PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA SUPERAR LAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS AL ARTICULAR LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADO POR:

ERNALDO CARUAJULCA MUÑOZ

ASESOR DE TESIS:

MG. MARIANO ADÁN GONZÁLEZ ULLOA

MIEMBROS DEL JURADO:

DRA. NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

MG. MARIANO ADÁN GONZÁLEZ ULLOA

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

LIMA-PERÚ

2013

DEDICATORIA

A Ximena Nicole, mi hija, por ser la fuerza que me impulsa seguir adelante.

A Noribel, mi esposa, por ser mi apoyo constante y gran compañera.

A mis queridos padres: Clemencia Muñoz Medina y Julio Caruajulca Tirado (en memoria) quienes me inculcaron los valores y el espíritu de seguir con mis estudios.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco enormemente al Mg. Mariano González Ulloa, mi asesor de tesis, por dedicar su tiempo, orientar y ser un guía en el desarrollo de esta investigación.

Especial agradecimiento a la Dra. Jesús Flores Salazar por sus valiosas sugerencias en la elaboración del plan de tesis.

Especial agradecimiento a la Dra. Norma Rubio Goycochea por sus valiosas sugerencias en la parte metodológica del desarrollo de esta investigación.

Un reconocimiento especial a todos los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por la enseñanza recibida de ellos en las aulas de la PUCP.

RESUMEN

En este trabajo de investigación, se propone el tratamiento de los problemas de optimización mediante el uso del software *Cabrí-Géomètre II* y *Cabrí* 3D, para articular los tipos de representaciones semióticas que producen los estudiantes de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad Privada del Norte (UPN)- Lima, matriculados en el curso de Cálculo 1 en el semestre académico 2013-1, al resolver problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal y cuyos modelos matemáticos resultan ser funciones cuadráticas o cúbicas.

Para esta investigación se ha tomado como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, la cual sirvió como referencia para el diseño de las actividades a ser trabajadas con los estudiantes, solo usando lápiz y papel; así poder detectar las dificultades que presentan al resolver los problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal. Dichas actividades fueron diseñadas de tal manera que se induzca al estudiante a articular el registro verbal, el registro gráfico y el registro algebraico.

La planificación y elaboración de este trabajo de investigación se hizo teniendo como marco metodológico a la Ingeniería Didáctica de Artigue, la que sirvió para los análisis preliminares, la concepción y análisis a priori, la experimentación; para el análisis a posteriori y validación de las producciones de los estudiantes, al confrontar los supuestos o comportamientos esperados con los resultados observados.

Luego de recoger la información y analizar las dificultades de los estudiantes, presentamos una propuesta didáctica para tratar los mismos problemas desarrollados con lápiz y papel, pero esta vez usando como recurso didáctico el software *Cabrí-*

Géomètre II y *Cabrí* 3D con la finalidad de mejorar la articulación entre los registros de representación semiótica.

Con esta investigación queremos contribuir en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los problemas de contexto real, enunciados en el lenguaje verbal, relacionados con la optimización de funciones cuadráticas y cúbicas, para los estudiantes de la UPN. También contribuir con el modelo educativo de la UPN, el cual apunta a la enseñanza basado en competencias, con el uso de las TIC y centrado principalmente en el estudiante, promoviendo la experimentación e innovación.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

CAPÍTULO 1: LA PROBLEMÁTICA

1.1 Planteamiento del problema

Con respecto a las Matemáticas, uno de los primeros cursos que enfrentan los ingresantes a las carreas de ingeniería dela Universidad Privada del Norte (UPN)-Lima es el Cálculo1 o Cálculo Diferencial, el cual sirve como herramienta para el estudio de otros cursos más avanzados, en los que se desarrollan la modelación y la resolución de problemas matemáticos.

En esta investigación se presenta una propuesta basada en una secuencia didáctica para la enseñanza de las aplicaciones de la derivada, específicamente la resolución de los problemas contextualizados de optimización de funciones, cuyo modelo matemático resulte ser una función cuadrática o cúbica. El interés de realizar esta propuesta nace a partir de nuestra experiencia docente en las aulas de la UPN, en la cátedra del curso de Cálculo1; donde la motivación y los conocimientos matemáticos de los estudiantes, matriculados en dicho curso no son los esperados y esto se ha puesto en evidencia durante las evaluaciones sobre los contenidos del curso, en las cuales hemos podido comprobar las dificultades que presentan los estudiantes al tratar de resolver problemas matemáticos enunciados en el lenguaje verbal (ver Anexo 1) y sobre todo cómo usar la derivada de una función para dar solucionar problemas relacionados con el ámbito real y del entorno de los estudiantes. Además, la enseñanza de este contenido matemático se realiza siguiendo una estructura o secuencia algorítmica lo que hace más difícil aún el entendimiento por parte de los estudiantes del por qué es que la función alcanza su valor óptimo en determinado punto, y el estudiante ve esta situación en forma abstracta ya que no se hace uso de ninguna herramienta tecnológica para mostrar cómo dicha función se comporta de forma dinámica, de tal manera que se pueda apreciar, de forma visual y manipulando el objeto, en qué puntos la función alcanza su máximo o mínimo valor. Además, lo expuesto anteriormente también lo hemos corroborado en otras investigaciones en el campo de la Educación Matemática, por ejemplo: de acuerdo con Contreras (2000), los profesores al desarrollar un tema de Análisis Matemático, nos enfrentamos a conceptos que por su propia naturaleza son problemáticos en sí mismo, como por ejemplo el tema de límites o derivadas, lo que nos conduce a optar posturas algorítmicas de modo que los problemas matemáticos sean mucho más fáciles de resolver, dejando de lado las diferentes representaciones e interpretaciones que se pudieran encontrar. De manera análoga Artigue (1995) afirma que la enseñanza tradicional del Análisis Matemático, por lo general tiende a centrarse en una práctica algorítmica, algebraica, repetitiva y que la evaluación se hace sobre las competencias adquiridas en este dominio. De este modo, los diferentes temas que se desarrollan en el curso de Cálculo 1, dependen de las definiciones de los objetos matemáticos, dejando de lado la importancia que tienen las transformaciones entre los registros de representación semiótica, debido a que no se tratan dichos objetos matemáticos a través de actividades que favorezcan las transformaciones de sus registros ni tampoco la articulación de los mismos mediante otros medios de expresión y representación como por ejemplo el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC).

Por las razones expuestas en los párrafos anteriores, en esta investigación presentamos los resultados de haber aplicado una secuencia didáctica de actividades, diseñadas en base al marco teórico de la Teoría de Registros de Representación

Semiótica de Duval (1993) y teniendo como marco metodológico a la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), las cuales detallaremos más adelante. Además, se sugiere el uso de la tecnología de la información y comunicación como recurso para la parte correspondiente a la representación del modelo matemático. Para este fin hemos considerado como recurso didáctico el software *Cabrí-Géomètre II y Cabrí* 3D.

1.2 Antecedentes

Motivados en plantear una propuesta para resolver problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal, emprendimos la pesquisa sobre investigaciones en Didáctica de las Matemáticas relacionadas con la solución de problemas de optimización, que nos sirva de aporte al desarrollo de nuestra investigación. A continuación, presentamos los resultados de nuestra búsqueda:

Villegas, Castro y Gutiérrez (2009) hacen un estudio de caso sobre la solución de problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal, con estudiantes de licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada (España). Dichos investigadores están convencidos de que las representaciones juegan un papel fundamental en el pensamiento matemático, favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos y estimulan el desarrollo de un pensamiento flexible y versátil en la resolución de problemas. Además, enfatizan que los problemas de optimización son de gran interés en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que muestran aplicabilidad y utilidad para el análisis y la resolución de cuestiones prácticas de carácter muy variado. Además, generan una motivación adicional basada en su poder aplicado y en la creatividad que requiere el uso múltiple de representaciones semióticas. Esta investigación fue la que determinó el inicio para realizar nuestro estudio sobre la solución de problemas de optimización con los estudiantes de Ingenierías que estuvieron matriculados en el curso de Cálculo 1.

También encontramos que Dávila, Grijalva y Bravo (2011) proporcionan una propuesta didáctica apoyada en el software GeoGebra, para la enseñanza de la derivada como la pendiente de la recta tangente, en el curso Cálculo Diferencial e Integral del área de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El objetivo de este estudio es promover la construcción pragmática del significado de la derivada y otros objetos matemáticos del Cálculo, resolviendo problemas de optimización. Este estudio realmente nos muestra que los problemas de optimización se pueden tratar en ambientes interactivos de geometría dinámica y nos sirve de base para orientar nuestra investigación en esa dirección, por lo que en nuestro caso usaremos como recurso didáctico el software Cabri II Plus y Cabri 3D. Como también necesitábamos indagar sobre el marco teórico y metodológico para poner en marcha nuestra investigación, encontramos que Encinas y Ávila (2011) presentan parte de una investigación sobre la comprensión y competencias que estudiantes de ingeniería muestran al resolver problemas de optimización en un curso de Cálculo; dicha investigación está apoyada en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática; los resultados muestran un bajo desempeño de los estudiantes ante esos problemas. Esta investigación es muy importante para nosotros puesto que tomaremos como un prototipo de cómo un objeto matemático puede ser abordado desde diferentes perspectivas. En nuestro caso trataremos con problemas de optimización de funciones cuadráticas y cúbicas, pero abordadas desde el punto de vista de la teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval. Si bien es cierto no hay muchas investigaciones sobre solución de problemas de optimización tratados en ambientes interactivos de geometría dinámica y que estén apoyadas en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, se encontraron algunas investigaciones que no necesariamente tratan el tema de optimización pero sí sustentadas en el mismo marco teórico que nos interesa, como por ejemplo los investigadores Gutiérrez y Aparicio (2007) en su tesis de maestría caracterizan las transformaciones (tratamientos y conversiones) que realiza un grupo de estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería, cuando se proponen situaciones de variación que se modelan mediante la función afín, para lo cual se estudian las producciones escritas por los alumnos. Esta tesis se fundamenta en la Teoría de Registros de Representación de Raymond Duval, de donde se toman algunos elementos que definen el marco conceptual a partir del cual se diseñan las actividades propuestas a los estudiantes y se construyen las categorías de análisis de los resultados. Esta investigación nos permite tener un panorama de cómo adaptar la Teoría de Registros Representación Semiótica en el desarrollo de los problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal.

Consideramos como nuestro principal antecedente, al estudio realizado por Campero (2010) quien, en su tesis doctoral, proporciona una propuesta didáctica en Optimización Dinámica específicamente relacionada al caso del Cálculo de Variaciones y la Teoría de Control. Esta investigación nos sirvió para delimitar nuestro problema y para el análisis preliminar de nuestra investigación, puesto que presenta un gran análisis epistemológico con respecto al tema de optimización.

1.3 Justificación del tema de investigación

Luego de presentar investigaciones relacionados con la optimización de funciones, y de comprobar en nuestra práctica docente las dificultades del tipo traducción verbal, algebraica y gráfica que muestran nuestros estudiantes al tratar de representar un objeto matemático en general y las funciones cuadráticas y cúbicas en particular, consideramos que es muy importante saber representar el modelo matemático obtenido de los problemas enunciados en el lenguaje verbal, relacionados con el entorno de los alumnos de ingenierías, en los que se pueda aplicar la optimización de funciones cuadráticas y cúbicas. Por tal razón, creemos que la concepción de dicho modelo matemático sería más significativa si se muestra en sus diferentes representaciones y que no solo se realicen con lápiz y papel, sino que valiéndose de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) se muestre la representación gráfica en un ambiente de geometría dinámica en el cual se pueda apreciar el efecto que se produce en la imagen la variación de la variable independiente de la función a tratar.

De acuerdo a Saiz & Acuña (2006), la inclusión de la tecnología en los ambientes educativos de educación superior como también de secundaria, están contribuyendo enormemente a la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en general y de las matemáticas en particular. Una de las ventajas del uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es la posibilidad de tratar dinámicamente los objetos matemáticos en diversas formas de representación dentro de ambientes interactivos, como el *Cabri-Géomètre II y Cabri 3D*. Estas representaciones difícilmente se pueden lograr con los medios tradicionales, como el lápiz y el papel, debido a que las construcciones geométricas en estas condiciones son estáticas. En este tipo de ambientes interactivos, los objetos matemáticos se pueden manipular directamente y explorar sus propiedades y la relación entre sus elementos.

Según Duval (1993), los objetos matemáticos son por naturaleza abstractos y que solo se puede acceder a ellos por intermedio de sus representaciones, por lo que su conceptualización se fundamenta en la capacidad del estudiante para identificar un concepto en diferentes registros. Por lo tanto, creemos que usar las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ayuda a articular las diferentes representaciones alrededor de un objeto matemático en particular. Para tal efecto, se ha escogido el software *Cabri-Géomètre II y Cabri 3D* no solo por su adaptación al tratamiento y exploración de las propiedades de este tipo de problemas, relacionados con las funciones cuadráticas y cúbicas, sino porque esta investigación se realizó con alumnos de la Universidad Privada del Norte(UPN) - Lima, la cual cuenta con la licencia de funcionamiento de dicho software.

Con esta investigación queremos contribuir en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los problemas de contexto real, enunciados en el lenguaje verbal, relacionados con la optimización de funciones cuadráticas y cúbicas, para los estudiantes de la UPN. También contribuir el modelo educativo de la UPN, el cual apunta a la enseñanza basada en competencias, con el uso de las TIC y centrado principalmente en el estudiante, promoviendo la experimentación e innovación.

1.4 Delimitación del problema

La optimización es una rama bastante amplia dentro de las matemáticas por lo que Campero (2010), afirma de una manera muy general y esquemática, que la optimización puede clasificarse de acuerdo al siguiente cuadro:

Tabla nº1: Clasificación de la optimización

$$\textit{Optimización}\begin{cases}\textit{Estática}\\[2ex] \textit{Dinámica}\begin{cases}\textit{continua}\\ \textit{discreta}\end{cases}\end{cases}$$

Fuente: Campero (2010, p.11)

Campero (2010) señala que:

La optimización estática busca optimizar en un instante, por lo que el tiempo no juega un rol relevante. Este tipo de optimización se inició de manera formal con los griegos y en la actualidad, está relacionada con los problemas de optimización que se tratan en los cursos de Cálculo Diferencial de una variable y en el de Cálculo de Varias Variables.

Mientras que la optimización dinámica, tal como lo indica su nombre, está relacionada con la optimización de sistemas cambiantes en el tiempo, por lo tanto, no se trata de encontrar soluciones de puntos óptimos, sino de trayectorias óptimas. Su estudio se profundiza en los cursos de Cálculo de Variaciones, la Teoría Clásica de Control; la Programación Lineal y no Lineal.

Desde la perspectiva sobre la clasificación de los problemas de optimización señalados líneas arriba, en esta investigación queremos ser específicos delimitando el estudio solo de aquellos problemas correspondientes a la línea de la optimización estática, enunciados en el lenguaje verbal cuyos modelos matemáticos resulten ser funciones cuadráticas o cúbicas; de una variable independiente.

1.5 Pregunta de investigación

Las anteriores consideraciones permiten plantear la siguiente interrogante:

¿Qué propuesta ayudaría a superar las dificultades que presentan los estudiantes, para articular los registros de representación semiótica, en la solución de problemas de optimización cuyos modelos matemáticos son funciones cuadráticas o cúbicas?

1.6 Objetivo general

Proponer el tratamiento de los problemas de optimización mediante el uso del software *Cabri-Géomètre II y Cabri 3D*, para articular los registros de representación semiótica.

1.7 Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

i. Analizar las representaciones con lápiz y papel producidas por un grupo de estudiantes de las carreras de ingeniería, matriculados en el curso Cálculo 1 de la Universidad Privada del Norte-Lima en el semestre 2013-1, para identificar las dificultades que presentan al resolver problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal cuyos modelos matemáticos resulten ser funciones cuadráticas o cúbicas.

ii. Proponer, en base a los resultados obtenidos y considerando los resultados esperados, una secuencia didáctica para el tratamiento de las actividades que se aplicaron y desarrollaron los estudiantes, usando como recurso didáctico el software *Cabri-Géomètre II y Cabri 3D* con la finalidad de mejorar la articulación de los registros de representación semiótica.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo presentamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval (1993), la cual hemos seleccionado como marco teórico de esta investigación, dado que este marco, permite explicar el nivel de conceptualización de los objetos matemáticos, en base a los distintos registros de representación, exigiendo el conocimiento, el tratamiento y la conversión, que los estudiantes muestran en la solución de los problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal. También presentamos la Ingeniería Didáctica de Michel Artigue (1995) como metodología de investigación que nos permitirá diseñar, aplicar, analizar las secuencias de enseñanza y validar la presente investigación.

2.1 Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Para el desarrollo de esta investigación se ha tomado como referencia un enfoque cognitivo basado en el análisis de los Registros de Representación Semiótica y su efecto en el aprendizaje y concepción de los objetos matemáticos. Este enfoque ha sido desarrollado por Duval (1993) y se fundamenta en la noción de sistemas de representaciones semióticas, definidas por él mismo como aquellas producciones en las que se muestra el empleo de signos, que pertenecen a un sistema semiótico; que tiene sus propias reglas de significado y funcionamiento. El mismo autor afirma que los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos tratados en las otras disciplinas, son abstractos y que solo se puede tener acceso a ellos mediante las representaciones semióticas. Es decir, la idea de un objeto matemático solo existe en nuestra mente, de modo que, para exteriorizarlo y comunicarlo se necesita de alguna representación basada en signos, que pertenezca a un sistema de representación, el cual puede ser considerado, según el investigador, como un registro de representación siempre y cuando se cumplan tres actividades cognitivas, a saber:

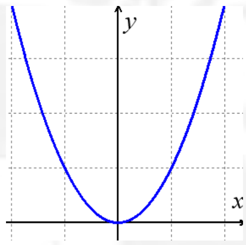
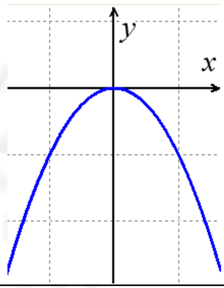
- La *presencia de alguna representación,* la cual pueda ser identificada como una representación de un registro dado. Por ejemplo: El enunciado de una frase o la escritura de una fórmula matemática.
- El *tratamiento de una representación,* consiste en la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. Siendo considerada como transformación interna. Así por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma.
- La *conversión de una representación,* que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta transformación es considerada como externa. Así por ejemplo, se hace una conversión cuando al tener una ecuación construimos su gráfica.

Por lo tanto, creemos que es conveniente abordar los problemas de optimización, no solo siguiendo una serie pasos, a manera de receta, que se proporcionan en la mayoría de los libros texto recomendados para el curso de Calculo Diferencial, sino centrándose principalmente en las representaciones semióticas, y que el estudiante esté en la capacidad de trasladarse de una a otra representación.

Según Duval (1993), los tipos de registros más apropiados para representar a los objetos matemáticos son: El registro verbal o lengua natural, el registro algebraico y el registro gráfico. En este trabajo de investigación se pretende analizar los tipos de registros que producen los estudiantes de ingenierías, al enfrentarse a problemas de optimización cuyos modelos matemáticos resulten ser funciones cuadráticas o cúbicas. Además, presentamos una propuesta para articular los registros de representación mediante el software Cabri.

