

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Escuela de Posgrado



El problema de bancarrota

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en  
Matemáticas Aplicadas con mención en Aplicaciones a la  
Economía que presenta:

**Josep Antenor Huaman Alfaro**

Asesor:

**Dr. Jose Braulio Calagua Mendoza**

Lima, 2024


## Informe de Similitud

Yo, Jose Braulio Calagua Mendoza, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor de la tesis titulada "El Problema de Bancarrota", del autor Josep Antenor Huaman Alfaro, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 13%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 11/12/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha:

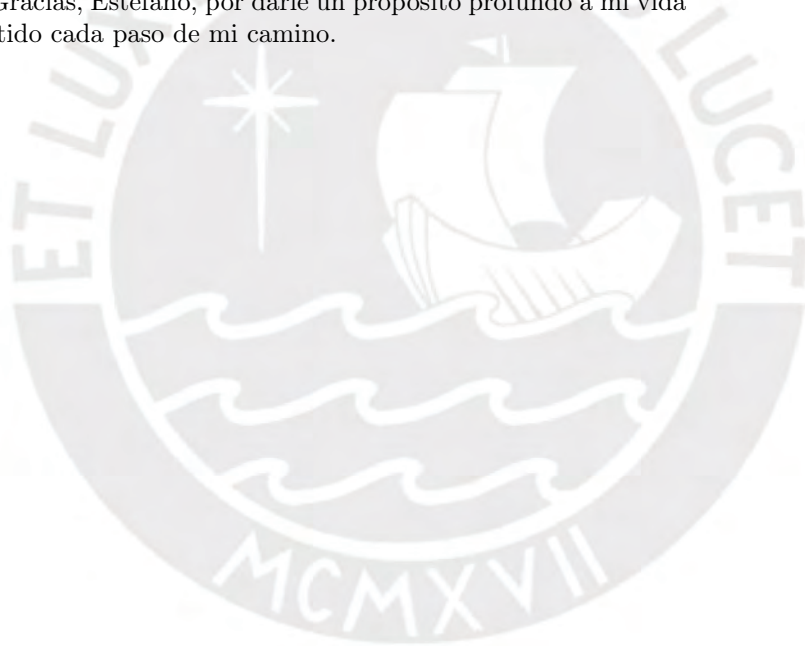
Lima, 12 de Diciembre de 2024.

|   |   |
|---|---|
| Apellidos y nombres del asesor:<br><u>Calagua Mendoza, Jose Braulio</u> |   |
| DNI: 41296105   | Firma<br> |
| ORCID: 0000-0002-6668-2919  |   |

# Dedicatoria

A mi querida familia, pilar de amor y fortaleza en cada paso de este camino. Gracias por su apoyo incondicional y por enseñarme a nunca rendirme. Este logro es tan suyo como mío.

A mi querido hijo Estefano, quien llegó a mi vida como un rayo de luz, llenándome de razones para seguir adelante y alegrías incalculables. Para ti, hijo, estas palabras quedan aquí como un recordatorio de que cada esfuerzo, cada sacrificio y cada página de este trabajo fueron motivados por el deseo de ofrecerte un futuro lleno de oportunidades. Eres mi inspiración constante y mi orgullo infinito. Siempre estaré a tu lado, celebrando tus sueños y acompañando cada uno de tus logros. Gracias, Estefano, por darle un propósito profundo a mi vida y por llenar de sentido cada paso de mi camino.

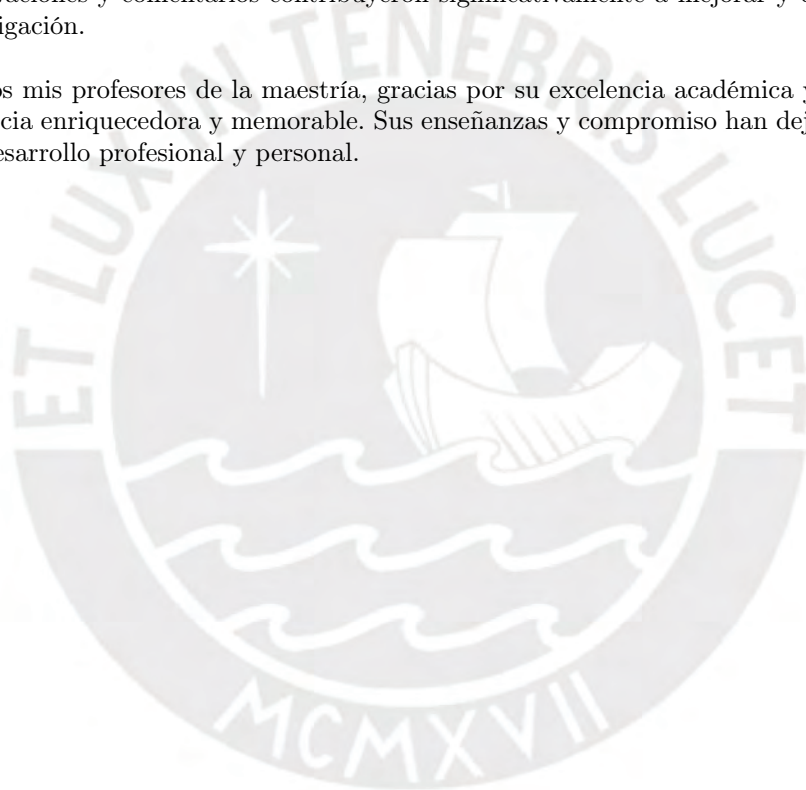


# Agradecimientos

Expreso mi sincero agradecimiento a mi asesor, cuyo valioso tiempo, orientación y dedicación fueron fundamentales para la elaboración de este trabajo de investigación. Su paciencia y sus conocimientos me guiaron en cada paso de este proceso, permitiéndome alcanzar los objetivos propuestos.

Agradezco también a los miembros del jurado, quienes dedicaron su tiempo a la revisión detallada de este trabajo. Sus observaciones y comentarios contribuyeron significativamente a mejorar y enriquecer el contenido de esta investigación.

Finalmente, a todos mis profesores de la maestría, gracias por su excelencia académica y por hacer de esta etapa una experiencia enriquecedora y memorable. Sus enseñanzas y compromiso han dejado una huella que perdurará en mi desarrollo profesional y personal.



# Resumen

El problema de bancarrota representa un desafío común en diversas áreas, desde la distribución de recursos limitados hasta la liquidación de activos en casos de bancarrota. Este trabajo de investigación explora cómo dividir de manera justa y eficiente los recursos cuando estos no son suficientes para cubrir completamente las demandas de todos los acreedores o reclamantes. Utilizando un enfoque axiomático, se revisan y comparan soluciones clásicas a los problemas de bancarrota, tales como la regla de proporcional, la regla de igual ganancia, la regla de igual pérdida, la regla del Talmud y la regla de llegada aleatoria. Además, abordamos el problema de bancarrota desde una perspectiva de los juegos cooperativos, exploraremos la relación entre las soluciones de estos juegos y las reglas de bancarrota. Extendemos nuestro modelo base a un modelo discreto, donde el bien a repartir y las demandas de los acreedores son representados por números enteros. Debido a estas indivisibilidades, el objetivo es desarrollar y analizar reglas que aborden estas situaciones de manera justa y eficiente, resolviéndose mediante el estándar de comparación. Finalmente, se construye un juego de inversión no cooperativo para analizar las implicaciones de estos principios en el comportamiento de inversión en escenarios de bancarrota.

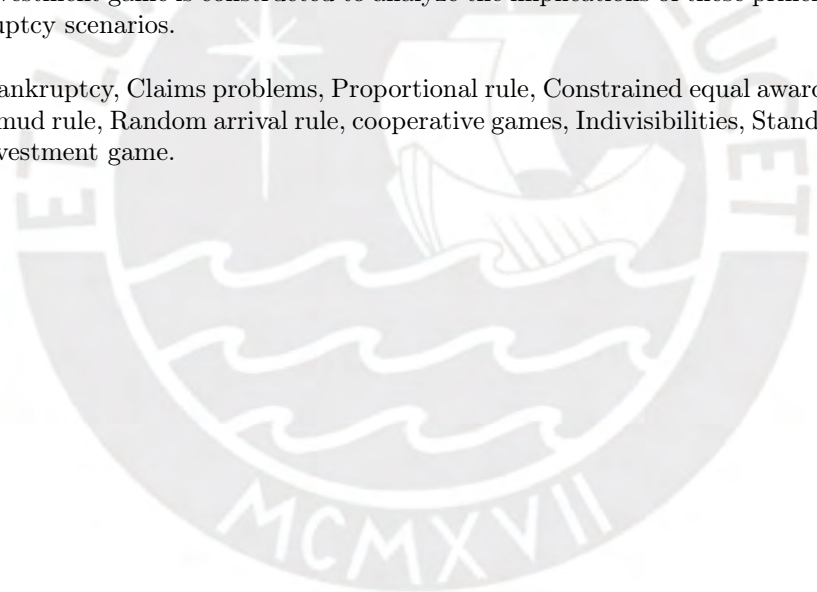
**Palabras clave:** Bancarrota, problema de reclamaciones, regla proporcional, regla de igual ganancia restringida, regla de igual pérdida restringida, regla del Talmud, regla de llegada aleatoria, juegos cooperativos, indivisibilidades, estándar de comparación, juegos de inversión no cooperativo.

# Abstract

The bankruptcy problem represents a common challenge across various fields, from the allocation of limited resources to the liquidation of assets in cases of bankruptcy. This research explores how to divide resources fairly and efficiently when they are insufficient to fully meet the claims of all creditors or claimants. Using an axiomatic approach, classical solutions to bankruptcy problems such as the proportional rule, the equal awards rule, the equal losses rule, the Talmud rule, and the random arrival rule are reviewed and compared. Additionally, we address the bankruptcy problem from a cooperative game perspective, exploring the relationship between these game solutions and bankruptcy rules.

We extend our basic model to a discrete model, where the asset to be divided and the creditors' claims are represented by integers. Due to these indivisibilities, the objective is to develop and analyze rules that address these situations in a fair and efficient manner, resolved through the comparison standard. Finally, a non-cooperative investment game is constructed to analyze the implications of these principles on investment behavior in bankruptcy scenarios.

**Key words:** Bankruptcy, Claims problems, Proportional rule, Constrained equal award rule, Constrained equal loss rule, Talmud rule, Random arrival rule, cooperative games, Indivisibilities, Standard of comparison, Noncooperative investment game.



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción a los problemas de bancarrota</b>                             | <b>6</b>  |
| <b>2. El problema de bancarrota con un bien perfectamente divisible</b>          | <b>15</b> |
| 2.1. Problema de bancarrota  | 15        |
| 2.2. Reglas de bancarrota  | 20        |
| 2.2.1. Regla proporcional  | 20        |
| 2.2.2. Regla de igual ganancia   | 21        |
| 2.2.3. Regla de igual pérdida  | 22        |
| 2.2.4. Regla conceder y dividir  | 24        |
| 2.2.5. Regla del Talmud  | 26        |
| 2.2.6. Regla de llegada aleatoria  | 28        |
| 2.3. Propiedades de las reglas de bancarrota                                     | 29        |
| 2.3.1. Propiedades de las reglas de bancarrota: Definiciones y conceptos básicos | 29        |
| 2.3.2. Resultados derivados de las propiedades de las reglas de bancarrota       | 39        |
| 2.3.3. Resultados de la propiedad de dualidad                                    | 41        |
| 2.4. Caracterizaciones de las reglas de bancarrota                               | 44        |
| 2.4.1. Caracterización de la regla proporcional                                  | 44        |
| 2.4.2. Caracterización de la regla de igual ganancia                             | 49        |
| 2.4.3. Caracterización de la regla de igual pérdida                              | 54        |
| 2.4.4. Caracterización de la regla del Talmud                                    | 56        |
| 2.4.5. Caracterización de la regla de llegada aleatoria                          | 59        |
| <b>3. Juegos de bancarrota</b>   | <b>61</b> |
| 3.1. Introducción a la teoría de juegos cooperativos                             | 61        |
| 3.2. Soluciones de los juegos cooperativos                                       | 64        |
| 3.2.1. El núcleo   | 65        |
| 3.2.2. El Nucleolo   | 65        |
| 3.2.3. El valor de Shapley   | 66        |
| 3.3. Juegos de bancarrota  | 67        |
| 3.3.1. Caracterización de los juegos de bancarrota                               | 68        |
| <b>4. Juegos de inversión mediante reglas de Bancarrota</b>                      | <b>82</b> |
| 4.1. Modelo  | 82        |
| 4.1.1. Regla proporcional, $P$   | 83        |
| 4.1.2. Regla de igual ganancia, $EA$   | 83        |
| 4.1.3. Regla de igual ganancia restringida, $CEA$                                | 83        |
| 4.1.4. Regla de igual pérdida, $EL$  | 83        |
| 4.1.5. Regla de igual pérdida restringida, $CEL$                                 | 84        |
| 4.1.6. Regla $AP[\alpha]$ , $AP$   | 84        |
| 4.1.7. Regla $LP[\alpha]$ , $LP$   | 84        |

|  |            |
|--|------------|
| 4.2. Equilibrios aplicando diferentes reglas de bancarrota . . . . . | 86         |
| 4.3. Comparaciones de inversión en equilibrio . . . . .              | 91         |
| <b>Conclusiones</b>  | <b>101</b> |
| <b>Recomendaciones</b>   | <b>103</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>104</b> |
| <b>Apéndice A</b>  | <b>106</b> |
| <b>A. Reglas de bancarrota</b>                                       | <b>106</b> |



# Índice de figuras

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 2.1.  | Conjunto factible del problema de Bancarrota con 2 agentes. . . . .   | 16  |
| 2.2.  | Conjunto $X(E, c)$ para el problema de Bancarrota con dos agentes. . . . .  | 17  |
| 2.3.  | La curva de color rojo representa la trayectoria mediante la regla $F$ , cuando el vector de demandas $c$ se mantiene fijo mientras que el estado $E$ aumenta de 0 a $C$ . El punto de color negro representa la asignación que se obtiene aplicando la regla $F$ cuando el estado es $\bar{E}$ . . . | 18  |
| 2.4.  | Representación geométrica de la asignación mediante la regla $F$ , donde $F_i(E, c)$ denota la asignación que recibe el agente $i$ mediante la regla $F$ . . . . .  | 19  |
| 2.5.  | Representación gráfica del contrato matrimonial, con $c = (100, 200, 300)$ y diferentes estados $E = 100, E = 200$ y $E = 300$ . . . . .  | 19  |
| 2.6.  | Trayectoria de la regla proporcional para el caso de dos agentes con vector de demandas $c \in \mathbb{R}_+^2$ y $c_1 < c_2$ . . . . .  | 20  |
| 2.7.  | Trayectoria de la regla de igual ganancia para el caso de dos agentes con vector de demandas $c \in \mathbb{R}_+^2$ y $c_1 < c_2$ . . . . .   | 21  |
| 2.8.  | Trayectoria de la regla de igual ganancia para el caso de dos agentes con vector de demandas $c \in \mathbb{R}_+^2$ y $c_1 < c_2$ . . . . .   | 23  |
| 2.9.  | Trayectoria de la regla conceder y dividir para el caso de dos agentes y vector de demandas $c \in \mathbb{R}_+^2$ y $c_1 < c_2$ . . . . .  | 25  |
| 2.10. | Trayectoria de la regla del Talmud para el caso de dos agentes y vector de demandas $c \in \mathbb{R}_+^2$ y $c_1 < c_2$ . . . . .  | 27  |
| 2.11. | $g_y$ es la trayectoria hacia $y$ , como $x \mathcal{R} y$ dado que $\bar{E} \in [0, E]$ tenemos $x = g_y(\bar{E})$ pertenece a la trayectoria hacia $y$ . . . . .  | 45  |
| 4.1.  | Inversión del agente 1, $s$ en la función de la aversión al riesgo del otro agente $a_2$ , bajo la regla $P$ (Rojo). Inversión del agente 2, $s$ en función de su propia aversión al riesgo $a_2$ , bajo la regla $P$ (Azul). . . . .   | 92  |
| 4.2.  | Inversión del agente 1, $s$ en función de la aversión al riesgo del otro agente $a_2$ , bajo la regla $EA$ (Rojo). Inversión del agente 2, $s$ en función de su propia aversión al riesgo $a_2$ , bajo la regla $EA$ (Azul). . . . .  | 93  |
| 4.3.  | Inversión del agente 1, $s$ en función de la aversión al riesgo del otro agente $a_2$ , bajo La regla $EL$ (Rojo). Inversión del agente 2, $s$ en función de su propia aversión al riesgo $a_2$ , bajo La regla $EL$ (Azul). . . . .  | 94  |
| 4.4.  | Inversión de equilibrio del agente 1, $s_1$ , en función de la aversión al riesgo del agente 2, $a_2$ y bajo las reglas $EA$ (Rojo), $P$ (Verde) y $EL$ (Azul). . . . .   | 95  |
| 4.5.  | Equilibrio de inversión del agente 2, $s_2$ , en función de su propia aversión al riesgo, $a_2$ , bajo las reglas $EA$ (Rojo), $P$ (Verde) y $EL$ (Azul). . . . .   | 96  |
| 4.6.  | Equilibrio de inversión total para dos agentes con el mismo grado de aversión al riesgo, $a$ , mediante las reglas $EA$ (Rojo), $P$ (Verde), $EL$ (Azul), $AP[\alpha]$ (Negro) para $\alpha = 0,5$ , $LP[\alpha]$ (Gris) para $\alpha = 0,5$ . . . . .  | 100 |
| A.1.  | Trayectoria de la regla proporcional para el caso de dos agentes con vector de demandas fijo, $c = (50, 75)$ . . . . .  | 107 |

A.2. Una forma sencilla de calcular el vector de asignaciones mediante *CEA*, para un vector de demandas fijo  $c$ , ( $c_1 < c_2 < c_3$ ), y 3 estados distintos. . . . . 109

A.3. Una forma sencilla de calcular el vector de asignaciones mediante *CEA*, para un vector de demandas fijo ( $c_1 < c_2 < c_3$ ) y 3 estados distintos. . . . . 112



# Índice de cuadros

|  |     |
|--|-----|
| 3.1. Cálculo del valor de Shapley para un estado $E_4 = 450$ y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . .                       | 76  |
| 3.2. Cálculo del valor de Shapley para un estado $E_3 = 300$ y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . .                       | 76  |
| 3.3. Cálculo del valor de Shapley para un estado $E_2 = 200$ y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . .                       | 77  |
| 3.4. Cálculo del valor Shapley para un estado $E_1 = 100$ y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . .                          | 77  |
| A.1. Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado, $E = 450$ , y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . . | 117 |
| A.2. Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado, $E = 300$ , y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . . | 117 |
| A.3. Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado, $E = 200$ , y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . . | 118 |
| A.4. Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado, $E = 100$ , y un vector de demandas $c = (100, 200, 300)$ . . . . . | 118 |
| A.5. Asignación obtenida mediante la regla de llegada aleatoria y cuatro diferentes estados. . . . .                                       | 119 |

# Capítulo 1

## Introducción a los problemas de bancarrota

A menudo se presentan situaciones de quiebra, es decir, cuando un juez o árbitro debe asignar una cantidad limitada de un bien o recurso entre un grupo de agentes, en circunstancias donde la cantidad a repartir resulta insuficiente para satisfacer todos los reclamos o demandas. Ante esta situación déficit, surge el cuestionamiento fundamental de cómo dividir el bien o recurso de una manera que sea percibida como justa por los agentes involucrados. Lamentablemente, no existe una respuesta clara a esta situación. En caso de que los escenarios cambien, por ejemplo, si el valor del bien o presupuesto se incrementa, lo que se consideraba justo en un principio podría ser considerado injusto o inadecuado en el nuevo escenario.

Estas situaciones de quiebra son muy comunes en la vida cotidiana, con implicaciones tanto a nivel individual (como la distribución del salario entre las necesidades básicas: alimentación, vivienda, salud, educación, entre otros; o cómo distribuir el tiempo en las actividades del día a día, etc.) como a nivel social (por ejemplo, la distribución del gasto público, etc.). En el contexto de situaciones de bancarrota, es común pensar en la empresa que se declara en quiebra, y el valor de liquidación debe ser repartido entre los acreedores, pero el valor de liquidación de la empresa resulta insuficiente para cubrir la totalidad de los montos adeudados. A continuación, se presentan algunas aplicaciones prácticas de estas situaciones.

- **Distribución de la herencia deficitaria:**

Tras la muerte de una persona, sus herederos presentan diversos testamentos en los que se acreditan derechos sucesorios aparentemente válidos, pero contradictorios, al superar en conjunto el valor del patrimonio disponible.

- **Racionamiento:**

En una empresa, se reciben pedidos de un producto por parte de un grupo de clientes; no obstante, la cantidad total que puede ser suministrada resulta insuficiente para satisfacer toda la demanda. En consecuencia, los pedidos solo pueden ser atendidos de manera parcial. El objetivo, en este caso, consiste en desarrollar un modelo que permita demostrar que la situación se ha gestionado de manera justa e imparcial, y de esta forma preservar una buena relación con los clientes.

- **Reparto de los recursos hídricos:**

Las entidades gubernamentales se encargan de la distribución de los recursos hídricos entre los diversos usuarios o sectores de demanda (uso doméstico, agricultura, minería, generación de energía, actividades turísticas, etc.), cuando este recurso limitado no es suficiente para satisfacer las demandas existentes a lo largo del tiempo. ¿Cómo debería repartirse este recurso vital de tal manera que sea sustentable a lo largo del tiempo, considerando la variabilidad climática, la contaminación de las fuentes de abastecimiento y el déficit de infraestructura hidráulica para su adecuada captación, conducción y distribución? En este contexto, surge el cuestionamiento sobre cuáles deberían ser los criterios normativos y mecanismos ideales para que las autoridades realicen un reparto del agua que sea considerado justo, eficiente y sostenible por todos los actores involucrados.

- **Asignación de impuestos:**

La entidad gubernamental se encarga de recaudar los tributos de los contribuyentes con el propósito de financiar servicios públicos y ejecutar obras bajo su jurisdicción. El problema consiste en determinar la asignación de la carga tributaria entre los contribuyentes, considerando sus respectivos niveles de ingresos, donde la suma de los ingresos de los contribuyentes excede la carga tributaria. En este escenario, el desafío radica en determinar una carga tributaria justa que cumpla con la restricción de que ningún contribuyente asuma un pago superior a sus ingresos.

- **Reparto del presupuesto:**

En la situación de un país formado por regiones autónomas, donde cada una de las administraciones regionales tiene la facultad de decidir el uso de los recursos económicos transferidos por el gobierno central, los gastos regionales abarcan los diversos proyectos y programas que se encuentran bajo la jurisdicción del sistema público regional, tales como la provisión de servicios de salud, educación pública y desarrollo de infraestructura vial, entre otros. Ahora, si se supone que la cantidad de recursos que el gobierno central puede transferir es inferior a la cantidad de gasto que enfrentan los gobiernos regionales.

Entonces surge la pregunta: ¿De qué forma deberían el gobierno central y el regional asignar la cantidad de recursos disponibles?

Estas situaciones representan ejemplos que se conocen como problemas de bancarrota; es decir, se abarca cualquier situación en la que se deba repartir una cantidad limitada de un bien o recurso entre un grupo de agentes, cuando la cantidad disponible no es suficiente para satisfacer sus reclamos o demandas.

En la presente tesis, se abordan diversas soluciones al problema de bancarrota, cada una de las cuales arroja luz sobre el mundo real y es aplicable bajo ciertas circunstancias. Estas soluciones, a las que llamaremos reglas de bancarrota, asocian a cada problema de bancarrota una distribución del bien entre los demandantes. El objetivo de esta investigación es examinar la literatura existente sobre las diferentes reglas de bancarrota e identificar las reglas más apropiadas para cada caso de bancarrota.

El estudio se inicia con la descripción de diversas reglas de bancarrota comúnmente utilizadas en la práctica. Luego, se formula un conjunto de propiedades deseables que las reglas de reparto podrían satisfacer, se comparan las diferentes reglas de bancarrota en función de las propiedades que cumplen y se identifica la existencia de reglas de bancarrota que satisfacen combinaciones de dichas propiedades. Estas propiedades se enuncian formalmente como axiomas. Este enfoque permite generar un marco de análisis riguroso para evaluar las fortalezas y limitaciones de las diferentes reglas de bancarrota, así como comprender la relación entre las propiedades deseables y las soluciones factibles.

Una regla de bancarrota ampliamente reconocida y con una larga trayectoria histórica es la regla proporcional, la cual propone una distribución en proporción a las demandas o reclamaciones. Se le atribuye al filósofo Aristóteles la defensa de esta regla como un principio de justicia y equidad para abordar los problemas de bancarrota, puesto que considera a todos los demandantes de manera equitativa. Además, la regla proporcional sobresale por su simplicidad y facilidad de implementación, lo que lo convierte en una opción atractiva para los casos de problemas de bancarrota.

Otras reglas clásicas en la literatura son la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida, que proponen repartir las ganancias y las pérdidas, respectivamente, de manera equitativa entre los demandantes. Si bien ambas reglas abordan el problema de bancarrota con diferentes enfoques, comparten el objetivo común de lograr un reparto justo y equilibrado del bien,

alineándose con los principios de igualdad promovidos por Maimónides (1170).

Las reglas de conceder y dividir y la regla del Talmud tienen sus orígenes en los antiguos escritos del Talmud de Babilonia, un compendio de decisiones religiosas y legales judías establecidas durante los primeros cinco siglos de nuestra era. Este libro trata sobre contratos, arrendamientos, ventas, herencias, entre otros. En él se especifican algunos ejemplos numéricos y recomendaciones específicas para abordar estas situaciones de bancarrota, los cuales difieren significativamente de las soluciones de las reglas antes mencionadas.

A continuación, se presentan algunos de estos ejemplos:

■ **La prenda en disputa: (tratado Bava Metzia 2a)**

Dos hombres no están de acuerdo sobre la propiedad de una prenda y hacen reclamos incompatibles sobre ella. ¿Cómo debe dividirse la prenda entre ellos? A continuación, se presenta la descripción del problema y la recomendación propuesta al respecto: Dos hombres sostienen una prenda, uno reclama la totalidad de la prenda mientras que el segundo reclama la mitad. La solución propuesta en el Talmud indica que el primero recibe tres cuartas partes de la prenda mientras que el segundo recibe la cuarta parte de la prenda.

■ **El contrato matrimonial: (tratado Ketubot 93a)**

Un hombre se casó con varias mujeres y firmó contratos al casarse con cada una de ellas, especificando cuánto debería recibir cada una en caso de disolución de su matrimonio (divorcio o muerte). El hombre fallece y se descubre que el valor de sus bienes es insuficiente para honrar simultáneamente los tres contratos. ¿Cómo deberían dividirse sus bienes entre sus esposas? A continuación, se presenta la sugerencia propuesta por el Talmud:

Un hombre casado con tres esposas fallece y en sus contratos matrimoniales les prometió entregar sumas de 100, 200 y 300 zuz respectivamente. El Talmud (Mishná), atribuido al rabino Natham, propone la siguiente asignación:

Si el patrimonio valía 100, zuz cada esposa recibe  $100/3$  zuz.

Si el patrimonio valía 200, zuz las esposas reciben 50, 75 y 75 zuz respectivamente.

Si el patrimonio valía 300, zuz las esposas reciben 50, 100 y 150 zuz respectivamente.

Este reparto propuesto por el Talmud ha generado gran confusión y dudas: ¿Por qué cuando el patrimonio vale 100 zuz la división es igualitaria? ¿Por qué cuando el patrimonio vale 300 zuz la división es proporcional? Lo más extraño es la solución cuando el patrimonio vale 200 zuz, cuyo razonamiento no se explica de manera evidente. Sin embargo, signifiquen lo que signifiquen, no se ajustan a ninguna extensión obvia de la regla proporcional o la regla de igual ganancia.

Durante décadas, los eruditos rabínicos y académicos debatieron incansablemente en un intento por comprender la regla o método de reparto descrito en el Talmud, sin lograr encontrar una explicación convincente. No fue hasta 1985 cuando Aumann y Maschler, abordaron estos problemas desde una perspectiva matemática, modelándolos como juegos cooperativos. De manera sorprendente, descubrieron que las soluciones propuestas en el Talmud coincidían con el nucleolo del juego cooperativo correspondiente. Sin embargo, es poco probable que los sabios del Mishná estuvieran familiarizados con la teoría de juegos cooperativos y, mucho menos, con el concepto del nucleolo, el cual fue introducido posteriormente por Schmeidler (1969).

En el capítulo 3 de esta tesis, se analizará en profundidad esta justificación y se modelarán los problemas de bancarrota como juegos cooperativos de bancarrota desde un enfoque pesimista, donde la coalición recibe lo que queda después de haber repartido el estado entre los agentes que no pertenecen a ella. Este trabajo pionero de Aumann y Maschler (1985) ha inspirado a otros académicos a explorar y expandir estos resultados, fortaleciendo aún más el vínculo entre la teoría de juegos y los antiguos problemas de bancarrota expuestos en el Talmud.

Otra regla importante en la literatura de las reglas de bancarrota es la regla de llegada aleatoria. Esta regla establece que los reclamantes llegan aleatoriamente al juez o árbitro, y se les asigna el patrimonio disponible siguiendo su orden de llegada hasta agotar el patrimonio. Para realizar un reparto justo, se toma el promedio de todas las permutaciones posibles de las llegadas de los agentes involucrados. Fue hasta la década de los 80 que O'Neill formalizó los problemas de bancarrota, dotándolos de una estructura matemática rigurosa definiendo los conceptos clave involucrados (estado, vector de demandas, región factible y las posibles soluciones).

Esta formalización permitió representar los problemas de bancarrota de manera abstracta y general, facilitando el estudio sistemático y axiomático de las propiedades y características de las reglas de bancarrota. Además, O'Neill (1982) demostró que la regla de llegada aleatoria y la regla de conceder y dividir coinciden para el caso de dos reclamantes, y estableció una relación entre la regla de llegada aleatoria y el valor de Shapley.

Desde una perspectiva matemática rigurosa, en el capítulo 2 se centrará nuestra atención en los problemas de bancarrota cuando los bienes son perfectamente divisibles. Esto implica que el patrimonio o recurso a repartir puede dividirse de manera infinita, situación análoga a

los ejemplos de quiebras previamente mencionados. Se brindará una definición formal de las reglas de bancarrota y resolveremos estos problemas aplicando distintas reglas de reparto. El análisis incluirá una interpretación geométrica y las principales características de las reglas de bancarrota.

La investigación iniciará con un enfoque axiomático, partiendo de las propiedades de las reglas de bancarrota formuladas como axiomas, los cuales representan matemáticamente la concepción sobre cómo una regla debería abordar ciertas clases de situaciones. Se examinarán las propiedades, las relaciones lógicas entre ellas, y se explorarán las implicaciones que surgen al imponer diversas combinaciones de estas propiedades.

Dentro del conjunto de propiedades que serán objeto de estudio, se encuentran algunas que son ampliamente aceptadas debido a su carácter intuitivo y natural. Una de ellas es el *tratamiento igualitario*, un requisito que establece que los agentes con demandas idénticas deben ser tratados de manera equitativa. Otra propiedad fundamental es la *eficiencia*, la cual exige que, dado que los recursos disponibles son insuficientes para satisfacer todas las deudas, se debe repartir la totalidad del patrimonio. Es importante destacar que algunas propiedades pueden ser universales, aplicables a todos los modelos, mientras que otras pueden ser específicas de determinados modelos en particular.

Otro enfoque que será abordado en el capítulo 3 es el problema de bancarrota desde la perspectiva de los juegos cooperativos de utilidad transferible (juegos TU). Estos juegos TU son representaciones formales de situaciones donde todas las coaliciones o grupos (no solo el conjunto completo) pueden obtener un beneficio. En este contexto, los jugadores serán los demandantes o acreedores, y el valor del juego representará el patrimonio o recurso a repartir.

El juego de bancarrota será definido formalmente siguiendo el enfoque propuesto por O'Neill (1982), considerando el valor de la coalición  $S$  como la diferencia entre el estado y la demanda agregada de los miembros de la coalición complementaria ( $N \setminus S$ ), siempre y cuando no sea negativa, y cero en caso contrario. Este enfoque se puede entender como el pago que la coalición espera recibir, reflejando una evaluación bastante pesimista. Podrían explorarse formas alternativas de asociar el juego de bancarrota con el problema de bancarrota, como un enfoque optimista del "derecho máximo", donde el valor de la coalición  $S$  es el mínimo entre el estado y la demanda agregada de sus miembros. Este último enfoque se deja abierto a futuros trabajos de investigación, este juego fue planteado por Driessen (1985).

Al emplear los resultados derivados de la teoría de juegos TU para encontrar el vector de asignación de un problema de bancarrota, es deseable que la asignación propuesta pertenezca al núcleo del juego TU asociado, ya que esto garantiza la racionalidad de grupo. Sin embargo, muchos juegos TU tienen núcleos vacíos. No obstante, se demostrará que todo juego de bancarrota es convexo, lo que garantiza que el núcleo del juego es no vacío y, además, este conjunto es exactamente el conjunto de asignaciones del problema de bancarrota.

