación de dicho problema que esta expresado en un contexto extramatematico y transformarlo a una expresión algebraica adecuada llamada función cuadrática. Según Gaita et al., (2022) estos tipos de tareas de modelización son importantes en la matemática y son un desafía para el estudiante en la transformación de un lenguaje verbal a un lenguaje simbólico. Además, para este tipo de problemas es necesario realizar su representación gráfica, ya que permite una interpretación adecuada del vértice.

Por otro lado, en nuestra propuesta consideramos agregar las siguientes tareas ($t_{3,1}$ y $t_{3,2}$) que se centra en el análisis del domino y rango de la función cuadrática. Además, estos tipos de problemas permiten reforzar el uso de la formula del vértice para analizar el rango de la función, en la cual depende de su concavidad. Seguidamente, se incorpora la tarea ($t_{4,1}$ y $t_{4,2}$) que son actividades que permiten obtener la expresión algebraica de la función cuadrática, utilizando puntos de la parábola (vértice, ceros o (0,c)); con el apoyo de la técnica de sistema de ecuaciones lineales. Posteriormente, se introduce la tarea $t_{5,2}$; en la cual consiste que por medio de la identificación de los puntos de la gráfica (vértice y los ceros) y la utilización del sistema de ecuaciones lineales, se genera la expresión algebraica de la función cuadrática. Según Gómez et al., (2017) enfatiza que se puede identificar la expresión algebraica de la función cuadrática con solo analizar la abertura de la parábola y su respectiva intersección con el eje y.

Luego la tarea $t_{5,6}$ consiste en actividades de un contexto extramatematico, en las cuales, a través de la técnica $\tau_{\text{tabular-forma general}}$, se realiza la modelización a una expresión algebraica de la función cuadrática.

Propuesta de organización de tareas para quinto de secundaria.

Al realizar el análisis praxeológico de la ficha de trabajo de quinto de secundaria, se observó una secuencia del tratamiento de la función cuadrática de las tareas que empieza de la siguiente forma $t_{6,4} \rightarrow t_{7,1} \rightarrow t_{5,6} \rightarrow t_{6,6} \rightarrow t_{2,1} \rightarrow t_{6,7} \rightarrow t_{6,3} \rightarrow t_{4,2} \rightarrow t_{5,4}$. Sobre las tareas ($t_{6,4}$ y $t_{7,1}$) corresponde a las nociones de máximo o mínimo valor que alcanza la función y su respectiva representación gráfica, y sus respectivas técnicas son $\tau_{\text{prisma-f. general}}$, $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{forma general-grafica1}}$. Pero es necesario considerar que debe empezar con las tareas $t_{2,1}$ y $t_{4,2}$ puesto que permiten identificar los puntos relevantes de la parábola y por medio de estos puntos se genera la expresión algebraica de la función, también es necesario añadir y promover la tarea $t_{4,1}$ dado que $t_{2,1} \subset t_{4,1} \subset t_{4,2}$. Además, se puede vincular $t_{2,1}$, $t_{4,2}$ y $t_{4,1}$ con las tareas $t_{5,4}$ y $t_{5,6}$. Asimismo, se añade una nueva tarea $t_{7,5}$ que consiste en graficar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático y en un ostensivo gráfico. Donde permite vincular la variación del área del rectángulo con el tema de la función cuadrática. Por ejemplo, en la figura 82.

Figura 82

Describir y reconocer la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que se movía el punto A.

Nota. Tomada de Villa-Ochoa,2012, p.7

De igual manera, no está presenta la tarea $t_{3,1}$, ya que permite analizar la relación entre los valores que toma “x” en el dominio con los valores que afecta “y” en su imagen; asimismo, respalda el uso correcto de la formula del vértice; la identificación de los puntos de intersección de la parábola con el plano cartesiano y una interpretación adecuada de su gráfica. Y en problemas de contexto extramatematico permite delimitar soluciones idóneas.

La organización de las tareas se propone de la siguiente secuencia $t_{2,1} \rightarrow t_{3,1} \rightarrow t_{4,1} \rightarrow t_{4,2} \rightarrow t_{5,6} \rightarrow t_{5,4} \rightarrow t_{6,3} \rightarrow t_{6,7} \rightarrow t_{6,6} \rightarrow t_{7,1} \rightarrow t_{7,5}$. Inicialmente, la tarea $t_{2,1}$ permite conocer la intersección del eje “Y” con la función en (0,c); y la intersección del eje “X” con la función a través de las raíces de la ecuación cuadrática, en palabras Rivera (2009*)* los puntos de intersección permiten a generar la representación gráfica de la función. La tarea $t_{3,1}$ permite conocer de dominio y rango de una función cuadrática, en este mismo sentido Rivera (2009) menciona que estos conceptos matemáticos se representan por medio de expresiones simbólicas del álgebra. Seguidamente los problemas que conforman $t_{4,1}$ y $t_{4,2}$ permiten generar la representación simbólica de la función cuadrática con la utilización de puntos coordenados específicos de la parábola (vértice y los ceros) a través de la $\tau_{tabular\text{-}formageneral}$. Luego, continuamos con las tareas $t_{5,6}$ y $t_{5,\ 4}$, que consiste en la modelación de contextos extramatematicos a la representación de conceptos matemáticos como es el caso de la función cuadrática; en las palabras de Villa y Ochoa (2009) los problemas que se desarrolla con modelación deben de estar de acorde con la realidad del estudiante. La expresión algebraica de la función se obtiene por medio de un sistema de ecuaciones, para obtener los parametroa a, b y c. A continuación, la $t_{6,\ 3}$ permite en forma directa obtener el punto máximo o mínimo de la función con la aplicación de la formula del vértice o por el método de completar cuadrados. Después, se aplica la $t_{6,7}$ se caracteriza por utilizar en forma directa las técnicas $\tau_{vértice\text{-}2}$ y $\tau_{vértice\text{-}3}$ para obtener el punto máximo o mínimo de la función. Seguidamente, la $t_{6,6}$ en la que primero se tiene que realizar la modelación del contexto extramatematico a una expresión algebraica de la función por medio de la técnica $\tau_{tabular\text{-}forma\ general}$; posteriormente se utiliza la formula del vértice o el método de completar cuadrados para obtener el punto máximo de la función. Se continua con la $t_{7,\ 1}$ en la cual consiste en la modelación del volumen de un prisma a la expresión de la función cuadrática. Según Gaita et al., (2022) en objetivo es relacionar la longitud de la altura de la canaleta con el volumen transformándolo a la forma general de la parábola y su transformación a su representación gráfica. Y por último la $t_{7,\ 5}$ permite inferir el comportamiento de la función cuadrática con solo analizar la variación de los valores de las cantidades, facilitando la comprensión de elementos de la parábola, como el vértice, los puntos de interacción en los ejes, el eje de simetría entre otros.