A continuación, proporcionamos un ejemplo con la intención de evidenciar las representaciones que se puede producir para un mismo objeto matemático, pero en diferentes registros de representación:

Tabla n°2: Registros que se utilizarán en esta investigación

Registro Verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico	
La parábola con vértice en el origen de coordenadas, cuyo eje focal coincide con el eje de las ordenadas.	$y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$	Si $a > 0$ 	Si $a < 0$ 

Fuente: Propia

Según Duval (1995), el traslado entre registros no se efectúa de manera instantánea salvo que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. El proceso de resolución se hace más complejo cuando no hay congruencia. Entendiéndose por congruencia y no congruencia al fenómeno que resulta de la confrontación entre representaciones de naturaleza diferente de un mismo objeto matemático.

Guzmán (1998), trata el tema de congruencia y no congruencia definido por Duval, asegura que,

> Cuando hay congruencia, el traslado puede ser trivial, por ejemplo: Dada la gráfica de la función $f(x) = x$, se ve en el gráfico una recta que es bisectriz del

primer cuadrante. Ante una pregunta sobre la monotonía de esta función, se responde que se trata de una función creciente y la mayoría de los estudiantes tienen éxito, pues hay aquí un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube.

Pero cuando no hay congruencia, la tarea puede ser muy difícil y no accesible para muchos estudiantes. Por ejemplo, si pensamos que una función $f(x) = x^2$ cuya representación gráfica es una parábola, con vértice en el origen de coordenadas, y se pide dibujar la parábola que representa a la función $f(x) = (x+1)^2$, muchos estudiantes fracasan debido a que se trata de una parábola que está trasladada a la izquierda de la dada y con vértice en el punto de coordenadas (-1,0). El estudiante ve el signo más de la expresión y dibuja la parábola a la derecha de la dada. Este ejemplo es de las tareas fáciles relativas a fenómenos de no congruencia, pues contempla un traslado de registro algebraico al gráfico. (p.6)

De acuerdo con Duval (1993), se podrá asegurar que un estudiante ha comprendido íntegramente un contenido conceptual, cuando demuestre la coordinación espontánea entre, por lo menos, dos registros de representación semiótica.

De ahí nuestro interés en analizar los registros de representación semiótica y a la vez proponer la articulación de los mismos mediante el uso de la tecnología, como el Cabri II y Cabri 3D.

2.2 Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

Según Artigue (1995), la noción de Ingeniería Didáctica se originó en Francia, en el seno de la didáctica de las matemáticas a inicios de la década de los ochenta. Se denominó Ingeniería Didáctica, a una forma de trabajo semejante al que realiza un ingeniero quien, para realizar y poner en marcha un determinado proyecto, se fundamenta en sus estrictos conocimientos científicos, aceptando auditorías de corte científico.

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza:

Tabla n°3: Características de la Ingeniería Didáctica

Primero	Segundo
Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, las cuales implican realizar la planeación, el desarrollo, la observación y el análisis de las secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: • El de la *micro-ingeniería,* el cual es más fácil de llevar a la práctica puesto que permite tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase. • El de la *macro-ingeniería*, el cual es un tanto más complicado llevar a la práctica por tratarse de los fenómenos globales de la enseñanza y aprendizaje.	Por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a la que está asociada, es decir, generalmente las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de los conocimientos puestos en juego y de las variables de control de la situación experimental diseñada.

Fuente: Adaptado de Artigue (1995, pp. 36-37)

2.2.1 Fases de La ingeniería didáctica

En la metodología de la Ingeniería Didáctica según Artigue (1995), considera cuatro fases:

- El Análisis preliminar.
- La Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería.
- La Experimentación.
- El Análisis a posteriori y validación.

A continuación, describimos brevemente cada una de estas fases:

El análisis preliminar

De acuerdo con la investigadora, esta etapa tiene como objetivo realizar un conjunto de análisis correspondientes al objeto matemático en estudio y es el punto de partida para la fase de concepción. En esta fase se realiza el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Específicamente estos análisis se presentan en tres dimensiones:

- ✓ En la dimensión epistemológica: aquí se analizan las características del saber en juego. En este caso se hará un estudio epistemológico del objeto matemático en estudio.

- ✓ En la dimensión cognitiva: aquí se analizan las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, en este estudio se analizará como los estudiantes, resuelven e interpretan los problemas de optimización de funciones, también las dificultades y errores comunes en los procesos de resolución.

- ✓ En la dimensión didáctica: se analizan las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. En este estudio, se analizará la forma como se desarrolla el proceso de enseñanza de los problemas de optimización en la institución donde se realiza la investigación, los recursos didácticos y estrategias de enseñanza.

También Artigue (1995), afirma que es necesario realizar un análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica, describiendo al grupo de estudiantes con los que se experimentará tal situación, así como los recursos de la institución.

La concepción y el análisis a priori

"En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado" (Artigue, 1995, p.42).

Además, Artigue (1995) también argumenta que:

> Tradicionalmente, el análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los estudiantes:
>
> - Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
> - Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
> - Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje. (p.45).

En el análisis a priori se presentarán las posibles estrategias que podrían producir los estudiantes en la resolución de las actividades sobre problemas de optimización, enunciados en el lenguaje verbal. Es decir, se detallará los comportamientos esperados de los estudiantes, al resolver los problemas de optimización mencionados líneas arriba.

Experimentación

En esta fase se pone en funcionamiento la secuencia didáctica diseñada en el paso anterior.

También se implementan las condiciones de control de las actividades y el registro de los sucesos, pues la información recopilada servirá para la calidad y la fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis a posteriori y validación

De acuerdo al Marco Teórico considerado, se conforma el análisis a posteriori a partir del conjunto de datos recabados durante la experimentación; por medio de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los alumnos. Este análisis es confrontado con el análisis a priori para validar la investigación que se hayan formulado.

CAPITULO 3: ANÁLISIS PRELIMINAR

En esta fase preliminar se hace un análisis sistémico del objeto matemático optimización de funciones cuadráticas o cúbicas, teniendo en cuenta, las tres componentes: Epistemológica, Cognitiva; Didáctica.

3.1 Algunos aspectos históricos

Campero (2010), afirma que:

> La cumbre del saber matemático encuentra una de sus máximas expresiones en la Teoría de la Optimización. Esta Teoría, estudia el cómo describir y cómo definir lo que es mejor, una vez que se conoce algún criterio que sirva de base de comparación.
>
> La Optimización tiene, por decirlo así, dos enfoques, uno “optimista” y otro “pesimista”. En el punto de vista optimista se desea maximizar algún objetivo, mientras que, desde el punto de vista pesimista el objetivo sería minimizar las pérdidas o minimizar los costos.
> La Optimización se ha vuelto un término técnico que tiene que ver con medidas cuantitativas y análisis matemático, mientras que decir “mejor”, permanece como un término con menor precisión. El verbo técnico “optimizar” se refiere al acto de optimizar y no solamente a llegar a ese óptimo.
>
> Muchas decisiones en nuestros días se toman escogiendo medidas cuantitativas de efectividad y optimizándolas bajo algún criterio. Decidir cómo diseñar, construir, regular, operar un sistema físico o económico involucra idealmente tres etapas: primero, uno debe conocer cualitativa y cuantitativamente cómo interactúan las variables, segundo, uno requiere de una medida sencilla sobre la efectividad de un sistema expresable en términos de las variables de dicho sistema. Finalmente, uno debe escoger aquellos valores del sistema de variables que nos conduzcan a una efectividad óptima. Así, la optimización y la elección están estrechamente relacionadas. (p.13)

Además, el mismo autor se refiere a que tanto en el curso de Cálculo de una variable, así como en el de varias variables, se aborda el tema de Optimización desde un punto de vista estático. En dichos cursos se estudian los teoremas de:

- *Condición necesaria de primer orden*. Este teorema afirma que si una función de una variable, derivable, alcanza un extremo relativo en un punto perteneciente a su dominio, entonces la derivada evaluada en dicho punto vale cero. La generalización de dicho teorema a funciones de varias variables afirma lo mismo para cada una de las derivadas parciales en dicho punto de su dominio.
- *Condición suficiente de segundo orden*. Para funciones de una variable está estrechamente ligado con el concepto de concavidad o convexidad de una función y que está determinado por la derivada de segundo orden. Mientras que la generalización a funciones de varias variables se hace a través del análisis de la matriz Hessiana, la cual está formada por las derivadas parciales de segundo orden.

También cabe recalcar, según Campero (2010), que en el curso de Cálculo de varias variables se plantea el problema de optimizar una función objetivo, sujeta a restricciones en forma de igualdad, por lo que el problema de optimización permanece generalmente estático. En este caso se utiliza el método de los *Multiplicadores de Lagrange,* el cual se fundamenta desde un punto de vista geométrico, por lo que obliga a considerar funciones que dependen solo de dos variables independientes.

Tal como señalamos en los antecedentes de nuestra investigación, es Campero (2010), a quien hemos elegido como principal antecedente, dado que este autor hace un extensivo análisis de los aspectos históricos relacionados con la optimización de funciones, lo cual consideramos muy importante para nuestro estudio. Por lo tanto, todo lo relativo a los aspectos históricos de la optimización de funciones, han sido resumidos de los estudios realizados por Campero.

Siguiendo a este autor, empieza mostrando aspectos históricos de la optimización, vista desde un punto de vista filosófico, a saber:

"En 1710 Leibniz usa la palabra óptimo en su Teodicea: Ensayo sobre las bondades de Dios, la libertad del hombre y el origen del pecado, citado en Beighter., Douglass, (1967)" (Campero, 2010, p. 15).

También Campero (2010), hace mención que:

> El matemático Leonhard Euler (1707-1783) también manifestó puntos de vista filosóficos optimistas, como por ejemplo cuando escribe: "El mundo es la fábrica más perfecta que se haya establecido por el Creador" y continúa: "No sucede nada en este mundo en que por alguna razón no aparezcan los conceptos de máximo y de mínimo. Beighter, et al. (1967, p.5). (p. 16)

De las afirmaciones de Euler, Campero hace una comparación relacionándolo en el lenguaje moderno y con los cursos tradicionales de Cálculo:

> El Cálculo es la parte de las Matemáticas que estudia el cambio y la razón de cambio" y por otro lado continua: "y el cambio es la única constante en la vida", para concluir: "Los máximos y mínimos aparecen en todos los contextos humanos. (p. 16)

Con respecto a la historia de las Matemáticas, ésta ha ido evolucionando y gestándose en el tiempo, por lo que a continuación presentamos cada una de las etapas, en orden cronológico, sobre la evolución de las Matemáticas.

Tabla n°4: Evolución y gestación histórica de las ramas de la Matemática

LOS EGIPCIOS	LOS GRIEGOS	LOS ROMANOS	LOS HINDÚES Y LOS ÁRABES
Desarrollaron una Geometría primitiva que les permitía resolver algunos de sus problemas cotidianos como, por ejemplo, el deslinde de tierras, pues con cierta frecuencia el río Nilo o el Tigris y Éufrates (en Mesopotamia) se desbordaban.	Se distinguieron por ser un pueblo de pensadores profundos, que no se conformaban con resolver problemas, sino querían conocer el porqué de las cosas. No es de extrañar entonces, que la Geometría se llegara a desarrollar "plenamente" en el sentido de quedar axiomatizada, desde Euclides (siglo III a.c.).	Este pueblo que dio excelentes juristas, artistas y guerreros, se caracterizaba por ser pragmático, por lo que matemáticamente hablando, lo más grande que hicieron fue llevar la cultura matemática griega a todo el mundo conocido hasta entonces.	Luego de la caída del imperio romano (siglos V y VI, d.c.), la tradición matemática pasó a estos pueblos, que eran también pragmáticos, pero con inclinaciones hacia el comercio y los negocios, le dieron más importancia al desarrollo del Álgebra que al de la Geometría.

Fuente: Adaptado de Campero (2010, pp. 16-17).

Campero (2010), afirma que:

> Después del invento de la imprenta por Gutenberg y la aparición de las primeras universidades (Padua, Cambridge, Oxford, París) a lo largo del siglo XII, la humanidad se preparaba para un cambio global que "se destapa" a partir del siglo XV en la ciudad italiana de Florencia. A esta época, que abarca los siglos XV y XVI se le conoce con el nombre de Renacimiento. La imprenta y las universidades globalizan el conocimiento.
>
> A fines del siglo XVI, con los trabajos de los matemáticos italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari que encuentran las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Así el Álgebra llegó a un gran nivel de desarrollo. (Nunca se pudo axiomatizar como la Geometría, pese a los intentos del gran matemático francés Galois). (p. 17)

El autor, también señala que, una vez evolucionada la Geometría y el Álgebra, fue Descartes (siglo XVII) quien unió potencialmente ambas disciplinas, fundando la Geometría Analítica, la cual marcó la línea divisoria en la historia de las matemáticas, puesto que, gracias a ello, años más tarde se hizo posible la aparición del Cálculo (Newton y Leibniz). A este suceso se le consideró como la cima del pensamiento matemático.

El investigador afirma también que, al revisar la historia de la Optimización se aprecia que antes del surgimiento del Cálculo en el siglo XVII, se carecía de instrumentos dinámicos para medir el cambio y la razón de cambio. Cuando surge el Cálculo, se desarrollan los conceptos de derivada e integral los que se consideran como instrumentos dinámicos, puesto que sirven para medir la razón de cambio y el cambio respectivamente. Por lo tanto, los problemas de optimización que aparecieron antes del siglo XVII, solo se podían resolverse con los instrumentos proporcionados por la Geometría y el Álgebra desarrolladas hasta ese entonces. Es evidente que el desarrollo o soluciones de los problemas de optimización fue bastante limita.

A partir del siglo XVII, a pesar de que ya se contaban con herramientas adecuadas para resolver problemas de optimización, su desarrollo siguió siendo limitado, hasta que en el siglo XVIII, Lagrange establece un nuevo método para resolver problemas de optimización, sujetos a restricciones definidas por ecuaciones. Este método es conocido como “Método de los multiplicadores de Lagrange” y que actualmente se trata en el curso de Cálculo varias variables. Desde luego, con la aparición de este método, se amplía el campo de estrategias y métodos para la resolución de los problemas de optimización.

Resumiendo los estudios de Campero (2010), podemos enumerar los momentos o saltos cruciales, relacionados con la evolución de los problemas de optimización, de la siguiente forma:

- Un primer salto cualitativo, ocurre con la aparición del Cálculo y el uso de la derivada como un instrumento para medir la razón de cambio instantánea, entre dos variables relacionadas funcionalmente.
- Un segundo salto cualitativo, Se da con la aparición del método de los multiplicadores de Lagrange.
- El gran salto cualitativo, se da a mediados del siglo XX, con la revolución tecnológica (principalmente en computadoras). A partir de entonces, las técnicas de optimización han evolucionado aceleradamente.

Creemos haber proporcionado un alcance, de manera generalizada, sobre la evolución de las técnicas para resolver problemas de optimización, las cuales Campero los determina cuando se refiere a los tres saltos cualitativos vistos líneas arriba, y que en la actualidad aún siguen vigentes.

3.2 Análisis Cognitivo

Esta investigación, se ha realizado con un total de 58 estudiantes, matriculados en el curso de Cálculo 1 de la Facultad de Ingeniería de la UPN- Lima, en el semestre académico 2013-1. Dichos estudiantes accedieron a la Universidad en su gran mayoría sin preparación alguna, otros por examen de admisión y algunos por traslado externo, quienes convalidaron el curso de Matemática Básica, el cual es prerrequisito para el curso de Cálculo 1.

Por lo tanto, en esta fase, estamos interesados en rescatar conocimientos previos de los estudiantes, relativos al tema de optimización de funciones, así como identificar los tipos de registros que producen al resolver problemas propuestos en uno de los exámenes que rindieron en dicho curso.

Para lograr estos propósitos, hemos utilizado dos herramientas:

1º) Una pequeña encuesta, en la que se hacen preguntas generales sobre el tema de optimización de funciones. A saber:

Tabla n°5: Encuesta relativa a temas de optimización

En relación a los problemas de optimización de funciones justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí

Fuente: Adaptado de Núñez (2012, pp. 139)

2º) El Examen Final del curso de Cálculo 1, en el cual analizamos los tipos de Representaciones Semióticas que ellos hicieron, identificando las dificultades y errores comunes en el proceso de resolución de los problemas propuestos.

En cuanto a la encuesta, se aplicó a dos grupos diferentes de estudiantes de ingenierías matriculados en el curso de Cálculo 1, cada grupo de 29 estudiantes y diferente docente.

A continuación, se presenta las justificaciones de 6 de los 58 estudiantes que participaron de la encuesta y que justificaron debidamente su respuesta. A saber:

Estudiante 1.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	Si me ensañaron pero algunos temas no logre captar bien	

Estudiante 2.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	Los ejercicios de optimización nos han enseñado en clase pero no con la dificultad de estos problemas.	

Estudiante 3.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	No lo aprendí el profesor hizo pocos ejemplos como los que me vino en esta practica	

Estudiante 4.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	No entendí muy bien estos temas.	

Estudiante 5.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	Muchas veces suelo aprender muy rápido lo que me enseñan, pero en este curso no he aprendido mucho porque quiza no puse el empeño suficiente y porq derepente me falta matemática básica.	

Estudiante 6.

En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta		
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí
	El tema de funciones no lo entendí muy bien.	

Obviamente, la encuesta fue aplicada después que de que sus respectivos docentes le enseñaron en clase el tema de optimización, como aplicación de la derivada.

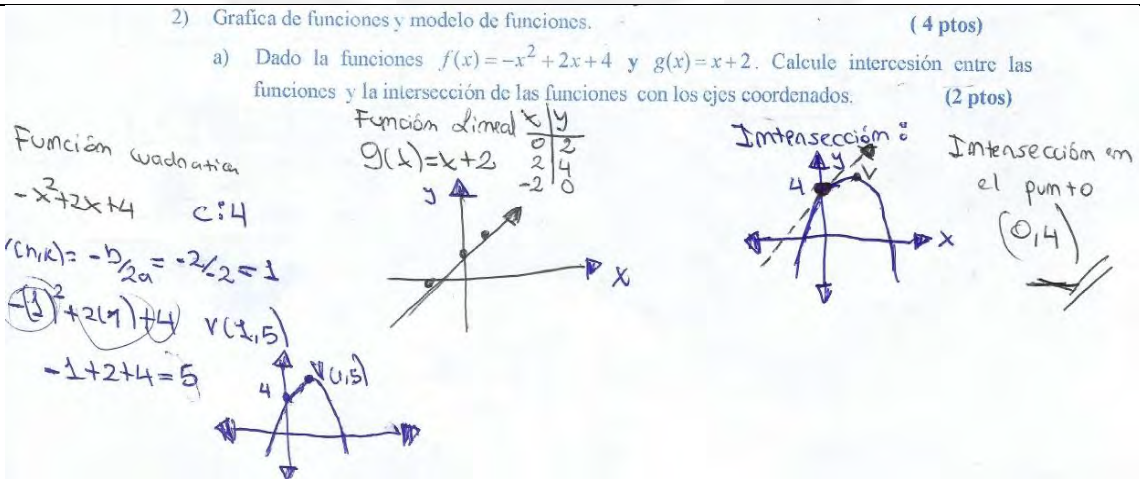
Las respuestas a estas preguntas no fueron las que esperábamos, la mayoría de los estudiantes se inclinaron por la segunda premisa, es decir, me enseñaron y no lo aprendí.