En esta tesis, también se explorará la relación entre dos conceptos fundamentales: La regla de llegada aleatoria y el valor de Shapley. Este valor, introducido por Shapley (1953), otorga a cada juego coalicional una imputación que representa la ganancia que cada jugador espera obtener al participar en el juego. El valor de Shapley de un juego convexo pertenece al núcleo del juego y comparte con el núcleo la propiedad de consistencia, satisfaciendo la definición del juego reducido propuesta por Aumann y Maschler (1985). Shapley propuso un concepto de solución único que satisface varias propiedades conocidas como axiomas de Shapley (aditividad, simetría, jugador nulo y eficiencia), las cuales pueden ser aplicables por un juez imparcial para asesorar a los jugadores sobre cómo dividir sus ganancias. Finalmente, se demostrará que la regla de llegada aleatoria y el valor de Shapley coinciden, es decir, que ambos conceptos dan el mismo vector de asignación a los jugadores.

Otra correspondencia importante que se presenta en los juegos TU: la regla del Talmud y el nucleolo del juego de bancarrota asociado. El nucleolo, fue definido por Schmeidler (1969), es otro concepto de solución clave en la teoría de los juegos de coalición. La idea central del nucleolo es medir el exceso, definido como la diferencia entre el valor de la coalición y la suma de los pagos de sus miembros, formalmente representado por  $e(S, x) = v(S) - x(S)$ . El nucleolo del juego de coalición se refiere a aquellos vectores de pago en los cuales el vector de excesos se minimiza en el orden lexicográfico entre todos los vectores de pago eficientes. Aunque el nucleolo se define como un conjunto, en realidad es un conjunto unitario.

Además, se demostrará que para cada problema de bancarrota, se define su juego de bancarrota asociado cuyo nucleolo coincide con la regla del Talmud. Esto implica que el nucleolo de este juego específico de bancarrota puede calcularse utilizando la regla del Talmud. Se proporcionará una demostración actualizada de este teorema, originalmente probado por Aumann y Maschler, empleando las propiedades y axiomas descritos en el capítulo 2.

En el capítulo 4, se extenderá el modelo base, el cual asumía que las demandas son fijas y conocidas. No obstante, en la realidad, las demandas resultan de decisiones estratégicas tomadas por los agentes económicos. Por ejemplo, la decisión sobre cuánto capital destinar a la inversión de una empresa, está profundamente influenciada por la percepción de los agentes sobre lo que recibirán en caso de que la empresa quiebre. Es decir, la regla de bancarrota que se aplicará en caso de quiebra juega un papel crucial en esta decisión.

Para abordar y analizar estos incentivos de manera más detallada, se construye un juego de inversiones no cooperativo. En este contexto, cada inversor opera de manera independiente, sin posibilidad de formar acuerdos vinculantes, con el objetivo de maximizar su beneficio individual, sin tener en cuenta el bienestar de los otros participantes en el juego. En este modelo, los inversores toman decisiones simultáneas sobre la cantidad de dinero que desean invertir en una empresa, y la suma total de estas inversiones colectivas es lo que finalmente determina el valor de la empresa.

Se modela la empresa sin apalancamiento como una lotería que puede resultar en ganancias o llevar a la quiebra. En caso de que la empresa se declare en bancarrota, el valor de liquidación de la empresa será distribuido entre los inversores según la regla de bancarrota que haya sido predefinida en el contrato acordado antes de realizar las inversiones. Este enfoque permitirá analizar cómo las reglas de reparto influyen en las decisiones de inversión y en el comportamiento estratégico de los agentes dentro del contexto de juegos no cooperativos.

Los inversores exhiben aversión al riesgo absoluta constante (CARA), lo que implica que sus decisiones de inversión en la empresa no dependen de su nivel de riqueza. Además, se asume que los inversores no enfrentan restricciones de liquidez, lo que hace que sus niveles de ingresos no resulten pertinentes en este análisis. No obstante, es posible interpretar los niveles de aversión al riesgo de los agentes como una función decreciente en relación con sus ingresos, lo cual sugiere que los agentes con menor aversión al riesgo podrían ser considerados como inversores con mayor riqueza.

En este contexto, se analizarán las reglas de bancarrota aplicables a estos problemas de inversión, introduciendo pequeñas variaciones. Entre las reglas estudiadas se incluyen la regla proporcional  $P$ , la regla de igual ganancia sin restricción  $EA$ , también conocida simplemente como la regla de igual ganancia, donde se elimina la restricción de que ningún agente reciba más de lo que invirtió, y la regla de igual pérdida sin restricción  $EL$ , o simplemente la regla de igual pérdida, donde se suprime la restricción de que ningún agente reciba una asignación negativa. Además, se introducirán dos clases adicionales de reglas de bancarrota, las cuales se describen a continuación:

- La regla  $AP[\alpha]$  : Esta regla se define como un promedio ponderado entre las reglas  $P$  y  $EA$ , donde el parámetro  $\alpha$  determina el peso de cada una. En particular, cuando  $\alpha = 0$ , la regla  $AP[\alpha]$  coincide exactamente con la regla  $EA$ . Por otro lado, cuando  $\alpha = 1$ , la regla  $AP[\alpha]$  coincide exactamente con la regla  $P$ .
- La regla  $LP[\alpha]$  : Análogo al caso anterior, esta regla se define como un promedio ponderado entre las reglas  $P$  y  $EL$ , con  $\alpha$  como factor de ponderación. Si  $\alpha = 0$ , la regla  $LP[\alpha]$  es equivalente a la regla  $EL$ . En cambio, si  $\alpha = 1$ , la regla  $LP[\alpha]$  se convierte en regla  $P$ .

El análisis se centrará en cómo cada una de estas reglas influye en el comportamiento de los inversores, lo que implica que cada regla induce un juego no cooperativo entre los inversores. Para cada una de estas reglas, se estudiará el equilibrio de Nash correspondiente dentro del juego no cooperativo de inversión.

El estudio de estos equilibrios se realizará en función de la inversión total, la cual representa una medida sencilla del impacto que una regla tiene sobre el comportamiento de inversión de los jugadores. Es razonable suponer que una empresa estaría interesada en implementar reglas de bancarrota que promuevan una mayor inversión total. En el ámbito de las finanzas corporativas, la regla  $P$  es la más utilizada comúnmente; por lo tanto, cualquier regla alternativa que genere un mayor nivel de inversión total en equilibrio podría ser vista como una mejor opción.

Este capítulo está basado principalmente en el trabajo de Kibris y Kibris (2013) y Karagözoğlu (2014).

## Capítulo 2

# El problema de bancarrota con un bien perfectamente divisible

### 2.1. Problema de bancarrota

Un *problema de bancarrota* es un problema de reparto de un bien homogéneo perfectamente divisible (dinero, recursos, derechos, etc.) entre un grupo de agentes o demandantes, cuando la cantidad a repartir resulta insuficiente para satisfacer todas sus demandas.

El modelo base, introducido por O'Neill (1982), se plantea de la siguiente manera:

Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un conjunto finito y fijo de agentes. Para cada  $i \in N$ , el reclamo del agente  $i$  se denota por  $c_i \in \mathbb{R}_+$  y  $c = (c_i)_{i \in N}$  representa el vector de demandas. Se denomina estado ( $E$ ) al bien homogéneo y perfectamente divisible que se va a repartir entre los agentes involucrados.

Un problema de bancarrota con un bien homogéneo perfectamente divisible, o simplemente un problema de bancarrota, es un par  $(E, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n$ . Dado que el modelo representa los problemas de bancarrota, se cumple  $\sum_{i \in N} c_i \geq E$  y  $E > 0$ .

La familia de todos estos problemas se denota por  $B^N$ ,

$$B^N = \left\{ (E, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in N} c_i \geq E \right\}$$

Para generalizar aún más el modelo base, se amplía su aplicación a situaciones en las que el número de demandantes no es fijo, sino que puede variar. Se considera el conjunto de los potenciales agentes, identificados con el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .

Sin embargo, cada problema solo involucra un número finito de agentes. Sea  $\mathcal{N}$  la familia de todos los subconjuntos finitos no vacíos de  $\mathbb{N}$  y para  $N \in \mathcal{N}$ , se denota por  $n$  a la cardinalidad de  $N$ .

Ahora, el problema de bancarrota consiste de una tripleta  $(N, E, c)$ , donde  $N \in \mathcal{N}$  representa un conjunto particular de agentes involucrados en este problema, el estado  $E > 0$  y  $c \in \mathbb{R}_+^n$  es el vector de demandas, con la propiedad  $\sum_{i \in N} c_i \geq E$ . Se denota por  $\mathbb{B}$  a la familia de todos los problemas de bancarrota con el conjunto de agentes variable.

$$B^N = \left\{ (N, E, c) \in \{\mathcal{N}\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in N} c_i \geq E \right\} \quad \text{y} \quad \mathbb{B} = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} B^N.$$

Se denomina  $C$  a la demanda agregada de los agentes y  $L$  a la pérdida o déficit agregado. Es decir,

$$C = \sum_{i \in N} c_i \quad \wedge \quad L = C - E$$

En una representación geométrica, la esencia del problema de bancarrota reside en dos componentes básicos:

- i) El conjunto factible definido por los vectores  $x \in \mathbb{R}_+^n$  cuya suma de componentes es igual al estado. Es decir:

$$\Delta(E) := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = E \right\}$$

- ii) El vector de demandas  $c = (c_i)_{i \in N}$ , donde la suma de sus componentes supera el valor del estado asignado. Por lo tanto, este vector de demandas está fuera del conjunto factible.

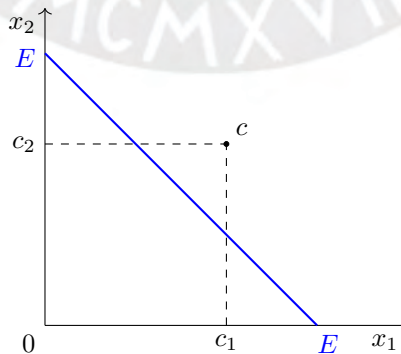


Figura 2.1: Conjunto factible del problema de Bancarrota con 2 agentes.

Una asignación, solución o pago del problema de bancarrota es una distribución del estado  $E$  entre el conjunto de agentes  $N$ , es un vector  $x \in \mathbb{R}_+^n$  que satisface:

- i) Cada agente recibe una cantidad no negativa y a lo sumo, tan grande como su demanda, es decir, para cada  $i \in N, 0 \leq x_i \leq c_i$ .
- ii) El vector de asignación pertenece al conjunto factible, el estado se reparte en su totalidad (eficiencia), es decir,

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$

Sea  $X(E, c)$  el conjunto de todas las asignaciones o pagos para el problema de bancarrota.

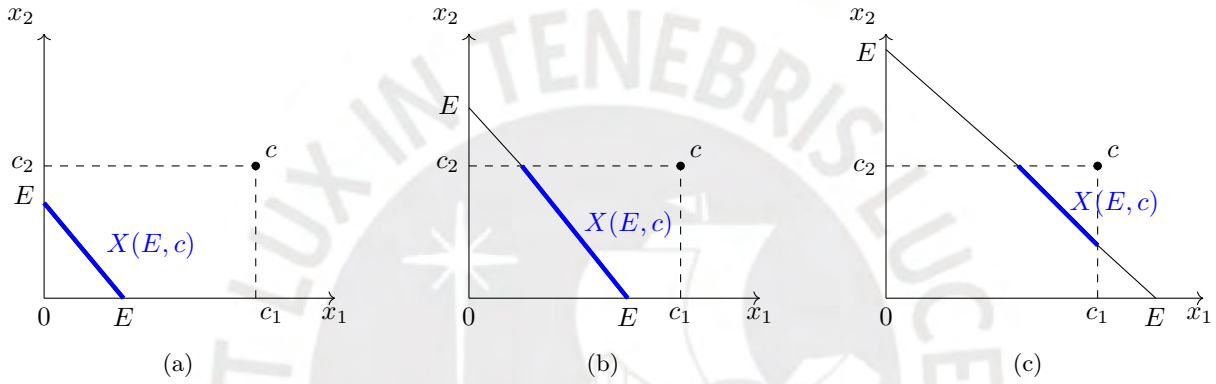


Figura 2.2: Conjunto  $X(E, c)$  para el problema de Bancarrota con dos agentes.

En la figura 2.2 se muestran las posibles  $X(E, c)$  (representados por los segmentos azules) para tres valores diferentes del estado ( $E$ ), y el mismo vector de demandas  $c = (c_1, c_2)$  con  $c_2 < c_1 \wedge E > 0$ .

- a) Si  $E < c_2 < c_1$ , cada agente recibe una asignación menor a su demanda.
- b) Si  $c_2 < E < c_1$ , el segundo agente podría ser compensado por completo mientras que el primer agente de todos modos recibe un pago menor que su demanda.
- c) Si  $c_2 < c_1 < E$ , en este caso cabe la posibilidad que cada agente reciba el total de su demanda.

**Definición 2.1.1.** Una regla de bancarrota es una función  $F$  que asocia a cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$  un único elemento de  $X(E, c)$ . Es decir

$$F : B^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(E, c) \longmapsto x \in X(E, c)$$

Se presentan dos formas de representar las reglas de bancarrota. En ambos casos, el vector de demandas se mantiene fijo.

- i) Se denomina “trayectoria” a la trayectoria de las asignaciones mediante la regla  $F$ , denotada por  $T^F(c)$ , definida de la siguiente manera:

El camino de la regla de bancarrota  $F$  para el vector de demandas  $c$ , es la curva paramétrica del vector de asignaciones  $x(E) = (x_1(E), x_2(E), \dots, x_n(E))$  cuando el estado  $E$  aumenta de 0 a  $C$ . Es decir:

$$T^F(c) = \{x(E) : 0 \leq E \leq C\}$$

La representación geométrica de la trayectoria mediante la regla  $F$ , para el caso de dos agentes es:

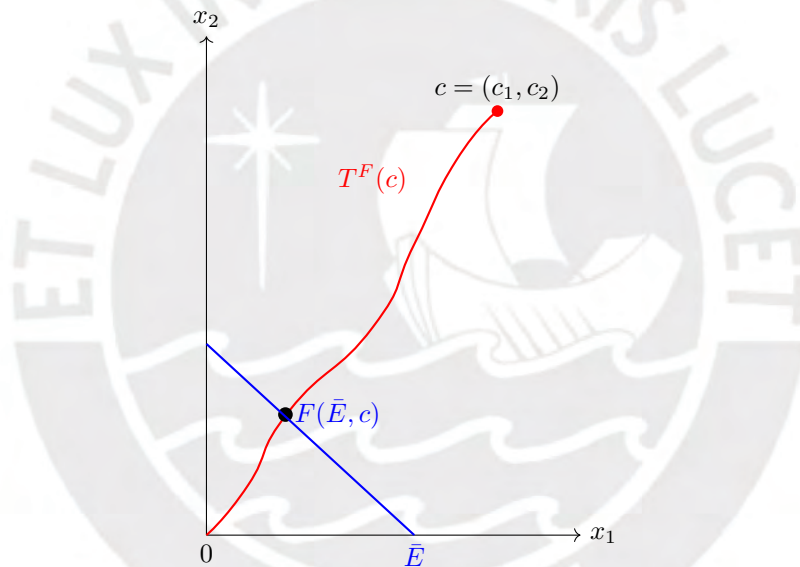


Figura 2.3: La curva de color rojo representa la trayectoria mediante la regla  $F$ , cuando el vector de demandas  $c$  se mantiene fijo mientras que el estado  $E$  aumenta de 0 a  $C$ . El punto de color negro representa la asignación que se obtiene aplicando la regla  $F$  cuando el estado es  $\bar{E}$ .

**Observación 2.1.1.** En la representación geométrica de  $T^F(c)$ , siempre se traza la trayectoria de asignaciones como una función continua respecto al estado, siendo esta una propiedad muy natural (la formalización y extensión ver Young (1995)) . Además, la continuidad respecto al estado es satisfecha por todas las reglas de bancarrota con bienes perfectamente divisibles. Sin embargo, teóricamente, las trayectorias podrían presentar discontinuidades.

ii) Otra forma de representar las reglas de bancarrota consiste en modelar las demandas de los agentes y las posibles asignaciones mediante segmentos verticales, con  $E \leq \sum_{i \in N} c_i$ , se representan los montos asignados a cada agente mediante puntos rojos, donde la distancia vertical desde el punto hasta el eje horizontal designa el valor de la asignación. La asignación geométrica para el caso de tres agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ , puede representarse de la siguiente manera:

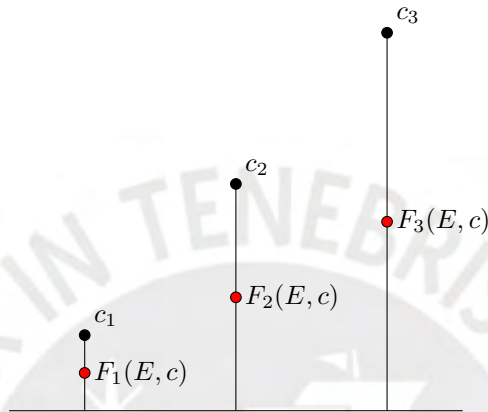


Figura 2.4: Representación geométrica de la asignación mediante la regla  $F$ , donde  $F_i(E, c)$  denota la asignación que recibe el agente  $i$  mediante la regla  $F$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Se considera el problema del Talmud, el contrato matrimonial, donde las demandas de las esposas son  $c = (100, 200, 300)$ . Se presenta la representación geométrica para este problema de bancarrota, para tres valores del Estado:  $E = 100$ ,  $E = 200$  y  $E = 300$ .

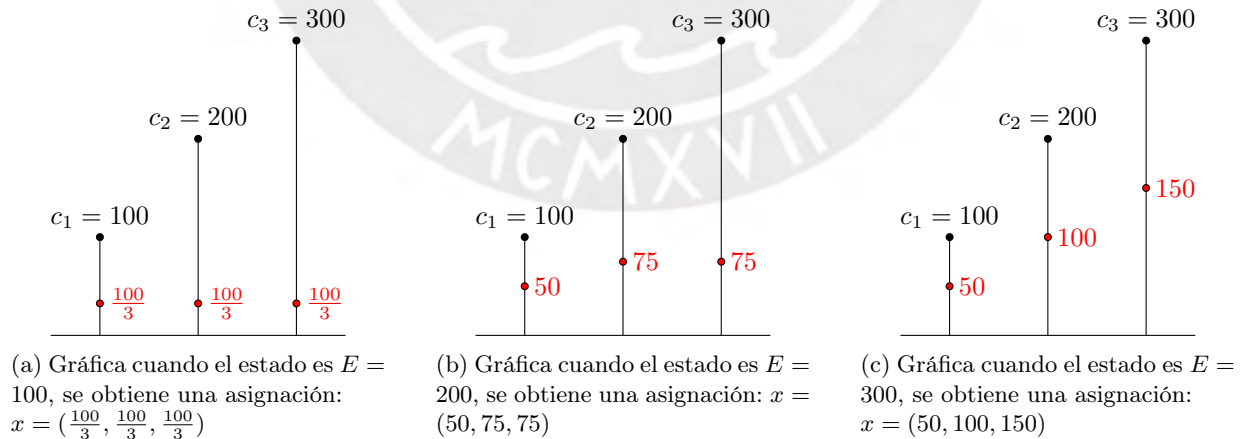


Figura 2.5: Representación gráfica del contrato matrimonial, con  $c = (100, 200, 300)$  y diferentes estados  $E = 100$ ,  $E = 200$  y  $E = 300$ .

## 2.2. Reglas de bancarrota

En esta sección se presentan las reglas de bancarrota más conocidas y discutidas en la literatura, algunas de las cuales son familiares, mientras que otras resultan más novedosas e intrigantes. El estudio comenzará con la **regla proporcional**, la regla de bancarrota más común y utilizada en la práctica, cuyos orígenes se remontan a los escritos de Aristóteles (Ética a Nicómaco). De hecho, para Aristóteles, la proporcionalidad era equivalente a la equidad.

### 2.2.1. Regla proporcional

**Definición 2.2.1.** La **regla proporcional**, denotada por  $P$ , es aquella regla que asigna el estado de manera proporcional a las demandas de los agentes.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , la **regla proporcional** ( $P$ ) propone una asignación:

$$P(E, c) = \lambda c, \text{ donde } \lambda = \frac{E}{C} \quad (2.1)$$

Se presenta la representación geométrica de la aplicación de la regla  $P$  para el caso de dos agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2)$ .

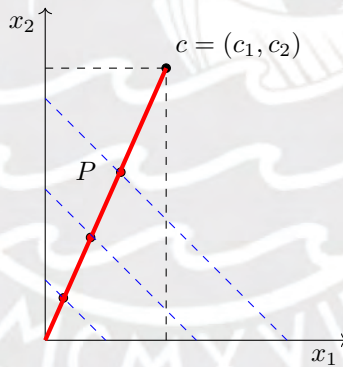


Figura 2.6: Trayectoria de la regla proporcional para el caso de dos agentes con vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ .

**Observación 2.2.1.** En la figura 2.6, el eje  $x_1$  representa la asignación del primer agente, mientras que el eje  $x_2$  representa la asignación del segundo agente. La línea de color rojo representa la trayectoria de la regla proporcional  $P$ , que parte del origen  $(0, 0)$  y se extiende hasta el vector de demandas  $c$ . Esta trayectoria refleja cómo las asignaciones de ambos agentes se incrementan proporcionalmente a medida que el estado  $E$  aumenta hasta alcanzar el valor de la demanda agregada.

### 2.2.2. Regla de igual ganancia

La regla de igual ganancia, defendida y estudiada por numerosos autores, especialmente por Maimónides (1170), es otra regla antigua e intuitiva que se fundamenta en el principio de la igualdad. En otras palabras, esta regla hace que las asignaciones sean tan iguales como sea posible con la restricción que ningún agente reciba más que su demanda.

**Definición 2.2.2.** La **regla de igual ganancia**, denotada por  $CEA$ , es aquella regla que propone una asignación equitativa entre los agentes, respetando la condición de que nadie reciba más de lo que demanda.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$ , la **regla de igual ganancia (CEA)** propone una asignación:

$$CEA_i(E, c) = \min\{\lambda, c_i\}, \quad (2.2)$$

donde  $\lambda > 0$  resuelve la ecuación:  $\sum_{i \in N} \min\{\lambda, c_i\} = E$ .

Se presenta la representación geométrica de la aplicación de la regla  $CEA$  para el caso de dos agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2)$ .

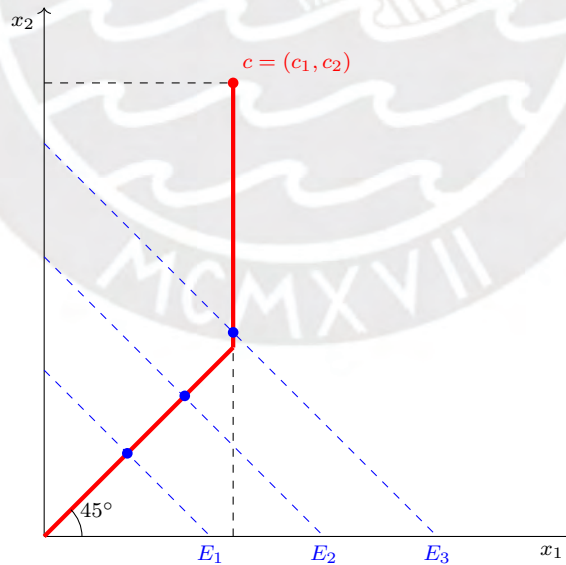


Figura 2.7: Trayectoria de la regla de igual ganancia para el caso de dos agentes con vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ .

**Observación 2.2.2.** En la figura 2.7, la línea de color rojo representa la trayectoria de la **regla de igual ganancia (CEA)**. Esta trayectoria se divide en dos tramos:

- Primer tramo: Parte del origen  $(0, 0)$  y sigue una línea recta de pendiente  $45^\circ$  hasta que el primer agente es completamente compensado  $(x_1 = c_1)$ . En este tramo, si el estado  $E \leq 2c_1$ , la asignación de cada agente será igual a la mitad del estado  $(\frac{E}{2})$ .
- Segundo tramo: Parte desde el punto  $(c_1, c_1)$  y sigue la línea vertical hasta alcanzar el vector de demandas  $c$ . En este tramo, cuando  $(E > 2c_1)$ , cualquier aumento del estado se asigna exclusivamente al segundo agente hasta que este también sea completamente compensado.

Otra regla clásica encontrada en los escritos antiguos es la **regla de igual pérdida**. Esta regla fue estudiada y defendida por Maimónides (1170). Esta regla se basa en el principio de distribuir las pérdidas de manera igualitaria entre los agentes, buscando la mayor equidad posible en las pérdidas incurridas por los agentes. Sin embargo, esta regla tiene una restricción importante: ningún agente puede recibir una cantidad negativa, es decir, ningún agente debe terminar en una posición donde deba aportar recursos en lugar de recibirlos. Esta restricción evita las situaciones absurdas que podrían ocurrir si se aplicara una distribución estrictamente igualitaria de las pérdidas sin considerar las demandas originales de los agentes.

### 2.2.3. Regla de igual pérdida

**Definición 2.2.3.** La **regla de igual pérdida**, denotada por  $CEL$ , es aquella regla que propone asignar el déficit o pérdida agregada de manera equitativa entre los agentes, respetando la condición de que ningún agente reciba una asignación negativa.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$ , la **regla de igual pérdida (CEL)** propone una asignación:

$$CEL_i(E, c) = \max\{0, c_i - \mu\}, \quad (2.3)$$

donde  $\mu > 0$  resuelve la ecuación  $\sum_{i \in N} \max\{0, c_i - \mu\} = E$ .

Se presenta la representación geométrica de la aplicación de la regla  $CEL$  para el caso de dos agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2)$ .

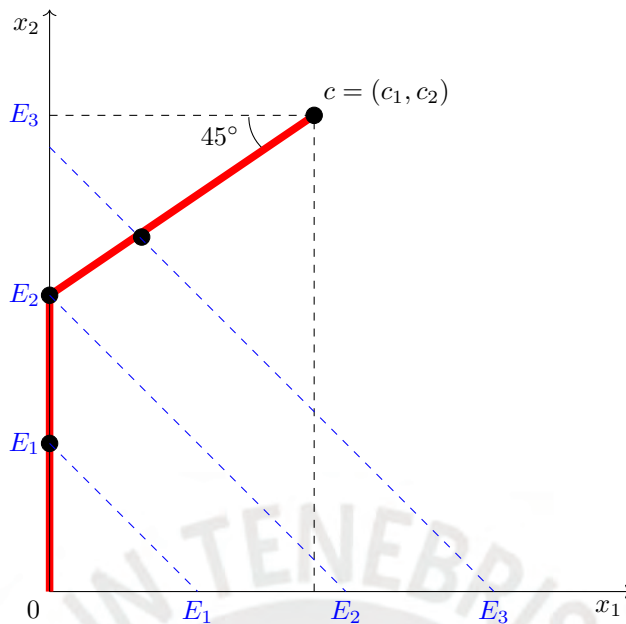


Figura 2.8: Trayectoria de la regla de igual ganancia para el caso de dos agentes con vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ .

**Observación 2.2.3.** En la figura 2.8, la línea de color rojo representa la trayectoria de la regla de igual pérdida (CEL). Esta trayectoria se divide en dos tramos:

- Primer tramo: Inicia en  $c = (c_1, c_2)$  y sigue una línea recta hacia abajo de pendiente  $45^\circ$  hasta que el primer agente reciba una asignación igual a cero ( $x_1 = 0$ ). En este tramo, si el déficit agregado  $L \leq 2c_1$ , ambos agentes experimentan una reducción equitativa de sus demandas y la asignación será igual a  $(c_1 - \frac{L}{2}, c_2 - \frac{L}{2})$ .
- Segundo tramo: Parte desde el punto  $(0, c_2 - c_1)$  y sigue la línea vertical hacia abajo hasta alcanzar el origen  $(0, 0)$ . En este tramo, si el déficit agregado  $L > 2c_1$ , cualquier déficit adicional se asigna exclusivamente al segundo agente hasta que su asignación sea igual a cero ( $x_2 = 0$ ), y el vector de asignación será igual a  $x = (0, E)$ .

La cuarta regla que se estudiaremos es la regla del Talmud, con orígenes en los antiguos escritos del Talmud de Babilonia. Su procedimiento busca sistematizar y generalizar las soluciones descritas en el Talmud para diversos problemas de bancarrota. Estas soluciones, que a primera vista pueden parecer arbitrarias o inconsistentes, adquieren una coherencia sorprendente cuando se examinan a través del lente de esta regla.

Esta regla fue formalizada por Aumann y Mascheler (1985), quienes la presentan como una extensión consistente de un concepto más básico: la regla de conceder y dividir, un método de solución para los problemas de bancarrota con dos agentes.

Esta regla se basa en el Mishná (Baba Metzia 2a), que afirma:

"Dos hombres disputan una prenda; uno reclama toda, y el otro reclama la mitad. Entonces, a uno se le asigna  $3/4$ , y al otro  $1/4$ ".

Se presenta el razonamiento del reparto de prenda:

El agente que reclama la mitad de la prenda concede la mitad de la prenda al otro agente, de modo que la disputa gira en torno a la otra mitad de la prenda, la cual se reparte en partes iguales entre los agentes, y se obtiene una asignación de  $3/4$  y un  $1/4$  respectivamente.

#### 2.2.4. Regla conceder y dividir

**Definición 2.2.4.** La **regla conceder y dividir**, denotada por  $CD$ , es aquella regla que se define para el caso de dos agentes,  $N = \{i, j\}$ , y puede describirse como un proceso de dos etapas:

- **Concesión:** El agente  $i$  con demanda  $c_i$ ; concede al agente  $j$  la cantidad  $\max\{E - c_i, 0\}$ . De manera análoga para el agente  $j$ .
- **División:** El remanente del estado, se divide equitativamente entre los agentes.

Es decir, a cada agente se le asigna inicialmente lo que le concede el otro agente, más la mitad del remanente del estado después de las concesiones.

De esta construcción, se deduce que ningún agente recibe una asignación mayor a su demanda. Por lo tanto,  $CD$  constituye una regla bien definida.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , con  $|N| = 2$  y cada  $i \in N$ , la **regla conceder y dividir (CD)** propone una asignación:

$$CD_i(E, c) = \max\{E - c_j, 0\} + \frac{E - \max\{E - c_j, 0\} - \max\{E - c_i, 0\}}{2}, \text{ tales que } i \neq j. \quad (2.4)$$

Se presenta la representación geométrica de la aplicación de la regla  $CD$  para el caso de dos agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2)$ .

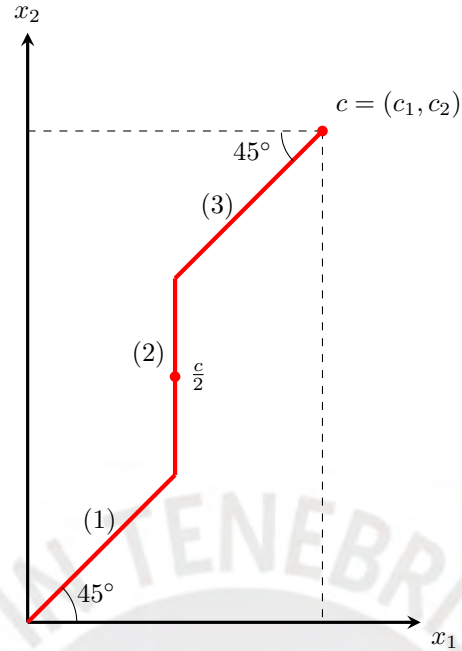


Figura 2.9: Trayectoria de la regla conceder y dividir para el caso de dos agentes y vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ .

**Observación 2.2.4.** En la figura 2.9, la línea de color rojo representa la trayectoria de la **regla conceder y dividir (CD)**. Esta trayectoria se divide en tres tramos:

- Primer tramo (1): Inicia en el origen  $(0, 0)$  y continúa en línea recta con pendiente  $45^\circ$  hasta que el valor del estado sea igual a la demanda del primer agente. Este tramo de la trayectoria refleja cómo las asignaciones se incrementan de forma equitativa a medida que el estado aumenta, hasta alcanzar el valor de la demanda del primer agente. Es decir, si  $E \leq c_1 < c_2$ , dado que  $E - c_1 < 0$ , el agente 1 concede 0 al agente 2. De manera análoga, el agente 2 concede 0 al agente 1. Entonces, el estado se divide equitativamente entre los agentes, y se obtiene una asignación  $x = (\frac{E}{2}, \frac{E}{2})$ .
- Segundo tramo (2): Inicia en el punto  $(\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2})$  y sigue la línea vertical hasta que el valor del estado sea igual a la demanda del segundo agente. En este tramo, cualquier aumento del estado se asigna exclusivamente al segundo agente. Es decir, si  $c_1 < E \leq c_2$ , dado que  $E - c_1 > 0$ , el agente 1 concede “ $E - c_1$ ” al agente 2. Asimismo, como  $E - c_2 \leq 0$ , el agente 2 cede 0 al agente 1, se obtiene una asignación provisional  $(0, E - c_1)$ . El remanente del estado  $c_1$  se reparte equitativamente entre los agentes y se obtiene la asignación:  $x = (\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2})$ .

- Tercer tramo (3): Inicia en el punto  $(\frac{c_1}{2}, c_2 - \frac{c_1}{2})$  y sigue la línea recta de pendiente  $45^\circ$  hasta alcanzar el vector de demandas  $c$ . En este tramo, cualquier incremento del estado se distribuye equitativamente entre los agentes. Es decir, si  $c_1 < c_2 < E$ , dado que  $E - c_1 > 0$ , el agente 1 concede al agente 2 “ $E - c_1$ ”. Asimismo, como  $E - c_2 > 0$  el agente 2 concede “ $E - c_2$ ” al agente 1, se obtiene una asignación provisional  $(E - c_2, E - c_1)$ . El remanente del estado “ $c_1 + c_2 - E$ ” se reparte equitativamente entre los agentes, y se obtiene la asignación  $x = (\frac{E+c_1-c_2}{2}, \frac{E-c_1+c_2}{2})$ .