Propuesta de Jolivet et al., (2021).

Esta investigación se centra en el diseño de ejercicios desde un perspectiva epistémica y didáctica. Para ello, es fundamental identificar las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y definir los ejercicios que contribuyan a superar estas deficiencias en relación a su aprendizaje. Asimismo, para su elaboración, se apoya de teorías del modelado del conocimiento, la complejidad de la tarea y las características particulares de la actividad.

En cuanto a la modelización del saber se centra en el marco de la TAD, y junto con la actividad, se emplea la praxeología. Además, se necesita implantar el MPR que permite la descripción del dominio matemático desde una perspectiva epistemológica, permitiendo la construcción de praxeologías en relación con las instituciones.

La necesidad de aprendizaje de un estudiante se define como el trabajo necesario para transformar su relación personal actual del conocimiento a los estándares de conocimiento esperados de la institución. Estas necesidades son factores que debe trabajar el estudiante, las cuales son: Importancia en la negociación de rupturas epistemológicas, y conseguir la construcción del bloque tecnológico-teórico que permita la resolución de los diferentes tipos de tareas. Las rupturas se encuentran presentes en los dominios matemáticos y se manifiestan a pasar de una institución a otra por medio de la transposición didáctica.

En cuanto al modelo didáctico de la familia de tareas, esta se generada a partir de los conocimientos asociados a la tarea, en acorde con el plan de estudio, las técnicas y tecnologías que permitan realizar la tarea, y su complejidad. Permitiendo, en base a ellos, posicionar las tareas entre sí o identificar tecnologías erróneas. Asimismo, los generadores de tipos de tarea en T4TEL distinguen una agrupación de dos formas de variables: Variables de tipo de tarea, la cual definir una variedad de tipos de tareas en relación a las diferentes tecnologías de OML; y la variable de la tarea, que define el alcance varias técnicas y su respectiva complejidad. Por último, el generador de familia de tarea está constituida; por un verbo de acción, un complemento fijo; variables de tipo de tarea y variables de tarea. Una familia de tareas es una agrupación de tareas en relación a la elección de los valores de las variables y por tanto es el nivel más fino de granularidad con el modelo de conocimiento construido.

T1: Reconocer la representación algebraica de la función cuadrática.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Componentes de la función cuadrática

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Forma de la función $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$

Variable de tarea 1 (Vt_t1): producto de polinomios; $(x, y) \in f$ entonces $f(x) = y$

Variable de tarea 2 (Vt_C1): complejidad de la escritura.

Ft1:{Reconocer una función cuadrática en su forma $f(x)=ax^2+bx+c$; componente: ley de formación; producto de polinomios lineales; complejidad: reescribir aplicando reducción}

$\tau_{1,1}$

Paso 1: Realizar manipulación algebraica para desarrollar el polinomio.

Paso 2: Realizar la comparación para clasificarlo como cuadrático.

Ft2:{Identificar los coeficientes de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; producto de polinomios lineales, complejidad: reescribir aplicando reducción}

$\tau_{1,2}$

Paso 1: Realizar manipulación algebraica para desarrollar el polinomio.

Paso 2: Identifica los valores de los coeficientes

Ft3:{Comprender la relación de pertenencia entre el par ordenado y la función; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; $(x, y) \in f$ entonces $f(x) = y$, complejidad: desarrollar y reemplazar}

$\tau_{1,2}$

Paso 1: Realizar manipulación algebraica para desarrollar el polinomio.

Paso 2: Reemplazar la abscisa del par ordenado en lugar de x.

Paso 3: comparar la ordenada del par ordenado con la imagen de la abscisa x al usar la f(x).

T2: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$T_{2,1}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma $f(x)= ax^2+bx+c$ o $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$; cuyos coordenadas son los ceros y (o,c); y en un contexto intramatematico.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Elementos ceros y (0,c)

Variable de tipo de tarea 3 (TV3): contexto: intramatematico y extramatemático.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): técnica factorización y fórmula cuadrática.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la expresión algebraica.

$Ft_{2,1,1}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; elementos ceros y (0,c);contexto: intramatematico; técnica: factorización; complejidad de la expresión algebraica: no es necesario reducir}

$\tau_{2,1,1}$

Paso 1: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 2: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 3: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

$Ft_{2,1,2}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; elementos ceros y (0,c); contexto: intramatematico; técnica: factorización; complejidad de la expresión algebraica: desarrollo y reducción}

$\tau_{2,1,2}$

Paso 1: Desarrollar y reducir la expresión algebraica

Paso 2: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 3: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 4: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

$Ft_{2,1,3}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; elementos ceros y (0,c); contexto: intramatematico; técnica: formula cuadrática; complejidad de la expresión algebraica: desarrollo y reducción}

$\tau_{2,1,3}$

Paso 1: Desarrollar y reducir la expresión algebraica

Paso 2: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 3: Realizamos en $f(x)$ la fórmula cuadrática $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 4: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

$Ft_{2,1,4}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x) = a\ (x-h)^2 + k$; elementos ceros y (0,c); contexto: intramatematico; técnica: formula cuadrática; complejidad de la expresión algebraica: producto notable y reducir}

$\tau_{2,1,4}$

Paso 1: Aplicar binomio al cuadrado y reducir la expresión algebraica

Paso 2: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 3: Realizamos en $f(x)$ la fórmula cuadrática $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

Paso 4: Se reemplaza en la función x=0 para obtener el término independiente C

$T_{2,2}$: Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma $f(x)= ax^2+bx+c$; cuyos coordenadas son los ceros y (o,c); y en un contexto extramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a\ (x-h)^2 + k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Elementos ceros y (0,c)

Variable de tipo de tarea 3 (TV3): contexto: extramatematico.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): técnica factorización.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad: sistema de ecuaciones y figura geométrica.