En cuanto al análisis cognitivo, en relación a la modelación de funciones, las dificultades que presentan los estudiantes al resolver dichos problemas se han venido comprobando en todas las evaluaciones escritas que se han tomado en dicho curso, en las cuales se ha comprobado la gran dificultad en cuanto al tránsito entre los registros de representación semiótica.

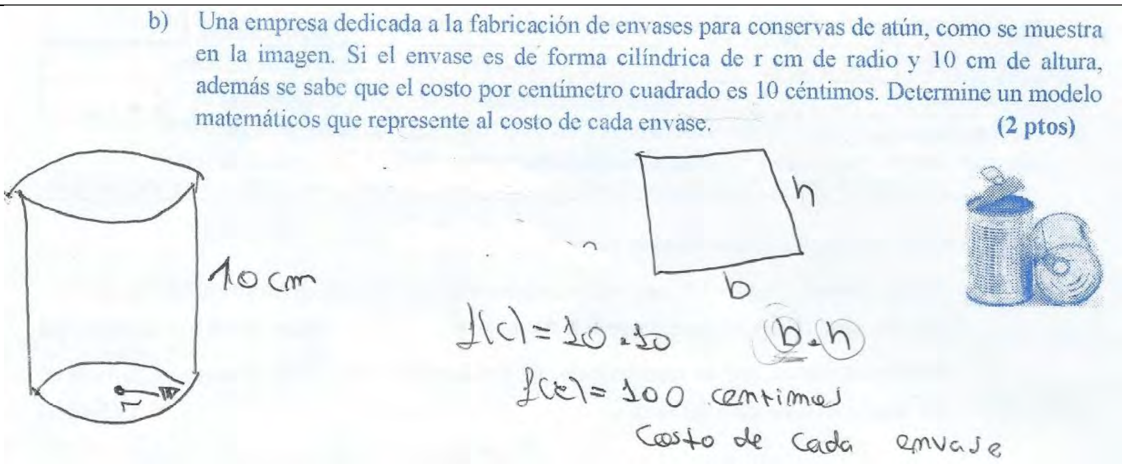
A continuación, presentamos las respuestas de 6 de los 58 estudiantes, distribuidos en dos grupos de 29 estudiantes cada uno, que participaron en el desarrollo de nuestra investigación y que rindieron el examen final de Cálculo 1. Cabe mencionar que estos 6 estudiantes no necesariamente son los mismos de los que se habló en la encuesta, sino que se han considerado aquellos estudiantes que hicieron su mejor esfuerzo para contestar las preguntas del examen. A estos estudiantes se les ha denominado como: E1, E2, E3, E4, E5; E6.

Como a cada grupo de 29 estudiantes, se le tomó un examen diferente, los estudiantes E1, E2; E3, pertenecen al primer grupo. Se consideran con las notaciones E1, E2; E3 para proteger la identidad de los mismos.

Estudiante (E1)


2) Grafica de funciones y modelo de funciones. (4 ptos)

a) Dado la funciones $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x+2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. (2 ptos)

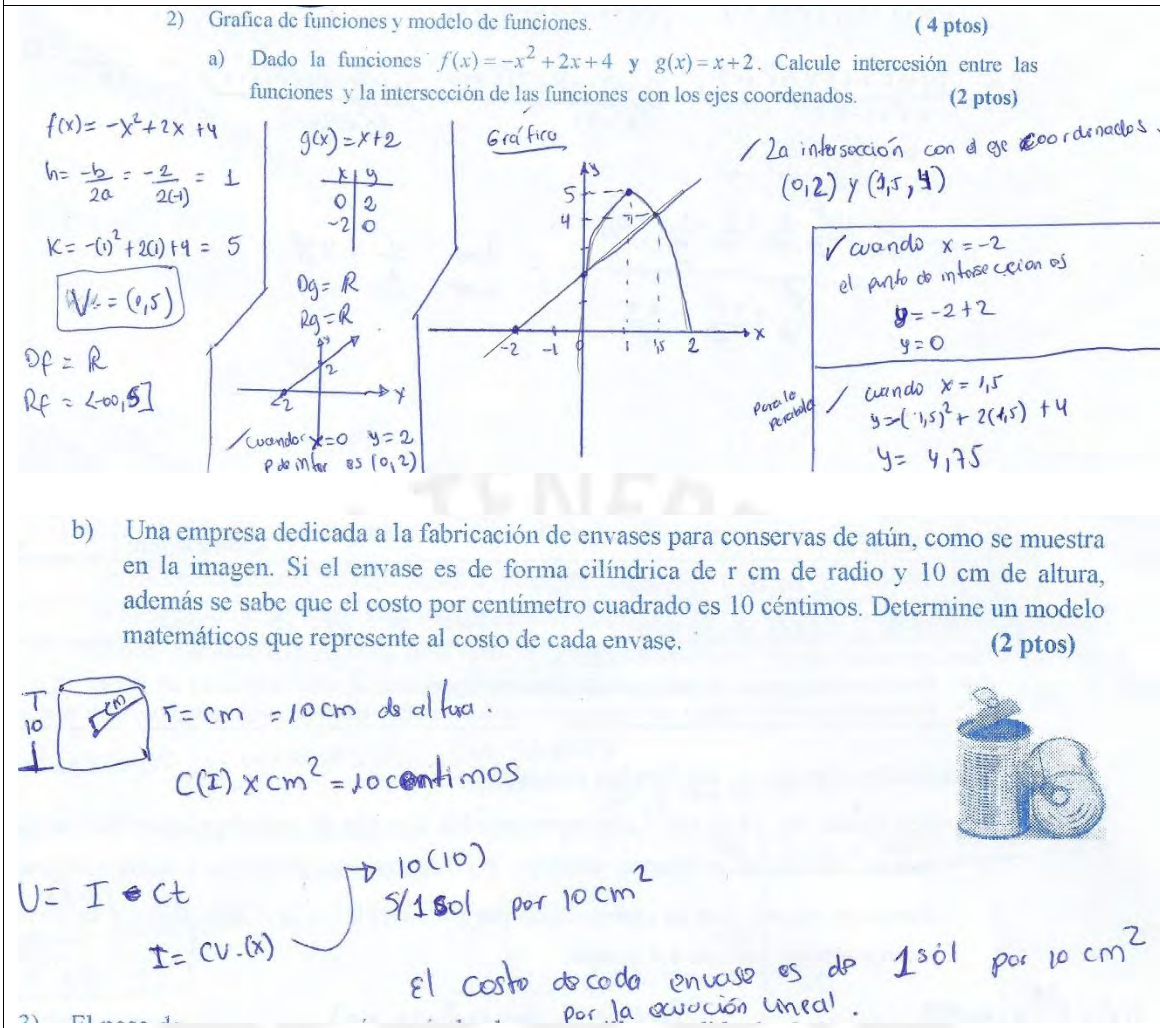

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**

- En la parte (a) se observa que el estudiante utiliza la tabulación para pasar la función lineal del registro algebraico al gráfico. Mientras que para la función cuadrática usa el criterio de hallar el vértice y también tiene éxito al pasar dicha función dada del registro algebraico al gráfico.

  Sin embargo, presentó errores al encontrar los puntos donde se intersectan ambas gráficas.

- En la parte (b) se puede observar que el estudiante tiene dificultades en pasar del registro verbal al algebraico, y no puede encontrar el modelo matemático que se le pide.

Estudiante (E2)
(ver imagen)
• En la parte (a) a diferencia de E1, el estudiante E2 también tiene éxito en las representaciones algebraicas y gráficas, siguiendo las mismas estrategias de E1, y demostrando el tránsito entre el registro algebraico y gráfico. sin embargo, también presenta errores al encontrar las intersecciones de ambas gráficas. • En la parte (b) se puede observar que el estudiante presenta dificultades en pasar del registro verbal al algebraico, a pesar de hacer el intento por hallar el modelo matemático pedido, trata de dar una solución numérica.



2) Grafica de funciones y modelo de funciones. **(4 ptos)**

a) Dado la funciones $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x+2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. **(2 ptos)**

$f(x)=-x^2+2x+4$

$h=\frac{-b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$

$K=-(1)^2+2(1)+4=5$

$\boxed{V=(1,5)}$

$Df=R$

$Rf=\langle-\infty,5]$

$g(x)=x+2$

x	y
0	2
-2	0

$Dg=R$

$Rg=R$

cuando $x=0$ $y=2$ p de inter es $(0,2)$

Gráfica

La intersección con el eje coordenados. $(0,2)$ y $(1{,}5,4)$

cuando $x=-2$ el punto de intersección es $y=-2+2$ $y=0$

Para la parábola: cuando $x=1{,}5$ $y=-(1{,}5)^2+2(1{,}5)+4$ $y=4{,}75$

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**

r = cm = 10 cm de altura.

$C(I)\,x\,cm^2=10$ céntimos

$U=I\cdot Ct$

$I=CV.(x)$

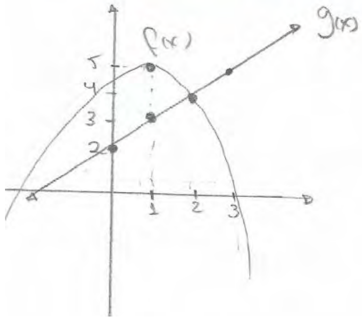
10(10) S/1 sol por 10 cm^2

El costo de cada envase es de 1 sol por 10 cm^2 por la ecuación lineal.

Estudiante (E3)

2) Grafica de funciones y modelo de funciones. **(4 ptos)**

a) Dado la funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. **(2 ptos)**



$f(x) + g(x)$

$f(x) + g(x) = -x^2 + 2x + 4 + x + 2$

$f(x) + g(x) = -x^2 + 3x + 6$

Dom : $\mathbb{R}$

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Dom $g(x) = \mathbb{R}$

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**

$V = \pi r^2 . h$

$V = \pi . r^2 . 10$

$V = 10\pi r^2$

$C(v) = 10\pi r^2$

- En la parte (a), el estudiante intenta representar gráficamente ambas funciones, pero no es explícito en indicar los puntos de intersección de las mismas. Además, realiza una operación que no tiene nada que ver con lo pedido, es decir, presenta la suma algebraicamente las reglas de correspondencia de ambas funciones.
- En la parte (b), se puede observar que dicho estudiante también tiene dificultades en pasar del registro verbal al algebraico, su error consiste en confundir el volumen del envase con el costo de fabricación del mismo.

A continuación, presentamos la solución por parte de los estudiantes E4, E5 y E6, de una pregunta de optimización de funciones, tomada en el examen final del curso de Cálculo 1, estos estudiantes pertenecen al segundo grupo con quienes se puso en marcha el desarrollo de las actividades propuestas.

Estudiante (E4)

7) (3 puntos) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 320t$

a) ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?

b) ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

c) ¿a los cuantos segundos alcanza la máxima altura?

a) $t = ?$

$1536 = -16t^2 + 32t$

$0 = -16t^2 + 32t - 1536$

$= -1t^2 + 2t + 96 \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_1 = 1 + \sqrt{95}$

$x_2 = 1 - \sqrt{95}$

Para $t = 1 + \sqrt{95} = 10,7$ Segundos

b) $-16t^2 + 32t = 1536$

$-32t + 32 = 0$

$-32t = -32$

$t = 1$

$h = -16t^2 + 320t$

$h = 304$

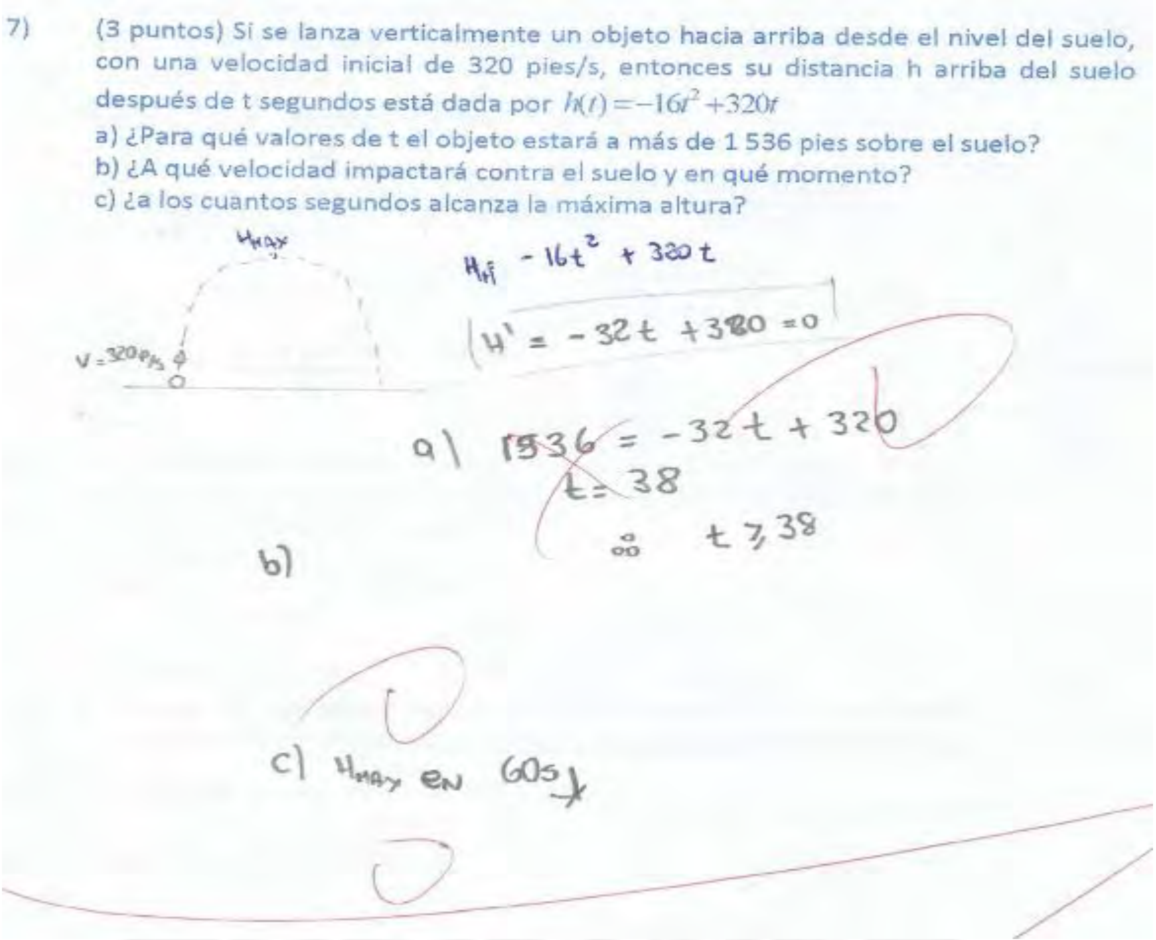
$V = \frac{h}{t}$

$V = 304$ p/s

c)

Se puede apreciar el intento fallido que tiene el estudiante E4 al tratar de hallar la solución del problema. A pesar de que se le proporciona el modelo matemático que representa a la función altura del objeto, dicho estudiante presenta errores de concepción y las representaciones algebraicas que utiliza lo hace de manera errónea.

Estudiante (E5)



7) (3 puntos) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 320t$

a) ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?

b) ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

c) ¿a los cuantos segundos alcanza la máxima altura?

Al igual que el estudiante E4, E5 presenta dificultades al tratar de dar solución a cada una de las partes del problema. Este estudiante intenta representar gráficamente la trayectoria parabólica que describiría el objeto al ser lanzado al espacio, pero no lo relaciona con el modelo matemático proporcionado para la altura. Además, las representaciones algebraicas que produce dicho estudiante no tienen coherencia lógica con lo que se pide en el problema.

Estudiante (E6)

7) (3 puntos) Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 320t$

a) ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?

b) ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

c) ¿a los cuantos segundos alcanza la máxima altura?

a) $h = -16t^2 + 320t$

$-16t^2 + 320t \geq 1536$

$16t^2 - 320t + 1536 \leq 0$

$t^2 - 20t + 96 \leq 0$

$t \quad -12$

$t \quad -8$

$(t-12)(t-8) \leq 0$

$+ \quad 8 \quad - \quad 12 \quad +$

$C.S = [8;12]$

b) $h(t) = -16t^2 + 320t$

$h(t)' = -32t + 320$

t	$h(t)'$
1	288
2	256
10	0
20	-320

$\boxed{t = 20\,s}$

$\boxed{v = 320\ m/s}$

c) $h(t)' = -32t + 320 = 0$

$32t = 320$

$\boxed{t = 10\,s}$

En t=10 alcanzara la altura maxima

Este estudiante, a diferencia de los anteriores, sí tiene éxito en la solución de dicho problema. Él usa el registro algebraico de forma correcta, sin embargo, se podía haber pedido en la pregunta que también realice la representación gráfica del modelo matemático proporcionado. En cuanto al puntaje asignado a dicha pregunta, podemos observar que el docente del curso le ha puesto la máxima calificación.

Tal como lo habíamos señalado anteriormente, en este análisis, demostramos las serias dificultades que presentan la mayoría de los estudiantes al transitar por los registros de representación semiótica. Los tres primeros estudiantes, mostraron gran dificultad al pasar del registro verbal al algebraico, esta dificultad relacionada con la comprensión lectora es la que consideramos como un denominador común en la mayoría de los estudiantes.

Por lo tanto, nuestra investigación está orientada en presentar una propuesta para tratar los problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal, usando como recurso didáctico al software Cabri, la cual pueda ayudar articular el tránsito entre registros de Representación semiótica.

3.3 Análisis Didáctico

En esta parte mostramos algunos aspectos encontrados tanto en la enseñanza (la práctica docente) como en los libros textos sugeridos y más utilizados en relación al tema de optimización de funciones.

Empezamos por describir el quehacer didáctico de los docentes encargados del dictado del curso de Cálculo 1. Si bien es cierto el modelo educativo de la Universidad Privada del Norte está basado por competencias, con una educación centrada en el estudiante, no todos los cursos son adaptados de tal manera que con sus contenidos se puedan desarrollar en el estudiante las competencias generales como:

- Liderazgo.
- Trabajo en equipo.

- Comunicación efectiva.
- Resolución de problemas.
- Aprendizaje autónomo.
- Responsabilidad social.
- Pensamiento crítico.

Se sabe que para lograr en el estudiante desarrollar los conocimientos, habilidades y actitudes, además de las competencias generales mencionadas líneas arriba, una de las metodologías del docente es promover los trabajos cooperativos en clase, utilizar la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), en general las metodologías activas de enseñanza y aprendizaje. Cosa que no ocurre con frecuencia para todos los temas del sílabo del curso Cálculo 1 (ver Anexo 4), lo mejor que se aproxima a estas metodologías es plantear los problemas contextualizados tratando de relacionar con las carreas de ingeniería dándole un contexto familiarizado con el estudiante y formando grupos de trabajo en el aula para el desarrollo de los problemas propuestos. Sin embargo, no todos los docentes están capacitados para realizar dicho trabajo por lo que tienden a seguir utilizando la metodología tradicional basada en algoritmos repetitivos y priorizando las representaciones algebraicas. Esta misma metodología se sigue en el curso de Cálculo 1 cuando se trata el tema de optimización de funciones que resulta ser un tema de aplicación de la derivada. Además, la restricción de la institución en el uso de los softwares de geometría dinámica no hace posible el tratamiento de los problemas de optimización por lo que los estudiantes al resolver dichos problemas imaginan el comportamiento de la función objetivo para tener la idea del valor óptimo.