### 2.2.5. Regla del Talmud

El Talmud babilónico representa una extensa compilación de resoluciones jurídicas y decisiones religiosas judías, establecidas durante los primeros cinco siglos d.C. Incluye dos tipos de enseñanzas:

- 1) La Mishná: Consiste en declaraciones concisas de leyes, transcritas a partir de la tradición oral transmitida a lo largo de generaciones.
- 2) El Guemará: Comprende análisis y comentarios elaborados por los rabinos contemporáneos sobre los preceptos contenidos en la Mishná.

La *regla del Talmud* es un método de distribución sistemático que abstrae y amplía las resoluciones numéricas presentadas en el Talmud babilónico. Este método aborda situaciones legales y financieras, como contratos matrimoniales, arrendamientos, ventas y objetos encontrados.

**Definición 2.2.5.** La **regla del Talmud**, denotada por  $T$ , es aquella regla que propone la siguiente asignación:

- Si  $E \leq \frac{1}{2}C$ , la regla del Talmud se comporta de manera similar a la regla de igual ganancia. Cada reclamante recibe el mínimo entre la mitad de su reclamación y un número real positivo  $\lambda$ , que es igual para todos. Esto asegura que nadie reciba más de la mitad de su reclamación, y si el estado es suficientemente pequeño, todos reciben la misma asignación.
- Si  $E > \frac{1}{2}C$ , la regla del Talmud se comporta de manera similar a la regla de igual pérdida. Cada reclamante recibe al menos la mitad de su demanda, y el excedente se distribuye de tal manera que las pérdidas se igualan tanto como sea posible.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$ , la **regla del Talmud (T)** propone una asignación:

$$T_i(E, c) = \begin{cases} \text{mín}\{\frac{1}{2}c_i, \lambda\} & , \text{si } E \leq \frac{1}{2}C \\ \text{máx}\{\frac{1}{2}c_i, c_i - \mu\} & , \text{si } E > \frac{1}{2}C \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  y  $\mu \in \mathbb{R}_+$  se eligen de modo que  $\sum_{i \in N} T_i(E, c) = E$ .

Se puede observar que la regla del Talmud presenta una combinación de elementos de la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida, dependiendo de si el monto a distribuir es menor o mayor que la mitad de la demanda agregada.

De aquí obtenemos una definición alternativa para la regla del Talmud:

$$T(E, c) = \begin{cases} CEA(E, \frac{c}{2}) & \text{si } E \leq \frac{C}{2} \\ \frac{c}{2} + CEL(E - \frac{C}{2}, \frac{c}{2}) & \text{si } E > \frac{C}{2} \end{cases} \quad (2.6)$$

Se presenta la representación geométrica de la aplicación de la regla  $T$  para el caso de dos agentes y un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2)$ .

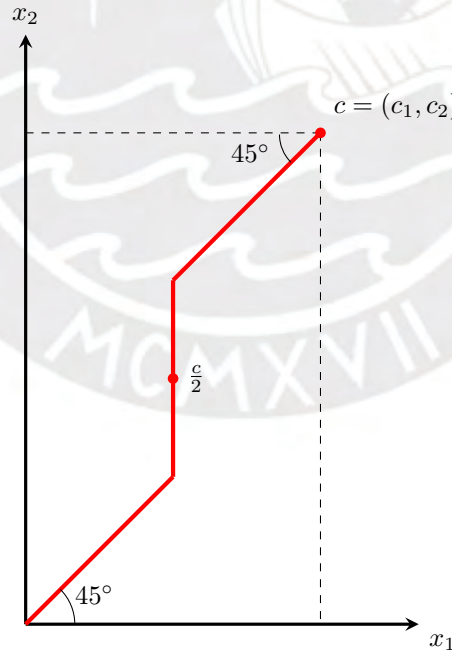


Figura 2.10: Trayectoria de la regla del Talmud para el caso de dos agentes y vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ .

**Observación 2.2.5.** En la figura 2.10, la línea de color rojo representa la trayectoria de la **regla del Talmud (T)**. Esta trayectoria se divide en dos tramos:

- Primer tramo: Parte del origen  $(0, 0)$  y continúa hasta llegar a la mitad de las demandas de los agentes  $\frac{c}{2}$ . En este tramo, aplicamos la regla  $CEA(E, \frac{c}{2})$  hasta que el valor del estado alcance la mitad del valor de la demanda agregada.
- Segundo tramo: Parte del punto  $\frac{c}{2}$  y continúa hasta llegar al vector de demandas  $c$ . En este tramo, aplicamos  $\frac{c}{2} + CEL(E - \frac{C}{2}, \frac{c}{2})$  cuando el valor del estado aumenta de  $\frac{C}{2}$  a  $C$ .

Es importante destacar que la regla del Talmud y la regla conceder y dividir coinciden para el caso de dos agentes.

De la figura 2.9, se deduce que la regla del Talmud para dos agentes puede expresarse como:

$$T(E, c) = \begin{cases} (\frac{E}{2}, \frac{E}{2}) & , si E \leq c_1 \\ (\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2}) & , si c_1 < E \leq c_2 \\ (c_1 - \frac{C-E}{2}, c_2 - \frac{C-E}{2}) & , si c_2 < E \end{cases} \quad (2.7)$$

La última regla que analizará es la regla de llegada aleatoria, estudiada y formalizada por primera vez por O'Neill (1982). Esta regla simula todas las posibles secuencias de llegada de los agentes, donde cada agente recibe su demanda respetando estrictamente su orden de llegada hasta que se agote el estado. Para garantizar la equidad, la regla promedia todos los posibles resultados obtenidos de estas simulaciones. Este enfoque proporciona una asignación final que refleja la justicia basada en el azar, eliminando cualquier sesgo potencial asociado a un orden específico de llegada.

### 2.2.6. Regla de llegada aleatoria

**Definición 2.2.6.** La **regla de llegada aleatoria**, denotada por  $RA$ , es aquella regla que distribuye el estado basándose en la secuencia de llegada de los agentes, es decir, el orden en que los agentes llegan, uno tras otro, a reclamar una parte del estado. Este enfoque simula múltiples escenarios de llegada secuencial para lograr una asignación equitativa. El proceso de asignación se desarrolla en dos fases:

- 1) Los agentes se presentan secuencialmente, uno tras otro. A cada agente se le asigna el pago de acuerdo a su orden de llegada, que es el mínimo entre su demanda individual y el remanente del estado. Específicamente:

- El primer agente recibe el mínimo entre su demanda y el estado.
- El segundo agente recibe el mínimo entre su demanda y lo que queda del estado después de la asignación del primer agente.
- El proceso continúa sucesivamente hasta agotar el estado, los agentes que lleguen después de agotar el estado no reciben asignación alguna.

2) Se consideran todas las permutaciones posibles del orden de llegada de los agentes y calculamos el vector de asignación para cada caso. Finalmente, se calcula el promedio del vector de asignaciones de todas las permutaciones posibles.

Formalmente:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$ , la **regla de llegada aleatoria (RA)** propone una asignación:

$$RA_i(E, d) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min \left\{ c_i, \max \left\{ E - \sum_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} c_j, 0 \right\} \right\}$$

donde  $\pi^N$  representa el conjunto de todas las posibles secuencias de llegada y  $\pi$  representa una secuencia de llegada.

## 2.3. Propiedades de las reglas de bancarrota

En esta sección, se enfocará en las propiedades de las reglas de reparto o bancarrota, y se analizarán sus implicaciones. El análisis comenzará con las propiedades más básicas o naturales, para luego continuar con las propiedades que deseamos imponer, dependiendo de la situación o escenario que pretenda abordar, así como de las restricciones que se deben respetar.

### 2.3.1. Propiedades de las reglas de bancarrota: Definiciones y conceptos básicos

La primera propiedad que se presentará se deriva de forma directa de la definición de la regla de bancarrota (eficiencia, no negatividad y la condición de que ningún agente reciba más de lo que reclama).

**Propiedad 2.1. Derechos mínimos (DM)**

Esta propiedad establece un umbral mínimo de asignación para cada agente en un problema de bancarrota. La propiedad nos dice que la cantidad otorgada a cada agente debe ser, como mínimo, el equivalente al remanente entre el estado y la demanda agregada de los demás agentes (siempre que esta cantidad sea no negativa). Es decir, lo que "sobraría" si los demás agentes fueran compensados en su totalidad.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$ , se establece:

$$F_i(E, c) \geq m_i$$

donde  $m_i(E, c)$  es el derecho mínimo del agente  $i$ , con  $m_i(E, c) = \max \left\{ E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j, 0 \right\}$ .

**Observación 2.3.1.** La propiedad de derechos mínimos establece un límite inferior para cualquier regla de bancarrota, garantizando que la asignación de cada agente sea al menos igual a su derecho mínimo y no exceda su demanda. Es decir:

$$m_i(E, c) \leq F_i(E, c) \leq c_i$$

La siguiente propiedad, propuesta por Moreno-Tertero y Villar (2004), garantiza a cada agente una participación mínima del estado.

**Propiedad 2.2. Aseguramiento (AS)**

Esta propiedad garantiza a cada agente una porción mínima de los recursos disponibles, independientemente de las demandas de los demás participantes. La cantidad asegurada que cada agente recibe depende únicamente de su demanda y del número total de demandantes. Específicamente, la propiedad establece que la cantidad mínima asegurada de cada agente es la  $n$ -ésima parte del mínimo entre su demanda y el estado (donde  $n$  es el número de agentes).

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para todo  $i \in N$ , se establece:

$$F_i(E, c) \geq \frac{1}{n} \min\{c_i, E\}$$

Las siguientes dos propiedades expresan el concepto de una distribución o asignación justa.

**Propiedad 2.3. Tratamiento igualitario (TI)**

Esta propiedad esencial establece que los agentes con demandas idénticas deben recibir asignaciones iguales. Esta propiedad garantiza una distribución imparcial del estado, asegurando que todos los agentes sean tratados por igual, y ninguno goza de preferencias o privilegios. Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $\{i, j\} \subseteq N$ , si  $c_i = c_j$  se establece:  $F_i(E, c) = F_j(E, c)$

**Propiedad 2.4. Anonimato (AN)**

Esta propiedad establece que la distribución del estado depende exclusivamente de la estructura y magnitud de las demandas de los agentes. En otras palabras, la asignación es independiente del orden de los participantes, garantizando así la invariabilidad bajo cualquier permutación de los agentes.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $\pi \in \Pi^N$ , se establece:

$$F_{\pi(i)}(E, c') = F_i(E, c)$$

donde  $\Pi^N$  es el conjunto de todas las permutaciones de  $N$  y  $c' := (c_{\pi(j)})_{j \in N}$ .

Las siguientes dos propiedades que se examinarán se clasifican como "protectoras" porque su objetivo principal es proteger los intereses de los agentes con demandas relativamente pequeñas.

**Propiedad 2.5. Compensación total condicionada (CT)**

Esta propiedad establece que los agentes con demandas lo suficientemente pequeñas deben ser completamente compensados. No obstante, el desafío radica en determinar qué tan pequeña debe ser esa demanda para que el agente reciba un trato preferencial. Un criterio introducido por Herrero y Villar (2001), denominado como "sostenibilidad", establece que la demanda de un agente es sostenible si, al reemplazarla por la demanda de cualquier otro agente con una demanda mayor, el estado es suficiente para compensar a todos los demandantes. Es decir, el agente  $i$  tiene demanda sostenible si  $\sum_{j \in N} \min\{c_j, c_i\} \leq E$ .

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , para cada  $i \in N$  con  $\sum_{j \in N} \min\{c_j, c_i\} \leq E$ ,

se establece:

$$F_i(E, c) = c_i$$

**Propiedad 2.6. Exención (EXE)**

Esta propiedad establece que cuando el estado es suficientemente grande en relación con las demandas de los agentes, solo aquellos con demandas altas deben ser racionados. Es decir, si la demanda de un agente es menor o igual a la división igualitaria, la regla indica que este agente debe estar exento de reducciones y debe recibir su demanda completa.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$  tal que  $c_i \leq \frac{E}{n}$ , se establece:

$$F_i(E, c) = c_i$$

**Observación 2.3.2.** En los problemas de bancarrota, es razonable concebir escenarios donde los agentes con demandas relativamente pequeñas deban ser completamente compensados. Por ejemplo, en el caso de una institución financiera en bancarrota, las demandas de las personas suelen ser mucho menores que las demandas de las empresas. En tales circunstancias, se considera razonable priorizar a las personas en la distribución de los activos para proteger a los agentes más vulnerables, ya que sus demandas (ahorros) representan la mayor parte de su riqueza. Cabe resaltar que este principio de protección al pequeño ahorrista no es solo una consideración ética, sino que también se ha convertido en una norma legal en muchos países. (En nuestro país, los ahorros están cubiertos por el Fondo de Seguro de Depósitos por un monto de hasta 121,500 soles).

Las siguientes dos propiedades capturan la idea opuesta en cuanto al tratamiento de los agentes con demandas pequeñas. Estas propiedades proponen criterios que podrían resultar en un tratamiento menos favorable para estos agentes en determinados escenarios de distribución del estado.

**Propiedad 2.7. Compensación nula condicionada (CN)**

Esta propiedad establece que los agentes con demandas lo suficientemente pequeñas deben recibir una compensación igual a cero. Herrero y Villar (2001) propusieron un criterio para determinar cuán pequeña debe ser esta demanda para recibir tal trato, conocido como "demanda residual". Según este criterio, la demanda del agente  $i$  se considera residual si, el estado sigue siendo insuficiente para satisfacer todas las demandas cuando reemplazamos la demanda del agente  $j$  por cero si su demanda es menor a la del agente  $i$  y por la diferencia en caso contrario. Es decir, el agente  $i$  tiene demanda residual si:  $\sum_{j \in N} \max\{0, c_j - c_i\} \geq E$ .

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y  $\forall i \in N$  con  $\sum_{j \in N} \max\{0, c_j - c_i\} \geq E$ , se establece:

$$F_i(E, c) = 0$$

**Propiedad 2.8. Exclusión (EXC)**

Esta propiedad establece que los agentes con demandas lo suficientemente pequeñas sean excluidos del proceso de distribución. La pérdida agregada promedio es un criterio para determinar cuán pequeña debe ser esta demanda. Es decir, si la demanda de un agente es menor o igual a la pérdida agregada promedio, la propiedad indica que este agente debe ser excluido del reparto y debe recibir una asignación igual a cero.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $i \in N$  con  $c_i \leq \frac{L}{n}$ , se establece:

$$F_i(E, c) = 0$$

**Observación 2.3.3.** Las propiedades de compensación vacía y exclusión presentan un enfoque opuesto a las propiedades de compensación total y exención. Es razonable concebir algunos escenarios donde los agentes con mayores demandas sean favorecidos sobre los agentes con demandas pequeñas. Por ejemplo, en el caso de la tributación, tiene sentido eximir de este pago a los agentes con menores ingresos; o en el caso de la salud, donde se prioriza la cobertura total de enfermedades graves, mientras que las afecciones menores quedan excluidas (atención por emergencia vs cólicos). Cabe resaltar que estas propiedades protegen a los agentes con demandas altas.

La siguiente propiedad, planteada por Aumann y Mascheler (1985), establece el respeto al orden (orden en  $\mathbb{R}$ ) de las demandas.

**Propiedad 2.9. Preservación del orden (PO)**

Esta propiedad establece que la asignación debe respetar el orden de las demandas. Es decir, el agente con una demanda mayor que otro debe recibir una asignación mayor y sufrir una pérdida mayor que el agente con una demanda menor.

Específicamente, si el agente  $j$  tiene una demanda al menos tan grande como la del agente  $i$ , entonces no solo recibirá una asignación no menor que la del agente  $i$ , sino que también experimentará una pérdida no menor que la del agente  $i$ .

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $\{i, j\} \subseteq N$  con  $c_i \leq c_j$ , se establece:

$$F_i(E, c) \leq F_j(E, c) \quad \text{y} \quad c_i - F_i(E, c) \leq c_j - F_j(E, c)$$

La siguiente propiedad, estudiada por Young (1988), nos proporciona la independencia de escala en las asignaciones.

**Propiedad 2.10. Homogeneidad (HO)**

Esta propiedad establece que si tanto el estado como las demandas de los agentes se multiplican por el mismo número real positivo, entonces las asignaciones de los agentes también deben multiplicarse por ese mismo número. En otras palabras, esta propiedad nos garantiza que la regla es invariante ante cambios de la unidad de medida o transformaciones de escala, ya sea monetaria (conversiones de divisas) o física (conversiones entre diferentes unidades de longitud, por ejemplo).

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N}$  y  $(E, c) \in B^N$ , se establece:

$$F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E, c), \quad \forall \lambda > 0$$

La siguiente propiedad, estudiada por Dagan (1966), estudia el caso donde las demandas de algunos agentes superan al estado a repartir.

**Propiedad 2.11. Independencia al truncar demandas (ITD)**

Esta propiedad establece que si la demanda de un agente supera el estado disponible, el exceso de dicha demanda debe ser ignorado. Esta demanda inviable (pues no se puede reclamar más de lo que hay disponible) se debe reducir hasta ser igual al estado. Esta reducción no debería afectar el vector de asignación original. Esta propiedad garantiza que la regla es independiente de las demandas irrelevantes, ya que solo se consideran las demandas relevantes.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N}$  y  $(E, c) \in B^N$ , se establece:

$$F(E, c) = F(E, c^E)$$

donde  $c_i^E = \min\{E, c_i\}$  y  $c^E = (c_1^E, \dots, c_n^E)$ .

A continuación, se analizarán las siguientes propiedades de monotonía.

**Propiedad 2.12. Monotonía respecto al estado (ME)**

Esta propiedad nos garantiza que ante un incremento del estado, la asignación de ningún agente debe disminuir. Es decir, si hay una mejora del estado y las demandas se mantienen constantes, la asignación de cada agente debe ser al menos tan grande como su asignación inicial.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y  $E' \in \mathbb{R}_+$  con  $C > E' > E$ , se establece:

$$F_i(E', c) \geq F_i(E, c), \text{ para todo } i \in N.$$

donde  $(E', c) \in B^N$ .

**Propiedad 2.13. Monotonía respecto a las demandas (MD)**

Esta propiedad establece que, si la demanda de un agente se incrementa, mientras las demandas de los demás agentes permanecen constantes, la asignación del agente cuya demanda aumentó debe ser, como mínimo, igual a su asignación inicial.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y un agente  $i$  con  $c'_i > c_i$ , se establece:

$$F_i(E, (c_{-i}, c'_i)) \geq F_i(E, c)$$

donde  $c_{-i} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  denota el vector que resulta de la eliminación de la  $i$ -ésima coordenada  $c_i$  del vector  $c$ .

**Propiedad 2.14. Composición de los derechos mínimos (CDM)**

Esta propiedad establece que cada agente debe recibir primero su derecho mínimo. Luego, se ajustan las demandas de los agentes restando los derechos mínimos ya concedidos, y se distribuye el remanente del estado aplicando la regla de bancarrota. Las demandas ajustadas son no negativas y su suma es al menos tan grande como el remanente del estado.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , se establece:

$$F(E, c) = m(E, c) + F\left(E - \sum_{i \in N} m_i(E, c), c - m(E, c)\right)$$

donde  $m(E, c)$  es el vector de los derechos mínimos.

Las siguientes dos propiedades, planteadas por Moulin (2000), abordan situaciones en las que el valor del estado no está claramente definido o es incierto. Estas propiedades contemplan escenarios donde se realiza una distribución inicial basada en un valor tentativo del estado, el cual puede posteriormente aumentar o disminuir. Su importancia radica en su aplicabilidad a entornos económicos volátiles, donde el valor del estado está sujeto a fluctuaciones.

**Propiedad 2.15. Composición hacia arriba (CAR)**

Esta propiedad establece que, después de distribuir el estado entre los demandantes, se reevalúa el valor del estado y resulta ser mayor de lo que se pensó inicialmente. Para abordar este nuevo escenario, se presentan dos opciones:

- 1) Cancelar el reparto inicial y resolver el nuevo problema de bancarrota por separado.
- 2) Permitir que los agentes conserven sus asignaciones iniciales, ajustar las demandas restando lo ya asignado, y distribuir el incremento del estado según estas demandas ajustadas.

La propiedad requiere que ambos procedimientos den el mismo resultado final. En otras palabras, el problema de bancarrota se puede resolver como la suma de dos problemas parciales, garantizando que resolver el problema por etapas no altere las asignaciones finales de los agentes.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para todo  $E_1 < E$ , se establece:

$$F(E, c) = F(E_1, c) + F(E - E_1, c - F(E_1, c)).$$

Si se considera  $E = E_1 + E_2$ , se obtiene una pequeña variante de la propiedad:

$$F(E, c) = F(E_1, c) + F(E_2, c - F(E_1, c)).$$

**Propiedad 2.16. Composición hacia abajo (CAB)**

Esta propiedad establece que, después de realizar el reparto del estado entre sus demandantes, se reevalúa el valor del estado y resulta que éste es menor de lo que se asumió inicialmente. Para abordar este nuevo escenario, se presentan dos opciones:

- 1) Eliminar el reparto inicial y aplicar la regla al problema de bancarrota actualizado.
- 2) Considerar las asignaciones iniciales como nuevas demandas sobre el valor del estado actualizado y aplicar la regla a este nuevo problema.

La propiedad requiere que ambos procedimientos den el mismo resultado final.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para todo  $E' < E$ , se establece:

$$F(E', c) = F(E', F(E, c))$$

La siguiente propiedad es planteada y estudiada por Hwang (2015).

**Propiedad 2.17. Compensación equilibrada (CE)**

Esta propiedad establece que, para cualquier par de agentes en un problema de bancarrota, se cumple la siguiente condición: La diferencia entre la asignación que recibe el primer agente al resolver el problema de bancarrota original y el problema modificado sin contar al segundo agente, es equivalente a la diferencia entre la asignación que recibe el segundo agente al resolver el problema original y el problema resultante de eliminar al primer agente considerado. En esencia, una regla verifica la propiedad de compensación equilibrada si el impacto en la distribución al excluir a un agente determinado es equivalente al que se produce al excluir a cualquier otro agente del conjunto.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada  $\{i, j\} \subseteq N$ , se establece:

$$F_i(N, E; c) - F_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) = F_j(N, E; c) - F_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}}),$$

donde  $E_{N \setminus \{k\}} = \max\{E - c_k, 0\}$  para todo  $k \in N$ .

Las siguientes propiedades expresan la independencia de las reglas con respecto a las variaciones en las poblaciones de agentes.

**Propiedad 2.18. Consistencia (CO)**

Esta propiedad establece que, después de resolver el problema de bancarrota, algunos agentes reciben su asignación y se retiran. Para los agentes restantes, se considera un problema de bancarrota reducido. En este problema reducido, las demandas de los agentes que permanecen se mantienen y el estado a repartir se actualiza a la suma de las asignaciones de estos agentes restantes. Luego, se vuelve a aplicar la regla de reparto a este nuevo problema reducido. El requisito es que, para cualquier problema reducido, cada agente restante debe recibir la misma asignación que se le otorgó inicialmente. Esta propiedad previene que subgrupos de agentes intenten renegociar sus asignaciones para obtener un mejor pago después de que se haya realizado la distribución para toda la sociedad. Esencialmente, garantiza que si una asignación es buena para la sociedad también es buena para cualquier grupo más pequeño de agentes.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , para cada  $N' \subseteq N$  y para todo  $i \in N'$ , se establece:

$$F_i(N, E, c) = F_i(N', \sum_{j \in N'} F_j(E, c), c_{N'})$$

**Propiedad 2.19. Consistencia bilateral (COB)**

Esta propiedad es un caso más débil que la propiedad de consistencia general, ya que se limita a situaciones donde todos los agentes, excepto dos, se retiran con sus asignaciones. En otras palabras, la consistencia bilateral se enfoca exclusivamente en subgrupos o problemas reducidos que involucran a solo dos agentes. Esta restricción simplifica el análisis, permitiendo examinar el comportamiento de la regla de asignación en su forma más elemental, es decir, en interacciones entre pares de agentes.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , para cada  $N' \subseteq N$  con  $|N'| = 2$ , y para todo  $i \in N'$ , se establece:

$$F_i(N, E, c) = F_i(N', \sum_{j \in N'} F_j(E, c), c_{N'}).$$

**Propiedad 2.20. Consistencia inversa (COI)**

Esta propiedad establece que, si una asignación para un problema de bancarrota tiene la característica de que la solución de la regla de bancarrota a cada uno de los problemas reducidos asociados a dos agentes coincide con la asignación restringida al subgrupo, entonces dicha asignación debe ser la solución que la regla de bancarrota proporciona al problema inicial. Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y para cada asignación  $x$  de  $(E, c)$ . Si para cada  $N' \subseteq N$  con  $|N'| = 2$  y  $F(N', x(N'), c_{N'}) = x_{N'}$  entonces se establece:

$$x = F(E, c).$$

**Propiedad 2.21. Dualidad (DU)**

Esta propiedad establece una relación simétrica entre dos reglas de bancarrota: una asigna el estado y la otra distribuye la pérdida agregada. Mediante la dualidad, podemos definir, para cualquier regla de bancarrota, una regla dual asociada. El proceso consiste en otorgar a cada agente su demanda, aplicar la regla para asignar las pérdidas y finalmente, restar las pérdidas de las demandas. El resultado es una nueva regla de bancarrota, que es el dual de la utilizada inicialmente. En esencia, esta regla dual asigna los recursos disponibles del mismo modo que la regla original maneja las pérdidas.

Formalmente:

Dada una regla  $F$ , para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , se define el dual de la regla de bancarrota  $F$ , denotado por  $F^d$ , de la siguiente manera:

$$F^d(E, c) = c - F(L, c).$$

**Observación 2.3.4.** La dualidad en las reglas de bancarrota es una operación idempotente. Esto significa que, al aplicar dos veces consecutivas la dualidad a una regla, se obtiene la regla original,  $(F^d)^d = F$ . Las reglas  $F$  y  $F^d$  se relacionan de la siguiente manera:  $F^d$  distribuye lo que está disponible, mientras que  $F$  divide el déficit.

Es crucial notar que la dualidad se aplica tanto a las reglas como a sus propiedades. Esto implica que dos propiedades de las reglas de bancarrota se consideran duales si, cuando una regla satisface una de ellas, su regla dual satisface la otra.

**Definición 2.3.1.** Decimos que  $\mathcal{P}^d$  es la **propiedad dual** de  $\mathcal{P}$ , si para cualquier regla de bancarrota  $F$  se cumple:

$$F \text{ satisface la propiedad } \mathcal{P} \Leftrightarrow F^d \text{ satisface la propiedad } \mathcal{P}^d.$$

**Propiedad 2.22. Autodualidad (ADU)**

Esta propiedad establece que una regla de bancarrota genera una asignación equivalente a su regla dual. Es decir, se obtiene el mismo resultado final independientemente de si aplicamos la regla para distribuir el estado o si la utilizamos para distribuir la pérdida total. Formalmente: Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , la regla de bancarrota  $F$  es autodual, si se cumple:

$$F(E, c) = c - F(L, c)$$

**2.3.2. Resultados derivados de las propiedades de las reglas de bancarrota**

A continuación, se presentan las implicaciones lógicas entre las propiedades.

El siguiente lema nos garantiza que si una regla de bancarrota cumple la propiedad CAR, es estable ante variaciones del estado, garantizando así la continuidad de la regla respecto al estado.

**Lema 2.3.1.** Si una regla de bancarrota cumple con la propiedad CAR, entonces la regla de bancarrota es continua respecto al estado.

*Demostración.*

Se analiza, que si una regla de bancarrota satisface la propiedad CAR esto garantiza la continuidad respecto al estado. En efecto:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y el vector de demandas fijo  $c \in \mathbb{R}_+^n$ , sea  $F$  una regla de bancarrota que satisface CAR.

Se asume que  $F(\cdot, c)$  no es continua respecto al estado para algún agente. Es decir, se puede encontrar un  $E_t < E$  con  $\lim_{t \rightarrow \infty} E_t = E$  y  $\bar{E}_t < E$  con  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{E}_t = E$ .

Definiendo  $a_t = F_i(E_t, c)$  y  $b_t = F_i(\bar{E}_t, c)$  con  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t = a$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = b$ , entonces se cumple que  $a \neq b$ . Dado que la regla  $F$  cumple la propiedad  $CAR$ , de la definición de la propiedad es fácil deducir que la regla  $F$  cumple la propiedad  $ME$ , entonces se tiene que  $a < b$  y  $a \leq F_i(E, c) \leq b$ .

Se consideran dos casos:

- **Caso 1:** Si  $a \leq F_i(E, c) < b$

Para todo  $j \in N$ , se define  $c'_j = c_j - F_j(E, c)$  y sea  $E_0 > 0$  tal que

$$F(E_0, c') = b - F_i(E, c) \quad (2.8)$$

De la propiedad  $CAR$  y de (2.8) se tiene que

$$b < F_i(E + E_0, c) = F_i(E, c) + F(E_0, c') < F_i(E, c) + b - F_i(E, c)$$

Lo cual genera una contradicción.

- **Caso 2:** Si  $a < F_i(E, c) \leq b$

De manera similar al caso anterior, se llega a la contradicción.

□

Análogo al lema anterior, si una regla de bancarrota cumple la propiedad  $CAB$ , esta es estable ante variaciones del estado, garantizando así la continuidad de la regla respecto al estado.

**Lema 2.3.2.** Si una regla de bancarrota cumple con la propiedad  $CAB$ , entonces la regla de bancarrota es continua respecto al estado.

El siguiente lema, propuesto por Chun (1999), establece una relación entre las propiedades de consistencia y monotonía respecto al estado. Es decir, si una regla cumple estas dos propiedades, necesariamente satisface la propiedad de consistencia inversa. La propiedad de consistencia inversa es particularmente útil para generalizar resultados de problemas de bancarrota con dos demandantes a problemas con un número arbitrario de demandantes.

**Lema 2.3.3.** Si una regla de bancarrota cumple las propiedades de CO y ME, entonces la regla cumple la propiedad de COI.

El siguiente lema, propuesto por Herrero y Villar (2001), vincula las propiedades de composición hacia abajo y exención. Es decir, para un problema de bancarrota con dos agentes, si se cumplen estas dos propiedades, se garantiza la propiedad de tratamiento igualitario.

**Lema 2.3.4.** Si una regla de bancarrota cumple las propiedades de CAB y EXE para el caso de dos agentes, entonces la regla cumple la propiedad de TI.

El siguiente lema, propuesto por Moreno-Ternero y Villar (2004), vincula las propiedades de composición hacia abajo y autodualidad. Es decir, para un problema de bancarrota con dos agentes si se cumplen estas dos propiedades se garantiza la propiedad de tratamiento igualitario.

**Lema 2.3.5.** Si una regla de bancarrota cumple las propiedades de CAB y ADU para el caso de dos agentes, entonces la regla cumple la propiedad de TI.

### 2.3.3. Resultados de la propiedad de dualidad

El siguiente lema se obtiene directamente de la definición de  $CEA$  y  $CEL$ .

**Lema 2.3.6.** Las reglas de bancarrota  $CEA$  y  $CEL$  son duales.

**Ejemplo 2.3.1.** Sea el problema de bancarrota con 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{N}$ , el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y el estado  $E = 450$ . Para el problema de bancarrota, se requiere calcular el dual de la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida.

**Solución:**

Dado un estado  $E = 450$ , la demanda agregada  $C = 600$  y la pérdida agregada  $L = 150$ .

Al resolver el problema de bancarrota mediante la regla  $CEA$  se tiene una asignación:

$$CEA(450, (100, 200, 300)) = (100, 175, 175) \quad (2.9)$$

Al resolver el problema de bancarrota mediante la regla  $CEL$  se tiene una asignación:

$$CEL(450, (100, 200, 300)) = (50, 150, 250) \quad (2.10)$$

- Cálculo del dual de  $CEA(450, (100, 200, 300))$  :

$$CEA^d(450, (100, 200, 300)) = (100, 200, 300) - CEA(150, (100, 200, 300)) = (50, 150, 250)$$

Al reemplazar (2.10) en el dual de  $CEA$ , se tiene

$$CEA^d(450, (100, 200, 300)) = CEL(450, (100, 200, 300))$$

- Cálculo del dual de  $CEL(450, (100, 200, 300))$  :

$$CEL^d(450, (100, 200, 300)) = (100, 200, 300) - CEL(150, (100, 200, 300)) = (100, 175, 175)$$

Al reemplazar (2.9) en el dual de  $CEL$ , se tiene

$$CEL^d(450, (100, 200, 300)) = CEA(450, (100, 200, 300))$$

Para nuestro problema de bancarrota podemos notar que la regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida son duales.

La siguiente proposición relaciona dos propiedades con la dualidad.

**Proposición 2.3.1.** Las siguientes propiedades son duales:

- $CAR$  y  $CAB$
- $CT$  y  $CN$
- $EXE$  y  $EXC$
- $ITD$  y  $CDM$

*Demostración.*

Se verificará que la propiedad de composición hacia arriba y la propiedad de composición hacia abajo son duales. En efecto:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y el vector de demandas fijo  $c \in \mathbb{R}_+^n$ , sea  $F$  una regla de bancarrota que satisface  $CAB$ , para todo  $E_1, E_2 \in [0, E]$ , además  $E = E_1 + E_2$ .