$Ft_{2,2,1}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; elementos ceros y (0,c); contexto: extramatemático; técnica: factorización; complejidad: desarrollo de un sistema de ecuaciones}

$\tau_{2,2,1}$:

Paso 1: Identificar los puntos que deben estar representados en el ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Intersección con el eje X, cuando igualamos y=0

Paso 4: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

$Ft_{2,2,2}$: {Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; elementos ceros y (0,c); contexto: extramatemático; técnica: factorización; complejidad: figura geométrica tridimensional}

$\tau_{2,2,2}$:

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico tridimensional.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: el ancho del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma V(x)=ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común $(ax)(bx+c)=abx^2+acx$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 5: Realizamos la factorización $f(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2 que representa los ceros de la función.

T3: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática.

$T_{3,1}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática de la forma $f(x)= ax^2+bx+c$ o $f(x) = a\,(x-h)^2 + k$ en un contexto intramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a\,(x-h)^2 + k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): contexto: intramatematico.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): técnica: Formula del vértice (h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$) y completar cuadrados.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la expresión algebraica

$Ft_{3,1,1}$: {Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; contexto: intramatemático; técnica: formula del vértice; complejidad de la expresión algebraica: no es necesario desarrollar y reducir}

$\tau_{3,1,1}$

Paso 1: Se identifica los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

Paso 3: Dada la función.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 4: El dominio de $f(x)=ax^2+bx+c$ son todos los números reales.

$Ft_{3,1,2}$: {Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; contexto: intramatemático; técnica: formula del vértice; complejidad de la expresión algebraica: desarrollo y reducción}

$\boldsymbol{\tau}_{3,1,1}$

Paso 1: Desarrollo de varios productos de dos factores con la doble distributividad de la multiplicación sobre la suma.

Paso 2: Se identifica los parámetros a, b y c.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

Paso 4: Dada la función.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 5: El dominio de $f(x)=ax^2+bx+c$ son todos los números reales.

$Ft_{3,1,3}$: {Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática; forma: $f(x)=ax^2+bx+c$; contexto: intramatemático; técnica: completar cuadrados; complejidad de la expresión algebraica: desarrollo y reducción}

$\boldsymbol{\tau}_{3,1,3}$

Paso 1: completamos cuadrados a $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde $a\neq 0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2+c$

Paso 2: El dominio de la función cuadrática corresponde a todos los números reales.

Paso 3: dada la función cuadrática $a(x-h)^2+k$.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k;\ +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

$T_{3,2}$: Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ en un contexto extramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)=ax^2+bx+c$ y $f(x)=a(x-h)^2+k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): contexto: extramatematico.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): técnica: Formula del vértice ($h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$) y completar cuadrados.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la expresión algebraica

$Ft_{3,2,1}$: {Hallar el dominio e imagen de la expresión algebraica de la función cuadrática; forma: f(x)=ax^2+bx+c; contexto: extramatemático; técnica: formula del vértice; complejidad de la expresión algebraica: no es necesario desarrollar y reducir}

$\tau_{3,2,1}$:

Paso 1: Identificar los puntos que deben estar representados en el ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x)$ = ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 2: Resolviendo el sistema de ecuaciones para obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 3: Aplicamos para calcular el vértice V(h,k) se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

Paso 4: Dada la función.

a>0, entonces la imagen de la función es $[k; +\infty[$

a<0, entonces la imagen de la función es $]-\infty, k]$

Paso 5: El dominio de f(x)=ax^2+bx+c son todos los números reales.

T4: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática.

$T_{4,1}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general $f(x)= ax^2+bx+c$ o $f(x) = a(x-h)^2 + k$ teniendo como datos al vértice y una raíz

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Puntos: vértice y una raíz.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): sustitución de puntos coordenados.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la escritura

$Ft_{4,1,1}$: {Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general $f(x)= ax^2+bx+c$; puntos: vértice y una raíz; Sustitución de puntos coordenados: vértice en $f(x)$; complejidad de la escritura: desarrollar}

$\tau_{4,1,1}$

Paso 1: Reconocer la forma canónica de la función cuadrática $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 2: Sustituir las coordenadas del vértice en $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 3: Posteriormente reemplazar la raíz (x_1,0) en f(x) para obtener el valor de “a”.

Paso 4: Convertir $f(x)$ a la expresión algebraica y=ax^2+bx+c

$Ft_{4,1,2}$: {Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$; puntos: vértice y una raíz; Sustitución de puntos coordenados: vértice en $f(x)$; complejidad de la escritura: desarrollar}

$\tau_{4,1,2}$

Paso 1: Reconocer la forma canónica de la función cuadrática $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 2: Sustituir las coordenadas del vértice en $f(x)$=a(x-h)^2+k, a≠0

Paso 3: Posteriormente reemplazar la raíz $(x_1,0)$ en f(x) para obtener el valor de "a".

$T_{4,2}$: Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general $f(x)= ax^2+bx+c$ o $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$ teniendo como datos al vértice y ceros.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): Forma de la función: $f(x)= ax^2+bx+c$ y $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Puntos: vértice y ceros.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): sistema de ecuaciones.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la escritura

$Ft_{4,2,1}$: {Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general $f(x)= ax^2+bx+c$; puntos: vértice y ceros; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollar y sustituir}

$\boldsymbol{\tau}_{4,2,1}$

Paso 1: Reconocer la forma general de la función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Paso 2: Conociendo el vértice y los ceros de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$Ft_{4,2,2}$: {Hallar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma canónica $f(x) = a\ (x - h)^2 + k$; puntos: vértice y ceros; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollar y sustituir}

$\boldsymbol{\tau}_{4,2,2}$

Paso 1: Reconocer la forma general de la función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Paso 2: Conociendo el vértice y los ceros de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Completamos cuadrados

$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+c$, donde $a\neq 0$

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2+c$

Paso 5: Se forma la función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2+k$.

T5: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general.

$T_{5,1}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto intramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): contexto: intramatemático

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Organización datos.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): Sistema de ecuaciones.

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Complejidad de la escritura.

$Ft_{5,1,1}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: intramatemático; Organización de los datos: Gráfica de la parábola; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollar y sustituir}

$\tau_{5,1}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$Ft_{5,1,2}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: intramatemático; Organización de los datos: Tabla de valores; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollar y sustituir}

$\tau_{5,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo tabular al ostensivo de lenguaje algebraico por medio de un sistema de ecuaciones.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

$T_{5,2}$: Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general en un contexto extramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): contexto: extramatemático

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): forma de la función.

Variable de tipo de tarea 3 (TV3): Organización datos.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): Registro de representación y sistema de ecuaciones

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Presentación del objeto geométrico y complejidad de la escritura

$Ft_{5,2,1}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: extramatematico; forma: $f(x) = ax^2+bx+c$; organización de los datos: lenguaje escrito; registro de representación: rectángulo; Presentación del objeto geométrico: Propiedad del área de un rectángulo}

$\tau_{5,2,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico (rectángulo).