A continuación, hacemos un análisis de 3 libros texto considerados por los profesores al tratar un problema de optimización en UPN.

Tabla n°6: Libros de Cálculo elegidos para el Análisis Didáctico

N°	Autor	Título	Edición	Año	Ubicación	Editorial
1	Ron Larson - Bruce H. Edwards	Cálculo 1 de una Variable	9 na	2010	México	McGraw-Hill
2	George B. Thomas, Jr.	Cálculo de una Variable	11 va	2006	México	Pearson
3	Laurence D. Hoffmann Gerald L. Bradley Kenneth H. Rosen	Cálculo Aplicado	8 va	2006	México	McGraw-Hill

Fuente: Propia

En cada uno de estos textos hacemos un análisis de los tipos Registros de Representación Semiótica desde el punto de vista de Duval (1993).

Hemos organizado el análisis de cada texto en la siguiente tabla:

Tabla n°7: Análisis Didáctico de los tres Libros textos considerados para el tema de optimización.

Libro texto	Tema de estudio	Análisis desde el punto de vista de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.
Título: Cálculo de una variable. **Autor:** Ron Larson. **Año:** 2010 **Edición:** 9na. **Página:** 218	Problemas de Optimización. **(Larson & Bruce, 2010, pág. 218)**	En este texto se dan 5 ejemplos resueltos relativos a la optimización de funciones. En el Ejemplo 1, podemos observar, según la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, que para enunciar el problema se hace uso del registro verbal y en la solución solo se da énfasis al registro algebraico. Solo hace una representación gráfica para relacionar las variables que intervienen en el problema, no hace uso del registro gráfico correspondiente al modelo matemático obtenido. Si bien es cierto, da la sugerencia de usar una herramienta graficadora para la representación gráfica del modelo matemático obtenido en dicho problema, en la solución se ha dejado de lado el registro gráfico, creando una suerte de incertidumbre en los estudiantes. Por lo tanto, el registro gráfico, no es considerado relevante para este autor, puesto que no lo considera en ninguno de los 5 Ejemplos que él presenta. Enseguida el autor muestra las siguientes recomendaciones (a manera de receta) para abordar los problemas de optimización:

		Estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos **1.** Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo. **2.** Escribir una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar. **3.** Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria. **4.** Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido. **5.** Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas en las secciones 3.1 a 3.4. Cuando el autor hace mención a las técnicas de cálculo estudiadas en las sesiones 3.1 a 3.4 se refiere al uso de la primera y segunda derivada de una función para hallar sus valores extremos. Sin embargo, en ninguno de los pasos hace mención a la representación gráfica que se debe hacer del modelo matemático de la función objetivo. Esto se corrobora en las soluciones de los ejemplos que él proporciona para este tema de optimización de funciones.
Título: Cálculo de una variable. **Autor**: Thomas **Año:** 2006 **Edición**: 11 va. **Página**: 278	Problemas de Optimización aplicados. **(George & Thomas, 2006, pág. 278)**	En este texto, el autor presenta 7 ejemplos desarrollados relativos a la optimización de funciones. A diferencia del autor anterior, en este texto los problemas de optimización están planteados usando el registro verbal, pero en la resolución sí se da énfasis tanto al registro algebraico como al gráfico. Desde el punto de vista de la teoría de Registros de Representación Semiótica, se puede afirmar que, en este texto, la resolución de los problemas de problemas de optimización se presenta de una forma ordenada, articulando el registro verbal, algebraico y gráfico. También proporciona una lista de recomendaciones para enfrentar con éxito a los problemas de optimización, a saber: **Pasos para la resolución de problemas aplicados de optimización** **1.** *Leer el problema*. lea el problema hasta que lo entienda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar? **2.** *Hacer un dibujo*: identifique con una etiqueta cualquier parte que pueda ser importante para el problema. **3.** *Introducir variables*: haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica, e identifique la variable desconocida. **4.** *Escribir una ecuación para la cantidad desconocida*: de ser posible, exprese la incógnita como función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello puede ser necesaria una manipulación considerable. **5.** *Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la incógnita*: use la información con que cuenta acerca de la forma de la gráfica de la función. Emplee la primera y segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función. Sin embargo, en el paso 5 el autor recomienda que se debe tomar énfasis en la forma de la gráfica de la función objetivo.
Título: Cálculo Aplicado.	Aplicaciones adicionales de la optimización. (Hoffmann,	En este texto, el autor empieza por hacer un tratamiento exclusivamente para los problemas de optimización, en los que claramente, utiliza el registro verbal, algebraico y gráfico, articulando los Registros de Representación

Autor: Laurence - Hoffmann **Año:** 2006 **Edición**: 8 va. **Páginas**: 31-275.	Gerald L, & Kenneth H, 2006, págs. 231-275)	Semiótica. En todos los ejemplos desarrollados que el autor presenta, sigue la misma estructura señalada líneas arriba. En seguida, adjuntamos las recomendaciones que hace dicho autor, para resolver problemas de optimización. Guías generales para resolver problemas de optimización **Paso 1**. Comenzar por decidir con precisión si se desea maximizar o minimizar. Una vez hecho esto, asignar nombres a todas las variables de interés. Puede ser de gran utilidad seleccionar letras que sugieran la naturaleza o el papel de la magnitud, como "*I*" para "ingreso". **Paso 2**. Después de asignar variables, expresar las relaciones entre las variables en términos de ecuaciones o desigualdades. Una figura puede ayudar. **Paso 3**. Expresar la magnitud a optimizar (maximizar o minimizar) en términos de una sola variable (la variable independiente). Para ello, puede ser necesario usar una o más de las ecuaciones disponibles del paso 2 para eliminar otras variables. También hay que determinar cualquier restricción necesaria en la variable independiente. **Paso 4**. Si $f(x)$ es la magnitud a optimizar, calcular $f'(x)$ y hallar todos los números críticos de f. Luego se debe encontrar el valor máximo o mínimo requerido, utilizando los métodos de la sección 3.4 (el teorema del valor extremo o el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos). Es recomendable verificar el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo. **Paso 5**. Interpretar los resultados en términos de las magnitudes físicas, geométricas económicas correspondientes. Este autor, en el paso 5 de sus sugerencias, recomienda no solo quedarse con las representaciones, sino poner énfasis en la interpretación de los resultados.

Fuente: Propia

Durante el análisis de los tres textos, mencionados anteriormente, encontramos que todos ellos presentan una lista de sugerencias para tener en cuenta en el proceso de resolución de tales problemas. Sin embargo, los dos últimos textos serían los más apropiados y recomendados, desde el punto de vista de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, para el tratamiento didáctico sobre la resolución de problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal, puesto que, son estos dos autores quienes articulan, tanto el registro verbal, algebraico y gráfico.

CAPITULO 4: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo diseñamos las actividades y prevemos los comportamientos de los estudiantes al enfrentarse a las actividades diseñadas. Es decir, proporcionamos la parte descriptiva y la predictiva.

4.1 Diseño de las actividades:

En esta etapa se diseñó una secuencia didáctica para cada una de las tres actividades propuestas enseguida, tal secuencia está diseñada de tal manera que podamos guiar al estudiante a obtener los diferentes Registros de Representación Semiótica, en la solución de cada una de las partes correspondientes.

- La actividad N°1 se trata de un caso real e inédito diseñado por el propio investigador y trata de optimizar el volumen de un tanque en forma de paralelepípedo que se pueda construir debajo de una escalera.
- La actividad N°2 trata de la adaptación de un problema que ya ha sido publicado en una revista internacional de uno de los Congresos Iberoamericanos del Cabri.
- La actividad N°3 ha sido adaptada, a un contexto real, una de las preguntas que está propuesta en uno de los libros texto.

Como se puede apreciar, son actividades bastante relacionadas con la vida cotidiana y no son clásicas, pero sí accesibles y que se pueden solucionar utilizando los contenidos del sílabo del curso de Cálculo 1 de la UPN.

4.2 Comportamientos esperados:

En esta etapa proporcionamos los supuestos o lo que esperamos que los estudiantes realicen en cada una de las tres actividades. A saber:

Estrategia N°1 para resolver la Actividad 1:

Actividad N°1

Un estudiante de ingeniería está interesado en construir un tanque de máxima capacidad debajo del primer plano inclinado de la escalera de su casa. Para tal efecto obtiene las medidas las cuales se muestran en la (Figura 1). Dicho tanque debe tener la forma de un paralelepípedo rectangular recto donde una de sus aristas debe tener longitud igual al ancho de la escalera (100 cm).

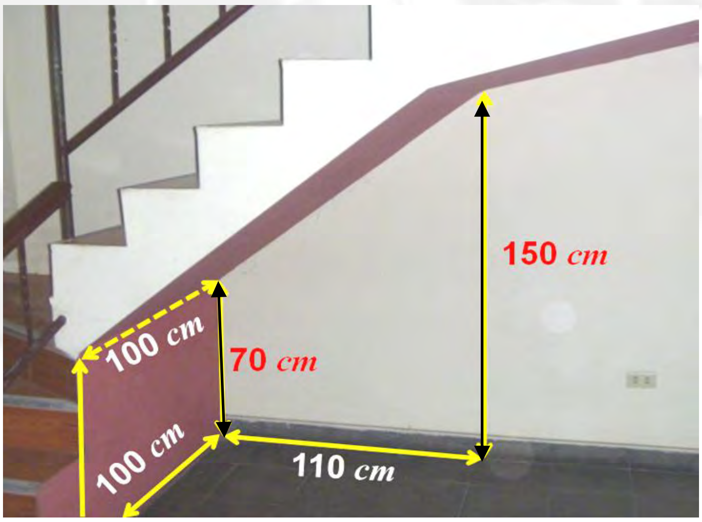
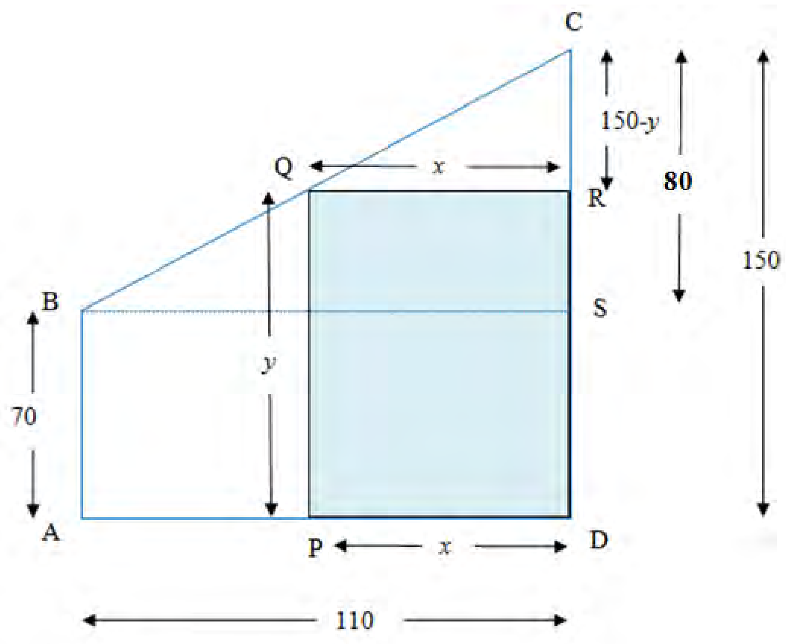


Figura 1

1) ***A partir del enunciado, relacione con variables las aristas desconocidas del paralelepípedo y explique con sus propias palabras qué tendrá que hacer para hallar el volumen máximo de dicho tanque.***

Esperamos que el estudiante, para relacionar las aristas del paralelepípedo, realice el siguiente gráfico.



Y luego justifique:

Como el volumen del tanque tiene una de las aristas de longitud igual al ancho de la escalera (100 cm), es decir permanece constante todo el tiempo, entonces para hallar el volumen máximo del tanque se tiene que hallar el área máxima del rectángulo PQRD, luego el volumen del tanque será:

$$V = 100xy\ cm^3$$

2) ***Escriba una expresión algebraica que determine las restricciones del problema.***

Esperamos que el estudiante muestre las restricciones de las aristas variables del paralelepípedo a construir. Es decir:

$$0 < x < 110\ ;\ 70 < y < 150$$

3) ***Halle el modelo matemático correspondiente a la función que se tendrá que optimizar.***

Se espera que el estudiante halle la relación entre x e y para reemplazar en la fórmula correspondiente al área del rectángulo PQRD, a la que denotaremos como $A(x)$. Es decir, que realice el siguiente procedimiento:

$$\acute{A}rea = (base) \times (altura)$$

$$A(x) = xy \text{ …………….. (1)}$$

Hallando la relación entre x e y mediante la semejanza de los triángulos BSC y QRC:

$$\frac{80}{110} = \frac{150 - y}{x}$$

$$y = 150 - \frac{8}{11}x \text{ …….. (2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 150x$$

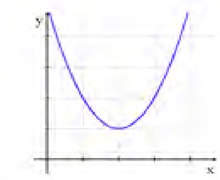
4) ***Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.***

Esperamos que el estudiante reconozca que la función obtenida en el paso anterior y que representa al área del rectángulo PQRD, es una función cuadrática de la forma $A(x) = ax^2 + bx + c$, con dominio $0 < x < 110$. Es decir:

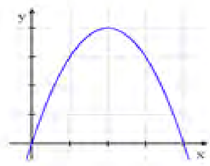
$$A(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 150x \quad ; \quad 0 < x < 110$$

5) ***Cuál cree que sería la forma del gráfico correspondiente a la función obtenida en el paso anterior.***

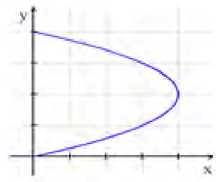
a)



b)



c)



Justifique su respuesta verbalmente:…………………………………………..

Se espera que los estudiantes elijan la alternativa (b) puesto que el gráfico de $A(x)$ es una parábola que se abre hacia abajo debido al coeficiente negativo de x^2.

6) ***En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso 4.***

Se espera que los estudiantes contesten:

Como la función $A(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 150x$ es cuadrática de la forma $A(x) = ax^2 + bx + c$, entonces dicha función alcanza su máximo en $x = -\frac{b}{2a}$.

En este caso $a = -\frac{11}{8}$, $b = 150$; $c = 0$. Luego

$$x = -\frac{150}{2(-\frac{8}{11})} = \frac{75}{8}(11) = 103.125 \text{ ...... } (3)$$

7) ***Cuál es el valor máximo de dicha función.***

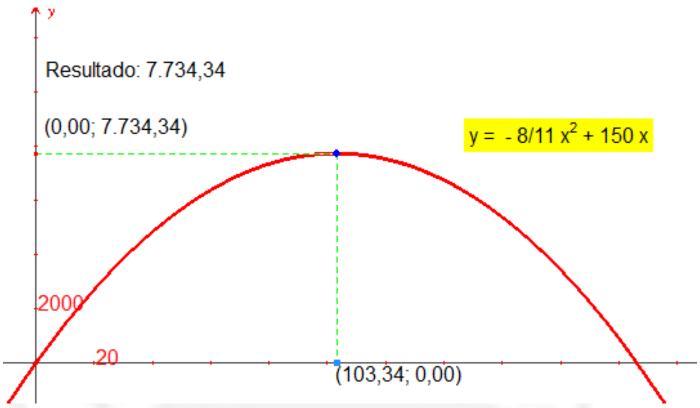
Esperamos que el estudiante, escriba:

El valor máximo de $A(x)$ es:

$$A(103.125) = -\frac{8}{11}(103.125)^2 + 150(103.125) = 7734.375\ cm^2.$$

8) ***Represente gráficamente el modelo matemático obtenido para la función.***

Esperamos que el estudiante, ponga a prueba sus conocimientos para mostrar el registro gráfico del modelo matemático, correspondiente a la función área del rectángulo PQRD. Es decir, esperamos su respuesta sea:



9) ***Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.***

La respuesta esperada sería:

El punto más alto de la gráfica es el vértice de la parábola, esto es:

(103.125; 7734.375)

La primera coordenada representa a la longitud del lado PD del rectángulo de área máxima.

La segunda coordenada representa al área máxima del rectángulo PQRD.

10) ***Cuáles deben ser las dimensiones del paralelepípedo para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo.***

Se espera que el estudiante conteste:

Las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo son:

$$x = \frac{75}{8}(11) = 103.125\ cm\,,\quad y = 150 - \frac{8}{11}[\frac{75}{8}(11)] = 75\ cm\,;\ \ 100\ cm.$$

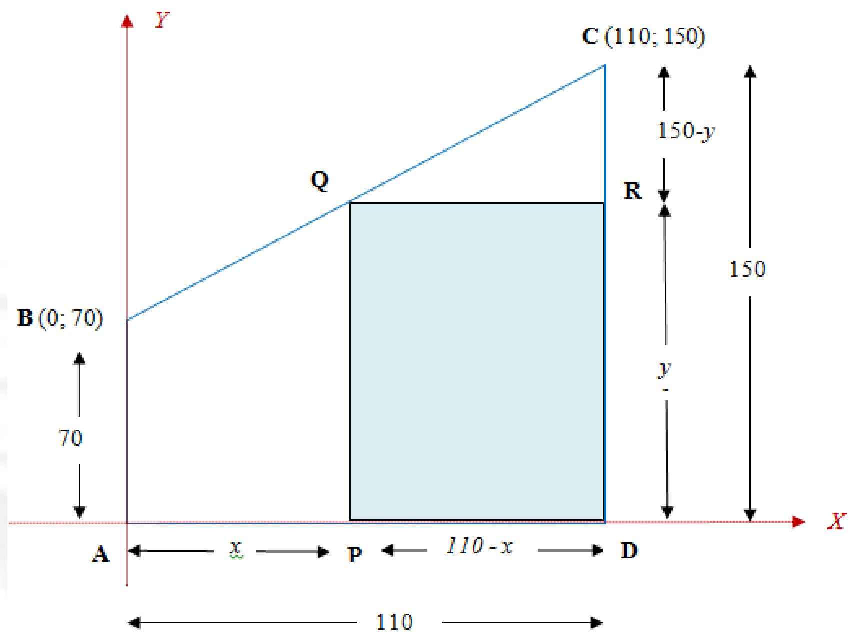
Por lo tanto, el volumen del tanque de mayor capacidad es:

$$V = 100xy = 100(7734.375) = 773437.5\ cm^3$$

Estrategia N°2 para resolver la Actividad 1:

1) ***A partir del enunciado, relacione con variables las aristas desconocidas del paralelepípedo y explique con sus propias palabras qué tendrá que hacer para hallar el volumen máximo de dicho tanque.***

Se espera que el estudiante, para relacionar las aristas del paralelepípedo, realice el siguiente gráfico



Luego, justifique:

Como el volumen del tanque tiene una de las aristas de longitud igual al ancho de la escalera (100 cm), entonces para hallar el volumen máximo del tanque se tiene que hallar el área máxima del rectángulo PQRD.

$$Área = (base) \times (altura)$$

$$A(x) = (110 - x)y \ldots (1)$$

2) ***Escriba una expresión algebraica que determine las restricciones del problema.***

Esperamos que el estudiante muestre las restricciones de las aristas variables del paralelepípedo a construir. Es decir:

$$0 < x < 110\ ;\ \ 70 < y < 150$$

3) ***Halle el modelo matemático correspondiente a la función que se tendrá que optimizar.***

Se espera que el estudiante halle la relación entre x e y mediante la ecuación de la recta que pasa por los puntos ***B***(0;70) y ***C***(110;150); escriba lo siguiente:

$$\text{Pendiente:} \qquad m = \frac{150-70}{110-0} = \frac{8}{11}$$

$$\text{Ecuación:} \qquad y = \frac{8}{11}x + 70 \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A(x) = (110 - x)(\frac{8}{11}x + 70)$$

$$A(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 10x + 7\,700 \ \ldots (3)$$

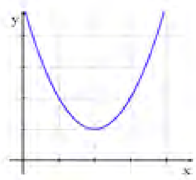
4) ***Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.***

Esperamos que el estudiante reconozca que se trata de una función cuadrática, de la forma $A(x) = ax^2 + bx + c$, cuyo dominio es $0 \leq x \leq 110$. Es decir:

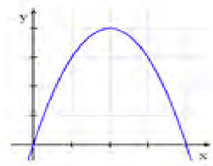
$$A(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 10x + 7\,700;\ \ 0 \leq x \leq 110$$

5) ***Cuál cree que sería la forma del gráfico correspondiente a la función obtenida en el paso anterior.***

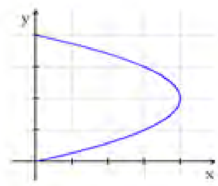
a)



b)



c)



Justifique su respuesta verbalmente:……………………………………….

