



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

---

ESCUELA DE POSTGRADO

**DESINGULARIZACIÓN DE SUPERFICIES CASI  
ORDINARIAS IRREDUCIBLES**

Tesis para Optar el Grado de  
Magister en Matemática

Autor

PAUCAR ROJAS, RINA ROXANA

Asesor

NECIOSUP PUICAN, HERNAN

Jurado

BELTRAN CORTEZ, ANDRES WILLIAM  
FERNANDEZ SANCHEZ, PERCY BRAULIO

Lima - Perú

Diciembre - 2017

# DESINGULARIZACIÓN DE SUPERFICIES CASI ORDINARIAS IRREDUCIBLES<sup>1</sup>

**Paucar Rojas, Rina Roxana**

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemática

Miembros de Jurado:

---

Dr. Fernandez Sanchez, Percy Braulio (presidente)

---

Dr. Beltran Cortez, Andres William (miembro)

---

Dr. Neciosup Puican, Hernan (asesor)

**Lima - Perú**  
**Diciembre - 2017**

---

<sup>1</sup>version final con las correcciones del jurado

*Le discutí un penique a la vida,  
y la vida no me dio más.  
Por mucho que le imploré a la noche,  
cuando contaba mis escasos bienes.*

*Por que la vida es un amo justo  
que te da lo que le pides,  
pero cuando has fijado el precio,  
debes aguantar la faena.*

*Trabajé por un salario de jornalero  
sólo para descubrir, perplejo,  
que cualquier paga que hubiera pedido a la vida,  
ésta me la hubiese pagado de buen grado.*

*Piense y Hágase Rico: por Napoleón Hill.*

*Dedicado a  
Dios,  
mi familia.  
y a todo aquel(lla) que lea esta tesis.*



## Agradecimientos

A Dios por su amor infinito.

Al asesor de la tesis Dr. Hernán Neciosup; por su colaboración y ayuda.

A los profesores de la Pontificia Universidad Católica del Perú: Dr. Percy Fernández, Dr. Roland Rabanal, Dr. Andres Beltran, Dr. Jaime Cuadros, Mg. Maritza Luna, Dr. Richard Gonzales; por lo mucho que me han enseñado, por sus sabios consejos y apoyo recibido.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú; por permitirme ser parte de ella y haberme abierto las puertas de su seno científico.

A mis maravillosos padres: Maria Rojas Alarcon y Eugenio Paucar Duran, mis extraordinarios hermanos: Noemi Paucar Rojas, Eugenio Paucar Rojas y Braulio Sanchez Rojas; por su apoyo, cariño, comprensión y por la confianza que siempre han depositado en mi.

A mis amigos de la maestría: Carlos Hurtado, Alfredo Sotelo, Joe Lope, Wilson Cabanillas, Ivan Suarez, Milagros Anculli, Pathy Arce, Yaxy Pintado, Liz Custodio, Guisela Gonzales, Maritza Capristano; por su amistad, apoyo, consejos y por compartir mis inquietudes matemáticos.



ESCUELA DE  
POSGRADO

## RESUMEN DE LA TESIS

Paucar Rojas, Rina Roxana  
Maestría en Matemáticas  
Desingularización de Superficies Casi Ordinarias Irreducibles

---

El objetivo de este trabajo de tesis es describir la resolución (parcial y estricta) de superficies (algebroides) casi ordinarias irreducibles, mediante el enfoque de Lipman.

Con dicho objetivo, definimos a las superficies (algebroides) casi ordinarias y describimos su parametrización por ramas casi ordinarias, también definimos a los anillos casi ordinarios, anillos locales de las superficies casi ordinarias irreducibles, y estudiamos la relación que existe entre el cono tangente y lugar singular de un anillo casi ordinario (invariantes que aparecen en estas resoluciones) y los pares distinguidos de una rama casi ordinaria normalizada que representa a este anillo. Asimismo, definimos las transformadas especiales de un anillo casi ordinario y mostramos que ellas son otra vez casi ordinarias. Concluimos con un ejemplo de estas resoluciones.

**Palabras clave:** *Superficies (algebroides) casi ordinarias, Resolución de singularidades, Explosiones, Anillo casi ordinario.*



ESCUELA DE  
POSGRADO

## ABSTRACT

Paucar Rojas, Rina Roxana  
Master in Mathematics  
Desingularization of Irreducible quasi ordinary Surfaces.

---

The aim of this thesis is to describe the resolution (partial and strict) of irreducible quasi ordinary surfaces (algebroids), by Lipman's approach.

To achieve our goal, we define to the quasi ordinary surfaces (algebroids) and describe their parametrization by quasi ordinary branches, we also define the quasi ordinary rings, local rings of the quasi ordinary irreducible surfaces, and we study the relationship that exists between the tangent cone and singular locus of a quasi ordinary ring (invariants that appear in these resolutions) and the distinguished pairs of a quasi ordinary normalized branch that represents this ring. Also, we define the special transforms of a quasi ordinary ring and show that they are again quasi ordinary. We conclude with an example of these resolutions.

**Keywords:** *Quasi ordinary (algebroids) surfaces, Resolution of singularities, Blowups, Quasi ordinary rings.*

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1. Definiciones Básicas . . . . .	8
1.2. Anillo de Series de Potencias Formales . . . . .	12
1.3. Teorema de Preparación de Weierstrass . . . . .	15
1.4. Series de Potencias Fraccionarias . . . . .	17
1.5. Resultante y Discriminante . . . . .	22
1.6. Una Introducción a la Teoría de Esquemas . . . . .	25
<b>2. Singularidad Casi Ordinaria</b>	<b>30</b>
2.1. Superficies Algebroides . . . . .	30
2.2. Superficies Casi Ordinarias . . . . .	35
2.3. Normalización de una Rama Casi Ordinaria . . . . .	47
2.4. Cono Tangente y Lugar Singular de un Anillo Casi Ordinario .	53
<b>3. Resolución de Singularidades</b>	<b>62</b>
3.1. Resolución de Curvas Planas mediante Explosiones . . . . .	62
3.2. Definición de Explosión de Esquemas . . . . .	73
3.3. Resolución Parcial de un Anillo Casi Ordinario . . . . .	80
3.4. Resolución Estricta de un Anillo Casi Ordinario . . . . .	99
<b>Apéndice</b>	<b>107</b>
<b>Referencias</b>	<b>123</b>

## Introducción

El objetivo de este trabajo de tesis es describir la resolución de superficies (algebroides) casi ordinarias irreducibles, siguiendo el enfoque de Lipman (vea [9], [10]).

Cuando se estudia la resolución de singularidades de curvas planas, ya se sabe cómo sacar ventaja del hecho de que es posible obtener una parametrización local de ellas, en una vecindad de un punto singular por series de Puiseux y de la finitud del lugar singular. Para el caso de superficies ninguna de estas dos cosas se cumplen en general, es más se dice que el mundo sería perfecto si se podría obtener para toda superficie embebida (en una vecindad de un punto singular) una parametrización de Puiseux, pero esto no es así. Sin embargo, no todo está perdido, pues en el año 1908 Jung mostró que si la vecindad de un punto singular de una superficie puede ser proyectada sobre el plano de tal forma que el lugar discriminante sea un divisor con cruzamientos normales, entonces la vecindad completa del punto puede ser parametrizada por series de Puiseux de un tipo especial llamadas casi ordinarias, las superficies con esta propiedad son llamadas superficies casi ordinarias.

El estudio de las superficies casi ordinarias se inició con Jung en el año 1908, cuando estas aparecieron en su enfoque de desingularización, donde empieza proyectando una superficie arbitraria  $V \subset \mathbb{C}^3$  sobre el plano  $\mathbb{C}^2$ , luego aplica transformaciones cuadráticas al lugar discriminante hasta que esta no tenga singularidades diferentes a los puntos dobles ordinarios. Así, usando solamente la desingularización de curvas planas se puede modificar localmente cualquier superficie a una que solamente tenga singularidades casi ordinarias. De este modo, el problema de resolver singularidades arbitrarias se reduce al problema de resolver singularidades casi ordinarias. Todo lo anterior motiva estudiar la resolución de superficies casi ordinarias, y es el objetivo del presente trabajo de tesis.

En cuanto al problema de resolución de singularidades, cabe señalar que fue Zariski, en 1939, quien dio la primera demostración puramente algebraica de la existencia de desingularización de superficies sobre un cuerpo de característica 0, y en 1944 nuevamente Zariski demostró la desingularización de superficies inmersas y variedades de dimensión 3, también para el caso de característica 0. Más tarde, en 1956 Abhyankar demostró la desingularización para superficies en característica  $p > 0$  y luego, en 1966, la de variedades de dimensión 3 para característica  $p > 5$ . Mientras tanto, en 1964 Hironaka demostró la desingularización de variedades y la desingularización de variedades inmersas, en dimensión arbitraria, en el caso de característica 0. El caso de

característica positiva, en dimensión arbitraria, aún sigue siendo un problema abierto en la actualidad.

Con la finalidad de lograr nuestro objetivo, este trabajo de tesis se ha distribuido de la siguiente manera:

En el capítulo 1, describimos de manera esquemática los preliminares para el desarrollo de la tesis. Este capítulo está organizado como sigue: en la sección 1.1, presentamos definiciones básicas con las que trabajaremos a lo largo de la tesis. En la sección 1.2, definimos al anillo de series de potencias formales  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$  y estudiamos sus propiedades, debido a que las superficies casi ordinarias son definidas por elementos de este anillo. Asimismo, estudiamos las propiedades de los homomorfismos e isomorfismos del anillo  $R$ , pues haremos un uso tácito de la existencia de tales isomorfismos a lo largo de este trabajo de tesis. En la sección 1.3, presentamos el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema 1.3.5), ya que este teorema juega un rol fundamental en el proceso de normalización de las ramas casi ordinarias, así como en el proceso de resolución de los anillos casi ordinarios o en lenguaje geométrico de las superficies casi ordinarias. En la sección 1.4, describimos de forma breve el anillo de series de potencias fraccionarias en  $n$  variables, puesto que gracias al teorema de Jung-Abhyankar (Teorema 1.4.6) las hipersuperficies casi ordinarias pueden ser parametrizadas por elementos de este anillo. En la sección 1.5, definimos la resultante y discriminante de polinomios, fundamental para definir a las superficies casi ordinarias. En la sección 1.6, debido a que el lenguaje más fluido para describir la resolución de singularidades es el de esquemas, en esta sección damos una introducción a la teoría de esquemas, enfocándonos especialmente en los esquemas afines, puesto que una superficie algebroides es definida como un esquema afín con ciertas propiedades.

En el capítulo 2, presentamos nuestro objeto de estudio, las superficies casi ordinarias y su parametrización por ramas casi ordinarias, también definimos a los anillos casi ordinarios (anillos locales de superficies casi ordinarias irreducibles). Asimismo, definimos el cono tangente y lugar singular de un anillo casi ordinario y estudiamos su relación con los pares distinguidos de una rama casi ordinaria normalizada que representa a este anillo. Cabe mencionar que en este trabajo usamos el término *superficie* para referirnos a una *superficie algebroides*. Este capítulo está organizado como sigue: en la sección 2.1, definimos a las superficies algebroides (puesto que las superficies casi ordinarias son un tipo particular de estas), las cuales son hipersuperficies algebroides de dimensión 2; es decir, esquemas del tipo  $V = \text{Spec}(A)$ , donde  $A$  es un anillo noetheriano, local, completo, equicaracterístico, equidimensional, reducido, y tal que el ideal maximal de  $A$  tiene una base de 3 elementos. El ideal maximal de  $A$  visto como un punto de  $V$  es llamado el *origen de  $V$*  y es denotado por  $O$ . Cualquier base minimal del ideal maximal de  $A$  es llamado un *sistema de coordenadas locales para  $V$  en  $O$* . En el caso de que  $A$  sea no regular, cualquier base del ideal maximal de  $A$  es minimal,

generalmente estamos en este caso. Sea  $\{x, y, z\}$  un sistema de coordenadas locales de  $V = \text{Spec}(A)$  en  $O$ , gracias a las propiedades de  $A$  y haciendo uso del Teorema de Cohen (Teorema 3.4.25) tenemos que  $A \simeq \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f \rangle}$ , la ecuación  $f = 0$  representa un embebimiento de  $V$  en  $\mathbb{A}_k^3$  y es llamada la **ecuación que define o representa a  $V$**  respecto al sistema de coordenadas locales  $\{x, y, z\}$  y está unívocamente determinado por este sistema de coordenadas (salvo multiplicación por unidades). En este caso, decimos que un subconjunto de  $\{x, y, z\}$ , digamos  $\{x, y\}$ , forman un sistema de parámetros locales de  $V$  en  $O$  si,  $f(0, 0, Z) = cZ^s + \text{términos de orden mayor a } s$ ; es decir, cuando  $f$  es regular en  $Z$  de orden  $s \geq \nu = \text{mult}(f)$ .  $\nu$  es la **multiplicidad del anillo local  $A$**  o usando la terminología geométrica,  $O$  es un punto de multiplicidad  $\nu$ ; mientras que  $s$  es la **multiplicidad del ideal  $\mathfrak{m}$ -primario  $\mathfrak{p} = \langle x, y \rangle A$** . Cuando esto es así, por el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema 1.3.5) existe  $u \in k[[X, Y, Z]]^*$  y  $f'$  un polinomio distinguido (vea Definición 1.3.7) tal que  $f = u \cdot f'$ . De aquí, se concluye que si  $\{x, y\}$  es un sistema de parámetros locales de  $V$  en  $O$ , siempre podemos tomar una ecuación de  $V$  respecto a dicho sistema de parámetros tal que sea un polinomio distinguido y este polinomio es llamado el **polinomio que define o representa a la superficie  $V = \text{Spec}(A)$**  o simplemente **polinomio que define o representa a  $A$** , respecto a este sistema de parámetros. Así, la noción de discriminante de  $V$  (del polinomio que la define) está bien definida y es denotada por  $\Delta_{x,y}$ . Asimismo, definimos el **sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$  adaptada a una subvariedad  $W$  de  $V$** . Finalizamos esta sección haciendo notar que, dada una subvariedad  $W$  de  $V$  se le puede hacer corresponder su punto general  $p \in V = \text{Spec}(A)$ , por esta correspondencia es natural que al tratar con las propiedades de las subvariedades nos refiramos indistintamente a estas o a sus ideales; así, se dirá que  $W$  es una subvariedad permitida de  $V$  o que  $p$  es un ideal permitido de  $A$ , etc. En la sección 2.2, definimos a las superficies casi ordinarias. La superficie algebroides  $V = \text{Spec}(A)$ , es llamada **casi ordinaria** si, existe un sistema de parámetros locales de  $V$  en  $O$  digamos  $\{x, y\}$ , tal que la discriminante  $\Delta_{x,y}$  de  $V$  respecto a este sistema de parámetros es una curva lisa o una curva con un punto doble (unión de 2 curvas lisas transversales). Cuando  $V$  es una superficie casi ordinaria, mediante un cambio de parámetros se puede conseguir que la discriminante de  $V$  sea  $\text{Spec}\left(\frac{k[[X, Y]]}{X \cdot Y}\right)$ . Supongamos que  $\{x, y\}$  son parámetros que cumplen la condición anterior  $z \in \mathfrak{m}$  tal que  $\{x, y, z\}$  es un sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$  y  $f$  el polinomio de  $V$  respecto a este sistema de coordenadas, entonces la  $Z$ -discriminante de  $f$ , polinomio que define a  $V$ , es de la forma  $X^a \cdot Y^b \varepsilon(X, Y)$ , donde  $\varepsilon(X, Y) \in k[[X, Y]]^*$ . El polinomio  $f$  que define a la superficie casi ordinaria  $V$ , es llamado un **polinomio casi ordinario**. Cuando  $f$  es un polinomio casi ordinario (de cierto orden digamos  $m$ ) y además es irreducible, por el Teorema de Jung-Abhyankar (Teorema 1.4.6) posee raíces

$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m \in \phi_n$  que son series de potencias fraccionarias en 2 variables, así en forma análoga al caso de curvas, las cuales admiten una parametrización por series de potencias fraccionarias en una variable también conocidas como series de Puiseux, las superficies casi ordinarias irreducibles pueden ser parametrizadas (representadas) por series de potencias fraccionarias en 2 variables. Usamos el término  $A$  es un **anillo casi ordinario** si  $f$ , el polinomio que define a  $A$ , es casi ordinario e irreducible. Si  $\zeta$  es una raíz de  $f$ , decimos que  $\zeta$  **representa a  $A$** . Las raíces  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  del polinomio casi ordinario e irreducible  $f$ , son llamadas **ramas casi ordinarias** de  $f$ . Las ramas casi ordinarias se caracterizan por ser no unidades y por que tienen la siguiente propiedad:  $\zeta_i - \zeta_j = M_{ij}\varepsilon_{ij}, \forall i \neq j$ , donde  $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n}Y^{\mu_{ij}/n}$  es un monomio en  $X^{1/n}, Y^{1/n}$ ;  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}$  son enteros que dependen de  $i, j$  y  $\varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n})$  es una unidad en  $\phi_n$ ; recíprocamente, si  $\zeta \in \phi_n$  y cumple las dos propiedades anteriores, entonces es una raíz de un polinomio casi ordinario. Los monomios  $M_{ij}$  así obtenidos son llamados **monomios distinguidos** y los pares  $\left(\frac{\lambda_{ij}}{n}, \frac{\mu_{ij}}{n}\right)$ , exponentes de estos monomios son llamados **pares distinguidos**. Los monomios distinguidos satisfacen ciertas propiedades, que enunciamos y demostramos en esta sección, de donde se concluye que toda rama casi ordinaria es de una de las 2 formas  $\zeta \in k[[X, Y]]$  o  $\zeta = H_0(X, Y) + X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}Y^{1/n})$ , donde  $H_0(X, Y) \in k[[X, Y]]$ ,  $H(0, 0) \neq 0$  y  $(\lambda, \mu)$  es el menor par distinguido de  $\zeta$ . En la sección 2.3, describimos el proceso de normalización de las ramas casi ordinarias (usando los lemas 2.3.1 y 2.3.2) así como el procedimiento para obtener ramas fuertemente normalizadas a partir de las ramas casi ordinarias, las ramas normalizadas y fuertemente normalizadas son ramas casi ordinarias que nos facilitan ciertos cálculos a realizarse con ellas durante el proceso de resolución de singularidades. En la sección 2.4, se define el cono tangente y el lugar singular de un anillo casi ordinario  $A$  los cuales son invariantes asociados con los sucesivos anillos locales (transformadas especiales de  $A$ ) que aparecen en la resolución (parcial y formal) de  $A$ , y se dan las demostraciones de resultados (vea Proposición 2.4.4, Teorema 2.4.7) que garantizan que los pares distinguidos de cualquier rama casi ordinaria normalizada representando a un anillo casi ordinario  $A$  determinan y están determinados por el cono tangente y la naturaleza del lugar singular de este anillo, todos estos resultados han sido obtenidos de [9].

El capítulo 3 está dedicado a presentar el objetivo de la tesis, la resolución (parcial y estricta) de superficies casi ordinarias irreducibles, para ello definimos la noción de explosión de esquemas enfocándonos principalmente en la explosión del esquema  $S = \text{Spec}(k[[X, Y, Z]])$ , que geoméricamente corresponde a una vecindad arbitrariamente pequeño del origen del espacio afín, y estudiamos el comportamiento de las superficies inmersas en  $S$  bajo explosiones de  $S$ . Asimismo, definimos a las transformadas especiales de un anillo casi ordinario y mostramos que ellas son otra vez casi ordinarias. Este capítulo está organizado como sigue: en la sección 3.1, empezamos con una

motivación geométrica para entender la noción de explosión y resolución de singularidades mediante explosiones, luego definimos la explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen y finalizamos esta sección describiendo el comportamiento de las curvas inmersas en  $\mathbb{C}^2$  bajo explosiones de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen. En la sección 3.2, comenzamos dando una introducción de la *construcción proj* (en el espacio proyectivo), la cual es una construcción análoga a la de esquema afín (en el espacio afín), seguidamente se estudia la noción de explosión de esquemas. Más precisamente, El morfismo estructural de esquemas  $\pi : T = Proj(C) \longrightarrow S = Spec(R)$  es llamada la **aplicación explosión** del esquema afín  $S$  con centro en  $P$ , y el  $S$ -esquema  $T$  es llamada la **explosión** de  $S$  con centro en  $P$  ( $R$  anillo noetheriano, local;  $M$  ideal maximal de  $R$ ;  $P \in S$ ;  $C = Bl_P R = \bigoplus_{n \geq 0} M^n$  el álgebra explosión de  $P$  en  $R$ ) y se tiene que  $\pi^{-1}(M)$ , la pre imagen del origen vía la explosión, como espacio topológico es un subespacio cerrado. Cuando el centro de explosión es un ideal primo  $P \neq M$ ,  $\pi$  es llamada la **transformación monoidal de  $S$  con centro en  $P$** , y  $T$  es llamada la **transformada monoidal de  $S$  con centro en  $P$** . Cuando el centro es  $P = M$ ,  $\pi$  es llamada la **transformación cuadrática de  $S$** , y  $T$  es llamada la **transformada cuadrática de  $S$** . La **explosión del anillo  $R$**  es definida como el anillo  $R'$ , la cual es el anillo local de algún punto cerrado de  $\pi^{-1}(M)$ . Seguidamente, estudiamos la explosión del esquema  $S = Spec(k[[X, Y, Z]])$  (vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio afín). Más precisamente, si  $\pi : T \longrightarrow S = Spec(k[[X, Y, Z]])$  es la transformación cuadrática de  $S$ , entonces  $T$ , está cubierta por 3 esquemas afines  $T_X, T_Y, T_Z$  (abiertos isomorfos al espacio afín) y  $\pi^{-1}(M)$  es isomorfo al plano proyectivo, así sus puntos cerrados están en correspondencia uno a uno con las direcciones  $(\alpha : \beta : \gamma)$  ( $(0 : 0 : 0)$  siendo excluido de la consideración), además se tiene que cualquier punto de  $\pi^{-1}(M)$  digamos  $\eta$  correspondiente a la dirección  $(\alpha : \beta : \gamma)$ , esta en  $T_X$  si y solo si  $\alpha \neq 0$ , esta en  $T_Y$  si y solo si  $\beta \neq 0$ , esta en  $T_Z$  si y solo si  $\gamma \neq 0$ . Puesto que la explosión es un fenómeno local, pasamos luego a estudiar su representación local en el abierto  $T_X$ ; es decir, en un punto cerrado  $\eta$  de  $\pi^{-1}(M)$  correspondiente a la dirección  $(\alpha : \beta : \gamma)$ , con  $\alpha \neq 0$ , teniendo los siguientes resultados: la transformada cuadrática de  $R = k[[X, Y, Z]]$  en este caso es  $R'$  anillo regular de dimensión 3 con parámetros regulares  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{Z}{X} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\}$  y si  $f \in M$  su transformada estricta viene dada por

$$f' = \frac{f}{X^s} = f_s \left( 1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha} \right) + X' f_{s+1} \left( 1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha} \right) + \dots,$$

y si además  $f'$  no es unidad,  $\frac{R}{\langle f' \rangle}$  es llamada la **transformada cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f' \rangle}$**  en el punto  $(\alpha : \beta : \gamma)$  ( $\alpha \neq 0$ ). Resultados análogos se tiene en los otros abiertos. Cuando  $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$  usamos el término **trans-**

**formación cuadrática formal de  $A$** , para referirnos a la transformación cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$ . Observe que si  $f$  es el polinomio que define a una superficie casi ordinaria irreducible  $V = \text{Spec}(A)$ , respecto a algún sistema de parámetros, lo anterior nos da la transformada estricta de  $f$  y la transformada cuadrática formal del anillo casi ordinario  $A$ . Por otro lado, si  $\pi : T \rightarrow S = \text{Spec}(k[[X, Y, Z]])$  es la transformación monoidal de  $S$  con centro en  $P \neq M$ . Procediendo en forma análoga al anterior y usando la suposición adicional de que existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que si  $f \in M^t$ , entonces  $f \in P^t$  (esto es que  $\frac{P}{\langle f \rangle}$  es un centro permitido de  $A = \frac{R}{\langle f \rangle}$ ) definimos la transformada estricta de  $f \in P$  y la transformada monoidal formal del anillo  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro en  $\frac{P}{\langle f \rangle}$ . Si  $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$  y  $\bar{P} = \frac{P}{\langle f \rangle}$  en  $A$  es la imagen de  $P \subset R$ , usamos el término **transformación monoidal formal de  $A$  con centro  $\bar{P}$**  para referirnos a cualquiera de las transformaciones monoidales formales de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro  $\frac{P}{\langle f \rangle}$ . Observe que si  $f$  es el polinomio de una superficie casi ordinaria irreducible  $V = \text{Spec}(A)$ , respecto de algún sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$  adaptada a  $W = \text{Spec}\left(\frac{A}{\bar{P}}\right)$ , lo anterior nos da  $A'$  la transformada formal del anillo casi ordinario  $A$  con centro  $\bar{P}$ . En la sección 3.3, empezamos definiendo a las transformadas especiales de un anillo casi ordinario, pues la resolución parcial del anillo casi ordinario  $A$ , es una sucesión  $A_0, A_1, \dots, A_t$ , donde  $A = A_0$  y  $A_i$  es isomorfo a una transformada especial de  $A_{i-1}$ , para todo  $i = 1, \dots, t$ . Con la finalidad de asegurar que esta resolución tiene un número finito de miembros, mostramos que las transformadas especiales de  $A$  son otra vez casi ordinarias. A continuación, una idea de como hacemos este análisis. Sea  $A$  un anillo casi ordinario representada por  $\zeta = X^{u/n}Y^{v/n}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $H(0, 0) \neq 0$  una rama casi ordinaria normalizada, y sean  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_m$  conjugadas de  $\zeta_i$ , entonces

$$f = \prod_{i=1}^m (Z - X^{u/n}Y^{v/n}H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})),$$

es un polinomio casi ordinario que define a  $A$ . Si  $A$  tiene centro permitido que es una curva, entonces la transformada especial de  $A$  es la transformada monoidal formal de  $A$  con centro en esta curva y si  $A$  no tiene centros permitidos que sean curvas, las transformadas cuadráticas especiales de  $A$  ocurrirán en las direcciones  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  (vea [9]). Supongamos que estamos en el siguiente caso particular, supongamos que  $A$  tiene centro permitido  $p = \langle X, \zeta \rangle A$ , entonces por el Teorema 2.4.7 se tiene que  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} > 1$  y además que  $\frac{u}{n} \geq 1$ , de donde tenemos que  $f''$  el polinomio representante de  $A''$ , trans-

formada monoidal de  $A$  con centro en  $p$ , viene dado por  $f'' = \prod_{i=1}^m \left( Z - \frac{\zeta_i}{X} \right)$ ,

cuyas raíces son de la forma  $\zeta_i'' = \frac{\zeta_i}{X}$ , los cuales no son unidades y son conjugados entre sí, de donde  $f''$  es un polinomio irreducible; además se tiene que los  $\zeta_i''$  son casi ordinarios de donde  $f''$  es un polinomio casi ordinario irreducible y por lo tanto  $A''$  es casi ordinario y además si  $(\lambda_i, \mu_i)$  son los pares distinguidos de la rama original  $\zeta$ , entonces  $(\lambda_i - 1, \mu_i)$  son los pares distinguidos de  $\zeta''$  (así, vemos que están totalmente determinados por los pares distinguidos de la rama original  $\zeta$ ). En resumen, se tiene que si  $A$  es un anillo casi ordinario, cualquier transformada especial  $A'$  de  $A$  es otra vez casi ordinaria y si  $\zeta$  es una rama casi ordinaria representando a  $A$ , entonces  $\zeta'$  representante de  $A'$  no necesariamente es normalizado y sus pares distinguidos dependen de los pares distinguidos de  $\zeta$  y del proceso (transformación cuadrática o monoidal) empleado (para una descripción mas exacta vea Proposición 3.3.6). Finalizamos esta sección enunciando y dando la idea de la demostración de la Proposición 3.3.7 que garantiza que toda resolución parcial de un anillo casi ordinario tiene un número finito de miembros y con un ejemplo donde describimos la resolución parcial de una superficie casi ordinaria irreducible (de su anillo casi ordinario). En la sección 3.4, definimos resolución estricta de un anillo casi ordinario y desarrollamos un ejemplo, donde detallamos la resolución estricta de la superficie casi ordinaria irreducible del ejemplo tratado en la sección anterior.

Este trabajo de tesis consta de un apéndice, donde se da una introducción a la bonita interacción que existe entre el álgebra y la geometría, y donde tratamos de forma resumida con los principales conceptos utilizados a lo largo de la tesis y que nos permitirá una mejor comprensión de este trabajo.

## 1. Preliminares

En este capítulo, presentamos los conceptos de carácter general y las notaciones que usamos a lo largo de la tesis. Asumiremos que todo anillo es conmutativo y con unidad.

### 1.1. Definiciones Básicas

Sea  $R$  un anillo,  $I \subset R$  es un **ideal** si  $0 \in I$  y  $af + bg \in I$  para todo  $a, b \in R$  y  $f, g \in I$ .

$S \subset R$  es llamado un **conjunto multiplicativamente cerrado** de  $R$  si contiene a la unidad del anillo ( $1 \in S$ ) y si  $f, g \in S$  tal que  $f \in S$  y  $g \in S$  entonces  $f.g \in S$ .

Un ideal  $I \subset R$  es llamado un ideal **primo** si su complemento es un conjunto multiplicativamente cerrado. Equivalentemente, un ideal primo de  $R$  es un ideal  $I$  de  $R$  tal que  $I \neq R$  y si  $f.g \in I$  entonces  $f \in I$  o  $g \in I$ . Se prueba que  $P$  es un ideal primo si y solo si  $\frac{R}{P}$  es un dominio de integridad.

Un ideal  $M \subset R$  es **maximal respecto al subconjunto multiplicativo**  $S$  de  $R$ , si  $M$  no intercepta a  $S$  y todo ideal que contiene propiamente a  $M$  intercepta a  $S$ . Se dice que el ideal  $M$  es **maximal** de  $R$  si este es maximal con respecto a  $S = \{1\}$ . Como todo cuerpo es un anillo  $R$  cuyos únicos ideales son el ideal cero y el mismo  $R$ , se tiene que  $M$  es un ideal maximal de  $R$  si y solo si  $\frac{R}{M}$  es un cuerpo.

#### Observación 1.1.1.

1. Si  $I \subset R$  es un ideal entonces existe un anillo  $\frac{R}{I}$  y un homomorfismo sobreyectivo  $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{I}$  llamado el **homomorfismo cociente** cuyo núcleo coincide con  $I$ ; es decir,  $\text{Ker}(\varphi) = I$ .
2. Existe una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre ideales  $J$  de  $R$  que contienen a  $I$  y los ideales  $\bar{J}$  de  $\frac{R}{I}$ , dada por  $J = \varphi^{-1}(\bar{J})$ .

Un elemento  $f \in R$  es **nilpotente**, si  $f^n = 0$  para algún  $n > 0$ . El conjunto de elementos nilpotentes de  $R$  forman un ideal llamado el **nilradical** de  $R$  y denotado por  $\text{nil}(R)$ . Se prueba que  $\text{nil}(R)$  es igual a la intersección de todos los ideales primos de  $R$  (vea [1]).

El anillo  $R$  es **reducido** si no tiene elementos nilpotentes excepto el cero; es decir,  $\text{nil}(R) = \{0\}$ .

La intersección de los ideales primos que contienen al ideal  $I \subset R$  es llamado el **radical de  $I$**  y es denotado por  $\sqrt{I}$ . Equivalentemente, el radical del ideal  $I$  es definido por

$$\sqrt{I} = \{f \in R / f^s \in I \text{ para algún } s \text{ entero positivo}\}.$$

Si  $I = \sqrt{I}$ , el ideal  $I$  es llamado un ideal **radical**.

El anillo cociente  $\frac{R}{I}$  es reducido si el ideal  $I$  de  $R$  es un ideal radical.

Si  $\varphi : R \rightarrow \frac{R}{I}$  es el homomorfismo cociente,  $\sqrt{I}$  consiste exactamente de los elementos de  $R$  que son enviados a los elementos nilpotentes de  $\frac{R}{I}$ ; es decir,

$$\sqrt{I} = \varphi^{-1} \left( \text{nil} \left( \frac{R}{I} \right) \right).$$

Un ideal  $Q$  de  $R$  es llamado **primario**, si  $Q \neq R$  y todos los divisores de cero en  $\frac{R}{Q}$  son nilpotentes; es decir, si  $f, g \in R$  y  $f.g \in Q$  entonces  $f \in Q$  o  $g^n \in Q$  para algún  $n$  entero positivo. Se prueba que todo ideal primario es primo y que la pre imagen de un ideal primario es primario.

Un ideal primo  $P$  de  $R$  es llamado **divisor primo minimal** de un ideal  $I$ , si  $P$  es minimal entre los ideales primos que contienen a  $I$ . En [4]  $P$  es llamado **primo minimal sobre  $I$** .

**Proposición 1.1.2.** *Si  $Q$  es un ideal primario de un anillo  $R$ , entonces su radical  $P$  es primo y es el menor ideal primo que contiene a  $Q$ , es decir,  $P$  es el divisor primo minimal de  $Q$ .*

*Demostración.* Vea [1]. □

Si  $P$  es el radical del ideal primario  $Q$  decimos que  $Q$  es un ideal primario **perteneciendo a  $P$**  o que  $Q$  es  **$P$ -primario** o que  $P$  es **el divisor primo de  $Q$** .

**Proposición 1.1.3.** *Si  $\sqrt{I}$  es un ideal maximal, entonces  $I$  es primario. En particular, las potencias de un ideal maximal  $M$  son  $M$ -primarias.*

*Demostración.* Vea [1]. □

La siguiente proposición nos dice el comportamiento de los ideales primarios respecto de la localización

**Proposición 1.1.4.** Sea  $P$  un divisor primario minimal de un ideal  $I$  de  $R$ , entonces  $(IR_P) \cap R$  es  $P$ -primario.

*Demostración.* Vea [14]. □

$(IR_P) \cap R$  es llamado la **componente primaria** de  $I$  perteneciendo a  $P$  (es decir, es  $P$ -primario).

**Proposición 1.1.5.** Sea  $S$  un subconjunto multiplicativamente cerrado de  $R$  y sea  $Q$  un ideal  $P$ -primario

1. Si  $S \cap P \neq \emptyset$  entonces  $QR_S = PR_S = R_S$ .
2. Si  $S \cap P = \emptyset$  entonces  $S^{-1}Q$  es  $S^{-1}P$ -primaria y  $(PR_S) \cap R = P$  y  $(QR_S) \cap R = Q$  (la contracción de  $Q$  en  $R$  es  $Q$ ).

*Demostración.* Vea [14] o [1]. □

**Definición 1.1.6.** Sea  $P$  un ideal primo,  $P$  es el único divisor primo minimal de  $P^r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ). Por lo tanto, la componente primaria  $P^{(r)} = (P^r R_P) \cap R$  de  $P^r$  perteneciendo a  $P$  está bien definida.  $P^{(r)}$  es llamada la  **$r$ -ésima potencia simbólica** de  $P$ .

Sea  $R$  un anillo. Un  **$R$ -álgebra** es un anillo  $A$  junto con un homomorfismo de anillos  $\varphi : R \rightarrow A$ . El producto en  $A$  se define de la siguiente forma:

$$f \cdot g = \varphi(f) \cdot g; \quad f \in R, \quad g \in A.$$

**Ejemplo 1.1.7.**

1. Sea  $A$  un  $R$ -álgebra. Si  $R = k$ , donde  $k$  es un cuerpo, se tiene que el homomorfismo  $\varphi : k \rightarrow A$  es inyectivo,  $k$  puede identificarse con su imagen en  $A$ . Así, un  $k$ -álgebra es un anillo que contiene a un cuerpo como un subanillo.
2.  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  y  $k[X_1, \dots, X_n]$  son  $k$ -álgebras. En efecto: basta considerar los homomorfismos (inclusión)  $\varphi : k \rightarrow k[[X_1, \dots, X_n]]$  y  $\varphi : k \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$  respectivamente.
3.  $\frac{R}{I}$  ( $I$  un ideal de  $R$ ) es un  $R$ -álgebra.

Sea  $R$  un anillo.  $M$  es un  $R$ -**módulo**, si  $M$  es un grupo abeliano con una acción de  $R$ ; es decir, con una aplicación

$$\begin{aligned} R \times M &\rightarrow M \\ (f, m) &\mapsto fm \end{aligned}$$

tal que para todo  $f, g \in R$  y  $m, n \in M$  se cumple

1.  $f(gm) = (fg)m$  (asociatividad mixta).
2.  $f(m + n) = fm + fn$  (distributividad respecto a  $M$ ).
3.  $(f + g)m = fm + gm$  (distributividad respecto a  $R$ ).
4.  $1m = m$  (identidad).

**Ejemplo 1.1.8.** Sea  $R$  un anillo y  $I \subset R$  un ideal.  $I$ ,  $R$  y  $\frac{R}{I}$  son  $R$ -módulos.

Observe que un módulo sobre un cuerpo es un espacio vectorial.

Una **base** del módulo  $M$  es un subconjunto  $\{m_1, m_2, \dots\}$  de  $M$  que genera a  $M$ , esta base es llamada **mínimal**, si cualquier subconjunto propio de dicha base no es una base para  $M$ . Si la base consiste de un número finito de elementos es llamada una **base finita**.

Un cuerpo  $k$  es **algebraicamente cerrado** si y solo si todo polinomio no constante  $f(X)$  en  $k[X]$  tiene un cero en  $k$ .

Sea  $R$  un anillo, se dice que  $R$  es **Noetheriano** si todo ideal de  $R$  es finitamente generado o equivalentemente si toda cadena estrictamente ascendente de ideales de  $R$  se estabiliza.

Un anillo **local**  $R$  es un anillo que solo tiene un ideal maximal..

**Definición 1.1.9.** Decimos que un anillo  $R$  tiene **dimensión de Krull** igual a  $n$  (o simplemente **dimensión**  $n$ ), si en  $R$  hay una cadena de ideales primos  $P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_n$  y no hay otra cadena con más términos. Además,  $n$  es llamado la **longitud** de la cadena. Si tal  $n$  no existe, decimos que  $R$  es de **dimensión infinita**.

**Proposición 1.1.10.** Sea  $R$  es un anillo local de **dimensión**  $n$  y  $M$  su ideal maximal. Un conjunto de  $n$  elementos  $f_1, \dots, f_n$  de  $M$  es llamado un **sistema de parámetros de  $R$** , si estos generan un ideal  $M$ -primario y no hay ideal  $M$ -primario que sea generado por  $n - 1$  elementos.

*Demostración.* Vea [14]. □

**Definición 1.1.11.** Un sistema de parámetros  $f_1, \dots, f_n$  de un anillo local  $R$ , es llamado **regular** si este genera el ideal maximal de  $R$ . Un anillo local que tiene un sistema de parámetros regular es llamado un **anillo local regular**. Equivalentemente, supongamos que  $R$  es un anillo local de **dimensión**  $n$  y  $M$  su ideal maximal,  $R$  es llamado **regular** si  $M$  es generado exactamente por  $n$  elementos.

Los anillos  $k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$  y  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ , donde  $k$  es un cuerpo, son ejemplos de anillos locales regulares. En ambos casos  $X_1, \dots, X_n$  forman un sistema de parámetros regulares. Los anillos locales regulares ocupan el

centro del escenario en geometría algebraica desde que Zariski notó que estos corresponden a puntos no singulares sobre una variedad algebraica.

Un anillo local es llamado **equicaracterístico** si contiene a un cuerpo.

La multiplicidad de un elemento de un anillo  $R$  con respecto a un ideal  $P$  de  $R$  se define de la siguiente forma

**Definición 1.1.12.** Sean  $0 \neq f \in R$  y  $P$  un ideal en  $R$ , la **multiplicidad u orden** de  $f$  en  $P$  viene dado por

$$\text{mult}_P(f) = \max\{d \geq 0 / f \in P^d\}.$$

**Teorema 1.1.13.** Si  $R$  es un anillo local regular y  $M$  su ideal maximal.  $0 \neq f \in M$ . Entonces  $\text{mult}\left(\frac{R}{\langle f \rangle}\right) = \text{grado de } f \text{ con respecto a } M$ .

*Demostración.* Vea [14]. □

## 1.2. Anillo de Series de Potencias Formales

En esta sección definimos y describimos propiedades del anillo de series de potencias formales en  $n$  variables con coeficientes en un cuerpo  $k$ .

Sea  $k$  un cuerpo y  $X_1, \dots, X_n$  indeterminadas en  $k$ , denotamos por  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$ , al conjunto cuyos elementos son sumas formales

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i = f_0 + f_1 + f_2 + \dots,$$

donde  $f_j$  es un **polinomio homogéneo** también llamado **forma** de grado  $j$  en las variables  $X_1, \dots, X_n$ .

Sean  $f, g \in R$  y  $\alpha \in k$ , la suma y el producto por un escalar en  $R$ , se definen respectivamente por:

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i),$$

$$\alpha f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(f_i).$$

Se prueba que  $R$ , con estas operaciones, es un anillo conmutativo y con unidad conocido como el **anillo de series de potencias formales** en las indeterminadas  $X_1, \dots, X_n$  con coeficientes en  $k$ .

El anillo polinomial  $k[X_1, \dots, X_n]$  es un subanillo de  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ , mediante la identificación obvia que se tiene entre una suma finita  $\sum_{i=0}^n f_i$  y una suma infinita  $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ , poniendo  $f_i = 0$  para todo  $i > n$ .

**Proposición 1.2.1.** *Un elemento  $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \in R$  es **invertible** o **unidad** ( $f \in R^*$ ) si  $f_0 \neq 0$ .*

*Demostración.* Vea [13]. □

**Definición 1.2.2.** *Sean  $f, g \in R$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son **asociados** si existe  $u \in R^*$  tal que  $f = ug$ .*

**Definición 1.2.3.** *Sea  $f = f_n + f_{n+1} + \dots \in R$ , con  $f_n \neq 0$ . El polinomio homogéneo de menor grado no nulo  $f_n$  de  $f$ , es llamado la **parte inicial** o **forma inicial** de  $f$  y es denotado por  $f_I$ .*

**Definición 1.2.4.** *Sea  $f \in R$ .*

1. Si  $0 \neq f \in R$ , entonces la **multiplicidad** u **orden** de  $f$ , es el grado de su forma inicial, denotada por  $\text{mult}(f)$ .
2. Si  $f = 0$ , entonces se define  $\text{mult}(f) = \infty$ .

**Observación 1.2.5.** *Note que la multiplicidad de un elemento  $f$  del anillo  $R = k[[X, Y, Z]]$  coincide con la multiplicidad de  $f$  con respecto al ideal maximal  $M$  de  $R$ ; es decir,  $0 \neq f \in R$ ,  $\text{mult}(f) = n$  si y solo si  $f \in M^n$  y  $f \notin M^{n+1}$ .*

**Proposición 1.2.6.** *Sean  $f, g \in R$ ,*

1.  $\text{mult}(f.g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$ .
2.  $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$ . La igualdad se da cuando las multiplicidades de  $f$  y  $g$  son diferentes.

*Demostración.* Vea [19]. □

**Proposición 1.2.7.**  *$R$  es un dominio de integridad.*

*Demostración.* Sean  $f, g$  elementos no nulos de  $R$ , entonces por la Definición 1.2.4, tenemos que  $\text{mult}(f) < \infty$  y  $\text{mult}(g) < \infty$  y por la Proposición 1.2.6 se tiene que  $\text{mult}(f.g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g) < \infty$ , de donde  $fg \neq 0$ . □

Sea  $M = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ , al ideal de  $R$  generado por  $X_1, \dots, X_n$  y  $M^n$  la  $n$ -ésima potencia de  $M$  ( $M^0 = R$ ).

**Proposición 1.2.8.**

1.  $M$  es el único ideal maximal de  $R$ .
2.  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M^i = \{0\}$ .