Paso 2: Dibujar un rectángulo asignándoles “x” e “y” a la medida de sus lados.

Paso 3: Expresar el perímetro de rectángulo como la ecuación 2x+y=2p

Paso 4: Expresar la medida de “y” en función de “x”.

Paso 5: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x e y.

Variable independiente: Ancho del terreno (x)
Variable dependiente: Área del terreno $A(x)$ =x.y

Paso 6: Sustituir la medida de “y” en la expresión algebraica del área del rectángulo.

$Ft_{5,2,2}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: extramatematico; forma: $f(x) = ax^2+bx+c$; organización de los datos: lenguaje escrito; registro de representación: variación de los lados de un rectángulo; presentación del objeto geométrico: Propiedad del área de un rectángulo}

$\tau_{5,2,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico

Paso 2: Dibujar un rectángulo disminuyendo “x” a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x.

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

$Ft_{5,2,3}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: extramatematico; forma: $f(x) = ax^2+bx+c$; organización de los datos: lenguaje escrito a tabular; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\tau_{5,2,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de $f(x)$ como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(ax+b)(cx+d)=(acx)^2+(ad+bc)x+bd$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

$Ft_{5,2,4}$: {Determinar la expresión algebraica de la función cuadrática en su forma general; contexto: extramatematico; forma: $f(x) = ax^2+bx+c$; organización de los datos: gráfica de la parábola; sistema de ecuaciones: 3x3; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\tau_{5,2,4}$

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

T6: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática ($f(x) =$ ax^2+bx+c)

$T_{6,1}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto intramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): contexto: intramatemático

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Punto de la parábola

Variable de tipo de tarea 3 (TV3): Organización de los datos.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): Registro de representación y sistema de ecuaciones

Variable de tarea 2 (Vt_P2): Técnica

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Presentación del objeto geométrico y complejidad de la escritura

$Ft_{6,1,1}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: intramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: expresión algebraica; técnica: completar cuadrados; complejidad de la escritura: no se requiere}

$\boldsymbol{\tau}_{6,\,1,1}$:

Paso 1: Completamos cuadrados

$f(x)$=$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2\right]+$ c, donde a$\neq 0$

$f(x)$=a$\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2-\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$+c

Paso 2: Se obtiene el vértice V($-\frac{b}{2a}$; $\frac{-b^2+4ac}{4a}$)

Paso 3: Se forma la función cuadrática $f(x)$ =a$(x-h)^2$+k.

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$Ft_{6,1,2}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: intramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: tabla de valores; sistema de ecuaciones: 3x3; técnica; formula del vértice; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\boldsymbol{\tau}_{6,\,1,2}$:

Paso 1: Identificar los puntos del lenguaje natural y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) =$ ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Aplicamos para calcular el vértice $V(h,k)$ se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=$\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 5: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$Ft_{6,1,3}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: intramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: gráfica de la parábola; sistema de ecuaciones: 3x3; técnica; formula del vértice; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\boldsymbol{\tau}_{6,1,3}$:

Paso 1: Identificar los puntos del ostensivo gráfico y representarlo al ostensivo tabular.

Paso 2: Conociendo tres puntos de la parábola $f(x) =$ ax^2+bx+c se forma tres ecuaciones con tres incógnitas.

Paso 3: Resolviendo el sistema se obtiene los parámetros a, b y c.

Paso 4: Calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

$Ft_{6,1,4}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: intramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: lenguaje natural o escrito; sistema de ecuaciones: 3x3; técnica; formula del vértice; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\boldsymbol{\tau}_{6,1,4}$:

Paso 1: identificamos los valores de los parámetros a, b y c.

Paso 2: Aplicamos para calcular el vértice $V(h,k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

Paso 3: Se analiza el coeficiente cuadrático de la función cuadrática.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

$T_{6,2}$: Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática en un contexto extramatemático.

Variable de tipo de tarea 1 (TV1): contexto: extramatemático

Variable de tipo de tarea 2 (TV2): Punto de la parábola

Variable de tipo de tarea 3 (TV3): Organización de los datos.

Variable de tarea 1 (Vt_P1): Registro de representación y sistema de ecuaciones

Variable de tarea 2 (Vt_P2): Técnica

Variable de tarea 2 (Vt_C1): Presentación del objeto geométrico y complejidad de la escritura

$Ft_{6,2,1}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: extramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: lenguaje natural o escrito; registro de representación: producto de dos funciones lineales; técnica: formula del vértice; complejidad de la escritura: desarrollo y reducción}

$\tau_{6,2,1}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo tabular.

Paso 2: Determinamos la ley de formación de f(x) en relación de la variable independiente como el producto de dos expresiones algebraicas lineales.

Paso 3: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática

Paso 4: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 5: Se calcular el vértice $V(h\,;k)$ utilizando $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

$Ft_{6,2,2}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: extramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: lenguaje natural o escrito; registro de representación: rectángulo; técnica: formula del vértice; presentación del objeto geométrico: propiedad del área de un rectángulo}

$\tau_{6,2,2}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar un rectángulo aumentándole x a cada uno de sus lados.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del área del rectángulo en función de x

Variable independiente: el incremento de los lados del terreno (x)

Variable dependiente: Área del terreno $A(x)=(x+a)(x+b)$

Paso 4: Resolver el producto de dos binomios que tienen un término común $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza $h=-\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$

$Ft_{6,2,3}$: {Hallar el máximo o mínimo valor que alcanza la función cuadrática; contexto: extramatemático; punto de la parábola: Vértice; organización de los datos: lenguaje natural o escrito; registro de representación: prisma rectangular; técnica: formula del vértice; presentación del objeto geométrico: propiedades del volumen del prisma}

$\tau_{6,\ 2,3}$

Paso 1: Convertir del ostensivo de lenguaje natural al ostensivo gráfico.

Paso 2: Dibujar el prisma rectangular y se relaciona con los datos.

Paso 3: Escribir la expresión algebraica del volumen del prisma en función de x

Variable independiente: Altura del prisma es x

Variable dependiente: Volumen del prisma $V(x)$ =ax(bx+c)

Paso 4: Resolver el producto de un monomio con un binomio que tienen un término común (x)(x+b)=x^2+bx para generar la expresión algebraica de la función cuadrática.

Paso 5: Se analiza si la función cuadrática es cóncava o convexa.