Se espera que los estudiantes elijan la alternativa (b) puesto que el gráfico de $A(x)$ es una parábola que se abre hacia abajo debido al coeficiente negativo de x^2. Además que la curva corta al eje de las ordenadas en 7700.

6) ***En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso 4.***

Esperamos que los estudiantes utilicen sus conocimientos de derivadas para optimizar funciones, el procedimiento esperado sería:

Hallando la primera y segunda derivada de $A(x)$:

$$A'(x) = -\frac{16}{11}x + 10$$

$$A''(x) = -\frac{16}{11} < 0 \quad \text{(Se trata de un máximo)}$$

Hallando los puntos críticos:

$$A'(x) = -\frac{16}{11}x + 10 = 0$$

$$x = \frac{55}{8} = 6.875$$

Es el único punto crítico.

Es decir, la función $A(x)$ alcanza su valor máximo cuando

$$x = \frac{55}{8} = 6.875 \ldots (4)$$

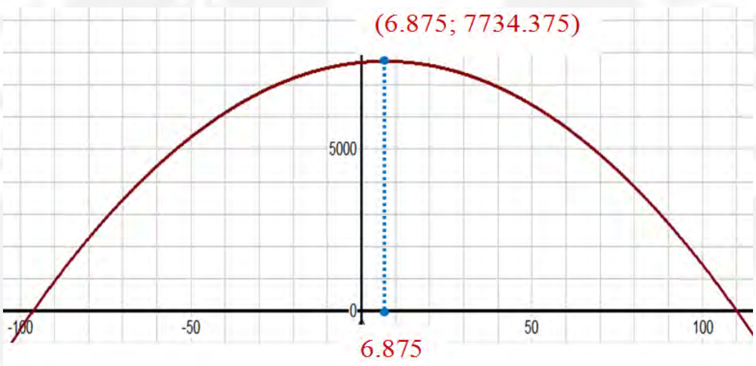
7) ***Cuál es el valor máximo de dicha función.***

Se espera que los estudiantes reemplazando (4) en (3) obtengan el valor máximo de $A(x)$. Es decir:

$$A(6.875) = -\frac{8}{11}(6.8755)^2 + 10(6.875) + 7\,700 = 7\,734.375 \ .$$

8) ***Representa gráficamente el modelo matemático obtenido para la función $A(x)$.***

Se espera que la respuesta sea:



9) ***Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.***

Se espera que el estudiante conteste:

El punto más alto de la gráfica es el vértice de la parábola, esto es:

(6.875; 7734.375)

La primera coordenada representa el valor de x donde la función $A(x)$ alcanza su máximo valor.

La segunda coordenada representa al área máxima del rectángulo PQRD.

10) ***Cuáles deben ser las dimensiones del paralelepípedo para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo.***

Esperamos que el estudiante conteste:

Luego las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo son:

$$110 - x = 110 - 6.875 = 103.125\ cm, \quad y = \frac{8}{11}[\frac{11}{8}(5)] + 70 = 75\ cm; \ 100\ cm.$$

Por lo tanto, el volumen del tanque de mayor capacidad es:

$$V = 100(110 - x)y = 100(7734.375) = 773437.5\ cm^3$$

Actividad N°2

En el curso de dibujo técnico, el profesor les encarga a sus estudiantes la siguiente tarea: Considerar una hoja rectangular ABCD de lados *a* y *b*, $0 < a \leq b$ (Figura 2). De tal manera que al doblar la hoja, el vértice B "caiga" sobre el lado opuesto AD en el punto B´ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto de doblez del lado AB) cuya área sea la mayor posible.

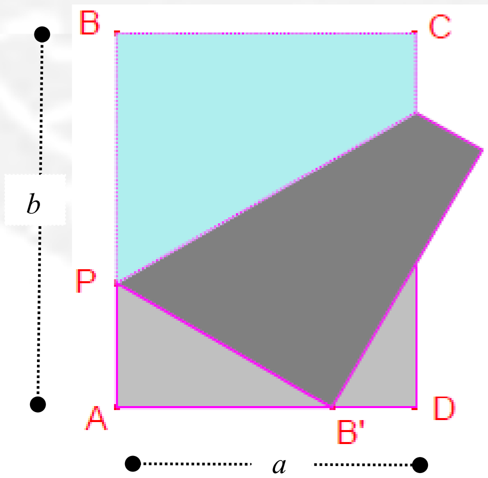
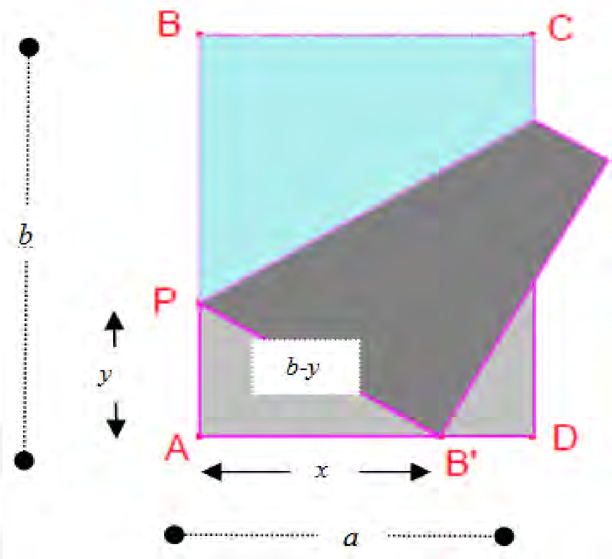


Figura 2

1) ***A partir del enunciado, relacione con variables los lados desconocidos del triángulo rectángulo PAB´.***

Esperamos que el estudiante, relacione con variables los lados del triángulo PAB´



2) ***Escriba una expresión algebraica que relacione los tres lados del triángulo rectángulo PAB´.***

Esperamos que el estudiante use el Teorema de Pitágoras el triángulo rectángulo PAB´, y escriba lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = (b - y)^2$$

$$x^2 + y^2 = b^2 - 2by + y^2$$

$$y = \frac{1}{2b}(b^2 - x^2) \quad \ldots(1)$$

3) ***Halle el modelo matemático correspondiente a la función área del triángulo rectángulo PAB´.***

Esperamos que el estudiante, proporcione el registro algebraico correspondiente a la función *f(x)*, que representa al área del triángulo rectángulo PAB´. Es decir:

$$f(x) = \frac{1}{2}xy \quad \ldots(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$f(x) = \frac{1}{4b}(b^2x - x^3\,) \quad \ldots(3)$$

4) ***Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.***

Se espera que los estudiantes reconozcan que la función $f(x)$ es cúbica cuyo dominio es $0 < x < a$. Es decir:

$$f(x) = \frac{1}{4b}(b^2x - x^3); \quad 0 < x < a$$

5) ***En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior.***

Esperamos que los estudiantes utilicen sus conocimientos de derivadas para optimizar funciones, el procedimiento esperado sería:

Hallando la primera y segunda derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{4b}(b^2 - 3x^2) \ldots\ldots(4)$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2b}x \ldots\ldots(5)$$

Hallando los puntos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{4}(b^2 - 3x^2) = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}b^2 \ldots\ldots(6)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}b; \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}b \cdot$$

Observe que $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}b \quad \notin Dom(f)$

Entonces el único punto crítico es:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}b \text{ ……..(7)}$$

Comprobando si se alcanza un máximo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}b$:

$$f''(\frac{\sqrt{3}}{3}b) = -\frac{3}{2b}(\frac{\sqrt{3}}{3}b) = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$$

Por lo tanto f alcanza su máximo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}b$.

6) ***Cuál es el valor máximo de dicha función.***

Se espera que los estudiantes obtengan el valor máximo de $f(x)$ haciendo el siguiente procedimiento:

Reemplazando (6) en (1):

$$y = \frac{1}{2b}(b^2 - \frac{1}{3}b^2) = \frac{b}{3} \text{ …(8)}$$

Reemplazando (7) y (8) en (2):

$$f(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}b\cdot(\frac{b}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{18}b^2 \quad \text{(valor máximo)}$$

7) ***Cuáles deben ser las dimensiones del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea la mayor posible y cuál es el área máxima.***

Esperamos que el estudiante proporcione como respuesta:

Las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo PAB´ de área máxima, son:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}b \; ; \; y = \frac{b}{3}.$$

El área máxima del triángulo rectángulo PAB´ es:

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}b \cdot (\frac{b}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{18}b^2 \;\; cm^2$$

8) ***En el caso particular para: a = b = 6, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 4.***

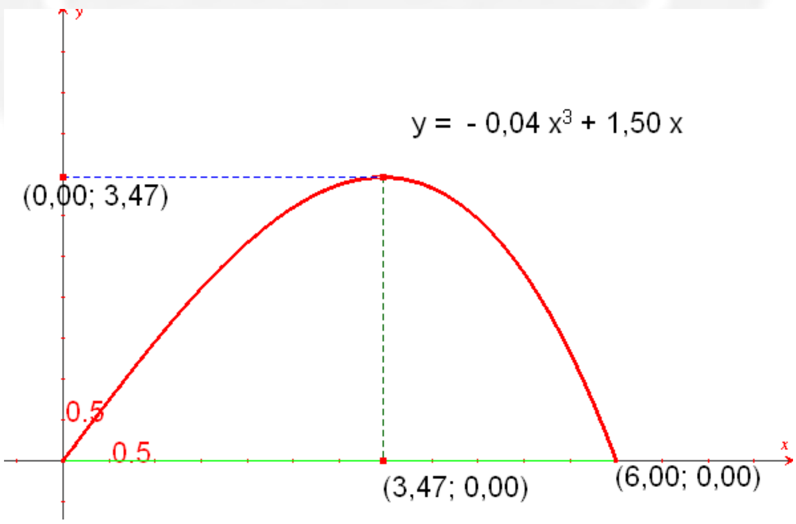
Se espera que los estudiantes reemplacen $a = b = 6$ en

$$f(x) = \frac{1}{4b}(b^2x - x^3); \quad 0 < x < a.$$

Luego grafiquen la función:

$$f(x) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{2}x; \quad 0 < x < 6$$

Gráficamente:



9) ***Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.***

Se espera que el estudiante conteste:

El punto más alto de la gráfica es el vértice de la parábola, esto es:

$$(2\sqrt{3}\,;\,3.47)$$

La primera coordenada representa el valor de x donde la función $f(x)$ alcanza su máximo valor.

La primera coordenada representa a la longitud del lado AB´ del triángulo PAB´ de área máxima.

La segunda coordenada representa al área máxima del triángulo PAB´.

Actividad Nº 3:

Un estudiante de arquitectura observa que los granos en reposo (maíz, arroz, frijol, etc.) de manera natural forman una figura cónica regida por propiedades físicas. A raíz de esta situación está motivado en diseñar un silo para almacenar grandes cantidades de granos. El silo a diseñar debe tener altura H y constituido por una parte inferior cilíndrico y la parte superior de forma cónica similar al que se muestra en la figura 5. La parte inferior debe ser un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H igual al del silo ($H > 2R$) de tal manera que el volumen de dicho cilindro sea el máximo.

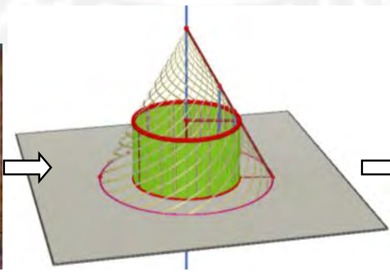
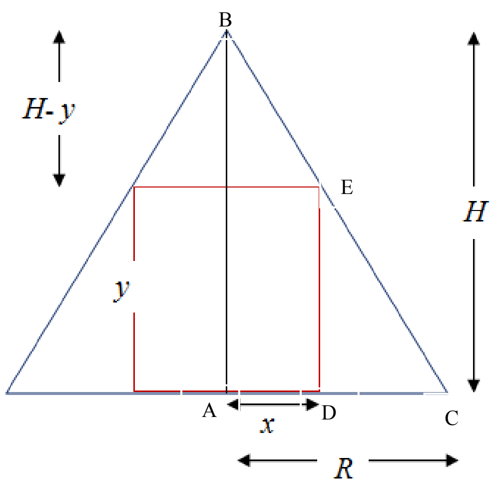


Figura 3 **Figura 4** **Figura 5**

1) ***A partir del enunciado, relacione con variables la altura y radio del cono, así como la altura y generatriz del cilindro inscrito en el cono circular recto.***

Para contestar esta parte, se espera que el estudiante realice el siguiente gráfico:



x : radio del cilindro

y : generatriz del cilindro

2) ***Halle la relación entre la altura y radio del cono con la altura y generatriz del cilindro.***

Esperamos, que el estudiante, use la semejanza de triángulos rectángulos BAC y EDC; es decir:

$$\frac{H-y}{x}=\frac{H}{R}$$

$$y=\frac{H}{R}(R-x)\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

3) ***Halle el modelo matemático correspondiente a la función volumen del cilindro circular recto inscrito en el cono.***

La respuesta esperada, sería:

Volumen del cilindro circular recto es:

$$V = \pi x^2 y \ \ldots\ldots\ (2)$$

$$V(x) = \pi x^2 \left[\frac{H}{R}(R - x) \right]$$

$$V(x) = \pi \frac{H}{R}(Rx^2 - x^3) \ \ldots.\ (3)$$

4) ***Qué tipo de función real de una variable se obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.***

Se espera que los estudiantes reconozcan que la función $V(x)$ es cúbica con dominio: $0 < x < R$, es decir:

$$V(x) = \pi \frac{H}{R}(Rx^2 - x^3),\ \ 0 < x < R$$

5) ***En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior.***

Esperamos que los estudiantes utilicen sus conocimientos de derivadas para optimizar funciones, el procedimiento esperado sería:

Hallando la primera y segunda derivada de $V(x)$:

$$V'(x) = \pi \frac{H}{R}(2Rx - 3x^2) \ \ldots.\ (4)$$

$$V''(x) = \pi \frac{H}{R}(2R - 6x) \ \ldots\ (5)$$

Hallando los puntos críticos:

$$V'(x)=0$$

$$V'(x)=\pi\frac{H}{R}(2Rx-3x^2)=0$$

$$\Rightarrow x=0; \quad x=\frac{2R}{3}$$

Si $x=0 \quad \Rightarrow V(0)=0$ y lo que se quiere es maximizar el volumen.

Entonces solo nos quedamos con:

$$x=\frac{2R}{3} \text{........ (6)}$$

Reemplazando (6) en (5) se comprueba que se trata de un máximo puesto que:

$$V''(\frac{2R}{3})=\pi\frac{H}{R}\left[2R-6(\frac{2R}{3})\right]=-2\pi H<0$$

Por lo tanto $V(x)$ alcanza su máximo en $x=\frac{2R}{3}$.

6) ***Cuál es el valor máximo de dicha función.***

Se espera que los estudiantes obtengan el valor máximo de $V(x)$ haciendo el siguiente procedimiento:

Reemplazando (6) en (1):

$$y=\frac{H}{R}(R-\frac{2R}{3})=\frac{H}{3} \text{.... (7)}$$

Reemplazando (6) y (7) en (2):

$$V=\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2\frac{H}{3}$$

$$V = \frac{4}{27}\pi R^2 H \quad \text{(valor máximo)}$$

7) ***Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro circular recto inscrito en el cono para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo del cilindro.***

Se espera como respuesta:

Las dimensiones del cilindro de máximo volumen que se puede inscribir en el cono circular recto de radio R y altura H, son:

$$x = \frac{2R}{3} \quad ; \quad y = \frac{H}{3}$$

8) ***En el caso particular par H=12m y R=5m, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 4.***

Esperamos que el estudiante proporcione la siguiente respuesta:

En el caso particular para: H=12 y R=5:

$$x = \frac{10}{3} \quad ; \quad y = 4$$

Y el modelo matemático de la función volumen es:

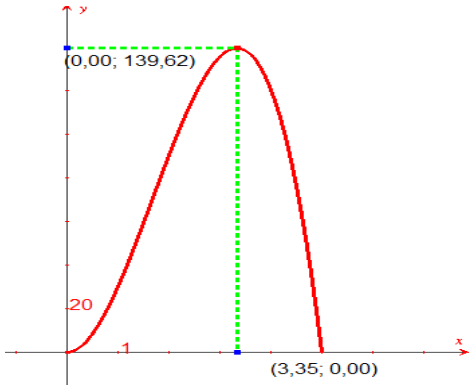
$$V(x) = \pi\frac{12}{5}(5x^2 - x^3) = -\frac{12\pi}{5}x^3 + 12\pi x^2 \quad , \ 0 < x < 5$$

Volumen máximo es:

$$V = \frac{4}{27}\pi(5)^2 12 = \frac{1200}{27}\pi \ \ m^3$$

$$V \approx 139.63 \ m^3$$

Gráficamente:



9) ***Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.***

Se espera que el estudiante, conteste:

Aproximadamente el punto más alto de la gráfica tiene coordenadas:

(3.33; 139.63)

La primera coordenada representa a la longitud del radio del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en el cono circular recto de altura H=12 m y radio R=5 m.

La segunda coordenada representa el volumen máximo del cilindro de radio $x = \dfrac{10}{3}$; generatriz $y = 4$.

Por lo tanto, hemos presentado las posibles estrategias que podrían usar los estudiantes, al resolver los problemas de optimización propuesto en cada una de las actividades. Las respuestas que los estudiantes proporcionen, lo contrastaremos con los resultados esperados, esto se realizará en la siguiente Capítulo.

CAPITULO 5: FASE EXPERIMENTAL, ANÁLISIS APOSTERIORI Y VALIDACIÓN

La fase experimental se desarrolló en las aulas de la Universidad Privada del Norte-Lima, con estudiantes de la Facultad de Ingeniería cuyas edades oscilan entre los 18 y 20 años de edad.

Las actividades diseñadas en la etapa anterior se desarrollaron con dos grupos de estudiantes matriculados en curso de Cálculo 1, en el semestre 2013-1. Cada grupo consistió de 29 estudiantes y el desarrollo de tales actividades se hizo en la hora de clase que corresponde a cada grupo.