*Demostración.* Vea [13]. □

**Observación 1.2.9.** El ítem 1. de la Proposición 1.2.8, nos dice que  $R$  es un anillo local y que  $M$  es su único ideal maximal.

**Teorema 1.2.10.** Si  $k$  es un cuerpo,  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$  es un dominio de factorización única.

*Demostración.* Vea [19]. □

**Teorema 1.2.11.** si  $k$  es un cuerpo, el anillo de series de potencias formales  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$  es noetheriano.

*Demostración.* Vea [19]. □

A continuación, trataremos con homomorfismos e isomorfismos de series de potencias formales en varias variables. Básicamente se mostrará que todo homomorfismo es un *homomorfismo sustitución* y se darán las condiciones necesarias y suficientes para que los homomorfismos sean isomorfismos.

Sean  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$  y  $S = k[[X_1, \dots, X_m]]$  dos anillos de series de potencias formales en  $n$  y  $m$  variables respectivamente, con coeficientes en el cuerpo  $k$ , y  $M_R$  y  $M_S$  sus ideales maximales respectivamente.

**Proposición 1.2.12.** Sean  $m_1, \dots, m_n \in M_S$ ;  $f, h \in R$ ;  $a \in k$ . Se cumplen

1.  $(f + ah)(m_1, \dots, m_n) = f(m_1, \dots, m_n) + ah(m_1, \dots, m_n)$ ,
2.  $(fh)(m_1, \dots, m_n) = f(m_1, \dots, m_n)h(m_1, \dots, m_n)$ ,
- 3.

$$\psi_{m_1, \dots, m_n} : \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ f(X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & f(m_1, \dots, m_n) \end{array}$$

es un homomorfismo de  $k$ -álgebras, llamado  **$k$ -homomorfismo sustitución o homomorfismo sustitución sobre  $k$** .

*Demostración.* Vea [13]. □

**Proposición 1.2.13.** Sea  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de  $k$ -álgebras. Entonces  $\varphi$  tiene las siguientes propiedades

1.  $\varphi(M_R) \subset M_S$ ,
2.  $\varphi$  es continua,
3. existen  $m_1, \dots, m_n \in M_S$  tal que  $\varphi = \psi_{m_1, \dots, m_n}$ .

*Demostración.* Vea [1]. □

La proposición anterior dice que todo  $k$ -homomorfismo es un homomorfismo evaluación.

A continuación, probaremos las condiciones necesarias que deben cumplir  $m_1, \dots, m_n$  para que el homomorfismo  $\varphi = \psi_{m_1, \dots, m_n}$  sea un  $k$ -isomorfismo. Para ello necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 1.2.14.** *Sea  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de  $k$ -álgebras. Si  $\varphi = \psi_{m_1, \dots, m_n}$  es un  $k$ -isomorfismo, entonces*

$$\text{mult}(f) = \text{mult}(\varphi(f)).$$

*Demostración.* Vea [13]. □

**Proposición 1.2.15.** *Sea  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de  $k$ -álgebras. Si  $\varphi = \psi_{m_1, \dots, m_n}$  es un  $k$ -isomorfismo, entonces las formas iniciales de  $m_1, \dots, m_n \in M_S$  deben ser formas lineales; linealmente independientes. En particular, se tiene que  $m = n$ .*

*Demostración.* Vea [13]. □

Las condiciones de la proposición anterior (Proposición 1.2.15) también son suficientes como lo indica la Proposición 1.2.16.

**Proposición 1.2.16.** *Sea  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorfismo de  $k$ -álgebras. Supongamos que  $m = n$  y sean  $m_1, \dots, m_n \in M_S$ , con formas iniciales lineales  $l_1, \dots, l_n$   $k$ -linealmente independientes, entonces  $\varphi = \psi_{m_1, \dots, m_n}$  es un  $k$ -isomorfismo de  $R$  en  $S$ .*

*Demostración.* Vea [13]. □

### 1.3. Teorema de Preparación de Weierstrass

En esta sección se demostrará el Teorema de preparación de Weierstrass. El nombre del teorema se debe a que en este teorema se “prepara” a toda serie de potencias para el estudio de sus ceros.

Sean  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$ ,  $R' = k[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$  anillos de series de potencias formales en  $n$  y  $n - 1$  indeterminadas respectivamente y denotemos por  $M_R$ ,  $M_{R'}$  a sus respectivos ideales maximales.

**Definición 1.3.1.**  $f \in R$  es llamado **regular** de orden  $m$ , con respecto a la indeterminada  $X_r$ , si  $f(0, \dots, X_r, \dots, 0)$  es divisible exactamente por  $X_r^m$ .

Es importante indicar que si  $f$  es regular de orden  $m$  en  $X_r$  y  $m = \text{mult}(f)$ , entonces solo se suele decir que  $f$  es regular en  $X_r$  sin hacer referencia al orden. En este caso,  $\text{mult}(f) = \text{mult} f(0, \dots, X_r, \dots, 0)$ .

**Observación 1.3.2.** Siempre es posible transformar todo  $f \in R$  en una serie de potencias regular en alguna de sus indeterminadas elegidas al azar. Cuando  $k$  es infinito esto se hace componiendo  $f$  con un automorfismo lineal de  $R$  con  $f$  ([13]).

**Lema 1.3.3.**  $f, g \in R$  son regulares con ciertos ordenes en  $X_r$  si y solo si  $f.g$  es regular de cierto orden en  $X_r$ .

*Demostración.* Vea [13]. □

**Teorema 1.3.4** (Teorema de la División). Sea  $f \in M_R \subset R$  regular de orden  $m$  con respecto a la variable  $X_n$ . Dado cualquier  $g \in R$ , existen  $q \in R$  y  $r \in R'[X_n]$  con  $r = 0$  o  $\deg_{X_n}(r) < m$  ( $\deg_{X_n}(r) = \text{grado del polinomio } r \text{ en la indeterminada } X_n$ ), únicamente determinados por  $f$  y  $g$  tal que  $g = fq + r$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema se encuentra en muchos textos como [2], [3] y [13]. □

A continuación, enunciamos y probamos el Teorema de Preparación de Weierstrass.

**Teorema 1.3.5** (Teorema de preparación de Weierstrass). Sea  $f \in R$  regular de orden  $m$  respecto a  $X_n$ . Entonces existen  $U \in R^*$  y  $c_1(X), \dots, c_m(X) \in M_{R'}$  ( $c_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) únicamente determinados por  $f$  tal que

$$f.U = X_n^m + c_1(X)X_n^{m-1} + \dots + c_m(X).$$

Además, si  $f$  es regular en  $X_n$  ( $f$  regular de orden  $m$  y  $m = \text{mult}(f)$ ), entonces

$$\text{mult}(c_i(x)) \geq i, \forall i = 1, \dots, m.$$

*Demostración.* La existencia se sigue del Teorema de la División, en efecto: poniendo  $g = X_n^m$ , se tiene que existen  $U = q \in R$  y  $r = -(c_1(X)X_n^{m-1} + \dots + c_m(X)) \in R'$  tal que

$$X_n^m = fU + (-(c_1(X)X_n^{m-1} + \dots + c_m(X))),$$

o equivalentemente

$$X_n^m + c_1(X)X_n^{m-1} + \dots + c_m(X) = fU.$$

El hecho de que  $U$  sea invertible se sigue del Lema 1.3.3. Por otro lado, como  $X_n$  divide a  $f$  se tiene que  $c_1(0) = \cdots = c_m(0) = 0$ .

Finalmente, si  $f$  es regular en  $X_n$  ( $f$  regular de orden  $m$  y  $m = \text{mult}(f)$ ), entonces  $\text{mult}(X_n^m + c_1(X)X_n^{m-1} + \cdots + c_m(X)) = \text{mult}(fU) = m$ , de donde  $\text{mult}(c_i) \geq i, \forall i = 1, \dots, m$ .

La prueba de la unicidad se sigue de la unicidad del Teorema de la División.  $\square$

**Observación 1.3.6.** Desde que  $U$  no se anula en una vecindad de  $0 \in \mathbb{A}_k^n$ ; en dicha vecindad los ceros de  $f$  coinciden con los ceros de

$$X_r^m + c_1(X)X_r^{m-1} + \cdots + c_m(X).$$

**Definición 1.3.7.** Un **pseudo polinomio** (resp. **polinomio de Weierstrass**) en  $X_n$  es una serie de potencia de la forma:

$$p(X_1, \dots, X_n) = X_n^m + c_1(X)X_n^{m-1} + \cdots + c_m(X) \in R'[X_n],$$

tal que  $m \geq 1$  y  $\text{mult}(c_i) \geq 1$  (resp.  $\text{mult}(c_i) \geq i$ ), para  $i = 1, \dots, m$ .

Nos referiremos como **polinomios distinguidos** a cualquiera de estos dos polinomios.

## 1.4. Series de Potencias Fraccionarias

En toda esta sección consideraremos a  $k$  como un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero. Seguiremos la siguiente notación

- Sea  $R = k[[X_1, \dots, X_n]]$ ,  $L = k((X_1, \dots, X_n))$  el cuerpo de fracciones de  $R$ , y  $\bar{L}$  a la clausura algebraica de  $L$ .
- $X_i^{1/d} \in \bar{L}$ , denota a un cero del polinomio  $Z^d - X_i \in L[Z]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; escogido de tal forma que

$$\left(X_i^{1/de}\right)^e = X_i^{1/d}, \text{ para todo } d, e \in \mathbb{N}.$$

- $X^{r/d} = X_1^{\rho_1/d} \cdots X_n^{\rho_n/d} \in \bar{L}$ , para todo  $d \in \mathbb{N}$ ,  $r = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , denota un monomio fraccionario.

**Proposición 1.4.1.** Sea  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$L[[X_1^{1/d_1}, \dots, X_n^{1/d_n}] : L] = d_1 \cdots d_n.$$

*Demostración.* Vea [8].  $\square$

Dado  $d \in \mathbb{N}$ , definimos

$$R_d = k[[X_1^{1/d}, \dots, X_n^{1/d}]] \subset \bar{L} \quad \text{y} \quad L_d = k((X_1^{1/d}, \dots, X_n^{1/d})).$$

El anillo  $R_d$  de series de potencias formales en las indeterminadas  $X_1^{1/d}, \dots, X_n^{1/d}$  es llamado **anillo de series de potencias fraccionarias en  $n$  indeterminadas con denominador  $d$**  y  $L_d$  es su cuerpo de fracciones. Se prueba que

$$R_d = R[X_1^{1/d}, \dots, X_n^{1/d}] \quad \text{y} \quad L_d = L[X_1^{1/d}, \dots, X_n^{1/d}].$$

Veamos estos hechos y su demostración para el caso  $n = 2$ .

**Proposición 1.4.2.** Sean  $k[[X, Y]]$  ( $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ ) el anillo de series de potencias formales en las variables  $X, Y$  (el anillo de series de potencias formales en las variables  $X^{1/n}, Y^{1/n}$ ) se tienen los siguientes isomorfismos

1.

$$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}].$$

2.

$$k((X^{1/n}, Y^{1/n})) = k((X, Y))[X^{1/n}, Y^{1/n}].$$

*Demostración.* Basta mostrar el ítem 1; es decir, basta probar que

$$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}],$$

pues el segundo resultado se sigue de inmediato pasando al cuerpo de fracciones. Para probar lo deseado observemos lo siguiente

1. El anillo  $k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}]$  es una extensión del anillo  $k[[X, Y]]$ , más precisamente, es el anillo más pequeño que contiene a  $k[[X, Y]]$ ,  $X^{1/n}$ , y  $Y^{1/n}$ .
2. Un elemento típico del anillo  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$  es de la forma

$$\zeta = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (X^{1/n})^i (Y^{1/n})^j, \quad \text{con} \quad a_{ij} \in k; \quad i, j \in \mathbb{Z}_0^+.$$

3. Un elemento típico del anillo

$$k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}] = \{h(X^{1/n}, Y^{1/n}) : h(X, Y) \in k[[X, Y]][X, Y]\}$$

es de la forma

$$\xi = h(X^{1/n}, Y^{1/n}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} (X^{1/n})^i (Y^{1/n})^j,$$

con  $b_{ij} \in k[[X, Y]]$ ;  $i, j \in \mathbb{Z}_0^+$ .

Ahora, veamos que todo elemento de  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ , se puede ver como un elemento de  $k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}]$ : sea  $\zeta = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j \in k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ , entonces  $\zeta$  se puede reescribir de la siguiente forma

$$\zeta = \sum_{i,j=\bar{0}} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j + \sum_{i,j \neq \bar{0}} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j, \quad \text{donde } \bar{0} = 0 \bmod n.$$

Denotemos por

$$\zeta^* = \sum_{i,j=\bar{0}} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j,$$

$$\zeta^{**} = \sum_{i,j \neq \bar{0}} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j.$$

Notemos que  $\zeta^* \in k[[X, Y]]$ . Por otro lado, en  $\zeta^{**}$  los valores que pueden tomar  $i$  y  $j$  son:

$$i = \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1},$$

$$j = \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1},$$

el único caso que no puede ocurrir al mismo tiempo es  $i = \bar{0}$  y  $j = \bar{0}$ ; de esto se concluye que tenemos  $n^2 - 1$  formas posibles de escoger al par  $i$  y  $j$  en  $\zeta^{**}$ ; y por lo tanto, podemos descomponer a  $\zeta^{**}$  en  $n^2 - 1$  sumandos de la siguiente forma:

$$\zeta^{**} = \sum_{i=\bar{0},j=\bar{1}} + \sum_{i=\bar{0},j=\bar{2}} + \dots + \sum_{i=\bar{1},j=\bar{0}} + \sum_{i=\bar{1},j=\bar{1}} + \dots + \sum_{i=\overline{n-1},j=\bar{0}} + \sum_{i=\overline{n-1},j=\bar{1}}$$

$$+ \dots + \sum_{i=\overline{n-1},j=\overline{n-1}},$$

donde cada sumatoria es de la forma

$$\sum_{i=\bar{i},j=\bar{j}} a_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j.$$

Realizando cálculos  $\bmod n$  se tiene

$$\zeta^{**} = \left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) Y^{1/n} + \left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) Y^{2/n} + \dots +$$

$$\left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) X^{1/n} + \left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) X^{1/n} Y^{1/n} + \dots +$$

$$\left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) X^{n-1/n} + \left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) X^{n-1/n} Y^{1/n}$$

$$+ \dots + \left( \sum_{k=0,l=0} a_{kl} X^k Y^l \right) X^{n-1/n} Y^{n-1/n}.$$

Esto muestra que  $\zeta^{**}$  es un elemento de  $k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}]$  y como  $\zeta = \zeta^* + \zeta^{**}$  (note que  $\zeta^* \in k[[X, Y]]$ ), se concluye que

$$\zeta \in k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}].$$

Así, todo elemento de  $\zeta \in \phi_n$  se puede escribir de la forma:

$$\zeta = H(X, Y)(X^{1/n}, Y^{1/n}) = H(X^{1/n}, Y^{1/n}), \quad \text{con } H(X, Y) \in k[[X, Y]].$$

□

Además,  $L_d$  es el cuerpo de descomposición sobre  $L$  del polinomio  $(Z^n - X_1) \dots (Z^n - X_n) \in L[Z]$ . Por lo tanto,  $L_d$  es una extensión de Galois de  $L$  y por la Proposición 1.4.1, tenemos que

$$[L_d : L] = d^n.$$

El conjunto de monomios

$$\{X^{r/d} \mid r = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{N}_0^n \text{ y } 0 \leq \rho_i < d, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\},$$

es una base del  $R$ -módulo  $R_d$  y una  $L$ -base de la extensión  $L_d$  de  $L$ .

**Proposición 1.4.3.** *La extensión  $L_d$  del cuerpo  $L$  ( $L_d/L$ ), es una extensión de Galois y su grupo de Galois  $G(L_d/L)$  es isomorfa a  $\frac{\mathbb{Z}^n}{d\mathbb{Z}^n}$ .*

*Demostración.* Vea [8].

□

**Teorema 1.4.4.** *Cualquier cuerpo intermedio  $I$ ,  $L \subset I \subset L_d$ , es generado sobre  $L$  por un número finito de monomios; es decir, existen  $r_1, \dots, r_h \in \mathbb{N}_0^n$  tal que  $I = L[X^{r_1/d}, \dots, X^{r_h/d}]$ .*

*Demostración.* Vea [8].

□

**Proposición 1.4.5.** *La correspondencia entre cuerpos intermedios  $L \subset I \subset L_d$  y  $\mathbb{Z}$ -submódulos de  $\mathbb{Z}^n$  conteniendo  $d\mathbb{Z}^n$  es una aplicación biyectiva que preserva la inclusión.*

*Demostración.* Vea [8].

□

**Teorema 1.4.6.** *[Teorema de Jung-Abhyankar] Sea  $f \in k[[X_1, \dots, X_n]][Z]$  irreducible y sea  $Q$  el cuerpo de descomposición de  $f$  sobre  $L$  en  $\bar{L}$ . Si  $D_Z(f) = X_1^{\mu_1} \dots X_h^{\mu_h} U$ , donde  $h \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_h \in \mathbb{N}$  y  $U \in k[[X_1, \dots, X_n]]$  es una unidad, entonces existen enteros naturales  $e_1, \dots, e_h$  tal que  $Q$  está contenido en  $L[X_1^{1/e_1}, \dots, X_h^{1/e_h}]$ ; en particular, todo cero de  $f$  en  $\bar{L}$  cae en el anillo de series de potencias  $k[X_1^{1/e_1}, \dots, X_h^{1/e_h}, X_{h+1}, \dots, X_n]$ , y tenemos  $L(\zeta) = Q$  donde  $\zeta$  es un cero de  $f$ .*

*Demostración.* Vea [8]. □

A continuación, definimos el anillo de series de potencias fraccionarias en dos variables de orden menor o igual a  $n$ , pues toda superficie casi-ordinaria puede ser parametrizada por elementos de este anillo, gracias al Teorema 1.4.6.

Dado  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $\Gamma_n = \{\alpha \in \mathbb{Q}_0^+ / n.\alpha \in \mathbb{Z}_0^+\}$ .

$$\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta; \quad c_{\alpha\beta} \in k,$$

es llamada una **serie de potencias fraccionarias en  $X$  y  $Y$  de orden menor o igual a  $n$** . El conjunto formado por este tipo de elementos será denotado por  $\phi_n$ .

Sean  $\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$ ,  $\lambda = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} d_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$  en  $\phi_n$ ; la suma y el producto se definen respectivamente por:

$$\zeta + \lambda = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} (c_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta}) X^\alpha Y^\beta$$

y

$$\zeta \cdot \lambda = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} \sum_{\substack{\alpha' + \alpha'' = \alpha \\ \beta' + \beta'' = \beta}} (c_{\alpha'\beta'} \cdot d_{\alpha''\beta''}) X^\alpha Y^\beta.$$

Con estas operaciones,  $\phi_n$  es un anillo y como  $\phi_n \subset \Phi$ , donde  $\Phi$  denota al anillo de series de potencias fraccionarias en dos variables, se tiene que  $\phi_n$  es también un subanillo de  $\Phi$ .

De la definición de  $\phi_n$ , note que los elementos de  $\phi_1$  son de la forma

$$\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \times \Gamma_1} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad \text{donde } \Gamma_1 = \{\alpha \in \mathbb{Q}_0^+ / 1.\alpha = \alpha \in \mathbb{Z}_0^+\} = \mathbb{Z}_0^+.$$

Así,  $\phi_1$  es isomorfo a  $k[[X, Y]]$ ; es decir, algebraicamente definen la misma estructura y podemos escribir  $\phi_1 = k[[X, Y]]$ . En general, se tiene

**Proposición 1.4.7.**

$$\phi_n = k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]].$$

*Demostración.* Observemos que un elemento típico de  $\phi_n$  es de la forma

$$\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad \text{con } c_{\alpha\beta} \in k; \quad \alpha = \frac{i}{n}, \beta = \frac{j}{n}; \quad i, j \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Mientras que un elemento típico de  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$  es de la forma

$$\xi = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{ij}(X^{1/n})^i(Y^{1/n})^j, \quad \text{con } d_{ij} \in k; \quad i, j \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ahora veamos que todo elemento de  $\phi_n$  se puede ver como un elemento de  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$ : sea  $\zeta = \sum_{(\alpha,\beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \in \phi_n$ , entonces  $\zeta$  se puede

reescribir como  $\zeta = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} X^{i/n} Y^{j/n}$  con  $c_{ij} \in k; \quad i, j \in \mathbb{Z}_0^+$ , de donde

$$\zeta = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} (X^{1/n})^i (Y^{1/n})^j, \quad \text{luego } \zeta \in k[[X^{1/n} Y^{1/n}]]. \quad \square$$

Además, desde que  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}]$  (vea Proposición 1.4.2), se tiene que

$$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = \phi_n = k[[X, Y]][X^{1/n}, Y^{1/n}].$$

En consecuencia, cualquier elemento de  $\phi_n$  puede ser escrito de la forma  $\zeta = H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ , donde  $H = H(X, Y)$  es una serie de potencias en 2 variables de exponentes enteros. El conjunto de conjugadas de  $\zeta$  sobre  $k[[X, Y]]$  es entonces el conjunto  $\{H(w_1 X^{1/n}, w_2 Y^{1/n})\}$ , donde  $w_1, w_2$  son raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

**Definición 1.4.8.**  $\zeta \in \phi_n$  es una unidad ( $\zeta \in \phi_n^*$ ) si y solo si  $H(0, 0) \neq 0$ .

## 1.5. Resultante y Discriminante

**Definición 1.5.1.** Sean  $A$  un anillo y  $f, g \in A[Y]$  tales que

$$\begin{aligned} f &= a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n, \\ g &= b_0 Y^m + b_1 Y^{m-1} + \cdots + b_m. \end{aligned}$$

La  $Y$ -**resultante** de  $f$  y  $g$ , denotada por  $R_Y(f, g)$ , está dada por

$$R_Y(f, g) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_0 & \cdot & a_n & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_0 & \cdot & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & b_m & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_m & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_m \end{bmatrix}$$

Es decir, es la determinante de una matriz de orden  $m + n$ , donde las  $m$  primeras filas contienen los coeficientes de  $f$  y las  $n$  siguientes filas contienen los coeficientes de  $g$ .

Si  $n = m = 0$ , por convención, se tiene que  $R_Y(f, g) = 1$ . Si  $n = 0$  y  $m \geq 1$ , entonces la matriz asociada a  $R_Y(f, g)$  es una matriz cuadrada de orden  $m \times m$  diagonal con todos sus elementos diagonales iguales a  $a_0$  y por lo tanto,  $R_Y(f, g) = a_0^m$ ; similarmente si  $m = 0$  y  $n \geq 1$ , entonces la matriz asociada a  $R_Y(f, g)$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$  diagonal con todos sus elementos diagonales iguales a  $b_0$  de donde  $R_Y(f, g) = b_0^n$ .

Uno de los resultados importantes de la resultante y la discriminante, que usaremos en este trabajo de tesis, es que bajo la suposición de que el anillo  $A$  es un dominio de factorización única (DFU), la resultante nos dice cuando 2 polinomios  $f, g \in A[Y]$  tienen un divisor común no constante, como se precisa en la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.2.** *Sea  $A$  un DFU,*

$$\begin{aligned} f &= a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \cdots + a_n, \\ g &= b_0 Y^m + b_1 Y^{m-1} + \cdots + b_m, \end{aligned}$$

con  $f, g \in A[Y]$  y  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ .

$f$  y  $g$  tienen un factor común no constante si y solo si  $R_Y(f, g) = 0$ .

*Demostración.* Vea [2]. □

La siguiente proposición da otra descripción de la resultante cuando  $f$  y  $g$  se descomponen en factores lineales.

**Proposición 1.5.3.** *Sean  $f, g \in A[Y]$  tal que*

$$\begin{aligned} f &= a_0 \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i), \\ g &= b_0 \prod_{j=1}^m (Y - \beta_j), \end{aligned}$$

entonces

$$1. R_Y(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j),$$

$$2. R_Y(f, g) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i),$$

$$3. R_Y(f, g) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j).$$

*Demostración.* Vea [16]. □

Desde el punto de vista geométrico, la resultante es *la proyección de intersección*; es decir, dados

$$\begin{aligned} f &= a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X][Y], \\ g &= b_0Y^m + b_1Y^{m-1} + \cdots + b_m \in A[X][Y]; \end{aligned}$$

(note que  $a_i = a_i(X)$  y  $b_j = b_j(X)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ) entonces la  $Y$ -resultante  $R_Y(f, g)$  es un polinomio en  $X$  y los valores  $\alpha$  de  $X$  donde  $R_Y(f, g)(\alpha) = 0$  corresponden a los puntos comunes  $(\alpha, \beta)$  de las curvas  $f$  y  $g$ , cuya  $X$  coordenada es  $\alpha$  (vea figura 1). En general, los coeficientes  $a_i$  y

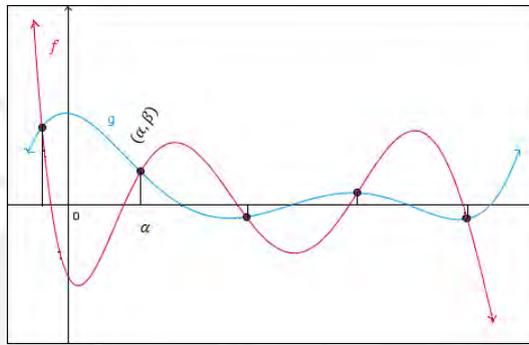


Figura 1: Interpretación geométrica de la resultante

$b_j$  podrían ser funciones de 2 o más variables; es decir,  $f$  y  $g$  podrían definir superficies o también hipersuperficies en  $\mathbb{A}_k^n$  con  $n \geq 3$ , y la resultante en estos casos también darán la proyección del lugar de intersección de  $f$  y  $g$ .

**Definición 1.5.4.** Sean  $A$  un anillo y  $f \in A[Y]$ . La  $Y$ -resultante de  $f$  y  $f'$  es llamado la  $Y$ -**discriminante** de  $f$  y es denotado por  $D_Y(f)$ .

**Ejemplo 1.5.5.** Sea  $f = X^3 + bX + a \in \mathbb{R}[X]$ , tenemos que  $f' = 3X^2 + b$  y la  $X$ -resultante de  $f$  viene dada por

$$D_Y(f) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & a \\ 3 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & b \end{bmatrix} = 4b^3 + 27a^2$$

Dado que  $f$  y  $f'$  tienen un factor común propio si y solo si  $f$  tiene factor múltiple, del Corolario 1.5.2, tenemos

**Corolario 1.5.6.** Sea  $f = a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_n \in A[Y]$ .  $f$  tiene múltiples factores si y solo si  $D_Y(f) = 0$ .

## 1.6. Una Introducción a la Teoría de Esquemas

Al igual que las variedades topológicas y diferenciales, las cuales son hechos pegando bolas abiertas del espacio euclidiano, los esquemas son hechos pegando conjuntos abiertos llamados esquemas afines.

Un *esquema afín* es un objeto (geométrico) hecho de un anillo conmutativo (con unidad), la relación entre el esquema afín y el anillo del cual es hecho generaliza la relación que hay entre un conjunto algebraico y su anillo de coordenadas. Más generalmente, recordemos que la correspondencia básica en la geometría algebraica clásica esta dada por la biyección

$$\{\text{conjuntos algebraicos afines}\} \leftrightarrow \{\text{anillos afines}\}.$$

Es decir, si estamos interesados en estudiar los conjuntos algebraicos afines, en el mundo algebraico, esto será equivalente al estudio anillos afines (anillos finitamente generados y reducidos). La noción de esquemas surgió cuando se preguntó que pasaría si ampliamos el conjunto de anillos afines al conjunto de los anillos arbitrarios (conmutativos con unidad); es decir, no aceptamos las restricciones: finitamente generado, reducido,  $k$ -álgebra. ¿Cuáles serían los objetos geométricos asociados a estos anillos arbitrarios?. La respuesta es: los esquemas afines. En otras palabras, la equivalencia anterior se puede ampliar a la equivalencia

$$\{\text{esquemas afines}\} \leftrightarrow \{\text{anillos conmutativos con unidad}\}.$$

La idea de su construcción es la siguiente: dado un anillo  $A$  (conmutativo y con unidad), recordando que hay una relación uno a uno entre los puntos de un conjunto algebraico y los ideales maximales de su anillo de coordenadas, lo más natural sería pensar que el objeto geométrico asociado a este anillo sea el conjunto de los ideales maximales de  $A$  denotado por  $m - \text{Spec}(A)$ . Al realizar esta asociación debemos garantizar que las propiedades que existen entre los conjuntos algebraicos y sus anillos de coordenadas se preserven, una de las más importantes es la siguiente: sean  $X, Y$  conjuntos algebraicos y  $A(X), A(Y)$  sus anillos de coordenadas. Se cumple que cada homomorfismo de anillos  $\varphi : A(X) \rightarrow A(Y)$  induce una aplicación regular  $\bar{\varphi} : Y \rightarrow X$  de conjuntos algebraicos. Un intento de generalizar esta propiedad sería del siguiente modo: consideremos los anillos  $A, B$  y el homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$  entre ellos, la aplicación inducida a partir de este homomorfismo sería la aplicación  $\bar{\varphi} : m - \text{Spec}(B) \rightarrow m - \text{Spec}(A)$  tal que a cada  $b \in m - \text{Spec}(B)$  se le hace corresponder  $a = \varphi^{-1}(b)$ , sin embargo nada nos asegura que  $a$  sea un elemento de  $m - \text{Spec}(A)$ , pues la pre imagen de un ideal maximal no necesariamente es maximal, por ejemplo si  $A$  es un dominio de integridad que no es un cuerpo y consideremos la inclusión  $A \rightarrow k$  de  $A$  en un cuerpo, entonces el ideal  $\langle 0 \rangle$  es maximal en  $k$  cuya pre imagen es el ideal  $\langle 0 \rangle$  en  $A$  que no es maximal. Este problema se soluciona asociando al anillo  $A$  el

objeto geométrico  $Spec(A)$ , conjunto de los ideales primos de  $A$ , en lugar del  $m - Spec(A)$ .

El esquema afín como todo esquema consta de un conjunto, una topología (la topología de Zariski) y de un haz llamado haz de funciones regulares o haz estructural.

Dado un anillo  $R$ , el esquema afín definido de  $R$  será denotado  $Spec(R)$  y llamado el **espectro** de  $R$ . El esquema afín  $Spec(R)$ , como conjunto, tiene por elementos a los ideales primos de  $R$ .

Si  $R$  es el anillo de coordenadas de una variedad afín  $V$ , entonces  $Spec(R)$  tiene puntos (los ideales maximales de  $R$ ) correspondientes a los puntos de  $V$  y puntos (ideales primos de  $R$  que no son maximales) correspondientes a cada subvariedad irreducible de  $V$ .

El anillo  $R$  se puede ver como el conjunto de funciones regulares de  $Spec(R)$  hacia un cuerpo; es decir, cada elemento  $f$  de  $R$  define una función

$$\begin{aligned} f : Spec(R) &\longrightarrow K(P) = \text{Frac}\left(\frac{R}{P}\right) \\ P &\longmapsto f(P) \end{aligned}$$

donde  $f(P)$  es la imagen de  $f$  bajo las aplicaciones canónicas

$$R \longrightarrow \frac{R}{P} \longrightarrow K(P).$$

En general, estas “funciones” se caracterizan por que toman valores en diferentes cuerpos según varía  $P$ . Por ejemplo, cuando  $R = \mathbb{Z}$  podemos ver a cada entero como una función sobre  $Spec(\mathbb{Z})$  cuyo valor en  $\langle p \rangle$  ( $p$  es un entero primo) esta en  $\frac{\mathbb{Z}}{\langle p \rangle}$  y en  $\langle 0 \rangle$  esta en  $\mathbb{Q}$ . Así, una función **regular** sobre  $Spec(R)$  es simplemente un elemento de  $R$ .

Usando a estas funciones regulares se define una topología sobre  $Spec(R)$  de la siguiente manera: sea  $S \subset R$  un subconjunto de  $R$ , definimos

$$\mathcal{Z}(S) = \{P \in Spec(R) \mid f(P) = 0; f \in S\} = \{P \in Spec(R) \mid S \subset P\}$$

(Observe que  $S \subset P$  significa que todo  $f \in S$  cae a 0 en la aplicación  $R \longrightarrow \frac{R}{P}$ ). El impulso tras esta definición es hacer que  $f$  se comporte lo más parecido a una función continua, pero desde que esta “función” varía según varía  $P$ , la noción de continuidad no tiene sentido. Estos conjuntos satisfacen las propiedades de los conjuntos cerrados de un espacio topológico. Así, se define una topología sobre  $Spec(R)$  tomando como los cerrados de esta topología a los conjuntos  $\mathcal{Z}(S)$  esta topología es llamada la topología de Zariski.

De forma análoga a lo que sucede entre los conjuntos algebraicos y sus anillos de coordenadas, hay una propiedad que relaciona a los anillos con sus

respectivos esquemas afines definidas a partir de ellos; más claramente, dado un homomorfismo de anillos  $\varphi : A \rightarrow B$ , induce una aplicación entre  $\text{Spec}(B)$  y  $\text{Spec}(A)$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{(a)} : \text{Spec}(B) & \rightarrow & \text{Spec}(A) \\ p & \rightarrow & \varphi^{-1}(p) \end{array}$$

llamada la aplicación **asociada** a  $\varphi$ .

**Ejemplo 1.6.1.** Consideremos el homomorfismo de anillos  $\varphi : R \rightarrow \frac{R}{I}$ , donde  $I$  es un ideal de  $R$ , y  $\varphi^{(a)} : \text{Spec}(\frac{R}{I}) \rightarrow \text{Spec}(R)$  la aplicación asociada a  $\varphi$ , se prueba que  $\varphi^{(a)}(\text{Spec}(\frac{R}{I})) = \mathcal{Z}(I)$  y que hay un homeomorfismo entre  $\text{Spec}(\frac{R}{I})$  y  $\mathcal{Z}(I)$ .

En particular, este ejemplo nos dice que todo conjunto cerrado de  $\text{Spec}(R)$  es homeomorfo al espectro de un anillo; es decir, desde el punto de vista topológico definen la misma estructura.

Notemos que es igual trabajar con  $S \subset R$  o con el ideal generado por él, pues si  $I = \langle S \rangle$  es el ideal generado por  $S$ , se tiene que  $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(S)$ . Además, se demuestra que  $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(\sqrt{I})$ .

Sea  $P \in \text{Spec}(R)$  la clausura de  $P$  es  $\mathcal{Z}(P)$  que es homeomorfo a  $\text{Spec}(\frac{R}{P})$ . Así, el punto  $P$  es cerrado si y solo si es maximal. En el caso de que  $R$  sea el anillo afín de una variedad algebraica  $V$  definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, los puntos de  $X$  corresponden a los puntos cerrados de  $\text{Spec}(R)$  y los puntos cerrados en la clausura de un punto  $P$  corresponden a los puntos de  $X$  en la subvariedad definida por  $P$ .

Los conjuntos abiertos en la topología de Zariski son simplemente los complementos de los conjuntos  $\mathcal{Z}(S)$ , pero los abiertos de mayor interés y por ello tienen una notación y un nombre especial son los complementos de  $\mathcal{Z}(S)$ , donde  $S$  consta de un solo elemento ( $S = \{f \mid f \in R\}$ ); es decir  $\text{Spec}(R) \setminus \mathcal{Z}(f)$ ; estos abiertos son denotados por  $D(f) = \text{Spec}(R) \setminus \mathcal{Z}(f)$  o por  $X_f$ . Observe que  $D(f)$  consta de los ideales primos de  $R$  que no contienen a  $f$  y son llamados abiertos **básicos** o **principales**.

Consideremos el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : R & \rightarrow & R_S \\ f & \rightarrow & \frac{f}{1} \end{array}$$

y sea

$$\varphi^{(a)} : \text{Spec}(R_S) \rightarrow \text{Spec}(R)$$

la aplicación asociada a  $\varphi$ . Se prueba que  $\varphi^{(a)}(\text{Spec}(R_S)) = U_S$ , donde  $U_S$  es el conjunto de ideales primos que no intersectan a  $S$  y también que hay un homeomorfismo entre  $\text{Spec}(R_S)$  y  $U_S$ .

En particular, si  $S = \{f \mid f \in R\}$  (con  $f$  no nilpotente) tenemos que  $U_S = D(f)$  y se tiene un homomorfismo entre  $\text{Spec}(R_f)$  y  $D(f)$  y por lo tanto podemos identificarlos. De este modo, los ideales primos que no contiene a  $f$  están en correspondencia uno a uno con los ideales primos de  $R_f$ . Así, los conjuntos abiertos básicos son otra vez espectro de un anillo.

Los abiertos básicos forman una base para los abiertos en la topología de Zariski (pues, todo cerrado es de la forma  $\mathcal{Z}(S) = \bigcap_{f \in S} \mathcal{Z}(f)$ ), luego

$$U = \text{Spec}(R) \setminus \mathcal{Z}(S) = \text{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f \in S} \mathcal{Z}(f) = \bigcup_{f \in S} (\text{Spec}(R))_f.$$

Así, todo abierto es unión de abiertos distinguidos.

El espacio topológico  $\text{Spec}(R)$  casi nunca es Hausdorff, pues los abiertos son simplemente muy grandes y como consecuencia de ello  $\text{Spec}(A)$  tiene puntos que no son cerrados y por tanto hay jerarquía entre sus puntos.

Sea  $R$  un anillo y supongamos que si  $\text{nil}(R)$  fuera primo, entonces  $\text{nil}(R)$  sería un punto de  $\text{Spec}(R)$ , el cual está contenido en todos los ideales primos y por tanto su clausura sería todo el espacio topológico  $\text{Spec}(R)$ , los puntos de  $\text{Spec}(R)$  con esta propiedad son llamados **puntos genéricos**. Un punto genérico cuando existe es único y es definido por el nilradical.

**Ejemplo 1.6.2.** *Sea  $R$  un anillo. Si  $R$  no tiene divisores de cero, entonces el ideal  $\langle 0 \rangle \subset R$  es un ideal primo y define un punto en  $\text{Spec}(R)$ . Además, sabemos que el ideal  $\langle 0 \rangle$  está contenido en todo ideal, en particular en todos los ideales primos de  $R$ , entonces su clausura es todo  $\text{Spec}(R)$ . Así  $\langle 0 \rangle$  es denso en todas partes, esto es  $\langle 0 \rangle$  es un punto genérico.*

**Lema 1.6.3.**  *$\text{Spec}(R)$  tiene un punto genérico si y solo si  $\text{nil}(R)$  es primo.*

La noción de punto genérico nos sirve para determinar la reducibilidad o irreducibilidad de un espacio topológico. Para el caso particular del espacio topológico  $\text{Spec}(R)$ , se tiene que  $\text{Spec}(R)$  es irreducible si y solo si  $\text{Spec}(R)$  tiene un punto genérico; y usando el Lema 1.6.3 tenemos

**Lema 1.6.4.**  *$\text{Spec}(R)$  es irreducible si y solo si  $\text{nil}(R)$  es primo.*

Este resultado también se cumple para todo cerrado de  $\text{Spec}(R)$  por ser homeomorfo al espectro de un anillo.

El espacio Topológico  $\text{Spec}(R)$  viene equipada con un haz de anillos  $\mathcal{O}$  tal que  $\mathcal{O}_P$  (el tallo del haz en  $P$ ) es isomorfo a  $R_P$  (la localización de  $R$  con respecto al conjunto multiplicativo  $R - P$ ) y  $\mathcal{O}(D(f))$  (el anillo de secciones de  $\mathcal{O}$  sobre el subconjunto abierto  $D(f)$ ) es isomorfo a  $R_f$  (la localización del anillo  $R$  con respecto al conjunto multiplicativo  $\{1, f, \dots, f^n, \dots\}$ ). Intuitivamente  $\mathcal{O}_P$  corresponde a germen de funciones definidas al rededor de  $P$

y  $O(D(f))$  a funciones definidas en el subconjunto abierto  $f \neq 0$ , para mas detalles vea por ejemplo [15] o [5].

$R_P$  es llamado el **anillo local** de  $\text{Spec}(R)$  en  $P$ . La noción de anillo local de un esquema en un punto es fundamental en toda la teoría de esquemas, se le utiliza para definir ciertas nociones geométricas, por ejemplo:

1. Sea  $X = \text{Spec}(R)$  un esquema afín, la dimensión  $\dim(X)$  de  $X$  en un punto  $P = x \in X$  es la dimensión de Krull de  $R_P$ .
2. Si  $X = \text{Spec}(R)$  es noetheriano,  $X$  es no singular si y solo si el anillo local  $R_P$  es un anillo local regular.

**Ejemplos 1.6.5** (Ejemplos de esquemas afines).

- $\text{Spec}(\{0\}) = \emptyset$ .
- $\text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{A}_k^n$ .

Un morfismo de esquemas es un morfismo de sus espacios anillados. Observe que si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas, entonces para cada  $y \in Y$  con imagen  $x = f(y)$ , hay un homomorfismo inducido  $O_{X,x} \rightarrow O_{Y,y}$ , por lo tanto un homomorfismo entre los cuerpos residuales  $k(x) \rightarrow k(y)$ . En particular si  $X$  es una variedad afín o una  $k$ -variedad proyectiva cada cuerpo residual es una extensión de  $k$ .

**Definición 1.6.6.** Sea  $S$  un esquema (fijo). Un  $S$ -esquema  $X$ , es un esquema equipada con un morfismo  $X \rightarrow S$ . El morfismo  $X \rightarrow S$  es a veces llamado **morfismo estructura**.

Los esquemas de la forma  $\text{Spec}(R)$ , donde  $R$  es el anillo de coordenadas de una variedad; es decir,  $R$  es un anillo finitamente generado y reducido también conocido como anillo afín. En este caso,  $\text{Spec}(R)$  es llamado el **esquema asociado a la variedad**  $X$ , algunas veces estos son simplemente llamados **variedades**.

Finalizamos esta sección, dando una idea de la geometría de  $\text{Spec}(R)$ . Dado un subconjunto  $X \subset \text{Spec}(R)$  definimos el ideal  $I(X) = \bigcap_{P \in X} P$ . Si  $X = \mathcal{Z}(I)$ , entonces  $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in X} P$ , luego  $X$  puede ser escrita de forma única como  $\mathcal{Z}(I)$  con  $I$  un ideal radical, así tenemos la siguiente correspondencia

$$\{\text{Ideales radicales de } R\} \longleftrightarrow \{\text{conjuntos cerrados de } \text{Spec}(R)\}.$$

Se prueba que  $X = \mathcal{Z}(I)$  es irreducible si y solo si  $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in X} P$  es primo.

## 2. Singularidad Casi Ordinaria

En este capítulo presentamos y definimos a las superficies (algebroides) casi ordinarias y describimos su parametrización por ramas casi ordinarias. Asimismo, definimos el cono tangente y lugar singular de un anillo casi ordinario y describiendo su relación con los pares distinguidos de una rama casi ordinaria normalizada que representa a este anillo.

### 2.1. Superficies Algebroides

En esta sección vamos a introducir la noción de superficies algebroides que son hipersuperficies algebroides de dimensión 2, para ver la definición de hipersuperficies algebroides de dimensión  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) vea [11] o [18].

En todo lo que sigue de esta sección consideraremos  $k \subset A$ , el cuerpo de coeficientes de  $A$ , fijo donde  $k$  algebraicamente cerrado y de característica cero.