Si a>0, la función cuadrática se abre hacia arriba (convexa).

Si a<0, la función cuadrática se abre hacia abajo (cóncava).

Paso 6: Aplicamos para calcular el vértice $V(h\,;k)$ se utiliza h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$)

A continuación, se especifica las conclusiones de los resultados obtenidos:

Con respecto a la estructura y relación de tareas se realizan las siguientes observaciones: En primer lugar, en la ficha de cuarto año de secundaria, se identifica que $t_{2,1}$ es un ingrediente de $t_{7,\ 1}$ y $t_{7,\ 3}$. Asimismo, $t_{5,\ 4}$ se reconoce como un tipo de tarea optimo; además, esta se encuentra presente como ingrediente de $t_{6,\ 4}$, $t_{7,\ 1}$ y $t_{7,\ 3}$. También, se observa que $t_{6,\ 4}$ es ingrediente de $t_{7,\ 1}$. En segundo lugar, en la ficha de quinto año de secundaria, se reconoce $t_{2,1}$ es ingrediente de $t_{5,\ 6}$, como $t_{4,\ 1}$ de $t_{5,\ 4}$ y $t_{5,\ 6}$. Por otro lado, $t_{5,\ 6}$ es útil a $t_{6,\ 6}$ así como $t_{5,\ 4}$ y $t_{5,\ 6}$ son tipos de tareas óptimos. En tercer lugar, cuaderno de tercer año de secundaria, $t_{2,1}$ es útil $t_{7,3}$ como también ingrediente de $t_{7,3}$. Asimismo, $t_{6,4}$ es útil e ingrediente de $t_{7,3}$ de la misma forma $t_{6,7}$ de $t_{7,3}$. En cuarto lugar, en el cuaderno de cuarto de secundaria, $t_{5,4}$ es útil e ingrediente de $t_{6,4}$ y $t_{7,1}$. Asimismo, $t_{2,1}$, $t_{5,4}$, $t_{6,4}$ y $t_{6,7}$ son considerados tipos de tareas óptimos. Por último, en el cuaderno de quinto año de secundaria, $t_{6,4}$ (problema 2) es útil a (construcción de canales). Asimismo, $t_{5,4}$; $t_{6,4}$ y $t_{6,7}$ son tipos de tareas óptimos.

Por otra parte, con el apoyo de MPR de las funciones cuadráticas desarrollas por nuestra investigación, así como los generadores de tareas y las variables de tareas, se construye una secuencia ordenada de ejercicios centrados en este objeto matemático, ajustado a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. Además, se diseñaron 28 familia de tareas de la función cuadrática, clasificados según los tipos de tareas y su nivel de complejidad; y acompañadas cada uno de ellas de su respectiva técnica. Entre las variables de tareas se considera el contexto, los puntos coordenados, organización de los datos y forma de la parábola. Asimismo, en las variables de la tarea se asignaron sistema de ecuaciones, según la técnica, uso de figuras geométrica y complejidad de la expresión verbal. Como lo señala, Jolivet et al., (2021) especifica que al asignar valores a los tipos de tareas determina una variedad de tipos de tarea con la combinación de las tecnologías en OML; además las variables de tareas permiten precisar la efectividad de la técnica y determinar la complejidad de la tarea.

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII

Conclusiones

Al culminar nuestro trabajo de investigación, presentamos a continuación las siguientes conclusiones:

En lo concerniente a nuestro objetivo principal, ‘‘Analizar la organización matemática de la función cuadrática en las fichas de matemática del ciclo VII en la Educación Secundaria”, podemos considerar que dicho objetivo se ha alcanzado mediante el desarrollo de tres objetivos específicos.

En relación al primer objetivo específico: Realizar un estudio epistemológico de la función cuadrática. Se reviso un rastreo histórico de la función cuadrática y su comportamiento en los programas curriculares. Donde se observó que nuestro objeto matemático de estudio tomaba protagonismo en cada periodo en que se modificaba el currículo nacional. En el DCN 2005, el estudio de la función cuadrática comenzó en 4 grado de secundaria como un subtema de funciones y progresiones. En el DCN 2009, inicia solo en 3 grado de secundaria, donde los estudiantes deben tener la capacidad de realizar modelaciones de la función cuadrática relacionando los problemas con el mundo real. Por último, en el DCN 2016 se observa la presencia de la función cuadrática de 3 a 5 grado de secundaria, ubicándose en la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Al utilizar los generadores de un tipo de tarea GT, se identificó los subtipos de tareas con su respectiva variable didáctica V_I permitiendo identificar lo específico de lo general. Lo que facilito en cumplir con el segundo objetivo específico “Describir los elementos praxeológicos de la función cuadrática en la Educación Secundaria”. Además, en 3° de secundaria se identificaron 4 tipos de tareas, 10 tareas y 13 técnicas; en 4° de secundaria se reconoció 5 tipos de tareas, 8 tareas y 15 técnicas; y 5° de secundaria se encontró 5 tipos de tareas, 9 tareas y 13 técnicas. En 4° grado, se presentan una variedad de tareas de un contexto real en un ostensivo de lenguaje natural, a diferencia de su grado anterior; sin embargo, en cuanto a las técnicas no presentan una evolución de manera significativa. En 5° de secundaria tareas $\boldsymbol{t}_{5,\ 4}$ y $\boldsymbol{t}_{6,\ 4}$ evolucionaron al utilizar contextos intra y extramatemáticos diferentes a los grados anteriores, asimismo, la variedad de técnicas empleadas se apoyó en el método de completar cuadrados, lo cual permitió generar las coordenadas del vértice mediante la h$=-\frac{b}{2a}$ y k=f($-\frac{b}{2a}$). Por otro lado, las técnicas $\tau_{\text{rectángulo-f. general}}$ y $\tau_{\text{vértice-1}}$ permite realizar la modelación de la función cuadrática en contextos relacionados con áreas rectangulares, así como el cálculo del vértice para las tareas $t_{6,\ 4}$; siendo las técnicas más representativas en relación con dicha tarea; lo que evidencia a estar dentro del alcance institucional y pragmático de la técnica. Asimismo, las técnicas $\tau_{\text{vértice-1-}}$ $\tau_{\text{forma general-grafica2}}$ tienen como finalidad obtener las coordenadas del vértice seguidamente generar la gráfica de la función por medio del registro tabular para las tareas de $t_{6,\ 7}$; a estas técnicas se encuentran dentro del alcance tanto institucional como pragmático. Por su parte, para los tipos de tareas $t_{2,1}$ la técnica $\tau_{\text{ceros-}\mathbf{2}}$ que permite obtener los ceros de la función cuadrática, se enmarca igualmente dentro de ambos alcances tanto institucional como pragmático.