Dichas actividades fueron desarrolladas por los estudiantes en forma individual (ver fotos-Anexo 3), no se les permitió apuntes. Se les permitió usar calculadora solo para las operaciones aritméticas.

Los contenidos del curso Cálculo 1 de manera general son: Funciones reales de variable real, Límites y Continuidad funciones de una variable, Derivada de funciones de una variable y Aplicaciones de la Derivada. (Ver sílabo –Anexo 4). El desarrollo de tales actividades, obviamente fueron aplicadas después que los estudiantes hayan llevado los contenidos mencionados líneas arriba, es decir en la última etapa correspondiente a la aplicación de la derivada específicamente a desarrollar problemas de optimización.

A continuación, presentamos la fecha y hora que se desarrollaron las actividades en mención.

Tabla n°8. Cronograma de actividades desarrolladas con los estudiantes

Grupo	Fecha	Hora	Lugar	N° de estudiantes
1	18/06/2013	3:00 pm-5:00 pm	Aula C306	29
2	19/06/2013	5:00 pm-7:00 pm	Aula C402	29

Fuente: Propia

En el primer grupo cada una de las actividades fue dirigida por el investigador con el apoyo del docente del curso.

Para el segundo grupo se contó como único colaborador al docente del curso quien observó y guio en el normal desarrollo de las actividades.

Para el recojo de información se utilizaron guías (ver Anexo 2) o material impreso conteniendo cada una de las actividades, asimismo, se les facilitó hojas en blanco para que los participantes anoten sus respuestas. En cada guía o material impreso, se dieron las siguientes indicaciones generales:

"A continuación se le proporciona tres problemas de optimización de funciones reales de una variable, los que serán resueltos de forma individual solo usando lápiz y evitando borrones. Este trabajo será considerado como parte de una investigación científica en aras de mejorar la enseñanza y aprendizaje de dichos problemas, por lo que le pedimos que demuestre la seriedad del caso y que haga su máximo esfuerzo".

Luego de recoger la información, hacemos la comparación entre los supuestos o comportamientos esperados, frente a las producciones que hicieron los estudiantes al desarrollar en cada una de las actividades propuestas.

Para este fin, mostramos como ejemplo las producciones que hicieron tres estudiantes, a quienes les denominaremos como A1, A2; A3. Si bien es cierto, las actividades se aplicaron a 58 estudiantes, la gran mayoría no logró desarrollar por completo ninguna actividad. Es por esta razón, que solo hemos considerado las producciones de los 3 estudiantes que trataron de aproximarse mejor a los resultados esperados, para cada actividad.

A continuación, presentamos el detalle y validación del proceso de solución que hizo cada uno de ellos, en cada una de las actividades.

Estudiante A1

Actividad Nº 1.

Un estudiante de ingeniería está interesado en construir un tanque de máxima capacidad debajo del primer plano inclinado de la escalera de su casa. Para tal efecto obtiene las medidas las cuales se muestran en la (Figura 1). Dicho tanque debe tener la forma de un paralelepípedo rectangular recto donde una de sus aristas debe tener longitud igual al ancho de la escalera (100 cm).

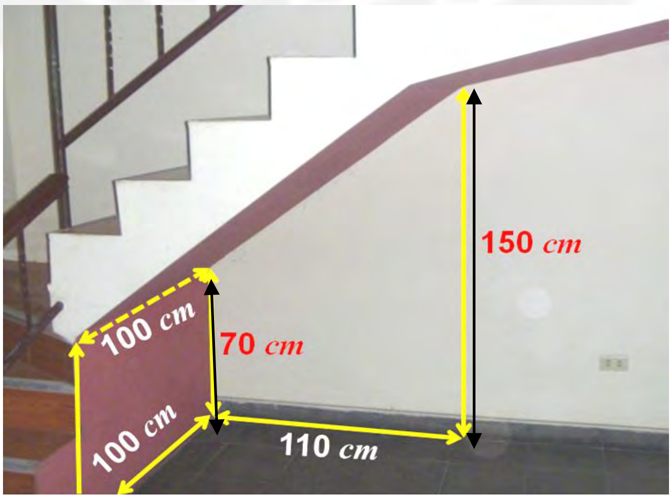
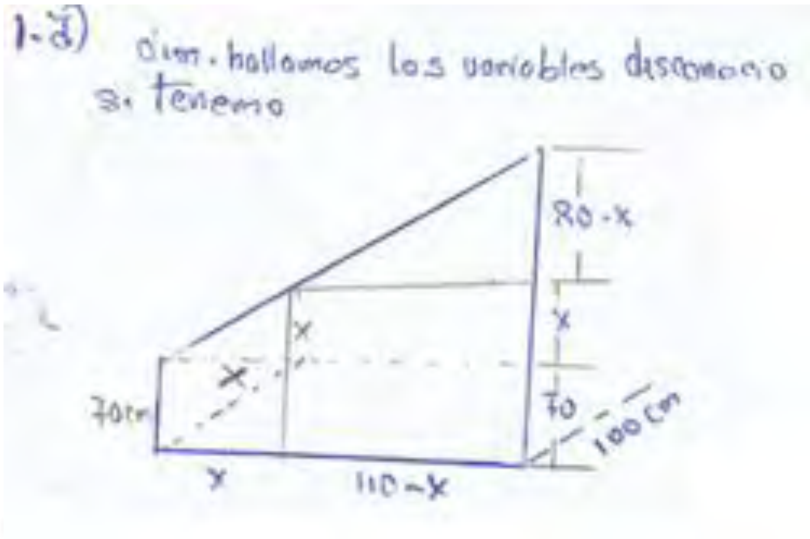
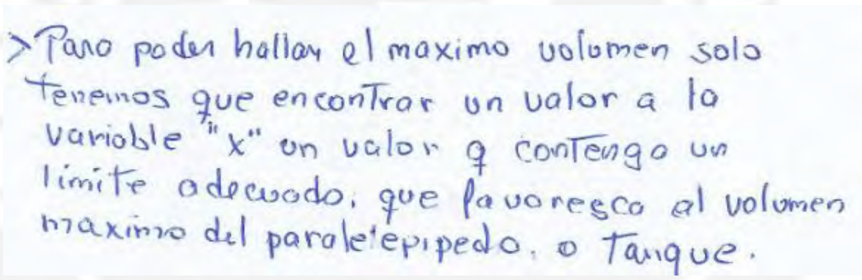


Figura 1

1) A partir del enunciado, relacione con variables las aristas desconocidas del paralelepípedo y explique con sus propias palabras qué tendrá que hacer para hallar el volumen máximo de dicho tanque.




>Para poder hallar el maximo volumen solo tenemos que encontrar un valor a la variable "x" un valor q contenga un limite adecuado, que favoresca al volumen maximo del paralelepipedo, o tanque.

Podemos observar que el estudiante, hace una representación gráfica para relacionar con variables los lados desconocidos del paralelepípedo. Si comparamos su respuesta con la que esperábamos, nos damos cuenta de que se relaciona con la estrategia N° 2 para resolver esta actividad.

Además, usa correctamente el registro verbal para explicar con sus propias palabras lo que tiene que hacer para optimizar el volumen pedido.

En conclusión, podemos decir que dicho estudiante sí contestó correctamente de acuerdo a los resultados esperados para esta parte de la actividad.

2) Escriba una expresión algebraica que determine las restricciones del problema.

2-b) tenemos que por medio de la expresión de la base por la altura obtenemos

$(110-x)(70+x)$

$7700+110x-70x-x^2$

$-x^2+40x+7700$

la medida del ancho de la escalera lo ignoramos por un momento ya que va ser una medida fija

x = ~~es~~ dependera para q' le de el volumen pedido

En esta parte, el estudiante, presenta algunas dificultades para expresar las restricciones del problema, como por ejemplo, no indicar los límites de variación de los lados del paralelepípedo. Sin embargo, utiliza correctamente el registro verbal para explicar que uno de los lados del paralelepípedo permanece siempre constante, por lo que ignora su valor momentáneamente.

3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función que se tendrá que optimizar.

3-c) $f(x) = -x^2+40x+7700$

De acuerdo como él lo ha planteado, sí sería el modelo matemático (registro algebraico) que representa al área que tiene que optimizar, pero presenta un error al considerar que tanto la base y altura del rectángulo, tienen las mismas longitudes. Hubiésemos esperado que su respuesta sea:

$$f(x) = -\frac{8}{11}x^2 + 10x + 7\,700$$

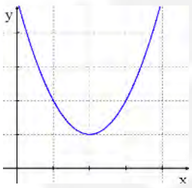
4) Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.

4- tenemos la función $f(x) = -x^2 + 40x + 7700$
2do grado Dom: $\mathbb{R}$

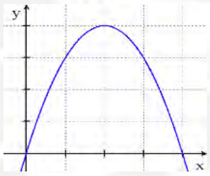
Recalcamos que la representación algebraica que el estudiante obtuvo es la correcta según el gráfico que consideró en la parte 1, incluso reconoce que se trata de una función cuadrática, pero presenta dificultades al identificar el dominio de dicha función.

5) Cuál cree que sería la forma del gráfico correspondiente a la función obtenida en el paso anterior.

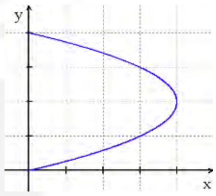
a)



b)



c)

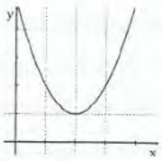


Justifique su respuesta verbalmente:

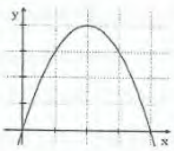
……………………………………………………………………………………………

5) Cuál cree que sería la forma del gráfico correspondiente a la función obtenida en el paso anterior.

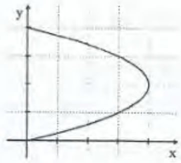
a)



b)



c)



Justifique su respuesta verbalmente:

Grafico Corresponde al "B" por el motivo que la ecuación que favorece al paralelepipedo nos pide hallar la maximación del variable para que Tengo un volumen maximo - anterior, La respuesta que el estudiante proporciona no es del todo la que realmente esperábamos. En realidad, se esperaba que, al obtener la función cuadrática en el paso anterior, identifique inmediatamente la forma del gráfico de dicha función. Es decir, se buscaba que estudiante transite del registro algebraico al gráfico.

6) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso 4.

6.- Para poder hallar su maximo volumen lo hallamos Simplemen por limites o tabulación.

$f(x)$	$-x^2+40x+7700$
12	8036
15	8075
20	8100 $\rightarrow$ max.
21	8099

Obtenemos que $x=20$ Para q obtenga su maximo volumen.

En este caso el estudiante presenta serias dificultades al tratar de obtener el máximo de la función objetivo, No utiliza las representaciones algebraicas propias para el tratamiento del valor óptimo para una función cuadrática.

7) Cuál es el valor máximo de dicha función.

No fue contestada

8) Represente gráficamente el modelo matemático obtenido para la función.

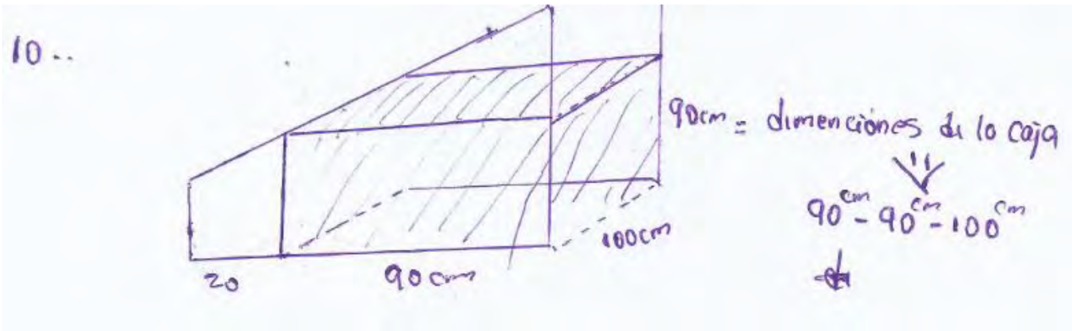
No fue contestada

9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.

No fue contestada

10) Cuáles deben ser las dimensiones del paralelepípedo para que su volumen sea el

mayor posible y cuál es el volumen máximo.



Se observa que la respuesta proporcionada por el estudiante no es la esperada. Hubiésemos querido que su respuesta sea:

$$110 - x = 110 - 6.875 = 103.125\ cm,\quad y = \frac{8}{11}[\frac{11}{8}(5)] + 70 = 75\ cm;\ \ 100\ cm.$$

Por lo tanto, el volumen del tanque de mayor capacidad es:

$$V = 100(110 - x)y = 100(7734.375) = 773437.5\ cm^3$$

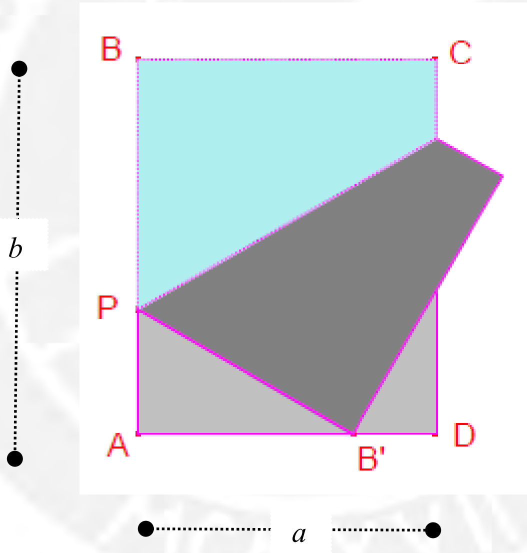
En conclusión, esta actividad:

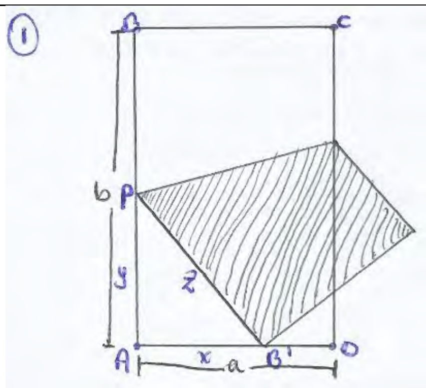
La primera pregunta, fue contestada correctamente.

En las preguntas 2-6, fueron contestadas parcialmente, donde el estudiante trata de articular el registro verbal, algebraico y gráfico.

A partir de la pregunta 6, se puede apreciar que el estudiante presenta dificultades para contestar dichas preguntas. Por lo que no hay más información para hacer el contraste con los comportamientos esperados.

A continuación, presentamos la producción del estudiante A2 al desarrollar la Actividad N°2.

Estudiante A2
<u>Actividad Nº 2</u> En el curso de dibujo técnico, el profesor les encarga a sus estudiantes la siguiente tarea: Considerar una hoja rectangular ABCD de lados a y b, $0 < a \leq b$ (Fig.2). De tal manera que al doblar la hoja, el vértice B "caiga" sobre el lado opuesto AD en el punto B´ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto de doblez del lado AB) cuya área sea la mayor posible.    Figura 2
1) A partir del enunciado, relacione con variables los lados desconocidos del triángulo rectángulo PAB´.



En esta parte, el estudiante relaciona a cada lado del triángulo PAB´ con una variable, pero no señala que: *z*=*b*-*y*.

2) Escriba una expresión algebraica que relacione los tres lados del triángulo rectángulo PAB´.

2 $x^2+y^2=z^2$

Se observa que el estudiante, usa correctamente el Teorema de Pitágoras para relacionar los tres lados del triángulo en mención.

3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función área del triángulo rectángulo PAB´.

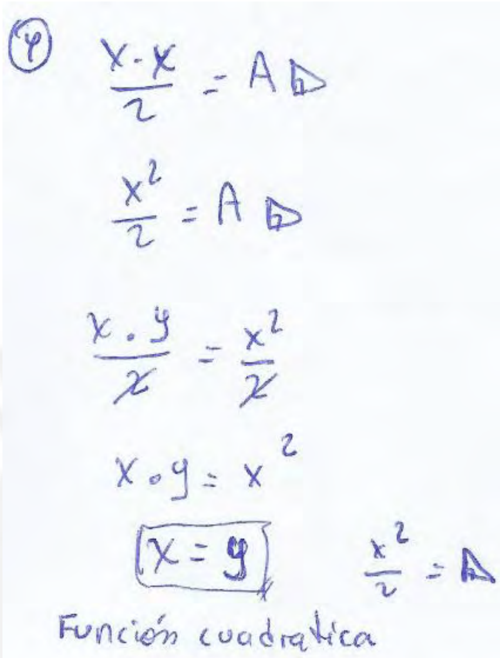
3 $A_\triangle = \dfrac{b.h}{2}$

$f(A_\triangle) = \dfrac{x \circ y}{2}$

El estudiante, muestra correctamente la expresión algebraica para calcular el área del triángulo rectángulo PAB´, pero no indica que *y* depende de *x*, por lo que no logra obtener por completo el modelo matemático esperado. Hubiésemos esperado que su repuesta sea:

$$f(x)=\frac{1}{4b}(b^2x-x^3)$$

4) Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.



Observamos, que el estudiante presenta un error al generalizar que $x=y$, esto te lleva a obtener una función cuadrática de una variable, pero dicha función no representa al modelo matemático correspondiente al área del triángulo rectángulo PAB´. Además, no dice nada sobre el dominio de dicha función.

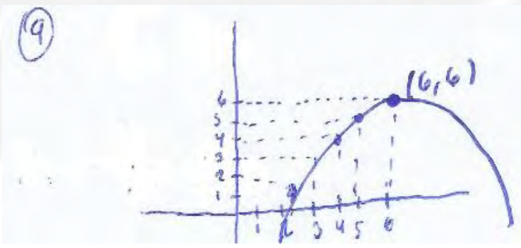
5) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior.

No fue contestada

6) Cuál es el valor máximo de la función de dicha función.

No fue contestada

7) Cuáles deben ser las dimensiones del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea la mayor posible y cuál es el área máxima.

No fue contestada 8) En el caso particular para: $a = b = 6$, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 3. (8) $a = b = 6$ $\boxed{x = y}$ $A\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{6^2}{2} = \frac{36}{2} = 18$ Observamos que el estudiante, presenta errores al contestar esta pregunta, y esto se deba tal vez a que ha ido arrastrando errores como por ejemplo: No considerar en la parte 1, que $z=b-y$. Por lo tanto, el estudiante no logra obtener el registro pedido. 9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.  En esta parte, se puede observar el intento del estudiante por obtener el registro gráfico, y así ubicar el punto más alto de la gráfica. Pero tiene dificultades debido a que no cuenta con estrategias adecuadas para realizar el gráfico pedido.
En esta actividad se ve claramente que el estudiante no logra alcanzar los resultados

esperados, puesto que, presenta muchas dificultades de representación algebraica, verbal y gráfica.

Por último, presentamos las producciones del estudiante A3, al desarrollar la Actividad N°3.

Estudiante A3

<u>Actividad Nº 3.</u> Un estudiante de arquitectura observa que los granos en reposo (maíz, arroz, frijol, etc.) de manera natural forman una figura cónica regida por propiedades físicas. A raíz de esta situación está motivado en diseñar un silo para almacenar grandes cantidades de granos. El silo a diseñar debe tener altura H y constituido por una parte inferior cilíndrico y la parte superior de forma cónica similar al que se muestra en la figura 5. La parte inferior debe ser un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H igual al del silo ($H > 2R$) de tal manera que el volumen de dicho cilindro sea el máximo.