Según la definición de la propiedad de dualidad, se tiene que:

$$F^d(E, c) = c - F(L, c) = c - F(C - E, c) = F(C - E_1 - E_2, c) \quad (2.11)$$

Donde  $L_1 = C - E_1$  y  $x = F(L_1, c)$ , con  $X = \sum_{i=1}^n x_i$ .

De la definición de la propiedad  $CAB$ , se tiene que:

$$F(L, c) = F(L, F(L_1, c)) = F(L, x) = F(X - E_2, x) = x - F^d(E_2, x) \quad (2.12)$$

Al reemplazar (2.12) en (2.11), se obtiene que:

$$F^d(E, c) = c - x + F^d(E_2, c) = c - F(L_1, c) + F^*(E_2, z) = F^d(E_1, c) + F^d(E_2, x)$$

Por lo tanto, se concluye que la regla  $F^d$  satisface la propiedad  $CAR$ .

De manera análoga, se supone que la regla  $F^d$  satisface la propiedad  $CAR$ .

Se define  $y = F(E, c)$ , and  $z = F^*(L, c)$ , se cumple que:

$$F(E_1, c) = c - F^d(L_1, c) = c - F^d(L + E_2, c) \quad (2.13)$$

De la definición de la propiedad  $CAR$  y (2.13), se deduce que:

$$F(E_1, c) = c - F^d(L, c) - F^d(E_2, c - z) \quad (2.14)$$

De la definición de la dualidad,  $F(E, c) = c - F^d(L, c)$ , en (2.14), se obtiene:

$$F(E_1, c) = F(E, c) - F^d(E_2, c - z) = x - F^d(E_2, c - z) \quad (2.15)$$

Por otro lado,

$$F(E_1, y) = y - F^d(E_2, y) \quad (2.16)$$

Como  $c = y + z$ , al reemplazar en (2.16) y de (2.15) se tiene que:

$$F(E_1, y) = y - F^d(E_2, c - z) = F(E_1, c) \quad (2.17)$$

Es decir,  $F(E_1, c) = F(E_1, y) = F(E_1, F(E, c))$

Por lo tanto, se concluye que la regla  $F$  satisface la propiedad  $CAB$  Las demás propiedades pueden demostrarse de manera análoga.  $\square$

El siguiente lema se obtiene directamente de la definición de  $P, T$  y  $RA$ .

**Lema 2.3.7.** Las reglas de bancarrota  $P, T$  y  $RA$  son autoduales.

**Proposición 2.3.2.** Las siguientes propiedades son autoduales  $TI, AN, PO, ME, CO, COB$  y  $COI$ .

El siguiente teorema, planteado por Herrero y Villar (2001), resulta útil para la caracterización de las propiedades de una regla de bancarrota y su correspondiente dual.

**Teorema 2.3.1.** Si una regla de bancarrota  $F$  es la única regla caracterizada por un conjunto de propiedades independientes  $\Pi = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$  si y solo si su regla dual  $F^d$  es la única regla caracterizada por el conjunto de propiedades duales independientes  $\Pi^d = \{\mathcal{P}_1^d, \dots, \mathcal{P}_k^d\}$ .

**Observación 2.3.5.** El teorema 2.3.1 se emplea frecuentemente para obtener una mayor cantidad de caracterizaciones de las reglas de bancarrota. Este teorema puede extenderse de la siguiente manera:

- Si una lista de propiedades  $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$  implican conjuntamente otra propiedad  $\bar{\mathcal{P}}$  si y solo si la lista de propiedades duales  $\{\mathcal{P}_1^d, \dots, \mathcal{P}_k^d\}$  implican conjuntamente el dual de esa propiedad  $\bar{\mathcal{P}}^d$ .

## 2.4. Caracterizaciones de las reglas de bancarrota

A continuación, se presentan diversas propiedades y teoremas relevantes para las reglas de bancarrota analizadas.

El siguiente lema, propuesto por Thomson (2011), conocido como lema del ascensor constituye una herramienta fundamental en el análisis de las reglas de bancarrota, ya que nos permite generalizar las caracterizaciones de una regla aplicable al caso de dos agentes a poblaciones arbitrarias.

**Lema 2.4.1.** Si una regla de bancarrota,  $F$ , cumple la propiedad de COB y coincide con otra regla de bancarrota,  $F'$ , que cumple la propiedad de COI para el caso de dos agentes, entonces estas reglas coinciden,  $F(N, E, c) = F'(N, E, c)$ , para cualquier  $N \in \mathcal{N}$ .

### 2.4.1. Caracterización de la regla proporcional

#### Proposición 2.4.1.

**La regla proporcional** satisface las propiedades DM, TI, AN, PO, HO, ME, MD, CAR, CAB, CO, COB, COI y ADU.

El siguiente teorema fue propuesto por Young (1988).

#### Teorema 2.4.1.

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de ADU y CAR si y solo si es la regla proporcional.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se demuestra que, si una regla de bancarrota satisface  $ADU$  y  $CAR$ , es suficiente para caracterizar a la regla proporcional. En efecto:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y se el vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^n$  fijo, sea  $F$  una regla de bancarrota que satisface  $ADU$  y  $CAR$ . Se define la trayectoria hacia  $c$  como la curva continua trazada por la función:

$$g_c(E) = c - F(E, c)$$

donde  $E$  varia de  $C$  a 0, siendo  $C = \sum_{i \in N} c_i$ . Es decir:

$$\begin{aligned} g_c &: [0, C] \rightarrow \mathbb{R}_+^n \\ E &\mapsto g_c(E) \end{aligned}$$

De la hipótesis,  $F$  satisface la propiedad  $CAR$ , del lema 2.3.1 garantiza que  $F_i(\cdot, c)$  es continua respecto a  $E$ , por el álgebra de funciones continuas, se tiene que  $g_c$  es continua en  $[0, C]$ .

Para todo  $x, y \in \mathbb{R}_{++}^n$ , se define  $x \mathcal{R} y$ : si  $x$  pertenece a la trayectoria hacia  $y$ . Es decir,

$$x \mathcal{R} y \iff \exists \bar{E} \in [0, E] : x = g_y(\bar{E}), \text{ con } E = \sum_{i \in N} y_i.$$

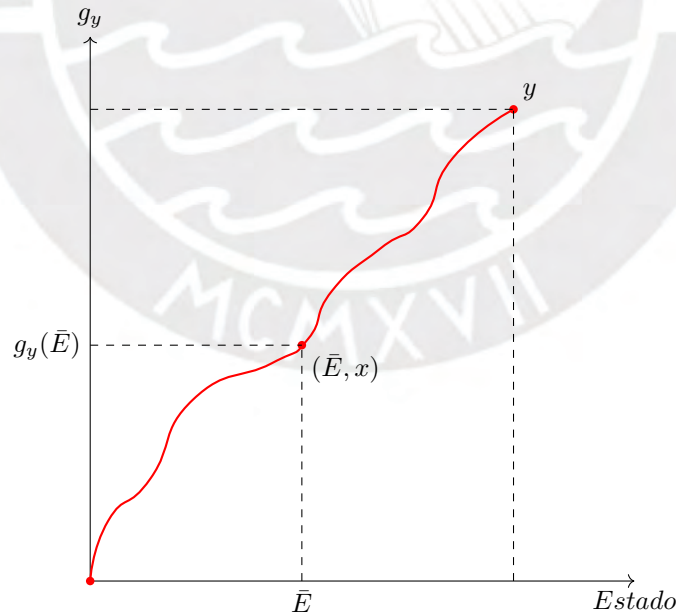


Figura 2.11:  $g_y$  es la trayectoria hacia  $y$ , como  $x \mathcal{R} y$  dado que  $\bar{E} \in [0, E]$  tenemos  $x = g_y(\bar{E})$  pertenece a la trayectoria hacia  $y$ .

**Afirmación 1:**  $R$  es transitiva.

En efecto, sean  $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^n$ . Si  $x \mathcal{R} y$  y  $y \mathcal{R} z$ , se debe demostrar que  $x \mathcal{R} z$ .

$$\text{si } x \mathcal{R} y \iff \exists E_1 \in [0, Z] : x = g_y(E_1) = y - F(E_1, y) \quad (2.18)$$

$$\text{si } y \mathcal{R} z \iff \exists E_2 \in [0, Z] : y = g_z(E_2) = z - F(E_2, z) \quad (2.19)$$

Al Reemplazar (2.19) en (2.18), se obtiene

$$x = y - F(E_1, y) = z - F(E_2, z) - F(E_1, z - F(E_2, z)).$$

Tomando  $E_1 + E_2 = E$  y por la propiedad  $CAR$ , se tiene que

$$x = z - [F(E, z)] = g_z(E).$$

Por lo tanto, se ha demostrado que  $\exists E \in \mathbb{R}_+ : x = g_z(E)$

A continuación, se demostrará que  $E \in [0, Z]$

De (2.18), al sumar las componentes

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} x_i &= \sum_{i \in N} (y_i - F_i(E_1, y)) \\ X &= Y - E_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

De (2.19), al sumar los componentes

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} y_i &= \sum_{i \in N} (z_i - F_i(E_2, z)) \\ Y &= Z - E_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Al reemplazar (2.21) en (2.20)

$$X = Z - E_2 - E_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= Z - X < Z \\ E < Z &\wedge X \leq Y \leq Z \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $E \in [0, Z]$  y  $x \mathcal{R} z$ .

$\therefore \mathcal{R}$  es transitiva

**Afirmación 2:** Si  $F$  cumple la propiedad  $ADU$ ;  $\mathcal{R}$  verifica:

$$x\mathcal{R}y \iff (y-x)\mathcal{R}y$$

En efecto:

$$\text{Si } x\mathcal{R}y \iff \exists \bar{E} \in [0, E] : x = g_y(\bar{E}) = y - F(\bar{E}, y); \text{ con } E = \sum_{i \in N} y_i$$

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \bar{E} \in [0, E] : y - x = F(\bar{E}, y)$$

De la propiedad  $ADU$ , se obtiene

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \bar{E} \in [0, E] : y - x = y - F(E - \bar{E}, y)$$

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \bar{E} \in [0, E] : y - x = g_y(E - \bar{E})$$

De la definición de  $g_y$  se tiene que  $E' = E - \bar{E}$ ; con

$$E' \in [0, E] \wedge E = E' + \bar{E} \quad (2.22)$$

Así,

$$x\mathcal{R}y \iff \exists E' \in [0, E] : y - x = g_y(E')$$

$$\therefore x\mathcal{R}y \iff (y-x)\mathcal{R}y$$

Ahora consideremos un  $x$  que pertenece al camino de  $y$  con  $\bar{E} = \sum_{i \in N} x_i = \frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i$

i)  $x\mathcal{R}y$ , tal que:

$$\begin{aligned} x &= g_y\left(\frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i\right) = y - F\left(\frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i, y\right) \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i, y\right) &= y - x \end{aligned} \quad (2.23)$$

ii)  $(y-x)\mathcal{R}y$ , tal que:

$$y - x = g_y(E') = y - F(E', y)$$

De (2.22)

$$\begin{aligned} y - x &= y - F\left(\frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i, y\right) \\ \Rightarrow F\left(\frac{1}{2} \sum_{i \in N} y_i, y\right) &= x \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como  $F$  es una regla de bancarrota que asocia a cada  $(E, c)$  una única asignación, de (2.23) y (2.24) se tiene que

$$\begin{aligned} y - x &= x \\ x &= \frac{y}{2} \end{aligned}$$

Es decir,  $x = \frac{y}{2}$  pertenece a la trayectoria hacia  $y$ ,  $\frac{y}{2} \mathcal{R} y$ .

Ahora, se considera un  $x$  que pertenece al camino de  $\frac{y}{2}$ ,  $x \mathcal{R} \frac{y}{2}$  análogo al caso anterior, se obtiene que  $\frac{y}{4} \mathcal{R} \frac{y}{2}$ . De la afirmación 1;

$$\frac{y}{4} \mathcal{R} \frac{y}{2} \wedge \frac{y}{2} \mathcal{R} y \Rightarrow \frac{y}{4} \mathcal{R} y.$$

De la afirmación 2,  $\frac{y}{4} \mathcal{R} y \Rightarrow \frac{3}{4}y \mathcal{R} y$ .

Iterando, se calcula que para cada  $\bar{E} = \sum_{i \in N} x_i = \frac{k'}{2^k} \sum y_i$  donde  $k', k \in Z_+$  tal que  $\frac{k'}{2^k} \leq 1$ , se cumple:

$$\left( \frac{k'}{2^k} y \right) \mathcal{R} y.$$

De la continuidad de  $g_y$ , dado que cualquier múltiplo del vector  $y$  ( $\lambda y$ , con  $\lambda \in [0, 1]$ ). Entonces  $g_y$  es un rayo que parte del origen hacia  $y$ .

$$g_y(E) = (\lambda_E) y, \text{ con } \lambda_E \in [0, 1]$$

y así,  $F(E, y) = (1 - \lambda_E) y$  es proporcional a  $y$ ;  $\forall y \in \mathbb{R}_+^n$ .

Por consiguiente,  $F$  es la regla proporcional.

( $\Leftarrow$ ) De la proposición 2.4.1, la regla de bancarrota  $P$  cumple las propiedades de  $ADU$  y  $CAR$ . □

El siguiente teorema fue deducido por Herrero y Villar (2001) al aplicar el teorema de la dualidad.

### **Teorema 2.4.2.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $ADU$  y  $CAB$  si y solo si es la regla proporcional.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se sabe, por el lema 2.3.7, que la regla  $P$  es autodual. Además, de la proposición 2.3.1,  $CAR$  es la propiedad dual de  $CAB$ , y  $ADU$  es, obviamente, autodual. Del teorema 2.4.1,  $P$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{ADU \text{ y } CAR\}$  del teorema 2.3.1 tenemos que  $P$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{ADU \text{ y } CAB\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.1,  $P$  cumple  $ADU$  y  $CAB$ . □

## 2.4.2. Caracterización de la regla de igual ganancia

### Proposición 2.4.2.

**La regla de igual ganancia** satisface las propiedades de DM, AS, TI, AN, CT, EXE, PO, ITD, HO, ME, MD, CAR, CAB, CO, COB y COI.

El siguiente teorema fue propuesto por Dagan (1996).

### Teorema 2.4.3.

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de ITD, TI y CAR si y solo si es la regla de igual ganancia.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se demuestra que, si una regla de bancarrota satisface *ITD*, *TI* y *CAR*, es suficiente para caracterizar a la regla de igual ganancia. En efecto:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y el el vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^n$  fijo, sin pérdida de generalidad, se supone que  $c_1 < \dots < c_n$ .

A continuación, se demostrará que la asignación mediante la regla *F* y la regla *CEA* son equivalentes para cualquier estado variando de 0 a *C*.

Se consideran los siguientes casos:

- **Caso 1:** Si  $E \leq nc_1$ .

- **Paso 1.1:** Si  $E \leq c_1$

Al truncar las demandas de los agentes, tenemos  $c_i^E = \min\{E, c_i\} = E$ , para todo  $i \in N$ . Es decir, después de truncar las demandas, todas las demandas son iguales,  $c^E = (E, \dots, E)$ . Por lo tanto, al aplicar las propiedades *ITD* y *TI*, y de la definición de la regla *CEA*, se tiene que:

$$F(E, c) = F(E, c^E) = \left(\frac{E}{n}, \dots, \frac{E}{n}\right) = CEA(E, c).$$

- **Paso 1.2:** Si  $c_1 < E \leq c_1 + (1 - \frac{1}{n})c_1$

De acuerdo con la propiedad *CAR*, primero se asigna un estado igual a  $c_1$ :

$$F(E, c) = F(c_1, c) + F(E - c_1, c - F(c_1, c)). \quad (2.25)$$

Del Paso 1.1, se sabe que  $F(c_1, c) = (\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_1}{n})$ . Además, como las demandas  $c_i - \frac{c_1}{n}$ , son al menos tan grandes como el estado  $E - c_1$ , al truncar las demandas se obtiene:

$$\left(c - \left(\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_1}{n}\right)\right)_i^E = \min\{E - c_1, c_i - \frac{c_1}{n}\} = E - c_1, \text{ para todo } i \in N.$$

Así, como todas las demandas son iguales

$$(c - (\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_1}{n}))^E = (E - c_1, \dots, E - c_1)$$

y aplicamos las propiedades *ITD* y *TI*, se obtiene:

$$F(E - c_1; c - F(c_1, c)) = (\frac{E - c_1}{n}, \dots, \frac{E - c_1}{n})$$

al reemplazar estos valores en (2.25) y de la definición de *CEA*, se obtiene que:

$$F(E, c) = (\frac{c_1}{n}, \dots, \frac{c_1}{n}) + (\frac{E - c_1}{n}, \dots, \frac{E - c_1}{n}) = CEA(E, c).$$

- **Paso 1.3:** Si  $0 \leq E < nc_1$ .

Iterando de manera análoga a los casos anteriores, se incrementa el estado en

$$(1 - \frac{1}{n})^{k-1} c_1, \text{ donde } k \text{ es el número de iteración.}$$

Por lo tanto, se puede concluir que, para cada

$$E \in [0, \lim\{c_1 + (1 - \frac{1}{n})c_1 + (1 - \frac{1}{n})^2 c_1 + \dots\}]$$

la regla *F* propone una asignación equitativa del estado y por la definición de *CEA*(*E*, *c*), se tiene:

$$F(E, c) = (\frac{E}{n}, \dots, \frac{E}{n}) = CEA(E, c).$$

Notemos que límite en esta expresión es  $nc_1$ .

- **Paso 1.4:** Si  $E = nc_1$ .

Dado que *F* cumple la propiedad *CAR*, el lema 2.3.1, garantiza que *F* es continua respecto al estado. Esta continuidad asegura que cada agente recibe una asignación igual al primer agente y por la definición de *CEA*, se obtiene:

$$F(E, c) = (c_1, \dots, c_1) = CEA(E, c).$$

- **Caso 2:** Si  $E > nc_1$ .

- **Paso 2.1:** Si  $nc_1 < E < nc_1 + (n - 1)(c_2 - c_1)$ .

Por la propiedad *CAR*, primero se asigna un estado igual a  $nc_1$ :

$$F(E, c) = F(nc_1, c) + F(E - nc_1, c - F(nc_1, c)) \quad (2.26)$$

Del paso 1.4, se tiene que  $F(nc_1, c) = (c_1, \dots, c_1)$ , el primer agente tiene una asignación igual a su demanda entonces no participa en la división del remanente del estado  $E - nc_1$ . A continuación, se repite el proceso descrito en el caso 1 para los  $n - 1$  reclamantes,  $F(E - nc_1; c - F(nc_1, c)) = (0, \frac{E - nc_1}{n-1}, \dots, \frac{E - nc_1}{n-1})$ .

Al reemplazar estos valores en (2.26) y por la definición de  $CEA$ , se obtiene:

$$F(E, c) = (c_1, \dots, c_1) + (0, \frac{E - nc_1}{n-1}, \dots, \frac{E - nc_1}{n-1}) = CEA(E, c)$$

- **Paso 2.2:** Si  $E = nc_1 + (n - 1)(c_2 - c_1)$

De la propiedad  $CAR$ , se reparte  $nc_1$ :

$$F(E, c) = F(nc_1, c) + F((n - 1)(c_2 - c_1); c - F(nc_1, c)) \quad (2.27)$$

De manera análoga al caso anterior, se tiene que:

$$F(nc_1, c) = (c_1, \dots, c_1)$$

Para distribuir el remanente del estado  $(n - 1)(c_2 - c_1)$ , se repite el proceso del caso 1 para los  $n - 1$  agentes. Esto nos da:

$$F((n - 1)(c_2 - c_1), c - F(nc_1, c)) = (0, c_2 - c_1, \dots, c_2 - c_1)$$

Al reemplazar estos valores en (2.27) y de la definición de  $CEA$ , se concluye:

$$F(E, c) = (c_1, c_2; \dots, c_2) = CEA(E, c)$$

- **Paso 2.3:** Si  $nc_1 < E \leq C$

A medida que el estado sigue aumentando, si

$$nc_1 + (n - 1)(c_2 - c_1) < E \leq nc_1 + (n - 1)(c_2 - c_1) + (n - 2)(c_3 - c_2)$$

De manera análoga al caso anterior y utilizando la propiedad  $CAR$ , primero se distribuye

$$nc_1 + (n - 1)(c_2 - c_1)$$

Del paso 2.2 el primer y segundo agente reciben una asignación igual a su demanda, lo que implica que no participan en la distribución del remanente del estado.

Por lo tanto, el remanente del estado se distribuye entre los  $n - 2$  agentes, aplicando el procedimiento del caso 1, y así sucesivamente aumentamos en estado hasta cubrir todos los casos posibles.

Así, para cada incremento del estado la asignación de la regla  $F$  coincide con la regla  $CEA$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.2,  $CEA$  cumple las propiedades  $ITD$ ,  $TI$  y  $CAR$ . □

El siguiente teorema fue propuesto por Herrero y Villar (2001).

**Teorema 2.4.4.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $CAB$ ,  $CO$  y  $EXE$  si y solo si es la regla de igual ganancia.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se demuestra que si una regla de bancarrota satisface las propiedades  $CAB$ ,  $CO$  y  $EXE$ , estas condiciones son suficientes para caracterizar a la regla de igual ganancia.

En efecto, se verifica que este resultado se cumple para el caso de dos agentes ( $|N| = 2$ ).

Sea  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^2$ ; con  $|N| = 2$ ; sea  $F$  una regla de bancarrota que satisface las propiedades  $CAB$ ,  $CO$  y  $EXE$ . De la hipótesis,  $F$  satisface las propiedades de  $CAB$  y  $EXE$ , por el lema 2.3.4 nos garantiza que  $F$  satisface  $TI$ .

Sin pérdida de generalidad,  $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2$  y  $c_1 < c_2$ , de la figura (2.7) se tiene

$$CEA(E, c) = \begin{cases} \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right) & \text{si } E \leq 2c_1 \\ (c_1, E - c_1) & \text{si } E > 2c_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Se consideran 2 casos:

**Caso 1:**  $c_1 = c_2$

Dado que  $F$  cumple la propiedad de  $TI$ , se cumple que:

$$F_1(E, c) = F_2(E, c) = \frac{E}{2}$$

Como  $CEA$  cumple la propiedad  $TI$ , se cumple que:

$$CEA_1(E, c) = CEA_2(E, c) = \frac{E}{2}$$

Por lo tanto:

$$F(E, c) = \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right) = CEA(E, c)$$

**Caso 2:**  $c_1 \neq c_2$

a) Si  $E \leq 2c_1$

Sea  $E_1 = 2c_1$ , con  $E \leq E_1$  y por la propiedad  $EXE$ ,  $c_1 \leq \frac{E_1}{2} = c_1$ . En consecuencia, el agente 1 debe ser compensado completamente; es decir,  $F_1(E_1, c) = c_1$ .

El remanente se asigna al agente 2,  $F_2(E_1, c) = c_1$ . Por lo tanto:

$$F(E_1, c) = (c_1, c_1) \quad (2.29)$$

Al aplicar la propiedad de  $CAB$ :

$$F(E, c) = F(E, F(E_1, c)) \quad (2.30)$$

Al reemplazar (2.29) en (2.30) y por la propiedad  $TI$

$$F(E, c) = F(E, (c_1, c_1)) = \left( \frac{E}{2}, \frac{E}{2} \right)$$

De (2.28), se concluye que la regla coincide con  $CEA$

$$F(E, c) = \left( \frac{E}{2}, \frac{E}{2} \right) = CEA(E, c)$$

b) Si  $E > 2c_1$

Por la propiedad  $EXE$ ,  $c_1 < \frac{E}{2}$ , entonces el agente 1, debe ser compensado completamente y el remanente se le asigna al agente 2. Así se cumple que:

$$F(E, c) = (c_1, E - c_1)$$

De (2.28), se concluye que la regla coincide con  $CEA$ :

$$F(E, c) = (c_1, E - c_1) = CEA(E, c)$$

Se ha demostrado que la regla de bancarrota  $F$  y la regla de igual ganancia son equivalentes para el caso de dos agentes. Ahora, se extiende esta equivalencia para cualquier  $N \in \mathcal{N}$ .

De la proposición, 2.4.2, se sabe que  $CEA$  cumple con las propiedades  $ME$  y  $CO$ . Dado que  $CEA$  cumple  $ME$  y  $CO$ , el lema 2.3.3, garantiza que  $CEA$  también cumple la propiedad de  $COI$ . Como  $F$  satisface la propiedad  $CO$ , en particular, esto implica que  $F$  satisface la propiedad  $COB$ . Dado que  $F$  cumple la propiedad  $COB$ , y  $CEA$  satisface la propiedad de  $COI$  y estas reglas coinciden para el caso de dos agentes, el lema 2.4.1 (Lema del ascensor) garantiza que  $F(N, E, c) = CEA(N, E, c)$  para cualquier  $N \in \mathcal{N}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.2,  $CEA$  cumple  $CAB$ ,  $CO$  y  $EXE$ . □

El siguiente teorema propuesto por Herrero y Villar (2002), establece que las propiedades independientes de composición hacia arriba y compensación total caracterizan a la regla de igual ganancia. Se puede pensar en esta regla cuando el estado es fluctuante y tiende a aumentar con el tiempo y deseamos proteger a los demandantes con demandas pequeñas.

**Teorema 2.4.5.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $CAB$  y  $CT$  si y sólo si es la regla de igual ganancia.

Los siguientes dos teoremas propuestos por Yeh (2008), establecen un conjunto de propiedades independientes que caracterizan a la regla de igual ganancia.

**Teorema 2.4.6.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $AS$ ,  $CAR$  y  $CO$  si y sólo si es la regla de igual ganancia.

**Teorema 2.4.7.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $AS$ ,  $CAR$  y  $COI$  si y sólo si es la regla de igual ganancia.

### 2.4.3. Caracterización de la regla de igual pérdida

**Proposición 2.4.3.**

**La regla de igual pérdida** satisface las propiedades  $DM$ ,  $TI$ ,  $AN$ ,  $CN$ ,  $EXC$ ,  $PO$ ,  $HO$ ,  $ME$ ,  $MD$ ,  $CDM$ ,  $CAR$ ,  $CAB$ ,  $CO$  y  $COI$ .

Los siguientes dos teoremas, propuestos por Herrero y Villar (2001), se derivan directamente del teorema de la dualidad.

**Teorema 2.4.8.** Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $CDM$ ,  $TI$  y  $CAB$  si y sólo si es la regla de igual pérdida.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se sabe, por el lema 2.3.6, que  $CEA$  y  $CEL$  son reglas duales. Asimismo, la proposición 2.3.1 nos dice que  $CDM$  y  $ITD$ , así como  $CAB$  y  $CAR$ , son propiedades duales entre sí. Además, la proposición 2.3.2 indica que la propiedad  $TI$  es autodual. Del teorema 2.4.3,  $CEA$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{ITD, TI \text{ y } CAR\}$ , al aplicar el teorema 2.3.1, se concluye que  $CEL$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{CDM, TI \text{ y } CAB\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.3,  $CEL$  satisface las propiedades  $CDM$ ,  $TI$  y  $CAB$ . □

**Teorema 2.4.9.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $CAR$ ,  $CO$  y  $EXC$  si y sólo si es la regla de igual pérdida.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se sabe, por el lema 2.3.6, que  $CEA$  y  $CEL$  son reglas duales. Asimismo, la proposición 2.3.1 indica que  $CAR$  y  $CAB$ , así como  $EXC$  y  $EXE$ , son propiedades duales entre sí. Además, la proposición 2.3.2 indica que la propiedad  $CO$  es autodual. Del teorema 2.4.4,  $CEA$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{CAB, CO \text{ y } EXE\}$ , al aplicar el teorema 2.3.1, se concluye que  $CEL$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{CAR, CO \text{ y } EXC\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.3,  $CEL$  satisface las propiedades  $CAR, CO$  y  $EXC$ .  $\square$

El siguiente teorema propuesto por Herrero y Villar (2002), se deriva directamente del teorema 2.4.5 y el teorema de la dualidad.

**Teorema 2.4.10.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $CAR$  y  $CN$  si y sólo si es la regla de igual pérdida.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se sabe, por el lema 2.3.6, que  $CEA$  y  $CEL$  son reglas duales. Asimismo, la proposición 2.3.1 indica que  $CAR$  y  $CAB$ , así como  $CN$  y  $CT$ , son propiedades duales entre sí. Además, el teorema 2.4.5 dice que  $CEA$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{CAB, \text{ y } CT\}$ , al aplicar el teorema 2.3.1, se concluye que  $CEL$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{CAR \text{ y } CN\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.3,  $CEL$  satisface las propiedades  $CAR$  y  $CN$ .  $\square$

El siguiente teorema propuesto por Moulin (2000) establece que las únicas reglas de bancarrota que cumplen simultáneamente con el conjunto de propiedades  $\{CAR, CAB, CO, HO \text{ y } TI\}$  son las reglas clásicas  $\{P, CEA \text{ y } CEL\}$ . Estas reglas pueden ser aplicadas en situaciones donde el estado es fluctuante (aumenta o disminuye), se desea evitar la dependencia de la unidad de medida, y garantizar un reparto eficiente y justo para cualquier subgrupo de agentes.

**Teorema 2.4.11.**

Hay tres y solamente tres reglas de bancarrota que satisfacen simultáneamente las propiedades de  $CAR, CAB, CO, HO$  y  $TI$ : La regla proporcional, regla de igual ganancia y la regla de igual pérdida.

#### 2.4.4. Caracterización de la regla del Talmud

##### Proposición 2.4.4.

La **regla del Talmud** satisface las propiedades de DM, AS, TI, AN, PO, HO, ITD, ME, MD, CDM, CO, COB, COI y ADU.

Los siguientes dos teoremas, propuestos por Dagan (1996), se relacionan directamente por la propiedad autodual de la regla  $T$  y el teorema de la dualidad.

##### Teorema 2.4.12.

Una regla de bancarrota con dos agentes ( $|N| = 2$ ), satisface las propiedades de  $ADU$  y  $ITD$  si y sólo si es la regla del Talmud.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se demuestra que si una regla de bancarrota con dos agentes satisface  $ADU$  y  $ITD$  es suficiente para caracterizar a la regla del Talmud. En efecto:

Para cada  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , con  $|N| = 2$ , y el vector de demandas  $c \in \mathbb{R}_+^2$  fijo, sin pérdida de generalidad, se asume que  $c_1 < c_2$ .

A continuación, se demostrará que la asignación mediante la regla  $F$  y la regla  $T$  son equivalentes para cualquier estado  $E$ , variando de 0 a  $C$ .

Se consideran tres casos:

- **Caso 1:** Si  $E \leq c_1$

Al trincar las demandas de los agentes, se obtiene:

$$c_i^E = \min\{E, c_i\} = E, \text{ para todo } i \in N.$$

Esto da como resultado el vector de demandas truncadas  $c^E = (E, E)$ .

Por lo tanto, al aplicar la propiedad ITD y la propiedad ADU, se obtiene:

$$F(E, c) = F(E, (E, E)) = (E, E) - F(L, (E, E)) \quad (2.31)$$

En este nuevo problema con demandas truncadas,  $F(E, (E, E))$ , la demanda agregada es  $C = 2E$ ; por lo tanto, la pérdida agregada es  $L = E$ . Es decir,

$$F(L, (E, E)) = F(E, (E, E))$$

Sustituyendo estos valores en (2.31) y por (2.7), la definición de la regla  $T$  para dos agentes, se obtiene:

$$F(E, c) = F(E, (E, E)) = \left(\frac{E}{2}, \frac{E}{2}\right) = T(E, c)$$

- **Caso 2:** Si  $c_1 < E \leq c_2$

Al truncar las demandas de los agentes, se tiene:

$$c_1^E = \min\{E, c_1\} = c_1 \wedge c_2^E = \min\{E, c_2\} = E$$

De donde se obtiene el vector de demandas truncadas  $c^E = (c_1, E)$ .