**Definición 2.1.1.** *El esquema  $S = \text{Spec}(A)$  es llamado **esquema algebroides**, cuando  $A$  es un anillo noetheriano, local, completo y equicaracterístico. Si  $k \subset A$  es el cuerpo de coeficientes de  $A$ , decimos que  $S$  está definido sobre  $k$  o que es un  $k$ -esquema. El ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  visto como un punto de  $S$  es llamado el **origen de  $S$**  y es denotado por  $O$ .*

Por el Teorema de Estructura de Cohen (Teorema 3.4.25),  $A$  es la imagen homomorfa de un anillo de series de potencias formales sobre  $k$ , entonces existen  $n \in \mathbb{Z}^+$  e  $I$  ideal de  $k[[X_1, \dots, X_n]]$  tales que

$$A \simeq \frac{k[[X_1, \dots, X_n]]}{I},$$

y por lo tanto,  $S$  es de la forma

$$S = \text{Spec} \left( \frac{k[[X_1, \dots, X_n]]}{I} \right).$$

La dimensión de  $S$  es definido como la dimensión de Krull del anillo local  $A$  (el máximo de las dimensiones de sus ideales primos de  $I$ ; es decir, los ideales primos de  $A$  que contienen a  $I$ ). Si todos los ideales primos de  $I$  tienen la misma dimensión, digamos  $n$ , entonces decimos que  $S$  es **equidimensional**, de dimensión  $n$ .

**Definición 2.1.2.** Un esquema algebroide  $S = \text{Spec}(A)$  que es reducido (es decir, cuando  $A$  es reducido) es llamada una **variedad algebroide** y la denotamos por  $V = \text{Spec}(A)$ .

**Definición 2.1.3.** Un esquema algebroide  $S = \text{Spec}(A)$  de dimensión 2 es **embebida** si el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , tiene una base de 3 elementos. Una **superficie algebroide** es una **variedad algebroide embebida equidimensional**  $V = \text{Spec}(A)$ . El anillo  $A$  es llamado el **anillo local de la superficie**  $V$ .

**Definición 2.1.4.** Sea  $V = \text{spec}(A)$  una superficie algebroide. Cualquier base minimal  $\{x, y, z\}$  del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  se le llama un **sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$** .

**Observación 2.1.5.** Cuando  $A$  no es un anillo regular, si el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  tiene una base de 3 elementos, entonces tal base es minimal ( $\mathfrak{m}$  no tiene ninguna base con menos de 3 elementos).

Sea  $V$  una superficie algebroide y sean  $\{x, y, z\}$  un sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$ . Por el Teorema de la Estructura de Cohen (Teorema 3.4.25), existe un homomorfismo sobreyectivo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[[X, Y, Z]] & \longrightarrow & A \\ X & \longmapsto & x \\ Y & \longmapsto & y \\ Z & \longmapsto & z \end{array}$$

cuyo núcleo,  $\ker(\varphi)$ , sabemos que es un ideal de  $k[[X, Y, Z]]$ ; desde que  $V$  es equidimensional y como  $\dim(V) = 2$ , se tiene que  $\ker(\varphi)$  es un ideal principal, entonces existe  $f(X, Y, Z) \in k[[X, Y, Z]]$  no unidad, que genera  $\ker(\varphi)$ ; es decir, tal que  $\ker(\varphi) = \langle f \rangle$ , y se dice que la ecuación

$$f(X, Y, Z) = 0, \tag{1}$$

representa un embebimiento de  $V$  en  $\mathbb{A}_k^3$ . La ecuación ( 1) es llamada la **ecuación de  $V$**  respecto al sistema de coordenadas locales  $\{x, y, z\}$  y  $f$  está unívocamente determinada por el sistema de coordenadas locales  $\{x, y, z\}$  salvo multiplicación por unidades en  $k[[X, Y, Z]]$ . La transición a otro sistema de coordenadas  $\{x', y', z'\}$  producirá otro embebimiento de  $V$  obtenido de ( 1) mediante una transformación analítica formal de coordenadas afines biholomorfa en el origen. El homomorfismo sobreyectivo  $\varphi$  induce el el siguiente isomorfismo

$$\frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f \rangle} \simeq A.$$

Observe que  $f$ , de la ecuación ( 1) de  $V$ , no tiene factores múltiples desde que  $A$  es reducido y si  $f = f_1 \dots f_m$  es la descomposición de  $f$  en factores

irreducibles y  $V_i = \text{Spec}\left(\frac{A}{\langle f_i \rangle}\right)$ ,  $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$  es la descomposición de  $V$  en componentes irreducibles.

**Definición 2.1.6.** Sea  $V = \text{Spec}(A)$  es una superficie algebroide. Un conjunto de 2 elementos digamos  $\{x, y\}$  del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$  es llamado un **sistema de parámetros locales de  $V$  en  $O$** , si cumple las siguientes condiciones

1.  $\{x, y\}$  son parámetros del anillo  $A$ ; es decir, si el ideal  $\langle x, y \rangle A$  es un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario (vea Definición 1.1.10).
2. Existe  $z \in \mathfrak{m}$  tal que  $\{x, y, z\}$  es un sistema de coordenadas locales de  $V$ .

Si  $\{x, y, z\}$  es un sistema de coordenadas locales de la superficie algebroide  $V = \text{Spec}(A)$  en  $O$  y  $f(X, Y, Z) = 0$  es la ecuación de  $V$  respecto a dicho sistema de coordenadas, entonces  $\{x, y\}$  es un sistema de parámetros locales de  $V$  si y solo si

$$f(0, 0, 1) \neq 0;$$

es decir, si y solo si  $f$  es regular (de algún orden) en  $Z$ . Más precisamente, si

$$f(0, 0, Z) = cZ^s + \text{términos de orden mayor a } s,$$

con  $0 \neq c \in k$  y  $s \geq \nu =$  multiplicidad de  $f$ .

En este caso,  $s$  es la multiplicidad de intersección de  $V$  con el espacio lineal  $X = Y = 0$  o, en términos de álgebra local,  $s$  es la **multiplicidad del ideal  $\mathfrak{m}$ -primario  $\langle x, y \rangle A$** . Observe que  $s$  también es la **multiplicidad de  $A_p$**  ( $p = \langle x, y \rangle A$ ), vea Definición 2.1.10.

$\nu = \text{deg}(f_I)$ , donde  $f_I$  es la forma inicial de  $f$ , es la **multiplicidad del anillo local  $A$**  o, en terminología geométrica,  $O$  es un punto de multiplicidad  $\nu$  de  $V$ .

Como  $f$  es regular en  $Z$  de orden  $s$ , por el Teorema de Preparación de Weierstrass, existen

$$U \in k[[X, Y, Z]]^*; C_1, \dots, C_s \in k[[X, Y]] \setminus k[[X, Y]]^*$$

tal que

$$f.U = Z^s + C_1 Z^{s-1} + \dots + C_s.$$

De este resultado, tenemos la siguiente observación

**Observación 2.1.7.** Si  $\{x, y\}$  es un sistema de parámetros locales de  $V = \text{Spec}(A)$  en  $O$ , podemos siempre tomar una ecuación de  $V$  respecto a dicho sistema de parámetros tal que sea un polinomio distinguido (vea Definición 1.3.7).

El polinomio  $f' = Z^s + C_1Z^{s-1} + \dots + C_s$  es llamado **polinomio que define o representa a la superficie  $V = \text{Spec}(A)$**  o simplemente **polinomio que define o representa a  $A$** .

**Definición 2.1.8.** Si la multiplicidad del ideal  $\langle x, y \rangle A$  es igual a la multiplicidad de  $A$  ( $s = \nu$ ), el sistema de parámetros se llama **transversal**.

**Observaciones 2.1.9.**

1. Si  $A$  no es regular, entonces  $s > 1$ .
2.  $\text{mult}(f(0, 0, Z))$  no depende de  $Z$ .

**Definición 2.1.10.** Si  $f$  es un polinomio que define a  $A$  ( $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$ ) y sea  $P \in \text{Spec}(R)$  la imagen inversa de  $p \in \text{Spec}(A)$ , entonces  $f \in P$  (vea ítem 2 de la observación 1.1.1). La **multiplicidad de  $A_p$**  es el único entero “ $e$ ” tal que  $f \in P^{(e)}$  mientras  $f \notin P^{(e+1)}$  ( $P^{(e)} = (P^e R_P) \cap R$ , vea Definición 1.1.6), la cual es denotada por  $\text{mult}(A_p)$ .

Observe que desde que  $P^e$  es  $P$  primario (vea Definición 1.1.6) se tiene que  $P^{(e)} = P^e$ , luego por la Proposición 1.1.5 podemos decir que la multiplicidad de  $A_p$  es el único entero  $e$  tal que  $f \in P^e$  mientras  $f \notin P^{e+1}$ .

Se prueba que  $\text{mult}(A_p)$  es 1 si y solo si  $A_p$  es regular y también que  $\text{mult}(A_p) \leq \text{mult}(A)$  (vea [14]).

**Definición 2.1.11.** Sea  $p \in \text{Spec}(A)$ . Decimos que  $p$  tiene **multiplicidad  $e$  en  $A$**  si  $A_p$  tiene multiplicidad  $e$ .

**Definición 2.1.12.** Sea  $p \in \text{Spec}(A)$ . Se dice que  $p$  es una curva plana con un punto de **multiplicidad  $\nu$  en su origen** si  $\frac{A}{p}$  es un anillo local de dimensión 1 y de multiplicidad  $\nu$  cuyo ideal maximal tiene una base de 2 o menos elementos. En Particular,  $p$  es una curva plana con un punto de multiplicidad 1 en su origen si y solo si el ideal maximal de  $\frac{A}{p}$  es principal y en este caso decimos que  $p$  es una curva plana no singular (regular).

Dos curvas planas  $p$  y  $q$  se **interceptan transversalmente** si  $p$  y  $q$  generan el ideal maximal de  $A$ .

**Definición 2.1.13.** Si  $A$  es el anillo local.  $p \in \text{Spec}(A)$  es un **centro permitido** si y solo si

1.  $\frac{A}{p}$  es regular y
2.  $\text{mult}(A_p) = \text{mult}(A)$ .

**Ejemplo 2.1.14.** Considere el anillo local  $A = \frac{R}{\langle f \rangle}$ , donde  $f$  el polinomio casi ordinario del Ejemplo 2.2.4. El ideal  $p = \langle Y, \zeta \rangle \in \text{Spec}(A)$  es un centro permitido de  $A$ , pues  $\frac{A}{p}$  es principal, de donde  $p$  es regular (vea Definición 2.1.12) y además  $\text{mult}(A) = 4 = \text{mult}(p)$ , para más detalles vea Ejemplo 3.3.8.

Sea  $p$  es un ideal de  $A$  regular de codimensión 1 ( $\dim\left(\frac{A}{p}\right) = 1$ ), entonces existe  $\{x, y, z\}$  un sistema de coordenadas de  $V$  en  $O$  tal que  $\{x, y\}$  es un sistema de parámetros transversal y tal que  $p = \langle y, z \rangle A$ ; este sistema de coordenadas es llamado **sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$  adaptada a la subvariedad  $W = \text{Spec}\left(\frac{A}{p}\right)$**  de  $V$ . Si  $f = 0$  es la ecuación que define a  $V$  respecto a este sistema de coordenadas de  $V$  adaptada a  $W$ , entonces  $f \in \langle Y, Z \rangle R$ ; en este caso, se dice que  $p = \langle y, z \rangle A$  es un centro permitido ( $\text{mult}(A_p) = \text{mult}(A) = \nu$ ) si y solo si  $f \in \langle Y, Z \rangle^\nu R$ . Cuando esto ocurre ( $f \in \langle X, Y, Z \rangle^\nu R \rightarrow f \in \langle Y, Z \rangle^\nu R$ ), podemos escribir

$$f = F_\nu + F_{\nu+1} + \cdots,$$

donde  $F_i$  es una forma de grado  $i$  en  $Y$  y  $Z$  con coeficientes en  $k[[X]]$ .

Dada la subvariedad  $W$  de  $V = \text{Spec}(A)$  se le puede hacer corresponder un punto  $p \in \text{Spec}(A)$ , dado por el homeomorfismo entre  $W$  y  $\text{Spec}\left(\frac{A}{p}\right)$  (vea Ejemplo 1.6.1). El punto  $p$  es llamado el **punto general** asociado a la subvariedad  $W$ . Esta correspondencia permite, al tratar con las propiedades de las subvariedades, que uno se refiera indistintamente a estas o a sus ideales. Así, se dice  $W$  es una subvariedad permitida de  $V$  o que  $p$  es un ideal permitido de  $A$ , etc.

Finalizamos esta sección, definiendo la noción de discriminante de  $V$ . Sea  $\{x, y\}$  un sistema de parámetros de  $V$  en  $O$  (o de  $A$ ) y  $z \in \mathfrak{m}$  tal que  $\{x, y, z\}$  es un sistema de coordenadas locales de  $V$  (en este caso sabemos que es regular en  $Z$  y por ello podemos tomar una ecuación de  $V$  en  $k[[X, Y]][[Z]]$ ). Sea  $f \in k[[X, Y]][[Z]]$  una ecuación de  $V$ , como  $f$  no tiene factores múltiples (desde que  $A$  es reducida) y como  $k[[X, Y]]$  es un dominio de factorización única tenemos que el  $Z$ -discriminante de  $f$ ,  $D_Z(f) = D(X, Y) \in k[[X, Y]]$  es no nulo (vea Proposición 1.5.2). Sea  $D_Z = D_1^{\beta_1} \cdots D_n^{\beta_n}$  la descomposición de  $D_Z$  en factores irreducibles, denotaremos por  $\text{red}(D_Z) = D_1 \cdots D_n$  a la descomposición reducida de  $D_Z$ .

**Definición 2.1.15.** La discriminante de  $V$  respecto del sistema de parámetros  $\{x, y\}$  es una subvariedad de  $\text{Spec}(k[[X, Y]])$  cuya ecuación es  $\text{red}(D_Z)$ , y es denotado por  $\Delta_{x,y}$ .

## 2.2. Superficies Casi Ordinarias

**Definición 2.2.1.** Decimos que  $V = \text{Spec}(A)$  es una superficie **casi ordinaria** si existe un sistema de parámetros de  $V$ ,  $\{x, y\}$ , tal que el discriminante  $\Delta_{x,y}$  de  $V$  es una curva lisa o una curva con un punto doble ordinario (unión de 2 curvas lisas transversales).

Cuando  $V = \text{Spec}(A)$  es una superficie casi ordinaria, mediante un cambio de parámetros de la forma

$$\begin{aligned}x' &= h(x, y), \\y' &= g(x, y),\end{aligned}$$

( $h, g$  son polinomios lineales en dos variables) se puede conseguir que el discriminante  $\Delta_{x',y'}$  de  $V$  tenga por ecuación  $XY$ .

Supongamos que el sistema de parámetros  $\{x, y\}$  cumplen la condición anterior, y sea  $z \in \mathfrak{m} \subset A$  tal que  $\{x, y, z\}$  es un sistema de coordenadas de  $V$ . Consideremos el polinomio que define o representa a  $V$  respecto a dicho sistema de coordenadas,

$$f(X, Y, Z) = Z^m + g_1(X, Y)Z^{m-1} + \dots + g_m(X, Y),$$

con  $0 \neq g_i(X, Y) \in k[[X, Y]]$ ,  $g_i(0, 0) = 0$ ; para todo  $i = 1, \dots, m$ . (vea observación 2.1.7). Desde que  $\Delta_{x,y}$  tiene por ecuación  $XY$ , el  $Z$ -discriminante  $D_Z(f)$  de  $f$  es de la forma

$$D_Z(f) = X^a Y^b \varepsilon(X, Y),$$

con  $\varepsilon(X, Y) \in (k[[X, Y]])^*$ ;  $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ .

En este caso a  $f$ , polinomio que define o representa a la superficie casi ordinaria  $V = \text{Spec}(A)$ , es llamado **polinomio casi ordinario**.

Si  $f$  es un polinomio casi ordinario y  $f = \prod_{i=1}^s f_i$  es su descomposición en factores irreducibles, entonces cada  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , es un polinomio casi ordinario, pues cada  $D_Z(f_i)$ , con  $i = 1, \dots, s$  divide a  $D_Z(f)$  y por tanto es de la forma

$$D_Z(f_i) = X^{a_i} Y^{b_i} \varepsilon_i(X, Y), \quad \text{con } a_i \leq a, b_i \leq b \text{ y } \varepsilon_i(X, Y) \neq 0.$$

Ahora, si  $V_1, \dots, V_s$  es la descomposición de  $V$  en componentes irreducibles, cada  $V_i$  tiene ecuación  $f_i$ , luego es casi ordinaria.

En este caso, usaremos el término  $f$  es un **polinomio que define o representa al anillo  $A$**  si  $f$  es un polinomio que define o representa a la superficie casi ordinaria  $V = \text{Spec}(A)$ .

Cuando  $f$  es un polinomiocasi ordinario e irreducible de orden  $m$  en  $Z$  sobre  $k[[X, Y]]$ , por el Teorema de Jung-Abhyankar (Teorema 1.4.6) existen,  $n \in \mathbb{Z}^+$  (no necesariamente  $n = m$ , ver Observación 2.2.5) y series de potencias fraccionarias  $\zeta = H_1(X^{1/n}, Y^{1/n}), \dots, \zeta_m = H_m(X^{1/n}, Y^{1/n})$ , tal que

$$f(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$$

donde,  $\zeta_i = H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) = H(w_{i1}X^{1/n}, w_{i2}Y^{1/n})$ , con  $w_{i1}^n = w_{i2}^n = 1$  ( $w_{i1}, w_{i2}$  son raíces  $n$ -ésimas de la unidad).

Las raíces  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  del polinomio casi ordinario irreducible  $f$  son llamadas **ramas** de  $f$ . Fijado  $\zeta = \zeta_1$ , una raíz de  $f$ , las otras raíces del mismo polinomio  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  son llamadas **conjugadas** de  $\zeta$ .

**Definición 2.2.2.** Diremos que  $A$  es un **anillo local casi ordinario** o simplemente un **anillo casi ordinario** si el polinomio que representa o define a  $A$  es casi ordinario e irreducible. Si  $\zeta$  es una raíz del polinomio casi ordinario  $f$  (rama casi ordinaria), entonces diremos que  $\zeta$  es un **representante de  $A$** .

Notemos que en este caso,  $A$  siempre será un dominio de integridad desde que  $f$  es irreducible.

**Observación 2.2.3.** Una rama casi ordinaria  $\zeta$  de  $f$  representa al anillo  $A$  si y solo si  $A \simeq k[[X, Y]][[\zeta]]$ .

**Ejemplo 2.2.4.** (Vea [8]). Sea  $f$  el polinomio de Weierstrass en  $Z$  sobre  $K[[X, Y]]$  e irreducible dado por:

$$f(X, Y, Z) = Z^4 + (-2XY^3 - 4XY^4 - 2XY^5)Z^2 + (-4X^2Y^6 - 4X^2Y^7)Z + (X^2Y^6 + 4X^2Y^7 + 6X^2Y^8 + 4X^2Y^9 + X^2Y^{10} - X^3Y^9).$$

Observe que el  $Z$ -discriminante de  $f$  viene dada por:

$$D_Z(f) = -256X^7Y^{21}((1 + Y)^4 + XY^3),$$

luego  $f$  es un polinomio casi-ordinario irreducible. Una raíz de este polinomio casi-ordinario es:

$$\zeta = H(X^{1/4}, Y^{1/4}) = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4} \in \mathbb{C}[[X^{1/4}, Y^{1/4}]].$$

Fijando esta raíz y denotando  $m_1 = X^{2/4}Y^{6/4}$ ,  $m_2 = X^{2/4}Y^{10/4}$  y  $m_3 = X^{3/4}Y^{9/4}$  a los monomios que componen a  $\zeta$ , las otras raíces de  $f$  deben

obtenerse del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= H_1((1)X^{1/4}, (1)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 + m_3 \\
\zeta_2 &= H_2((1)X^{1/4}, (-1)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 - m_3 \\
\zeta_3 &= H_3((1)X^{1/4}, (i)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 + im_3 \\
\zeta_4 &= H_4((1)X^{1/4}, (-i)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 - im_3 \\
\zeta_5 &= H_5((-1)X^{1/4}, (1)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 - m_3 \\
\zeta_6 &= H_6((-1)X^{1/4}, (-1)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 + m_3 \\
\zeta_7 &= H_7((-1)X^{1/4}, (i)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 - im_3 \\
\zeta_8 &= H_8((-1)X^{1/4}, (-i)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 + im_3 \\
\zeta_9 &= H_9((i)X^{1/4}, (1)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 - im_3 \\
\zeta_{10} &= H_{10}((i)X^{1/4}, (-1)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 + im_3 \\
\zeta_{11} &= H_{11}((i)X^{1/4}, (i)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 + m_3 \\
\zeta_{12} &= H_{12}((i)X^{1/4}, (-i)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 - m_3 \\
\zeta_{13} &= H_{13}((-i)X^{1/4}, (1)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 + im_3 \\
\zeta_{14} &= H_{14}((-i)X^{1/4}, (-1)Y^{1/4}) &= -m_1 - m_2 - m_3 \\
\zeta_{15} &= H_{15}((-i)X^{1/4}, (i)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 + m_3 \\
\zeta_{16} &= H_{16}((-i)X^{1/4}, (-i)Y^{1/4}) &= m_1 + m_2 - m_3
\end{aligned}$$

donde, 1, -1,  $i$  y  $-i$  son raíces cuartas de la unidad. De este cálculo tenemos que las conjugadas de  $\zeta$  son:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= m_1 + m_2 + m_3 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4} \\
\zeta_2 &= m_1 + m_2 - m_3 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} - (X^{3/4}Y^{9/4}) \\
\zeta_3 &= -m_1 - m_2 + im_3 = -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) + i(X^{3/4}Y^{9/4}) \\
\zeta_4 &= -m_1 - m_2 - im_3 = -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) - i(X^{3/4}Y^{9/4}).
\end{aligned}$$

En todo lo que sigue trabajamos con polinomios casi ordinarios irreducibles, y decir que  $f$  es un polinomio casi ordinario significará que  $f$  es un polinomio casi ordinario irreducible.

**Observación 2.2.5.** *Este ejemplo muestra que las raíces de  $f$  son series de potencias fraccionarias  $\zeta \in \mathbb{C}[[X^{1/4}, Y^{1/4}]]$  de orden  $\leq 4 = \deg_Z(f)$ ; es decir, el orden de las raíces coinciden con el grado de  $f$ , en general esto no siempre se cumple, por ejemplo considere el polinomio casi ordinario*

$$\begin{aligned}
f(X, Y, Z) &= Z^4 - 8YZ^3 + (24Y^2 - 2Y^3 - 2XY^4)Z^2 + \\
&\quad (-32Y^3 + 8Y^4 + 8XY^5)Z + 16Y^4 - 8Y^5 + \\
&\quad Y^6 + 2XY^7 - 8XY^6 + X^2Y^8 - 4XY^7
\end{aligned}$$

cuya discriminante es

$$D_Z(f) = 4096X^2Y^2(1 - 2XY + X^2Y^2).$$

Una raíz de  $f$  es  $\zeta = H(X^{1/2}, Y^{1/2}) = 2(Y^{1/2})^2 + Y^{3/2} + X^{1/2}(Y^{1/2})^4$ , tenemos entonces, que  $\deg_Z(f) = 4$ , pero  $\zeta \in \mathbb{C}[[X^{1/2}, Y^{1/2}]]$ .

Las siguientes proposiciones ( 2.2.6 y 2.2.9) nos dan las características de las raíces de un polinomio casi ordinario  $f$ .

**Proposición 2.2.6.** *Si  $f$  es un polinomio casi ordinario en  $Z$  sobre  $k[[X, Y]]$  de orden  $m$  y  $\zeta = H_1, \dots, \zeta_m = H_m$  sus raíces, entonces  $\zeta_i - \zeta_j = M_{ij}\varepsilon_{ij}, \forall i \neq j$ , donde  $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n}Y^{\mu_{ij}/n}$  es un monomio en  $X^{1/n}$  y  $Y^{1/n}$ ,  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}$  son enteros que dependen de  $i, j$  y  $\varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n})$  es una unidad en  $\phi_n$ .*

*Demostración.* El  $Z$ -discriminante de  $f$ ,  $D_Z(f)$ , es:

$$\prod_{i \neq j} (H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) - H_j(X^{1/n}, Y^{1/n}))$$

y como  $f$  es casi ordinario se tiene

$$\prod_{i \neq j} (H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) - H_j(X^{1/n}, Y^{1/n})) = X^a Y^b \varepsilon(X, Y),$$

donde  $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ ;  $\varepsilon(X, Y) \in (k[[X, Y]])^*$ .

Como  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$  es un dominio de factorización única (DFU) y

$$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = \phi_n,$$

tenemos que  $\phi_n$  es un DFU. Así,

$$H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) - H_j(X^{1/n}, Y^{1/n}) = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n}),$$

donde  $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n}$  es un monomio en  $X^{1/n}$  y  $Y^{1/n}$ ,  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}$  son enteros que dependen de  $i, j$  y  $\varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n})$  es una unidad en  $\phi_n$  ( $\varepsilon(0, 0) \neq 0$ ).  $\square$

**Definición 2.2.7.** *Los monomios descritos en la Proposición 2.2.6,  $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n}$ , son llamados los **monomios distinguidos** de  $\zeta$  y los pares ordenados  $(\lambda_{ij}, \mu_{ij})$  son llamados los **pares distinguidos** de  $\zeta$ .*

**Ejemplo 2.2.8.** *Calculemos los monomios distinguidos y pares distinguidos del polinomio casi ordinario del Ejemplo 2.2.4.*

*Del Ejemplo 2.2.4 se tiene que las raíces de  $f$  son:*

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= m_1 + m_2 + m_3 &= X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4} \\ \zeta_2 &= m_1 + m_2 - m_3 &= X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} - (X^{3/4}Y^{9/4}) \\ \zeta_3 &= -m_1 - m_2 + im_3 &= -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) + i(X^{3/4}Y^{9/4}) \\ \zeta_4 &= -m_1 - m_2 - im_3 &= -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) - i(X^{3/4}Y^{9/4}). \end{aligned}$$

*Luego, los monomios distinguidos se calculan de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} M_{12} &= \zeta_1 - \zeta_2 = 2m_3 = m_3(2) \\ M_{13} &= \zeta_1 - \zeta_3 = 2m_1 + 2m_2 + (1 - i)m_3 = m_1(2 + 2Y + (1 - i)X^{1/4}Y^{3/4}) \\ M_{14} &= \zeta_1 - \zeta_4 = 2m_1 + 2m_2 + (1 + i)m_3 = m_1(2 + 2Y + (1 + i)X^{1/4}Y^{3/4}) \\ M_{23} &= \zeta_2 - \zeta_3 = 2m_1 + 2m_2 - (1 + i)m_3 = m_1(2 + 2Y - (1 + i)X^{1/4}Y^{3/4}) \\ M_{24} &= \zeta_2 - \zeta_4 = 2m_1 + 2m_2 + (i - 1)m_3 = m_1(2 + 2Y + (i - 1)X^{1/4}Y^{3/4}) \\ M_{34} &= \zeta_3 - \zeta_4 = (i + 1)m_3 = m_3(i + 1). \end{aligned}$$

Así, los monomios distinguidos distintos de  $\zeta$  son:  $M_1 = m_1 = X^{2/4}Y^{6/4}$ ,  $M_2 = m_3 = X^{3/4}Y^{9/4}$ , y los pares distinguidos son:  $(2/4, 6/4)$ ,  $(3/4, 9/4)$ .

**Proposición 2.2.9.** *Sea  $f$  un polinomio casi ordinario en  $Z$  de orden  $m$  sobre  $k[[X, Y]]$ . Si  $\zeta$  una raíz de  $f$ , entonces las conjugadas de  $\zeta$  no son unidades.*

*Demostración.* Se tiene que:

$$\prod_{i=1}^m (z - H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})) = f(X, Y, Z) = z^m + g_1(x, y)Z^{m-1} + \cdots + g_m(X, Y).$$

Cuando  $X = Y = 0$ , tenemos

$$\prod_{i=1}^m (Z - H_i(0, 0)) = f(0, 0, Z) = Z^m,$$

entonces

$$\zeta_i = H_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, m.$$

Por lo tanto, las conjugadas de  $\zeta$  no son unidades.  $\square$

Recíprocamente, la siguiente proposición nos dice que si  $\zeta \in \phi_n$  cumple las propiedades descritas en las proposiciones 2.2.6 y 2.2.9,  $\zeta$  es una raíz de un polinomio casi ordinario.

**Proposición 2.2.10.** *Si  $\zeta$  no es unidad en  $\phi_n$  y para cada conjugada  $\zeta_i \neq \zeta$  de  $\zeta$  se tiene  $\zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i$ , donde  $M_i$  es algún monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon_i$  es una unidad en  $\phi_n$ . Entonces el polinomio  $\prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$  es casi ordinario.*

*Demostración.* Sean  $\zeta_i, \zeta_j$  dos conjugadas distintas de  $\zeta$ , se tiene

$$M_j \varepsilon_j - M_i \varepsilon_i = (\zeta - \zeta_j) - (\zeta - \zeta_i) = \zeta_i - \zeta_j.$$

Por propiedad de los monomios distinguidos (vea Proposición 2.2.20) se cumple  $M_j < M_i$  o  $M_i < M_j$ , denotando al menor de ellos por  $M_{ij}$  se tiene

$$\zeta_i - \zeta_j = M_{ij} \varepsilon_{ij},$$

donde  $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n}$  es un monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n})$  es una unidad en  $\phi_n$ . De aquí, y de la definición de discriminante se tiene que el  $Z$ -discriminante de  $\prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$  es de la forma  $X^a Y^b \varepsilon(X, Y)$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  y  $\varepsilon(X, Y)$  unidad en  $k[[X, Y]]$ .

Por lo tanto,  $\prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$  es casi ordinario.  $\square$

**Definición 2.2.11.** Si  $\zeta \in \phi_n$ , y  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_m$  son las conjugadas de  $\zeta$ , entonces  $\prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$  es llamado el **polinomio mínimo** de  $\zeta$ .

**Definición 2.2.12.**  $\zeta \in \phi_n$  es una **rama casi ordinaria** si su polinomio mínimo es un polinomio casi ordinario.

A continuación, describimos las propiedades de los monomios característicos.

**Proposición 2.2.13.** Cualquier conjugada de una rama casi ordinaria  $\zeta$  tiene el mismo conjunto de monomios característicos.

*Demostración.* Sean  $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  las conjugadas de  $\zeta$  (raíces del mismo polinomio casi ordinario sobre  $k[[X, Y]]$ ), entonces

$$\zeta_i - \zeta_j = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon_{ij}, \quad \text{para todo } i \neq j,$$

donde  $\lambda_{ij}, \mu_{ij}$  son enteros que dependen de  $i, j$ , y  $\varepsilon_{ij}(X^{1/n}Y^{1/n})$  es una unidad en  $\phi_n$ .

Ahora, pensemos en ¿Cómo son los monomios distinguidos de las conjugadas de  $\zeta = \zeta_1$ , digamos de  $\zeta_j$  con  $j \neq 1$ ? Para responder a esta pregunta notemos que las conjugadas de  $\zeta_j$  son:  $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ ; es decir, tiene las mismas conjugadas que  $\zeta$  y como los monomios distinguidos de  $\zeta_j$  dependen de las conjugadas de  $\zeta_j$ , se tiene que  $\zeta_j$  tiene los mismos monomios distinguidos que  $\zeta$ .  $\square$

Sea  $\zeta = H(X^{1/n}, Y^{1/n})$  una rama casi ordinaria, denotemos por  $L = k((X, Y))$ ,  $L(\zeta) = k((X, Y))(\zeta)$  y  $L_n = k((X^{1/n}, Y^{1/n}))$  el cuerpo de fracciones de  $k[[X, Y]]$ ,  $k[[X, Y]](\zeta)$  y  $k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]]$  respectivamente. La relación entre ellos es

$$L \subset L(\zeta) \subset L_n.$$

$L_n$  es una extensión de Galois de  $L$  (el caso general de esta afirmación se ha probado en el capítulo 1 en Proposición 1.4.3) y por tanto, también lo es  $L(\zeta)$ . A continuación, demostraremos que  $L_n$  es una extensión de Galois de  $L$ , para ello necesitamos los siguientes resultados

**Proposición 2.2.14.**  $L_n = L(X^{1/n}, Y^{1/n})$ .

*Demostración.* En el capítulo 1 probamos que

$$k[[X^{1/n}, Y^{1/n}]] = k[[X, Y]](X^{1/n}, Y^{1/n}).$$

Pasando a los cuerpos de fracciones respectivamente, tenemos

$$L_n = L(X^{1/n}, Y^{1/n}).$$

$\square$

**Proposición 2.2.15.**

$$[L(X^{1/n_1}, Y^{1/n_2}) : L] = n_1 n_2.$$

*Demostración.* Vea [8]. □

**Observación 2.2.16.** Como consecuencia de la Proposición 1.4.3, dado  $\theta \in G(L_n/L)$  también podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta : L_n &\rightarrow L_n \\ X^{1/n} &\rightarrow w_{1\theta} X^{1/n} \\ Y^{1/n} &\rightarrow w_{2\theta} Y^{1/n} \\ X &\rightarrow X \\ Y &\rightarrow Y \end{aligned}$$

donde  $(w_{1\theta})^n = (w_{2\theta})^n = 1$ ; esto es,  $w_{1\theta}$  y  $w_{2\theta}$  son raíces  $n$ -ésimas de la unidad (no necesariamente primitivas).

De la observación anterior, se tiene que un elemento del grupo de Galois  $G(L_n/L)$  actúa sobre una rama casi ordinaria de la siguiente forma:

$$\theta(\zeta) = \theta(H(X^{1/n}, Y^{1/n})) = H(w_{1\theta} X^{1/n}, w_{2\theta} Y^{1/n}).$$

Es decir, la imagen de la rama  $\zeta$  vía  $\theta$  es un conjugado de  $\zeta$ . Así, dados  $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ , conjugadas de  $\zeta$ , para todo  $\zeta_i$  existe  $\theta_i \in G(L_n/L)$  tal que  $\theta_i(\zeta) = \zeta_i$  con  $i = 1, \dots, m$ .

En particular, dado  $\zeta_j$  es posible encontrar un automorfismo  $\theta \in G(L_n/L)$  tal que  $\theta(\zeta_j) = \zeta_1$  con  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , entonces  $\theta(\zeta_i) = \zeta_k$  con  $k \geq 2$  para  $i \neq j$ . Además, se sabe que

$$\zeta_i - \zeta_j = M_{ij} \varepsilon_{ij},$$

entonces

$$\begin{aligned} \theta(\zeta_i - \zeta_j) &= \theta(M_{ij} \varepsilon_{ij}) \\ \theta(\zeta_i) - \theta(\zeta_j) &= \theta(X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon_{ij}(X^{1/n} Y^{1/n})) \\ \zeta_k - \zeta_1 &= (w_{1\theta}^{\lambda_{ij}} X^{\lambda_{ij}/n})(w_{2\theta}^{\mu_{ij}} Y^{\mu_{ij}/n}) \varepsilon'_{ij}(X^{1/n} Y^{1/n}) \\ \zeta_k - \zeta_1 &= w_{1\theta}^{\lambda_{ij}} w_{2\theta}^{\mu_{ij}} X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon''_{ij}(X^{1/n} Y^{1/n}) \\ M_{k1} \varepsilon_{k1} &= X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon''_{ij}(X^{1/n} Y^{1/n}). \end{aligned}$$

Haciendo  $M_{k1} = M_k$

$$M_k \varepsilon_{k1} = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n} \varepsilon''_{ij}(X^{1/n} Y^{1/n}),$$

de donde

$$M_k = M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n} Y^{\mu_{ij}/n}.$$

Así, los monomios distinguidos son  $\{M_k\}_{2 \leq k \leq m}$ , pues se puede dar el caso  $M_i = M_j$  con  $i \neq j$ ;  $i, j \in \{2, \dots, m\}$  como se muestra en el Ejemplo 2.2.8.

A partir de aquí denotaremos a los exponentes de los monomios  $M_k = x^{\lambda_{k1}/n} y^{\mu_{k1}/n}$ ; es decir, a los pares distinguidos  $(\lambda_{k1}/n, \mu_{k1}/n)$  simplemente por  $(\lambda_k, \mu_k)$ .

**Proposición 2.2.17.** *Todos los monomios distinguidos aparecen en la expresión de  $\zeta$  como serie de potencia fraccionaria.*

*Demostración.* Se sabe que toda conjugada de  $\zeta = \zeta_1 = H(X^{1/n}, Y^{1/n})$  es de la forma  $\zeta_i = H(w_{1i}X^{1/n}, w_{2i}Y^{1/n})$  con  $w_{2i}^n = w_{1i}^n = 1$  y que

$$\zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i, i \in \{2, \dots, m\},$$

es decir, al restar  $\zeta$  con cada una de sus conjugadas,  $\zeta_i$ , nos quedan los monomios distinguidos  $M_i$  en producto con una unidad de  $\phi_n$ . Para que esto suceda necesariamente los  $M_i$  deben aparecer con coeficiente no nulo en la expresión de  $\zeta$ .  $\square$

**Definición 2.2.18.** Sean  $(\lambda, \mu), (\sigma, \tau) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  diremos que  $(\lambda, \mu) \leq (\sigma, \tau)$  si y solo si  $\lambda \leq \sigma$  y  $\mu \leq \tau$ .

**Definición 2.2.19.** Dados dos monomios distinguidos  $M_i = X^\lambda Y^\mu$ ,  $M_j = X^\sigma Y^\tau$  diremos que  $M_i \leq M_j$  si y solo si  $(\lambda, \mu) \leq (\sigma, \tau)$ .

**Proposición 2.2.20.** Dados dos monomios distinguidos de la rama  $\zeta$ ,  $M_i = X^\lambda Y^\mu$  y  $M_j = X^\sigma Y^\tau$  se tiene que  $M_i \leq M_j$  ( $(\lambda, \mu) \leq (\sigma, \tau)$ ) o  $M_j \leq M_i$  ( $(\sigma, \tau) \leq (\lambda, \mu)$ ).

*Demostración.* Sean  $\zeta_i, \zeta_j$  conjugadas de  $\zeta$  distintas de  $\zeta$ , entonces

$$\zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i$$

y

$$\zeta - \zeta_j = M_j \varepsilon_j$$

de donde

$$M_j \varepsilon_j - M_i \varepsilon_i = (\zeta - \zeta_j) - (\zeta - \zeta_i) = \zeta_i - \zeta_j = M_{ij} \varepsilon_{ij}$$

y supongamos que no se cumple  $M_i \leq M_j$  ni  $M_j \leq M_i$ , entonces debe ocurrir uno de los siguientes casos

1.  $\lambda < \sigma \wedge \mu > \tau$

$$2. \lambda > \sigma \wedge \mu < \tau$$

Si se diera el primer caso tendríamos que

$$M_j \varepsilon_j - M_i \varepsilon_i = X^\sigma Y^\tau \varepsilon_j - X^\lambda X^\mu \varepsilon_i = X^\lambda Y^\tau (X^{\sigma-\lambda} - Y^{\mu-\tau}).$$

Como  $(X^{\sigma-\lambda} - Y^{\mu-\tau})$  no es unidad esto implicaría que  $\zeta$  no cumple la propiedad de una rama casi ordinaria lo que es una contradicción. Procediendo de forma análoga en el segundo caso obtendríamos la misma contradicción.  $\square$

**Observación 2.2.21.** Sea  $\theta \in G(L_n/L)$  tal que  $\theta(\zeta) = \zeta_i$  con  $i \geq 2$  (recordemos que  $\zeta = \zeta_1$ ) entonces  $\theta(M_i) \neq M_i$ . En efecto: Desde que  $\theta(\zeta) = \zeta_i$  con  $i \geq 2$  se tiene que  $\zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i$ . Por contradicción supongamos que  $\theta(M_i) = M_i$  entonces se tendría

$$\zeta - \zeta_i = \zeta - \theta(\zeta) = (\cdots + c_i M_i + \cdots) - (\cdots + c_i M_i + \cdots) = 0 \quad (\neq M_i \varepsilon_i),$$

donde  $c_i \in k$ . Entonces  $\zeta$  no sería una rama casi ordinaria, lo cual es una contradicción.

**Proposición 2.2.22.** Si  $\{M_r\}_{1 \leq r \leq s}$  es el conjunto de los monomios distinguidos diferentes de la rama casi ordinaria  $\zeta$ . Entonces  $L(\zeta) = L(M_1, \dots, M_s)$

*Demostración.* Supongamos que  $\theta \notin G(L_n/L(\zeta))$ , entonces  $\theta(\zeta) = \zeta_i, i \neq 1$ , por la Observación 2.2.21  $\theta(M_i) \neq M_i$ , entonces  $\theta \notin G(L_n/L(M_1, \dots, M_s))$  por el método de la contrareciproca se concluye que  $G(L_n/L(M_1, \dots, M_s)) \subset G(L_n/L(\zeta))$ , esto implica que

$$L(\zeta) \subset L(M_1, \dots, M_s).$$

Recíprocamente, si  $\theta \in G(L_n/L(\zeta))$  entonces  $\theta(\zeta) = \zeta$  y por la Proposición 2.2.17, se tiene  $\theta(M_i) = M_i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ . Entonces  $\theta \in G(L_n/L(M_1, \dots, M_s))$ . Se concluye que  $G(L_n/L(\zeta)) \subset G(L_n/L(M_1, \dots, M_s))$ , esto implica

$$L(M_1, \dots, M_s) \subset L(\zeta).$$

De ambas inclusiones se tiene que  $L(\zeta) = L(M_1, \dots, M_s)$ .  $\square$

**Proposición 2.2.23.** Sea  $s \in \mathbb{Z}$  y  $M_i = X^{\lambda_i} Y^{\mu_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$  monomios arbitrarios con exponentes fraccionarias. Entonces  $X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, \dots, M_s)$  si y solo si

$$(\lambda, \mu) = q_1(\lambda_1, \mu_1) + (\lambda_2, \mu_2) + \cdots + q_s(\lambda_s, \mu_s) \text{ mod } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Vea [9].  $\square$

**Proposición 2.2.24.** Sean  $M_i = X^{\lambda_i}Y^{\mu_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$ ; los monomios distinguidos de la rama casi ordinaria  $\zeta$  enumerados de tal forma que  $(\lambda_1, \mu_1) < (\lambda_2, \mu_2) < \dots < (\lambda_s, \mu_s)$ . Supongamos que  $c_{\lambda\mu}X^\lambda Y^\mu$  es un término de  $\zeta$  ( $c_{\lambda\mu} \neq 0$ ) tal que  $M = X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, \dots, M_t)$  y  $X^\lambda Y^\mu \notin L(M_1, \dots, M_{t-1})$ . Entonces

1. Existe un automorfismo  $\theta$  que deja fijo a  $M_1, \dots, M_{t-1}$  y mueve a  $M$  ( $\theta(M) \neq M$ ).
2.  $\theta$  debe mover a  $M_t$  y  $(\lambda_t, \mu_t) \leq (\lambda, \mu)$

*Demostración.* Primero veamos que 1.  $\rightarrow$  2. En efecto: como  $M = X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, \dots, M_t)$ , entonces

$$(\lambda, \mu) = q_1(\lambda_1, \mu_1) + \dots + q_t(\lambda_t, \mu_t) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

como  $\theta$  mueve a  $M$ , tenemos que

$$\theta(M) \neq M$$

esto es equivalente a

$$\theta(X^{q_1\lambda_1 + \dots + q_t\lambda_t + \mathbb{Z}} Y^{q_1\mu_1 + \dots + q_t\mu_t + \mathbb{Z}}) \neq X^{q_1\lambda_1 + \dots + q_t\lambda_t + \mathbb{Z}} Y^{q_1\mu_1 + \dots + q_t\mu_t + \mathbb{Z}}$$

como  $\theta$  que deja fijo a  $M_1, \dots, M_{t-1}$ , se tiene

$$\theta(X^{\lambda_t} Y^{\mu_t}) \neq X^{\lambda_t} Y^{\mu_t}$$

$$\theta(M_t) \neq M_t.$$

Por otro lado,  $M_t$  y  $M$  aparecen con coeficientes no nulos en  $\zeta - \theta(\zeta)$ ; es decir,

$$\zeta - \theta(\zeta) = \dots + c_{\lambda_t\mu_t} X^{\lambda_t} Y^{\mu_t} + c_{\lambda\mu} X^\lambda Y^\mu + \dots$$

además, como  $\zeta$  es una rama casi ordinaria

$$\zeta - \theta(\zeta) = M_r \varepsilon_r.$$

Luego, por la Propiedad de una rama casi ordinaria dada en la Proposición 2.2.20,  $(\lambda_r, \mu_r) \leq (\lambda, \mu)$  y  $(\lambda_r, \mu_r) \leq (\lambda_t, \mu_t)$ ; entonces  $M_r \in \{M_1, \dots, M_t\}$ , pero  $\theta$  deja fijos a  $\{M_1, \dots, M_{t-1}\}$  y  $M_r$  no debe quedar fijo por  $\theta$ . Así, la única posibilidad es que  $M_r = M_t$ . Luego  $(\lambda_t, \mu_t) \leq (\lambda, \mu)$ .  $\square$

**Observación 2.2.25.** Para todo  $1 \leq t \leq s$ , existe  $\theta \in G(L_n/L)$  tal que  $\zeta - \theta(\zeta) = M_t \varepsilon_t$ . Si  $X^\lambda Y^\mu$  es movido por  $\theta$ , de la proposición 2.2.24 tenemos que  $(\lambda_t, \mu_t) \leq (\lambda, \mu)$ ; esto nos dice que  $\theta$  fija a  $M_1, \dots, M_{t-1}$ . Por otro lado, como  $M_t$  es movido por  $\theta$  entonces  $M_t \notin L(M_1, \dots, M_{t-1})$ .