Respecto al tercer objetivo específico, que consiste en reconstruir un modelo praxeológico de referencia asociado a la función cuadrática, en la que estuvo conformado por 7 tipos de tareas, 14 tareas y 16 técnicas. Asimismo, con respecto a la tecnología, se aplicaron el método de completar cuadrados, las propiedades de los números reales, así como las propiedades de área y volumen de figuras geométricas. Su elaboración se apoyó en los elementos teóricos de la TAD de Chevallard (1999) y los modelos praxeológicos propuestos por Chaachoua (2018), los cuales contribuyeron de manera relevante en la construcción del MPR. Asimismo, la definición de generador de tipos de tarea y sistema de variables permitieron reconocer diferentes tipos y subtipos de tareas; así como la relación de técnicas tanto en su alcance institucional como pragmático. Por otro lado, la elaboración del MPR de la función cuadrática fue significativo, ya que con los tipos de tareas y sus respectivas técnicas se permitió realizar el análisis de organización matemática (OM) en las fichas y cuadernos de trabajos de matemática del ciclo VII del nivel secundaria.

Finalmente, con nuestra investigación damos sugerencias para futuros trabajos las cuales son las siguientes: Entre ellas, destacamos la realización de un estudio centrado en el análisis de las praxeologías personales relacionadas con la función cuadrática en estudiantes de secundaria; lo que significa que se investiga la modelación y descripción del saber del sujeto relacionadas a este objeto matemático. Según, Croset y Chaachoua (2016) las praxeologías personales consisten en que un sujeto institucional realiza una organiza praxeológica de un cuatrillizo de la actividad en la cual está compuesta por cuatro componentes: el tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría. Por otro lado, las praxeologías personales solo coinciden ocasionalmente con las praxeologías institucionales. También, se sugiere realizar investigaciones sobre la formación de profesores, especialmente en el ámbito de la capacitación en el conocimiento de praxeologías vinculadas a la función cuadrática, permitiendo encontrar las relaciones entre los tipos de tareas y las limitaciones que presenta cada técnica.

Referencias

Almouloud, *S. (2015).* Teoria Antropológica do Didáctico: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42*, 09-34.

Ansaldo-Leyva, J. C., Cuevas-Salazar, O., & Encinas-Pablo, F. (2018). Desarrollo de una secuencia didáctica del tema funciones cuadráticas en alumnos universitarios Development of a didactic sequence of the topic quadratic functions in university students. Universitaria, 12. https://www.ecorfan.org/republicofperu/research_journals/Revista_de_Gestion_Universitaria/vol2num6/Revista_de_Gesti%C3%B3n_Universitaria_V2_N6_2.pdf

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2016). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities.* Routledge

Asenova, M., Bagossi, S., & Arzarello, F. (2023). Una definizione categoriale di covariazione al secondo ordine. Aspetti epistemologici e didattici. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, *13*(2), 11-32.

Azizah, N. N., Susiswo, S., y Sisworo, S. (2021). Analytical Thinking Process Of Students In Solving Mathematical Problems Of Quadratic Functions. AKSIOMA: *Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, 10*(1), 328-338. Recuperado el 12 de abril de 2024, de https://ojs.fkip.ummetro.ac.id/index.php/matematika/article/view/3440

Bagossi, S. (2021). Toward second-order covariation: Comparing two case studies on the modelling of a physical phenomenon. AERA Online Paper Repository.

Bagossi, S. (2022). *Second-order covariation: an analysis of students' reasonings and teacher's interventions when modelling real phenomena.* Unpublished Ph. D. Thesis.

Bagossi, S. (2024). Engaging in covariational reasoning when modelling a real phenomenon: the case of the psychrometric chart. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, *17*(2), 199-220

Belin, E., Karagöz, G., & Işıl İşler, I. (2024). Mathematics teachers' correspondence and covariation approaches to quadratic functions in relation to their covariational reasoning. *Boğaziçi University, Faculty of Education, İstanbul, Türkiye*

Bittar, M. (2021). Overview of Research on Textbooks in Brazilian Compulsory Education. Extended Abstracts Spring 2019: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic, 133-140. Recuperado el 01 de abril de 2024, de https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-76413-5_15

Bosch y Gascón (2004). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Balises pour la didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los" elementos de representación" en la actividad matemática. Recuperado el 10 de mayo de 2024, de *https://www.researchgate.net/publication/28232057_Un_punto_de_vista_antropologico_la_evolucion_de_los_elementos_de_representacion_en_la_actividad_matematica*

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Higueras, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. Educación matemática, 18(2), 37-74. Recuperado el 15 de mayo de 2024, de https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507003.pdf

Cantoral, R. (2001). Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamérica. https://www.researchgate.net/profile/Ricardo-Cantoral/publication/261363640_Matematica_Educativa_Un_estudio_de_la_formacion_social_de_la_analiticidad/links/559d56ec08ae76bed0bb3359/Matematica-Educativa-Un-estudio-de-la-formacion-social-de-la-analiticidad.pdf

Carabalí J. (2019). *Una propuesta multirregistro para la comprensión de la noción del máximo o mínimo valor del rango de una función cuadrática en estudiantes de grado once.* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia). https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75668

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima: Perú)

Castela, C. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de la educación. Acta Herediana, (59), 8-15. Recuperado el 29 de junio de 2024, de https://www.researchgate.net/publication/325132822

Centeno R. (2019). Análisis de la organización didáctica y matemática de la función cuadrática en el sistema curricular peruano de Educación Secundaria 2017.

Chaachoua, H. (2014). Le role de l'analyse des manuels dans la theorie anthropologique du didactique. Recuperado el 25 de junio de 2025, de https://hal.science/hal-01519339/

Chaachoua, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In Séminaire national de didactique des mathématiques (pp. https-ardm). Recuperado el 25 de junio de 2024, de https://www.researchgate.net/publication/338449916_T4TEL_un_cadre_de_reference_didactique_pour_la_conception_des_EIAH

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L’analyse du rôle des manuels dans l’approche anthropologique. Apports de la théorie anthropologique, Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils et connaissances d’action, 771-790. Recuperado el 25 de junio de 2024, de https://www.researchgate.net/publication/281328986_L'analyse_des_manuels_dans_l'approche_anthropologique

Chaves, A. P. (2016). Função Quadrática: análise em termos de contextos, de organizações matemáticas e didáticas propostas em Livros Didáticos de Ensino Médio. Recuperado el 15 de mayo de 2024, de https://tede2.pucsp.br/handle/handle/19517

Chaves, A., & Almouloud, S. (2016) OS CONTEXTOS EM QUE A FUNÇÃO QUADRÁTICA SE APRESENTA NAS ABORDAGENS DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO: UMA AMOSTRA DA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA.