Sea  $\bar{c}_2 = 2E - c_1$ , se observa que  $\bar{c}_2 \geq E$ . Por lo tanto,  $\bar{c}_2^E = \min\{E, \bar{c}_2\} = E$ . De este modo, se obtiene el mismo vector de demandas truncadas  $c^E = (c_1, E)$ . Al aplicar *ITD*, se tiene:

$$F(E, c) = F(E, (c_1, E)) = F(E, (c_1, \bar{c}_2)) \quad (2.32)$$

Del nuevo problema de bancarrota,  $F(E, (c_1, \bar{c}_2))$ , la demanda agregada es  $C = c_1 + \bar{c}_2 = 2E$ , y la pérdida agregada es  $L = E$ , al aplicar la propiedad *ADU*, se tiene lo siguiente:

$$F_1(E, (c_1, \bar{c}_2)) = c_1 - F_1(E, (c_1, \bar{c}_2)) \quad (2.33)$$

De aquí se deduce que  $F_1(E, (c_1, \bar{c}_2)) = \frac{c_1}{2}$  y el remanente del estado se asigna al segundo agente,  $F_2(E, (c_1, \bar{c}_2)) = E - \frac{c_1}{2}$ . Al reemplazar estos valores en (2.32) y por (2.7), la definición de la regla *T* para dos agentes, se obtiene:

$$F(E, c) = F(E, (c_1, E)) = F(E, (c_1, \bar{c}_2)) = \left(\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2}\right) = T(E, c)$$

- **Caso 3:** Si  $c_2 < E$

De la propiedad *ADU*, se obtiene:

$$F(E, (c_1, c_2)) = c - F(C - E, (c_1, c_2)) \quad (2.34)$$

De  $F(C - E, (c_1, c_2))$ , al truncar las demandas de los agentes, se obtiene que:

$$c_1^E = \min\{C - E, c_1\} = C - E \text{ y } c_2^E = \min\{E, c_2\} = C - E$$

Así, se obtiene el vector de demandas truncadas  $c^E = (C - E, C - E)$ . Al aplicar la propiedad *ITD* y por el caso 1, se obtiene:

$$F(C - E, (c_1, c_2)) = \left(\frac{C - E}{2}, \frac{C - E}{2}\right) \quad (2.35)$$

Al reemplazar (2.35) en (2.34), y por (2.7), la definición de la regla *T* se obtiene:

$$F(E, (c_1, c_2)) = c - F(C - E, (c_1, c_2)) = \left(c_1 - \frac{C - E}{2}, c_2 - \frac{C - E}{2}\right) = T(E, c)$$

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.4,  $T$  cumple con las propiedades  $ADU$  y  $ITD$ . □

**Teorema 2.4.13.**

Una regla de bancarrota con dos agentes ( $|N| = 2$ ), satisface las propiedades de  $ADU$  y  $CDM$  si y sólo si es la regla del Talmud.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) De acuerdo con el lema 2.3.7, establece que la regla  $T$  es autodual. Asimismo, la proposición 2.3.1 dice que  $ITM$  y  $CDM$  son propiedades duales entre sí, y  $ADU$  es, obviamente autodual. Además, el teorema 2.4.12 dice que  $T$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{ADU, \text{ y } ITD\}$ , al aplicar el teorema 2.3.1 se obtiene que  $T$  es la única regla de bancarrota que cumple las propiedades  $\{ADU \text{ y } CDM\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.4,  $T$  cumple con las propiedades  $ADU$  y  $CDM$ . □

Los siguientes dos teoremas, propuestos por Herrero y Villar (2001), se relacionan directamente con la propiedad autodual de la regla  $T$  y el teorema de la dualidad. La primera propiedad establece que las propiedades independientes de  $\{\text{autodualidad, composición de los derechos mínimos y consistencia}\}$  caracterizan a la regla del Talmud. Se puede pensar en esta regla cuando sea necesario repartir el estado o el déficit y se busca obtener la misma asignación, cuando sea necesario asegurar una cantidad mínima para cada demandante y que ningún demandante tenga la necesidad de asociarse para recibir un mayor asignación. De manera análoga se deduce el segundo teorema.

**Teorema 2.4.14.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $ADU, CDM$  y  $CO$  si y sólo si es la regla del Talmud.

**Teorema 2.4.15.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $ADU, ITD$  y  $CO$  si y sólo si es la regla del Talmud.

Los dos teoremas que se mencionan a continuación, formulados por Yeh (2008), ofrecen dos caracterizaciones adicionales para la regla del Talmud.

**Teorema 2.4.16.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $AS, CDM$  y  $CO$  si y sólo si es la regla del Talmud.

**Teorema 2.4.17.**

Una regla de bancarrota satisface las propiedades de  $AS, CDM$  y  $COI$  si y sólo si es la regla del Talmud.

### 2.4.5. Caracterización de la regla de llegada aleatoria

#### Proposición 2.4.5.

La **regla de llegada aleatoria** satisface las propiedades de DM, AS, TI, AN, CE, PO, HO, ITD, CDM, ME, MD, CO, COB, COI y ADU.

El siguiente teorema fue propuesto por Hwang (2015).

#### Teorema 2.4.18.

Una regla de bancarrota que cumple con la propiedad de CE si y sólo si es la regla de llegada aleatoria.

*Demostración.*

( $\Rightarrow$ ) Se demuestra que si una regla de bancarrota satisface la propiedad  $CE$  es suficiente para caracterizar a la regla de llegada aleatoria.

En efecto, sea  $N \in \mathcal{N} \wedge (E, c) \in B^N$ , y sea  $F$  una regla de bancarrota que satisface  $CE$ .

Se presenta la demostración por inducción:

i) Caso base, para  $|N| = 1$

Es evidente que se cumple:

$$F(E, c) = F(E, c_1) = \min\{c_1, E\} = R.A(E, c)$$

ii) Hipótesis inductiva, se asume que se cumple para  $|N| = k$ , con  $k \geq 1$ .

iii) Paso inductivo, se debe demostrar que la hipótesis se cumple para  $|N| = k + 1$ .

En efecto,  $F$  cumple la propiedad  $CE$ , se tiene que, para todo  $\{i, j\} \in N$ , se cumple:

$$F_i(N, E, c) - F_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) = F_j(N, E; c) - F_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}})$$

Ordenando los términos,

$$F_i(N, E; c) - F_j(N, E; c) = F_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) - F_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}}) \quad (2.36)$$

De la hipótesis inductiva, como  $|N \setminus \{i\}| = |N \setminus \{j\}| = k$ , se tiene:

$$F_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) = R A_i((N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}})) \quad (2.37)$$

$$F_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}}) = R A_j((N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}})) \quad (2.38)$$

Al reemplazar (2.37) y (2.38), en (2.36), se obtiene que:

$$F_i(N, E; c) - F_j(N, E; c) = RA_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) - RA_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}}) \quad (2.39)$$

Por otro lado, por la proposición 2.4.5, la regla  $RA$  cumple la propiedad de  $CE$ , se cumple:

$$R.A_i(N, E; c) - R.A_j(N, E; c) = R.A_i(N \setminus \{j\}, E_{N \setminus \{j\}}, c_{N \setminus \{j\}}) - R.A_j(N \setminus \{i\}, E_{N \setminus \{i\}}, c_{N \setminus \{i\}}) \quad (2.40)$$

Al reemplazar (2.40) en (2.39),

$$F_i(N, E, c) - F_j(N, E, c) = RA_i(N, E, c) - RA_j(N, E, c) \quad (2.41)$$

Se fija al agente  $i$ , y sumando para cada  $j$  en la ecuación (2.41) con  $i \neq j$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} [F_i(N, E, c) - F_j(N, E, c)] &= \sum_{j \in N} [RA_i(N, E, c) - RA_j(N, E, c)] \\ nF_i(N, E, c) - \sum_{j \in N} F_j(N, E, c) &= nRA_i(N, E, c) - \sum_{j \in N} RA_j(N, E, c) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por la eficiencia de la regla  $F$ ,  $\sum_{j \in N} F_j(N, E, c) = \sum_{j \in N} RA_j(N, E, c) = E$ , al reemplazar en (2.42) se obtiene:

$$nF_i(N, E, c) - E = nRA_i(N, E, c) - E$$

Esto implica que,  $F_i(N, E, c) = RA_i(N, E, c)$

( $\Leftarrow$ ) Por la proposición 2.4.5, la regla  $RA$  cumple la propiedad de  $CE$ . □

## Capítulo 3

# Juegos de bancarrota

### 3.1. Introducción a la teoría de juegos cooperativos

En los juegos cooperativos, los jugadores buscan cooperar entre ellos formando coaliciones con el propósito de maximizar sus beneficios. Esta cooperación no se realiza por motivos altruistas, sino porque, al agruparse, se logra obtener un mayor beneficio. Es decir, los jugadores pueden establecer acuerdos vinculantes (su violación implica sanciones monetarias elevadas que disuaden a los jugadores de incumplirlo), por lo que nos interesa estudiar el comportamiento colectivo y el beneficio de una supuesta colaboración.

Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto finito que representa a todos los potenciales agentes o jugadores. Cada subconjunto no vacío  $S$  de  $N$  es llamado una coalición. El conjunto de partes de  $N$ , denotado como  $\mathcal{P}(N)$ , está formado por todas las coaliciones que puedan formarse, incluyendo el conjunto sin jugadores. Sea  $S \in \mathcal{P}(N)$  una coalición, donde  $|S|$  denota el número de jugadores en  $S$ . Si la coalición  $S$  es igual a  $N$  es llamada "gran coalición".

En esta parte de la investigación, se estudiará los juegos cooperativos con utilidad transferible. Se dice que un juego cooperativo es de utilidad transferible cuando el beneficio que puede obtener cualquier coalición es perfectamente divisible.

La función característica de un juego cooperativo a una función  $v$  que asigna a cada  $S \in \mathcal{P}(N)$  un valor real. Es decir,

$$\begin{aligned} v : \mathcal{P}(N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ S &\mapsto v(S) \end{aligned}$$

con la condición que  $v(\emptyset) = 0$ . Se considera a  $v(S)$  (valor de la coalición) como el pago o beneficio que puede obtener la coalición por sí misma, independientemente del resto de jugadores. Para  $S = N$ ;  $v(N)$  es llamado valor del juego.

En esta parte de la investigación, se enfocará el estudio en los juegos cooperativos con utilidad transferible.

**Definición 3.1.1.** Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par  $(N, v)$  donde  $N$  es un conjunto finito de jugadores y  $v$  es una función característica. En tal caso, se denota por  $G = (N, v)$ .

**Definición 3.1.2.** Un juego  $(N, v)$  es monótono si, al agregar jugadores a una coalición existente, el valor o beneficio de dicha coalición no disminuye.

Formalmente:

Un juego  $(N, v)$  es monótono si:

$$v(S) \leq v(T), \forall S, T \subseteq N \text{ con } S \subseteq T.$$

**Definición 3.1.3.** Un juego  $(N, v)$  es superaditivo cuando dos coaliciones disjuntas se unen, el pago o beneficio de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los valores de las coaliciones que se unen.

Formalmente:

Un juego  $(N, v)$  es superaditivo si:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \forall S, T \subseteq N \text{ con } S \cap T = \emptyset.$$

Una subclase importante de juegos superaditivos son los juegos convexos.

**Definición 3.1.4.** Un juego  $(N, v)$  es convexo si, cuando dos coaliciones se unen, la suma del pago de la unión y el pago la intersección, es al menos igual a la suma de los valores de las coaliciones que se unen.

Formalmente:

Un juego  $(N, v)$  es convexo si:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N. \quad (3.1)$$

La siguiente proposición fue propuesta por Shapley (1971).

**Proposición 3.1.1.**

Un juego es convexo  $(N, v)$  si y solo si la contribución marginal de un jugador es una función no decreciente con respecto al tamaño de la coalición.

*Formalmente:*

Un juego  $(N, v)$  es convexo si y solo si, para todo  $i \in N$ ;

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\} \quad (3.2)$$

*Demostración.*

$(\Rightarrow)$  Si un juego  $(N, v)$  es convexo. Por la definición de convexidad, se cumple:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N.$$

Sea  $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ , con  $R = S \cup \{i\}$

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) = v(R) + v(T) \leq v(R \cup T) + v(R \cap T).$$

De la condición  $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ , con  $R = S \cup \{i\}$  entonces  $R \cup T = T \cup \{i\}$  y  $S \cap T = S$

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) \leq v(T \cup \{i\}) + v(S)$$

Al reorganizar la ecuación anterior, se obtiene:

$$\therefore v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \forall S, T \subseteq N.$$

$(\Leftarrow)$  La demostración se desarrolla mediante dos casos:

**Caso I:**  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ ; con  $S, T \subseteq N$

En este caso, se verifica de manera directa que se satisface la desigualdad (3.1).

**Caso II:**  $S \setminus T \neq \emptyset$

Esto implica que la coalición  $S \setminus T$  posee al menos un elemento, es decir

$$|S \setminus T| = j \geq 1 \text{ con } S - T = \{i_1, \dots, i_j\}$$

Definimos  $[i_k] = \{i_1, \dots, i_k\}, \forall k \in [1, j]$  con  $[i_0] = \emptyset$ .

Sea  $W = S \cap T \subseteq N$ , con  $W \subseteq N$ .

De (3.2), con  $W \subseteq T \subseteq N \setminus \{i_k\}$ , se obtiene:

$$v(W \cup [i_k]) - v(W \cup [i_{k-1}]) \leq v(T \cup [i_k]) - v(T \cup [i_{k-1}]); \forall k \in [1, j].$$

Notamos que:  $W \cup [i_j] = W \cup (S - T) = S$  y  $T \cup [i_j] = T \cup (S - T) = S$ .

Al reemplazar estos valores en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v(S) - v(S \cap T) &= v(W \cup [i_j]) - v(W) = \sum_{k=1}^j v(W \cup [i_k]) - v(W \cup [i_{k-1}]) \\
 &\leq \sum_{k=1}^j v(T \cup [i_k]) - v(T \cup [i_{k-1}]) \\
 &= v(T \cup [i_j]) - v(T)
 \end{aligned}$$

Así:

$$v(S) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) - v(T).$$

Al reorganizar esta desigualdad, se concluye:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N.$$

□

### 3.2. Soluciones de los juegos cooperativos

Dado un juego  $(N, v)$  que cumpla con alguna de las propiedades previamente mencionadas, tales como la monotonía, convexidad o superaditividad, el problema que surge es cómo repartir el valor de  $v(N)$  aceptable por todos los jugadores.

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  una asignación, donde  $x_i$  representa el pago que recibe el jugador  $i$ .

Se dice que una asignación o vector de pagos,  $x \in \mathbb{R}^n$ , es eficiente si:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

Se dice que una asignación o vector de pagos,  $x \in \mathbb{R}^n$ , es individualmente racional si:

$$x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N.$$

Se denota por  $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ , con  $S \subseteq N$  y  $x_S = (x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^{|S|}$ , con  $x(\emptyset) = 0$

**Definición 3.2.1.** El conjunto de imputaciones del juego  $(N, v)$  es el conjunto de vectores de pago eficientes e individualmente racionales.

Formalmente:

$$I(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N\}$$

Este conjunto no solo delimita las asignaciones dentro de un juego cooperativo, sino que también sirve como base para analizar otros conceptos como el núcleo, nucleolo o el valor de Shapley.

**Definición 3.2.2.** En un juego  $(N, v)$ , el exceso (queja o defecto) de una coalición  $S$  con respecto a una imputación  $x \in I(N, v)$  se define como la diferencia entre el valor de la coalición  $S$  y la cantidad asignada a esta coalición por la distribución  $x$ .

Formalmente:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

### 3.2.1. El núcleo

Introducido por primera vez por Gillies (1953), se define como el conjunto de vectores de pago coalicionalmente racionales que son estables. Es decir, un vector de pagos está en el núcleo cuando ningún grupo de agentes tiene incentivos para formar una coalición diferente.

**Definición 3.2.3.** El núcleo de un juego  $(N, v)$ , denotado por  $\mathcal{C}(N, v)$ , es el conjunto de imputaciones que cumplen simultáneamente las propiedades de eficiencia e individualidad racional:

$$\mathcal{C}(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

La siguiente proposición, se detalla y demuestra en Cerdá y Pérez (2004).

**Proposición 3.2.1.** El núcleo del juego  $(N, v)$  es un subconjunto cerrado, acotado y convexo.

El siguiente teorema, se detalla y demuestra en Shapley (1974).

**Teorema 3.2.1.** Si un juego  $(N, v)$  es convexo, entonces el

$$\mathcal{C}(N, v) \neq \emptyset \tag{3.3}$$

### 3.2.2. El Nucleolo

**Definición 3.2.4.** El nucleolo de un juego  $(N, v)$ , denotado por  $\eta(N, v)$ , es el conjunto de vectores de pago definido por:

$$\eta(N, v) = \{ \mathbf{x} \in I(N, v) : \theta(\mathbf{x}) \leq_L \theta(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in I(N, v) \},$$

donde  $\theta(\mathbf{x})$  y  $\theta(\mathbf{y})$  son los vectores excesos de valor respecto de  $x$  y  $y$ , respectivamente y  $\leq_L$  es el orden lexicográfico en  $\mathbb{R}^{2^N}$ .

Un juego  $(N, v)$ , la función de asignación o distribución de pagos  $\phi(v) = (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v))$  debe cumplir con los axiomas:

Axioma 1: **Eficiencia.**

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(v) = v(N).$$

Axioma 2: **Simetría.**

$$\phi_i(v) = \phi_j(v).$$

Axioma 3: **Tratamiento del jugador pasivo.**

$$\phi_i(v) = v(\{i\}).$$

Axioma 4: **Aditividad.**

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi_1(v_1) + \phi_2(v_2).$$

### 3.2.3. El valor de Shapley

El desarrollo y demostración del siguiente teorema se detalla en Shapley (1953).

**Teorema 3.2.2.** Sea un juego  $(N, v)$  y una distribución  $\phi(v)$ , se define el **valor de Shapley** como

$$\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|T|!(|N| - |T| - 1)!}{|N|!} (v(T \cup \{i\}) - v(T)), \forall i \in N.$$

Este valor es único y es la única función de distribución que cumple con los axiomas 1, 2, 3 y 4.

Denominamos **contribución marginal del jugador  $i$  a la coalición  $S$** .

$$v(S \cup \{i\}) - v(S), \forall i \in N \text{ con } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Se denota por  $\pi$  a una permutación del conjunto de jugadores de  $N$ , y por  $\Pi^N$  al conjunto de todas las posibles permutaciones de  $N$ .

**Definición 3.2.5.** Dado un juego  $(N, v)$  y una permutación  $\pi$ , se define el vector de contribuciones marginales del juego asociado a  $\pi$ ,  $m^\pi(v) = (m_1^\pi(v), \dots, m_n^\pi(v)) \in \mathbb{R}^N$  de la siguiente manera:

$$m_i^\pi(v) = v \left( \left( \bigcup_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} \{j\} \right) \cup \{i\} \right) - v \left( \bigcup_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} \{j\} \right).$$

Ahora para un juego  $(N, v)$ , se puede redefinir el valor de Shapley en función de  $m^\pi(v)$

$$\phi(v) = \sum_{\pi \in \pi^N} \frac{\mathbf{m}^\pi(v)}{|N|!}. \quad (3.4)$$

■ Ahora para un juego  $(N, v)$ , se define:

1. El **vector superior** del juego, se denota por  $M^v \in \mathbb{R}^{|N|}$ , se define por:

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}), \forall i \in N.$$

$$\text{con } M^v = (M_1^v, \dots, M_{|N|}^v).$$

2. El **vector inferior** del juego,  $u^v \in \mathbb{R}^{|N|}$ , se define por:

$$u_i^v = \max_{S: i \in S} \{v(S) - M^v(S \setminus \{i\})\}, \forall i \in N.$$

$$\text{con } u^v = (u_1^v, \dots, u_{|N|}^v).$$

**Definición 3.2.6.** El cubrimiento del núcleo del juego  $(N, v)$ , denotado por  $\mathcal{CC}(N, v)$ , es el conjunto de asignaciones que satisfacen:

$$\mathcal{CC}(N, v) := \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), \mathbf{u}^v \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{M}^v\}.$$

El siguiente teorema propuesto por Tijs y Lipperts (1982), nos brinda un límite superior para el núcleo del juego cooperativo.

**Teorema 3.2.3.** Para todo juego  $(N, v)$  se cumple que :

$$\mathcal{C}(N, v) \subseteq \mathcal{CC}(N, v).$$

### 3.3. Juegos de bancarrota

Es O'Neill (1982) quien define el juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota de la siguiente manera:

Sea un conjunto dado de demandantes que forman la coalición  $S, S \subseteq N$ ; si esta coalición paga las demandas de los jugadores que no pertenecen a la coalición, pueden compartir el estado restante entre los miembros de la coalición.

Sin embargo, ninguna coalición deseará pagar a los jugadores que no pertenecen a esta más del estado.

**Definición 3.3.1.** Sea  $(E, c) \in B^N$ , se define el juego cooperativo inducido por  $(E, c)$ , llamado juego de bancarrota, como el par  $(N, v_{E,c})$ , donde la función característica  $v_{E,c}$  se define como:

$$v_{E,c}(S) = \max\{E - c(N \setminus S), 0\}, \text{ para todo } S \subseteq N. \quad (3.5)$$

De esta definición, es fácil ver que la función característica del juego de bancarrota cumple las siguientes propiedades:

- i)  $v_{E,c}(N) = E$ .
- ii)  $v_{E,c}(\{i\}) = \max\{E - c(N \setminus \{i\}), 0\} \leq c_i, \forall i \in N$ .
- iii)  $v_{E,c}(N \setminus \{i\}) = \max\{E - c_i, 0\}, \forall i \in N$ .
- iv) Si  $E \leq c_i$  entonces  $v_{E,c}(S) = 0, \forall S \subset N \setminus \{i\}$ .

### 3.3.1. Caracterización de los juegos de bancarrota

**Lema 3.3.1.** Todo juego de bancarrota  $(N, v_{E,c})$  es monótono.

*Demostración.*

Para demostrar la propiedad de monotonía del juego, se necesita probar que

$$v_{E,c}(S) \leq v_{E,c}(T), \forall S, T \subseteq N \text{ con } S \subseteq T.$$

En efecto, de la definición de la ecuación característica, se tiene

$$v_{E,c}(S) = \max\{E - c(N \setminus S), 0\} \quad (3.6)$$

$$v_{E,c}(T) = \max\{E - c(N \setminus T), 0\} \quad (3.7)$$

Dado que  $S \subseteq T \subseteq N$  entonces  $N \setminus T \subseteq N \setminus S$ , lo cual implica que

$$c(N \setminus T) \leq c(N \setminus S)$$

por lo tanto, se obtiene:

$$E - c(N \setminus S) \leq E - c(N \setminus T). \quad (3.8)$$

Para completar la demostración, se analizan los siguientes casos:

- i) Si  $E - c(N \setminus S) \geq 0$

De (3.7) y (3.9) se obtiene que:

$$0 \leq E - c(N \setminus S) = v_{E,c}(S) \leq E - c(N \setminus T) = v_{E,c}(T)$$

$$\therefore v_{E,c}(S) \leq v_{E,c}(T)$$

ii) Si  $E - c(N \setminus S) \leq 0$

De (3.6) y la definición de  $v_{E,c}(T)$

$$v_{E,c}(S) = \max\{E - c(N \setminus S), 0\} = 0 \leq v_{E,c}(T)$$

$$\therefore v_{E,c}(S) \leq v_{E,c}(T).$$

□

**Teorema 3.3.1.** Todo juego de bancarrota es convexo.

*Demostración.*

Sea el juego de bancarrota  $(N, v_{E,c})$ . De la proposición 3.1.1; para demostrar que el juego es convexo, es suficiente verificar que, para todo  $i \in N$ , se cumple:

$$v_{E,c}(S \cup \{i\}) - v_{E,c}(S) \leq v_{E,c}(T \cup \{i\}) - v_{E,c}(T), \forall S, T \subseteq N \text{ con } S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$$

De manera equivalente, esta condición puede expresarse como:

$$v_{E,c}(S \cup \{i\}) + v_{E,c}(T) \leq v_{E,c}(T \cup \{i\}) + v_{E,c}(S) \quad (3.9)$$

Para probar esta desigualdad, se deduce que para cualquier par de valores  $A, B \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$\max\{A, 0\} + \max\{B, 0\} = \max\{A + B, A, B, 0\} \quad (3.10)$$

Sea  $A = E - c(N)$ , usando la propiedad (3.10), se analiza la primera parte de la desigualdad en (3.9) y por la definición del juego, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{E,c}(S \cup \{i\}) + v_{E,c}(T) &= \max\{E - c(N \setminus (S \cup \{i\})), 0\} + \max\{E - c(N \setminus T), 0\} \\ &= \max\{E - (c(N) - c(S) - c_i), 0\} + \max\{E - (c(N) - c(T)), 0\} \\ &= \max\{A + c(S) + c_i, 0\} + \max\{A + c(T), 0\} \\ &= \max\{2A + c(S) + c(T) + c_i, A + c(S) + c_i, A + c(T), 0\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando la propiedad (3.10), se analiza la segunda parte de la desigualdad en (3.9) y por la

definición del juego, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
v_{E,c}(T \cup \{i\}) + v_{E,c}(S) &= \max\{E - C(N \setminus (T \cup \{i\})), 0\} + \max\{E - C(N \setminus S), 0\} \\
&= \max\{E - (c(N) - c(T) - c_i), 0\} + \max\{E - (c(N) - c(S)), 0\} \\
&= \max\{2A + c(S) + c(T) + c_i, A + c(T) + c_i, A + c(S), 0\}
\end{aligned}$$

Dado que,  $\forall S, T \subseteq N$  con  $S \subseteq T$ , se cumple que  $c(S) \leq c(T)$  y  $c_i \geq 0$ , se obtiene:

$$v_{E,c}(T \cup \{i\}) + v_{E,c}(S) = \max\{2A + c(S) + c(T) + c_i, A + c(T) + c_i, 0\} \quad (3.12)$$

Como,  $A + c(S) + c_i \leq A + c(T) + c_i$  y  $A + c(T) \leq A + c(T) + c_i$ , se cumple:

$$\max\{2A + c(S) + c(T) + c_i, A + c(S) + c_i, A + c(T), 0\} \leq \max\{2A + c(S) + c(T) + c_i, A + c(T) + c_i, 0\}$$

De (3.11) y (3.12)

$$v_{E,c}(S \cup \{i\}) + v_{E,c}(T) \leq v(T \cup \{i\}) + v(S)$$

□

El siguiente teorema planteado por Curiel-Maschler y Tijs (1987)

**Teorema 3.3.2.** Sea un juego de bancarrota  $(N, v_{E;c})$  y un juego  $(N, v)$  con  $0 \leq v \leq v_{E;c}$  y  $v(S) = v_{E;c}(S), \forall S \subseteq N$  con  $|S| \in \{0, n-1, n\}$ .

Entonces  $\mathcal{C}(N, v) = \mathcal{CC}(N, v)$ .

*Demostración.*

Del teorema 3.2.4, se tiene  $\mathcal{C}(N, v) \subseteq \mathcal{CC}(N, v)$ .

Basta probar que  $\mathcal{CC}(N, v) \subseteq \mathcal{C}(N, v)$ .

- **Paso 1:** Para  $\mathcal{C}(N, v_{E;c}) \subseteq \mathcal{C}(N, v)$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un vector de pagos,  $x \in \mathcal{C}(N, v_{E;c})$

$$\Rightarrow x(N) = v(N), x(S) \geq v_{E;c}(S), \forall S \subseteq N$$

Para  $S = N$ , con  $|S| = n$ , entonces  $x(N) = v(N) = v_{E;c}(N)$

Como  $x(S) \geq v_{E;c}(S) \geq v(S)$  entonces  $x(S) \geq v(S)$

$$\therefore x \in \mathcal{C}(N, v)$$

- **Paso 2:** Para  $\mathcal{CC}(N, v) \subseteq \mathcal{C}(N, v_{E;c})$

Sea  $x \in \mathcal{CC}(N, v)$  entonces  $x(N) = v(N), \mu^v \leq x \leq M^v$

Del problema  $x(N) = v(N) = v_{E,c}(N)$  entonces  $x(N) = v(N)$

Además,

$$x(S) = x(N) - x(N \setminus S) \geq v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} (v(N) - v(N \setminus \{i\})).$$

Como  $|N| = n$  y  $|N - \{i\}| = n - 1 \Rightarrow v(N) = v_{E,c}(N)$  y  $v(N \setminus \{i\}) = v_{E,c}(N \setminus \{i\})$

$$\begin{aligned} x(S) &\geq v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} (v_{E,c}(N) - v_{E,c}(N \setminus \{i\})) \\ x(S) &\geq E - \sum_{i \in N \setminus S} (E - \max\{E - c_i, 0\}) \\ x(S) &\geq E - c(N \setminus S) \end{aligned} \tag{3.13}$$

De la definición del vector superior de  $v$ ,  $M^v$  tenemos  $x \leq M^v$  y el vector inferior  $\mu^v \leq x$ . Entonces

$$x(S) \geq \sum_{i \in S} \mu_i \geq \sum_{i \in S} v(\{i\}) \geq 0$$

Por tanto, se deduce que  $x(S) \geq E - c(N \setminus S)$  y  $x(S) \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(S) &\geq \max\{E - c(N \setminus S), 0\} = v_{E,c}(S) \\ \Rightarrow x &\in \mathcal{C}(N, v) \\ \therefore \mathcal{CC}(N, v) &\subseteq \mathcal{C}(N, v). \end{aligned}$$

□

**Observación 3.3.1.** Del teorema 3.3.2, es posible redefinir el cubrimiento del núcleo del juego  $(N, v)$ , mediante una reformulación de las coordenadas del vector superior e inferior. En este contexto se tiene:

- $M_i^{v_{E,c}} = v_{E,c}(\{i\}) = \max\{E - c(N \setminus \{i\}), 0\}, \forall i \in N.$
- $u_i^{v_{E,c}} = v_{E,c}(N) - v_{E,c}(N \setminus \{i\}) = E - \max\{E - c_i, 0\}, \forall i \in N.$

Por lo tanto, se puede deducir la siguiente expresión general del cubrimiento del núcleo, la cual satisface que,  $\forall i \in N$  :

$$\mathcal{CC}(v_{E,c}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x(N) = E, \max\{E - c(N \setminus \{i\}), 0\} \leq x_i \leq \min\{E, c_i\}\} \tag{3.14}$$

**Corolario 3.3.1.** Toda asignación del problema de bancarrota forma parte del núcleo del juego cooperativo asociado.

*Demostración.*

Del teorema 3.3.2 y al considerar  $v = v_{E,c}$ , se obtiene que:

$$\mathcal{CC}(N, v_{E,c}) = \mathcal{C}(N, v_{E,c})$$

**Afirmación 1:**  $x(N) = E$

La demostración es directa de la redefinición del cubrimiento del núcleo, (3.14).

**Afirmación 2:**  $0 \leq x_i \leq c$

En efecto, de la definición de  $v_{E,c}(\{i\})$ , se deduce la primera parte de la desigualdad

$$v_{E,c}(\{i\}) = \max\{E - c(N \setminus \{i\}), 0\} \leq x_i$$

De (3.14), se obtiene la segunda parte de la desigualdad

$$x_i \leq \min\{E, c_i\}$$

Por lo tanto, cualquier elemento de núcleo pertenece al conjunto de asignaciones del problema de bancarrota.  $\square$

Ahora veamos dos soluciones puntuales para los juegos de bancarrota.

El siguiente teorema fue propuesto y desarrollado por O'Neill (1982).

**Teorema 3.3.3.** Para cada  $(E, c) \in B^N$  la regla de llegada aleatoria coincide con el valor de Shapley para el juego de bancarrota asociado. Formalmente:

$$RA(E, c) = \phi(v_{E,c})$$

*Demostración.*

Para demostrar que la regla de llegada aleatoria  $RA$ , es equivalente al valor de Shapley usaremos la redefinición del valor de Shapley. De la redefinición del valor de Shapley

$$\phi(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi^N} m^\pi(v)$$

De la definición de la regla  $RA$

$$RA_i(E, c) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min\{c_i; \max\{E - \sum_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} c_j, 0\}\}$$

De la redefinición de la regla  $RA$ , se obtiene que :

$$RA(E, c) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi^N} A^\pi(E, c)$$

Donde  $\pi \in \Pi^N$ , es una permutación de los jugadores que determina el orden o secuencia de llegada y se define  $A_{i_n}^\pi(E, c)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_{i_1}^\pi(E, c) &= \min\{c_{i_1}, E\}, \\ A_{i_2}^\pi(E, c) &= \min\{c_{i_2}, \max\{E - A_{i_1}^\pi(E, c), 0\}\}, \\ A_{i_3}^\pi(E, c) &= \min\{c_{i_3}, \max\{E - A_{i_1}^\pi(E, c) - A_{i_2}^\pi(E, c), 0\}\}, \\ &\vdots \\ A_{i_n}^\pi(E, c) &= \min\left\{c_{i_n}, \max\left\{E - \sum_{k=1}^{n-1} A_{i_k}^\pi(E, c), 0\right\}\right\}. \end{aligned}$$

De este modo, al dividir la suma de estas distribuciones por  $|N|!$ , se obtiene la regla  $RA$ . Sea  $\pi = (i_1, \dots, i_n)$  una secuencia de llegada arbitraria, sin pérdida de generalidad; se define  $\pi^{-1} = (i_n, \dots, i_1)$ . Dado que existe una correspondencia uno a uno entre  $\pi$  y  $\pi^{-1}$ , al realizar la suma sobre todos los casos posibles obtenemos el mismo resultado.

A partir de las definiciones del valor de Shapley y la regla de la llegada aleatoria.