El siguiente teorema da las condiciones necesarias y suficientes para que una serie de potencias fraccionarias sea una rama casi ordinaria.

**Teorema 2.2.26.** Sea  $\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$  una serie de potencias fraccionarias, para que  $\zeta$  sea una rama casi ordinaria es necesario y suficiente que existan  $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_s, \mu_s) \in \Gamma_n \times \Gamma_n$  tales que

1.  $(0, 0) < (\lambda_1, \mu_1) < (\lambda_2, \mu_2) < \dots < (\lambda_s, \mu_s)$  y  $c_{\lambda_i \mu_i} \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, s$ . Por comodidad hacemos  $(0, 0) = (\lambda_0, \mu_0)$ .
2. Si  $c_{\lambda\mu} \neq 0$  entonces  $(\lambda, \mu) = q_1(\lambda_1, \mu_1) + \dots + q_s(\lambda_s, \mu_s) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ;  $q_i \in \mathbb{Z}$ .
3. Si  $c_{\lambda\mu} \neq 0$  y  $\tau = \tau(\lambda, \mu)$  es el menor de los enteros  $t \geq 0$  tal que  $(\lambda, \mu)$  se escribe como una combinación lineal de  $(\lambda_0, \mu_0), (\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_t, \mu_t)$  módulo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  entonces  $(\lambda, \mu) \geq (\lambda_\tau, \mu_\tau)$ .
4.  $\tau(\lambda_i, \mu_i) = i$ , para todo  $i = 1, \dots, s$ .

Si estos pares existen, ellos están únicamente determinados por  $\zeta$ .

*Demostración.* La condición necesaria se sigue de las propiedades de los monomios distinguidos descritas anteriormente. En efecto: supongamos que  $\zeta$  es una rama casi ordinaria, entonces:

1. Sean  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_m$  las conjugadas de  $\zeta$ . Sabemos que para todo  $i = 1, \dots, m$  existe  $\theta_i \in G(L_n/L)$  tal que  $\theta_i(\zeta) = \zeta_i$ . Así, se obtienen los monomios distinguidos dados por  $\zeta - \theta_j(\zeta) = M_j \varepsilon_j$ ,  $M_j = X^{\lambda_j} Y^{\mu_j}$  con  $2 \leq j \leq m$ . Quitando los monomios repetidos y usando la Proposición 2.2.20 se obtiene el conjunto de monomios distinguidos  $\{M_i\}_{i=1}^s$  con  $1 \leq s \leq m$  distintos y totalmente ordenados. Finalmente mediante una re-enumeración podemos asumir que  $M_1 < M_2 < \dots < M_s$  o equivalentemente  $(0, 0) < (\lambda_1, \mu_1) < \dots < (\lambda_s, \mu_s)$ .

Por otro lado, se tiene que  $c_{\lambda_i \mu_i} \neq 0$ , pues si  $c_{\lambda_i \mu_i} = 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, s\}$ , entonces  $M_i$  no estaría en  $\zeta$ , luego no sería un monomio distinguido.

2. Si  $c_{\lambda\mu} \neq 0$  entonces el monomio  $c_{\lambda\mu} X^\lambda Y^\mu$  está presente en la expresión de  $\zeta$ , entonces  $c_{\lambda\mu} X^\lambda Y^\mu \in L(\zeta)$ , por la Proposición 2.2.22  $L(\zeta) = L(M_1, \dots, M_s)$  y por la Proposición 2.2.23,

$$(\lambda, \mu) = q_1(\lambda_1, \mu_1) + \dots + q_s(\lambda_s, \mu_s) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

3. Si  $c_{\lambda\mu} \neq 0$  y  $\tau = \tau(\lambda, \mu)$  es el menor de los enteros  $t \geq 0$  tal que  $(\lambda, \mu)$  se escribe como una combinación lineal de  $(\lambda_0, \mu_0), (\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_t, \mu_t)$

módulo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ; esto es equivalente a decir que  $\tau = \tau(\lambda, \mu)$  es el menor de los enteros  $t \geq 0$  tal que  $X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, \dots, M_\tau)$  y  $X^\lambda Y^\mu \notin L(M_1, \dots, M_{\tau-1})$ , entonces usando la Proposición 2.2.24 se tiene  $(\lambda, \mu) \geq (\lambda_\tau, \mu_\tau)$ .

4.  $\tau(\lambda_i, \mu_i) = i$  es equivalente a decir  $M_i \notin L(M_1, \dots, M_{i-1})$  y  $M_i \in L(M_1, \dots, M_i)$ , lo cual queda probado por la Observación 2.2.25.

Para probar la condición suficiente supongamos que  $\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$  es una serie de potencias fraccionarias y que existen  $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_s, \mu_s) \in \Gamma_n \times \Gamma_n$  tales que cumplan las propiedades del teorema. Se mostrará que  $\zeta$  es una rama casi ordinaria, es decir:

$$\theta(\zeta) - \zeta = M_\theta \varepsilon_\theta, \theta \in G(L_n/L).$$

En efecto: Sean

$$H_i = \sum_{\tau(\alpha, \beta) = i} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

donde  $\tau(\alpha, \beta) = i$  significa que  $i$  es el menor entero mayor o igual a cero tal que

$$(\alpha, \beta) = q_0(\lambda_0, \mu_0) + \dots + q_i(\lambda_i, \mu_i), \quad q_i \in \mathbb{Z}.$$

Por 1.), 3.) y 4.) los  $H_i$  son de la forma

$$\begin{aligned} H_0 &= c_{\lambda_0 \mu_0} X^{\lambda_0} Y^{\mu_0} + c_{\lambda \mu} X^{q_0 \lambda_0 + \mathbb{Z}} Y^{q_0 \mu_0 + \mathbb{Z}} + \dots \\ H_1 &= c_{\lambda_1 \mu_1} X^{\lambda_1} Y^{\mu_1} + c_{\lambda \mu} X^{q_0 \lambda_0 + q_1 \lambda_1 + \mathbb{Z}} Y^{q_0 \mu_0 + q_1 \mu_1 + \mathbb{Z}} + \dots \\ &\vdots \\ H_s &= c_{\lambda_s \mu_s} X^{\lambda_s} Y^{\mu_s} + c_{\lambda \mu} X^{q_0 \lambda_0 + q_1 \lambda_1 + \dots + q_s \lambda_s + \mathbb{Z}} Y^{q_0 \mu_0 + q_1 \mu_1 + \dots + q_s \mu_s + \mathbb{Z}} + \dots \end{aligned}$$

Así,

$$H_i = X^{\lambda_i} Y^{\mu_i} u_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) = M_i u_i, \quad \forall i \geq 1,$$

donde  $M_i = X^{\lambda_i} Y^{\mu_i}$  y  $u_i(0, 0) \neq 0$ .

Como todos los monomios de  $\zeta$  satisfacen la propiedad (2)

$$\zeta = H_0 + \dots + H_s.$$

Sea  $\theta \in G(L_n/L)$ , recordemos que esto significa que  $\theta$  es un automorfismo de  $L_n$  que deja fijo a  $L$ , y sea  $1 \leq t \leq s$ , se tiene que  $\theta$  deja fijo a  $H_1, \dots, H_t$  si y solo si deja fijos a  $M_1, \dots, M_t$ , esto se cumple por la forma como están definidos los  $H_i$ 's.

Además,  $\theta(\zeta) \neq \zeta$  implica que existe  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $\theta(M_j) \neq M_j$ . Sea  $t$  el menor  $j$  tal que cumple la condición anterior, entonces  $\theta$  debe dejar fijo a  $M_1, \dots, M_{t-1}$ , luego

$$\theta(\zeta) - \zeta = M_t \varepsilon_t, \quad \text{donde } M_t = X^{\lambda_t} Y^{\mu_t}, \varepsilon_t(0, 0) \neq 0.$$

Así, hemos probado que  $\zeta$  es una rama casi ordinaria.

También podemos ver que los pares distinguidos están entre los  $(\lambda_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Recíprocamente, la Proposición 2.2.25 muestra que para todo  $i \geq 1$ ,  $M_i \notin L(M_1, \dots, M_{i-1})$ ; por lo tanto, existe un automorfismo  $\varphi \in G(L_n/L)$  dejando fijo a  $M_1, \dots, M_{i-1}$  y moviendo a  $M_i$ . Claramente se tiene que  $\zeta - \varphi(\zeta) = M_i \varepsilon_i$ , con  $\varepsilon_i(0, 0) \neq 0$ . De aquí se ve que  $(\lambda_i, \mu_i)$  es un par distinguido, para todo  $i \geq 1$ .  $\square$

De la demostración del Teorema 2.2.26 se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.27.** *Si  $\zeta \in \phi_n$  es una rama casi ordinaria, entonces*

1.  $\zeta \in k[[X, Y]]$  o
2.  $\zeta = H_0 + X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n} Y^{1/n})$ ,

donde  $H_0(X, Y) \in k[[X, Y]]$ ,  $H(0, 0) \neq 0$  y  $(\lambda, \mu)$  es el menor par distinguido de  $\zeta$ .

## 2.3. Normalización de una Rama Casi Ordinaria

En esta sección describiremos las ramas casi ordinarias normalizadas, y fuertemente normalizadas.

Empezamos describiendo a las ramas casi ordinarias normalizadas, las cuales forman un subconjunto de las ramas casi ordinarias que tienen una forma especial que será de mucha utilidad para facilitar cálculos que realizaremos más adelante con las ramas casi ordinarias.

**Lema 2.3.1.**

1. Si  $\zeta$  es un representante del anillo casi ordinario  $A$ , entonces  $\zeta - h$  con  $h \in k[[X, Y]]$  y  $h(0, 0) = 0$  también es un representante de  $A$ .
2.  $\zeta$  y  $\zeta - h$  tienen los mismos pares distinguidos.

*Demostración.* Sean  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_m$  conjugadas de  $\zeta$ . Como las  $\zeta_i$  son dadas por  $\zeta_i = \theta_i(\zeta)$ , con  $\theta_i \in G$  se cumple:

$$\zeta - \theta_i(\zeta) = \zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i, \quad \text{para todo } i = 2, \dots, m.$$

Luego,

$$(\zeta - h) - \theta_i(\zeta - h) = \zeta - h - \zeta_i + h = \zeta - \zeta_i = M_i \varepsilon_i.$$

Así,  $\zeta - h$  también es una rama casi ordinaria que tiene los mismos monomios distinguidos de  $\zeta$ .

Ahora, para mostrar que  $\zeta - h$  también representa a  $A$  basta notar que  $A \simeq k[[X, Y]][\zeta - h]$ . En efecto:

tenemos que

$$A \simeq k[[X, Y]][\zeta],$$

pues  $\zeta$  representa a  $A$ , y mediante la identificación  $\zeta = \zeta - h$  se tiene

$$k[[X, Y]][\zeta] \simeq k[[X, Y]][\zeta - h],$$

entonces

$$A \simeq k[[X, Y]][\zeta - h].$$

□

Así, dado una rama casi ordinaria

$$\zeta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_n \times \Gamma_n} c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta,$$

denotando por  $h = \sum' c_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$  donde la suma se realiza sobre los  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , entonces por del Lema 2.3.1,  $\zeta' = \zeta - h$  también es una rama representante de  $A$  en la cual no aparecen monomios con exponentes enteros. Del Corolario 2.2.27, tenemos

1.  $\zeta' = 0$  o
2.  $\zeta' = X^\lambda Y^\mu u(X^{1/n}, Y^{1/n}),$

donde  $(\lambda, \mu)$  es el menor par distinguido de  $\zeta'$  y  $u(0, 0) \neq 0$ .

**Lema 2.3.2.** (*Lema de la inversión*) Sea  $\zeta = X^{u/n} H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ , con  $0 < u < n$  y  $H(0, 0) \neq 0$  una rama que define al anillo casi ordinario  $A$ , entonces  $A$  tiene una rama que la define de la forma  $\zeta' = X^{n/u} H'(X^{1/u}, Y^{1/n})$  con  $H'(0, 0) \neq 0$ .

*Demostración.* Sea  $f(X, Y, Z)$  el polinomio mínimo de  $\zeta$ . Las conjugadas de  $\zeta$  son de la forma  $\zeta_i = X^{u/n} H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})$ , con  $H_i(0, 0) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  donde  $m$  es el grado de  $f$  en  $Z$ . Así,

$$f(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^m (Z - X^{u/n} H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})).$$

Veamos que  $f$  es regular en  $X$  de orden  $mu/n$ . Para ello, notemos que

$$f(X, 0, 0) = \prod_{i=1}^m (0 - X^{u/n} H_i(X^{1/n}, 0)) = X^{mu/n} \tilde{H}(X^{1/n}, 0),$$

con  $\tilde{H}(0, 0) \neq 0$ . Luego,  $f$  es regular en  $X$  de orden  $mu/n$ . Por el Teorema de preparación de Weierstrass, existe  $E(X, Y, Z) \in k[[X, Y, Z]]$ , con  $E(0, 0, 0) \neq 0$  tal que  $Ef = g$ , donde  $g$  es un pseudo polinomio en  $X$  de grado  $mu/n$  sobre  $k[[Y, Z]]$ . Desde que  $A \simeq \frac{k[[X, Y, Z]]}{(f)} \simeq \frac{k[[X, Y, Z]]}{(g)}$ , basta probar

1.  $g$  es un polinomio casi ordinario en  $X$  sobre  $k[[Y, Z]]$ .
2.  $g$  tiene una raíz de la forma  $Z^{n/u} H'(Z^{1/u}, Y^{1/n})$  con  $H'(0, 0) \neq 0$ .

Denotando por

$$\overline{H}(X, Y) = X^u H(X, Y),$$

entonces

$$\overline{H}(X^{1/n}, Y^{1/n}) = X^{u/n} H(X^{1/n}, Y^{1/n}) = \zeta.$$

Construyamos una serie de potencias  $G$ , en 2 variables (sobre  $k$ ), tal que

$$\overline{H}(Z^{1/n} G(Z^{1/n}, Y^{1/n}), Y^{1/n}) = Z.$$

Para ello, observe que si  $W$  es una indeterminada, entonces

$$\overline{H}(X, Y) - W^u = X^u H(X, Y) - W^u$$

tiene un factor de la forma

$$X\overline{G}(X, Y) - W,$$

con  $G(0, 0) \neq 0$  y  $\overline{G}(X, Y)^u = H(X, Y)$ . Observe que  $X\overline{G}(X, Y) - W$  tiene grado 1 en  $X$ , (pues,  $\overline{G}(0, 0) \neq 0$ ). Por el Teorema de preparación de Wieiertrass, existe una unidad  $\overline{E}(X, Y, Z)$  tal que

$$\overline{E}(X, Y, Z)(X\overline{G}(X, Y) - W) = X - G'(W, Y). \quad (2)$$

Haciendo  $X = 0$ , tenemos

$$\bar{E}(0, Y, Z)(W) = G'(W, Y),$$

entonces

$$\bar{E}(0, Y, Z) = \frac{G'(W, Y)}{W}.$$

Denotando por  $G(W, Y) = \frac{G'(W, Y)}{W}$ , tenemos

$$\bar{E}(0, Y, Z)(W) = G(W, Y),$$

entonces

$$G(0, 0) \neq 0.$$

Poniendo  $X = G'(W, Y) = WG$  en ( 2), tenemos

$$\bar{E}(WG, Y, W)(WG\bar{G}(WG, Y) - W) = 0$$

y como  $\bar{E}(0, 0, 0) \neq 0$ , se cumple

$$\begin{aligned} WG\bar{G}(WG, y) - W &= 0 \\ (WG)^u(\bar{G}(WG, Y))^u &= W^u \\ (WG)^u H(WG, Y) &= W^u \\ \bar{H}(WG, Y) - W^u &= 0. \end{aligned}$$

Realizando la identificación  $Z^{1/u} = W$  y  $Y = Y^{1/n}$ , tenemos

$$\bar{H}(Z^{1/u}G, Y^{1/n}) - Z = 0$$

$$\bar{H}(Z^{1/u}G, Y^{1/n}) = Z. \quad (3)$$

Ahora, que ya se ha probado la existencia de tal serie, denotemos con  $\lambda = G(Z^{1/u}, Y^{1/n})$ , entonces en la ecuación ( 3) nos queda

$$\bar{H}(Z^{1/u}\lambda, Y^{1/n}) = Z;$$

y desde que

$$f(X, Y, \zeta) = f(X, Y, \bar{H}(X^{1/n}, Y^{1/n})) = 0. \quad (4)$$

Sustituyendo  $X^{1/n}$  por  $Z^{1/u}\lambda$  ( $X = Z^{n/u}\lambda^n$ ) en ( 4) se tiene que

$$\begin{aligned} f(Z^{n/u}\lambda^n, Y, \bar{H}(Z^{1/u}\lambda, Y^{1/n})) &= 0 \\ f(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) &= 0. \end{aligned}$$

De aquí, se tiene que  $Z^{n/u}\lambda^n$  es una raíz de  $f$  y por lo tanto de  $g$ . Esto demuestra 2.

El  $X$ -discriminante de  $g$  es el producto de todas las conjugadas, sobre  $k[[Y, Z]]$ , de todos los elementos  $g_X(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)$ ; es decir, si se denota por  $\tau = Z^{n/u}\lambda^n$  a la raíz de  $g$  y por  $\tau_i$  a sus conjugadas, la afirmación anterior significa que  $D_X(g) = \frac{\partial g}{\partial X}(\tau_i)$ .

Derivando  $g(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)$  respecto a  $Z$  se tiene

$$\begin{aligned} g_X(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) \frac{\partial}{\partial Z}(Z^{n/u}\lambda^n) + g_Y(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) \frac{\partial}{\partial Z}(Y) + \\ g_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) \frac{\partial}{\partial Z}(Z) = 0 \\ g_X(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) \frac{\partial}{\partial Z}(Z^{n/u}\lambda^n) + g_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) = 0, \end{aligned}$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial Z}(Z^{n/u}\lambda^n) = Z^{n/u-1}\varepsilon'(Z^{1/u}, Y^{1/n}),$$

con  $\varepsilon'(0, 0) \neq 0$  y

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial g}{\partial Z} \right) ((Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)) = \left( f \frac{\partial E}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial z} E \right) ((z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)) \\ g_Z = E f_Z \end{aligned}$$

pues,  $f(Z^{n/u}\lambda^n, Y, \bar{H}(Z^{1/u}\lambda, Y^{1/n})) = 0$ . De aquí

$$g_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) = E(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) f_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z).$$

Debido a que el producto de todas las conjugadas sobre  $k[[X, Y]]$  del elemento  $f_Z(X, Y, \zeta)$  es el  $Z$ -discriminante y como  $f$  es casi ordinario se tiene que  $D_X(f) = X^a Y^b \varepsilon(X, Y)$ , con  $\varepsilon(0, 0) \neq 0$ , entonces

$$f_Z(X, Y, \bar{H}(X^{1/n}, Y^{1/n})) = X^{c/n} Y^{d/n} \varepsilon''(X^{1/n}, Y^{1/n})$$

y

$$\begin{aligned} f_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) &= (Z^{n/u}\lambda^n)^{c/n} Y^{d/n} \varepsilon''((Z^{n/u}\lambda^n)^{1/n}, Y^{1/n}) \\ &= Z^{c/u} \lambda^c Y^{d/n} \varepsilon''((Z^{1/u}\lambda), Y^{1/n}), \end{aligned}$$

con  $c, d \in \mathbb{Z}, \varepsilon''(0, 0) \neq 0$ .

Así,

$$\begin{aligned} g_Z(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) &= E(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z) Z^{c/u} \lambda^c Y^{d/n} \varepsilon''((Z^{1/u}\lambda), Y^{1/n}) \\ &= Z^{s/u} Y^{t/n} \varepsilon^*(Z^{1/u}, Y^{1/n}), \end{aligned}$$

con  $s, t \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon^*(0, 0) \neq 0$ .

Por lo tanto, el producto de las conjugadas de  $g_X(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)$  es de la forma  $Z^p Y^q U(Y, Z)$ , con  $U(Y, Z)$  unidad en  $k[[Y, Z]]$ , donde  $p, q$  son enteros no negativos, desde que  $g_X(Z^{n/u}\lambda^n, Y, Z)$  es integral sobre  $k[[Y, Z]]$ . De esta forma, se ha mostrado que  $g$  es un polinomio casi ordinario.  $\square$

Así, si  $\mu = \mu_1 = 0$  y  $\lambda = \lambda_1 < 0$ , tenemos que  $f$  es regular en  $X$  (respecto al sistema de parámetros  $\{y, z\}$ ) y los pares característicos (respecto al sistema de coordenadas  $\{y, z, x\}$ ) son

$$(\lambda'_i, \mu'_i) = \left( \frac{(\lambda_i + 1 - \lambda_1)}{\lambda_1}, \mu_i \right); 1 \leq i \leq s,$$

con excepción del primer par ordenado en el caso en que resultará tener ambas coordenadas enteras, en cuyo caso los pares distinguidos serán

$$(\lambda'_2, \mu'_2), \dots, (\lambda'_s, \mu'_s).$$

**Observación 2.3.3.** *Notemos que en la demostración del lema de inversión se ha terminado con una rama casi ordinaria en  $Y$  y  $Z$  de la forma  $Z^{n/u}H'(Z^{1/u}, Y^{1/n})$ . Por motivos de uniformidad podemos sustituir la letra  $Z$  por  $X$  para obtener una rama casi ordinaria “estándar” en  $X$  e  $Y$  de la forma  $X^{n/u}H'(X^{1/u}, Y^{1/n})$ .*

Del Lema de la Inversión y del Lema 2.3.1 se tiene que todo anillo casi ordinario  $A$  puede ser representado por una rama casi ordinaria  $\zeta$  tal que

1.  $\zeta = 0$ , o
2.  $\zeta = X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ ; ( $n\lambda, n\mu \in \mathbb{Z}$ ;  $H(0, 0) \neq 0$ ) tal que  $\lambda, \mu$  no pueden ser ambos enteros y si  $\lambda + \mu < 1$  entonces  $\lambda > 0$  y  $\mu > 0$ .

**Definición 2.3.4.** *Si  $\zeta$  es de una de las dos formas descritas anteriormente se le llama **rama casi ordinaria normalizada**.*

A continuación, definimos a las ramas casi ordinarias *fuertemente normalizadas* ya que los pares distinguidos de estas ramas están relacionadas a ciertas resoluciones de los anillos a quienes representan.

Dada  $\zeta = X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}, Y^{1/n})$  una rama casi ordinaria normalizada que representa al anillo  $A$ , con pares distinguidos  $(\lambda_i, \mu_i)$ , intercambiando  $X$  e  $Y$  obtenemos otra rama casi ordinaria normalizada  $\zeta'' = Y^\lambda X^\mu H(Y^{1/n}, X^{1/n})$  que también representa al anillo  $A$ , cuyos pares distinguidos son  $(\mu_i, \lambda_i)$ ; salvo esta ambigüedad los pares distinguidos de dos ramas casi ordinarias normalizadas que representan al anillo casi ordinario  $A$  son iguales.

Para eliminar esta ambigüedad se definen las ramas casi ordinarias fuertemente normalizadas

**Definición 2.3.5.**  $\zeta$  una rama casi ordinaria normalizada es **fuertemente normalizada** si

1.  $\zeta = 0$  o
2.  $\zeta \neq 0$  y si  $(\lambda_i, \mu_i)$  con  $i = 1, \dots, s$ . son sus pares distinguidos, se cumple que  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \geq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  en el orden lexicográfico; es decir,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \geq (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  si y solo si existe  $j \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $\lambda_j > \mu_j$  y  $\lambda_i = \mu_i$  para todo  $i < j$ .

Note que toda rama casi ordinaria  $\zeta$  puede ser asociada con una rama casi ordinaria fuertemente normalizada  $\zeta''$  de la siguiente manera: si  $\zeta$  es una rama casi ordinaria y  $\zeta'$  la rama casi ordinaria normalizada asociada a  $\zeta$  si  $\zeta'$  es fuertemente normalizada, tomamos  $\zeta'' = \zeta'$  y si  $\zeta'$  no es fuertemente normalizada intercambiamos  $X$  con  $Y$  en  $\zeta'$  y luego tomamos  $\zeta'' = \zeta'$ .

## 2.4. Cono Tangente y Lugar Singular de un Anillo Casi Ordinario

En esta sección estudiamos la relación entre los invariantes que aparecen en las resoluciones parciales y estrictas del anillo casi ordinario  $A$  (el cono tangente así como la naturaleza del lugar singular de  $A$ ) y los pares distinguidos de cualquier rama normalizada representante de  $A$ , estos resultados han sido obtenidos y adaptados de [9].

**Definición 2.4.1.** Sea  $A$  un anillo local casi ordinario, el **cono tangente de  $A$**  es el esquema afín definido por el anillo graduado asociado  $gr_{\mathfrak{m}}A$  de  $A$  con respecto a su ideal maximal  $\mathfrak{m}$  (vea Definición 3.4.20).

Sea  $A$  un anillo local casi ordinario y  $f$  un polinomio que define a  $A$ . Entonces  $gr_{\mathfrak{m}}A \simeq k[X, Y, Z]/\langle f_I \rangle$ , donde  $f_I$  es la forma inicial de la serie de potencias  $f$  (visto como un elemento de  $k[[X, Y, Z]]$ ).

**Definición 2.4.2.** Sea  $A$  un anillo. El **lugar singular de  $A$** , el cual será denotado por  $Sing(A)$ , viene dado por

$$Sing(A) = \{p \in Spec(A) \mid A_p \text{ no es un anillo local regular}\}.$$

$A_p$  es regular si tiene multiplicidad 1.

**Definición 2.4.3.** Un anillo local  $R$  es **analíticamente no ramificado** si la completación  $\hat{R}$  de  $R$  no tiene elementos nilpotentes excepto del cero.

**Proposición 2.4.4.** Sean  $A$  un anillo local casi ordinario,  $\zeta$  una rama normalizada representante de  $A$ ,  $f$  el polinomio mínimo de  $\zeta$  sobre  $L$  y  $f_I$  la forma inicial de  $f$  cuando  $f$  es visto como una serie de potencias en  $X, Y, Z$ . Entonces una de las afirmaciones siguientes se cumple:

1.  $\lambda + \mu > 1$ , y  $f_I = Z^m$ ; donde  $m = [L(\zeta) : L]$ .
2.  $\lambda + \mu = 1$ , y  $f_I = (Z^t - X^{t\lambda}Y^{t\mu})^r$ ; donde  $t = [L(X^\lambda Y^\mu) : L]$  y  $r = [L(\zeta) : L(X^\lambda Y^\mu)]$ .
3.  $\lambda + \mu < 1$ , y  $f_I = cX^{m\lambda}Y^{m\mu}$ ; donde  $c \in k$ ,  $m\lambda > 0$ ,  $m\mu > 0$ ,  $m = [L(\zeta) : L]$ .

*Demostración.* Recordemos que las conjugadas de  $\zeta$  son de la forma

$$\zeta_i = X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}); H_i(0, 0) \neq 0; i = 1, \dots, m.$$

Así,

$$f(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^m [Z - X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})] = \prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i)$$

Veamos algunos casos particulares de este producto.

Si  $m = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} f &= Z - \zeta_1 \\ &= Z - X^\lambda Y^\mu H_1. \end{aligned}$$

Si  $m = 2$ , entonces

$$\begin{aligned} f &= \prod_{i=1}^2 (Z - \zeta_i) = Z^2 - (\zeta_1 + \zeta_2)Z + \zeta_1\zeta_2 \\ &= Z^2 - X^\lambda Y^\mu (H_1 + H_2)Z + X^{2\lambda} Y^{2\mu} H_1 H_2. \end{aligned}$$

Si  $m = 3$ , entonces

$$\begin{aligned} f &= Z^3 - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)Z^2 + (\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3)Z + \zeta_1\zeta_2\zeta_3 \\ f &= Z^3 - X^\lambda Y^\mu (H_1 + H_2 + H_3)Z^2 + X^{2\lambda} Y^{2\mu} (H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3)Z \\ &\quad - X^{3\lambda} Y^{3\mu} H_1 H_2 H_3. \end{aligned}$$

En general,

$$f = \prod_{i=1}^m (Z - \zeta_i) = Z^m + S_1 Z^{m-1} + \dots + S_m,$$

donde  $S_i$  es la  $i$ -ésima suma simétrica del conjunto  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ . De estas observaciones,

1. Si  $\lambda + \mu > 1$ , es fácil ver que el término de menor orden (grado) es  $Z^m$ ; es decir,

$$f_I = Z^m; \text{ donde } m = [L(\zeta) : L].$$

2. Si  $\lambda + \mu < 1$ , Se tiene que el término de menor orden se encuentra en  $X^{m\lambda}Y^{m\mu}H_1 \dots H_m = X^{m\lambda}Y^{m\mu}(c + \text{términos de mayor orden})$ ,  $c \in k$ . De aquí,

$$f_I = cX^{m\lambda}Y^{m\mu}; \text{ donde } m = [L(\zeta) : L].$$

y como  $\zeta$  es normalizada  $m\lambda > 0$  y  $m\mu > 0$ .

3. Si  $\lambda + \mu = 1$ , entonces

$$f_I = \prod_{i=1}^m [Z - X^\lambda Y^\mu H_i(0, 0)].$$

Desde que un automorfismo  $\theta \in G(L(X^{1/n}, Y^{1/n})/L)$  que deja fijo a  $\zeta = X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}, Y^{1/n})$  deja también fijo a  $X^\lambda Y^\mu$ , se concluye que  $X^\lambda Y^\mu \in L(\zeta) = L(M_1, \dots, M_s)$ , con  $s \leq m$ . Esto significa que  $(\lambda, \mu) = q_1(\lambda_1, \mu_1) + \dots + q_s(\lambda_s, \mu_s)$ ;  $q_i \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado, el automorfismo  $\theta_i \in G(L(\zeta)/L)$  que lleva  $\zeta$  hacia  $X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})$ , lleva a  $X^\lambda Y^\mu$  hacia  $X^\lambda Y^\mu H_i(0, 0)$ . Desde que  $\theta_i$  envía  $X^{1/n}$  hacia  $w_1 X^{1/n}$  y  $Y^{1/n}$  hacia  $w_2 Y^{1/n}$ , donde  $w_1^n = w_2^n = 1$ , se sigue que la familia de elementos  $\{X^\lambda Y^\mu H_i(0, 0)\}$ , con  $i = 1, \dots, m$  es un conjunto completo de conjugadas de  $X^\lambda Y^\mu$ , cada conjugada repitiéndose  $r = [L(\zeta) : L(X^\lambda Y^\mu)]$  veces. El hecho de que hay  $t = \frac{m}{r}$  conjugadas distintas da un producto de la forma  $(Z^t - X^{t\lambda} Y^{t\mu})$  y como cada una de estas se repiten  $r$  veces

$$f_I = (Z^t - X^{t\lambda} Y^{t\mu})^r.$$

Note que por propiedad:  $[L(\zeta) : L] = [L(\zeta) : L(X^\lambda Y^\mu)] \cdot [L(X^\lambda Y^\mu) : L]$  tenemos  $t = \frac{m}{r} = [L(X^\lambda Y^\mu) : L]$ .

□

Observe que la multiplicidad del anillo casi ordinario  $A$  está dada por la multiplicidad del polinomio (casi ordinario e irreducible) que la define (vea Teorema 1.1.13) y la multiplicidad del polinomio esta determinado por su forma inicial; luego, la multiplicidad de  $A$  quedará determinada por los pares distinguidos de la rama casi ordinaria normalizada representante de  $A$  (raíz del polinomio casi ordinario). Así, tenemos el siguiente resultado

**Proposición 2.4.5.**

1.  $\text{mult}(A) = m$ ; si  $\lambda + \mu \geq 1$ .
2.  $\text{mult}(A) = m(\lambda + \mu)$ ; si  $\lambda + \mu < 1$ .

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del Lema 2.4.4.

□

El siguiente teorema nos dice que si  $A$  es un anillo local casi ordinario,  $gr_{\mathfrak{m}}A$  está determinado, salvo isomorfismos, por los pares distinguidos de cualquier rama representante normalizada de  $A$ .

**Teorema 2.4.6.** *Sea  $A$  un anillo local casi ordinario,  $N$  el ideal de elementos nilpotentes de  $gr_{\mathfrak{m}}A$ ,  $\zeta$  cualquier representante de  $A$  y sea  $(\lambda, \mu)$  el menor par distinguido de  $\zeta$ . Entonces solamente una de las siguientes pares de afirmaciones se cumple:*

1. i)  $A$  es un anillo regular, y  $gr_{\mathfrak{m}}A$  es un anillo polinomial sobre  $k$ .  
ii)  $\zeta = 0$ .
2. i)  $\frac{gr_{\mathfrak{m}}A}{N}$  es un anillo polinomial sobre  $k$  y  $N \neq 0$  es un ideal primo.  
ii)  $\zeta \neq 0$  y  $\lambda + \mu > 1$ .
3. i)  $\frac{gr_{\mathfrak{m}}A}{N}$  es de la forma  $\frac{k[X, Y, Z]}{\langle Z^t - X^a Y^b \rangle}$ ; donde  $t, a, b \in \mathbb{Z}$  con  $a + b = t$  y  $N$  es un ideal primo.  
ii)  $\zeta \neq 0$  y  $\lambda + \mu = 1$ . El par no ordenado  $(a, b)$  y  $t$  dependen solo de  $A$ ; además  $(a, b) = (t\lambda, t\mu)$ .
4.  $\frac{gr_{\mathfrak{m}}A}{N}$  es de la forma  $\frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$ ; donde  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  y  $N$  no es un ideal primo.  
ii)  $\zeta \neq 0$  y  $\lambda + \mu < 1$ . El par no ordenado  $(c, d)$  depende solo de  $A$  y  $(c, d) = (t\lambda, t\mu)$  (en algún orden).

*Demostración.* En primer lugar,  $gr_{\mathfrak{m}}A$  es determinado por el par  $(\lambda, \mu)$  y el grado  $m = [L(\zeta) : L]$ . Desde que  $L(\zeta) = L(M_1, \dots, M_s)$ ,  $s \leq m$ ; es decir  $L(\zeta)$  se obtiene adjuntando los monomios característicos de  $\zeta$  a  $L$  (vea Proposición 2.2.22) tenemos que  $m$  está determinado por los pares distinguidos de  $\zeta$ .

Si  $\zeta = 0$ , entonces por la forma como están definidas las conjugadas de  $\zeta$  se tendría que  $\zeta_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ , de donde

$$f = \prod_{i=0}^m (Z - 0) = Z^m$$

y como  $f$  es irreducible, entonces  $m = 1$ ; es decir  $f = Z$ .

Luego,  $A = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle Z \rangle} \simeq k[[X, Y]]$  es un anillo local regular. Por otro lado,  $f_I = Z$ , entonces  $gr_{\mathfrak{m}}A = \frac{k[X, Y, Z]}{\langle Z \rangle} \simeq k[X, Y]$  es un anillo polinomial sobre el cuerpo  $k$  y por tanto un dominio de integridad, de donde  $N = \langle 0 \rangle$ .

Si  $\zeta \neq 0$  es una rama representante normalizada de  $A$ , entonces del lema anterior (Lema 2.4.4) tenemos las siguientes posibilidades para  $gr_m A$

1. Si  $\lambda + \mu > 1$ , entonces  $f_I = Z^m; m > 1$ . Luego,  $gr_m A = \frac{k[X, Y, Z]}{\langle Z^m \rangle}$  (anillo polinomial donde las potencias en  $Z$  solo llegan hasta  $Z^{m-1}$ ) y  $N = \{g \in k[X, Y, Z] \mid \exists 0 < n \in \mathbb{N}; g^n \in \langle Z^m \rangle\} = \langle Z \rangle$  (note que  $N \neq 0$ ). Así,  $\frac{gr_m A}{N} \simeq k[X, Y]$  y como  $k[X, Y]$  es un dominio de integridad  $N$  es un ideal primo.
2. Si  $\lambda + \mu = 1$ , entonces  $f_I = (Z^t - X^c Y^d)^r$ ; donde  $c + d = t \geq 2$ . Luego,  $gr_m A = \frac{k[X, Y, Z]}{\langle (Z^t - X^c Y^d)^r \rangle}$  y  $N = \langle Z^t - X^c Y^d \rangle$  (note que  $N \neq 0$ ). Así,  $\frac{gr_m A}{N} \simeq \frac{k[X, Y, Z]}{\langle Z^t - X^c Y^d \rangle}$ , donde  $t, c, d \in \mathbb{Z}^+$  y  $c + d = t$ . Como  $Z^t - X^c Y^d$  es irreducible, entonces  $N = \langle Z^t - X^c Y^d \rangle$  es primo.
3. Si  $\lambda + \mu < 1$ , entonces  $f_I = X^c Y^d$ ; donde  $c, d \in \mathbb{Z}^+$  y  $(c, d) = (m\lambda, m\mu)$ . Luego,  $gr_m A = \frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$  y  $N = \langle X^c Y^d \rangle$  (note que  $N \neq 0$ ). Así,  $\frac{gr_m A}{N} \simeq \frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$ . Como  $X^c Y^d$  es reducible,  $N = \langle X^c Y^d \rangle$  no es primo.

Así, hemos probado las implicaciones  $ii) \rightarrow i)$ . Recíprocamente,

1.  $i) \rightarrow ii)$  Si  $\zeta \neq 0$  es una rama representante normalizada de  $A$ , entonces  $gr_m A$  no es un anillo polinomial y por tanto  $A$  no es un anillo regular.
2.  $i) \rightarrow ii)$  Se sigue del Lema 2.4.4.
3.  $i) \rightarrow ii)$  El lugar singular de  $Z^t = X^c Y^d$  o bien tiene dos componentes, en cuyo caso estás componentes tienen multiplicidades  $c$  y  $d$  respectivamente, o tiene menos de dos componentes, en cuyo caso uno de los enteros  $c, d$  es 1 y el otro es  $t - 1$  ( $t$  es la multiplicidad del origen). Lo demás se sigue del Lema 2.4.4.
4.  $i) \rightarrow ii)$  el anillo cociente total de  $\frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$ , es decir la localización de  $\frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$  con respecto al conjunto  $S$  cuyos elementos no son divisores de cero de  $\frac{k[X, Y, Z]}{\langle X^c Y^d \rangle}$ , es una suma de dos anillos artinianos de longitudes  $c$  y  $d$  respectivamente. Lo demás se sigue del lema 2.4.4.

□

El siguiente teorema describe la relación entre la naturaleza del lugar singular del anillo casi ordinario  $A$  ( $Sing(A)$ ) y los pares distinguidos de cualquier representante normalizada  $\zeta = X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}, Y^{1/n})$  de  $A$ . Uno de hechos importantes que afirma este teorema es que las únicas curvas (centros) permitidas que pueden aparecer son las que están asociadas a los ideales  $\langle X, \zeta \rangle A$ ,  $\langle Y, \zeta \rangle A$ . Más precisamente, si  $\lambda \geq 1$  entonces  $\langle X, \zeta \rangle A$  es un centro permitido de  $A$  y si  $\mu \geq 1$ , entonces  $\langle Y, \zeta \rangle A$  es un centro permitido de  $A$ . La demostración de este teorema y de sus corolarios, que presentamos a continuación, son reproducciones de las dadas en [9].

**Teorema 2.4.7.** *Sea  $A$  un anillo local, entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple.*

1.  $Sing(A) = \emptyset$ , esto es,  $A$  es un anillo regular.
2. El único miembro de  $Sing(A)$  es el ideal maximal  $m$  de  $A$ .
3.  $Sing(A)$  tiene precisamente una componente  $p \neq m$  y  $p$  es una curva plana no singular.
4.  $Sing(A)$  tiene 2 componentes las cuales son curvas planas que se interceptan transversalmente. Si una de las curvas tiene multiplicidad  $\nu > 1$  en su origen, entonces esta componente tiene multiplicidad  $< e = mult(A)$  en  $A$ , mientras que la otra componente es no singular y tiene multiplicidad  $e$  en  $A$ .

Además, los pares distinguidos nos dicen: Cual de las 4 afirmaciones se cumple para  $A$ ; cual es la multiplicidad de  $A$ ; cuales son las multiplicidades en  $A$  de las curvas en el lugar singular de  $A$ ; la multiplicidad del origen de cada curva.

*Demostración.* Podemos asumir que  $A = k[[X, Y]][[\zeta]]$ , donde  $\zeta \neq 0$  es alguna rama casi ordinaria normalizada. Así el polinomio mínimo de  $\zeta$  tiene la forma

$$f(X, Y, Z) = \prod_{i=1}^m [Z - X^\lambda Y^\mu H_i(X^{1/n} Y^{1/n})]; \quad H(0, 0) \neq 0.$$

Supongamos que  $\lambda > 0$ . Sea  $P = \langle X, Z \rangle R$  ideal en  $R = k[[X, Y, Z]]$ . Entonces  $P^{(a)} = (P^a R_P) \cap R = P^a$ ,  $a \in \mathbb{Z}^+$ . En efecto: como  $P$  es primo y  $P^a$  es  $P$ -primaria (vea Definición 1.1.6) y por Proposición 1.1.5 se concluye que  $P^{(a)} = (P^a R_P) \cap R = P^a$ , donde  $P^a$  es  $a$ -ésima potencia simbólica de  $P$ . Además, es fácil ver que  $f \in P^a$  si y solo si  $a \leq \min\{m, m\lambda\}$ ; por lo tanto, si  $q$  es el ideal  $\langle X, \zeta \rangle A$  en  $A$ , entonces  $q$  es una curva plana no singular de multiplicidad  $\min\{m, m\lambda\}$  en  $A$ . De forma similar se ve que  $A$  tiene multiplicidad  $\min\{m, m\lambda + m\mu\}$ .

Si  $\mu > 0$  se tiene resultados similares.

Supongamos que  $p \in \text{Spec}(A)$  no contiene al discriminante  $X^a Y^b \varepsilon$  de  $f$  (sobre  $k[[X, Y]]$ ), entonces  $A_p$  es una extensión no ramificada (vea [14]) del anillo local regular  $k[[X, Y]]_q$  (donde  $q = p \cap k[[X, Y]]$ ); desde que  $\dim(A_p) = \dim(k[[X, Y]]_q)$  y que el ideal maximal de  $A_p$  es generado por los generadores del ideal maximal de  $k[[X, Y]]_q$ ;  $A_p$  es regular. Por lo tanto, cualquier ideal primo en el lugar singular de  $A$  contiene a  $X$  o a  $Y$ . Si suponemos que  $\lambda$  y  $\mu$  no se anulan, entonces ambos  $X$  e  $Y$  dividen  $f(X, Y, Z) - Z^m$  (en  $k[[X, Y, Z]]$ ); de este modo, ambos  $X$  e  $Y$  dividen  $\zeta^m$  en  $A$ . Si  $p$  contiene uno de  $X, Y$ , entonces  $p$  contiene  $\zeta$ , y  $p$  es uno de los ideales  $\langle X, \zeta \rangle A$ ,  $\langle Y, \zeta \rangle A$ ,  $\langle X, Y, \zeta \rangle A$ . Así, (si  $\lambda$  y  $\mu$  no se anulan), no hay ideales primos diferentes a estos 3 perteneciendo al lugar singular de  $A$  y vemos que precisamente una de las afirmaciones se mantiene.