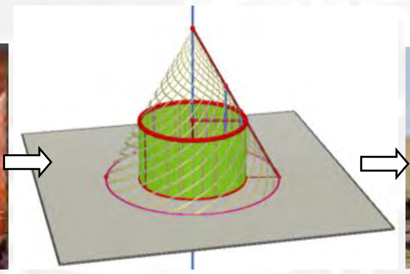
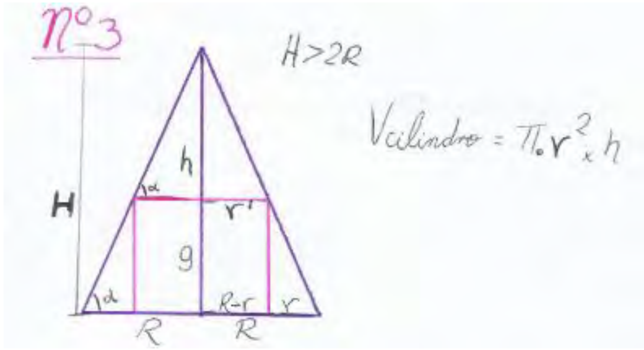


Figura 3 Figura 4 Figura 5

1) A partir del enunciado, relacione con variables la altura y radio del cono, así como la altura y generatriz del cilindro inscrito en el cono circular recto.



Se observa que el estudiante, realiza una representación gráfica, y logra relacionar con éxito los elementos pedidos. Por lo tanto, la respuesta de dicho estudiante está de acuerdo con los resultados esperados.

2) Halle la relación entre la altura y radio del cono con la altura y generatriz del cilindro.

Cono: $\frac{\text{Altura}}{\text{radio}} = \frac{H}{R}$ • Cilindro: $\frac{g_{\text{eneratriz}}}{\text{radio}} = \frac{g}{r'}$

(2) $\frac{\text{altura}}{\text{radio}}$: cono $\frac{H}{R}$ = cilindro $\frac{H-h}{R-r}$

Al igual que en el paso anterior, la respuesta del estudiante sí está de acuerdo con lo que se esperaba, puesto que, utiliza la semejanza de triángulos tal como lo habíamos supuesto. Por lo tanto, en base a la teoría de Registros de Representación Semiótica, podemos afirmar que el estudiante, en esta parte, usó correctamente el registro algebraico.

3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función volumen del cilindro circular recto inscrito en el cono.

(3) volumen $= \pi (R-r)^2 . (H-h)$

En este caso, muestra la fórmula correcta para calcular el volumen del sólido en cuestión, pero no logra reemplazar los resultados obtenidos en el paso anterior. 4) Qué tipo de función real de una variable se obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función. No fue contestada 5) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior. No fue contestada 6) Cuál es el valor máximo de dicha función. No fue contestada 7) Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro circular recto inscrito en el cono para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo del cilindro. No fue contestada 8) En el caso particular par H=12m y R=5m, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 4. No fue contestada 9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas. No fue contestada
En esta actividad, se observa que a partir de la pregunta 5, el estudiante no contestó absolutamente nada, demostrando que tiene dificultades para desarrollar problemas de esta naturaleza.

CAPITULO 6: PROPUESTA DIDÁCTICA USANDO EN EL SOFTWARE CABRI II

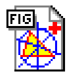
Luego de analizar los tipos de registros que producen los estudiantes al resolver problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal y en base al contraste entre los supuestos y los resultados obtenidos, en este capítulo presentamos el rediseño de las mismas actividades trabajadas con lápiz y papel, pero esta vez usando como recurso didáctico al software Cabri. Estas actividades fueron adaptadas y diseñadas por el investigador siguiendo una secuencia didáctica, la que presentamos como propuesta, con la intención de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que presentaron al resolver dichas actividades solo con lápiz y papel.

A continuación, proporcionamos el rediseño de cada una de las tres actividades puestas en juego, siguiendo una secuencia didáctica para favorecer la articulación entre los registros de representación semiótica.

6.1 Descripción de la Actividad 1, diseñada en el Software Cabri II

Esta actividad está diseñada y construida en el Software Cabri II, de acuerdo con las condiciones del problema, solo tenemos que acompañar al estudiante en el proceso de experimentación, para tal efecto se sugiere tener en cuenta los siguientes pasos:

1) Abrir el archivo de nombre:



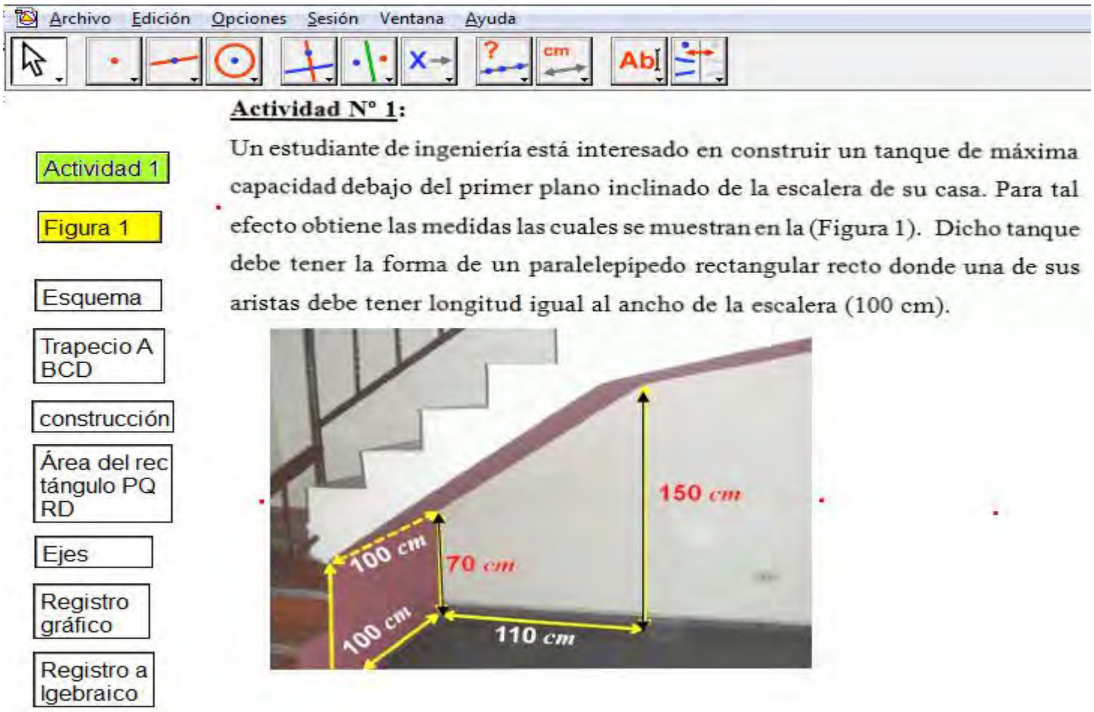
Actividad -1.fig

2) Al activar los íconos

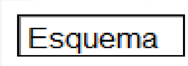
Actividad 1

Figura 1

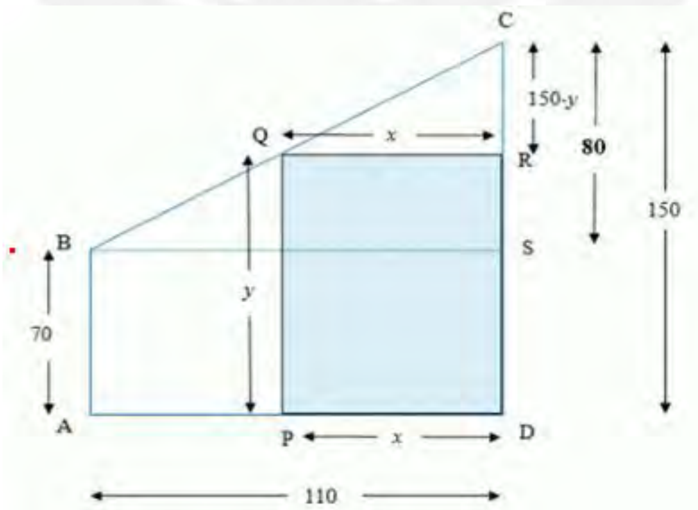
Se muestra el registro verbal correspondiente al problema a optimizar, es decir:



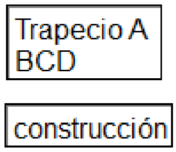
3) Activar el botón



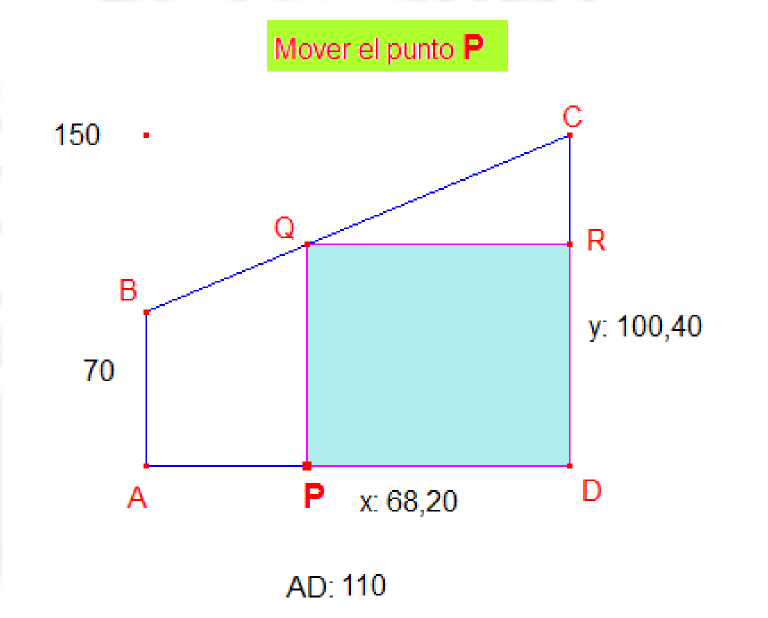
Para explicar que, para obtener el tanque de máximo volumen, se tiene que optimizar el área del rectángulo PQRD, puesto que una de las aristas del tanque permanecerá siempre constante.



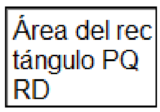
4) Activar los botones



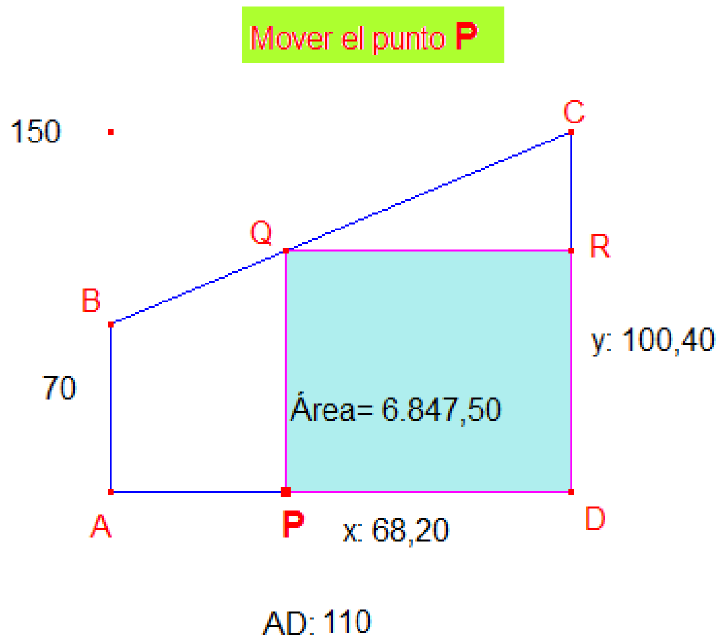
Para mostrar la construcción del trapecio ABCD y el rectángulo PQRD, de acuerdo a las condiciones del problema. En esta parte empieza el proceso de experimentación del estudiante al que se le pide que arrastre el punto P y pueda apreciar cómo cambian las longitudes de los lados del rectángulo PQRD.



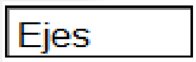
5) Activar el botón



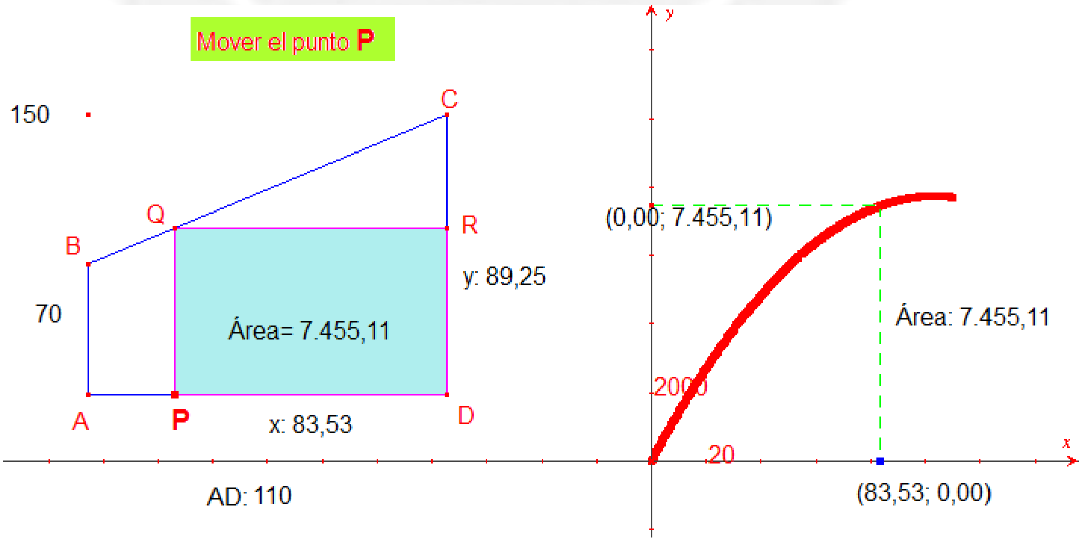
Con esta acción se podrá apreciar que al mover el punto P no solo cambian las longitudes de los lados del rectángulo en mención sino también cambia el área de dicha figura. Es momento de hacer una nueva pregunta ¿cuáles deben ser las dimensiones de los lados del rectángulo PQRD para que su área sea la máxima?



6) Activar el botón



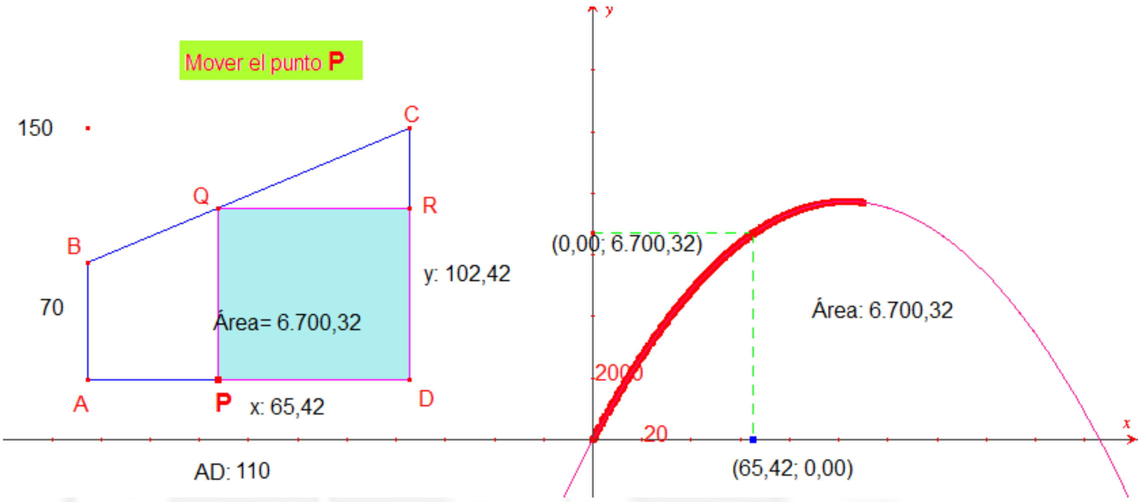
La ventaja de la herramienta "Ejes" es fundamental para relacionar el cambio que está sufriendo el área de la figura con respecto a la variación de sus lados. Para esto se pide que arrastre el punto P y observe la trayectoria que describe el valor del área del rectángulo PQRD en el sistema de ejes coordenados.



7) Activar el botón

Registro gráfico

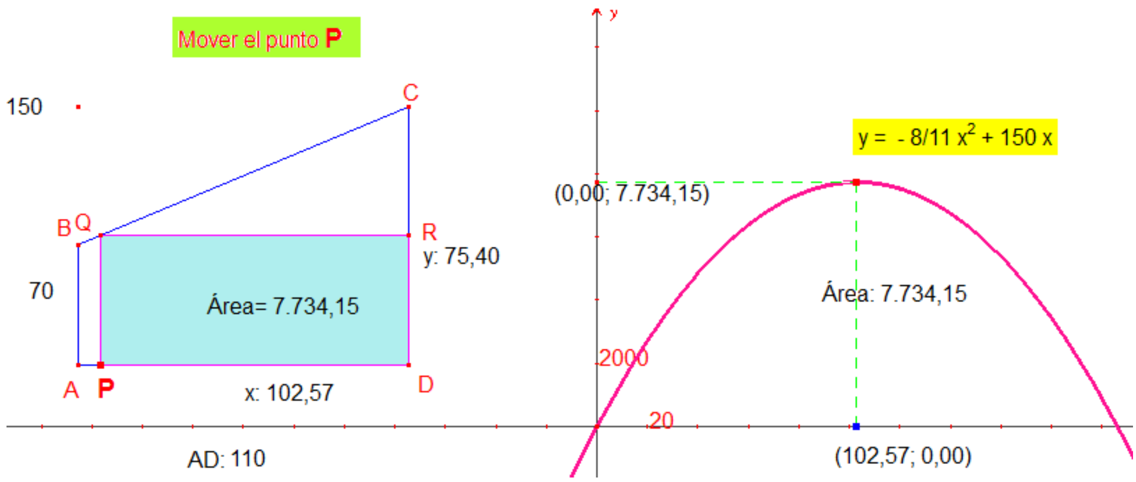
Con esta acción el estudiante comprobará que la trayectoria vista en paso anterior forma parte de una curva parabólica. Para comprobar puede hacer uso de la herramienta “lugar geométrico”.



8) Activar el botón

Registro a lgebraico

Con esta acción el estudiante podrá articular el registro gráfico del paso anterior con el registro algebraico utilizando la herramienta del mismo software “coordenadas o ecuación”



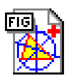
9) A esta altura de la etapa experimental el estudiante se espera que sea capaz de relacionar la segunda coordenada del vértice de la parábola con el área máxima del rectángulo PQRD.

10) Luego de la etapa experimental se recomienda realizar la comprobación matemática haciendo uso del cálculo diferencial, para esto se sugiere tomar en cuenta la justificación matemática que se presentó en la etapa de los comportamientos esperados.