Basta demostrar que:  $m^\pi(v_{E,c}) = A^{\pi^{-1}}(E, c)$

Para la componente  $i_n$  :

$$A_{i_n}^{\pi^{-1}} = \min\{c_{i_n}, E\} = \begin{cases} E & ; \text{si } c_{i_n} \geq E \\ c_{i_n} & ; \text{si } c_{i_n} \leq E \end{cases}$$

Para la componente  $i_{n-1}$  :

$$A_{i_{n-1}}^{\pi^{-1}}(E, c) = \min\{c_{i_{n-1}}, \max\{E - A_{i_n}^{\pi^{-1}}(E, c), 0\}\}$$

$$A_{i_{n-1}}^{\pi^{-1}}(E, c) = \min\{c_{i_{n-1}}, \max\{E - \min\{c_{i_n}, E\}, 0\}\}$$

$$A_{i_{n-1}}^{\pi^{-1}}(E, c) = \begin{cases} 0 & ; \text{si } c_{i_n} \geq E \\ E - c_{i_n} & ; \text{si } c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_{n-1}} + c_{i_n} \geq E. \\ c_{i_{n-1}} & ; \text{si } c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_{n-1}} + c_{i_n} \leq E \end{cases}$$

Así sucesivamente, para la componente  $i_k$  :

$$A_{i_k}^{\pi^{-1}}(E, c) = \min\{c_{i_k}, \max\{E - \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c), 0\}\}$$

$$A_{i_k}^{\pi^{-1}}(E, c) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \geq E \\ E - \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \leq E \text{ y } c_{i_k} \leq E - \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \\ c_{i_k} & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \leq E \text{ y } c_{i_k} \geq E - \sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \end{cases}$$

De la condición  $\sum_{l=k+1}^n A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E, c) \geq E$  es equivalente a  $\sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \geq E$  dado que para  $A_{i_l}^{\pi^{-1}}$  es a lo mucho  $c_{i_l}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$

Entonces:

$$A_{i_k}^{\pi^{-1}}(E, c) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \geq E \\ E - \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^n c_{i_l} \geq E \\ c_{i_k} & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^n c_{i_l} \leq E \end{cases} \quad (3.15)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{i) } m_{i_n}^{\pi}(v_{E,c}) &= v_{E,c}(i_1, \dots, i_n) - v_{E,c}(i_1, \dots, i_{n-1}) \\ m_{i_n}^{\pi}(v_{E,c}) &= \max\{E - c(N \setminus (i_j, \dots, i_n)), 0\} - \max\{E - c(N \setminus (i_1, \dots, i_{n-1})), 0\} \\ m_{i_n}^{\pi}(v_{E,c}) &= E - \max\{E - c_{i_n}, 0\} \end{aligned}$$

$$m_{i_n}^{\pi}(v_{E,c}) = \begin{cases} 0 & ; c_{i_n} \geq E \\ c_{i_n} & ; c_{i_n} \leq E \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } m_{i_{n-1}}^{\pi}(v_{E,c}) &= v_{E,c}(i_1, \dots, i_{n-1}) - v_{E,c}(i_1, \dots, i_{n-2}) \\ m_{i_{n-1}}^{\pi}(v_{E,c}) &= \max\{E - c(N \setminus (i_j, \dots, i_{n-1})), 0\} - \max\{E - c(N \setminus (i_1, \dots, i_{n-2})), 0\} \\ m_{i_{n-1}}^{\pi}(v_{E,c}) &= \max\{E - c_{i_n}, 0\} - \max\{E - c_{i_n} - c_{i_{n-1}}, 0\} \end{aligned}$$

$$m_{i_{n-1}}^{\pi}(v_{E,c}) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } c_{i_n} \geq E \\ E - c_{i_n} & ; \text{ si } c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_{n-1}} \geq E - c_{i_n} \\ c_{i_{n-1}} & ; \text{ si } c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_n} \leq E - c_{i_n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \text{y generalizando } m_{i_k}^\pi(v_{E,c}) = v_{E,c}(i_1, \dots, i_k) - v_{E,c}(i_1, \dots, i_{k-1}) \\
m_{i_k}^\pi(v_{E,c}) &= \text{máx}\{E - c(N \setminus (i_j, \dots, i_k)), 0\} - \text{máx}\{E - c(N \setminus (i_1, \dots, i_{k-1})), 0\} \\
m_{i_k}^\pi(v_{E,c}) &= \text{máx}\{E - c_{i_{k+1}} - \dots - c_{i_n}, 0\} - \text{máx}\{E - c_{i_k} - \dots - c_{i_n}, 0\}
\end{aligned}$$

$$m_{i_k}^\pi(v_{E,c}) = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \geq E \\ E - \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^n c_{i_l} \geq E \\ c_{i_k} & ; \text{ si } \sum_{l=k+1}^n c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^n c_{i_l} \leq E \end{cases} \quad (3.16)$$

De (3.15) y (3.16), se obtiene que:

$$m^\pi(v_{E,c}) = A^{\pi^{-1}}(E, c)$$

□

El Teorema 3.3.3 establece una conexión directa entre el valor de Shapley en el contexto de un juego de bancarrota y la regla de llegada aleatoria. Ambos métodos de asignación resultan equivalentes, lo que implica que generan la misma distribución de recursos entre los demandantes. Este resultado proporciona, además, una vía alternativa para calcular el valor de Shapley en un juego de bancarrota, consolidando su aplicabilidad y relevancia en este tipo de problemas..

**Ejemplo 3.3.1.** Sea el problema de bancarrota  $(E, c) \in B^N$ ,  $N = \{1, 2, 3\}$ , el juego de bancarrota asociado  $(N, v)$  y el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y cuatro estados diferentes:  $E_1 = 100$ ,  $E_2 = 200$ ,  $E_3 = 300$  y  $E_4 = 450$ . Calcule el valor de Shapley del juego.

**Solución:**

Se tiene el juego de bancarrota con tres jugadores y  $3! = 6$  posibles secuencias de llegada.

- Para el estado  $E_4 = 450$

Los valores de la función característica del juego asociado son los siguientes:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 50, \quad v(\{3\}) = 150, \quad v(\{1, 2\}) = 150, \quad v(\{1, 3\}) = 250, \\ v(\{2, 3\}) = 350 \text{ y } v(\{1, 2, 3\}) = 450.$$

Se procede al cálculo del valor de Shapley utilizando la redefinición (3.4). Para cada permutación  $\pi \in \Pi^N$ , el siguiente cuadro 3.1, muestra la contribución marginal para cada jugador.

| Secuencia de llegada | Contribución del jugador 1           | Contribución del jugador 2           | Contribución del jugador 3           |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 123                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 0$         | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 300$ |
| 132                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 100$       |
| 213                  | $v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 0$         | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 300$ |
| 231                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 0$         |
| 312                  | $v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 100$       | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 150$      |
| 321                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 200$       | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 150$      |
| <b>Promedio</b>      | 200/3                                | 425/3                                | 725/3                                |

Cuadro 3.1: Cálculo del valor de Shapley para un estado  $E_4 = 450$  y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Se obtiene el valor de Shapley,  $\phi(v) = (\frac{200}{3}, \frac{425}{3}, \frac{725}{3})$ .

- Para el estado  $E_3 = 300$

Los valores de la función característica del juego asociado son los siguientes:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) = 0, \quad v(\{1, 3\}) = 100, \quad v(\{2, 3\}) = 200 \text{ y} \\ v(\{1, 2, 3\}) = 300.$$

Se procede al cálculo de valor de Shapley análogo al caso anterior, el cuadro 3.2, muestra la contribución marginal para cada jugador.

| Secuencia de llegada | Contribución del jugador 1           | Contribución del jugador 2           | Contribución del jugador 3           |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 123                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 0$         | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 300$ |
| 132                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 100$       |
| 213                  | $v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 0$         | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 300$ |
| 231                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 200$       |
| 312                  | $v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 100$       | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| 321                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 200$       | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| <b>Promedio</b>      | 50                                   | 100                                  | 150                                  |

Cuadro 3.2: Cálculo del valor de Shapley para un estado  $E_3 = 300$  y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Se obtiene el valor de Shapley,  $\phi(v) = (50, 100, 150)$ .

- Para el estado  $E_2 = 200$

Los valores de la función característica del juego asociado son los siguientes:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = 0, \quad v(\{2, 3\}) = 100 \text{ y} \\ v(\{1, 2, 3\}) = 200.$$

Se procede al cálculo del valor de Shapley análogo al caso anterior, el cuadro 3.3, muestra la contribución marginal para cada jugador.

| Secuencia de llegada | Contribución del jugador 1           | Contribución del jugador 2           | Contribución del jugador 3           |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 123                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 0$         | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 200$ |
| 132                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 0$         |
| 213                  | $v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 0$         | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 200$ |
| 231                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 100$       |
| 312                  | $v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 100$       | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 200$ | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| 321                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 100$       | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| <b>Promedio</b>      | $\frac{100}{3}$                      | $\frac{250}{3}$                      | $\frac{250}{3}$                      |

Cuadro 3.3: Cálculo del valor de Shapley para un estado  $E_2 = 200$  y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Se obtiene el valor de Shapley,  $\phi(v) = (\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3})$ .

- Para el estado  $E_1 = 100$

Los valores de la función característica del juego asociado son los siguientes:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 0 \text{ y}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 100.$$

Se procede al cálculo del valor de Shapley análogo al caso anterior, el cuadro 3.4, muestra la contribución marginal para cada jugador.

| Secuencia de llegada | Contribución del jugador 1           | Contribución del jugador 2           | Contribución del jugador 3           |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 123                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) = 0$         | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 100$ |
| 132                  | $v(\{1\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 100$ | $v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) = 0$         |
| 213                  | $v(\{1, 2\}) - v(\{2\}) = 0$         | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}) = 100$ |
| 231                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2\}) - v(\emptyset) = 0$        | $v(\{2, 3\}) - v(\{2\}) = 0$         |
| 312                  | $v(\{1, 3\}) - v(\{3\}) = 0$         | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}) = 100$ | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| 321                  | $v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) = 100$ | $v(\{2, 3\}) - v(\{3\}) = 0$         | $v(\{3\}) - v(\emptyset) = 0$        |
| <b>Promedio</b>      | $\frac{100}{3}$                      | $\frac{100}{3}$                      | $\frac{100}{3}$                      |

Cuadro 3.4: Cálculo del valor Shapley para un estado  $E_1 = 100$  y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Se obtiene el valor de Shapley,  $\phi(v) = (\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3})$ .

El siguiente teorema, propuesto y desarrollado por Aumann y Maschler (1985), establece una conexión directa entre el nucleolo en el contexto de un juego de bancarrota y la regla del Talmud. Se procede a demostrar que ambos métodos de asignación resultan equivalentes, lo que implica que generan la misma distribución de recursos entre los demandantes. Este resultado proporciona, además, una vía alternativa para calcular el nucleolo de un juego de bancarrota, consolidando su aplicabilidad y relevancia en este tipo de problemas.

**Teorema 3.3.4.** Para cada  $(E, c) \in B^N$ , la regla del Talmud coincide con el nucleolo de un juego de bancarrota asociado  $(N, v_{E,c})$ .

Formalmente:

$$T(E, c) = \eta(N, v_{E,c})$$

*Demostración.*

Sea un juego de bancarrota asociado al problema de bancarrota, con  $|N| \geq 2$ . Se analiza el exceso o queja de la coalición  $S$  en función de una imputación  $x \in I(v)$ .

Se consideran dos casos para calcular el exceso:

i)  $E \leq c(N \setminus S)$

De la definición de  $v(S)$  se tiene que,  $v(S) = 0$ , y el exceso de la coalición  $S$  es:

$$e(S, x) = -x(S)$$

ii)  $E > c(N \setminus S)$

De la definición de  $v(S)$  se tiene que,  $v(S) = E - c(N \setminus S)$ , como  $x \in I(N, v)$  se cumple  $E = x(N)$  y el exceso de la coalición  $S$  es:

$$e(S, x) = E - c(N \setminus S) - x(S) = -(c(N \setminus S) - x(N \setminus S))$$

Así, el exceso de la coalición se expresa de la siguiente forma:

$$e(S, x) = \begin{cases} -x(S) & , \text{si } E \leq c(N \setminus S) \\ -(c(N \setminus S) - x(N \setminus S)) & , \text{si } E > c(N \setminus S) \end{cases} \quad (3.17)$$

Se divide el problema en dos casos:

**Caso 1:**  $E \leq \frac{C}{2}$

Por la definición de la regla  $T$ , se tiene que

$$T_i(E, c) = \min\left\{\frac{1}{2}c_i, \lambda\right\} \leq \frac{c_i}{2} \quad (3.18)$$

Ahora se demuestra que  $T(E, c) \in I(N, v)$ ,  $\forall i \neq n$ , se cumple:

$$v(\{i\}) = \max\{0, E - c(N \setminus \{i\})\} \leq \max\left\{0, \frac{C}{2} - c(N \setminus \{i\})\right\}$$

$$v(\{i\}) \leq \max\left\{0, \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left(-\frac{c_j}{2}\right) + \frac{c_i}{2} + \frac{c_n}{2} - c_n\right\} \quad (3.19)$$

Sin pérdida de generalidad, se ordenan las demandas de forma ascendente, de modo que,  $c_i \leq c_{n-1} \leq c_n$ . Esto implica que, el valor máximo de (3.19) es cero.

En consecuencia,  $\forall i \neq n$ , se tiene que  $v(\{i\}) = 0$ , lo que asegura que  $T_i(E, c) \geq v(i)$ . Asimismo,  $\forall i \neq n$ , de (3.18) sabemos que  $T_i(E, c) \leq \frac{c_i}{2}$ , tenemos:

$$v(n) = \max \left\{ 0, E - \sum_{j=1}^{n-1} c_j \right\} \leq \max \left\{ 0, E - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{2} \right\} \leq T_n(E, c).$$

Entonces,  $T(E, c)$  cumple con las condiciones del conjunto de imputaciones, es decir

$$T(E, c) \in I(N, v).$$

A partir de aquí, se analizan dos casos:

**Caso 1.1:** Si  $T_i(E, c) < \frac{c_i}{2}$ ,  $\forall i \in N$ .

De la definición de la regla  $T$ , se sabe que  $T_i(E, c) = \frac{E}{n}$ ,  $\forall i \in N$ . Además, como  $v(n) = 0$ , se obtiene que

$$e(\{i\}, T(E, c)) = -\frac{E}{n}.$$

Ahora se considera el caso donde la coalición  $S \subseteq N$  está compuesta por más de un jugador.

De (3.17), se obtiene:

- Si  $E \leq c(N \setminus S)$ , entonces:

$$e(S, T(E, c)) = -\sum_{i \in S} T_i(E, c) = -|S| \frac{E}{n} \leq -\frac{E}{n}.$$

- Si  $E > c(N \setminus S)$ , entonces:

$$e(S, T(E, c)) = -(c(N \setminus S) - |N \setminus S| \frac{E}{n}) \leq -|N \setminus S| \frac{E}{n} \leq -\frac{E}{n}.$$

Se supone ahora que  $x \in I(N, v)$  con  $x \neq T(E, c)$ .

Para algún jugador  $j \in N$  para el cual  $x_j < T_j(E, c)$ , lo que implica que

$$e(\{j\}, x) = -x_j > -\frac{E}{n} = e(\{j\}, T(E, c)).$$

Se puede observar que para cada  $S \subseteq N$  se verifica que

$$e(S, T(E, c)) \leq -\frac{E}{n}$$

Se puede deducir que  $T(E, c) <_L x$ .

Por lo tanto, se concluye que  $\eta(v) = T(E, c)$ .

**Caso 1.2:** Si  $T_i(E, c) = \frac{c_i}{2}$ ,  $\forall i \in N$ .

Del orden de los jugadores, se puede deducir que  $T_1(E, c) = \frac{c_1}{2}$  y para cualquier otro jugador ( $j \neq 1$ ), se cumple  $T_j(E, c) \geq \frac{c_1}{2}$ . Por lo tanto, el valor de la coalición sin el jugador 1, es:

$$v(N \setminus \{1\}) = E - c_1 > 0$$

De esta forma, el excedente de la coalición  $\{1\}$  con respecto a la asignación del Talmud es:

$$e(\{1\}, T(E, c)) = -\frac{c_1}{2} = (E - c_1) - (E - \frac{c_1}{2}) = e(N \setminus \{1\}, T(E, c)).$$

Ahora se considera el caso donde la coalición  $S \subseteq N$  está compuesta por más de un jugador, con  $S \neq \{1\}$  y  $S \neq N \setminus \{1\}$ , de (3.17), se tiene que:

- Si  $E \leq c(N \setminus S)$ , entonces:

$$e(S, T(E, c)) = -\sum_{i \in S} T_i(E, c) \leq -|S| \frac{c_1}{2} \leq -\frac{c_1}{2}.$$

- Si  $E > c(N \setminus S)$ , entonces:

$$e(S, T(E, c)) = -\sum_{i \notin S} (c_i - T_i(E, c)) \leq -|N \setminus S| \frac{c_1}{2} \leq -\frac{c_1}{2}.$$

Ahora se supone que  $x \in I(N, v)$  con  $x \neq T(E, c)$ . Se tienen dos posibles casos:

- Si  $x_j < T_1(E, c)$ , hay un  $j \in N$  tal que  
 $e(\{j\}, x) = v(j) - x_j > v(j) - T_1(E, c) \geq -T_1(E, c) = -\frac{c_1}{2}$ .
- Si  $x_j > T_1(E, c)$ , para cada  $j \in N$ , entonces:  
 $e(N \setminus \{1\}, x) > -c_1 + x_1 > -c_1 + \frac{c_1}{2} = -\frac{c_1}{2}$ .

En todos los casos, se obtiene que  $T(E, c) <_L x$ , por lo tanto,

$$\eta(v) = T(E, c)$$

**Caso 2:**  $E > \frac{C}{2}$

Se sabe que el déficit agregado  $L$ , es  $L = C - E$ , del lema 2.3.7 establece que la regla  $T$  cumple la propiedad de  $ADU$ . Es decir,

$$T(E, c) = c - T(L, c) \tag{3.20}$$

Sean los juegos de bancarrota  $(N, v)$  y  $(N, v')$  asociados a los problemas de bancarrota  $(E, c)$  y  $(L, c)$ , con sus respectivas funciones de excesos  $e$  y  $e'$ .

Sea  $S \subseteq N$  y  $x, x' \in I(v)$ ; entonces,  $x = c - x' \in I(N, v)$  y  $x' = c - x \in I(N, v)$ .

Se presentan dos casos:

- Si  $E \leq c(N \setminus S)$ , entonces:

De la definición de  $v(s)$ , se tiene que  $v(S) = 0$  y  $v'(N \setminus S) = L - c(S) = c(N \setminus S) - E$ .

El exceso de la coalición  $S$  es:

$$e(S, x) = -x(S) = -\sum_{j \in S} x_j = -\sum_{j \in S} (c_j - x'_j) \quad (3.21)$$

El exceso de la coalición  $N \setminus S$  es:

$$e'(N \setminus S, x') = v'(N \setminus S) - x'(N \setminus S) = -\sum_{j \in S} (c_j - x'_j) \quad (3.22)$$

De (3.21) y (3.22), se obtiene que  $e(S, x) = e'(N \setminus S, x)$ .

- Si  $E > c(N \setminus S)$ , entonces:

De la definición de  $v'(N \setminus S)$ , se tiene que  $v'(N \setminus S) = 0$ .

El exceso de la coalición  $S$  es:

$$e(S, T(E, c)) = E - c(N \setminus S) - x(S) \quad (3.23)$$

El exceso de la coalición  $N \setminus S$  es:

$$e'(N \setminus S, x') = L - c(S) - x'(N \setminus S) = E - c(N \setminus S) - x(S) \quad (3.24)$$

De (3.23) y (3.24), se tiene que  $e(S, x) = e'(N \setminus S, x)$ .

De este modo, los vectores de excesos ordenados para  $x$  y  $x'$  son equivalentes, es decir

$$\theta(x) = \theta(x')$$

Se establece una relación directa entre sus nucleolos. Es decir

$$\eta(v) = c - \eta(v') \quad (3.25)$$

De (3.20), por el caso 1 y por (3.25) se obtiene:

$$T(E, c) = c - T(L, c) = c - \eta(v') = \eta(v)$$

□

## Capítulo 4

# Juegos de inversión mediante reglas de Bancarrota

### 4.1. Modelo

Sea  $N = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de agentes. Cada  $i \in N$  tiene la siguiente *función de utilidad de aversión al riesgo absoluto constante (CARA)*  $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  en dinero:

$$u_i(x) = -e^{-a_i x} \quad (4.1)$$

Suponga que cada  $i \in N$  es averso al riesgo ( $a_i > 0$ ). Suponga también que  $a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Cada agente  $i$  invierte  $s_i \in \mathbb{R}_+$  unidades de riqueza en una empresa riesgosa. La empresa tiene un valor inicial  $v_0 = \sum_{i \in N} s_i$  al realizarse las inversiones. La empresa tiene éxito con la probabilidad  $p \in (0, 1)$ , su valor aumenta a  $(1 + r)v_0$ , donde  $r \in (0, 1]$ . La empresa quiebra con una probabilidad  $(1 - p)$  el valor disminuye a  $\beta v_0$  donde  $\beta \in (0, 1)$ .

En el caso de bancarrota, el valor de la empresa se distribuye entre los agentes de acuerdo con una regla de bancarrota preespecificada.

Formalmente, un problema de bancarrota es un vector de demandas (es decir, inversiones),  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$  y una dotación  $E \in \mathbb{R}_+$ , donde  $E$  representa el valor de la empresa en caso de bancarrota, satisfaciendo  $\sum_{i \in N} s_i \geq E$ .

En nuestro modelo, la empresa en bancarrota conserva una fracción  $\beta$  de su capital, es decir el estado a repartir es  $E = \beta \sum_{i \in N} s_i$ , el estado es una función de  $s$ . Como resultado, el vector  $s$  y la fracción  $\beta$  son suficientes para describir nuestro problema de bancarrota.

**Definición 4.1.1.** Una regla de bancarrota  $F$  es una función que asocia a cada problema de bancarrota una única asignación  $F(s) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , tal que  $\sum_{i \in N} x_i = E$ .

En el presente capítulo, se analizan las siguientes reglas:

#### 4.1.1. Regla proporcional, $P$

La regla proporcional distribuye el valor de la empresa en bancarrota de manera proporcional a las inversiones de cada agente.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$P_i(s) = \beta s_i, \text{ donde } \beta \in (0, 1).$$

#### 4.1.2. Regla de igual ganancia, $EA$

La regla de igual ganancia distribuye el valor de la empresa en bancarrota de manera equitativa entre los agentes, sin importar que alguno de ellos pueda recibir una cantidad mayor a su inversión.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$EA_i(s) = \frac{\beta}{n} \sum_{i \in N} s_i, \text{ donde } \beta \in (0, 1).$$

#### 4.1.3. Regla de igual ganancia restringida, $CEA$

La regla de igual ganancia restringida distribuye el valor de la empresa en bancarrota de manera equitativa entre los agentes, con la restricción de que ningún agente reciba una cantidad mayor a su inversión.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$CEA_i(s) = \min\{s_i, \rho\}.$$

Donde  $\rho \in \mathbb{R}_+$  y resuelve la ecuación  $\sum_{i \in N} \min\{s_i, \rho\} = \beta \sum_{i \in N} s_i$ .

#### 4.1.4. Regla de igual pérdida, $EL$

La regla de igualdad de pérdida distribuye la pérdida de valor de la empresa en bancarrota,  $(1 - \beta) \sum_{i \in N} s_i$ , de manera equitativa entre los agentes, sin importar si alguno de ellos pierde una cantidad mayor a su inversión. Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$EL_i(s) = s_i - \frac{(1 - \beta)}{n} \sum_{j \in N} s_j.$$

#### 4.1.5. Regla de igual pérdida restringida, *CEL*

La regla de igual pérdida restringida distribuye la pérdida de valor de la empresa en bancarota,  $(1 - \beta) \sum_{i \in N} s_i$ , de manera equitativa entre los agentes con la restricción de que ningún agente pueda perder una cantidad mayor a su inversión.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$CEL_i(s) = \max\{s_i - \rho, 0\}$$

donde  $\rho \in \mathbb{R}_+$  y resuelve la ecuación  $\sum_{i \in N} \min\{s_i - \rho, 0\} = \beta \sum_{i \in N} s_i$ .

Asimismo, se analizarán las siguientes familias de reglas:

#### 4.1.6. Regla $AP[\alpha]$ , *AP*

La regla *AP* es aquella regla que elige un promedio ponderado con peso  $\alpha$  entre la regla proporcional y la regla de igual ganancia.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$AP[\alpha]_i(s) = \alpha P_i(s) + (1 - \alpha) EA_i(s) = \frac{1 + (n - 1)\alpha}{n} \beta s_i + (1 - \alpha) \frac{\beta}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} s_j, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

#### 4.1.7. Regla $LP[\alpha]$ , *LP*

La regla *LP* es aquella que elige un promedio ponderado con peso  $\alpha$  entre la regla proporcional y la regla de igual pérdida.

Formalmente:

Para cada  $i \in N$ ,

$$LP[\alpha]_i(s) = \alpha P_i(s) + (1 - \alpha) EL_i(s) = \frac{n\alpha\beta + (n - 1 + \beta)(1 - \alpha)}{n} s_i - \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{n} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} s_j.$$

Para cada regla de bancarota,  $F$  se analiza el juego de inversión inducido por los agentes.

Cada  $i \in N$  tiene el conjunto de estrategias  $S_i = \mathbb{R}_+$  del cual elige un nivel de inversión  $s_i$ .

Sea  $S = \prod_{i \in N} S_i$ , la lotería  $(p, 1 - p)$  con un perfil de estrategias,  $s \in S$  genera un beneficio para el agente  $i$

$$w_i^F(s) = \begin{cases} (1 + r)s_i - s_i & , \text{ con probabilidad } p \\ F_i(s) - s_i & , \text{ con probabilidad } (1 - p) \end{cases}$$

La interpretación es que el agente  $i$ , inicialmente pide prestado  $s_i$  a una tasa de interés normalizada a 0. Si la inversión tiene éxito, recibe  $(1+r)s_i$ , devuelve  $s_i$  y se queda con su beneficio  $rs_i$ .

Si la inversión fracasa, tenemos un problema de bancarrota, recibe  $F_i(s)$  de vuelta y tiene que devolver  $s_i$ , por lo que su beneficio neto se convierte en  $F_i(s) - s_i$ , con  $F_i(s) - s_i \leq 0$ .

La misma lotería se obtiene de un entorno donde cada agente  $i$  asigna su dotación monetaria entre un activo sin riesgo (cuya rentabilidad se normaliza a 0) y la empresa riesgosa. En esta segunda interpretación, suponga que el agente no tiene una restricción de liquidez. Es decir, se le permite invertir más que su dotación. Esta suposición sólo sirve para librarnos de los casos límite (poco realistas) en los que algunos agentes gastan toda su dotación monetaria en la empresa riesgosa.

Alternativamente, se puede imponer una restricción de liquidez para centrarse en los equilibrios que se encuentran en el interior de los espacios estratégicos.

El pago esperado del agente  $i$  con el perfil de estrategia  $s \in S$  es:

$$U_i^F(s) = pu_i(rs_i) + (1-p)u_i(F_i(s) - s_i) \quad (4.2)$$

De la definición de la función de utilidad CARA, se reemplaza (4.1) en (4.2), tenemos

$$U_i^F(s) = -pe^{-a_i rs_i} - (1-p)e^{-a_i F_i(s_i, s_{-i}) + a_i s_i} \quad (4.3)$$

Sea  $U^F = (U_1^F, \dots, U_n^F)$ . El juego de inversión inducido por la regla de bancarrota  $F$  se define entonces como  $G^F = \langle S, U^F \rangle$ .

Sea  $\epsilon(G^F)$  el conjunto de equilibrios de Nash de  $G^F$ .

## 4.2. Equilibrios aplicando diferentes reglas de bancarrota

En esta sección, se presenta un análisis preliminar que sienta las bases para comparar tanto la inversión total como la inversión individual de los agentes. El análisis comienza con el examen de los equilibrios de Nash y el equilibrio de estrategias dominantes en cada juego.

### Análisis del equilibrio bajo la regla proporcional (P).

La siguiente proposición demuestra que, cuando se aplica la regla P, el juego de inversión posee un único equilibrio de estrategias dominantes y no admite otros equilibrios de Nash.

**Proposición 4.2.1.** Si  $\ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) \leq 0$ , el juego de inversión bajo la regla P tiene un único equilibrio de estrategias dominantes  $(0, \dots, 0)$ .

En caso contrario, cuando  $\ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) > 0$ , el juego tiene un único equilibrio de estrategia dominante  $s^*$ , donde cada agente  $i$  elige un nivel de inversión positivo  $s_i^*$  dado por:

$$s_i^* = \frac{1}{a_i(r+1-\beta)} \ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right).$$

No existe otro equilibrio de Nash.

*Demostración.*

La regla  $P$ , en función de los niveles de inversión, se define como  $P_i(s) = \beta s_i$ , de la ecuación (4.3) se tiene que la utilidad del agente  $i$  mediante  $P$  se puede escribir como:

$$U_i^P(s) = -pe^{-a_i r s_i} - (1-p)e^{a_i s_i(1-\beta)}$$

Se calcula la mejor respuesta del agente  $i$ . Es decir, buscamos un  $s_i^* = \sigma_i(s_{-i})$  que maximiza  $U_i^P(s)$ :

$$\frac{\partial U_i^P(s)}{\partial s_i} = a_i p r e^{-a_i r s_i} - a_i(1-p)(1-\beta)e^{a_i s_i(1-\beta)} = 0 \quad (4.4)$$

Al resolver la ecuación 4.4, se obtiene:

$$\sigma_i(s_{-i}) = \frac{1}{a_i(r+1-\beta)} \ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right).$$

y la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 U_i^P(s)}{\partial s_i^2} = -a_i^2 p r^2 e^{-a_i r^2 s_i} - a_i^2(1-p)(1-\beta)^2 e^{a_i s_i(1-\beta)} < 0$$

Esto garantiza que  $\sigma_i(s_{-i})$  maximiza  $U_i^P(s)$ .

La respuesta óptima del agente  $i$ :

$$R_i(s_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{a_i(r+1-\beta)} \ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) & , \text{ si } \ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) \geq 0 \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Se observa que  $R_i(s_{-i})$  es independiente de las estrategias adoptadas de los demás jugadores. Esto implica que cada agente  $i$  tiene definida una estrategia estrictamente dominante, lo cual establece que la inversión bajo la regla proporcional tiene un equilibrio único de estrategias dominantes. Para cada agente  $i \in N$ , se tiene que la estrategia  $s_i^* = \max\{0, \sigma_i(s_{-i})\}$  constituye un equilibrio de Nash.  $\square$

**Observación 4.2.1.** Si se cumple la condición de que  $\ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) > 0$ ; entonces todos los agentes optarían por un nivel de inversión positivo en el equilibrio de las estrategias dominantes. La condición  $\ln\left(\frac{pr}{(1-p)(1-\beta)}\right) > 0$ , que equivale a  $pr > (1-p)(1-\beta)$ , simplemente realiza una comparación entre el retorno de la inversión individual en caso de éxito  $r$ , ponderado por la probabilidad de éxito  $p$ , y la pérdida incurrida de la inversión individual en el caso de bancarrota  $(1-\beta)$ , ponderada por la probabilidad de fracaso  $(1-p)$ . Bajo esta premisa, invertir en una empresa es óptimo cuando los beneficios esperados en caso de éxito superan a las posibles pérdidas en caso de fracaso.

A partir del modelo propuesto, donde se establece que  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  y de  $s_i^*$ , se puede observar que los niveles de inversión en equilibrio se ordenan de manera decreciente, es decir,  $s_1^* \geq \dots \geq s_n^*$ .

Al analizar las derivadas parciales, se obtiene que:

$$\frac{\partial s_i^*}{\partial p} > 0, \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial \beta} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial a_i} < 0$$

Entonces:

- a) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente creciente con respecto a la probabilidad de éxito  $p$  y a la fracción del valor de la empresa que sobrevive en caso de fracaso  $\beta$ . Esto indica que en escenarios donde la probabilidad de éxito es mayor y la recuperación tras un posible fracaso es más alta, los agentes se ven motivados a incrementar su inversión, ya que ambos factores ayudan a reducir el riesgo percibido.
- b) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente decreciente con su grado de aversión al riesgo  $a_i$ . Es decir, los agentes más ricos (con menor aversión al riesgo) invierten más que los agentes más pobres (mayor grado de aversión al riesgo).

- c) Cabe destacar que la inversión óptima del agente  $i$ , no tiene una relación fija con la tasa de rendimiento en caso de éxito  $r$ . Es decir,  $r$  no afecta directamente a la inversión óptima de equilibrio.

### Análisis del equilibrio bajo la regla $AP[\alpha]$ .

La siguiente proposición determina la forma del equilibrio de Nash único bajo la regla  $AP[\alpha]$ . Para asegurar que, en el equilibrio de Nash, la asignación recibida por un agente en caso de bancarota no exceda su inversión inicial, también identificamos los valores de los parámetros que cumplen la condición  $AP[\alpha]_i(s^*) \leq s_i^*$  para cada  $i \in N$ .

**Proposición 4.2.2.** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) \leq 0$ , el juego de inversión bajo la regla  $AP[\alpha]$  tiene un único equilibrio de Nash  $(0, \dots, 0)$ .

En caso contrario, cuando  $\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) > 0$ , el juego tiene un único equilibrio de Nash  $(s^*)$ , en el cual cada agente  $i$  elige un nivel de inversión positivo  $s_i^*$  dado por:

$$s_i^* = \frac{n(1+r-\beta) + \beta(1-\alpha) + \beta(1-\alpha)a_i \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r-\alpha\beta)} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right).$$

En el último caso, el equilibrio de Nash único  $s^*$  satisface  $AP[\alpha]_i(s^*) \leq s_i^*$  para cada  $i \in N$  si y solo si

$$\frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{a_j}} \geq \frac{r\beta(1-\alpha)}{n(1-\alpha\beta)(1+r-\beta)}.$$

**Observación 4.2.2.** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) > 0$ , que equivale a  $pr > (1-p)(1 - \frac{1+(n-1)\alpha}{n}\beta)$ ; entonces todos los agentes optarían por un nivel de inversión positivo en el equilibrio de Nash. Esta condición simplemente realiza una comparación entre el retorno de la inversión individual en caso de éxito  $r$ , ponderado por la probabilidad de éxito  $p$ , y la pérdida incurrida de la inversión individual en caso de bancarota,  $(1 - \frac{1+(n-1)\alpha}{n}\beta)$ , ponderado por la probabilidad de fracaso,  $(1-p)$ .

En otras palabras, invertir en una empresa es óptimo cuando los beneficios esperados en caso de éxito superan a las posibles pérdidas en caso de fracaso.

A partir del modelo propuesto, donde se establece que  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  y de  $s_i^*$ , se puede observar que los niveles de inversión en equilibrio se ordenan de manera decreciente, es decir,  $s_1^* \geq \dots \geq s_n^*$ .