Supongamos que  $\mu = 0$ . Como  $\zeta$  es normalizada se tiene que  $\lambda > 1$ , y así el ideal  $\langle X, \zeta \rangle A$  es una curva no singular cuya multiplicidad en  $A$  es igual a la multiplicidad de  $A$  (es decir,  $m$ ).

Supongamos que  $p \in \text{Sing}(A)$ . Si  $X \in p$ , entonces, como antes,  $p$  es uno de los ideales  $\langle X, \zeta \rangle A$ ,  $\langle X, Y, \zeta \rangle A$ .

Supongamos que  $X \notin p$ . Entonces  $Y \in p$ . Desde que  $f(X, Y, \zeta) = 0$ ,  $f(X, 0, \zeta) \in p$ . Ahora,  $f(X, 0, Z) = \prod_i [Z - X^\lambda H_i(X^{1/n}, 0)]$ . Afirmamos que  $f(X, 0, Z)$  es una potencia del polinomio mínimo  $g(X, Z)$  de

$$\zeta = X^\lambda H(X^{1/n}, 0),$$

sobre  $k[[X]]$  (o sobre  $k[[X, Y]]$ ). Esto significa que la familia de elementos  $\{X^\lambda H_i(X^{1/n}, 0)\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) es un conjunto completo de conjugadas de  $\zeta_0$ , cada conjugada siendo repetida  $r$  veces, donde  $r = [L(\zeta) : L(\zeta_0)]$ ; la prueba de la ultima afirmación es la misma que la dada para el Lema 2.4.4. Así,  $f(X, 0, Z) = g(X, Z)^r$ .

Como  $f(X, 0, \zeta) \in p$ , tenemos que  $g(X, \zeta) \in p$ . Por otro lado, desde que  $g$  es un elemento irreducible de  $k[[X, Z]]$ , el ideal  $\langle Y, g(X, Z) \rangle R$  es un ideal primo de  $k[[X, Y, Z]]$ . Se sigue que  $p$  es el ideal  $\langle Y, g(X, \zeta) \rangle A$  en  $A$ .

Si  $q$  es el ideal  $\langle Y, g(X, \zeta) \rangle A$ , ¿Cuál es la multiplicidad de  $A_q$ ?, como un primer paso para contestar esta pregunta, notemos que  $L(\zeta_0) = L(X^{1/u})$ , para algún entero  $u$  donde  $L$  el cuerpo de cocientes de  $k[[X]]$  (para esto es claro que  $\zeta_0$  es una rama casi ordinaria, en una variable, cuyos monomios distinguidos son de la forma  $X^{\lambda_1}, \dots, X^{\lambda_t}$ , donde los  $\lambda_i$  son números racionales) y por Proposición 2.2.22, tenemos que  $L(\zeta_0) = L(X^{\lambda_1}, \dots, X^{\lambda_t}) = L(X^{1/u})$ , donde  $u$  es el máximo común divisor de los denominadores de los  $\lambda_i$  cuando estos son escritos como fracciones reducidas.

Ahora, consideremos el anillo  $B = A[X^{1/u}] = k[[X^{1/u}, Y]][\zeta]$ . Los ideales primos de  $B$ , los cuales contienen a  $q$ , son aquellos que contienen a  $Y$  (desde

que  $Y$  divide a  $g(X, \zeta)^r$ . Sin embargo,  $B = \frac{k[[X^{1/u}, Y, Z]]}{h(X^{1/u}, Y, Z)}$  es el polinomio mínimo (en  $Z$ ) de  $\zeta$  (sobre  $k[[X^{1/u}, Y]]$ ); tenemos  $h(X^{1/u}, 0, Z) = (Z - \zeta_0)^r$ , se sigue que cualquier ideal primo en  $B$  conteniendo  $Y$  contiene  $(\zeta - \zeta_0)^r$  y se sigue que cualquier ideal primo en  $B$  conteniendo  $Y$  contiene  $(\zeta - \zeta_0)^r$ ; por lo tanto, contiene el ideal  $Q = (Y, \zeta - \zeta_0)$ .

El ideal  $Q$  es un ideal primo en  $B$ , y desde que  $B$  es integral sobre  $A$ ,  $Q$  debe ser el único ideal primo en  $B$  cayendo sobre  $q$ . Se sigue que  $B_q = B \otimes_A A_q$  es un anillo local, luego  $B_q = B_Q$ .  $B_q$  es un  $A_q$ -módulo finito. El cuerpo residual de  $B_q$  es obtenida del cuerpo residual  $k\{\{X\}\}(\zeta)$  de  $A_q$  por adjunción de un elemento cuyo  $u$ -ésima potencia es  $X$ . Desde que  $k\{\{X\}\}(\zeta_0) = k\{\{X^{1/u}\}\}$ , hay una extensión de cuerpos no residual de  $A_q$  a  $B_q$ . Finalmente, desde que

$$g(X, \zeta) = \prod_{j=1}^t [\zeta - \zeta_0^{(j)}],$$

donde  $\zeta_0 = \zeta_0^{(1)}, \dots, \zeta_0^{(t)}$  son las conjugadas de  $\zeta_0$  sobre  $k[[X]]$ , y desde que, para  $j \neq 1$ ,  $\zeta - \zeta_0^{(j)} \in B$ , pero no en  $Q$  (caso contrario  $\zeta_0 - \zeta_0^{(j)}$ , el cual es de la forma  $X^{v/u}$ . (unidad en  $B$ )) cae sobre  $Q$ , de donde  $X^{1/u}$  cae en  $Q$  y  $Q$  es el ideal maximal de  $B$ , lo cual es absurdo) vemos que de hecho  $QB_q$  es generado por  $Y$  y  $g(X, \zeta)$ , así que  $B_q$  es no ramificado sobre  $A_q$ . Los hechos precedentes implican que  $B_Q = B_q = A_q$  (vea [14]).

Queda por determinar la multiplicidad de  $B_Q$ . Ahora,  $B$  es isomorfo a  $k[[X, Y]][[\bar{\zeta}]]$  donde  $\bar{\zeta}$  es obtenido de  $\zeta - \zeta_0$  reemplazando  $X$  por  $X^u$ , y bajo el homomorfismo indicado,  $Q$  llega a ser el ideal  $\langle Y, \bar{\zeta} \rangle A$ . Como  $\zeta$  es casi ordinario se tiene que  $(\bar{\zeta})$  también es una rama casi ordinaria. Además, examinando  $\zeta$  en la prueba de la Proposición 2.2.26 tenemos que

- i  $\bar{\zeta} = YG(X, Y) \in k[[X, Y]]$ , ó
- ii  $\bar{\zeta}$  es de la forma  $YG(X, Y) + X^\sigma Y^\tau G_1(X^{u/n}, Y^{1/n})$ , con  $G \in k[[X, Y]]$  y  $G(0, 0) \neq 0$ , y donde  $\begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix}, \tau$  es el menor par distinguido de  $\zeta$  cuyo segundo miembro no se anula.

El primer caso ocurre sólo si todos los pares distinguidos  $(\lambda_i, \mu_i)$  de  $\zeta$  son tales que  $\mu_i = 0$  (esto significa que hay equisingularidad a lo largo de la curva  $\langle X, \zeta \rangle$ ); en este caso,  $B_Q$  tiene multiplicidad 1. En el segundo caso, encontramos por razonamientos previos que  $B_Q$  tiene multiplicidad  $\min(r, r\tau)$ . Por lo tanto, hemos determinado la multiplicidad de  $A_q$  en términos de los pares distinguidos de  $\zeta$ .

Notando que  $r < m$  =multiplicidad de  $A$ , vemos que la afirmación 4 se mantiene en este caso. Si  $\lambda = 0$ , un argumento similar nos lleva otra vez a la condición 4.

Para completar la prueba, notemos que toda la información mencionada en la afirmación de la segunda parte del teorema han sido determinadas por los pares distinguidos de  $\zeta$ , y por el grado de ciertas extensiones de cuerpos, que a la vez son determinados por los pares distinguidos.  $\square$

**Corolario 2.4.8.** *Si  $p \in \text{Spec}(A)$ , entonces  $A_p$  es analíticamente irreducible (anillo local cuyo completación no tiene divisores de cero).*

*Demostración.* Claramente podemos restringir nuestra atención a ideales primos en el lugar singular. La ultima parte del Teorema 2.4.7, en la cual reemplazamos  $A_q$  por  $B_Q$ , muestra que nosotros podemos asumir que ni  $\lambda$  ni  $\mu$  se anulan. Por lo tanto, podemos asumir que  $A_p = \frac{R_p}{\langle f \rangle}$ , donde  $P$  es el ideal  $\langle X, Z \rangle R$  en  $R = [[X, Y, Z]]$ , y  $f$  es el polinomio mínimo de  $\zeta$ . La completación de  $R_P$  es claramente el anillo  $k\{\{Y\}\}[[X, Z]]$ , como  $f$  es irreducible sobre  $k\{\{Y, X\}\}$ , concluimos que la completación de  $A_p$  es un dominio de integridad.  $\square$

La condición 2 del Teorema 2.4.7 se cumple si y solo si  $A$  es integralmente cerrado y no regular. En particular, si  $A$  tiene una ecuación que la define de la forma  $Z^m - XY$ ; es decir,  $A$  es isomorfo a  $k[[X, Y]][X^{1/m}Y^{1/m}]$ , entonces  $A$  es normal. La inversa también se cumple.

**Corolario 2.4.9.** *Si  $A$  es normal, entonces  $A$  tiene un polinomio que la define de la forma  $Z^m - XY$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Si  $A$  es regular, entonces  $m = 1$ . Por otro lado, sea  $A = k[[X, Y]][\zeta]$ , donde  $\zeta = X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}Y^{1/n})$  como en la demostración del Teorema 2.4.7. Debido a que  $A$  es normal se tiene que  $A$  no tiene curvas en su lugar singular y concluimos que  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ ; entonces es claro que  $m\lambda = m\mu = 1$ , donde  $m$  es el grado de la ecuación mínima de  $\zeta$  (todo esto se sigue de la primera parte de la prueba del Teorema 2.4.7). Así,  $X^{1/m}Y^{1/m}$  es un monomio distinguido de  $\zeta$ , y desde que  $m = [L(\zeta) : L] = [L(X^{1/m}Y^{1/m}) : L]$ , donde  $L$  es el cuerpo cociente de  $k[[X, Y]]$ , tenemos que  $L(\zeta) = L(X^{1/m}Y^{1/m})$ . Ahora, como  $A$  es la clausura integral  $k[[X, Y]]$  en  $L(\zeta)$ , y como  $k[[X, Y]][X^{1/m}Y^{1/m}]$  es integralmente cerrado, tenemos que

$$A = k[[X, Y]][X^{1/m}Y^{1/m}] = k[[X, Y, Z]]/(Z^m - XY).$$

$\square$

### 3. Resolución de Singularidades

La resolución de singularidades es aplicado para demostrar teoremas de diversos objetos como por ejemplo: variedades algebraicas, ecuaciones diofánticas, cohomología de grupos, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, etc. La existencia de la resolución ya esta demostrada aunque hasta el presente no hay un procedimiento fácil para construir dicha resolución.

En 1970, Hironaka propuso un juego denominado *Hironaka 's Poliedra Game*, donde cada estrategia para ganar dicho juego produce un método diferente de resolver singularidades (vea[6]).

Con la finalidad de tener un acercamiento con la noción de explosión y resolución de singularidades, a continuación tratamos con estas nociones para el caso de curvas planas.

#### 3.1. Resolución de Curvas Planas mediante Explosiones

Con la finalidad de tener un acercamiento con la noción y explosión y resolución de singularidades mediante explosiones de curvas planas, consideremos el siguiente ejemplo que hemos adaptado de la dada en [6].

Sea la curva plana dada por el conjunto de ceros del polinomio  $X^2 - Y^3 = 0$ , más conocida como la cúspide; cuyo punto singular es el origen de coordenadas. Con la finalidad de eliminar esta singularidad podemos jalar de sus ramas, pero para lograr nuestro objetivo necesitamos más espacio, así que empezamos a jalar las ramas verticalmente saliendonos del plano hacia el espacio, vea figura 2, donde se muestra que la singularidad de la cúspide es resuelta jalando de sus ramas verticalmente.

Este hecho hace sospechar que las curvas singulares son la sombra, en el plano, de curvas regulares en el espacio. Note que obtener estas curvas espaciales geoméricamente es fácil, pero ¿como proceder algebraicamente? el problema es: reconstruir curvas espaciales a partir de sus sombras singulares en el plano. La buena noticia es que hay un procedimiento regular para esto, y es pensar a las curvas espaciales como las gráficas de ciertas aplicaciones (sobre la curva singular).

Por ejemplo, para el caso de la cúspide considere la gráfica de la aplicación  $(x, y) \rightarrow x/y$ , el cuál envía a cada punto  $(x, y)$  de la cúspide al punto en el espacio  $(x, y, x/y)$ , produciendo la curva espacial parametrizada por  $\alpha(t) =$

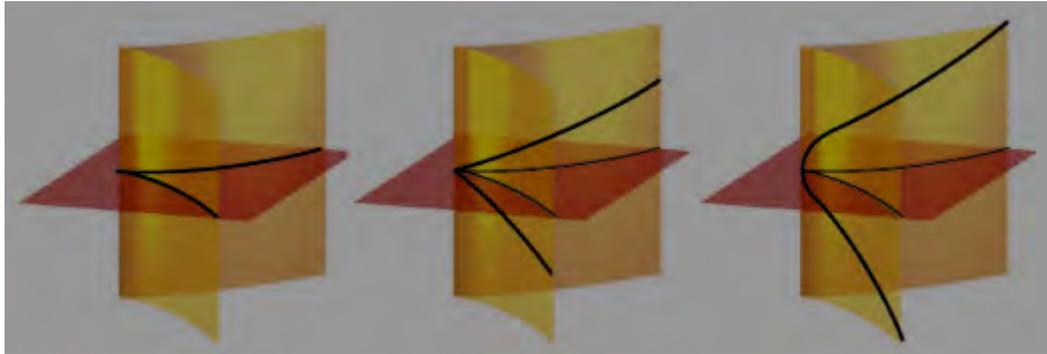


Figura 2: Figura obtenido de [6]

$(t^3, t^2, t)$  y desde que  $\alpha'(t) \neq 0$  se concluye que  $\alpha(t)$  es una curva regular. Es importante mencionar que en este caso, la curva espacial regular se ha encontrado en un solo paso, pero esto no siempre es así, generalmente es requerido varios pasos.

El asociar al conjunto cero de un número finito de polinomios (por ejemplo a la cúspide) la gráfica de una aplicación (razón de variables), sobre ella, se conceptualiza en la noción de *explosión* y la obtención del conjunto cero regular es expresado diciendo que que hemos *resuelto la singularidad mediante explosiones*.

Más generalmente, una forma sencilla de definir la noción de explosión es como sigue: supongamos que tenemos una superficie suave  $S$  y un punto  $p$  de  $S$  empezamos en este punto y construiremos una nueva superficie suave  $T$  llamada la **superficie explosión** y una aplicación  $\pi : T \rightarrow S$  tal que  $\pi^{-1}(p)$  es una curva,  $E$ , llamada **divisor excepcional** y  $\pi$  define un isomorfismo de  $T \setminus \pi^{-1}(p)$  en  $S \setminus \{p\}$ . Los puntos sobre  $E$  corresponden a los diferentes direcciones, en  $S$ , de  $p$ . La aplicación  $\pi$  es llamada **explosión de  $S$  con centro en  $p$** .

A continuación, pasamos a describir de la explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen. Para ello, primero necesitamos describir algunas propiedades de  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ , el **espacio proyectivo 1-dimensional** ó **línea proyectiva**, el cual denotaremos simplemente por  $\mathbb{P}^1$ .

La línea proyectiva  $\mathbb{P}^1$  admite un recubrimiento por abiertos, es decir  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ . Donde:

$$U_0 = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 / x_0 \neq 0\}$$

$$U_1 = \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 / x_1 \neq 0\}$$

que son llamadas **vecindades coordinadas** y para las cuales hay aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_0 : x_1) &\rightarrow x_1/x_0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_0 : x_1) &\longrightarrow x_0/x_1\end{aligned}$$

cuyas inversas dadas por

$$\begin{aligned}\phi_0^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow U_0 \\ x_1 &\longrightarrow (1 : x_1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow U_1 \\ x_0 &\longrightarrow (x_0 : 1)\end{aligned}$$

respectivamente, también son continuas. Por lo tanto,  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son homeomorfismos. Así,  $U_0$  es homeomorfo a  $\mathbb{C}$  y  $U_1$  es homeomorfo a  $\mathbb{C}$ . Esto nos dice que  $\mathbb{P}^1$  localmente luce como  $\mathbb{C}$ , el espacio afín de dimensión 1. Así,  $\mathbb{P}^1$  es una variedad topológica de dimensión 1.

Las aplicaciones  $\phi_i$ ,  $i = 0, 1$ , son llamadas **cartas**, y con su ayuda podemos usar las coordenadas cartesianas en  $\mathbb{C}$  como coordenadas locales en  $U_i \subset \mathbb{P}^1$ .

Para aquellos puntos (elementos en  $U_0 \cap U_1$ ) que se puedan asignar coordenadas mediante las dos cartas, es natural plantearse el cambio de un sistema de coordenadas a otro, este cambio de coordenada se realiza mediante los homeomorfismos

$$\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_1) \longrightarrow \phi_1(U_0 \cap U_1)$$

y

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_0 \cap U_1) \longrightarrow \phi_0(U_0 \cap U_1)$$

dichos homeomorfismos son llamados **funciones de transición, cambio de cartas o cambio de coordenadas** de  $\mathbb{P}^1$ .

**Observación 3.1.1.**  $\mathbb{P}^1$  esta cubierta por 2 vecindades coordenadas  $U_0, U_1$  definidas como arriba.  $\mathbb{P}^1$  tiene coordenadas afines sobre  $U_0$  definidas por  $(x_1 : x_0) \mapsto (1 = \frac{\hat{x}_0}{x_0}, \frac{x_1}{x_0})$  y sobre  $U_1$  definidas por  $(x_1 : x_0) \mapsto (\frac{x_0}{x_1}, \frac{\hat{x}_1}{x_1} = 1)$ . Es decir, el punto  $(x_1 : x_0) \in \mathbb{P}^1$ , visto como un punto de  $U_0$  tiene coordenada (afín)  $v = \frac{x_1}{x_0}$  y visto como un punto de  $U_1$  tiene coordenada (afín)  $u = \frac{x_0}{x_1}$ . Así, el cambio de coordenadas sobre  $U_0 \cap U_1$  viene dado por  $\frac{1}{v} = u$ .

Luego, de esta breve descripción de la línea proyectiva, pasamos a definir la explosión o resolución de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen; es decir, deseamos construir una superficie suave  $M$  y una aplicación  $\pi$  tal que cumpla lo siguiente

1. La preimagen del origen, sea una curva regular compacta.
2.  $\pi$  sea un isomorfismo de  $M \setminus Y$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

La construcción es como sigue: consideremos la aplicación canónica de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  en  $\mathbb{P}^1$  que asocia a cada punto  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  la línea  $(x_0 : x_1)$  que pasa por  $(x, y)$  ( $(x, y) = t(x_0, x_1)$ ;  $0 \neq t \in \mathbb{C}$ ), la gráfica de esta aplicación es una superficie compleja de dimensión 2 en la variedad compleja de dimensión 3,  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ . La gráfica no es cerrado y con la finalidad de construir la clausura uno tiene que agregar la curva excepcional,  $\mathbb{E} = \{0\} \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ , el resultado es una superficie no singular que vamos a denotar por  $T$ . Más precisamente,

$$T = \{(x, y, (x_0 : x_1)) / (x, y) \in (x_0 : x_1)\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

ó equivalentemente

$$T = \{(x, y, (x_0 : x_1)) / yx_0 = xx_1\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

La restricción de la proyección,  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}^2$  (hacia la primera componente) sobre  $T$

$$\begin{aligned} \pi : T &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y, (x_0 : x_1)) &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

es una aplicación holomorfa que satisface las siguientes propiedades

1.  $\mathbb{E} = \pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}^1$  es una curva  $\simeq \mathbb{P}^1$ .
2.  $\pi$  define un isomorfismo de  $T \setminus \pi^{-1}(0, 0)$  en  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

La superficie  $T$  es la llamada la **superficie explosión**, la aplicación  $\pi$  es llamada la **aplicación explosión** de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen y la curva  $\mathbb{E}$  es llamado el **divisor excepcional**.

A continuación, describimos los abiertos de la superficie de explosión. Recordemos que  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ ; es decir,  $\mathbb{P}^1$  esta cubierta por dos abiertos isomorfos a  $\mathbb{C}$ . Esta propiedad de  $\mathbb{P}^1$  induce un cubrimiento para la superficie de explosión, por abiertos  $\widetilde{U}_0, \widetilde{U}_1$ , los cuales son definidos de la siguiente manera

$$\widetilde{U}_0 = \{(x, y, (x_0 : x_1)) \in T \mid x_0 \neq 0\} = \{(x, x \frac{x_1}{x_0}, (x_0 : x_1)) \mid x_0 \neq 0\}.$$

$$\widetilde{U}_1 = \{(x, y, (x_0 : x_1)) \in T \mid x_1 \neq 0\} = \{(y \frac{x_0}{x_1}, y, (x_0 : x_1)) \mid x_1 \neq 0\}.$$

$\widetilde{U}_0$  es isomorfo a  $\mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(x, \frac{x_1}{x_0})$ , mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \widetilde{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, x \frac{x_1}{x_0}, (x_0 : x_1)) &\longmapsto (x, \frac{x_1}{x_0}), \end{aligned}$$

mientras que,  $\widetilde{U}_1$  es isomorfo a  $\mathbb{C}^2$  con coordenadas  $\left(\frac{x_0}{x_1}, y\right)$  mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \widetilde{U}_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \left(\frac{y \frac{x_0}{x_1}, y, (x_0 : x_1)}\right) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, y\right). \end{aligned}$$

Poniendo

$$U_0 = \{x_0(1 : x_1/x_0) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/x_0 \neq 0\} = \{(1 : v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/v \in \mathbb{C}\}$$

$$U_1 = \{x_1(x_0/x_1 : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/x_1 \neq 0\} = \{(u : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/u \in \mathbb{C}\}$$

$\widetilde{U}_0, \widetilde{U}_1$  quedarían definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_0 &= T \cap (\mathbb{C}^2 \times U_0) = \{(x, xv, (1 : v))/x, v \in \mathbb{C}\} \\ \widetilde{U}_1 &= T \cap (\mathbb{C}^2 \times U_1) = \{(yu, y, (u : 1))/y, u \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Se cumple que:  $\widetilde{U}_0 \simeq \mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(x, v)$ , vía el isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \widetilde{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, xv, (1 : v)) &\longmapsto (x, v) \end{aligned}$$

y  $\widetilde{U}_1 \simeq \mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(u, y)$ , vía isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \widetilde{U}_1 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (yu, y, (u : 1)) &\longmapsto (u, y). \end{aligned}$$

**Observación 3.1.2.** *La relación entre las coordenadas viene dada por:  $u = \frac{1}{v}$ , y por  $y = xv$ .*

A continuación, pasamos a describir la representación local de la explosión.

Sea  $\pi : T \longrightarrow \mathbb{C}^2$  la explosión de  $\mathbb{C}^2$  en el origen.

$\pi$  vista desde el abierto de la superficie de explosión  $\widetilde{U}_0$  (isomorfa a  $\mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(x, v)$ ), es denotada por  $\pi_0$  y viene dada por

$$\pi_0(x, v) = \pi \circ \varphi_0^{-1}(x, v) = \pi((x, xv; 1 : v)) = (x, xv)$$

y vista desde el abierto de la superficie de explosión  $\widetilde{U}_1$  (isomorfa a  $\mathbb{C}^2$  con coordenadas  $(u, y)$ ); la denotamos por  $\pi_1$  y viene dada por

$$\pi_1(u, y) = \pi \circ \varphi_1^{-1}(u, y) = \pi((yu, y; u : 1)) = (yu, y)$$

y de esta forma expresamos

$$\pi := \pi_0 \sqcup \pi_1.$$

**Observación 3.1.3.** En general, podemos definir la explosión de  $\mathbb{C}^n$  con centro en el origen; en este caso, la superficie de explosión sería

$$T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, (z_1 : z_2 : \dots : z_n)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid \exists \lambda \text{ con } x_i = \lambda z_i\},$$

la cual esta cubierta por  $n$  abiertos isomorfos a  $\mathbb{C}^n$ :

$$\tilde{U}_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, (z_1 : z_2 : \dots : z_n)) \in T \mid z_i \neq 0\},$$

con coordenadas afines

$$u_1 = \frac{z_1}{z_i}, \dots, u_{i-1} = \frac{z_{i-1}}{z_i}, \dots, u_i = x_i; \dots, u_n = \frac{z_n}{z_i}.$$

Entonces, la aplicación explosión  $\pi : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{U}_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (u_1, \dots, u_n) &\longmapsto (u_1 u_i, \dots, u_i, \dots, u_n u_i). \end{aligned}$$

Ahora, pasamos a estudiar el comportamiento de curvas inmersas en  $\mathbb{C}^2$  bajo la explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en  $(0, 0)$ .

1. Debido a que  $\pi$  es un biholomorfismo de  $T \setminus \pi^{-1}(0, 0)$  en  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , si la curva  $C$  no pasa por el origen se corresponde con una única curva  $\pi^{-1}(C)$  en  $T$ .
2. Si la curva  $C$  pasa por el origen: consideremos que  $C$  es definida en una vecindad del origen por una ecuación afín  $f(x_0, x_1) = 0$ , donde

$$f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad \text{y} \quad f(0, 0) = 0.$$

Sabemos que  $T$  esta cubierto por dos abierto  $T = \tilde{U}_0 \cup \tilde{U}_1$ . Escojamos la vecindad coordenada  $\tilde{U}_0$  para analizar el comportamiento de la curva bajo la explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen.

Relativa a esta coordenada  $\pi$  se describe por

$$\begin{aligned} \pi_0 : \tilde{U}_0 \simeq \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, v) &\longmapsto (x, xv) \end{aligned}$$

Sea  $m$  el orden de  $f$  en 0, entonces  $\pi^{-1}(C) \cap \tilde{U}_0$  viene dado por:

$$\tilde{f}(x, v) = f(\pi_0(x, v)) = f(x, xv) = \sum a_{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} v^\beta = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} v^\beta \\ 0 &= x^m (f_0^{(1)}(x, v)). \end{aligned}$$

Así, vemos que  $(\pi^{-1}(C)) \cap \tilde{U}_0$  consiste de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cap \tilde{U}_0$  y de la curva  $C_0^{(1)}$  con ecuación  $f_0^{(1)}(x, v)$ , donde  $f_0^{(1)}(x, v)$  no se anula sobre  $x = 0$ .

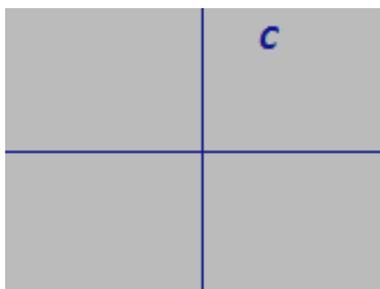


Figura 3: Gráfico de la curva  $C$ .

**Definición 3.1.4.** La transformada estricta o propia,  $C^{(1)}$ , de la curva  $C$  en  $T$ , bajo la explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen es la unión de  $C_0^{(1)}$  y  $C_1^{(1)}$ ; es decir,  $C^{(1)} = C_0^{(1)} \cup C_1^{(1)}$ .

**Ejemplo 3.1.5.** Sea  $C$  la curva dada por  $C : (f(x, y) = x \cdot y = 0)$ .

**En el abierto  $\widetilde{U}_0$ :**  $\pi^{-1}(C) \cap \widetilde{U}_0 : f(\pi_0(x, v)) = f(x, xv) = x^2v = 0$  (vea figura 4(a)).

**En el abierto  $\widetilde{U}_1$ :**  $\pi^{-1}(C) \cap \widetilde{U}_1 : f(\pi_1(u, y)) = f(uy, y) = y^2u = 0$  (vea figura 4(b)). Dibujando a  $\pi$  en su totalidad (vea figura 5):

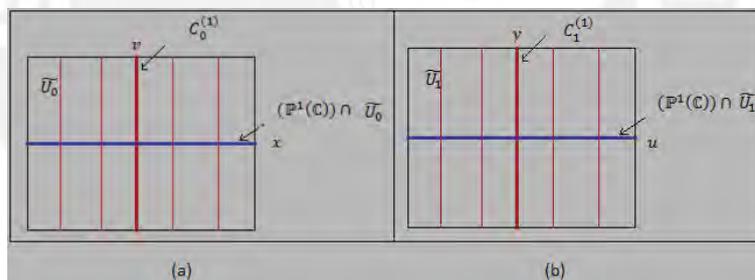


Figura 4: Vista de la transformada estricta en cada uno de los abiertos

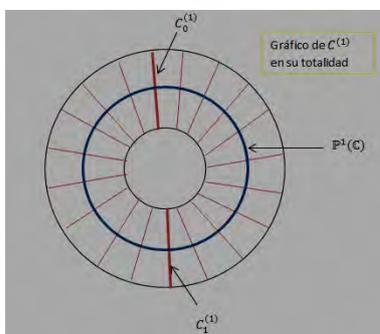


Figura 5: Idea de la preimagen estricta de la curva (figura adaptada de la dada en [2])

Notemos que la pre imagen  $C^{(1)} = C_0^{(1)} \cup C_1^{(1)}$  de  $C$ ; por lo tanto, consiste de dos líneas, los cuales ya no se interceptan y esto se esperaba ya que la explosión se ha construido precisamente para separar todas las líneas que pasen por el origen (vea figura 6).

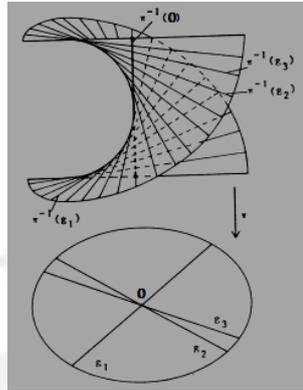


Figura 6: Comportamiento de las líneas que pasan por el origen bajo la explosión (Figura obtenido de [2])

**Definición 3.1.6** (Cruzamientos normales). *Una colección de curvas en una superficie suave se dice que tienen **cruzamientos normales** si las curvas son suaves; tres de ellas no se interceptan en un mismo punto, y cualquier intersección de dos de ellas es transversal.*

**Definición 3.1.7.** *La **resolución estándar o minimal** de la singularidad de una curva plana es aquella resolución con cruzamientos normales que se obtiene con el mínimo número de explosiones.*

A continuación, describimos la resolución estándar de la singularidad de la curva plana  $C : f(x, y) = y^8 - x^{11} = 0$  (ejemplo adaptado de la dada en [20]).

El punto singular de la curva es  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Por lo tanto, realizamos una explosión de  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen con la finalidad de resolver esta singularidad.

#### 1. Primera explosión.

Al realizar la primera explosión de (la superficie suave)  $\mathbb{C}^2$  con centro en el origen, se produce una nueva superficie suave  $T_1 = \widetilde{U}_0^1 \cup \widetilde{U}_1^1$  y una aplicación  $\pi_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

★ *Análisis de la transformada total (pre-imagen) de la curva  $C$  en el abierto  $\widetilde{U}_1^1$* : haciendo los cálculos se sabe que la transformada estricta  $C^{(1)}$  de  $C$  en este abierto no interceptará a la curva excepcional y como la

explosión fuera del origen es un biholomorfismo, la transformada estricta no es singular en este abierto.

★ *Análisis de la transformada total (pre-imagen) de la curva  $C$  en el abierto  $\widetilde{U}_0^1$* : este abierto viene dado por la transformación:  $x = x_1$ ;  $y = x_1 y_1$ . Así, la transformada total de la curva  $C$  viene dada por:  $f(x_1, x_1 y_1) = x_1^8 (y_1^8 - x_1^3) = 0$ . De aquí, tenemos

- La curva excepcional viene dada por:  $E^{(1)} : x_1 = 0$  (contada 8 veces, pues la multiplicidad de la curva  $C$  en el origen es 8).
- $C^{(1)}$  de  $C$  viene definida por la ecuación:  $f_1(x_1, y_1) = y_1^8 - x_1^3$ .
- Punto de intersección de  $C^{(1)}$  y  $E^{(1)}$ :  $C^{(1)} \cap E^{(1)} = \{(0, 0)\}$ .
- punto singular de  $C^{(1)}$ :  $(0, 0)$ .
- $\nu_0(C^{(1)}) = 3$ .

Como la transformada estricta  $C^{(1)}$  en  $T_1$  de  $C$  es aún singular  $(0, 0)$  se debe explotar ahora  $T_1$  con centro en  $(0, 0)$ .

### Observaciones 3.1.8.

*i En las siguientes explosiones únicamente se detallará la explosión en los abiertos adecuados de las nuevas superficies producidas al realizar sucesivas explosiones, sobreentendiendo que en el abierto no analizado la singularidad está resuelta.*

*ii Al realizar la explosión  $i$  denotaremos por el mismo  $E^{(j)}$  a las transformadas estrictas de  $E^{(j)}$ , donde  $j < i$ .*

### 2. Segunda explosión (en el abierto $\widetilde{U}_1^2$ ).

Hacemos  $x_1 = x_2 y_2$ ;  $y_1 = y_2$ . Así, la transformada total de la curva  $C^{(1)}$  viene dada por:  $f_1(x_2 y_2, y_2) = y_2^3 (y_2^5 - x_2^3) = 0$ . De aquí, tenemos

- La curva excepcional viene dada por:  $E^{(2)} : y_2 = 0$  (contada 3 veces).
- La transformada estricta  $C^{(2)}$  de  $C$  es:  $C^{(2)} : f_2(x_2, y_2) = y_2^5 - x_2^3$ .
- La transformada estricta de  $E^{(1)}$  viene dada por:  $E^{(1)} : x_2 = 0$ .
- Punto de intersección:  $C^{(2)} \cap E^{(2)} = \{(0, 0)\}$ .
- punto singular de  $C^{(2)}$ :  $(0, 0)$ .
- $\nu_0(C^{(2)}) = 3$ .

### 3. Tercera explosión (en el abierto $\widetilde{U}_1^3$ ).

Hacemos  $x_2 = x_3 y_3$ ;  $y_2 = y_3$ . Así, la transformada total de la curva  $C^{(2)}$  viene dada por:  $f_2(x_3 y_3, y_3) = y_3^3 (y_3^2 - x_3^3) = 0$ . De aquí tenemos

- La curva excepcional viene dada por  $E^{(3)} : y_3 = 0$  (contada 3 veces).
- La transformada estricta  $C^{(3)}$  de  $C$  viene dada por:  
 $C^{(3)} : f_3(x_3, y_3) = y_3^2 - x_3^3$ .
- La transformada estricta de  $E^{(1)}$ , viene dada por:  $E^{(1)} : x_3 = 0$ .
- La transformada estricta de  $E^{(2)}$  no intercepta al dominio de este abierto (pues, su transformada estricta en este abierto se definiría como los ceros de la ecuación  $1 = 0$ ).
- Punto de intersección  $C^{(3)} \cap E^{(3)} = \{(0, 0)\}$ .
- punto singular de  $C^{(3)} : (0, 0)$ .
- $\nu_0(C^{(3)}) = 2$ .

4. Cuarta explosión (en el abierto  $\widetilde{U}_0^4$ ).

Hacemos  $x_3 = x_4$ ;  $y_3 = x_4 y_4$ . Así, la transformada total de la curva  $C^{(3)}$  viene dada por:  $f_4(x_4, y_4) = x_4^2(y_4^2 - x_4) = 0$ . De aquí, tenemos

- La curva excepcional viene dada por  $E^{(4)} : x_4 = 0$  (contada 2 veces).
- La transformada estricta  $C^{(4)}$  de  $C$  viene dada por  
 $C^{(4)} : f_4(x_4, y_4) = y_4^2 - x_4$
- La transformada estricta de  $E^{(1)}$  no intercepta al dominio de este abierto.
- La transformada estricta de  $E^{(2)}$  no intercepta al dominio de este abierto.
- La transformada estricta de  $E^{(3)} : y_4 = 0$ .
- Punto de intersección  $C^{(4)} \cap E^{(4)} = \{(0, 0)\}$ .
- $\nu_0(C^{(4)}) = 1$ . Así, la singularidad ha quedado resuelta. Las 4 explosiones son ilustrados en la figura 7.

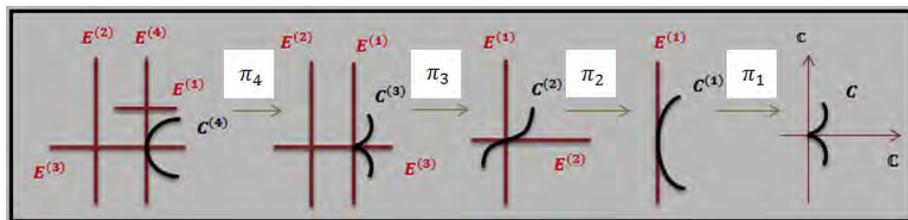


Figura 7: Comportamiento de la curva y las curvas excepcionales bajo las primera 4 explosiones

Sin embargo esta resolución no satisface aún la siguiente situación: La curva excepcional no intercepta a la transformada estricta de  $C$  transversalmente y se dice que esta resolución no tiene cruzamientos normales.

Para la obtención de una resolución estándar debemos seguir explotando.

5. Quinta explosión (en el abierto  $\widetilde{U}_1^5$ ).

Hacemos  $x_4 = x_5 y_5$ ;  $y_4 = y_5$ . Así, la transformada total de la curva  $C^{(4)}$  viene dada por:  $f_4(x_5 y_5, y_5) = y_5(y_5 - x_5) = 0$ . De aquí, tenemos

- $E^{(5)} : y_5 = 0$  (contada 1 vez).
- $C^{(5)} : f_5(x_5, y_5) = y_5 - x_5$ .
- $E^{(4)} : x_5 = 0$ .
- Las transformadas estrictas de  $E^{(3)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$  (denotadas por ellas mismas) no interceptan al dominio de este abierto.
- Punto de intersección  $C^{(5)} \cap E^{(5)} = \{(0, 0)\}$ .
- $\nu_0(C^{(5)}) = 1$ .

A continuación, en la figura 8, se muestra el gráfico de la transformada total de esta quinta explosión. Como se muestra en la figura 8, tenemos

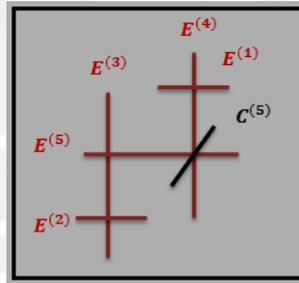


Figura 8:

una mejor situación, pero todavía no hay cruzamientos normales, lo cual se logra una nueva que explosión (vea figura 9).

6. Sexta explosión (en cualquiera de los abiertos).

- $E^{(6)} : x_6 = 0$  (contada 1 vez).
- $C^{(6)} : f_6(x_6, y_6) = y_6 - 1$ .
- $E^{(5)} : y_6 = 0$ .
- Las transformadas estrictas de  $E^{(4)}$ ,  $E^{(3)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$  (denotadas por ellas mismas) no interceptan al dominio de este abierto.
- Punto de intersección  $C^{(6)} \cap E^{(6)} = \{(0, 1)\}$ .

Así, hemos logrado la resolución estándar.

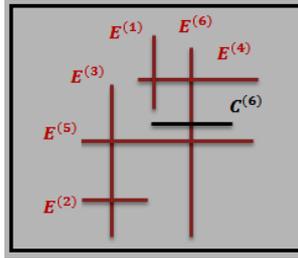


Figura 9: Resolución estándar

### 3.2. Definición de Explosión de Esquemas

Previamente a la definición de la explosión de esquemas, damos un breve tratamiento de la construcción *proj*.

La construcción *proj*, es una construcción análoga a la de esquema afín. Esta construcción es fundamental en la teoría de esquemas.

*Proj* como un conjunto: sea  $C = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  un anillo graduado (vea Definición 3.4.16), el conjunto  $proj(C)$  es el conjunto de todos los ideales primos homogéneos que no contienen al ideal irrelevante  $C_+ = \bigoplus_{i > 0} S_i$  (vea Definición 3.4.17).

*proj* como un espacio topológico: podemos darle una topología (la topología de Zariski) a  $proj(C)$  definiendo como los cerrados de esta topología a los conjuntos

$$\mathcal{Z}(I) = \{P \in proj(C) \mid I \subseteq P\},$$

donde  $I$  denota a un ideal homogéneo de  $C$ . Se prueba que los conjuntos  $\mathcal{Z}(I)$  satisfacen las propiedades de los cerrados de un espacio topológico. Los conjuntos abiertos  $\mathcal{D}(I)$  en  $Proj(C)$  son simplemente los complementos de los cerrados; es decir,

$$\mathcal{D}(I) = \{P \in proj(C) \mid I \not\subseteq P\},$$

los abiertos de la forma  $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\langle f \rangle)$ ,  $f \in C$  homogéneo, forman una base para los abiertos de  $Proj(C)$  y son indispensables como lo son los abiertos básicos, en el caso afín.

*Proj* como un esquema: se construye un haz para  $proj(C)$  que como en el caso afín es llamado **haz estructural**, que convierte a *proj* en un esquema.

Luego de esta breve introducción a la estructura *proj*, a continuación definimos la explosión de esquemas.

Sea  $R$  un anillo local noetheriano,  $S = Spec(R)$ ,  $M$  ideal maximal de  $R$ ,  $k = \frac{R}{M}$  y  $P \in Spec(R)$ , y  $C = Bl_P R = \bigoplus_{n \geq 0} P^n$ , el álgebra explosión de  $P$  en  $R$  (vea Definición 3.4.21), que es de forma natural un  $R$ -álgebra graduada con lo que  $T = proj(C)$  es un  $S$ -esquema.

**Definición 3.2.1.** El  $S$ -esquema  $T = \text{proj}(C)$  es llamada la **explosión** de  $S$  con centro en  $P$  y el morfismo estructural  $\pi : T \rightarrow S$  es llamada la **aplicación explosión** de  $S$  con centro en  $P$ .

- Cuando el centro  $P = M$ , entonces  $T$  es llamada la **transformada cuadrática de  $S$**  y  $\pi : T \rightarrow S$  es llamada la **transformación cuadrática de  $S$**  y
- cuando el centro es  $P \neq M$ , entonces  $T$  es llamada la **transformada monoidal de  $S$  con centro en  $P$**  y  $\pi : T \rightarrow S$  es llamada la **transformación monoidal de  $S$  con centro en  $P$** .

$\pi^{-1}(P)$  es llamado el **divisor excepcional** de la explosión, y se cumple que

$$\pi^{-1}(P) \simeq \text{proj}(gr_P R) = \text{proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \frac{P^n}{P^{n+1}}\right);$$

De forma análoga, se tiene que  $\pi^{-1}(M)$  la pre imagen de  $M$  (del origen) en  $T$ , es tal que

$$\pi^{-1}(M) \simeq \text{proj}\left(\frac{R}{M} \oplus C\right) = \text{proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \frac{P^n}{MP^n}\right).$$

En otras palabras, si  $P = \langle X_1, \dots, X_n \rangle R$ , entonces  $\pi^{-1}(M)$  es el esquema proyectivo sobre  $k$  definido por el anillo graduado  $k[x_1, \dots, x_n]$ , donde

$$x_i = X_i \text{ mod } MP, \quad \text{deg}(x_i) = 1; \quad i = 1, \dots, n.$$

Como un espacio topológico  $\pi^{-1}(M)$  es un subespacio cerrado de  $T$ .