Chevallard, Y. (2019). On using the ATD: Some clarifications and comments. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa De Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21(4). Recuperado el 20 de junio de 2024, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/42536/pdf_1

Chevallard, Y.(1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Methématiques.* 19(29,221-226). Recuperado el 20 de abril de 2024, de https://www.researchgate.net/profile/Yves-Chevallard/publication/237274102_El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_lo_didactico1/links/553c96b40cf29b5ee4b89cec/El-analisis-de-las-practicas-docentes-en-la-teoria-antropologica-de-lo-didactico1.pdf

da *Silva, A. A., Avila, A., dos Santos Júnior, V. B., & Dias, M. A. (2024). ECOLOGIA SOBRE A SOBREVIVÊNCIA DAS PRAXEOLOGIAS USUAIS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA AO ENSINO SUPERIOR DE 2005 À 2021.* VIDYA*,* 44*(1), 59-78. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4542/3229*

Dávila Rocca, J. A. (2021). Análisis de organizaciones matemáticas del Método Singapur para la *resolución* de problemas aritméticos. *(Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú).* Recuperado el 12 de mayo de 2024, *de* https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/19817/D%c3%81VILA_ROCCA_JORGE_ARMANDO%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y

De Souza, G. M. B., de Ribamar Silva, J., & Nunes, J. M. V. (2024). Modelo praxeológico alternativo para a identificação de números primos. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 26(1), 008-058. Recuperado el 16 de abril de 2024, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/61931/44613

Díaz Quezada, V., y Flores del Río, G. (2022). Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. Estudios pedagógicos

(Valdivia), *48*(2), 9-34. Recuperado el 20 de mayo de 2024, de https://www.scielo.cl/pdf/estped/v48n2/0718-0705-estped-48-02-9.pdf

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión-revista iberoamericana de educación matemática*, *11*(41). Recuperado el 17 de abril de 2024, de https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/644/379

Fan, L., Zhu, Y., y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: *Development status and directions*. ZDM, 45(5), 633–646. Recuperado el 20 de abril de 2024, de https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Fatahillah, A., Puspitasari, I. D., y Hussen, S. (2020). The development of Schoology web-based learning media with GeoGebra to improve the ICT literacy on quadratic functions. JRAMathEdu *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *5*(3), 304-316. Recuperado el 12 de abril de 2024, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1281142.pdf

Félix, L. (2009). *Análisis del parámetro como variable en la transformación de funciones: un estudio con alumnos universitario*s. Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional, México.

Fonseca Bon, C., Gascón Pérez, J., & Oliveira Lucas, C. (2007). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. Relime [online]. 2014, vol. 17, n. 3. ISSN, 6819, 289-318. Recuperado el 20 de mayo de 2024, de https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n3/v17n3a3.pdf

Gaita, C., Gonzales Hernández, C., Ugarte Guerra, F. J., & Wilhelmi, M. R. (2022). Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio: desarrollo didáctico de la competencia.

Gaita, C., Huanqui, J., Wilhelmi, M., & Lasa, A. (2009). Estudio de significados institucionales de la función en textos oficiales de secundaria. In Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación, XIII Simposio de la SEIEM (pp. 1-15). Recuperado el 16 de junio de 2024, de https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Gaita_Huanqui_Wilhelmi_Lasa_R.pdf

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.

García, F. J., & Sierra, T. A. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. Recuperado el 11 de junio de 2024, de *https://funes.uniandes.edu.co/funes-*

documentos/modelos-epistemologicos-de-referencia-en-el-analisis-de-la-actividad-matematica-en-libros-de-texto-el-caso-del-numero-en-la-escuela-infantil/

Genicio, M., Lazarte, G., Porcinito, S., & Hernández, C. (2005). Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* https://core.ac.uk/download/pdf/33252413.pdf

Gil, A. (2002). Cómo elaborar proyectos de pesquisa. 4°. Ed. Sao Paulo: Atlas S/A. Recuperado 11 de junio de 2024, de https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C1_como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf

Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. International journal of mathematical education in science and technology, 49(7), 1003-1024.recuperado 12 de junio del 2024, de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2018.1431849

Gómez, A. (2018). *Análisis de una praxeología matemática de las inecuaciones lineales en libros didácticos de educación secundaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú).

Gonzales, P. (1897). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Historia de la matemática para la enseñanza secundaria estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática, los elementos de Euclides, el método de Arquímedes, la geometría de Descartes. Preface to Method T. L Heath, The Works of Archimedes. Cambridge University Press.

Gutierrez, C. R. (2024). Análisis de los coeficientes de la función cuadrática desde una mirada experimental. Recuperado el 16 de enero de 2025, de https://www.researchgate.net/publication/378243858_Analisis_de_la_madurez_matematica_en_una_actividad_de_la_funcion_cuadratica_Analysis_of_mathematical_maturity_in_a_quadratic_function_activity

Gyedu, A. A., Owusu-Darko, I., y Ofosu, E. K. (2020). Effect of Geometer's Sketchpad on Senior High School Students' Performance in Quadratic Graphing. *European Journal of Education and Pedagogy*, *1*(1).

Henao, S. M., & Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos. Recuperado el 5 de julio de 2024 , de https://www.researchgate.net/publication/341741377_LA_MODELACION_MATEMATICA_EN_LA_EDUCACION_MATEMATICA_REALISTA_UN_EJEMPLO_A_TRAVES_DE_LA_PRODUCCION_Y_USO_DE_MODELOS_CUADRATICOS

Hurtado, A. y Zúñiga, F *. (2011). La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica.* (Universidad del Valle, Facultad de Educación Matemática. Santiago de Cali: Colombia).

Isfan, I., Rahim, U., y Jazuli, L. O. A. (2019). Analisis Kesalahan dalam Menyelesaikan Soal-Soal Fungsi Kuadrat pada Siswa Kelas X-3 SMA Negeri 1 Asera. *Revista Penelitian Pendidikan Matematika*, 6(1), 43-56.

Jolivet, S., Chaachoua, H., & Desmoulins, C. (2022). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *42*(1), 53-102.