Al analizar las derivadas parciales, se obtiene que:

$$\frac{\partial s_i^*}{\partial p} > 0, \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial \beta} > 0 \quad y \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial a_i} < 0$$

Entonces:

- a) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente creciente con respecto a la probabilidad de éxito  $p$  y a la fracción del valor de la empresa que sobrevive en caso de fracaso  $\beta$ . Esto indica que en escenarios donde la probabilidad de éxito es mayor y la recuperación tras un posible fracaso es más alta, los agentes se ven motivados a incrementar su inversión, ya que ambos factores ayudan a reducir el riesgo percibido.
- b) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente decreciente con su grado de aversión al riesgo  $a_i$ . Es decir, los agentes más ricos (con menor aversión al riesgo) invierten más que los agentes más pobres (mayor grado de aversión al riesgo).
- c) Cabe destacar que la inversión óptima del agente  $i$ , no tiene una relación fija con la tasa de rendimiento en caso de éxito  $r$ .

**Observación 4.2.3.** Para  $\alpha = 0$ , la regla  $AP[\alpha]$  se convierte en la regla de igual ganancia (EA), la condición  $AP[\alpha]_i(s^*) \leq s_i^*$  (la asignación es menor que su inversión), entonces para  $\alpha = 0$ , la regla  $AP[\alpha]$  se convierte en la regla de igual ganancia restringida (CEA), si:  $\frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{a_j}} \geq \frac{r\beta}{n(1+r-\beta)}$ , el juego tiene un equilibrio de Nash único  $s^*$  siempre que exista, en el que cada agente elige un nivel de inversión positivo  $s_i^*$  dado por

$$s_i^* = \frac{n(1+r-\beta) + \beta + \beta a_i \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r)} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta)} \right).$$

En otras palabras, si existe el equilibrio de Nash bajo la regla CEA, este es único y coincide con el único equilibrio de Nash que se obtiene bajo la regla EA.

### Análisis del equilibrio bajo la regla $LP[\alpha]$ .

La siguiente proposición muestra que el equilibrio de Nash bajo la regla  $LP[\alpha]$  es de la forma  $s_1^* \geq \dots \geq s_n^*$ , donde el agente 1 hasta el agente  $k$ ,  $k \in N$ , eligen un nivel de inversión positivo, mientras que los demás agentes eligen una inversión igual a cero. En el caso de  $\alpha < 1$ , es decir, cuando  $LP[\alpha] \neq P$ , existen valores de los parámetros para los cuales  $LP[\alpha]$  asigna una participación negativa a algunos agentes en el equilibrio de Nash. Para evitar estas situaciones, se restringe el análisis a los casos donde  $LP[\alpha]_i(s^*) \geq 0$  para cada  $i \in N$ . La siguiente proposición identifica estos equilibrios bajo las condiciones mencionadas.

**Proposición 4.2.3.** Si  $\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right) \leq 0$ , el juego de inversión bajo  $LP[\alpha]$  tiene un único equilibrio de Nash  $(0, \dots, 0)$ .

En caso contrario, cuando  $\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right) > 0$ , existe un  $k \in N$  tal que el único equilibrio de Nash es  $s^* = (s_1^*, \dots, s_k^*, 0, \dots, 0)$ , donde para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $s_i^* > 0$ , es dado por:

$$s_i^* = \left( \frac{1}{a_i} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{((1-\beta)(1-\alpha)k + n(\alpha(1-\beta) + r)) \sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j}} \right) \frac{\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)}{r + \alpha(1-\beta)}$$

En el último caso, el único equilibrio de Nash  $s^*$ , satisface  $LP[\alpha]_i(s^*) \geq 0$  para cada  $i \in N$  si y solo

$$\frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_{j \in N} \frac{1}{a_j}} \geq \frac{(r+1)(1-\alpha)(1-\beta)}{n(1-\beta+r)(1-\alpha+\alpha\beta)}. \quad (4.5)$$

Bajo esta condición de desigualdad, se tiene que  $k = n$ . Es decir,  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) > 0$ .

**Observación 4.2.4.** Bajo la desigualdad (4.5), si  $pr > \frac{(1-\beta)}{n}(1-p)(1+(n-1)\alpha)$ , todos los agentes optarán por un nivel de inversión positivo en el equilibrio de Nash. Esta condición simplemente realiza una comparación entre el retorno de la inversión individual en caso de éxito  $r$ , ponderado por la probabilidad de éxito  $p$ , y la pérdida incurrida de la inversión individual en caso de bancarrota,  $\frac{(1-\beta)}{n}(1+(n-1)\alpha)$ , ponderado por la probabilidad de fracaso,  $(1-p)$ .

En otras palabras, invertir en la empresa es óptimo si los rendimientos en caso de éxito superan las pérdidas incurridas en caso de fracaso.

A partir del modelo propuesto, donde se establece que  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  y de  $s_i^*$ , se puede observar que los niveles de inversión en equilibrio se ordenan de manera decreciente, es decir,  $s_1^* \geq \dots \geq s_n^*$ .

Al analizar las derivadas parciales, se obtiene que:

$$\frac{\partial s_i^*}{\partial p} > 0, \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial \beta} > 0 \quad y \quad \frac{\partial s_i^*}{\partial a_i} < 0$$

Entonces:

- a) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente creciente con respecto a la probabilidad de éxito  $p$  y a la fracción del valor de la empresa que sobrevive en caso de fracaso  $\beta$ . Esto indica que en escenarios donde la probabilidad de éxito es mayor y la recuperación tras un posible fracaso es más alta, los agentes se ven motivados a incrementar su inversión, ya que ambos factores ayudan a reducir el riesgo percibido.

- b) La inversión óptima del agente  $i$ , es estrictamente decreciente con su grado de aversión al riesgo  $a_i$ . Es decir, los agentes más ricos (con menor aversión al riesgo) invierten más que los agentes más pobres (mayor grado de aversión al riesgo).
- c) Cabe destacar que la inversión óptima del agente  $i$ , no tiene una relación fija con la tasa de rendimiento en caso de éxito  $r$ .

### 4.3. Comparaciones de inversión en equilibrio

En esta sección, se analizan las reglas de bancarrota con el objetivo de comparar la inversión de equilibrio de cada agente y la inversión total de equilibrio. Es razonable suponer que un gobierno preferiría reglas de bancarrota que induzcan una mayor inversión total en la economía; en este contexto radica la importancia de nuestro análisis.

A continuación, se comparan los niveles de inversión individual en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3.1.** Sea el juego de inversión con 2 agentes (inversores), donde cada uno tiene la función de utilidad de aversión al riesgo constante (*CARA*), definida como  $u_i(x) = -e^{-a_i x}$ , con  $0 < a_1 \leq a_2$  con  $r = 0,3, p = 0,8, \beta = 0,7$  y  $a_1 = 1$ . Calcule los equilibrios de inversión individual de cada agente en función de  $a_2$  para las tres reglas de bancarrota: *P, EA* y *EL*.

**Solución:**

- i) **El equilibrio de inversión individual de los agentes mediante la regla, *P* :**

De la proposición 4.2.1, se tiene que:

$$\ln \left( \frac{pr}{(1-p)(1-\beta)} \right) = \ln \left( \frac{(0,8)(0,3)}{(0,2)(0,3)} \right) = \ln 4 > 0,$$

entonces  $s_i^* > 0$  y  $s_i^* \geq s_2^*$ .

$$s_i^* = \frac{1}{a_i(r+1-\beta)} \ln \left( \frac{pr}{(1-p)(1-\beta)} \right) = \frac{1}{(0,65)a_i} \ln \frac{85}{24}$$

**Para el agente 1:**

$$s_1^* = \frac{1}{0,6} \ln 4$$

**Para el agente 2:**

$$s_2^* = \frac{1}{(0,6)a_2} \ln 4$$

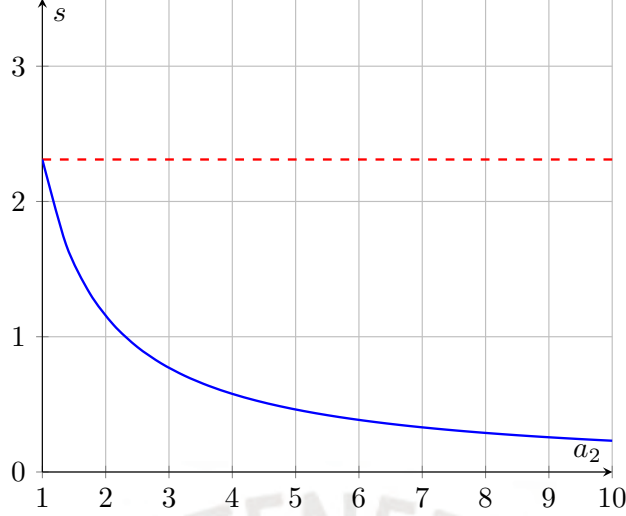


Figura 4.1: Inversión del agente 1,  $s$  en la función de la aversión al riesgo del otro agente  $a_2$ , bajo la regla  $P$  (Rojo). Inversión del agente 2,  $s$  en función de su propia aversión al riesgo  $a_2$ , bajo la regla  $P$  (Azul).

En la figura 4.1, se observa que el equilibrio de inversión del agente 1 permanece constante y es independiente del nivel de aversión al riesgo del agente 2,  $a_2$ . Sin embargo, el equilibrio de inversión del agente 2 es decreciente a medida que aumenta su nivel de aversión al riesgo. Además, bajo la regla proporcional (P), el equilibrio de inversión de cada agente es independiente de los demás agentes, lo que convierte a esta regla en una opción confiable. Esto se debe a que cada agente puede determinar su estrategia de inversión sin necesidad de conocer el perfil de aversión al riesgo de los otros inversores.

ii) **El equilibrio de inversión individual de los agentes mediante la regla, EA :**

De la definición de  $AP[\alpha]$ , para  $\alpha = 0$ ,  $AP[0] = EA$ , y por la Proposición 4.2.2, se tiene que:

$$s_i^* = \frac{n(1+r-\beta) + \beta + \beta a_i \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r)} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta)} \right)$$

$$s_i^* = \left( \frac{95}{78a_i} + \frac{35}{78} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{1}{a_j} \right) \ln \left( \frac{24}{13} \right)$$

Como

$$\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta)} \right) = \ln \left( \frac{24}{13} \right) > 0,$$

entonces  $s_i^* > 0$  y  $s_1^* \geq s_2^*$

Para el agente 1:

$$s_1^* = \left( \frac{95}{78} + \frac{35}{78a_2} \right) \ln \left( \frac{24}{13} \right)$$

Para el agente 2:

$$s_2^* = \left( \frac{95}{78a_2} + \frac{35}{78} \right) \ln \left( \frac{24}{13} \right)$$

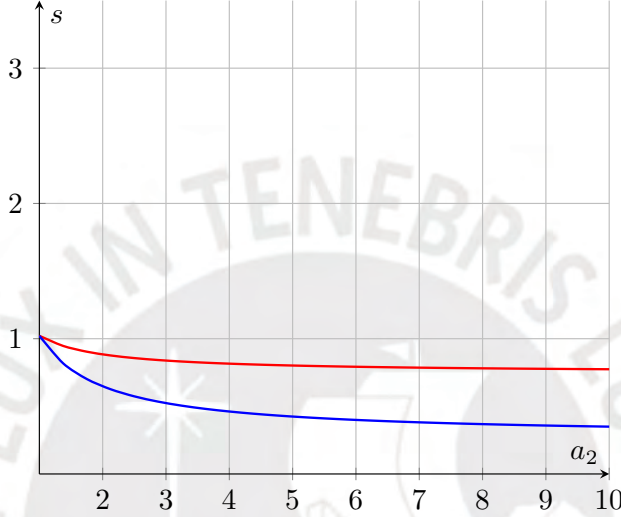


Figura 4.2: Inversión del agente 1,  $s$  en función de la aversión al riesgo del otro agente  $a_2$ , bajo la regla  $EA$  (Rojo). Inversión del agente 2,  $s$  en función de su propia aversión al riesgo  $a_2$ , bajo la regla  $EA$  (Azul).

En la figura 4.2, se observa que los equilibrios de inversión de ambos agentes son estrictamente decrecientes a medida que aumenta el nivel de aversión al riesgo del agente 2,  $a_2$ . Esto implica que la inversión de un agente disminuye a medida que el nivel de aversión al riesgo de los otros agentes aumenta; para determinar su estrategia óptima de inversión el agente debe conocer el perfil de aversión al riesgo de los otros agentes.

iii) **El equilibrio de inversión individual de los agentes mediante la regla,  $EL$  :**

De la definición de  $LP[\alpha]$ , para  $\alpha = 0$ ,  $LP[0] = EL$  y por la proposición 4.2.3, tenemos

$$s_i^* = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1 - \beta}{(1 - \beta)n + nr} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) \ln \left( \frac{npr}{(1 - \beta)(1 - p)} \right)$$

$$s_i^* = \left( \frac{10}{3a_i} - \frac{5}{6} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{a_j} \right) \ln 8$$

Para el agente 1:

$$s_1^* = \left( \frac{5}{2} - \frac{5}{6a_2} \right) \ln 8$$

Para el agente 2:

$$s_2^* = \left( \frac{5}{2a_2} - \frac{5}{6} \right) \ln 8$$

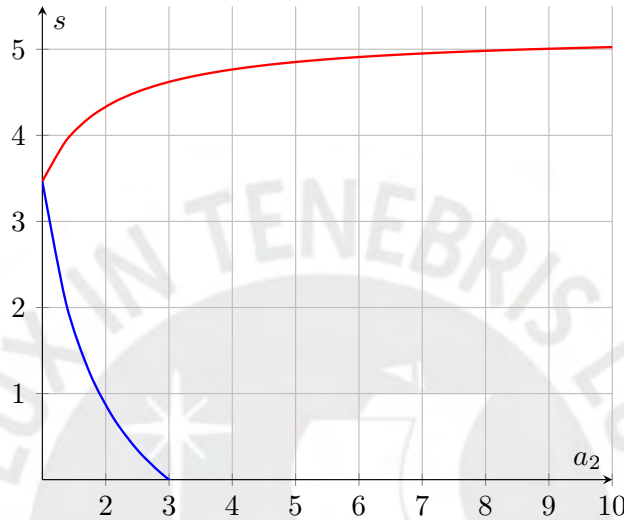


Figura 4.3: Inversión del agente 1,  $s$  en función de la aversión al riesgo del otro agente  $a_2$ , bajo La regla  $EL$  (Rojo). Inversión del agente 2,  $s$  en función de su propia aversión al riesgo  $a_2$ , bajo La regla  $EL$  (Azul).

En la figura 4.3, se observa que el equilibrio de inversión del agente 1 es estrictamente creciente a medida que aumenta el nivel de aversión al riesgo del agente 2; mientras que el equilibrio de inversión del agente 2 es estrictamente decreciente a medida que el nivel de aversión al riesgo aumenta y sea menor o igual a 3; para niveles de aversión al riesgo mayores a 3 el equilibrio de inversión del agente 2 es igual a cero.

- iv) Comparación del equilibrio de inversión del agente 1 en función de la aversión al riesgo del agente 2 ( $a_2$ ), bajo las reglas  $P, EA, EL$

El equilibrio de inversión del agente 1,  $s_1^*$  :

En la figura 4.4, se observa que en términos del equilibrio de inversión del agente 1,  $s_1^*$ , las tres reglas se ordenan como:

$$EL > P > EA$$

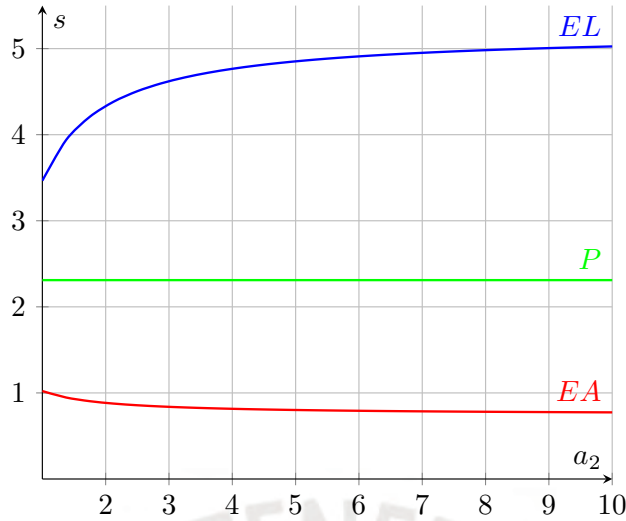


Figura 4.4: Inversión de equilibrio del agente 1,  $s_1$ , en función de la aversión al riesgo del agente 2,  $a_2$  y bajo las reglas  $EA$  (Rojo),  $P$  (Verde) y  $EL$  (Azul).

El inversor más grande o con mayor riqueza, es decir, el agente 1, que presenta una aversión al riesgo relativamente menor, enfrenta incentivos de inversión notablemente distintos bajo cada una de las tres reglas. En caso de bancarrota la regla  $EL$  le ofrece mayor protección, mientras que la regla  $EA$  lo protege en menor medida. En cambio, bajo la regla proporcional ( $P$ ), su inversión es completamente independiente de las decisiones o características de los otros agentes, lo cual se refleja en su estrategia de inversión.

### El equilibrio de inversión del agente 2, $s_2^*$

Se observa que el inversor más pequeño, el agente 2, quien es más adverso al riesgo, muestra un equilibrio de inversión  $s_2^*$  decreciente conforme aumenta su grado de aversión al riesgo. Además, las tres reglas no presentan un orden fijo en términos de  $s_2^*$ . Para niveles bajos de aversión al riesgo, es decir, cuando  $a_2$  no es muy diferente a  $a_1$ , el orden de las tres reglas en términos de  $s_2^*$  es:  $EL > P > EA$  el mismo que  $s_1^*$ . Sin embargo, este orden se invierte para niveles altos de aversión al riesgo del agente 2, en este caso  $EA > P > EL$ . En este escenario, el agente 2 está mejor protegido por la regla  $EA$  y menos protegido por la regla  $EL$ , lo cual se refleja en sus niveles de inversión.

En general, los niveles de inversión individual bajo cada regla no siguen un orden constante, ya que dependen del grado de aversión al riesgo de cada agente. No obstante, en términos de inversión total, sí es posible establecer un orden entre las reglas de bancarrota.

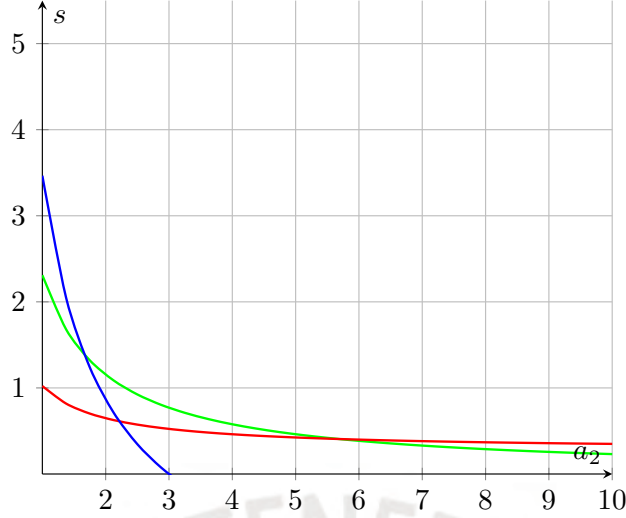


Figura 4.5: Equilibrio de inversión del agente 2,  $s_2$ , en función de su propia aversión al riesgo,  $a_2$ , bajo las reglas EA (Rojo), P (Verde) y EL (Azul).

Los siguientes dos teoremas nos dan un resultado fuerte.

**Teorema 4.3.1.** El equilibrio de inversión total bajo la regla  $AP[\alpha]$ , es creciente en el peso de  $P$ ,  $\alpha$ . Además, es estrictamente creciente en  $\alpha$  siempre que  $AP[\alpha]$  induzca una inversión positiva en el equilibrio. Así, la clase  $\{AP[\alpha] | \alpha \in [0, 1]\}$ ,  $P$  maximiza la inversión total y EA minimiza la inversión total.

*Demostración.*

Se consideran los tres casos posibles:

- **Caso i:** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) > 0, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Entonces, para cada  $AP[\alpha]$ , tenemos equilibrios interiores donde todos los agentes eligen niveles de inversión positivos. De acuerdo con proposición 4.2.2, en este caso, el juego tiene un único equilibrio de Nash  $s^*$ , donde cada  $s_i^*$  es dado por:

$$s_i^* = \frac{n(1+r-\beta) + \beta(1-\alpha) + \beta(1-\alpha)a_i \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r-\alpha\beta)} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right).$$

La inversión total es  $\sum_{i \in N} s_i^*$  es dado por

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \sum_{i \in N} \frac{n(1+r-\beta) + \beta(1-\alpha) + \beta(1-\alpha)a_i \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r-\alpha\beta)} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right)$$

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \left( \sum_{i \in N} \frac{1}{a_i} \right) \frac{1}{r-\beta+1} \ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right)$$

A continuación, se analiza la derivada de la inversión total respecto a  $\alpha$

$$\frac{\partial \sum_{i \in N} s_i^*}{\partial \alpha} = \left( \sum_{i \in N} \frac{1}{a_i} \right) \frac{(n-1)\beta}{(r-\beta+1)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} > 0$$

De aquí se concluye que la inversión total es estrictamente creciente en  $\alpha$ .

Como  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces la inversión total se maximiza para  $\alpha = 1$  y se minimiza para  $\alpha = 0$ . De acuerdo con la definición de la regla  $AP[\alpha]$ , para  $\alpha = 1$ , esta regla se convierte en la regla proporcional  $P$ ; y cuando  $\alpha = 0$ , se convierte en la regla de igual ganancia  $EA$ .

Entonces, se concluye, por lo tanto, que para la inversión total:

$$P > AP[\alpha] > EA$$

Es decir, a medida que  $AP[\alpha]$  se acerca a  $P$ , el nivel de inversión total de equilibrio aumenta.

- **Caso ii:** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) = 0$ , para algún  $\alpha^* \in [0, 1]$   
Se observa que:

$$\frac{\partial \left( \ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) \right)}{\partial \alpha} = \frac{(n-1)\beta}{n-\beta-(n-1)\alpha\beta} > 0$$

La función  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right)$  es estrictamente creciente en  $\alpha$ , entonces tenemos dos subcasos:

- 1) Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) < 0$ , para todo  $\alpha \in [0, \alpha^*)$ , entonces, todas las reglas inducen una inversión de equilibrio igual a cero.
- 2) Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha\beta)} \right) > 0$ , para todo  $\alpha \in (\alpha^*, 1]$ , para todas estas reglas, el caso anterior muestra que la inversión total es estrictamente creciente en  $\alpha$ .

- **Caso iii:** Si  $\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(n-\beta-(n-1)\alpha)}\right) < 0$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces todas las reglas  $AP[\alpha]$  inducen una inversión de equilibrio igual a cero.

□

**Teorema 4.3.2.** El equilibrio de inversión total bajo la regla  $LP[\alpha]$ , es decreciente en el peso de  $P, \alpha$ . Además, es estrictamente decreciente en  $\alpha$  siempre que  $LP[\alpha]$  induzca una inversión positiva en el equilibrio. Así la clase  $\{LP[\alpha]|\alpha \in [0, 1]\}$ ,  $P$  minimiza la inversión total y  $EA$  maximiza la inversión total.

*Demostración.*

Se consideran tres posibles casos:

- **Caso i:** Si  $\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right) > 0$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .  
Entonces, para cada  $LP[\alpha]$ , tenemos equilibrios interiores donde todos los agentes eligen niveles de inversión positivos. De acuerdo a la proposición 4.2.3, y  $s_i^* > 0$ , con  $k = n$

$$s_i^* = \left( \frac{1}{a_i} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)n + n(\alpha(1-\beta) + r)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right) \frac{\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)}{r + \alpha(1-\beta)}$$

La inversión total es  $\sum_{i \in N} s_i$  es dado por

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \frac{\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)}{r + \alpha(1-\beta)} \sum_{i \in N} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{n[(1-\alpha)(1-\beta) + r + \alpha(1-\beta)]} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \right)$$

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \frac{\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)}{r + \alpha(1-\beta)} \left( 1 - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)n}{n[(1-\alpha)(1-\beta) + r + \alpha(1-\beta)]} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$$

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \frac{\ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)}{r + \alpha(1-\beta)} \left( \frac{r + \alpha(1-\beta)}{r - \beta + 1} \right) \sum_{i \in N} \frac{1}{a_i}$$

$$\sum_{i \in N} s_i^* = \left( \sum_{i \in N} \frac{1}{a_i} \right) \frac{1}{r - \beta + 1} \ln\left(\frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)}\right)$$

A continuación, se analiza la derivada de la inversión total respecto a  $\alpha$

$$\frac{\partial \sum_{i \in N} s_i^*}{\partial \alpha} = - \frac{(n-1) \left( \sum_{i \in N} \frac{1}{a_i} \right)}{(r - \beta + 1)(1 + (n-1)\alpha)} < 0$$

De aquí se concluye que la inversión total es estrictamente decreciente en  $\alpha$ .

Como  $\alpha \in [0, 1]$ , entonces la inversión total se maximiza para  $\alpha = 0$  y se minimiza para  $\alpha = 1$ . De acuerdo con la definición de la regla  $LP[\alpha]$ , para  $\alpha = 0$ , esta regla se convierte en la regla de igual pérdida  $EL$ ; y cuando  $\alpha = 1$ , se convierte en la regla proporcional  $P$ .

Por lo tanto, se puede concluir que, en términos de inversión total, las reglas se ordenan de la siguiente manera:

$$EL > LP[\alpha] > P$$

Es decir, a medida que  $LP[\alpha]$  se aproxima a  $P$ , el nivel de inversión total de equilibrio es decreciente.

- **Caso ii:** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha^*)} \right) = 0$ , para algún  $\alpha^* \in [0, 1]$   
Veamos que:

$$\frac{\partial \left( \ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)} \right) \right)}{\partial \alpha} = -\frac{(n-1)}{1+(n-1)\alpha} < 0$$

El término  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)} \right)$  es estrictamente decreciente en  $\alpha$ , entonces tenemos dos subcasos:

- 1)  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)} \right) < 0$ , para todo  $\alpha \in (\alpha^*, 1]$ , para todas estas reglas induce una inversión de equilibrio igual a cero.
- 2)  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)} \right) > 0$ , para todo  $\alpha \in [0, \alpha^*)$ , para todas estas reglas, el caso i muestra la inversión total es estrictamente decreciente en  $\alpha$ .

- **Caso iii:** Si  $\ln \left( \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)(1+(n-1)\alpha)} \right) < 0$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , todas las reglas  $LP[\alpha]$  inducen una inversión de equilibrio igual a cero.

De los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2 en términos de inversión total obtenemos el siguiente orden:

$$EL > LP[\alpha] > P > AP[\alpha] > EA.$$

□

Ahora se analiza cómo se comportan los agentes cuando son idénticos en términos de aversión al riesgo.

**Ejemplo 4.3.2.** Sea un juego de inversión con 2 agentes (inversores), cada uno con una función de utilidad de aversión al riesgo constante (*CARA*), definida como  $u_i(x) = -e^{-a_i x}$ , se

considera el juego simétrico,  $a_1 = a_2 = a$ . Se asumen los siguientes valores de los parámetros:  $r = 0,3, p = 0,8, \beta = 0,7$ . Calcule el equilibrio de inversión total.

**Solución:**

El equilibrio de inversión total mediante:

- i) La regla  $P : s_1^* + s_2^* = \frac{10}{3a} \ln 4$
- ii) La regla  $EA : s_1^* + s_2^* = \frac{10}{3a} \ln \left(\frac{24}{13}\right)$
- iii) La regla  $EL : s_1^* + s_2^* = \frac{10}{3a} \ln (3)$
- iv) La regla  $AP[\alpha] : s_1^* + s_2^* = \frac{10}{3a} \ln \left(\frac{12}{6,5-3,5\alpha}\right)$ , con  $\alpha \in (0, 1)$
- v) La regla  $LP[\alpha] : s_1^* + s_2^* = \frac{10}{3a} \ln \left(\frac{8}{1+\alpha}\right)$ , con  $\alpha \in (0, 1)$

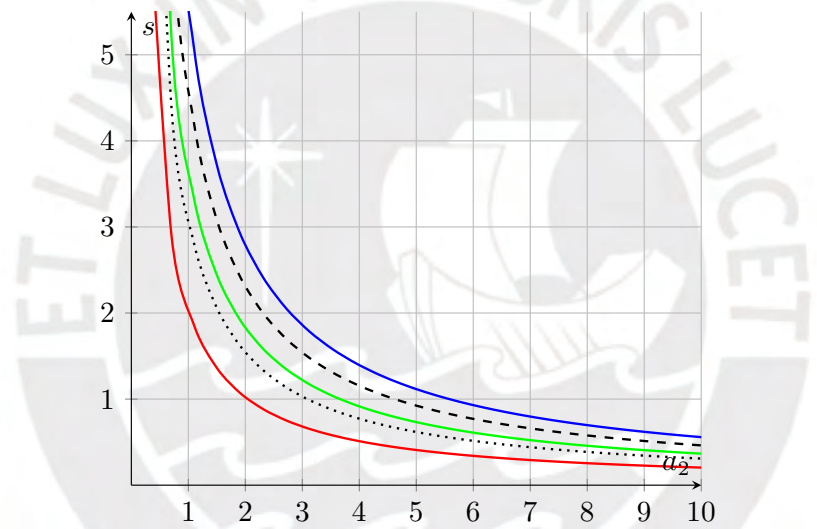


Figura 4.6: Equilibrio de inversión total para dos agentes con el mismo grado de aversión al riesgo,  $a$ , mediante las reglas  $EA$ (Rojo),  $P$ (Verde),  $EL$ (Azul),  $AP[\alpha]$ (Negro) para  $\alpha = 0,5$ ,  $LP[\alpha]$  (Gris) para  $\alpha = 0,5$

**Observación 4.3.1.** Es interesante notar que cuando el juego es simétrico, es decir, que cuando los agentes son idénticos en términos de aversión al riesgo,  $a_i = a_j = a$  para  $\forall i, j \in N$ , el orden de las reglas en términos de inversión total se mantiene. Particularmente,  $EL$  induce una mayor inversión total que las otras reglas.

# Conclusiones

En esta tesis, se ha abordado el problema de la bancarrota desde un enfoque tanto teórico como práctico, explorando tanto modelos axiomáticos tradicionales como aplicaciones en juegos de inversión. A continuación, se sintetizan los aportes y los hallazgos de cada capítulo, destacando el marco teórico, las extensiones de modelos y las conclusiones obtenidas, considerando como referencias fundamentales a O'Neill (1982), Auman y Maschler (1985), Herrero y Villar (2001), Kibris y Kibris (2013).

En el capítulo 1, se presenta el origen del problema de bancarrota, revisando sus antecedentes históricos y los primeros desarrollos axiomáticos. Este análisis introductorio estableció una base conceptual sólida para entender los enfoques clásicos, los principios éticos y matemáticos subyacentes a los modelos de bancarrota.

En el capítulo 2, se define el modelo de bancarrota que servirá como marco de referencia para el resto de la tesis y revisamos las principales reglas de bancarrota en situaciones de quiebra. Se exploran detalladamente las propiedades que caracterizan a cada regla, tales como la regla proporcional, la de igual ganancia, la de igual pérdida, la de llegada aleatoria y la regla del Talmud. Además, se presenta una caracterización formal de estas reglas. Este capítulo permite analizar cómo las diversas propiedades influyen en las decisiones y los resultados en contextos de reparto y bancarrota.

En el capítulo 3, se estudian los juegos de bancarrota desde un enfoque pesimista y se analizan las principales propiedades. Se establece que la regla del Talmud y la regla de llegada aleatoria asociadas a su función característica coinciden con el nucleolo del juego y el valor de Shapley respectivamente.

Finalmente, en el Capítulo 4, se aplican las reglas de igual ganancia (EA), igual pérdida (EL) y proporcional (P) al juego de inversión no cooperativo, introduciendo dos clases de

reglas de bancarrota ajustadas para inversión:  $AP[\alpha]$  y  $LP[\alpha]$ . Se demuestra que la regla proporcional (P) es ampliamente preferida en juegos de inversión, ya que garantiza que el equilibrio de inversión de cada agente dependa únicamente de sus propias características, independientemente de los demás jugadores. Además, se realiza un análisis exhaustivo de la inversión total en equilibrio, mostrando que la regla de igual pérdida maximiza la inversión total en la economía, independientemente de la simetría o asimetría entre los agentes. En contraste, se observa que la regla de igual ganancia induce el menor nivel de inversión total.



# Recomendaciones

- Para futuros trabajos de investigación, se recomienda estudiar otras reglas de bancarrota o familias de reglas de bancarrota que surjan de la necesidad de cada área. Entre estas reglas se podría utilizar, por ejemplo, la regla de Piniles, la regla proporcional ajustada o las reglas paramétricas.
- Para futuros trabajos de investigación, se puede considerar el problema de bancarrota desde la perspectiva de los juegos cooperativos con utilidad transferible, siguiendo un enfoque optimista basado en el derecho máximo, donde el valor de la coalición  $S$  es el mínimo entre el estado y la demanda agregada de sus miembros.
- Para futuros trabajos de investigación, se propone extender el modelo hacia contextos que incluyan bienes indivisibles. Este enfoque adquiere especial relevancia en situaciones prácticas, como la asignación de viviendas subsidiadas, plazas docentes o camas en Unidades de Cuidados Intensivos (UCI), entre otros.