Además, cuando  $P = \langle X_1, \dots, X_n \rangle R$ , entonces  $T$  está recubierto por  $n$  abiertos isomorfos a los esquemas afines

$$T_{X_i} = \text{Spec}\left(R \left[ \frac{X_1}{X_i}, \dots, \left(\frac{\hat{X}_i}{X_i}\right), \dots, \frac{X_n}{X_i} \right]\right); \quad i = 1, \dots, n.$$

**Definición 3.2.2.** Se dice que un anillo  $R'$  es una **transforma monoidal** (o **cuadrática**, cuando  $P = M$ ) del anillo  $R$ , si  $R'$  es el anillo local sobre  $T$  de algún punto cerrado de  $\pi^{-1}(M)$ .

**Ejemplo 3.2.3.** Consideremos el caso particular en el que  $R = k[[X, Y, Z]]$ ,  $k$  algebraicamente cerrado, entonces  $\pi^{-1}(M)$  se define como sigue:

- Si el centro de explosión es  $P = \langle X, Y \rangle R$ ,  $\pi^{-1}(M)$  es definido por el anillo polinomial  $k[x, y]$ ; es decir,  $\pi^{-1}(M)$  es la línea proyectiva sobre  $k$ .

Así, los puntos cerrados de  $\pi^{-1}(M)$  están en correspondencia biunívoca con las direcciones  $(\alpha : \beta) \neq (0 : 0)$ ,  $\alpha, \beta \in k$ .

- Si el centro de explosión es  $P = M = \langle X, Y, Z \rangle R$ , entonces  $\pi^{-1}(M)$  es definido por el anillo polinomial  $k[x, y, z]$ ; es decir,  $\pi^{-1}(M)$  es el plano proyectivo sobre  $k$ .

Así, los puntos cerrados de  $\pi^{-1}(M)$  están en correspondencia biunívoca con las direcciones  $(\alpha : \beta : \gamma) \neq (0 : 0 : 0)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in k$ .

Sea  $\pi : T \longrightarrow S = \text{Spec}(k[[X, Y, Z]])$  la explosión de  $S = \text{Spec}(R)$  cuando  $R = k[[X, Y, Z]]$  con centro en  $P = M = \langle X, Y, Z \rangle$  también llamada transformación cuadrática de  $S = \text{Spec}(R)$  y sea  $T$  la explosión del esquema afín  $S$  con centro en  $P = M = \langle X, Y, Z \rangle$  también llamada transformada cuadrática de  $S$

En este caso,  $T$  es cubierta por 3 abiertos isomorfos a los 3 esquemas afines

$$\begin{aligned} T_X &= \text{Spec} \left( R \left[ \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right] \right), \\ T_Y &= \text{Spec} \left( R \left[ \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right] \right), \\ T_Z &= \text{Spec} \left( R \left[ \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right] \right). \end{aligned}$$

Además,  $\pi^{-1}(M) = k[x, y, z]$  es isomorfo al plano proyectivo y por lo tanto, los puntos cerrados de  $\pi^{-1}(M)$  están en correspondencia con las direcciones  $(\alpha : \beta : \gamma) \neq (0 : 0 : 0)$  (vea Ejemplo 3.2.3).

Sea  $\rho$  un punto cerrado de  $\pi^{-1}(M)$  y sea  $(\alpha : \beta : \gamma)$  la dirección correspondiente a  $\rho$  en el plano proyectivo (y por lo tanto podemos pensarlos como iguales,  $\rho = (\alpha : \beta : \gamma)$ ), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} i) \rho \in T_X &\leftrightarrow \alpha \neq 0, \\ ii) \rho \in T_Y &\leftrightarrow \beta \neq 0, \\ iii) \rho \in T_Z &\leftrightarrow \gamma \neq 0. \end{aligned}$$

Puesto que la transformación cuadrática de  $S$  es un fenómeno local, a continuación nos centramos en estudiar su representación local en el abierto  $T_X$ . Es decir, en el punto cerrado  $\rho$  de  $\pi^{-1}(M)$  correspondiente a la dirección  $(\alpha : \beta : \gamma)$ ,  $\alpha \neq 0$ . En este caso se tiene que  $R'$ , la transformada cuadrática del anillo  $R = k[[X, Y, Z]]$ , es un anillo local regular de dimensión 3 y que  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{Z}{X} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\}$  es un sistema regular de parámetros para  $R'$  (vea [9]) y la transformada estricta de  $f \in P = M$  y la transformada cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  (en el abierto  $T_X$ ) son definidos de la siguiente manera:

Recordemos que  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{Z}{X} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\}$  es un sistema regular de parámetros para  $R'$ , la transformada cuadrática de  $R = k[[X, Y, Z]]$  (en el abierto

$T_X$ ). Denotemos por

$$X' = X; \quad Y' = \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}; \quad Z' = \frac{Z}{X} - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

De donde,

$$X = X'; \quad Y = \left(Y' + \frac{\beta}{\alpha}\right) X'; \quad Z = \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) X'.$$

Si  $f$  es escrito en la forma:

$$f(X, Y, Z) = f_s(X, Y, Z) + f_{s+1}(X, Y, Z) + \dots,$$

donde  $f_i(X, Y, Z)$  es una forma homogénea de grado  $i$  en  $X, Y, Z$ , entonces, la transformada estricta de  $f$  viene dada por

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f}{X^s} = \frac{f\left(X', \left(Y' + \frac{\beta}{\alpha}\right) X', \left(Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) X'\right)}{X^s} \\ &= f_s\left(1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + X' f_{s+1}\left(1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \dots \end{aligned}$$

donde  $s$  es el mayor entero tal que  $f \in P^s = M^s$ . Notemos que  $f'$  no es unidad en  $R'$  si y solo si

$$\begin{aligned} f_s\left(1, 0 + \frac{\beta}{\alpha}, 0 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) &= 0 \\ f_s(\alpha, \beta, \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

**Definición 3.2.4.** Cuando  $f'$  no es unidad en  $R'$  ( $f_s(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ) y  $\hat{R}'$  es la completación de  $R'$ , entonces  $\frac{\hat{R}'}{\langle f' \rangle}$  es un anillo local completo de dimensión 2, el cual es la completación de alguna transformada cuadrática de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  y es llamada **la transformada cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$** .

Además, se tiene que  $\frac{\hat{R}'}{\langle f' \rangle}$  es isomorfa a  $\frac{R}{\langle f \rangle}$ . En los otros abiertos se tienen resultados análogos como se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.5.** Sean  $f = f_s(X, Y, Z) + f_{s+1}(X, Y, Z) + \dots \in R = k[[X, Y, Z]]$  ( $s > 0$ ) y  $f_i$  polinomio homogéneo de grado  $i$  en  $X, Y, Z$ . Sea  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ , donde  $\alpha, \beta, \gamma \in k$  tal que  $f_s(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ .

■ Si  $\alpha \neq 0$ , definimos:

$$f'_{\alpha, \beta, \gamma} = f_s\left(1, Y + \frac{\beta}{\alpha}, Z + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + X f_{s+1}\left(1, Y + \frac{\beta}{\alpha}, Z + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \dots$$

( $f'_{\alpha,\beta,\gamma}$  no es unidad en  $R$  por hipótesis) y  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$  es isomorfo a la completación de la transformación cuadrática de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $\rho = (\alpha : \beta : \gamma) \in \pi^{-1}(M)$  con  $\alpha \neq 0$ .

- Si  $\beta \neq 0$ ; definimos:

$$f'_{\alpha,\beta,\gamma} = f_s \left( X + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z + \frac{\gamma}{\beta} \right) + Y f_{s+1} \left( Y + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z + \frac{\gamma}{\beta} \right) + \dots$$

( $f'_{\alpha,\beta,\gamma}$  no es unidad en  $R$  por hipótesis) y  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$  es isomorfo a la completación de la transformación cuadrática de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $\rho = (\alpha : \beta : \gamma) \in \pi^{-1}(M)$  con  $\beta \neq 0$ .

- Si  $\gamma \neq 0$ ; definimos:

$$f'_{\alpha,\beta,\gamma} = f_s \left( X + \frac{\alpha}{\gamma}, Y + \frac{\beta}{\gamma}, 1 \right) + Y f_{s+1} \left( X + \frac{\alpha}{\gamma}, Y + \frac{\beta}{\gamma}, 1 \right) + \dots$$

( $f'_{\alpha,\beta,\gamma}$  no es unidad en  $R$ , por hipótesis) y  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$  es isomorfo a la completación de la transformación cuadrática de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $\rho = (\alpha : \beta : \gamma) \in \pi^{-1}(M)$  con  $\gamma \neq 0$ .

Por lo tanto, también tiene sentido llamar cualquiera de estos anillos  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$ ,  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$ ,  $\frac{R}{\langle f'_{\alpha,\beta,\gamma} \rangle}$  la **transformación cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $(\alpha : \beta : \gamma)$**  (una para cada dirección adecuada) y solo dependen del anillo  $\frac{R}{\langle f \rangle}$ .

**Definición 3.2.6.** Cuando  $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$  usaremos el término **transformada cuadrática formal de  $A$** , para referirnos a la transformada cuadrática formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$ .

En particular, si  $f$  es el polinomio de una superficie casi ordinaria irreducible  $V = \text{Spec}(A)$  respecto de algún sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$ , lo anterior nos da la transformada cuadrática formal del anillo casi ordinario  $A$  de  $V$ .

A continuación, pasamos a describir la explosión de  $S = \text{Spec}(R)$  cuando  $R = k[[X, Y, Z]]$  con centro un ideal primo  $P \neq M$  de  $R$ , también llamada la transformación monoidal de  $S = \text{Spec}(R)$ , con  $P \neq M$  de  $R$ .

Sea  $\pi : T \rightarrow S = \text{Spec}(k[[X, Y, Z]])$  la transformación monoidal de  $S$  con centro en  $P \neq M$  generado por dos de las variables  $X, Y, Z$ , digamos por  $X, Y$ ; es decir,  $P = \langle X, Y \rangle$  y sea  $T$  la transformada monoidal de  $S$  con centro en  $P$ .

En este caso  $T$ , la transformada monoidal de  $S$  con centro en  $P$ , es cubierto por dos abiertos isomorfos a los esquemas afines

$$T_X = \text{Spec} \left( R \left[ \frac{Y}{X} \right] \right),$$

$$T_Y = \text{Spec} \left( R \left[ \frac{X}{Y} \right] \right).$$

y  $\pi^{-1}(M) = k[x, y]$  es isomorfo a la línea proyectiva y por lo tanto, los puntos cerrados de  $\pi^{-1}(M)$  están en una correspondencia uno a uno con las direcciones  $(0 : 0) \neq (\alpha : \beta)$  de la línea proyectiva (vea Ejemplo 3.2.3).

Puesto que la transformación monoidal de  $S$  es un fenómeno local, nos centramos en estudiar su representación local en el abierto  $T_X$ ; es decir, en el punto cerrado  $\rho$  de  $\pi^{-1}(M)$  correspondiente a la dirección  $(\alpha : \beta)$ , con  $\alpha \neq 0$ . En este caso,  $R''$ , la transformada monoidal de  $R$  con centro en  $P$  en la dirección  $\rho = (1 : \frac{\beta}{\alpha})$  (el anillo local de  $\rho$  sobre  $T$ ) es un anillo local regular de dimensión 3, con parámetros regulares  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, Z \right\}$ .

En este caso, la transformada estricta de  $0 \neq f \in P$  y la transformada monoidal formal de  $\bar{R} = \frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro en  $\bar{P} = \frac{P}{\langle f \rangle}$  (en el abierto  $T_X$ ) son definidas de la siguiente manera: como primer paso, es necesario imponer la suposición adicional de que los anillos locales  $\bar{R}$  y  $\bar{R}_{\bar{P}}$  tienen la misma multiplicidad; esto se traduce en que existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que si  $f \in M^t$ , entonces  $f \in P^t$  o equivalentemente  $\bar{P}$  es un centro permitido en  $\bar{R}$ , cuando esto ocurre entonces podemos escribir

$$f = F_s(X, Y, Z) + F_{s+1}(X, Y, Z) + \cdots,$$

donde  $F_i$  es polinomio homogéneo de grado  $i$  en  $X, Y$  con coeficientes en  $k[[Z]]$  y además se tiene  $F_s(X, Y, 0) \neq 0$ .

Tenemos que  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, Z \right\}$  son los parámetros regulares de  $R''$ . Denotemos por

$$X'' = X; \quad Y'' = \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}; \quad Z'' = Z,$$

de donde,

$$X = X''; \quad Y = \left( Y'' + \frac{\beta}{\alpha} \right) X''; \quad Z = Z''.$$

Así, la transformada estricta de  $f$  viene dada por

$$f'' = \frac{f}{X^s} = F_s \left( 1, Y'' + \frac{\beta}{\alpha}, Z'' \right) + F_{s+1} \left( 1, Y'' + \frac{\beta}{\alpha}, Z'' \right) + \dots$$

Observe que,  $f''$  no será unidad en  $R''$  si y solo si

$$\begin{aligned} F_s \left( 1, 0 + \frac{\beta}{\alpha}, 0 \right) &= 0 \\ F_s \left( 1, \frac{\beta}{\alpha}, 0 \right) &= 0 \\ f_s(\alpha, \beta) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $f_s(X, Y, Z) = f_s(X, Y)$  es la forma inicial de  $f$ .

**Definición 3.2.7.** *Si  $f''$  no es unidad en  $R''$  y  $\hat{R}''$  es una completación de  $R''$ , entonces  $\frac{\hat{R}''}{\langle f'' \rangle}$  es la completación de alguna transformación monoidal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro  $\frac{P}{\langle f \rangle}$ , llamada la **transformada monoidal formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro  $\frac{P}{\langle f \rangle}$** .*

Además, se tiene que  $\frac{\hat{R}''}{\langle f'' \rangle}$  es isomorfa a  $\frac{\hat{R}}{\langle f'' \rangle}$ . En los otros abiertos se tienen resultados análogos como se muestra de forma resumida en la siguiente proposición

**Proposición 3.2.8.** *Sea  $P = \langle X, Y \rangle$  un ideal primo en  $R$ . Supongamos que  $f \in P$ ,  $P = \langle X, Y \rangle R$  es un centro permitido, entonces podemos escribir a  $f$  como:*

$$f = F_s(X, Y, Z) + F_{s+1}(X, Y, Z) + \dots,$$

donde  $s = \text{mult}(f)$ ,  $F_i(X, Y, Z) \in k[[Z]][X, Y]$  es una forma homogénea de grado  $i$  en  $X, Y$ ; con coeficientes en  $k[[Z]]$ . Además, se tiene que  $F_s(X, Y, 0) \neq 0$ .

Sea  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,  $\alpha, \beta \in k$  tal que  $F_s(\alpha, \beta, 0) = 0$  ó lo que es lo mismo  $f_s(\alpha, \beta) = 0$  (pues,  $f_s$  es independiente de  $Z$  por las suposiciones hechas sobre  $f$  y  $P$  por lo tanto,  $f_s(X, Y, Z) = f_s(X, Y)$ ).

- Si  $\alpha \neq 0$  escribimos:

$$f''_{\alpha, \beta} = F_s \left( 1, Y + \frac{\beta}{\alpha}, Z \right) + X F_{s+1} \left( 1, Y + \frac{\beta}{\alpha}, Z \right) + \dots$$

( $f''_{\alpha,\beta}$  no es unidad en  $R$ , por hipótesis) y  $\frac{R}{\langle f''_{\alpha,\beta} \rangle}$  es isomorfo a la completación de alguna transformación monoidal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro en  $\frac{P}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $(\alpha : \beta) = \left(1 : \frac{\beta}{\alpha}\right)$  con  $\alpha \neq 0$ .

- Si  $\beta \neq 0$  escribimos:

$$f''_{\alpha,\underline{\beta}} = F_s \left( X + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z \right) + Y F_{s+1} \left( X + \frac{\alpha}{\beta}, 1, Z \right) + \dots$$

( $f''_{\alpha,\underline{\beta}}$  no es unidad en  $R$  or hipótesis) y  $\frac{R}{\langle f''_{\alpha,\underline{\beta}} \rangle}$  es isomorfo a la completación de alguna transformación monoidal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro en  $\frac{P}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $(\alpha : \beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta} : 1\right)$  con  $\beta \neq 0$ .

Entonces también tiene sentido llamar a cualquiera de los anillos  $\frac{R}{\langle f''_{\alpha,\beta} \rangle}$ ,  $\frac{R}{\langle f''_{\alpha,\underline{\beta}} \rangle}$  la **transformada monoidal formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro en  $\frac{P}{\langle f \rangle}$  en la dirección  $(\alpha : \beta)$**  (una para cada dirección adecuada).

**Definición 3.2.9.** Si  $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$  y  $\bar{P}$  en  $A$  es la imagen de  $P$  en  $R$  (luego  $\frac{A}{\bar{P}}$  es regular), se usará el término **transformada monoidal formal de  $A$  con centro  $\bar{P}$**  para referirnos a cualquiera de las transformadas monoidales formales de  $\frac{R}{\langle f \rangle}$  con centro  $\frac{P}{\langle f \rangle}$ .

En particular, observe que si  $f$  es el polinomio de una superficie casi ordinaria irreducible  $V = \text{Spec}(A)$ , respecto de algún sistema de coordenadas locales de  $V$  en  $O$  adaptada a  $W = \text{Spec}\left(\frac{A}{\bar{P}}\right)$ , lo anterior nos da  $A'$  la transformada formal del anillo casi ordinario  $A$  con centro  $\bar{P}$ .

### 3.3. Resolución Parcial de un Anillo Casi Ordinario

En esta sección definimos lo que se entiende por transformada especial de un anillo casi ordinario y resolución parcial de un anillo casi ordinario, conceptos obtenidos de [9].

**Definición 3.3.1.** Sea  $A$  un anillo local casi ordinario.  $A'$  es una **transformada especial** de  $A$  si  $A'$  es un anillo local no regular y si una de las siguientes condiciones se cumple:

1. *A* tiene un centro permitido  $p$  el cual es una curva, y  $A'$  es la transformada monoidal formal de  $A$  con centro en  $p$ .
2.  $A$  no tiene centro permitido que es una curva, y  $A'$  es la transformada cuadrática formal de  $A$  (con centro en  $p = M$ ,  $M$  ideal maximal de  $A$ ) y hay una curva  $q \in \text{sing}(A)$ , para la cual existe un ideal primo  $q'$  en  $A'$  que se contrae a  $q$  en  $A$ .
3.  $A$  no tiene centro permitido el cual es una curva y  $A'$  es la transformada cuadrática formal de  $A$  en la dirección del punto singular de la curva excepcional de la transformación cuadrática de  $\text{Spec}(A)$  (esquema reducida subyacente al cono tangente  $\pi^{-1}(M)$  de  $A$ ).

Es importante indicar que cuando el anillo local casi ordinario  $A$  es representada por una rama casi ordinaria normalizada, cualquier transformada cuadrática especial de  $A$  ocurre en las direcciones  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  (vea [9]).

**Definición 3.3.2.** *La resolución parcial de un anillo casi ordinario  $A$ , es una sucesión  $A_0, A_1, \dots, A_t$ , donde  $A = A_0$  y  $A_i$  es isomorfo a una transformada especial de  $A_{i-1}$ , para  $i = 1, \dots, t$ .*

Como una consecuencia del teorema de resolución de una singularidad de una superficie algebroide embebida, dada por Zariski (vea [17]) se sabe que toda resolución parcial de un anillo casi ordinario tiene un número finito de miembros. Con la finalidad de demostrar este hecho, por inducción sobre la multiplicidad de  $A$ , es necesario probar que las transformadas especiales de anillos casi ordinarios son otra vez casi ordinarios y es el objetivo de las siguientes dos subsecciones, para ello se mostrarán que las raíces de polinomios asociados a las transformadas especiales de  $A$  son otra vez ramas casi ordinarias, además se mostrará que los pares distinguidos de estas raíces dependen de los pares distinguidos de la rama casi ordinaria normalizada original que representa a  $A$  y de la transformación realizada (monoidal o cuadrática).

Recordemos que en el caso de que  $A$  esta representado por una rama casi ordinaria normalizada y tiene centros permitidos que son curvas, la transformada especial de  $A$  es la transformada monoidal formal de  $A$  con centro en dicha curva y si  $A$  no tiene centros permitidos que son curvas, entonces las transformaciones especiales cuadráticas de  $A$  ocurren en las direcciones  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$ .

Ya que la explosión de un anillo regular es otra vez regular, en toda esta sección se supondrá que el anillo casi ordinario  $A$  no es regular.

Sea  $A$  ( $A = k[[X, Y]][\zeta]$ ) un anillo casi ordinario representada por  $\zeta = X^{u/n}Y^{v/n}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $H(0, 0) \neq 0$  una rama casi ordinaria normalizada, y  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_m$  conjugadas de  $\zeta_i$ , donde  $\zeta_i = X^{u/n}Y^{v/n}H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})$ .

Entonces,

$$f = \prod_{i=1}^m (Z - X^{u/n} Y^{v/n} H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})),$$

es un polinomio que define a  $A$ , donde  $\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right)$  es el menor par distinguido.

### Comportamiento de un anillo casi ordinario bajo transformaciones monoidales

Si en  $A$  existe un centro permitido el cual es una curva, entonces por la demostración del teorema 2.4.7 se tiene que  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} > 1$ , y que  $\frac{u}{n} \geq 1$  en cuyo caso  $\langle X, \zeta \rangle A$  es un centro permitido o  $\frac{v}{n} \geq 1$  en cuyo caso  $\langle Y, \zeta \rangle A$  es un centro permitido mientras que si  $\frac{u}{n} \geq 1$  y  $\frac{v}{n} \geq 1$ , entonces  $\langle X, \zeta \rangle A$  y  $\langle Y, \zeta \rangle A$  son los centros permitidos de  $A$ .

- i) Supongamos que  $\frac{u}{n} \geq 1$ . En este caso, el ideal primo  $\bar{P} = \langle X, \zeta \rangle A$  es un centro permitido, luego su imagen inversa  $P = \langle X, Z \rangle R$  en  $R$  es un centro permitido de  $R$  (pues cuando esto es así, si  $f \in \langle X, Y, Z \rangle^m$  implicará que  $f \in \langle X, Z \rangle^m$ ) en este caso  $f$  puede ser escrito de la siguiente forma:

$$f(X, Y, Z) = F_m(X, Y, Z) + F_{m+1}(X, Y, Z) + \dots,$$

donde  $F_i$  es una forma con coeficientes en  $k[[Y]]$  y de grado  $i$  en  $X, Z$ ; y que además se cumple que  $f_m(X, 0, Z) \neq 0$  ( $F_m(X, Y, Z) = f_m(X, Z)$ , la forma inicial de  $f$  no depende de  $Y$ ). Por otro lado, como  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} > 1$ , por el teorema 2.4.4 se tiene que  $f_I = f_m(X, Z) = Z^m$ , así que la transformada estricta de  $f$  no será unidad si y solo si  $f_m(\alpha, \beta) = \beta^m = 0$ , esto nos dice que solamente hay una transformada monoidal formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle} \simeq A$ , la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ).

Por lo estudiado, en la sección anterior, sabemos que la transformada monoidal de  $R$  con centro  $\langle X, Z \rangle R$  es un anillo regular de dimensión 3, con parámetros regulares  $\left\{ X, Y, \frac{Z}{X} - \frac{0}{1} \right\}$ . Denotemos a dichos parámetros por

$$X'' = X; \quad Y'' = Y; \quad Z'' = \frac{Z}{X},$$

de donde, se tiene que

$$X = X''; \quad Y = Y''; \quad Z = X'' Z'',$$

luego, la transformada estricta de  $f$ , polinomio asociado a la transformada monoidal formal de  $A$  con centro en  $\langle X, Z \rangle R$ , viene dada por

$$f'' = \frac{f(X'', Y'', X''Z'')}{X''^m}.$$

A partir de aquí, por abuso de notación, denotaremos a  $X''$  por  $X$ ; a  $Y''$  por  $Y$  y  $Z''$  por  $Z$ , obteniendo

$$\begin{aligned} f''(X, Y, Z) &= \frac{f(X, Y, XZ)}{X^m} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m [XZ - X^{u/n} Y^{v/n} H_i(X^{1/n} Y^{1/n})]}{X^m} \\ &= \prod_{i=1}^m [Z - X^{u/n-1} Y^{v/n} H_i(X^{1/n} Y^{1/n})] \\ &= \prod_{i=1}^m \left( Z - \frac{\zeta_i}{X} \right). \end{aligned}$$

Así, las raíces de  $f''$  son de la forma  $\frac{\zeta_i}{X}$  las cuales no son unidades.

- Desde que  $\frac{\zeta_i}{X}$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$  son claramente conjugados entre sí sobre  $k[[X, Y]]$ , se tiene que  $f''$  es irreducible.
- Desde que  $\zeta_i - \zeta_j = M_{ij}\varepsilon_{ij}$ , donde  $M_{ij}$  es un monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon_{ij}$  una unidad en  $\phi_n$ , se tiene que  $\frac{\zeta_i}{X} - \frac{\zeta_j}{X} = \frac{M_{ij}\varepsilon_{ij}}{X}$ , donde  $\frac{M_{ij}}{X}$  es un monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon_{ij}$  una unidad en  $\phi_n$ , por lo tanto  $\frac{\zeta_i}{X}$  es casi ordinario.

Además, si  $\{(\lambda_j, \mu_j)\}$  es el conjunto de pares distinguidos de  $\zeta$ , entonces  $\{(\lambda_j - 1, \mu_j)\}$  es el conjunto de pares distinguidos de  $\frac{\zeta_i}{X}$ .

- ii) Si  $\frac{v}{n} \geq 1$ . En este caso, el ideal primo  $\bar{P} = \langle Y, \zeta \rangle A$  es un centro permitido cuya imagen inversa  $P = \langle Y, Z \rangle R$  en  $R$  es centro permitido de  $R$  (pues en este caso, si  $f \in \langle X, Y, Z \rangle^m$ , entonces  $f \in \langle Y, Z \rangle^m$ ). Luego,  $f$  puede ser escrito de la siguiente forma:

$$f(X, Y, Z) = F_m(X, Y, Z) + F_{m+1}(X, Y, Z) + \dots,$$

donde  $F_i$  es una forma con coeficientes en  $k[[X]]$  y de grado  $i$  en  $Y, Z$ , y donde además se cumple que  $f_m(0, Y, Z) \neq 0$  ( $F_m(X, Y, Z) = f_m(Y, Z)$ , la forma inicial de  $f$  no depende de  $X$ ).

Por otro lado, como  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} > 1$ , por el teorema 2.4.4 se tiene que  $f_I = f_m(Y, Z) = Z^m$ , así que la transformada estricta de  $f$  no será unidad si y solo si  $f_m(\alpha, \beta) = \beta^m = 0$ , esto nos dice que hay solamente una transformada monoidal formal de  $\frac{R}{\langle f \rangle} \simeq A$ , la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ).

Por lo estudiado, en la sección anterior, sabemos que la transformada monoidal de  $R$  con centro  $\langle Y, Z \rangle R$  es un anillo regular de dimensión 3, con parámetros regulares  $\left\{ X, Y, \frac{Z}{Y} - \frac{0}{1} \right\}$ . Denotemos a dichos parámetros por

$$X'' = X; \quad Y'' = Y; \quad Z'' = \frac{Z}{Y},$$

de donde, se tiene que

$$X = X''; \quad Y = Y''; \quad Z = Y''Z'',$$

luego, la transformada estricta de  $f$ , polinomio asociado a la transformada monoidal formal de  $A$  con centro en  $\langle Y, Z \rangle R$ , viene dada por

$$f'' = \frac{f(X'', Y'', Y''Z'')}{Y''^m}.$$

A partir de aquí, por abuso de notación denotando a  $X''$  por  $X$ ; a  $Y''$  por  $Y$  y  $Z''$  por  $Z$ , tenemos

$$\begin{aligned} f''(X, Y, Z) &= \frac{f(X, Y, YZ)}{Y^m} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m [YZ - X^{u/n}Y^{v/n}H_i(X^{1/n}Y^{1/n})]}{Y^m} \\ &= \prod_{i=1}^m [Z - X^{u/n}Y^{v/n-1}H_i(X^{1/n}Y^{1/n})] \\ &= \prod_{i=1}^m \left( Z - \frac{\zeta_i}{Y} \right). \end{aligned}$$

Así, las raíces de  $f''$  son de la forma  $\frac{\zeta_i}{Y}$  las cuales no son unidades.

- Desde que  $\frac{\zeta_i}{Y}$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$  son claramente conjugados entre si sobre  $k[[X, Y]]$ , se tiene que  $f''$  es irreducible.
- Desde que  $\zeta_i - \zeta_j = M_{ij}\varepsilon_{ij}$ , donde  $M_{ij}$  es un monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon_{ij}$  una unidad en  $\phi_n$ , se tiene que  $\frac{\zeta_i}{X} - \frac{\zeta_j}{Y} = \frac{M_{ij}\varepsilon_{ij}}{Y}$ . Así,  $\frac{\zeta_i}{Y}$  es casi ordinario.

Observe que, si  $\{(\lambda_j, \mu_j)\}$  es el conjunto de pares distinguidos de  $\zeta$ , entonces  $\{(\lambda_j, \mu_j - 1)\}$  es el conjunto de pares distinguidos de  $\frac{\zeta_i}{Y}$ .

Así, cualquier transformación monoidal formal  $A''$  de un anillo local casi ordinario es otra vez casi ordinario, y si  $\zeta$  es cualquier rama representante de  $A$ , entonces  $\frac{\zeta}{X}$  o  $\frac{\zeta}{Y}$ , según cada caso, es una rama representante (no necesariamente normalizada) de  $A''$ .

### Comportamiento de un anillo casi ordinario bajo transformaciones cuadráticas

Se tienen los siguientes casos:

- i) Si  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} \geq 1$ . (**caso transversal**, pues el sistema de parámetros es transversal).
- ii) Si  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} < 1$ . (**caso no transversal**, pues el sistema de parámetros no es transversal).

Para describir el comportamiento del anillo casi ordinario bajo transformaciones cuadráticas, en cada uno de los casos anteriores, utilizaremos la siguiente definición

**Definición 3.3.3.** Se usa el término *curva excepcional de la transformación cuadrática  $\pi$  de  $\text{Spec}(A)$*  para el esquema reducido subyacente al cono tangente  $\pi^{-1}(M)$  ( $\pi^{-1}(M)$  definido por  $gr(A)$ ).

- i) **Caso transversal:**  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} \geq 1$ .

Cuando  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} > 1$ , tenemos que  $f_I = f_m(X, Y, Z) = Z^m$  y la curva excepcional en este caso es la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por  $Z = 0$ .

Cuando  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} = 1$ , tenemos que  $f_I = f_m(X, Y, Z) = (Z^t - X^a Y^b)^r$ , donde  $a + b = t$  y la curva excepcional en este caso es la curva proyectiva definida por  $Z^t = X^a Y^b$ .

En estos casos, observemos que  $f_m(0, 0, 1) \neq 0$ ; luego, los puntos  $(\alpha : \beta : 1)$  no están sobre la curva excepcional y no son de interés, así podemos restringir nuestra atención a las direcciones de la forma  $(1 : \beta : \gamma)$  o  $(\alpha : 1 : \gamma)$ , por razones de simetría (vea [9]) basta analizar la transformación en la dirección  $(1 : \beta : \gamma)$  (en la carta  $T_X$ ) y como estamos interesados en las transformaciones cuadráticas formales especiales de basta analizar en la dirección  $(1 : 0 : 0)$  (dirección  $(1 : \beta : \gamma)$  con  $\beta = \gamma = 0$ ).

- En la dirección  $(1 : 0 : 0)$ .

Por lo estudiado en la sección anterior sabemos que la transformada cuadrática de  $R$  en la dirección  $(1 : 0 : 0)$ , es un anillo regular de dimensión 3 con parámetros regulares  $\left\{ X, \frac{Y}{X} - \frac{0}{1}, \frac{Z}{X} - \frac{0}{1} \right\}$ .

Denotando por:  $X' = X$ ;  $Y' = \frac{Y}{X} - \frac{0}{1}$ ;  $Z' = \frac{Z}{X} - \frac{0}{1}$ , de aquí se sigue que  $X = X'$ ;  $Y = (Y')X'$ ;  $Z = (Z')X'$ .

Se tiene que, la transformada estricta de  $f$ , polinomio asociado a la transformación cuadrática de  $A$  en la dirección  $(1 : \beta : \gamma)$ , viene dado por

$$f' = \frac{f(X', X'Y', X'Z')}{X'^m}.$$

Por abuso de notación, podemos identificar  $X'$  con  $X$ ,  $Y'$  con  $Y$ , y  $Z'$  con  $Z$  y se tendría

$$f' = \frac{f(X, XY, XZ)}{X^m}.$$

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f(X, (X^{1/n}Y^{1/n})^n, XZ)}{X^m} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m \{XZ - X^{u/n}[(X^{1/n}Y^{1/n})^n]^{v/n} H_i(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n})\}}{X^m} \\ &= \prod_{i=1}^m [Z - X^{(u+v-n)/n} (Y^{1/n})^v H_i(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n})]. \\ &= \prod_{i=1}^m [Z - X^{(u+v-n)/n} Y^{v/n} H_i(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n})]. \end{aligned}$$

Así, las raíces de  $f'$ , el cual aún es un polinomio sobre  $k[[X, Y]]$ , son las series de potencias fraccionarias

$$\zeta'_i = X^{(u+v-n)/n} Y^{v/n} H_i(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n}); i = 1, \dots, m;$$

y se prueba que ellas no son unidades en  $\phi_n$ ; además, estas son conjugadas entre sí, de donde se tiene que  $f'$  es irreducible.

Por otro lado, desde que

$$\zeta_i - \zeta_j = X^{u/n} Y^{v/n} [H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) - H_j(X^{1/n}, Y^{1/n})] = M_{ij} \varepsilon_{ij},$$

donde  $M_{ij}$  es un monomio en  $X^{1/n}$ ,  $Y^{1/n}$  y  $\varepsilon_{ij}$  una unidad en  $\phi_n$  se tiene que

$$\zeta'_i - \zeta'_j = X^{(u+v-n)/n} Y^{v/n} [H_i(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n}) - H_j(X^{1/n}, X^{1/n}Y^{1/n})].$$

Por lo tanto, los  $\zeta'_i$  son ramas casi ordinarias, y  $f'$  es casi ordinario.

Todo lo anterior nos dice que la transformada cuadrática especial  $A'$  de  $A$  es otra vez casi ordinario.

**Observación 3.3.4.** *En el caso que  $\beta \neq 0$ , se tiene que  $f'$ , el polinomio representante de la transformación cuadrática en esta dirección, puede ser reducible y de acuerdo a la definición de anillo casi ordinario, la transformada cuadrática de  $A$  en esta dirección ya no sería casi ordinaria. Esto no es una pérdida, porque en este caso la discriminante de  $f'$  sería una potencia únicamente de  $X$ . Esto indica una situación de equisingularidad y el análisis de tal situación depende de la teoría de curvas planas.*

El análisis para el caso general (dirección  $(1 : \beta : \gamma)$ ) lo puede encontrar en [9].

ii) **Caso no transversal:**  $\frac{u}{n} + \frac{v}{n} < 1$ .

Como la rama casi ordinaria  $\zeta$  es normalizada, tenemos que  $u > 0$  y  $v > 0$  y la forma inicial es  $f_I = f_{(m(u+v))/n}(X, Y, Z) = cX^{mu/n}Y^{mv/n}$ , con  $c \in k$ . Así, la curva excepcional es el par de líneas en el plano proyectivo dado por la ecuación  $XY = 0$ . Además,  $f'$  la transformada estricta de  $f$  no será unidad si  $f_I(\alpha : \beta : \gamma) = 0$ , luego cualquier punto  $(\alpha : \beta : \gamma)$  sobre la curva excepcional es tal que  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$  y por tanto podemos restringir nuestra atención a transformaciones cuadráticas en las direcciones  $(1 : 0 : \gamma)$ ,  $(0 : 1 : \gamma)$  y  $(0 : 0 : 1)$ , donde el primer y segundo caso son simétricos.

Además, como las transformadas especiales deben ocurrir en las direcciones  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  y  $(0 : 0 : 1)$  a continuación hacemos un estudio breve las transformaciones cuadráticas en las direcciones  $(1 : 0 : 0)$  y  $(0 : 0 : 1)$ . El análisis para los casos más generales (en las direcciones  $(1 : 0 : \gamma)$  y  $(0 : 0 : 1)$ ) lo puede encontrar en [9].

- En la dirección  $(1 : 0 : 0)$ . Procediendo en forma análoga al caso transversal, se tiene que un polinomio representante de la transformada

cuadrática del anillo casi ordinario  $A$  en esta dirección, viene dada por:

$$\begin{aligned}
f'(X, Y, Z) &= \frac{f(X, XY, XZ)}{X^{m(u+v)/n}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^m [XZ - X^{u/n}(XY)^{v/n} H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n})]}{X^{m(u+v)/n}} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^m \{X^{(u+v)/n} [ZX^{(n-u-v)/n} - Y^{v/n} H_i]\}}{X^{m(u+v)/n}} \\
&= \prod_{i=1}^m [ZX^{(n-u-v)/n} - Y^{v/n} H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n})].
\end{aligned}$$

De aquí, es claro que  $f'(0, Y, 0) = Y^{mv/n} \varepsilon(Y)$ , donde  $\varepsilon(Y)$  es una unidad en  $k[[Y]]$ . Esto nos dice que  $f'$  es regular en  $Y$  de orden  $\frac{mv}{n}$  y por el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema 1.3.5), existe una única serie de potencia  $g'(X, Y, Z)$  tal que  $g'$  es un polinomio de grado  $\frac{mv}{n}$  en  $Y$ , y tal que  $g' = f' \varepsilon(X, Y, Z)$ , donde  $\varepsilon(X, Y, Z)$  es una unidad en  $R$ .  $g'$  es llamado un polinomio distinguido, asociado con  $f'$ . Desde que  $\frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f' \rangle} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle g' \rangle}$ , será suficiente para nuestro propósito estudiar las raíces de  $g'$ .

$$\begin{aligned}
f' &= \prod_{i=1}^m \{ [X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v}]^v - [Y^{1/n} (H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n}))^{1/v}]^v \} \\
&= \pm \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v (w_j X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v} - Y^{1/n} H_i^{1/v}),
\end{aligned}$$

( $H_i = H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n})$ ) donde  $w_j$  es una  $v$ -ésima raíz de la unidad.

Sea  $T$  una indeterminada y sea  $E_i(X, Y, T)$  tal que  $E(0, 0, 0) \neq 0$ , y

$$E_i(X, Y, T)(T - YG_i(X, XY)) = Y - T\bar{G}_i(X, T), \quad (5)$$

$\bar{G}_i(0, 0) \neq 0$ . Desde que  $G_i(0, 0) \neq 0$ , la existencia de  $E_i$  está garantizada por el Teorema de Preparación de Weierstrass (Teorema 1.3.5). Reemplazado  $X$  por  $X^{1/n}$ ,  $Y$  por  $Y^{1/n}$  y  $T$  por  $w_j X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v}$  en la ecuación (5), tenemos

$$f' = \eta \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v (Y^{1/n} - w_j X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v} \overline{(H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n}))^{1/v}}).$$

Para alguna unidad  $\eta$  en  $k[[X^{1/nv}, Y^{1/n}, Z^{1/v}]]$ . Ahora, el producto de la derecha es claramente el pseudo polinomio distinguido en  $Y^{1/n}$  asociado con  $f'(X, Y, Z)$ , cuando  $f'(X, Y, Z)$  es pensado como un elemento

de  $k[[X^{(1/nv)}, Y^{1/n}, Z^{1/v}]]$ , pero también lo es  $g'(X, Y, Z)$ . Por la unicidad, debemos tener

$$g' = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v \left( Y^{1/n} - w_j X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v} \overline{(H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n}))^{1/v}} \right).$$

Se sigue que las raíces de  $g'$ , considerado como un polinomio en  $Y$  sobre  $k[[X, Z]]$ , son las  $n$ -ésimas potencias de las series de potencias fraccionarias  $w_j X^{(n-u-v)/nv} Z^{1/v} \overline{(H_i(X^{1/n}, (XY)^{1/n}))^{1/v}}$ . Así, las raíces de  $g'$  son series de potencias las cuales no son unidades.

Se prueba, que las raíces de  $g'$  son ramas casi ordinarias (en las variables  $X$  y  $Z$ ). Además, como en el caso transversal, la transformada formal es un dominio de integridad, y que los pares distinguidos de cualquiera de las raíces de  $g'$  dependen solamente de los pares distinguidos de  $\zeta$  (vea [9]).

- En la dirección  $(0 : 0 : 1)$  (en la carta  $T_Z$ ). Un representante de  $A'$ , la transformada cuadrática del anillo local casi ordinario  $A$ , viene dado por:

$$f'(X, Y, Z) = \frac{f(XZ, YZ, Z)}{Z^{m(u+v)/n}}.$$

Sea  $F_i(X, Y)$  tal que  $[F_i(X, Y)]^{n-u-v} = H_i(X, Y)$ , y sea

$$\varepsilon_i = F_i(X^{1/n} Z^{1/n}, Y^{1/n} Z^{1/n}),$$

luego,

$$\begin{aligned} f'(X, Y, Z) &= \frac{f(XZ, YZ, Z)}{Z^{m(u+v)/n}} \\ &= \prod_{i=1}^m \{ [Z^{1/n}]^{n-u-v} - [X^{u/n(n-u-v)} Y^{v/n(n-u-v)} \varepsilon_i]^{n-u-v} \} \\ &= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n-u-v} (Z^{1/n} - w_j X^{u/n(n-u-v)} Y^{v/n(n-u-v)} \varepsilon_i), \end{aligned}$$

donde  $w_j$  es una  $(n-u-v)$ -ésima raíz de la unidad. Se prueba que todas las raíces del pseudo polinomio distinguido en  $Z$  asociado con  $f'$  son series de potencias fraccionarias y que los pares distinguidos de cualquiera de ellas dependen de los pares distinguidos de  $\zeta$  (vea [9]).