Jolivet, S., Lesnes-Cuisiniez, E., & Grugeon-Allys, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie: prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. (26), 117-156.*

Kaspary, D. (2020). *La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum: étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires sur l'étude du champ additif à l'école primaire.* (Doctoral dissertation, Université Grenoble Alpes, Universidade federal de Mato Grosso do Sul).

Kaspary, D., Chaachoua, H., & Bessot, A. (2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique?. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques, (25), 243-269. Recuperado el 25 de junio de 2024, de https://journals.openedition.org/adsc/573

Llanos, V. C., y Otero, M. R (2022). Textualization and Educational Reforms: analysis of a praxeology in the last eighty years. Recuperado el 10 de junio de 2024, de *https://www.researchgate.net/publication/361218390_Textualization_and_Educational_Reforms_analysis_of_a_praxeology_in_the_last_eighty_years_Textualization_and_Educational_Reforms_analysis_of_a_praxeology_in_the_last_eighty_years*

Marconi, M. y Lakatos, E. (2003). Fundamentos de metodología científica. São Paulo: atlas. Recuperado el 10 de junio de 2024, de https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india/view

Menacho, R. (2020). El saber a enseñar de la proporcionalidad vista en una colección de cuadernos de trabajo de primaria. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú)

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *22*, 1315-1323.

Ministerio de Educación (2016). Educación básica regular programa curricular de educación secundaria. Recuperado el 30 de mayo de 2024, de https://bit.ly/3tiu1hL

Mutambara, L. H. N., Tendere, J., y Chagwiza, C. J. (2019). Exploring the conceptual understanding of the quadratic function concept in teachers' colleges in Zimbabwe. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2).

Najarro, L. (2018). *Característica del modelo epistemológico dominante de la proporcionalidad en los textos de matemática de educación superior.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú)

Neira, P., & Rodrich, H. (2008). Cambios curriculares en la secundaria 1996-2006: opiniones de ex funcionarios y docentes de escuelas públicas. Recuperado el 26 de mayo de 2024, de *https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/1720*

Núñez, E., & Paredes, C. (2017). Comprensión de las propiedades de la función cuadrática mediada por los registros algebraico y gráfico. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática,* *6*(1). *https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/32567/22503*

Organización del Bachillerato Internacional (2012). Matemática Nivel Superior. Cardiff.Suiza.

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad. Recuperado el 17 de abril de 2024,de https://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf

Ozaltun Celik, A., y Bukova Guzel, E. (2017). Revealing Ozgur's Thoughts of a Quadratic Function with a Clinical Interview: Concepts and Their Underlying Reasons. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 122-134.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational studies in Mathematics*, *67*, 37-58.

Perovano, A. P., Guimarães, D. R., y Litoldo, B. F. (2022). Análise do livro didático de matemática no Third International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development: perspectivas e possibilidades de pesquisa. Alexandria: *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 15(2), 237-261.* Recuperado el 18 de mayo de 2024, de *https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/84262/51846*

PosgradoMatEdu (*21 sept 2023*). Estado de la investigación de libros de texto de matemáticas. *[Archivo de video]. Youtube.* Recuperado el 15 de mayo de 2024, de *https://www.youtube.com/watch?v=WULUqPkD0hA&ab_channel=PosgradoMatEdu*

Quentasi, E. (2015). Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Facultad de Educación. Lima: Perú).

Quijano, M. D. L. T., & Corica, A. R. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. Recuperado el 3 de junio de 2024, de *https://ri.conicet.gov.ar/bitstream/handle/11336/112226/CONICET_Digital_Nro.9545a7ed-9d7a-44c0-adc6-dbc6744a5a2a_A.pdf?sequence=2&isAllowed=y*

Rivera Pavón, J. E. (2009). Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la Escuela Normal Mixta. Recuperado el 17 de enero de 2025, de https://www.cervantesvirtual.com/obra/interpretacion-de-significados-de-la-funcion-cuadratica-en-un-ambiente-computacional-desarrollada-por-estudiantes-de-ii-de-bachillerato-de-la-escuela-normal-mixta-pedro-nufio/

Rodríguez, M., León, H., Alcázar, Z., & Velasco, A. (2013). Rutas del aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes? Tiraje, 58, 1-51. Recuperado el 10 de mayo de 2024, de https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/3739

Salazar, J. V. F., & Gaita, R. C. (2015). Educación Matemática en el Perú: avances y perspectivas. La Educación Matemática en el siglo XXI, 257-276.

San Román, V. (2021). Modelo Praxeológico de Referencia en torno al modelado de la realidad cuando interviene el azar. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *16*(2), 6-8.

Sánchez, E., Cantú, A., & Domínguez A (2011). concepciones de los estudiantes sobre dominio y rango de una función. Recuperado el 15 de enero 2025, de https://www.researchgate.net/publication/272025583_Concepciones_de_los_estudiantes_sobre_dominio_y_rango_de_una_funcion

Santos, J. B. (2017). O conceito de função quadrática nos livros didáticos do ensino médio: uma análise praxeológica das atividades propostas (Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco). Recuperado el 18 de mayo de 2024, de https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32256

Santos, J. M., & de Mélo Espíndola, E. B. (2021). Função Quadrática e área máxima de retângulo em livros didáticos do Ensino Médio. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, 8(23), 390-404. Recuperado el 11 de setiembre de 2024, de *https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5002/4355*

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis Doctoral, Universitat Ramón Llull).

Silva, H. L. D. (2019). Função quadrática: investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (ed.). La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 125-154). Recuperado el 10 de enero de 2025, de https://es.scribd.com/document/585583973/Dificultades-obstaculos-y-errores-Socas-1997

Solis, D., y Isoda, M. (2022). Comparing elementary school textbooks of China, Japan, and Malaysia: a praxeological and developmental progression analysis regarding length measurement. *Research in Mathematics Education*, 1-20.

Souza, M., y Santos F., D. (2023). A formalização do conceito de Funções Definidas por Mais de uma Sentença nos livros didáticos de Matemática*. Revista Internacional de Pesquisa em Educacao Matematica.*

Stewart, J., Redlin , L., & Watson, S. (2012). Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. México: Cengage Learning. Recuperado el 10 de mayo de 2024, de https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/k6L8A3_precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf

Vivas, D. R. (2010). La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina. *Tiempo de Gestión*, *6*(10), 163-180.

Wijayanti, D., & Winslow, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT*, *6*(3), 307-330.