# Bibliografía

- Aumann, R. J., & Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of economic theory*, 36(2), 195-213.
- Cerdá, E., Jimeno, J. L., & Pérez, J. (2004). *Teoría de juegos* (Vol. 53). Madrid, Spain: Pearson Educación.
- Chun, Y. (1999). Equivalence of axioms for bankruptcy problems. *International Journal Of Game Theory*, 28(4), 511-520.
- Curiel, I. J., Maschler, M., & Tijs, S. H. (1987). Bankruptcy games. *Zeitschrift für operations research*, 31, A143-A159.
- Dagan, N. (1996). New characterizations of old bankruptcy rules. *Social Choice and Welfare*, 13(1), 51-59.
- Driessen, T. (1995). A bankruptcy problem and an information trading problem: applications to k-convex games. *Zeitschrift für Operations Research*, 41, 313-324.
- Gillies, D. B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Princeton University.
- Herrero, C., & Villar, A. (2001). The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. *Mathematical Social Sciences*, 42(3), 307-328.
- Herrero, C., & Villar, A. (2002). Sustainability in bankruptcy problems. *Top*, 10(2), 261-273.
- Herrero, C., & Villar, A. (2002). Sustainability in bankruptcy problems. *Mathematical Social Sciences*, 42(3), 307-328.
- Hwang, Y. A. (2015). Two characterizations of the random arrival rule. *Economic Theory Bulletin*, 3, 43-52.
- Karagözoğlu, E. (2014). A noncooperative approach to bankruptcy problems with an endogenous estate. *Annals of Operations Research*, 217, 299-318.
- Kıbrıs, Ö., & Kıbrıs, A. (2013). On the investment implications of bankruptcy laws. *Games and Economic Behavior*, 80, 85-99.

- Maimónides, M. (1170). *Mishné Torá: Hilchot Malveh ve-Loveh*. Egipto: Publicación original en hebreo. (Traducido y comentado en diversas ediciones modernas).
- Moreno-Ternero, J. D., & Villar, A. (2004). The Talmud rule and the securement of agents' awards. *Mathematical Social Sciences*, 47(2), 245-257.
- Moulin, H. (2000). Priority rules and other asymmetric rationing methods. *Econometrica*, 68(3), 643-684.
- O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical social sciences*, 2(4), 345-371.
- Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on applied mathematics*, 17(6), 1163-1170.
- Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. *Contribution to the Theory of Games*, II, 307-317.
- Shapley, L. S. (1971). Cores of convex games. *International journal of game theory*, 1, 11-26.
- Thomson, W. (2011). Consistency and its converse: an introduction. *Review of Economic Design*, 15(4), 257-291.
- Tijs, S. H., & Lipperts, F. A. S. (1982). The hypercube and the core cover of n-person cooperative games. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 24, 27-37.
- Yeh, C. H. (2008). Secured lower bound, composition up, and minimal rights first for bankruptcy problems. *Journal of Mathematical Economics*, 44(9-10), 925-932.
- Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. *Journal of Economic Theory*, 44(2), 321-335.

## Anexo A

# Reglas de bancarrota

Este apéndice desarrolla ejemplos, detalles e interpretaciones geométricas de las reglas de bancarrota, presentadas en el Capítulo 2.

### Regla proporcional

**Ejemplo A.0.1.** *Sea el problema de bancarrota con dos agentes,  $N = \{1, 2\}$ , el vector de demandas  $c = (50, 75)$  y se consideran tres estados diferentes:  $E_1 = 50$ ,  $E_2 = 75$  y  $E_3 = 100$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla proporcional.*

#### Solución:

- Para  $E_1 = 50$  y  $c = (50, 75)$

La demanda agregada  $C = 125$  y  $\lambda = \frac{50}{125} = 0,4$

Por lo tanto, al aplicar la regla proporcional, se obtiene la asignación:

$$P(50, (50, 75)) = (0,4) \cdot (50, 75) = (20, 30).$$

- Para  $E_2 = 75$  y  $c = (50, 75)$

La demanda agregada  $C = 125$  y  $\lambda = \frac{75}{125} = 0,6$

Por lo tanto, al aplicar la regla proporcional, se obtiene la asignación:

$$P(75, (50, 75)) = (0,6) \cdot (50, 75) = (30, 45).$$

- Para  $E_3 = 100$  y  $c = (50, 75)$

La demanda agregada  $C = 125$  y  $\lambda = \frac{75}{125} = 0,8$

Por lo tanto, al aplicar la regla proporcional, se obtiene la asignación:

$$P(100, (50, 75)) = (0,8) \cdot (50, 75) = (40, 60).$$

Su representación geométrica es:

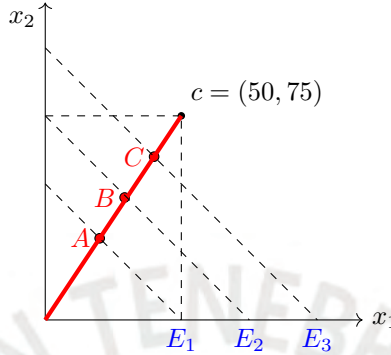


Figura A.1: Trayectoria de la regla proporcional para el caso de dos agentes con vector de demandas fijo,  $c = (50, 75)$ .

La figura A.1 ilustra la aplicación de la regla proporcional en un sistema de dos agentes. En esta representación gráfica, los puntos A, B y C son las asignaciones para los estados 50, 70 y 100 respectivamente.

Estos puntos ejemplifican cómo la regla proporcional distribuye los recursos en diferentes estados del sistema, considerando las demandas fijas de los agentes.

## Regla de igual ganancia

**Ejemplo A.0.2.** Sea el problema de bancarrota con 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\}$ , el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y el estado  $E = 450$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla de igual ganancia.

### Solución:

Tenemos un estado  $E = 450$  a repartir entre los 3 agentes de manera equitativa, es decir, cada agente obtendría una asignación igual a 150, el agente 1 obtendría una asignación mayor a su demanda de 100, lo cual no está permitido por la restricción.

Resolviendo (2.2), se obtiene  $\lambda = 175$ , entonces la asignación a cada agente es:

- $CEA_1(450, (100, 200, 300)) = \text{mín}\{175, 100\} = 100$
- $CEA_2(450, (100, 200, 300)) = \text{mín}\{175, 200\} = 175$
- $CEA_3(450, (100, 200, 300)) = \text{mín}\{175, 300\} = 175$

Entonces la asignación es:  $CEA(450, (100, 200, 300)) = (100, 175, 175)$ .

**Observación A.0.1.** Es importante notar en el ejemplo A.0.2, que el agente 1 recibe la totalidad de su demanda, mientras que los agentes 2 y 3 sufren pérdidas de 25 y 125 respectivamente. Es decir, los agentes con demandas pequeñas reciben una asignación igual a su demanda o reciben la misma asignación que los agentes con demandas mayores. Por definición,  $CEA$  favorece a los agentes con demandas relativamente más pequeñas.

Resolver (2.2) puede resultar extenso y costoso en términos computacionales. Una forma sencilla e intuitiva de calcular el vector de asignaciones, fue propuesta por Maimónides (1170). Esta propuesta consiste en hacer una división igualitaria y en caso de que alguna asignación exceda la demanda de algún agente, se realizan ajustes iterativos.

La estructura del proceso, que se basa en una recursión, es la siguiente:

Primero, se realiza una división igualitaria del estado entre los agentes. Esta división igualitaria es la asignación óptima siempre que ningún agente reciba una asignación que exceda su reclamo. Sin embargo, si al menos un agente recibe una asignación que exceda su demanda, se calcula la diferencia entre la parte igualitaria y la demanda para cada uno de estos agentes. La suma de estas diferencias se redistribuye equitativamente entre los agentes cuyas asignaciones iniciales fueron inferiores a sus demandas. Después de esta redistribución, es posible que algunas asignaciones superen las demandas correspondientes. En este caso, el proceso se repite: Se calculan las diferencias entre las asignaciones actualizadas y las demandas de los agentes que recibieron más que sus demandas, y la suma de estas diferencias se redistribuye equitativamente entre los agentes que aún reciben menos que sus demandas. Este proceso iterativo continúa hasta que ningún agente reciba una asignación superior a su demanda. En este punto, se obtiene la asignación final aplicando la regla de igual ganancia.

A continuación, se presenta la representación geométrica del proceso para el caso de 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\}$  con un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ , sin pérdida de generalidad  $c_1 < c_2 < c_3$ , y tres estados distintos es:

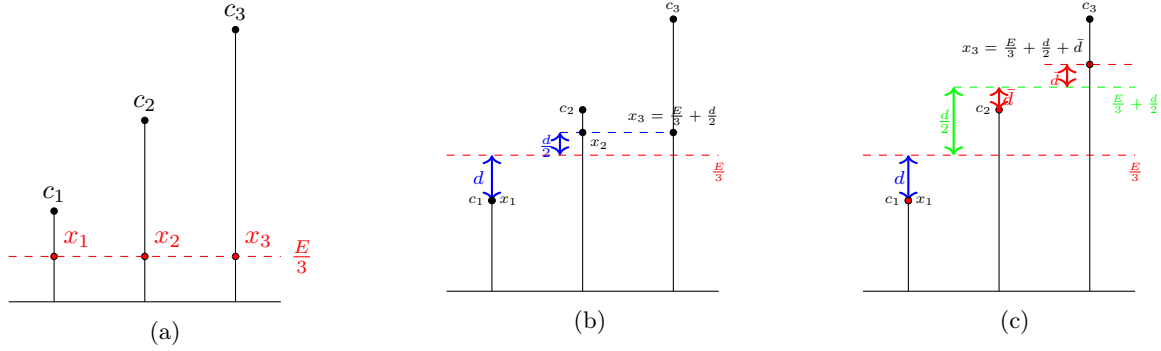


Figura A.2: Una forma sencilla de calcular el vector de asignaciones mediante *CEA*, para un vector de demandas fijo  $c$ , ( $c_1 < c_2 < c_3$ ), y 3 estados distintos.

En la figura A.2 se muestra un método sencillo e intuitivo de calcular las asignaciones para tres estados distintos:

- Para un estado suficientemente pequeño ( $E \leq 3c_1$ ); se realiza la división igualitaria, de modo que cada agente recibe a lo sumo su demanda.
- Si  $E$  aumenta ( $E > 3c_1$ ), el agente con la demanda más pequeña ( $c_1$ ), al realizar la división igualitaria recibe una asignación que supera a su demanda en “ $d$ ” unidades. Para corregir esta asignación excesiva, se le asigna al agente 1 su demanda  $c_1$  y el excedente que supera a su demanda en “ $d$ ” se divide equitativamente entre los agentes 2 y 3. Después de esta redistribución, es posible que la asignación del agente 2 no exceda a su demanda (lo cual implica, que el agente 3 tampoco exceda su demanda). En tal caso, el vector de asignación  $x$  mediante *CEA* se obtiene en 2 pasos.
- Si  $E$  continúa aumentando, puede ocurrir el escenario que tras la redistribución de las “ $d$ ” unidades, el agente 2 reciba una asignación que supere a su demanda en “ $\bar{d}$ ” unidades. En este caso, se transfieren las “ $\bar{d}$ ” unidades al agente 3. Así, se obtiene el vector de asignación  $x$  en 3 pasos.

**Ejemplo A.0.3.** Sea el problema del Talmud (contrato matrimonial), con el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y se consideran tres estados diferentes:  $E_1 = 150$ ,  $E_2 = 450$  y  $E_3 = 540$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla de igual ganancia.

**Solución:**

- Para  $E_1 = 150$  y  $c = (100, 200, 300)$ .
  - Se realiza la división igualitaria del estado. Resultando una asignación provisional  $(50, 50, 50)$ . Ningún agente recibe más que su demanda.  
Por lo tanto, el vector de asignación es  $x = (50, 50, 50)$ .

- Para  $E_2 = 450$  y  $c = (100, 200, 300)$ .
  - i) Se realiza la división igualitaria del estado, obteniéndose una asignación provisional  $(150, 150, 150)$ . El agente 1 recibe 50 unidades más que su demanda.
  - ii) Se asigna al agente 1 su demanda y se redistribuye el excedente de 50 unidades de manera equitativa entre los demás agentes, resultando el nuevo vector de asignaciones  $(100, 175, 175)$ . Ningún agente recibe más que su demanda.  
Por lo tanto, el vector de asignación es  $x = (100, 175, 175)$ .
  
- Para  $E_3 = 540$  y  $c = (100, 200, 300)$ .
  - i) Se realiza la división igualitaria del estado, y se obtiene una asignación provisional  $(180, 180, 180)$ . El agente 1 recibe 80 unidades más que su demanda.
  - ii) Se asigna al agente 1 su demanda y se redistribuye el excedente de 80 unidades de manera equitativa entre los demás agentes, resultando el nuevo vector de asignaciones  $(100, 220, 220)$ . El agente 2 recibe 20 unidades más que su demanda.
  - iii) Se asigna al agente 2 su demanda y se transfieren las 20 unidades excedentes al agente 3, resultando el nuevo vector de asignaciones  $(100, 200, 240)$ .  
Por lo tanto, el vector de asignación es  $x = (100, 200, 240)$ .

## Regla de igual pérdida

**Ejemplo A.0.4.** Sea el problema de bancarrota con 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\}$ , el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y el estado  $E = 200$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla de igual pérdida.

### Solución:

Se tiene un déficit o pérdida agregada,  $L = 400$  a repartir entre los tres agentes de manera equitativa; es decir, cada agente asume una pérdida igual a  $400/3$ . El primer agente obtendría una asignación negativa, lo cual no está permitido por la restricción.

Al resolver (2.3) se obtiene  $\mu = 150$ , entonces la asignación de cada agente es:

- $CEL_1(200, (100, 200, 300)) = \max\{0, 100 - 150\} = 0$
- $CEL_2(200, (100, 200, 300)) = \max\{0, 200 - 150\} = 50$
- $CEL_3(200, (100, 200, 300)) = \max\{0, 300 - 150\} = 150$

Entonces la asignación es:  $CEL(200, (100, 200, 300)) = (0, 50, 150)$ .

**Observación A.0.2.** Al analizar el ejemplo A.0.4, se observa que el agente 1 recibe una asignación nula, absorbiendo completamente su demanda inicial como pérdida. Los agentes 2 y 3 obtienen asignaciones de 50 y 150 unidades respectivamente, compartiendo el déficit restante. Esto ilustra que los agentes con demandas pequeñas asumen pérdidas equivalentes a sus demandas iniciales. El déficit restante se distribuye entre los agentes con demandas mayores. Esta regla protege a los agentes con mayores demandas.

Al igual que la regla de igual ganancia, el cálculo del vector de asignaciones puede realizarse de manera rápida e intuitiva. Sin embargo, resolver el problema de asignación (2.3) puede resultar extenso y costoso en términos computacionales. Maimónides (1170) propuso lo siguiente: después de que cada agente reciba el total de su demanda, se calcula la pérdida o déficit agregado y distribuimos esta pérdida de manera equitativa entre los agentes. Se realizan ajustes iterativos en caso de que algún agente reciba una asignación negativa.

La estructura del proceso, que se basa en la recursión, es la siguiente:

Primero, se asigna a cada agente el total de su demanda, aunque esta situación sea inviable en la práctica dado que no se disponen con los recursos necesarios. Luego, se calcula la pérdida total y se distribuye equitativamente entre los agentes. Se evalúa el resultado: Si todos los agentes reciben una asignación no negativa, se ha obtenido el vector de asignación deseado. En caso contrario, se asigna cero a los agentes que reciben cantidades negativas, luego se calcula la suma de estas cantidades negativas y se redistribuyen entre los agentes con asignaciones positivas.

Esta redistribución de las pérdidas puede generar nuevas asignaciones negativas a algunos agentes de este último grupo, por lo que se repite el ajuste con ellos. Es decir, se asigna cero a los agentes con asignaciones negativas, se calcula la suma de las cantidades negativas y se redistribuye entre los agentes con asignaciones positivas. Este proceso continúa hasta que todos los agentes reciban una cantidad no negativa.

Se presenta la representación geométrica del proceso para el caso de 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\}$  con un vector de demandas fijo,  $c = (c_1, c_2, c_3)$ , sin pérdida de generalidad se asume  $c_1 < c_2 < c_3$ , y tres estados distintos es:

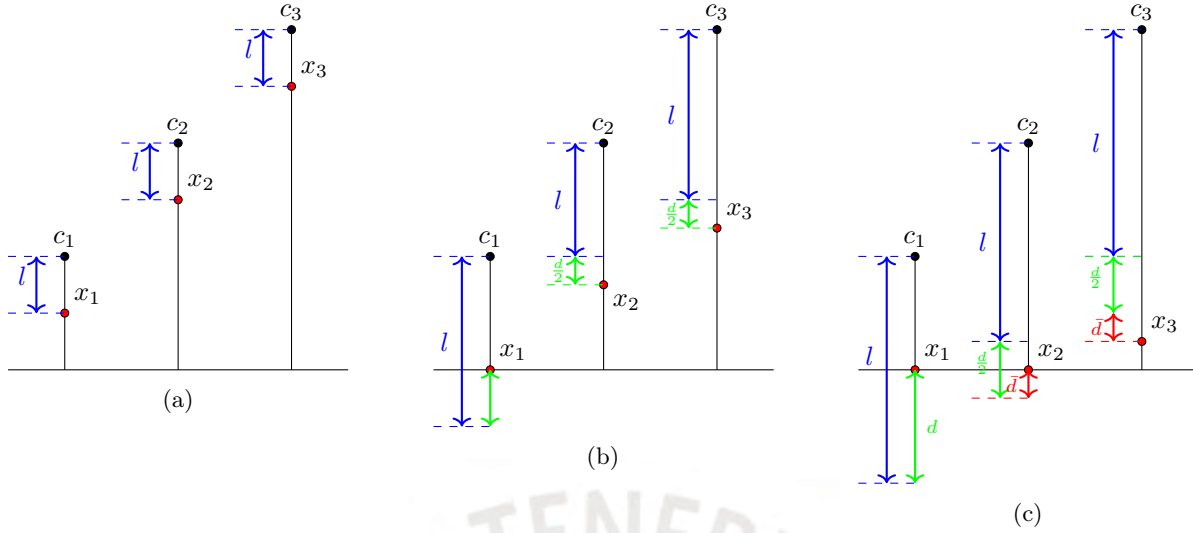


Figura A.3: Una forma sencilla de calcular el vector de asignaciones mediante *CEA*, para un vector de demandas fijo ( $c_1 < c_2 < c_3$ ) y 3 estados distintos.

En la figura A.3 se muestra un método sencillo e intuitivo de calcular las asignaciones para tres estados distintos:

- a) Para un estado suficientemente grande, al distribuir el déficit agregado ( $3l$ ), cada agente recibe una asignación no negativa. Por lo tanto  $x = (x_1, x_2, x_3)$  es el vector de asignación deseado.
- b) En este escenario, el valor de  $E$  se reduce de tal manera que, al asignar las pérdidas, el agente 1 recibe una asignación negativa de “ $d$ ” unidades. Para corregir esto, se asigna cero al agente 1 y se redistribuye la pérdida de “ $d$ ” unidades equitativamente entre los agentes 2 y 3, incrementando sus pérdidas en “ $\frac{d}{2}$ ” cada uno. Tras esta distribución se verifica que el agente 2 (y por consiguiente, el agente 3) mantiene una asignación no negativa. De este modo, se logra determinar el vector de asignación en dos etapas.
- c) En este caso, el valor de  $E$  es aún más reducido, de tal manera que, tras la redistribución negativa de “ $d$ ” unidades del agente 1, la asignación del agente 2 también resulta negativa en “ $\bar{d}$ ” unidades. Para abordar esta situación, se asigna cero al agente 2 y se transfiere al agente 3 una pérdida adicional de “ $\bar{d}$ ” unidades.

De este modo, logramos determinar el vector de asignación en 3 etapas.

**Ejemplo A.0.5.** Sea el problema de bancarrota con 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\}$ , y el vector de demandas  $c = (100, 200, 400)$  y se consideran tres estados diferentes:  $E_1 = 550$ ,  $E_2 = 250$  y  $E_3 = 100$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla de igual pérdida.

### Solución:

- Para  $E_1 = 550$  y  $c = (100, 200, 400)$ .

i) Cada agente recibe el total de su demanda, se calcula la pérdida agregada  $L = 150$ , y se distribuye la pérdida agregada de manera equitativa entre los agentes ( $\frac{L}{3} = 50$ ), obteniendo el vector de asignación provisional  $(50, 150, 350)$ . Ningún agente recibe una asignación negativa. Por lo tanto, el vector de asignación es  $x = (50, 150, 350)$ .

- Para  $E_2 = 250$  y  $c = (100, 200, 400)$ .

i) Cada agente recibe el total de su demanda. Se calcula la pérdida agregada  $L = 450$ , y se distribuye de manera equitativa entre los agentes ( $\frac{L}{3} = 150$ ), obteniendo el vector de asignación provisional  $(-50, 50, 250)$ .

El agente 1 recibe una asignación negativa de 50 unidades.

ii) Se asigna cero al agente 1 y se redistribuye la pérdida de 50 unidades entre los agentes 2 y 3, incrementando sus pérdidas en 25 unidades cada uno, obteniendo un nuevo vector de asignación provisional  $(0, 25, 225)$ .

Ningún agente recibe una asignación negativa. Por lo tanto, el vector de asignación es  $x = (0, 25, 225)$ .

- Para  $E_3 = 100$  y  $c = (100, 200, 400)$ .

i) Cada agente recibe el total de su demanda. Se calcula la pérdida agregada  $L = 600$  y se distribuye la pérdida agregada de manera equitativa entre los agentes ( $\frac{L}{3} = 200$ ), se obtiene el vector de asignación provisional  $(-100, 0, 200)$ .

El agente 1 recibe una asignación negativa de 100 unidades.

ii) Se asigna cero al agente 1 y se redistribuye la pérdida de 100 unidades entre los agentes 2 y 3, incrementando sus pérdidas en 50 unidades cada uno, obteniendo un nuevo vector de asignación provisional  $(0, -50, 150)$ .

El agente 2 recibe una asignación negativa de 50 unidades.

iii) Se asigna cero al agente 2 y se transfiere al agente 3 una pérdida adicional de 50 unidades, resultando el nuevo vector de asignación provisional  $(0, 0, 100)$ .

Ningún agente recibe una asignación negativa. Por lo tanto, el vector de asignación es  $(0, 0, 100)$ .

## Regla conceder y dividir

**Ejemplo A.0.6.** Sea el problema de bancarrota con 2 agentes,  $N = \{1, 2\}$ , y el vector de demandas  $c = (200, 300)$  y se considera tres estados diferentes:  $E_1 = 100$ ,  $E_2 = 250$  y  $E_3 = 400$ . Resolver el problema de bancarrota mediante la regla conceder y dividir.

### Solución:

- Para  $E_1 = 100$  y  $c = (200, 300)$ 
  - 1) El agente 1 concede al agente 2,  $\text{máx}\{100 - 200, 0\} = 0$   
El agente 2 concede al agente 1,  $\text{máx}\{100 - 300, 0\} = 0$   
Se obtiene una asignación provisional  $(0, 0)$
  - 2) El remanente del estado de 100 unidades, se distribuye equitativamente entre los agentes. Por lo tanto, se obtiene la asignación final  $x = (50, 50)$ .
- Para  $E_2 = 250$  y  $c = (200, 300)$ 
  - 1) El agente 1 concede al agente 2,  $\text{máx}\{250 - 200, 0\} = 50$   
El agente 2 concede al agente 1,  $\text{máx}\{250 - 300, 0\} = 0$   
Se obtiene una asignación provisional  $(0, 50)$ .
  - 2) El remanente del estado de 200 unidades, se distribuye equitativamente entre los agentes. Por lo tanto, se obtiene la asignación final  $x = (100, 150)$ .
- Para  $E_3 = 400$  y  $c = (200, 300)$ .
  - 1) El agente 1 concede al agente 2,  $\text{máx}\{400 - 200, 0\} = 200$   
El agente 2 concede al agente 1,  $\text{máx}\{400 - 300, 0\} = 100$   
Se obtiene una asignación provisional  $(100, 200)$ .
  - 2) El remanente del estado de 100 unidades, se distribuye equitativamente entre los agentes. Por lo tanto, se obtiene la asignación final  $x = (150, 250)$ .

## Regla del Talmud

**Ejemplo A.0.7.** Sea el problema del Talmud, contrato matrimonial, donde las demandas de las esposas son  $c = (100, 200, 300)$  y cuatro valores diferentes del patrimonio  $E_1 = 100$ ,  $E_2 = 200$ ,  $E_3 = 300$  y  $E_4 = 450$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla del Talmud.

### Solución:

- Para  $E_1 = 100$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se calcula la pérdida agregada,  $C = 600$ . Como  $E < \frac{C}{2}$ , la regla del Talmud se comporta de manera similar a la regla  $CEA(E, \frac{c}{2}) = CEA(100, (50, 100, 150))$ .

- i) El estado se distribuye de manera equitativa entre los tres agentes, lo que da como resultado una asignación provisional de  $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$ . Ningún agente recibe más de la mitad de su demanda.

Por lo tanto, la asignación es  $T(E, c) = (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$ .

- Para  $E_2 = 200$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se calcula la pérdida agregada,  $C = 600$ . Como  $E < \frac{C}{2}$ , la regla del Talmud se comporta de manera similar a la regla  $CEA(E, \frac{c}{2}) = CEA(200, (50, 100, 150))$ .

- i) El estado se distribuye de manera equitativa entre los tres agentes, lo que da como resultado una asignación provisional  $(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}, \frac{200}{3})$ . El agente 1 recibe  $\frac{50}{3}$  unidades más de la mitad de su demanda.

- ii) Asignamos al agente 1 la mitad de su demanda y se redistribuye el excedente de  $\frac{50}{3}$  unidades de manera equitativa entre los demás agentes; resultando la nueva asignación  $(50, 75, 75)$ .

Ningún agente recibe más que la mitad de su demanda.

Por lo tanto el vector de asignación es  $T(E, c) = (50, 75, 75)$ .

- Para  $E_3 = 300$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se calcula la pérdida agregada,  $C = 600$ . Como  $E \leq \frac{C}{2}$ ; la regla del Talmud se comporta de manera similar a la regla  $CEA(E, \frac{c}{2}) = CEA(300, (50, 100, 150))$ .

- i) El estado se distribuye de manera equitativa entre los tres agentes, lo que da como resultado una asignación provisional  $(100, 100, 100)$ . El agente 1 recibe 50 unidades más que la mitad de su demanda.

- ii) Se asigna al agente 1 la mitad de su demanda y se redistribuye el excedente de 50 unidades de manera equitativa entre los demás agentes, resultando la nueva

asignación  $(50, 125, 125)$ . El agente 2, recibe 25 unidades más que la mitad de su demanda.

iii) Se asigna al agente 2 la mitad de su demanda y se transfiere las 25 unidades al agente 3.

Por lo tanto, el vector de asignación es  $T(E, c) = (50, 100, 150)$ .

■ Para  $E_4 = 450$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se calcula la pérdida agregada,  $C = 600$ . Como  $E \leq \frac{C}{2}$ , la regla del Talmud se comporta como:  $\frac{c}{2} + CEL(E - \frac{C}{2}, \frac{c}{2}) = (50, 100, 150) + CEL(150, (50, 100, 150))$ .

i) Se calcula  $CEL(150, (50, 100, 150))$ .

Se asigna a cada agente la mitad de su demanda, y se obtiene una asignación provisional  $(50, 100, 150)$ . Luego, se reparte el nuevo déficit para este problema,  $L = 150$ , de manera equitativa entre los agentes, y se obtiene el vector de asignación provisional de  $(0, 50, 100)$ . Ningún agente recibe una asignación negativa.

Entonces, el vector de asignación  $CEL(150, (50, 100, 150)) = (0, 50, 100)$

Por lo tanto;  $T(E, c) = \frac{c}{2} + CEL(E - \frac{c}{2}, \frac{c}{2}) = (50, 150, 250)$ .

## Regla de llegada aleatoria

**Ejemplo A.0.8.** Sea el problema de bancarrota con 3 agentes,  $N = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{N}$  y el vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$  y cuatro estados diferentes:  $E_1 = 100, E_2 = 200, E_3 = 300$  y  $E_4 = 450$ . Resolver el problema de bancarrota aplicando la regla de llegada aleatoria.

### Solución:

Se tiene el problema de bancarrota con 3 agentes y  $3! = 6$  posibles ordenaciones de llegada para los 3 demandantes,

$$\Pi^N = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

■ Para el estado  $E_4 = 450$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Para el orden de llegada 123:

i) Llega el agente 1 en primer lugar, se le asigna su demanda,  $x_1 = 100$ , dado que el estado,  $E = 450$ , alcanza a cubrir la demanda del agente 1, con un remanente del estado,  $E = 350$ , por asignar dado que ya se asignaron 100.

ii) Llega el agente 2 en segundo lugar, se le asigna su demanda,  $x_2 = 200$ , dado que el remanente del estado,  $E = 350$ , alcanza a cubrir la demanda del agente 2, con un remanente del estado,  $E = 150$ , por asignar dado que ya se asignaron 200.

iii) Llega el agente 3 en tercer lugar, se le asigna  $x_3 = 150$ ; dado que solo tenemos 150 de estado por asignar.

El siguiente cuadro A.1 nos muestra el pago que recibe cada agente según su orden de llegada.

| Órdenes de llegada \ Demandas | Demandas |       |       |
|-------------------------------|----------|-------|-------|
|                               | 100      | 200   | 300   |
| 123                           | 100      | 200   | 150   |
| 132                           | 100      | 50    | 300   |
| 213                           | 100      | 200   | 150   |
| 231                           | 0        | 200   | 250   |
| 312                           | 100      | 50    | 300   |
| 321                           | 0        | 150   | 300   |
| Promedio                      | 200/3    | 425/3 | 725/3 |

Cuadro A.1: Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado,  $E = 450$ , y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Obtenemos una asignación,  $RA(450, (100, 200, 300)) = \left(\frac{200}{3}, \frac{425}{3}, \frac{725}{3}\right)$ .

- Para el estado  $E_3 = 300$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se resuelve el problema análogo al caso anterior.

El cuadro A.2 muestra el pago de cada agente según su orden de llegada.

| Órdenes de llegada \ Demandas | Demandas |     |     |
|-------------------------------|----------|-----|-----|
|                               | 100      | 200 | 300 |
| 123                           | 100      | 200 | 0   |
| 132                           | 100      | 0   | 200 |
| 213                           | 100      | 200 | 0   |
| 231                           | 0        | 200 | 100 |
| 312                           | 0        | 0   | 300 |
| 321                           | 0        | 0   | 300 |
| Promedio                      | 50       | 100 | 150 |

Cuadro A.2: Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado,  $E = 300$ , y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

$\therefore$  Obtenemos una asignación,  $RA(300, (100, 200, 300)) = (50, 100, 150)$ .

- Para el estado  $E_2 = 200$  y  $c = (100, 200, 300)$

Se resuelve el problema análogo al caso anterior.

El cuadro A.3 muestra el pago de cada agente según su orden de llegada.

| Órdenes de llegada \ Demandas | Demandas |       |       |
|-------------------------------|----------|-------|-------|
|                               | 100      | 200   | 300   |
| 123                           | 100      | 100   | 0     |
| 132                           | 100      | 0     | 100   |
| 213                           | 0        | 200   | 0     |
| 231                           | 0        | 200   | 0     |
| 312                           | 0        | 0     | 200   |
| 321                           | 0        | 0     | 200   |
| Promedio                      | 100/3    | 250/3 | 250/3 |

Cuadro A.3: Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado,  $E = 200$ , y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

∴ Obtenemos una asignación,  $RA(200, (100, 200, 300)) = (\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3})$ .

- Para el estado  $E_1 = 100$  y  $c = (100, 200, 300)$ .

Se resuelve el problema análogo al caso anterior.

El cuadro A.4 muestra el pago de cada agente según su orden de llegada.

| Órdenes de llegada \ Demandas | Demandas |       |       |
|-------------------------------|----------|-------|-------|
|                               | 100      | 200   | 300   |
| 123                           | 100      | 0     | 0     |
| 132                           | 100      | 0     | 0     |
| 213                           | 0        | 100   | 0     |
| 231                           | 0        | 100   | 0     |
| 312                           | 0        | 0     | 100   |
| 321                           | 0        | 0     | 100   |
| Promedio                      | 100/3    | 100/3 | 100/3 |

Cuadro A.4: Asignación mediante la regla de llegada aleatoria para un estado,  $E = 100$ , y un vector de demandas  $c = (100, 200, 300)$ .

∴ Obtenemos una asignación,  $RA(100, (100, 200, 300)) = (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$ .

El siguiente cuadro A.5 muestra el resumen de las asignaciones mediante la regla de llegada aleatoria para los cuatro diferentes estados.

| Asignación | Estado |       |     |       |
|------------|--------|-------|-----|-------|
|            | 100    | 200   | 300 | 450   |
| Agente 1   | 100/3  | 100/3 | 50  | 200/3 |
| Agente 2   | 100/3  | 250/3 | 100 | 425/3 |
| Agente 3   | 100/3  | 250/3 | 150 | 725/3 |

Cuadro A.5: Asignación obtenida mediante la regla de llegada aleatoria y cuatro diferentes estados.

**Observación A.0.3.** Los resultados obtenidos en el ejemplo A.0.8 y el ejemplo 3.3.1, muestran que la solución obtenida al resolver el problema de bancarrota aplicando la regla *RA* coincide con la solución obtenida a través del valor de Shapley en el juego de bancarrota asociado. Esto indica que la regla *RA* puede utilizarse como un método alternativo para calcular el valor de Shapley para este tipo de problemas.