**Observación 3.3.5.** *En cada uno de los procesos de transformación hemos empezado con una rama casi ordinaria normalizada y hemos terminado con una rama casi ordinaria (no necesariamente normalizada).*

Note que en el caso de la transformación cuadrática en la dirección  $(1 : 0 : 0)$  hemos terminado con una rama casi ordinaria en  $X$  y  $Z$ . Por el bien de la uniformidad, podemos sustituir la letra  $Y$  por  $Z$  para obtener una rama casi ordinaria “estándar” en  $X$  e  $Y$ , la cual aún representa la transformación cuadrática considerada. De forma similar cuando consideramos la transformación en la dirección  $(0 : 1 : 0)$  (vea [9]) se culmina con una rama en  $Y$  y  $Z$ , sustituyendo  $X$  por  $Z$  obtenemos una rama en  $Y$  y  $X$ , luego podemos intercambiar  $X$  e  $Y$ , para obtener una forma estándar para la rama representante. Estas son las ramas representantes a las cuales nos referimos en la siguiente proposición que resume los resultados obtenidos en esta sección

**Proposición 3.3.6.** *si  $(\lambda_i, \mu_i)$  son los pares distinguidos de la rama casi ordinaria normalizada original  $\zeta$ , entonces los pares distinguidos de la rama transformada  $\zeta'$  son dadas como se muestra a continuación, para  $i = 1, \dots, s$  (a menos que suceda que el primer par ordenado ( $i = 1$ ) resulte ser un par de enteros, en dicho caso, este primer par es omitido).*

**TRANSFORMADA MONOIDAL:**

1. Con centro  $(X, \zeta)$ . En este caso, los pares distinguidos de  $\zeta'$  son:

$$(\lambda_i - 1, \mu_i).$$

2. Con centro  $(Y, \zeta)$ . En este caso, los pares distinguidos de  $\zeta'$  son:

$$(\lambda_i, \mu_i - 1).$$

**TRANSFORMADA CUADRÁTICA**

**CASO TRANSVERSAL**

1. En la dirección  $(1 : 0 : 0)$ . En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma

$$(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i).$$

2. En la dirección  $(0 : 1 : 0)$  (en la carta  $T_Y$ ). En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma

$$(\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1).$$

**CASO NO TRANSVERSAL**

1. En la dirección  $(1 : 0 : 0)$ . En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:

$$\left( \lambda_i + \left( \frac{(1 + \mu_i)(1 - \lambda_i)}{\mu_1} \right) - 2; \left( \frac{1 + \mu_i}{\mu_1} \right) - 1 \right).$$

2. En la dirección  $(0 : 1 : 0)$ . En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:

$$\left( \mu_i + \left( \frac{(1 + \lambda_i)(1 - \mu_i)}{\lambda_1} \right) - 2; \left( \frac{1 + \lambda_i}{\lambda_1} \right) - 1 \right).$$

3. En la dirección  $(0 : 0 : 1)$ . En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:

$$\left( \frac{\lambda_i(1 - \mu_i) + \mu_i\lambda_1}{1 - \lambda_1 - \mu_1}; \frac{\lambda_i\mu_1 + \mu_i(1 - \lambda_1)}{1 - \lambda_1 - \mu_1} \right).$$

**LEMA DE LA INVERSIÓN (Lema 2.3.2)**

$$\left( \frac{\lambda_i + 1 - \lambda_1}{\lambda_1}, \mu_i \right).$$

Note que en el caso de transformaciones cuadráticas solamente se ha dado los pares distinguidos de transformaciones en direcciones especiales, esto no es problema, ya que esta información puede ser usada para obtener los pares distinguidos en direcciones no especiales.

Así, dado  $A$  un anillo local casi ordinario. Cualquier transformada especial  $A'$  de  $A$  es otra vez un anillo local casi ordinario. Si  $\zeta$  es una rama normalizada que representa a  $A$ , entonces  $\zeta'$  representante de  $A'$  es también una rama casi ordinaria que no necesariamente es normalizada cuyos pares distinguidos dependen solamente de los pares distinguidos de  $\zeta$ .

Finalizamos esta sección con la demostración de la proposición que asegura que toda resolución parcial de un anillo casi ordinario tiene un número finito de miembros.

**Proposición 3.3.7.** *Para cualquier anillo local casi ordinario  $A$ , existe un entero  $n$  tal que cualquier resolución parcial de  $A$  tiene menos de  $n$  miembros.*

*Demostración.* La demostración esta basada en la inducción sobre la multiplicidad de  $A$ .

Si la multiplicidad del anillo casi ordinario  $A$  es 1, entonces  $A$  no tiene transformaciones especiales y el números de miembros de su resolución parcial sería igual a cero.

Supongamos que la multiplicidad del anillo casi ordinario  $A$  es  $j$ , entonces por inducción asumimos como verdadera la proposición para todo  $1 \leq j \leq k$ ,  $k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; es decir, existe un entero  $N_j$  tal que cualquier resolución parcial de  $A$  tiene menos de  $N_j$  elementos.

Supongamos que la multiplicidad del anillo casi ordinario  $A$  es  $k + 1$ , entonces debemos probar que existe un entero  $N$  tal que la resolución parcial de  $A$  tiene menos de  $N$  elementos.

En efecto: sea  $A$  un anillo casi ordinario de multiplicidad  $k + 1$ .

- Si  $A$  tiene centros permitidos los cuales son curvas, entonces luego de un número finito de transformaciones monoidales obtenemos un anillo local casi ordinario que ya no tiene centros permitidos o bien cuya multiplicidad es menor que la de  $A$ , en el segundo caso aplicando la hipótesis inductiva y la proposición queda demostrada.
- Supongamos que  $A$  no tiene centros permitidos que son curvas.
  - \* Si el cono tangente de  $A$  es irreducible estamos en el caso transversal, entonces luego de un número finito de transformaciones cuadráticas en cualquiera de las direcciones  $(1 : 0 : 0)$  y  $(0 : 1 : 0)$  hay una disminución en la multiplicidad y mientras no haya dicha disminución estaremos en el caso transversal y no se crean centros permitidos que sean curvas.
  - \* Si el cono tangente de  $A$  es reducible estamos en el caso no transversal, entonces una transformación en cualquiera de las direcciones  $(1 : 0 : 0)$  o  $(0 : 1 : 0)$  produce una disminución en la multiplicidad de  $A$ , y que luego de un número finito de transformaciones en la dirección  $(0 : 0 : 1)$  (bajo el cual el cono tangente permanece reducible) produce una disminución de la multiplicidad de  $A$  o en caso contrario llegamos al caso transversal. En cualquier caso por inducción se completa la demostración.

□

En la resolución de singularidades, la elección de los centros de explosión constituyen el objeto primario de interés. En el caso de superficies casi ordinarias, según el enfoque de Lipman, en cada etapa de la resolución se explota una curva permitida, siempre que sea posible y un punto en otro caso. En el caso de que haya más de una curva permitida, se explota aquella curva permitida que es la curva excepcional de la etapa anterior.

Siguiendo este enfoque y la Proposición 3.3.7, a continuación detallamos la resolución parcial del anillo local casi ordinario de la superficie del Ejemplo 2.2.4.

**Ejemplo 3.3.8.** *Considere la superficie casi ordinaria del Ejemplo 2.2.4,  $S : f(X, Y, Z) = 0$ , donde*

$$f(X, Y, Z) = Z^4 + (-2XY^3 - 4XY^4 - 2XY^5)Z^2 + (-4X^2Y^6 - 4X^2Y^7)Z + (X^2Y^6 + 4X^2Y^7 + 6X^2Y^8 + 4X^2Y^9 + X^2Y^{10} - X^3Y^9).$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= m_1 + m_2 + m_3 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4} \\ \zeta_2 &= m_1 + m_2 - m_3 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} - (X^{3/4}Y^{9/4}) \\ \zeta_3 &= -m_1 - m_2 + im_3 = -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) + i(X^{3/4}Y^{9/4}) \\ \zeta_4 &= -m_1 - m_2 - im_3 = -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) - i(X^{3/4}Y^{9/4}).\end{aligned}$$

Sea  $\zeta = \zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4}$ . Del Ejemplo 2.2.8 tenemos que

- Los monomios distinguidos de  $\zeta$  son:  $X^{2/4}Y^{6/4}$ ,  $X^{3/4}Y^{9/4}$
- Los pares distinguidos de  $\zeta$  son:

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \mu_1) &= (2/4, 6/4) \quad y \\ (\lambda_2, \mu_2) &= (3/4, 9/4).\end{aligned}$$

- El menor par distinguido de  $\zeta$  es:  $(\lambda, \mu) = (2/4, 6/4)$ .

El menor par distinguido nos da toda la información, que mostramos a continuación, sobre el anillo casi ordinario  $A = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f \rangle}$  necesarias para realizar la primera explosión.

- Desde que  $\lambda + \mu = 2/4 + 6/4 = 2 > 1 \longrightarrow f_I = Z^m = Z^4$  (pues  $m = [L(\zeta) : L] = 4$ ). De aquí,

- $mult(A) = 4$ .

- $Sing(A) = \{(X, \zeta), (Y, \zeta), (X, Y, \zeta)\}$ .

Pues el origen  $((X, Y, \zeta))$  es un punto de multiplicidad 4; por otro lado, como  $\lambda = 2/4 > 0$ , la curva  $(X, \zeta)$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\lambda\} = \min\{4, 4(2/4)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7); de forma análoga, como  $\mu = 6/4 > 0$  la curva  $(Y, \zeta)$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\mu\} = \min\{4, 4(6/4)\} = 4$  (vea Teorema 2.4.7).

- Desde que  $\mu = 6/4 > 1$ ,  $A$  tiene como centro permitido a la curva  $(Y, \zeta)$  (vea Teorema 2.4.7). Esto también puede verse del ítem anterior (pues la multiplicidad de la curva  $(Y, \zeta)$  es igual a la multiplicidad del origen  $((X, Y, \zeta))$ ).

Entonces, ya que  $A$  tiene un centro permitido, siguiendo el enfoque de Lipman (Proposición 3.3.7), la primera explosión será la transformación monoidal con centro en la curva permitida  $(Y, Z)$  (eje  $X$ ).

**Observación 3.3.9.** Cabe mencionar que  $L$  denota al cuerpo de fracciones de  $k[[X, Y]]$ ; es decir,  $L = k((X, Y))$  y

$$m = [L(\zeta) : L] = [L(X^{2/4}Y^{6/4}, X^{3/4}Y^{9/4}) : L] = 4,$$

pues  $L(\zeta) = L(X^{2/4}Y^{6/4}, X^{3/4}Y^{9/4})$  (vea Proposición 2.2.22).

**1ra. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(Y, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $A \simeq R/\langle f \rangle$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ) que es donde las cosas interesantes pasan, pues en el abierto  $T_Z$  la transformada estricta de  $f$  es unidad, es decir; en este abierto la singularidad ya esta resuelta.

En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = YZ\}$ . Sean  $f^{(1)} = \frac{f(X, Y, YZ)}{Y^4}$ , la transformada estricta de  $f$  bajo la 1ra explosión,  $A^{(1)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(1)} \rangle}$ , la transformada monoidal formal del anillo  $A$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que los pares distinguidos de  $\zeta^{(1)}$ , rama representante de  $A^{(1)}$ , son:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^{(1)}, \mu_1^{(1)}) &= (\lambda_1, \mu_1 - 1) = (2/4, 6/4 - 1) = (2/4, 2/4) \quad y \\ (\lambda_2^{(1)}, \mu_2^{(1)}) &= (\lambda_2, \mu_2 - 1) = (3/4, 9/4 - 1) = (3/4, 5/4). \end{aligned}$$

Luego, el menor par distinguido de  $\zeta^{(1)}$  es:  $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) = (2/4, 2/4)$ .

Este menor par distinguido de  $\zeta^{(1)}$ , nos da toda la información que mostramos a continuación sobre el anillo casi ordinario  $A^{(1)}$  necesarias para realizar la segunda explosión.

- Como  $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1 \longrightarrow f_I^{(1)} = (Z^t - X^{\lambda t} Y^{\mu t})^r = (Z^2 - cXY)^2$

(pues  $t = [L(X^{2/4}Y^{2/4}) : L] = 2$  y  $r = [L(\zeta^{(1)}) : L(X^{2/4}Y^{2/4})] = 2$ ) (vea Proposición 2.4.4). De aquí,

- $\text{mult}(A^{(1)}) = 4$ .

**Observación 3.3.10.** Debido a que conocemos  $f$ , el polinomio representante del anillo casi ordinario  $A$ , podemos calcular directamente  $f^{(1)}$ , transformada estricta bajo la primera explosión de  $f$ ; es decir, mediante la transformada monoidal con centro en  $(Y, Z)$  en la dirección  $(1 : 0)$  ( $X = X, Y = Y, Z = YZ$ ) y obtendríamos

$$f^{(1)} = \frac{f(X, Y, YZ)}{Y^4} = Z^4 + (-2XY - 4XY^2 - 2XY^3)Z^2 + (-4X^2Y^3 - 4X^2Y^4)Z + (X^2Y^2 + 4X^2Y^3 + 6X^2Y^4 + 4X^2Y^5 + X^2Y^6 - X^3Y^5).$$

$f^{(1)} = (Z^2 - XY)^2 + (-4XY^2 - 2XY^3)Z^2 + (-4X^2Y^3 - 4X^2Y^4)Z + (4X^2Y^3 + 6X^2Y^4 + 4X^2Y^5 + X^2Y^6 - X^3Y^5)$ . De donde fácilmente podemos observar que  $f_I^{(1)} = (Z^2 - XY)^2$ , como ya sabíamos mediante el menor par distinguido de  $\zeta^{(1)}$ .

- $Sing(A^{(1)}) = \{(X, \zeta^{(1)}), (Y, \zeta^{(1)}), (X, Y, \zeta^{(1)})\}$ .  
Pues el origen  $((X, Y, \zeta^{(1)}))$  es un punto de multiplicidad 4; por otro lado, como  $\lambda^{(1)} = 2/4 > 0$ , la curva  $(X, \zeta^{(1)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\lambda\} = \min\{4, 4(2/4)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7); de forma análoga, como  $\mu^{(1)} = 2/4 > 0$  la curva  $(Y, \zeta^{(1)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\mu\} = \min\{4, 4(2/4)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7).
- Desde que  $\lambda^{(1)} = 2/4 < 1$  y  $\mu^{(1)} = 2/4 < 1$ ,  $A^{(1)}$  no tiene centros permitidos que sean curvas (vea Teorema 2.4.7). Esto también puede verse del ítem anterior (pues la multiplicidad de las curvas  $(X, \zeta^{(1)})$ ,  $(Y, \zeta^{(1)})$ , no coinciden con la multiplicidad del origen).

Como  $A^1$  no se tiene centros permitidos que sean curvas, y además, desde que el cono tangente de  $A^{(1)}$  es irreducible, estamos en el caso transversal ( $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1$ ), luego siguiendo el enfoque de Lipman (vea Proposición 3.3.7), hacemos transformaciones cuadráticas en cualquiera de las direcciones  $(0 : 1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ) o  $(1 : 0 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ). Para este ejemplo haremos la transformación cuadrática en la dirección  $(0 : 1 : 0)$ ; es decir, en el abierto  $T_Y$ .

**2da. EXPLOSIÓN (Transformación Cuadrática en la dirección  $(0 : 1 : 0)$ ).**

La transformación cuadrática en la dirección  $(0 : 1 : 0)$  viene dada por  $\{X = XY; Y = Y; Z = YZ\}$ . Sean  $f^{(2)} = \frac{f^{(1)}(XY, Y, YZ)}{Y^4}$ , la transformación estricta de  $f$  bajo la 2da explosión,  $A^{(2)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(2)} \rangle}$  la transformada cuadrática formal del anillo  $A^{(1)}$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que los pares distinguidos de  $\zeta^{(2)}$ , rama representante de  $A^{(2)}$ , son:

$$(\lambda_1^{(2)}, \mu_1^{(2)}) = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(1)} + \mu_1^{(1)} - 1) = (2/4, 2/4 + 2/4 - 1) = (2/4, 0)$$

y

$$(\lambda_2^{(2)}, \mu_2^{(2)}) = (\lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(1)} + \mu_2^{(1)} - 1) = (3/4, 3/4 + 5/4 - 1) = (3/4, 1).$$

Luego, el menor par distinguido de  $\zeta^{(2)}$  es:  $(\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}) = (2/4, 0)$ .

En este caso, como  $\lambda^{(2)} = 2/4 < 1$  y  $\mu^{(2)} = 0$ ,  $\zeta^{(2)}$  es una rama casi ordinaria no normalizada y para continuar con el proceso de resolución debemos normalizar esta rama, para ello aplicaremos el lema de la inversión.

**Observación 3.3.11.** Note que esta rama casi ordinaria no normalizada, nos da la siguiente información del anillo  $A^{(2)}$ .

- Como  $\lambda^{(2)} + \mu^{(2)} = 2/4 + 0 < 1 \longrightarrow f_I^{(2)} = cX^2$   
(pues  $m = [L(\zeta^{(2)}) : L] = 2$ ) (vea Proposición 2.4.4). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(2)}) = 2$ .

Denotemos por  $\bar{\zeta}^{(2)}$  a la normalización de  $\zeta^{(2)}$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que los pares distinguidos de  $\bar{\zeta}^{(2)}$  son:

$$(\bar{\lambda}_1^{(2)}, \bar{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0).$$

y

$$(\bar{\lambda}_2^{(2)}, \bar{\mu}_2^{(2)}) = (5/2, 1)$$

Como  $(\bar{\lambda}_1^{(2)}, \bar{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0)$  tiene ambas coordenadas enteras, este par distinguido debe ser eliminado (vea Proposición 3.3.6). Así, el menor y único par distinguido de  $\bar{\zeta}^{(2)}$  es:  $(\bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\mu}^{(2)}) = (5/2, 1)$ .

Este menor par distinguido de  $\bar{\zeta}^{(2)}$  (rama que aún representa a  $A^{(2)}$ ), nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(2)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(2)} \rangle}$  necesarias para realizar la tercera explosión.

- Desde que  $\bar{\lambda}^{(2)} + \bar{\mu}^{(2)} = 5/2 + 1 > 1 \longrightarrow \bar{f}_I^{(2)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\bar{\zeta}^{(2)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(2)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(2)}) = \{(X, \bar{\zeta}^{(2)}), (Y, \bar{\zeta}^{(2)}), (X, Y, \bar{\zeta}^{(2)})\}$ .

Pues el origen  $((X, Y, \bar{\zeta}^{(2)}))$  es un punto de multiplicidad 2; por otro lado, como  $\lambda = 5/2 > 0$ , la curva  $(X, \bar{\zeta}^{(2)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\lambda\} = \min\{2, 2(5/2)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7); de forma análoga, como  $\mu = 1 > 0$  la curva  $(Y, \bar{\zeta}^{(2)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\mu\} = \min\{2, 2(1)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7).

- Desde que  $\bar{\lambda}^{(2)} = 5/2 > 1$  y  $\bar{\mu}^{(2)} = 1$ , tenemos 2 centros permitidos que son las curvas  $(X, \bar{\zeta}^{(2)})$ ,  $(Y, \bar{\zeta}^{(2)})$  (vea Teorema 2.4.7). Esto también puede verse del ítem anterior (pues la multiplicidad de las curvas  $(X, \bar{\zeta}^{(2)})$ ,  $(Y, \bar{\zeta}^{(2)})$ , son iguales a la multiplicidad del origen  $((X, Y, \bar{\zeta}^{(2)}))$ ).

Ya que  $A^{(2)}$  tiene 2 centros permitidos, siguiendo el enfoque de Lipman, debemos elegir como centro de la transformación monoidal a la curva que fue excepcional (pre imagen de la explosión de un punto o una curva) de la transformación de  $A^{(1)}$  a  $A^{(2)}$ ; que en este caso, es la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por  $Y = 0$ ; es decir elegimos como centro de explosión a la curva  $(X, \bar{\zeta}^{(2)})$ .

**3ra. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(X, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $\overline{A^2} \simeq R/\langle f^2 \rangle$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ) que es donde las cosas interesantes pasan, pues en el abierto  $T_Z$  la transformada estricta de  $f$  es unidad, es decir; en este abierto la singularidad ya esta resuelta.

En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ . Sean  $f^{(3)} = \frac{\overline{f^{(2)}}(X, Y, XZ)}{X^2}$  la transformada estricta de  $\overline{f^{(2)}}$  bajo la 3ra explosión,  $A^{(3)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(3)} \rangle}$  la transformada monoidal formal de  $A^{(2)}$  con centro en  $(X, Z)$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(3)}$  rama representante de  $A^{(3)}$  es:

$$(\lambda^{(3)}, \mu^{(3)}) = (\overline{\lambda^{(2)}}_1 - 1, \overline{\mu^{(2)}}_1) = (5/2 - 1, 1) = (3/2, 1)$$

El menor par distinguido de  $\zeta^{(3)}$  nos da toda la información que mostramos a continuación, sobre el anillo casi ordinario  $A^{(3)}$  necesarias para realizar la cuarta explosión.

- Desde que  $\lambda^{(3)} + \mu^{(3)} = 3/2 + 1 > 1 \rightarrow f_I^{(3)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\zeta^{(3)}) : L] = 2$ ). De aquí,

- $\text{mult}(A^{(3)}) = 2$ .

- $\text{Sing}(A^{(3)}) = \{(X, \zeta^{(3)}), (Y, \zeta^{(3)}), (X, Y, \zeta^{(3)})\}$ .

Pues el origen  $((X, Y, \zeta^{(3)}))$  es un punto de multiplicidad 2; por otro lado, como  $\lambda^{(3)} = 3/2 > 0$ , la curva  $(X, \zeta^{(3)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\lambda\} = \min\{2, 2(3/2)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7); de forma análoga, como  $\mu^{(3)} = 1 > 0$  la curva  $(Y, \zeta^{(3)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\mu\} = \min\{2, 2(1)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7).

- Desde que  $\lambda^{(3)} = 3/2 > 1$  y  $\mu^{(3)} = 1 \geq 1$ ,  $A^{(3)}$  tiene centros permitidos que son las curvas  $(X, \zeta^{(3)})$ ,  $(Y, \zeta^{(3)})$  (vea Teorema 2.4.7). Esto también puede verse del item anterior.

Como  $A^{(3)}$  tiene 2 centros permitidos, debemos elegir como centro de la transformación monoidal a la curva que fue excepcional de la transformación de

$A^{(2)}$  a  $A^{(3)}$ , es decir, la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por  $X = 0$ .

**4ta. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(Y, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $A \simeq R/\langle f \rangle$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ) que es donde las cosas interesantes pasan, pues en el abierto  $T_Z$  la transformada estricta de  $f$  es unidad, es decir; en este abierto la singularidad ya está resuelta.

En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = YZ\}$ . Sean  $f^{(4)} = \frac{f^{(3)}(X, Y, YZ)}{Y^2}$ , la transformada estricta de  $f$  bajo la cuarta explosión,  $A^{(4)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(4)} \rangle}$  la transformada monoidal formal del anillo  $A^{(3)}$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(4)}$  la rama representante de  $A^{(4)}$  es

$$(\lambda^{(4)}, \mu^{(4)}) = (\lambda^{(3)}, \mu^{(3)} - 1) = (3/2, 1 - 1) = (3/2, 0).$$

Este menor par distinguido de  $\zeta^{(4)}$  nos da toda la información que mostramos a continuación sobre el anillo casi ordinario  $A^{(4)}$  necesarias para realizar la quinta explosión.

- Desde que  $\lambda^{(4)} + \mu^{(4)} = 3/2 + 0 > 1 \rightarrow f_I^{(4)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\zeta^{(4)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(4)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(4)}) = \{(X, \zeta^{(4)}), (X, Y, \zeta^{(4)})\}$ .  
 Pues el origen  $((X, Y, \zeta^{(4)}))$  es un punto de multiplicidad 2; por otro lado, como  $\lambda = 3/2 > 0$ , la curva  $(X, \zeta^{(4)})$  es una curva de multiplicidad  $= \min\{m, m\lambda\} = \min\{2, 2(3/2)\} = 2$  (vea Teorema 2.4.7);
- Desde que  $\lambda^{(3)} = 3/2 > 1$ ,  $A^{(4)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(4)})$  (vea Teorema 2.4.7). Esto también puede verse del ítem anterior (pues la multiplicidad de la curva  $(X, \zeta^{(4)})$ , es igual a la multiplicidad del origen  $((X, Y, \zeta^{(4)}))$ ).

Como  $A^{(4)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(4)})$ , siguiendo el enfoque de Lipman (vea Proposición 3.3.7) la quinta explosión será una transformación monoidal con centro en  $(X, Z)$ .

**5ta. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(X, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $A \simeq R/\langle f \rangle$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ) que es donde las

cosas interesantes pasan, pues en el abierto  $T_Z$  la transformada estricta de  $f$  es unidad, es decir; en este abierto la singularidad ya está resuelta.

La transformación monoidal en este caso viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ . Sean  $f^{(5)} = \frac{f^{(4)}(X, Y, XZ)}{X^2}$  la transformada estricta de  $f^{(4)}$  bajo la 5ta explosión,  $A^{(5)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(5)} \rangle}$  transformada monoidal formal del anillo  $A^{(4)}$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(5)}$  la rama representante de  $A^{(4)}$  es:

$$(\lambda_1^{(5)}, \mu_1^{(5)}) = (\lambda^{(4)} - 1, \mu^{(4)}) = (3/2 - 1, 0) = (1/2, 0).$$

El menor par distinguido de  $\zeta^{(5)}$  nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(5)}$ .

- Como  $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 1/2 + 0 < 1 \longrightarrow f_I^{(5)} = X^{2(1/2)}Y^{2(0)} = X$  (pues  $m = [L(\zeta^{(5)}) : L] = 2$ ) (vea Proposición 2.4.4). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(5)}) = 1$ , donde

Luego,  $A^5$  es regular.

Por lo tanto, la resolución parcial del anillo  $A$  es:  $A, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}$ . Note que  $A^{(4)}$  es el último miembro de la resolución parcial de  $A$ , pues es un anillo casi ordinario que tiene un centro permitido que es una curva y que  $A^{(5)}$ , su correspondiente transformada monoidal formal es regular.

### 3.4. Resolución Estricta de un Anillo Casi Ordinario

**Definición 3.4.1.** Sea  $A$  un anillo local casi ordinario,  $A'$  una transformación cuadrática o monoidal de  $A$  con centro en  $p$ , entonces decimos que la curva  $p'$  en  $A'$  es **una curva excepcional para la transformación de  $A$  en  $A'$**  si  $p'$ , como un ideal primo, se contrae a  $p$  en  $A$ .

Sí  $A'$  es la transformada cuadrática o monoidal del anillo casi ordinario  $A$  y si  $A'$  tiene dos curvas en su lugar singular, entonces por lo menos una de estas dos curvas es excepcional para la transformación de  $A$  en  $A'$ .

Hay precisamente una curva en  $A'$  el cual es excepcional para la transformación de  $A$  en  $A'$ , excepto cuando el cono tangente de  $A$  es reducible y  $A'$  sea la transformación formal la cual cae en la intersección de los dos componentes de la curva excepcional de la transformación cuadrática de  $\text{Spec}(A)$ .

**Definición 3.4.2.** Sea un anillo local casi ordinario. Una **resolución estricta de  $A$**  es una sucesión  $A = A_0, A_1, \dots, A_r$  tal que:

1.  $A_r$  es normal o no tiene transformaciones especiales.
2.  $A_{i+1}$  ( $0 \leq i < r$ ) es una transformación especial de  $A_i$  sujeto a las siguientes condiciones de exactitud.
  - $A_{i+1}$  contiene exactamente una curva excepcional.
  - Si  $A_i$  ( $0 < i < r$ ) tiene dos curvas en su lugar singular, ninguna de las cuales es un centro permitido, entonces  $A_{i+1}$  es una transformación cuadrática formal de  $A_i$  a través de la cual pasa la transformada estricta o propia de la curva excepcional para la transformación de  $A_{i-1}$  a  $A_i$ .
  - Si  $A_i$  ( $0 < i < r$ ) tiene dos centros permitidos los cuales son curvas, entonces  $A_{i+1}$  es una transformada monoidal formal de  $A_i$  y el centro de la transformación de  $A_i$  a  $A_{i+1}$  es la curva excepcional de la transformación de  $A_{i-1}$  a  $A_i$ .

A continuación, realizamos la resolución estricta de la superficie casi ordinaria del Ejemplo 3.3.8. Para ello en cada etapa necesitamos trabajar con una rama fuertemente normalizada.

**Ejemplo 3.4.3.** Considere la superficie casi ordinaria del Ejemplo 3.3.8,  $S : f(X, Y, Z) = 0$ , donde

$$f(X, Y, Z) = Z^4 + (-2XY^3 - 4XY^4 - 2XY^5)Z^2 + (-4X^2Y^6 - 4X^2Y^7)Z + (X^2Y^6 + 4X^2Y^7 + 6X^2Y^8 + 4X^2Y^9 + X^2Y^{10} - X^3Y^9).$$

Sea  $\zeta = \zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4}$ , raíz de  $f$ , la rama representante del anillo casi ordinario de esta superficie,  $A = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f \rangle}$ . Como se vio en el ejemplo anterior, los pares distinguidos de  $\zeta$  son  $(\lambda_1, \mu_1) = (2/4, 6/4)$  y  $(\lambda_2, \mu_2) = (3/4, 9/4)$ , los cuales son normalizados, pero no son fuertemente normalizados.

Denotemos por  $\zeta'$  a la rama fuertemente normalizada asociada a  $\zeta$  (la cuál aún representa a  $A$ ), sus pares distinguidos serán:  $(\lambda'_1, \mu'_1) = (6/4, 2/4)$  y  $(\lambda'_2, \mu'_2) = (9/4, 3/4)$ .

Así, el menor par distinguido de  $\zeta'$  es  $(\lambda', \mu') = (6/4, 2/4)$  y esta nos da toda la información de  $A$  que mostramos a continuación, necesarias para realizar la primera explosión. Cabe mencionar que todas estas informaciones sobre el anillo  $A$  han sido obtenidas de forma como se ha descrito en detalle en el Ejemplo 3.3.8.

- Desde que  $\lambda' + \mu' = 6/4 + 2/4 = 2 > 1 \longrightarrow f_I = Z^m = Z^4$  (pues  $m = [L(\zeta') : L] = 4$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A) = 4$ .

- $Sing(A) = \{(X, \zeta'), (Y, \zeta'), (X, Y, \zeta')\}$ . Pues,
  - El origen  $((X, Y, \zeta'))$  es un punto de multiplicidad 4.
  - $mult(X, \zeta') = 4$
  - $mult(Y, \zeta') = 2$
- centro permitido de  $A$  es la curva  $(X, \zeta')$ .

Como  $A$  tiene un centro permitido a la curva  $(X, \zeta')$ , la primera explosión será la transformación monoidal con centro en la curva  $(X, Z)$  (eje  $Y$ ).

**1ra. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(X, Z)$ ).**

En este caso, se sabe que hay solamente una transformación monoidal formal de  $A$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ) que es donde las cosas interesantes pasan, pues en el abierto  $T_Z$  la transformada estricta de  $f$  es una unidad y por definición, en este abierto no se tendrá transformadas formales del anillo  $A$ .

En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ . Sean  $f^{(1)} = \frac{f(X, Y, YZ)}{X^4}$ , la transformada estricta de  $f$  bajo la 1ra explosión,  $A^{(1)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(1)} \rangle}$  la transformada monoidal formal del anillo  $A$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que los pares distinguidos de  $\zeta^{(1)}$ , rama representante de  $A^{(1)}$ , son:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^{(1)}, \mu_1^{(1)}) &= (\lambda'_1 - 1, \mu'_1) = (2/4, 2/4) \quad y \\ (\lambda_2^{(1)}, \mu_2^{(1)}) &= (\lambda'_2 - 1, \mu'_2) = (5/4, 3/4). \end{aligned}$$

Luego, el menor par distinguido de  $\zeta^{(1)}$  es:  $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) = (2/4, 2/4)$ . El cual nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(1)}$  que mostramos a continuación, necesarias para realizar la segunda explosión.

- Como  $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1 \rightarrow f_I^{(1)} = (Z^t - X^{\lambda t} Y^{\mu t})^r = (Z^2 - cXY)^2$   
(pues  $t = [L(X^{2/4}Y^{2/4}) : L] = 2$  y  $r = [L(\zeta^{(1)}) : L(X^{2/4}Y^{2/4})] = 2$ ) (vea Proposición 2.4.4). De aquí,
  - $mult(A^{(1)}) = 4$ .
- $Sing(A^{(1)}) = \{(X, \zeta^{(1)}), (Y, \zeta^{(1)}), (X, Y, \zeta^{(1)})\}$ .
  - El origen  $((X, Y, \zeta^{(1)}))$  es un punto de multiplicidad 4.
  - $mult((X, \zeta^{(1)})) = 2$ .
  - $mult((Y, \zeta^{(1)})) = 2$

- $A^{(1)}$  no tiene centros permitidos que sean curvas.

Como  $A^{(1)}$  no se tiene centros permitidos que sean curvas y además el cono tangente de  $A^{(1)}$  es irreducible, estamos en el caso transversal ( $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1$ ), luego siguiendo el enfoque de Lipman (Proposición 3.3.7) debemos realizar transformaciones cuadráticas en cualquiera de las direcciones  $(1 : 0 : 0)$  o  $(0 : 1 : 0)$ , pero de acuerdo a la definición de resolución estricta,  $A^{(2)}$  debe ser la transformada cuadrática de  $A^{(1)}$  a través de la cual pase la transformada propia de la curva excepcional de la transformación de  $A$  a  $A^{(1)}$ ; es decir, debemos realizar la transformación cuadrática en la dirección  $(0 : 1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ).

**2da. EXPLOSIÓN (Transformación Cuadrática en la dirección  $(0 : 1 : 0)$ ).**

En este caso, la transformación cuadrática viene dada por  $\{X = XY; Y = Y; Z = YZ\}$ . Sean  $f^{(2)} = \frac{f^{(1)}(XY, Y, YZ)}{Y^4}$ , la transformada estricta de  $f$  bajo la segunda explosión,  $A^{(2)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(2)} \rangle}$  la transformada cuadrática formal del anillo  $A^{(1)}$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que los pares distinguidos de  $\zeta^{(2)}$ , rama representante de  $A^{(2)}$ , son:

$$(\lambda_1^{(2)}, \mu_1^{(2)}) = (2/4, 0).$$

$$(\lambda_2^{(2)}, \mu_2^{(2)}) = (5/4, 1).$$

Luego, el menor par distinguido de  $\zeta^{(2)}$  es:  $(\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}) = (2/4, 0)$ .

En este caso, como  $\lambda^{(2)} = 2/4 < 1$  y  $\mu^{(2)} = 0$ ,  $\zeta^{(2)}$  es una rama casi ordinaria no normalizada y para continuar con el proceso de resolución estricta debemos normalizar fuertemente a esta rama.

Denotemos por  $\bar{\zeta}^{(2)}$  a la normalización de  $\zeta^{(2)}$ . Por la Proposición 3.3.6 tenemos que los pares distinguidos de  $\bar{\zeta}^{(2)}$  son:

$$(\bar{\lambda}_1^{(2)}, \bar{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0).$$

$$(\bar{\lambda}_2^{(2)}, \bar{\mu}_2^{(2)}) = (7/2, 1).$$

Como  $(\bar{\lambda}_1^{(2)}, \bar{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0)$  tiene ambas coordenadas enteros este par distinguido debe ser eliminado (vea Proposición 3.3.6). Así, el menor y único par distinguido de  $\bar{\zeta}^{(2)}$  es:  $(\bar{\lambda}^{(2)}, \bar{\mu}^{(2)}) = (7/2, 1)$ , y es fácil ver que  $\bar{\zeta}^{(2)}$  es una rama fuertemente normalizado que aún representa a  $A^{(2)}$ .

Este menor par distinguido de  $\bar{\zeta}^{(2)}$ , nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(2)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(2)} \rangle}$ , que mostramos a continuación, necesarias para realizar la tercera explosión.

- Desde que  $\bar{\lambda}^{(2)} + \bar{\mu}^{(2)} = 7/2 + 1 > 1 \longrightarrow \bar{f}_I^{(2)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\bar{\zeta}^{(2)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(2)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(2)}) = \{(X, \bar{\zeta}^{(2)}), (Y, \bar{\zeta}^{(2)}), (X, Y, \bar{\zeta}^{(2)})\}$ , pues
  - El origen  $((X, Y, \bar{\zeta}^{(2)}))$  es un punto de multiplicidad 2.
  - $\text{mult}((X, \bar{\zeta}^{(2)})) = 2$ .
  - $\text{mult}((Y, \bar{\zeta}^{(2)})) = 2$ .
- Tenemos 2 centros permitidos que son las curvas  $(X, \bar{\zeta}^{(2)}), (Y, \bar{\zeta}^{(2)})$ .

Como  $A^{(2)}$  tiene 2 centros permitidos, por definición de resolución estricta debemos elegir como centro de transformación monoidal a la curva que fue excepcional de la transformación de  $A^{(1)}$  a  $A^{(2)}$ ; que en este caso, es la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por  $Y = 0$ .

### 3ra. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en $(X, Z)$ ).

En este caso, como ya se mencionó anteriormente, hay solamente una transformada monoidal formal de  $\bar{A}^2$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ). En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ .

Sean  $f^{(3)} = \frac{\bar{f}^{(2)}(X, Y, XZ)}{X^2}$ , la transformada estricta de  $\bar{f}^{(2)}$  bajo la 3ra explosión,  $A^{(3)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(3)} \rangle}$  la transformada monoidal formal de  $A^{(2)}$  con centro en  $(X, Z)$ . Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(3)}$  rama representante de  $A^{(3)}$  es:

$$(\lambda^{(3)}, \mu^{(3)}) = (\bar{\lambda}^{(2)}_1 - 1, \bar{\mu}^{(2)}_1) = (5/2, 1).$$

Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(3)}$ , que mostramos a continuación, necesarias para realizar la cuarta explosión

- Desde que  $\lambda^{(3)} + \mu^{(3)} = 5/2 + 1 > 1 \longrightarrow f_I^{(3)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\zeta^{(3)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(3)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(3)}) = \{(X, \zeta^{(3)}), (Y, \zeta^{(3)}), (X, Y, \zeta^{(3)})\}$ , pues

- El origen  $((X, Y, \zeta^{(3)}))$  es un punto de multiplicidad 2.
  - $\text{mult}((X, \zeta^{(3)})) = 2$ .
  - $\text{mult}((Y, \zeta^{(3)})) = 2$
- $A^{(3)}$  tiene centros permitidos que son las curvas  $(X, \zeta^{(3)})$ ,  $(Y, \zeta^{(3)})$ .

Como  $A^{(3)}$  tiene 2 centros permitidos, por definición de resolución estricta, debemos elegir como centro de la transformación monoidal a la curva que fue excepcional de la transformación de  $A^{(2)}$  a  $A^{(3)}$ , es decir, a la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por  $X = 0$ .

**4ta. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(Y, Z)$ ).**

En este caso, como ya se menciono anteriormente, hay solamente una transformada monoidal formal de  $A^{(3)}$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_Y$ ). En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = YZ\}$ .

Sean  $f^{(4)} = \frac{f^{(3)}(X, Y, YZ)}{Y^2}$  la transformada estricta de  $f$  bajo la 4ta explosión,  $A^{(4)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(4)} \rangle}$  la transformada monoidal formal del anillo  $A^{(3)}$ .

Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por tanto el menor) de  $\zeta^{(4)}$  la rama representante de  $A^{(4)}$  es:

$$(\lambda^{(4)}, \mu^{(4)}) = (\lambda^{(3)}, \mu^{(3)} - 1) = (3/2, 1 - 1) = (5/2, 0),$$

Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(4)}$ , necesarias para realizar la quinta explosión.

- Desde que  $\lambda^{(4)} + \mu^{(4)} = 3/2 + 0 > 1 \rightarrow f_I^{(4)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\zeta^{(4)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(4)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(4)}) = \{(X, \zeta^{(4)}), (X, Y, \zeta^{(4)})\}$ .
  - Pues el origen  $((X, Y, \zeta^{(4)}))$  es un punto de multiplicidad 2.
  - $\text{mult}((X, \zeta^{(4)})) = 2$ .
- $A^{(4)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(4)})$ .

Como  $A^{(4)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(4)})$ , siguiendo el enfoque de Lipman, la quinta explosión debe ser una transformación monoidal con centro en  $(X, Z)$ .

**5ta. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(X, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $A^{(4)}$ , la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ). En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ .

Sean  $f^{(5)} = \frac{f^{(4)}(X, Y, XZ)}{X^2}$ , la transformada estricta de  $f^{(4)}$  bajo la 5ta explosión,  $A^{(5)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(5)} \rangle}$ , transformada monoidal formal del anillo  $A^{(4)}$ .

Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(5)}$  la rama representante de  $A^{(5)}$  es:

$$(\lambda_1^{(5)}, \mu_1^{(5)}) = (\lambda^{(4)} - 1, \mu^{(4)}) = (5/2 - 1, 0) = (3/2, 0).$$

Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(5)}$ , necesarias para realizar la sexta explosión.

- Desde que  $\lambda^{(5)} + \mu^{(5)} = 3/2 + 0 > 1 \rightarrow f_I^{(5)} = Z^m = Z^2$  (pues  $m = [L(\zeta^{(5)}) : L] = 2$ ). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(5)}) = 2$ .
- $\text{Sing}(A^{(5)}) = \{(X, \zeta^{(5)}), (X, Y, \zeta^{(5)})\}$ .
  - Pues el origen  $((X, Y, \zeta^{(5)}))$  es un punto de multiplicidad 2.
  - $\text{mult}((X, \zeta^{(5)})) = 2$ .
- $A^{(5)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(5)})$ .

Como  $A^{(5)}$  tiene como centro permitido a la curva  $(X, \zeta^{(5)})$ , la sexta explosión debe ser una transformación monoidal con centro en la curva  $(X, Z)$ .

**6ta. EXPLOSIÓN (Transformación Monoidal con centro en  $(X, Z)$ ).**

En este caso, hay solamente una transformación monoidal formal de  $A^{(5)}$  la cual es en la dirección  $(1 : 0)$  (en el abierto  $T_X$ ). En este abierto, la transformación monoidal viene dada por:  $\{X = X; Y = Y; Z = XZ\}$ .

Sean  $f^{(6)} = \frac{f^{(5)}(X, Y, XZ)}{X^2}$  la transformada estricta de  $f^{(5)}$  bajo la 5ta explosión,  $A^{(6)} = \frac{k[[X, Y, Z]]}{\langle f^{(6)} \rangle}$  transformada monoidal formal del anillo  $A^{(5)}$ .

Por la Proposición 3.3.6, tenemos que el único par distinguido (y por lo tanto el menor) de  $\zeta^{(6)}$  la rama representante de  $A^{(6)}$  es:

$$(\lambda_1^{(6)}, \mu_1^{(6)}) = (\lambda^{(5)} - 1, \mu^{(5)}) = (3/2 - 1, 0) = (1/2, 0).$$

y él nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario  $A^{(5)}$ .

- Como  $\lambda^{(6)} + \mu^{(6)} = 1/2 + 0 < 1 \rightarrow f_I^{(6)} = X^{2(1/2)}Y^{2(0)} = X$   
(pues  $m = [L(\zeta^{(6)}) : L] = 2$ )(vea Proposición 2.4.4). De aquí,
  - $\text{mult}(A^{(6)}) = 1$ .

Luego,  $A^6$  es regular.

Así, la resolución estricta del anillo  $A$  es:  $A, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, A^{(5)}$ . Note que  $A^5$  es el último miembro de la resolución estricta de  $A$ , pues es un anillo casi ordinario que tiene un centro permitido que es una curva y que  $A^6$ , su correspondiente transformada monoidal formal, es regular.



## Apéndice

El propósito de esta sección es dar una introducción a la bonita interacción que hay entre el álgebra y la geometría que nos permitirá una mejor comprensión de la este trabajo. La idea básica es que a menudo es posible ver a un anillo como cierto anillo de funciones sobre un espacio  $X$ , para recuperar  $X$  como el conjunto de ideales primos y maximales del anillo.

### El Teorema de los Ceros de Hilbert

En todo lo que sigue consideramos que  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Como todo polinomio  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  puede ser visto como una función  $f : k^n \rightarrow k$ , llamado **función polinomial** de  $k^n$  en  $k$ ; cuando  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado e infinito (entonces, distintos polinomios definen distintas funciones polinómicas) el anillo polinomial  $k[X_1, \dots, X_n]$  puede ser visto como el anillo de funciones polinomiales de  $k^n$  en  $k$ .

**Observación 3.4.4.**  $k^n$  visto con su anillo de funciones polinomiales, es usualmente llamado el **espacio afín de dimensión  $n$  sobre  $k$**  y es denotado por  $\mathbb{A}_k^n$  o simplemente por  $\mathbb{A}^n$ . Cuando  $k$  no es algebraicamente cerrado es necesario hacer distinción entre  $k^n$  y  $\mathbb{A}^n$ .

Dado un ideal  $I$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$  definimos el subconjunto algebraico en  $k^n$  correspondiente a  $I$  por

$$Z(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0; \forall f \in I\}.$$

Estos conjuntos son llamados **conjuntos algebraicos afines**.

**Observación 3.4.5.** Como todo ideal  $I$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$  es finitamente generado (Teorema de las Bases de Hilbert), todo conjunto algebraico puede ser definida como los ceros de un número finito de funciones polinomiales.

Si  $X = Z(I)$ , entonces el **subconjunto algebraico**  $Y \subset X$  es de la forma  $Y = Z(J)$ , para algún ideal  $J$  de  $k[X_1, \dots, X_n]$ , y se cumple que  $I \subset J$ .

El conjunto algebraico  $X = Z(I)$  es **irreducible** si  $X$  no es la unión de dos subconjuntos algebraicos más pequeños. Los conjuntos algebraicos irreducibles son llamados **variedades algebraicas**.

Cuando  $k = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ ,  $k^n$  es un espacio topológico, entonces  $X \subset k^n$  hereda la topología de subespacio, la cual es llamada la topología clásica. Sin embargo,

cuando  $X$  esta definida sobre un cuerpo arbitrario  $k$  se puede definir una topología sobre  $X$  (en donde las funciones polinomiales sobre  $X$  juegan el papel de funciones continuas), para ello se observó que los subconjuntos algebraicos de  $X$  cumplen las propiedades de los cerrados en un espacio topológico. Así, se define la topología sobre  $X$  tomando como los conjuntos cerrados a los subconjuntos algebraicos de  $X$ . Esta topología es llamada la **topología de Zariski** (la cual es débil; es decir, tiene muy pocos conjuntos cerrados, pero aún así es útil).

La siguiente operación es una especie de aplicación inversa a la construcción de conjuntos algebraicos: dado un subconjunto de  $X \subset k^n$  definimos

$$I(X) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in X\}.$$

Se prueba que  $I(X)$  es un ideal, el cual es llamado el **ideal de  $X$**  ó **ideal asociado a  $X$** .

Sea  $X$  un conjunto algebraico, una función **polinomial** o **regular** sobre  $X$  es por definición la restricción de una función polinomial de  $k^n$  sobre  $k$  a puntos de  $X$ , identificando dos funciones polinomiales que coinciden en todos los puntos de  $X$  se obtiene el **anillo de coordenadas de  $X$**  denotada por  $A(X)$ , llamada así por que es el  $k$ -álgebra generada por las las “funciones coordenadas”  $X_i$ .

**Proposición 3.4.6.**  $A(X) = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(X)}$

*Demostración.* Cada polinomio de  $k[X_1, \dots, X_n]$  puede ser asociado con un elemento de  $A(X)$ , mirando a cada  $f$  como una función polinomial sobre  $X$ , de esta forma se obtiene un homomorfismo sobreyectivo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & A(X) \\ f & \longmapsto & f|_X \end{array}$$

cuyo núcleo es  $\text{Ker}(\varphi) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \varphi(f) = 0_{A(X)}\}$ , el ideal de polinomios en  $k[X_1, \dots, X_n]$  que se anulan en cada punto de  $X$ ; es decir,  $\text{Ker}(\varphi) = I(X)$ , que induce el siguiente isomorfismo:  $A(X) \simeq \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(X)}$ .

Así,  $A(X)$  es determinado por  $I(X)$ .  $\square$

No todo imagen homomorfa  $A = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I}$  ( $I$  ideal de  $k[X_1, \dots, X_n]$ ) es el anillo de coordenadas de un conjunto algebraico, más precisamente se tiene

**Proposición 3.4.7.** Si  $A(X)$  es el anillo de coordenadas del conjunto algebraico  $X$ , entonces  $A(X)$  es reducido.

*Demostración.* Sea  $f \in A(X)$  y supongamos que  $f^n = 0$ , entonces como la evaluación en un punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_a : A(X) & \longrightarrow & k \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

es un homomorfismo se tiene que  $\varphi_a(f^n(X_1, \dots, X_n)) = (f(a))^n = 0$ ; es decir,  $f(a)$  es nilpotente para todo  $a \in X$ , pero los valores de  $f$  son elementos del cuerpo  $k$ , luego todos ellos son ceros, y  $f$  es el elemento nulo de  $A(X)$ . Esto nos dice que  $A(X) = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(X)}$  no tiene elementos nilpotentes excepto del cero; es decir, es reducido (luego,  $I(X)$  es un ideal radical).  $\square$

En particular, la proposición anterior nos dice que los ideales asociados a conjuntos algebraicos son radicales, cuando el cuerpo es algebraicamente cerrado, la recíproca también se cumple.

**Teorema 3.4.8.** *Si  $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$  es el ideal del conjunto algebraico  $X$ ; es decir,  $X = Z(I)$ , entonces  $X$  es irreducible si y solo si  $I$  es primo.*

*Demostración.* Vea [4].  $\square$

**Teorema 3.4.9** (Teorema de los ceros de Hilbert). *Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Si  $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$  es un ideal, entonces*

1.  $X = Z(I) \neq \emptyset$ .
2.  $I(Z(I)) = \sqrt{I}$ . Es decir,  $f(a) = 0, \forall a \in X \leftrightarrow f^n \in I$  para algún  $n$ .

*Así, las correspondencias  $I \longrightarrow Z(I)$  y  $X \longrightarrow I(X)$  inducen una biyección entre la colección de subconjuntos algebraicos de  $k^n = \mathbb{A}^n$  y los ideales radicales de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .*

*Demostración.* Vea [4].  $\square$

El teorema de los Ceros de Hilbert, puede ser usada para transferir el estudio geométrico de variedades algebraicas al álgebra. Los siguientes resultados son consecuencias del Teorema de los Ceros de Hilbert que nos muestran como hacer esta transferencia.

**Corolario 3.4.10.** *Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y  $A$  un  $k$ -álgebra.*

*$A = A(X)$  para algún conjunto algebraico  $X$  si y solo si  $A$  es reducido y finitamente generado como un  $k$ -álgebra.*

*Demostración.* Supongamos que  $A = A(X)$  para algún conjunto algebraico  $X \subset k^n$ , entonces  $A = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(X)}$  (donde  $I(X)$  es el ideal de  $X$ ), el cual es generado como  $k$ -álgebra por  $X_1, \dots, X_n$  y como  $I(X)$  es un ideal radical,  $A$  es reducida.

Recíprocamente, si  $A$  es finitamente generada como  $k$ -álgebra después de elegir generadores podemos escribir  $A = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I}$ , para algún ideal  $I$ . Desde que  $A$  es reducido,  $I$  es radical; luego,  $I = I(Z(I))$ , y podemos tomar  $X = Z(I)$ .  $\square$

**Definición 3.4.11.** *Los anillos reducidos y finitamente generados se les llama  **$k$ -álgebras afines** y cuando no es necesario referirnos al cuerpo se les llama simplemente **anillos afines**.*

**Corolario 3.4.12.** *Sean  $k$  algebraicamente cerrado,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$  y  $I(a) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f(a) = 0\}$  el ideal de polinomios anulándose en el punto  $a$ . Se cumple*

1.  $I(a) = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ .
2.  $I(a)$  es maximal.
3. Todo ideal maximal de  $k[X_1, \dots, X_n]$  es de la forma  $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ . En particular, los puntos de  $k^n$  están en correspondencia uno a uno con los ideales maximales de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

*Demostración.*

1.  $f \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ , entonces  $f = h_1(X_1 - a_1) + \dots + h_n(X_n - a_n)$ , donde  $h_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ , luego  $f(a) = 0$ , de donde  $f \in I(a)$ . Recíprocamente, sea  $f \in I(a)$  entonces  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  y por el teorema del resto se tiene que

$$f(X_1, \dots, X_n) - f(a_1, \dots, a_n) \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

luego,  $f \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ .

2. Consideremos el homomorfismo (sobreyectivo) evaluación

$$\begin{array}{ccc} \varphi_a : k[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & k \\ f & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

notemos que  $\ker(\varphi) = I(a)$ . Así,  $\varphi$  induce el isomorfismo

$$\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I(a)} \simeq k$$

y como  $k$  es un cuerpo se sigue que  $I(a)$  es maximal.

3. Sea  $M$  un ideal maximal de  $k[X_1, \dots, X_n]$ , como todo ideal maximal (e incluso, primo) es radical tenemos que  $I(Z(M)) = M$ . Si  $p \in Z(M)$ , es decir,  $\{p\} \subset Z(M)$  entonces  $I(Z(M)) \subset I(\{p\})$  es decir,  $M \subset I(p)$ . Recíprocamente, desde que hemos asumido que  $M$  es maximal se tiene que  $I(p) \subset M$ . Por lo tanto;  $I(p) = M$ . La segunda afirmación se sigue de inmediato. □

**Observación 3.4.13.** *Tenemos las siguientes correspondencias*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\leftrightarrow k[X_1, \dots, X_n]. \\ \{\text{puntos en } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{ideales maximales de } k[X_1, \dots, X_n]\} \\ \{\text{conj. algebraicos en } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{ideales radicales de } k[X_1, \dots, X_n]\} \\ \bigcup & \\ \{\text{variedades en } \mathbb{A}^n\} &\leftrightarrow \{\text{ideales primos de } k[X_1, \dots, X_n]\}. \end{aligned}$$

En forma análoga podemos establecer las correspondencias entre los subconjuntos algebraicos del conjunto algebraico  $X$  y los ideales de su anillo de coordenadas  $A(X)$ , como se muestra a continuación

**Corolario 3.4.14.** *Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Todo ideal maximal de  $A(X)$  es de la forma  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , donde  $x_i = X_i \text{ mod } I(X)$  para algún  $p = (a_1, \dots, a_n) \in X$ . En particular, tenemos la siguiente correspondencia*

$$\{\text{puntos en } X\} \leftrightarrow \{\text{ideales maximales en } A(X)\}.$$

*Demostración.* Como los ideales maximales de  $A(X)$  corresponden a los ideales maximales de  $k[X_1, \dots, X_n]$  que contienen a  $I(X)$ , así que basta tratar el caso  $X = \mathbb{A}^n$ . □

Además, se cumple que si  $J \subset A(X)$  es el ideal del subconjunto algebraico  $Y$  ( $Y = Z(J)$ ), entonces  $Y$  es irreducible si y solo si  $J$  es primo.

Más claramente, tenemos las siguientes correspondencias

$$\begin{aligned} X &\leftrightarrow A(X). \\ \{\text{puntos en } X\} &\leftrightarrow \{\text{ideales maximales de } A(X)\} \\ \{\text{subvariedades en } X\} &\leftrightarrow \{\text{ideales primos de } A(X)\}. \end{aligned}$$

Así, dado un álgebra afín  $A$  sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, el Corolario 3.4.10 nos dice que  $A = A(X)$  es el anillo de coordenadas de algún conjunto algebraico  $X \subset k^n$  y el Corolario 3.4.14 nos da tal  $X$  como un conjunto.

Dados  $X \subset k^n$  y  $Y \subset k^m$  conjuntos algebraicos la aplicación natural entre ellas es la restricción de la aplicación polinomial  $\varphi : k^n \rightarrow k^m$ , las cuales son llamadas **morfismos** o aplicaciones **polinomiales** o aplicaciones **regulares** de  $X$  a  $Y$ . Estas aplicaciones inducen una aplicación entre sus anillos de coordenadas  $\varphi^a : A(Y) \rightarrow A(X)$ , y recíprocamente se tiene que dada una aplicación de  $k$ -álgebras  $\varphi^a : A(Y) \rightarrow A(X)$  induce una aplicación  $\varphi : X \rightarrow Y$  de  $X$  a  $Y$ .

Se prueba que  $A(X)$  refleja todas las propiedades de  $X$  como un “conjunto algebraico”, pues se tiene que dos conjuntos algebraicos son isomorfos si y solo si sus anillos de coordenadas lo son (como  $k$ -álgebras).

Así, el teorema de los ceros de Hilbert nos da una equivalencia entre los conjuntos formados por los conjuntos algebraicos con sus morfismos y el conjunto de las  $k$ -álgebras afines con las aplicaciones entre ellas. Más claramente, se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.4.15.** *La categoría de conjuntos algebraicos y sus morfismos, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, es equivalente a la categoría de los  $k$ -álgebras afines con las flechas invertidas.*

## Anillos Graduados

**Definición 3.4.16.** *Un anillo **graduado** es un anillo  $R$  junto con una descomposición en suma directa*

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots,$$

donde los  $R_i$  son grupos abelianos tal que  $R_i R_j \subset R_{i+j}$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Un anillo  $R$  es graduada no negativamente si  $R_i = 0$ , para todo  $i \leq 0$ .

Un **elemento homogéneo** de grado  $n$  es simplemente un elemento de  $R_n$ . Todo elemento  $f$  de  $R$  puede ser escrito de forma única como

$$f = f_0 + f_1 + \dots,$$

donde los  $f_i$  son elementos homogéneos de los distintos  $R_i$ , llamadas **componentes homogéneas** de  $f$ .

$R_0$  es un subanillo de  $R$ , de hecho la identidad aditiva 0 y la identidad multiplicativa 1 son elementos de  $R_0$ .

Un ideal  $I \subset R$  es **homogéneo** cuando es generado por elementos homogéneos de  $R$ . De forma equivalente,  $I$  es un ideal homogéneo si todo elemento  $f \in I$  tiene componentes homogéneas que pertenecen a  $I$ .

Si  $R$  es un anillo graduado y  $I$  es un ideal homogéneo de  $R$ , entonces  $\frac{R}{I}$  también es un anillo graduado.

**Definición 3.4.17.** Sea  $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$  (un anillo graduado positivamente), el ideal más importante de  $R$  es el ideal  $R_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i$  consistiendo cuyos elementos son de grado mayor que cero es llamado **ideal irrelevante**.

Considerando  $R = \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $R_+$  sería  $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ , el cual no necesariamente es maximal ( $\frac{R}{R_+} \simeq \mathbb{Z}$ , donde  $\mathbb{Z}$  no es un cuerpo, luego  $R_+$  no es maximal)

**Ejemplo 3.4.18.** El anillo polinomial  $R = k[X_1, \dots, X_n]$  es un anillo **graduado**, pues

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n,$$

donde  $R_i$  es el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado  $i$  (también llamados **formas** de grado  $i$ ).

**Definición 3.4.19.** Sea  $R$  un anillo graduado y  $M$  un  $R$ -módulo. Se dice que  $M$  es un  $R$ -**módulo graduado** si

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots,$$

donde los  $M_i$  son subgrupos de  $M$  tal que  $R_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ , para todo  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Un módulo graduado que también es un anillo graduado es llamado un **álgebra graduado**.

## Espacio Projectivo y Variedades Projectivas

La introducción de puntos imaginarios llamados **puntos en el infinito**, junto a la introducción de la noción de coordenadas del plano por Plucker en 1830, hizo posible definir la noción de conjuntos algebraicos en el plano projectivo.

Sea  $k$  un cuerpo. El **espacio projectivo  $n$  dimensional sobre  $k$**  denotado por  $\mathbb{P}_k^n$  o por  $\mathbb{P}^n$  es el conjunto de rectas  $L$  que pasan por el origen de un espacio vectorial de dimensión  $n + 1$  sobre  $k$ . Cada recta  $L \subset k^{n+1}$  puede ser representado por un punto  $0 \neq (a_0, \dots, a_n)$  de  $L$ , junto con una relación de equivalencia dada por

$$(a_0, \dots, a_n) = (a'_0, \dots, a'_n) \leftrightarrow (a'_0, \dots, a'_n) = t(a_0, \dots, a_n); 0 \neq t \in k.$$

Los  $a_0, \dots, a_n$  son llamados **coordenadas homogéneas de  $L$** . Así,  $\mathbb{P}^n$  puede ser considerado como el conjunto de las clases de equivalencia de puntos  $(a_0, \dots, a_n) \in k^{n+1}$ , las cuales son denotadas por  $(a_0 : \dots : a_n)$  o (por abuso de notación) simplemente por  $(a_0, \dots, a_n)$ .

Dado un polinomio  $f(X_0, \dots, X_n)$  en  $n + 1$  variables y un punto  $L$  representado por  $(a_0, \dots, a_n)$  no tiene sentido evaluar  $f$  en  $L$ , pues  $f(a_0, \dots, a_n)$  depende

del representante escogido. Sin embargo, si  $f$  es homogéneo de grado  $d$ , tiene sentido firmar si  $f$  evaluado en  $L$  se anula o no, pues en este caso tenemos

$$f(ta_0, \dots, ta_n) = t^d f(a_0, \dots, a_n), t \in k.$$

Así, la afirmación  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$  es independiente del representante tomado.

Análogamente al caso afín, dado  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  (anillo graduado), e  $I$  ideal homogéneo de  $R$ , definimos el **conjunto algebraico proyectivo  $Z(I)$  asociado al ideal  $I$**  como

$$Z(I) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0; f \in I \text{ homogéneo}\}.$$

El ideal irrelevante (vea Definición 3.4.17) corresponde al conjunto vacío.

Dado un subconjunto  $X \subset \mathbb{P}^n$ , se le puede asociar  $I(X)$ , el ideal homogéneo en  $R$  generado por las formas que se anulan en puntos de  $X$  llamado **ideal homogéneo asociado al conjunto algebraico proyectivo  $X$** . Además, es importante observar que los radicales de ideales homogéneos es homogéneo.

Si  $k$  es algebraicamente cerrado, en forma análoga al caso afín, por el Teorema de los Ceros de Hilbert se tiene la siguiente correspondencia uno a uno

$$\begin{array}{c} \{ \text{Ideales radicales homogéneos (no irrelevantes) de } R \} \\ \updownarrow \\ \{ \text{conjuntos algebraicos proyectivos de } \mathbb{P}^n \}. \end{array}$$

Observe que si se incluye al ideal irrelevante ya no se tendría una correspondencia uno a uno, pues tanto el ideal irrelevante y el ideal  $(1) = R$  corresponderían al conjunto vacío.

Si  $I(X)$  es el ideal asociado al conjunto algebraico proyectivo  $X$ , entonces  $\frac{R}{I(X)}$  es llamado el **anillo de coordenadas homogéneo** de  $X$ , este no es solamente un invariante de  $X$  (como en el caso afín), sino que es un invariante de  $X$  junto con su embebimiento en el espacio proyectivo.

El espacio proyectivo puede ser visto como el espacio afín “completado” adicionando algunos puntos en el infinito de la siguiente forma: consideremos  $U$  el complemento en  $\mathbb{P}^n$  del hiperplano  $H : X_0 = 0$  ( $H = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 = 0\}$ ); es decir,  $U = \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 \neq 0\}$ , como las coordenadas son definidas salvo el producto por un escalar no nulo, todo punto  $(a_0 : \dots : a_n)$  en  $U$  puede ser representado de forma única por  $(1 : b_1 : \dots : b_n)$ , con  $b_i = \frac{a_i}{a_0}$ . La asociación  $(1 : b_1 : \dots : b_n) \mapsto (b_1, \dots, b_n)$  es una biyección entre  $U$  y  $\mathbb{A}^n$  (así, un punto  $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$  con  $a_0 \neq 0$  corresponde a el punto  $(b_1, \dots, b_n)$  en  $\mathbb{A}^n$ ) cuya inversa viene dada por  $(b_1, \dots, b_n) \mapsto (1 : b_1 : \dots : b_n)$  (de esta forma obtenemos todos los puntos de  $\mathbb{P}^n$  con  $a_0 \neq 0$ ). Así,

$\mathbb{P}^n = U \sqcup H = \mathbb{A}^n \sqcup H$ ,  $H$  es llamado **hiperplano en el infinito** y como puede ser identificado con  $\mathbb{P}^{n-1}$  podemos continuar con esta descomposición y así obtener  $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0$ , donde  $\sqcup$  representa la unión disjunta.

Alternativamente podemos notar que la noción de isomorfismo entre  $U$  y  $\mathbb{A}^n$  está relacionada con las coordenadas; es decir, que si consideramos  $U$  como el complemento del hiperplano  $H : X_1 = 0$ , tenemos que todo punto de  $U$  puede ser representado de forma única en la forma  $(b_1 : 1 : \dots : b_n)$ , con  $b_i = \frac{a_i}{a_1}$ . La asociación  $(b_1 : 1 : \dots : b_n) \mapsto (b_1, \dots, b_n)$  es una biyección entre  $U$  y  $\mathbb{A}^n$ . De hecho,  $\mathbb{P}^n$  contiene  $n + 1$  copias de  $\mathbb{A}^n$  ( $\mathbb{A}_i^n$  si  $a_i \neq 0$ ;  $i = 0, \dots, n$ ) las cuales se intersectan; es decir;  $\mathbb{P}^n$  tiene una cobertura por copias de  $\mathbb{A}^n$ . Todo punto de  $\mathbb{P}^n$  está en al menos una de estas piezas y puede ser escrito abajo en las coordenadas afines de esa pieza.

Para que estas identificaciones sean útiles es necesario notar que un conjunto algebraico en  $\mathbb{P}^n$  intersecta a  $U$  en un conjunto algebraico afín; en efecto: si  $X \subset \mathbb{P}^n$  es un conjunto algebraico definido por ecuaciones homogéneas  $F_i(X_0, \dots, X_n)$ , entonces  $X \cap U$  puede ser descrito  $F_i(1, X_1, \dots, X_n) = f_i(X_1, \dots, X_n) = 0$ . Así,  $X \cap U$  es naturalmente un conjunto algebraico en  $\mathbb{A}^n$ .

Todo conjunto algebraico en  $\mathbb{A}^n$  es la intersección de  $U$  con un conjunto algebraico en  $\mathbb{P}^n$ ; en efecto: cualquier polinomio  $f(X_1, \dots, X_n)$  puede escribirse de la forma  $F(1, X_1, \dots, X_n)$  para algún polinomio homogéneo  $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$  de la siguiente manera: supongamos que el grado del polinomio  $f$  sea  $s$  y  $F$  el resultado de multiplicar cada componente homogéneo de  $f$  por una potencia de  $X_0$  para aumentar su potencia a  $s$ ; es decir,

$$F(X_0, \dots, X_n) = X_0^s f\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

Se sigue que  $F(1, X_1, \dots, X_n) = f(X_1, \dots, X_n)$ . La forma  $F$  es llamada la **homogenización de  $f$  con variable homogenizante  $X_0$** . La existencia de estas homogenizaciones muestran lo deseado.

Estas observaciones muestran que es razonable identificar a  $U$  con  $\mathbb{A}^n$  y además que: dado un conjunto algebraico  $X \in \mathbb{A}^n$ , la **clausura proyectiva**  $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$  de  $X$  se define como el conjunto algebraico más pequeño tal que  $\overline{X} \cap U = X$  ( $U = \mathbb{A}^n$ ).

## El Anillo Graduado Asociado y el Álgebra Explosión

Sean  $R$  un anillo y  $I$  ideal de  $R$ . A continuación, describiremos el **anillo graduado asociado** y el **álgebra explosión**. La importancia de describir estas dos estructuras algebraicas es debido a que el anillo graduado asociado, geoméricamente corresponde al conjunto excepcional (cuando  $I$  es un ideal primo) y al cono tangente (cuando  $I$  es maximal) en la explosión, mientras que  $Bl_I R$  corresponde a la superficie explosión.

Sean  $I$  un ideal del anillo  $R$  y  $F_n = \frac{I^n}{I^{n+1}}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Cuando  $f \in F_n$  y  $g \in F_m$  definimos la operación  $f.g$  de la siguiente manera: tomamos  $f' \in I^n$  y  $g' \in I^m$  tal que  $f = (f' \bmod I^{n+1})$  y  $g = (g' \bmod I^{m+1})$ , entonces

$$f.g = (f'g' \bmod I^{n+m+1}) \in F_{n+m},$$

este producto define una estructura de anillo en

$$gr_I R = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots = \frac{R}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \dots$$

y  $gr_I R$  llega a ser un anillo graduado (vea Definición 3.4.16).

**Definición 3.4.20.** El anillo  $gr_I R$  es llamado el **anillo graduado de  $R$  con respecto a  $I$** .

Ahora, pasamos a definir el álgebra explosión.

**Definición 3.4.21.** Si  $I$  es un ideal del anillo  $R$ , entonces el **álgebra explosión de  $I$  en  $R$**  es el  $R$ -álgebra

$$Bl_I R = R \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots \simeq R[tI] \subset R[t].$$

Observe que:

$$\frac{Bl_I R}{I Bl_I R} = \frac{R}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \dots = gr_I R.$$

Se prueba que si  $J \subset I$  son ideales de un anillo  $R$ .  $gr_I \left( \frac{R}{J} \right) = \frac{gr_I R}{in(J)}$ .

El contexto geométrico en el que surge el  $k$ -álgebra explosión es la siguiente: Sean  $R$  el álgebra de coordenadas del conjunto algebraico  $X$  sobre el cuerpo  $k$  e  $I$  el ideal de un subconjunto algebraico  $Y \subset X$ , entonces hay un conjunto algebraico  $Z$  obtenido explotando  $Y \subset X$ , cuyo anillo de coordenadas es  $Bl_I R$ , el cual es definido como sigue: sean  $f_1, \dots, f_n$  generadores del  $k$ -álgebra  $R$  y  $g_0, \dots, g_s$  generadores del ideal  $I$  (como un ideal de  $R$ ). El álgebra  $Bl_I R$  es imagen homomorfa del anillo  $k[X_1, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_s]$  mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[X_1, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_s] & \longrightarrow & Bl_I R \\ X_i & \longmapsto & f_i \\ Y_j & \longmapsto & g_j \end{array}$$

el núcleo de esta aplicación,  $ker(\varphi)$ , es un ideal que es homogéneo en las variables  $Y_j$ , el cual corresponde al subconjunto algebraico  $Z \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^s$  (pues observe que,  $\frac{k[X_1, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_s]}{ker(\varphi)} \simeq Bl_I R$ ).

La aplicación proyección  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^s \longrightarrow \mathbb{A}^n$  envía  $Z$  hacia  $X$  y es un isomorfismo lejos de la pre imagen de  $Y$ . El conjunto  $Z$  es llamada la **explosión de  $X$  con centro en  $Y$** .

La pre imagen de  $Y$  en  $Z$  corresponde al anillo  $\frac{Bl_I R}{I Bl_I R} = gr_I R$ . Esta pre imagen, la cual es llamada el **conjunto excepcional** de la explosión, es la variedad proyectiva asociado al anillo graduado  $gr_I R$ .

El hecho de que el  $gr_I R$  anillo graduado corresponda al conjunto excepcional en la explosión tiene la siguiente consecuencia geométrica:

Sea  $R = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{J}$  ( $k$  algebraicamente cerrado),  $I = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ . Sea  $X = Z(J) \subset \mathbb{A}^n$  y supongamos que  $J \subset I$  ( $Z(I) \subset Z(J) = X$ ), luego  $0 \in X$ . El **cono tangente** de  $X$  en  $0$  (compuesto de todas las líneas que son las posiciones límites de rectas secantes a  $X$  que pasan a través del  $0$ ) viene definido por el ideal  $in(J) \subset k[X_1, \dots, X_n]$ . Luego, el anillo de coordenadas del cono tangente es  $gr_{(X_1, \dots, X_n)} R$ , para una ilustración gráfica vea la figura 10.

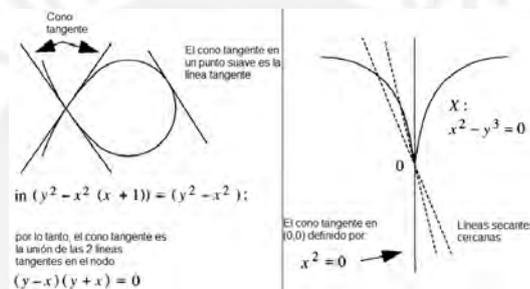


Figura 10: Figura obtenida de [4]

## Localización y Completaciones

Sea  $X \subset k^n$  un conjunto algebraico,  $I = I(X)$  su ideal asociado,  $A(X)$  su anillo de coordenadas,  $p \in X$ . La idea de localización surgió del deseo de estudiar la naturaleza de  $X$ , en  $X \setminus Y$  (donde  $Y$  es un subconjunto algebraico de  $X$  que no contiene a  $p$ ) un abierto de Zariski arbitrariamente pequeño de  $p$  (en este caso se puede considerar que  $Y$  es definido por una sola ecuación  $f$ , y note que se tiene  $f(p) \neq 0$ ). En este caso,  $X \setminus Y$  es isomorfo a un conjunto algebraico embebido en  $k^{n+1}$ , y es llamado **vecindad afín abierta** de  $p$ , cuyo anillo de coordenadas es obtenida de  $A(X)$  adjuntando la inversa de  $f$ , si invertimos todas las funciones en  $A(X)$  que no se anulan en  $p$ , el objeto obtenido es un buen representante algebraico del germen de  $X$  en  $p$ , el anillo de coordenadas de  $p$ . Para un análisis más detallado de esta situación vea [4]. Esta es la noción geométrica, a continuación damos la definición “formal” de la localización.

De forma análoga a como se construye el conjunto de los números racionales a partir de los enteros, dado  $R$  un dominio de integridad, es posible definir el cuerpo de fracciones de  $R$  de la siguiente manera: sean  $(a, r), (b, s) \in R \times R$ ,

donde  $s \neq 0$ ,  $r \neq 0$  y consideremos la relación

$$(a, r) \equiv (b, s) \iff a.s = br.$$

Se prueba que esta relación es de equivalencia siempre y cuando  $R$  sea un dominio de integridad (la transitividad solo se cumple en este caso). Se prueba que el conjunto de las clases de equivalencias  $\frac{a}{r}$  de  $(a, r)$  con las operaciones

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{s} = \frac{as + br}{sr}$$

$$\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} = \frac{ab}{sr}$$

tiene la estructura de cuerpo, denotado por  $\text{Frac}(R)$ .

Cuando  $R$  no es un dominio de integridad, la noción anterior se generaliza del siguiente modo: sea  $S$  un subconjunto multiplicativamente cerrado de  $R$  en  $R \times S$  definimos la relación:

$$(a, r) \equiv (b, s) \iff \exists t \in S \mid t(a.s - br) = 0.$$

Se prueba que esta relación es de equivalencia. Se denota por  $R_S$  al conjunto de las clases de equivalencia  $\frac{a}{r}$  de  $(a, r)$  y se prueba que  $R_S$  con las operaciones descritas arriba tiene la estructura de anillo conmutativo con unidad.  $R_S$  es llamada el **anillo de fracciones de  $R$  con respecto a  $S$**  y el proceso de pasar de  $R$  a  $R_S$  se le llama **localización**.

**Observación 3.4.22.** *Note que cuando  $R$  es un dominio de integridad y  $S = R \setminus \{0\}$ , la localización  $R_S$  es el cuerpo de fracciones de  $R$ .*

Toda localización viene equipada con un homomorfismo (el cual en general no es inyectivo)

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow R_S \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

1. Si  $s \in S$ , entonces  $f(s)$  es una unidad en  $R_S$ .
2.  $f(a) = 0$ , entonces existe  $s \in S$  tal que  $a.s = 0$ .
3. Cada elemento de  $R_S$  es de la forma  $f(a).f(s)^{-1}$ ,  $a \in R$  y  $s \in S$ .

**Ejemplos 3.4.23.**

1. Sea  $P$  un ideal primo de  $R$ . Entonces  $S = R \setminus P$  es un conjunto multiplicativamente cerrado de  $R$  y en este caso denotamos  $R_S$  por  $R_P$ . El anillo  $R_P$  es local, en efecto: el conjunto formado por los elementos de la forma  $\frac{a}{r}$ ,  $a \in P$  y  $r \notin P$  forma un ideal  $P_P$  en  $R_P$ . Observemos que si  $\frac{b}{t} \notin P_P$ , entonces  $b \notin P$  y  $t \notin P$ , entonces  $\frac{b}{t}$  es una unidad en  $R_P$  (pues,  $b \in S$ ). Además, si  $Q$  es un ideal en  $R_P$  tal que  $Q \not\subseteq P_P$  entonces contiene una unidad y por tanto  $Q = R_P$ , luego  $P_P$  es el único ideal maximal de  $R_P$  y por tanto es local.  $k(P) = \frac{R_P}{P_P}$  es llamado el **cuerpo de clases residuales** de  $R$  en  $P$ . Veamos algunos casos particulares

- Sean  $R = k[X_1, \dots, X_n]$ , donde  $k$  es un cuerpo infinito y algebraicamente cerrado y  $P$  un ideal primo de  $R$ , entonces

$$R_P = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R, g \notin P \right\}.$$

Si  $X = Z(P) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in P\}$  es la variedad algebraica definida por el ideal  $P$ , entonces  $R_P$  puede identificarse con el anillo de todas las funciones racionales que están definidas en casi todos los puntos de  $X$  (excepto, en los puntos donde el denominador no este en  $P$ , sin embargo se anule) llamado el **anillo local de  $k^n$  a lo largo de la variedad  $X$** .

- Sea  $R = A(X)$  el anillo de coordenadas de la variedad  $X$ ,  $p \in X$  y  $P = I\langle p \rangle$  el ideal de todos los elementos de  $R$  que se anulan en  $p$  (por tanto es  $P$  es maximal), entonces  $R_P$ , el anillo obtenido invirtiendo todas las funciones que no se anulan en  $p$ , es el **anillo local de la variedad  $X$  en  $p$** .

2. Sea  $f \in R$  y  $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ , en este caso denotamos a  $R_S$  por  $R_f$ . En particular, cuando  $R = \mathbb{Z}$ ,  $0 \neq f \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$R_f = \left\{ \frac{g}{h} \mid h = f^n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

es el conjunto de números racionales cuyo denominador es una potencia de  $f$ .

3. Sea  $R$  arbitrario y  $S$  conjunto de no divisores de cero  $R$ , entonces  $R_S$  es llamado el cociente total de  $R$  y se denota por  $K(R)$ , esta es la mayor localización tal que la aplicación  $R \rightarrow R_S$  es inyectiva.

De forma análoga se define la localización de un  $R$ -módulo ([4]).

A continuación, pasamos a definir la noción de completaciones. Las completaciones de un anillo  $R$  con respecto a un ideal  $M$ , suele denotarse por  $\hat{R}_M$

o simplemente por  $\hat{R}$  cuando  $M$  es claro, el caso de mayor interés es cuando  $R$  es local y  $M$  el ideal maximal.

Si  $R = A(X)$  es el anillo de una variedad algebraica afín  $X$  y  $M$  es su ideal maximal, la localización de  $R$  respecto a su ideal máximo  $M$  refleja las propiedades de la variedad en vecindades abiertas de Zariski del punto correspondiente a  $M$ ; mientras que  $\hat{R}_M$ , la completación de  $R$  con respecto a  $M$ , representa las propiedades de la variedad  $X$  en vecindades mucho más pequeñas.

Si  $k$  es un cuerpo,  $R = k[X_1, \dots, X_n]$  y  $M = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$  su ideal Maximal, entonces la completación del anillo polinomial  $R$  con respecto a  $M$  es  $k[[X_1, \dots, X_n]]$ . Más generalmente, si  $R = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{Ik[X_1, \dots, X_n]}$  la completación de  $R$  con respecto a  $M$  es  $\frac{k[[X_1, \dots, X_n]]}{Ik[[X_1, \dots, X_n]]}$ . En general, toda completación puede ser definida en términos de series de potencias formales.

### El Teorema de la Estructura de Cohen

La *característica* de un anillo  $R$  es el entero positivo que genera el núcleo del homomorfismo natural  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ .

Para  $R$  un anillo local,  $M$  su ideal maximal y  $K = \frac{R}{M}$  su cuerpo de clases residuales, se prueba que:  $R$  contiene un cuerpo si y solo si la característica de  $R$  es igual a la característica de  $K$ . En este caso  $R$  es llamado un anillo local *equicaracterístico*.

El teorema de la estructura de Cohen establece que cualquier anillo noetheriano, local y completo  $R$  es imagen homomorfa de un anillo de series de potencias en un número finito de variables sobre un “agradable” anillo. Cuando  $R$  es equicaracterístico, el anillo “agradable” puede ser un cuerpo. Como los anillos noetherianos locales completos son finitamente generados, comparten ciertas propiedades con los anillos afines, así estas tienen mejor comportamiento que anillos noetherianos locales arbitrarios.

El siguiente teorema nos dice que una aplicación del anillo de series de potencias formales  $R[[X_1, \dots, X_n]]$  hacia otro anillo completo  $S$ , puede ser especificado simplemente diciendo donde enviar cada  $X_i$ .

**Teorema 3.4.24.** *Sea  $R$  cualquier anillo y sea  $S$  un  $R$ -álgebra que es completa respecto a un ideal  $I$ . Dado  $f_1, \dots, f_n \in I$*

1. *Hay un único homomorfismo de  $R$ -álgebras*

$$\begin{array}{ccc} \varphi : R[[X_1, \dots, X_n]] & \longrightarrow & S \\ X_i & \longmapsto & f_i \end{array}$$

esta aplicación lleva  $g(X_1, \dots, X_n) \in R[[X_1, \dots, X_n]]$  hacia  $g(f_1, \dots, f_n) \in S$ .

2. Si la aplicación inducida  $R \rightarrow \frac{S}{I}$  es un epimorfismo y si  $f_1, \dots, f_n$  generan a  $I$ , entonces  $\varphi$  es un epimorfismo.
3. Si la aplicación asociada de anillos graduados asociados

$$gr\varphi : R[X_1, \dots, X_n] \simeq gr_{\langle X_1, \dots, X_n \rangle} R[[X_1, \dots, X_n]] \longrightarrow gr_I S$$

es un monomorfismo, entonces  $\varphi$  es un monomorfismo.

*Demostración.* 1. La única aplicación de  $R$ -álgebras  $R[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \frac{S}{I^t}$  que envía a cada  $X_i$  a las clases de  $f_i$  se factoriza a través de

$$\frac{R[[X_1, \dots, X_n]]}{\langle X_1, \dots, X_n \rangle^t} = \frac{R[[X_1, \dots, X_n]]}{\langle X_1, \dots, X_n \rangle^t} \longrightarrow \frac{S}{I^t}$$

así, induce una única aplicación  $\varphi : R[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow \frac{S}{I^t}$  que envía a los  $X_i$  a las clases de los  $f_i$ . Desde que  $S$  es el límite inverso de  $\frac{S}{I^t}$ , hay una única aplicación  $\varphi : R[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow S$  que envía a los  $X_i$  hacia los  $f_i$ , como era requerido. La imagen de  $g + \langle X_1, \dots, X_n \rangle^t$  en  $\frac{S}{I^t}$  es  $g(f_1, \dots, f_n) + I^t$ , para todo  $t$ , luego la imagen de  $g$  en  $S$  es  $g(f_1, \dots, f_n)$ , lo que tiene sentido precisamente debido a que  $S$  es completo con respecto a  $I$ .

2. De nuestra hipótesis se sigue que la aplicación

$$\frac{\langle X_1, \dots, X_n \rangle}{\langle X_1, \dots, X_n \rangle^2} \longrightarrow \frac{I}{I^2}$$

es sobreyectiva, luego la aplicación inducida  $gr\varphi : gr_{\langle X_1, \dots, X_n \rangle} R \rightarrow gr_I S$  es también sobreyectiva. Ahora, dado  $0 \neq g \in S$  sea  $i$  el número mas grande tal que  $g \in I^i$  (tal  $i$  existe por que  $S$  es completo), así  $\cap I^j = 0$ . Desde que  $gr\varphi$  es sobreyectiva podemos encontrar un  $g_1 \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle^i$  cuya forma inicial es llevado a la forma inicial de  $g$ . Se sigue que  $g - \varphi(f_1) \in I^{i+1}$ .

Repitiendo este proceso, se obtiene una sucesión de elementos  $g_j \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle^{i+j}$  tal que  $g = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(g_j)$ . Puesto que  $\varphi$  preserva infinitas sumas, esto produce  $g = \varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j\right)$ .

3. Si  $0 \neq g \in R[[X_1, \dots, X_n]]$ , entonces  $in(g)$  es una forma no nula, digamos de grado  $d$ , y de la hipótesis se tiene  $gr\varphi(in(g)) \neq 0$  en la parte

de grado  $d$  de  $gr_I S$ . Pero  $g \equiv in(g) \bmod \langle X_1, \dots, X_n \rangle^{d+1}$ , luego  $\varphi(g) = gr\varphi(in(g)) \bmod I^{d+1}$ , de donde  $\varphi(g) \neq 0$ .

□

**Teorema 3.4.25** (Teorema de estructura de Cohen). *Sea  $R$  un anillo noetheriano, local y completo con ideal maximal  $M$  y cuerpo de clases residuales  $K$ . Si  $R$  contiene un cuerpo (equicaracterístico), entonces  $R \simeq \frac{K[[X_1, \dots, X_n]]}{I}$  para algún  $n$  y algún ideal  $I$ .*

*Demostración.* Escoja un cuerpo de coeficientes  $K \subset R$ , y sea  $a_1, \dots, a_n$  un conjunto de generadores del ideal maximal de  $R$ . Desde que  $R$  es completo, el ítem 1 del Teorema 3.4.24 muestra que hay una aplicación  $\varphi : K[[X_1, \dots, X_n]] \rightarrow R$  que envía a los  $X_i$  hacia los  $a_i$ . El ítem 2 del Teorema 3.4.24 muestra que esta aplicación es sobreyectiva, así que si  $I$  es el núcleo de la aplicación  $\varphi$  ( $I = \ker(\varphi)$ ), entonces  $R \simeq \frac{K[[X_1, \dots, X_n]]}{I}$ . Para más detalles sobre la demostración de este teorema y sus aplicaciones vea [4]. □

Sean que  $X$  sea una variedad afín,  $p \in X$  un punto de  $X$ ,  $A(X)$  anillo de coordenadas de  $X$  y  $M_p$  ideal maximal de  $A(X)$  correspondiente al punto  $p$ . Sea  $R = A(X)_{M_p}$  ser la localización (anillo local de  $X$  en  $p$ ) cuyo anillo maximal es  $M$  ( $M$  es la localización de  $M_p$ ). La completación  $\hat{R} = \hat{R}_M$  debe considerarse como el “anillo de funciones definidos en una vecindad muy pequeña de  $p$ ”, y como se esperaba  $\hat{R}$  no tiene elementos nilpotentes.

## Referencias

- [1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1994). *Introduction to commutative algebra*. Westview press.
- [2] Brieskorn, E., Knörrer, H. (2012). *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell*. Springer Science-Business Media.
- [3] Chenciner, A. (2008). *Courbes algébriques planes*. Springer.
- [4] Eisenbud, D. (2013). *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry* (Vol. 150). Springer Science-Business Media.
- [5] Eisenbud D., Harris J. (2000). *The geometry of schemes*. Springer-Verlag, New York.
- [6] Hauser, H. (2003). *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or: A proof we always wanted to understand)*. Bulletin of the American Mathematical Society, 40(3), 323-403.
- [7] Hironaka, H. (1964). *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I-II*. *Annals of Mathematics*, 109-326.
- [8] Kiyek, K., Vicente, J. L. (2004). *Resolution of curve and surface singularities in characteristic zero. Algebras and Applications*. Springer Science-Business Media.
- [9] Lipman, J. (1965). *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*.
- [10] Lipman, J. (1983, January). *Quasi-ordinary singularities of surfaces in  $C^3$* . In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (Vol. 40, No. Part 2, pp. 161-172).
- [11] Luengo, I. (1983, January). *On the structure of embedded algebroid surfaces*. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (Vol. 40, pp. 185-192). 201 CHARLES ST, PROVIDENCE, RI 02940-2213: AMERICAN MATHEMATICAL SOC.
- [12] Reid, M. (1995). *Undergraduate commutative algebra*, (Vol. 29). Cambridge University Press.
- [13] Soia, M. J., Seade, J. (2006). *Contemporary Mathematics*.
- [14] Nagata, M. (1962). *Local rings*.

- [15] Shafarevich, I. R. (1994). *Basic algebraic geometry. 2. Schemes and complex manifolds*. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.
- [16] van der Waerden, B. L. (1970). *Algebra*, Vol. 2, Frederick Ungar Publ. Co., New York.
- [17] Zariski, O. (1962). *La risoluzione delle singolarità delle superficie algebriche immerse*. Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie, 8, 97-102.
- [18] Zariski, O. (1965). *Studies in equisingularity II. Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero)*. American Journal of Mathematics, 87(4), 972-1006.
- [19] Zariski, O., Samuel, P. (1960). *Commutative algebra*, Vol. 2, Van Nostrand, Princeton.
- [20] Wall, C. T. C. (2004). *Singular points of plane curves (Vol. 63)*. Cambridge University Press.