6.2 Descripción de la Actividad 2, diseñada en el Software Cabri II

Esta actividad también está diseñada y construida en el Software Cabri II, de acuerdo a las condiciones del problema, al igual que en la Actividad 1, solo tenemos que acompañar al estudiante en el proceso de experimentación, para tal efecto se sugiere tener en cuenta los siguientes pasos:

1) Abrir el archivo de nombre:



Actividad -2.fig

2) Activar los íconos Actividad 2 y Figura 2 respectivamente, es decir:

Actividad 2

Fig. 2

Con esta acción se muestra al estudiante el registro verbal correspondiente al problema a optimizar, es decir:

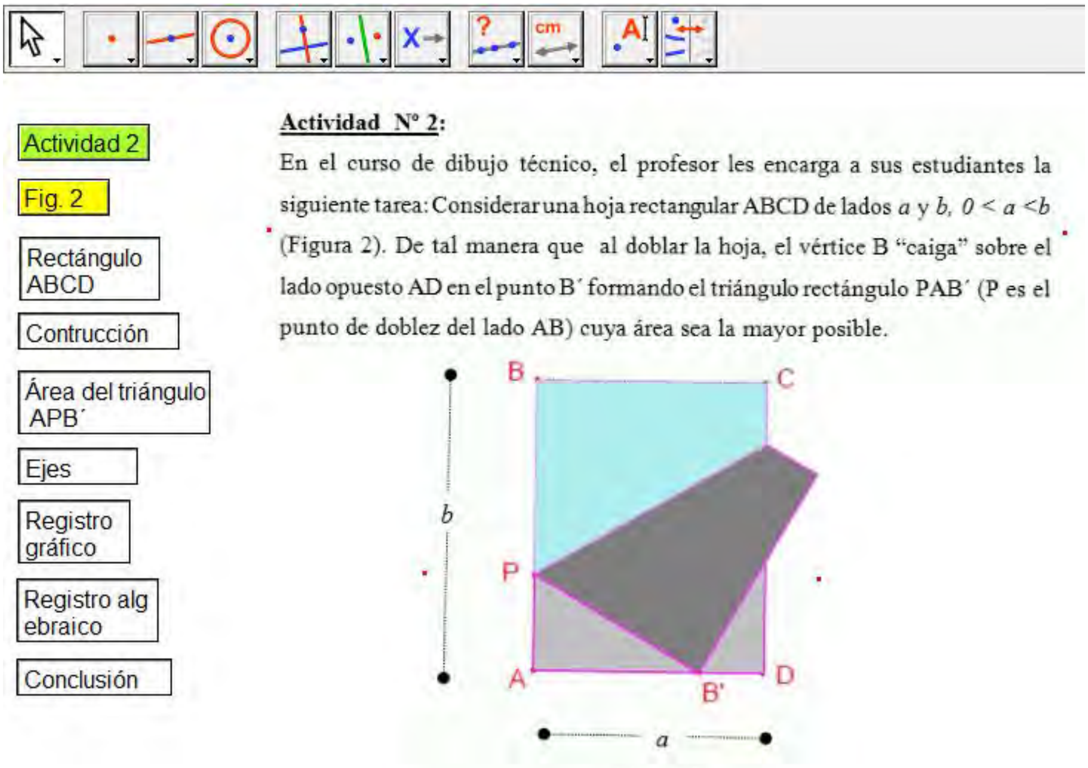


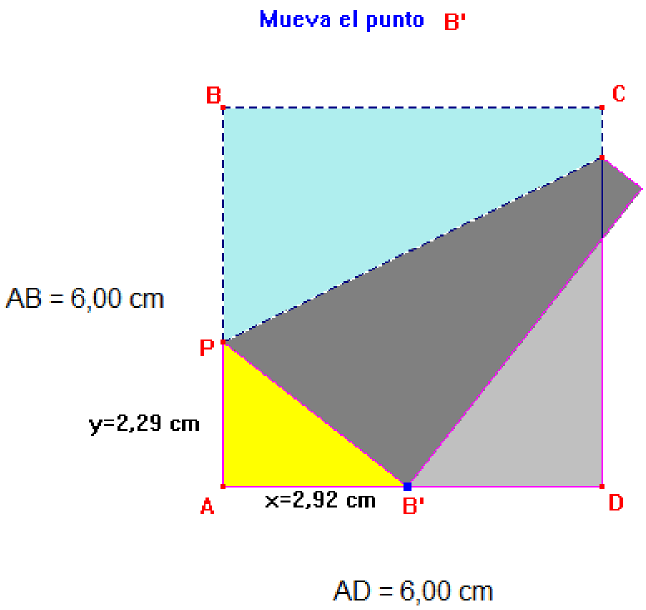
Figura 2

3) Activar en forma simultánea los botones:

Rectángulo ABCD

Contrucción

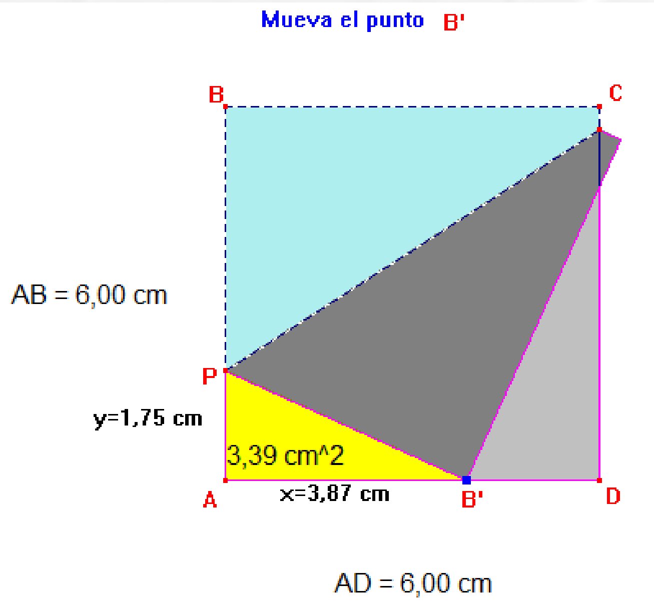
Con esta acción el estudiante será capaz de seguir experimentando puesto que al mover el punto **B´** se tendrá la simulación del doblez de la hoja rectangular.



4) Activar el botón:

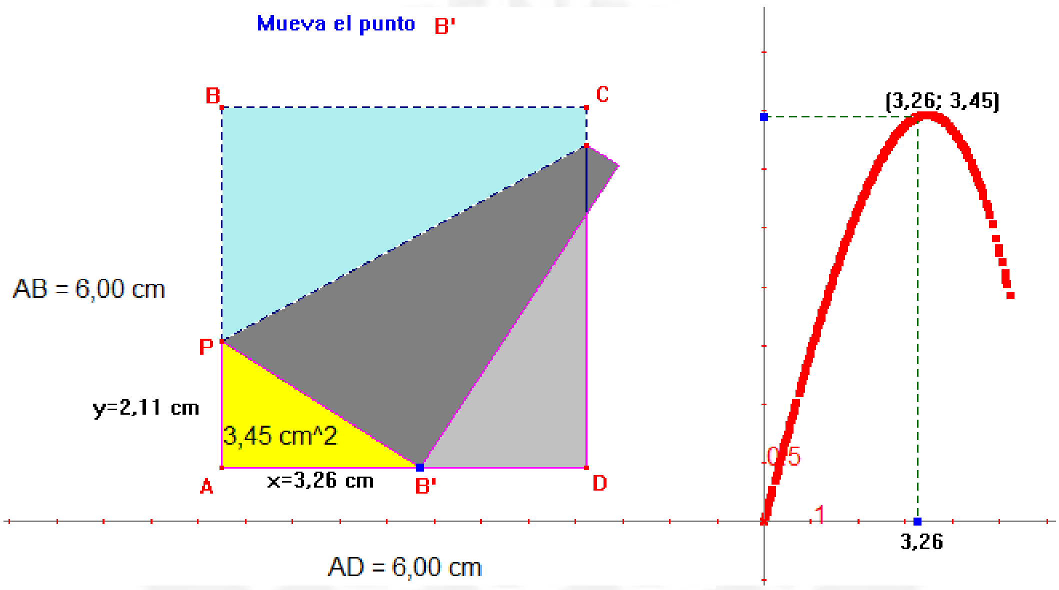
Área del triángulo APB´

En esta parte el estudiante al mover el punto B´ estará haciendo variar las longitudes de los lados del triángulo PAB´ y por consiguiente también varía el área de dicho triángulo.

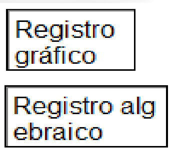


5) Activar el botón:

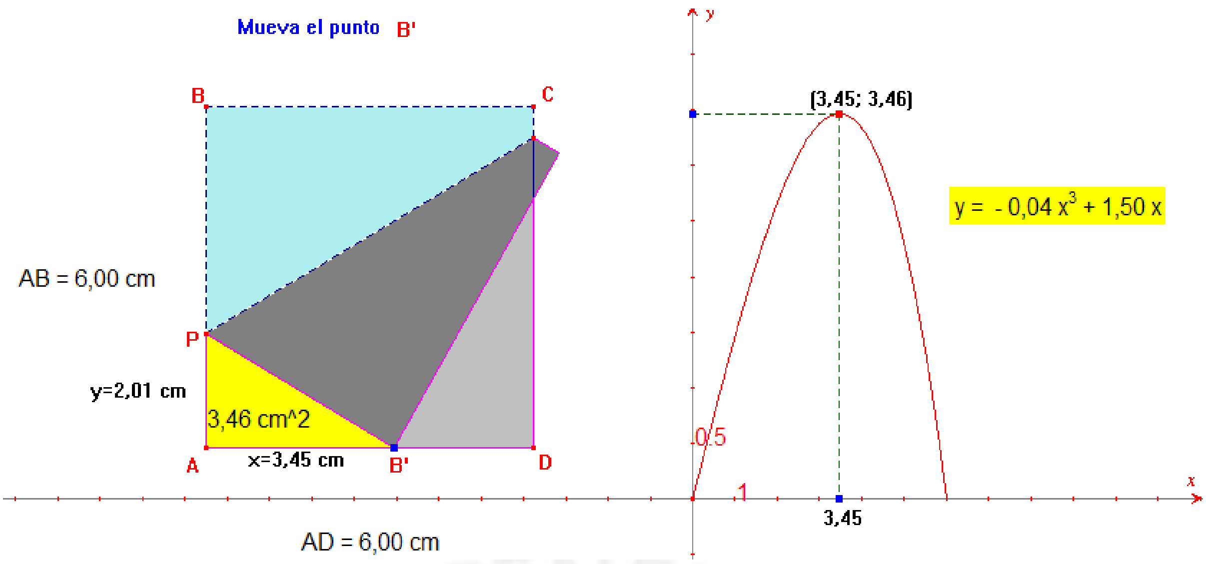
Recalcamos que la ventaja de la herramienta “Ejes” es fundamental para relacionar el cambio que está sufriendo el área de la figura con respecto a la variación de sus lados. Para esto se pide que arrastre el punto B´ y observe la trayectoria que describe el valor del área del triángulo PAB´ en el sistema de ejes coordenados. Es decir:



6) Activar en forma simultánea los botones::



Al activar estos botones, el estudiante relacionará el registro gráfico con el registro algebraico. Comprobando que se trata de una función cúbica y que el punto más alto de la gráfica guarda relación con el área máxima del triángulo rectángulo PAB´.

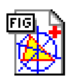


7) Al igual que en la Actividad 1, se recomienda realizar la validación rigurosamente matemática, haciendo uso del cálculo diferencial, para esto se sugiere tomar en cuenta la justificación matemática que se presentó en la etapa de los comportamientos esperados.

6.3 Descripción de la Actividad 3, diseñada en el Software Cabri II-y Cabri 3D

Esta actividad al igual que las dos anteriores también fue diseñada y construida por el investigador, aprovechando las ventajas del Software Cabri II y de acuerdo a las condiciones del problema, para acompañar al estudiante en el proceso de experimentación se sugiere tener en cuenta los siguientes pasos:

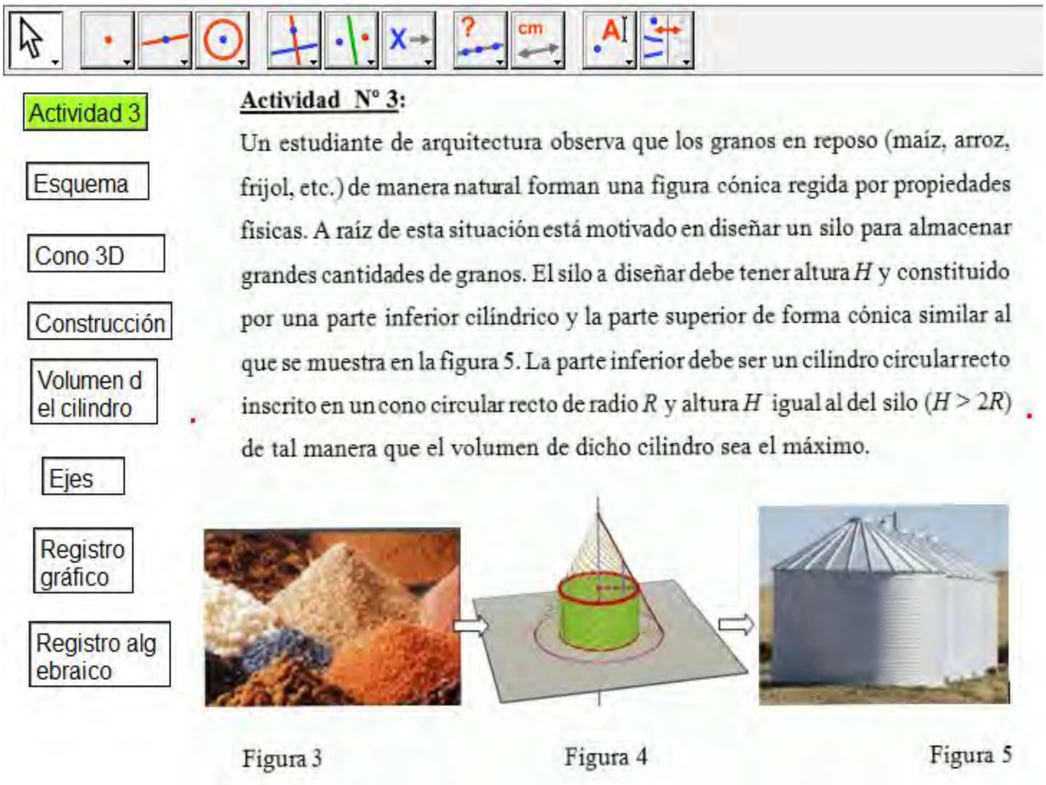
1) Abrir el archivo de nombre:


Actividad -3.fig

2) Activar el botón:

Actividad 3

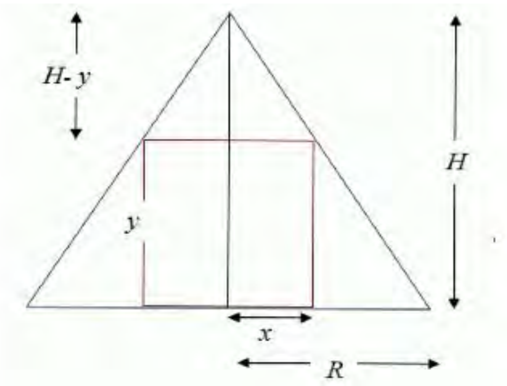
Esta acción está destinada a mostrar al estudiante el registro verbal correspondiente al problema de optimización.



3) Activar el botón:

Esquema

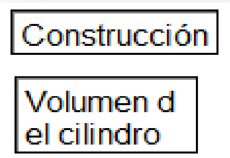
Este esquema sería muy importante para relacionar el radio y generatriz del cilindro con el radio y altura del cono, mediante la semejanza de triángulos.



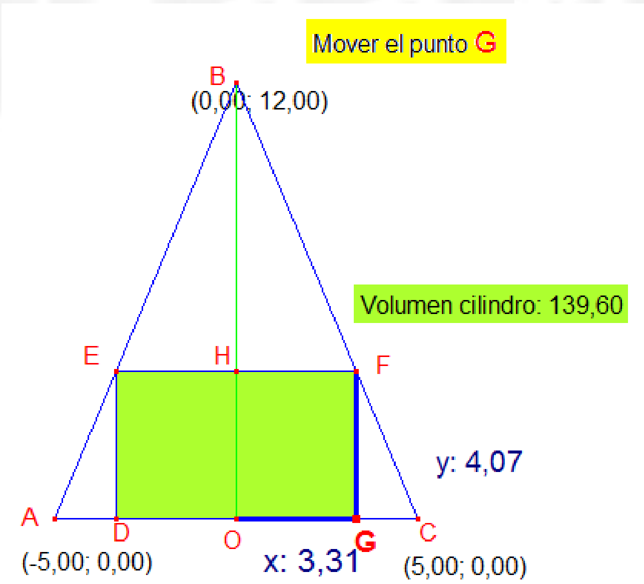
x : radio del cilindro

y : generatriz del cilindro

4) Activar los botones:



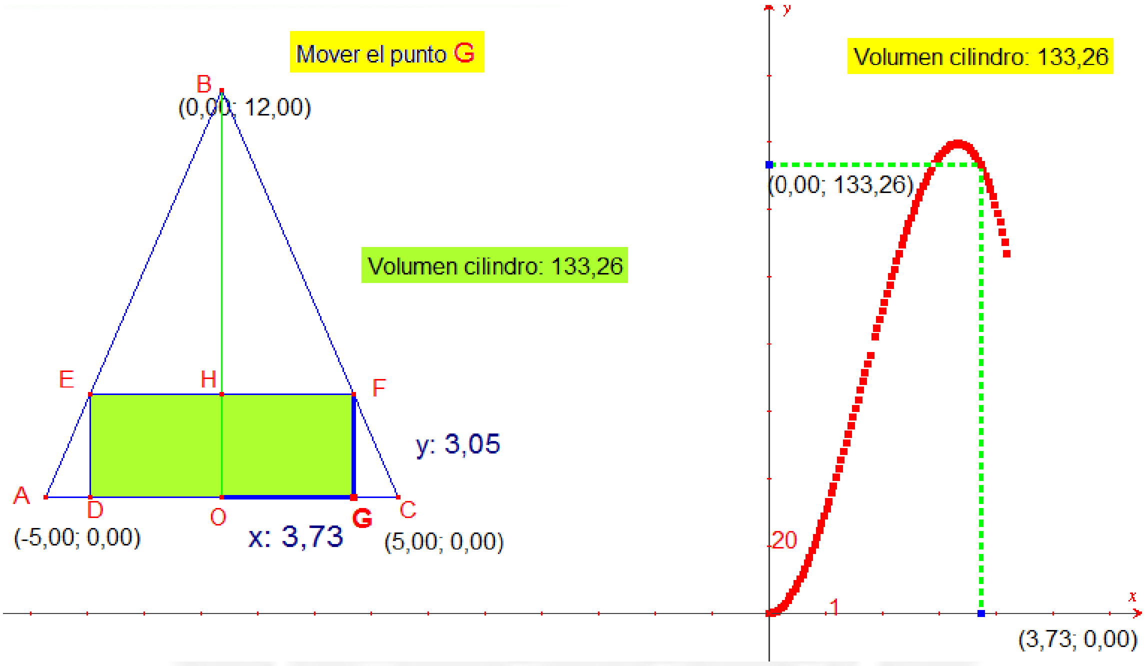
Para mostrar la construcción hecha en Cabri, en la que el estudiante al mover el punto G de la gráfica, hallará las dimensiones del radio y generatriz del cilindro de mayor volumen que se pueda inscribir en el cono dado.



5) Activar los botones:

Ejes

Al igual que en las actividades anteriores, el estudiante será capaz de interactuar con el software y relacionar el volumen del cilindro con la trayectoria mostrada en el plano coordenado.

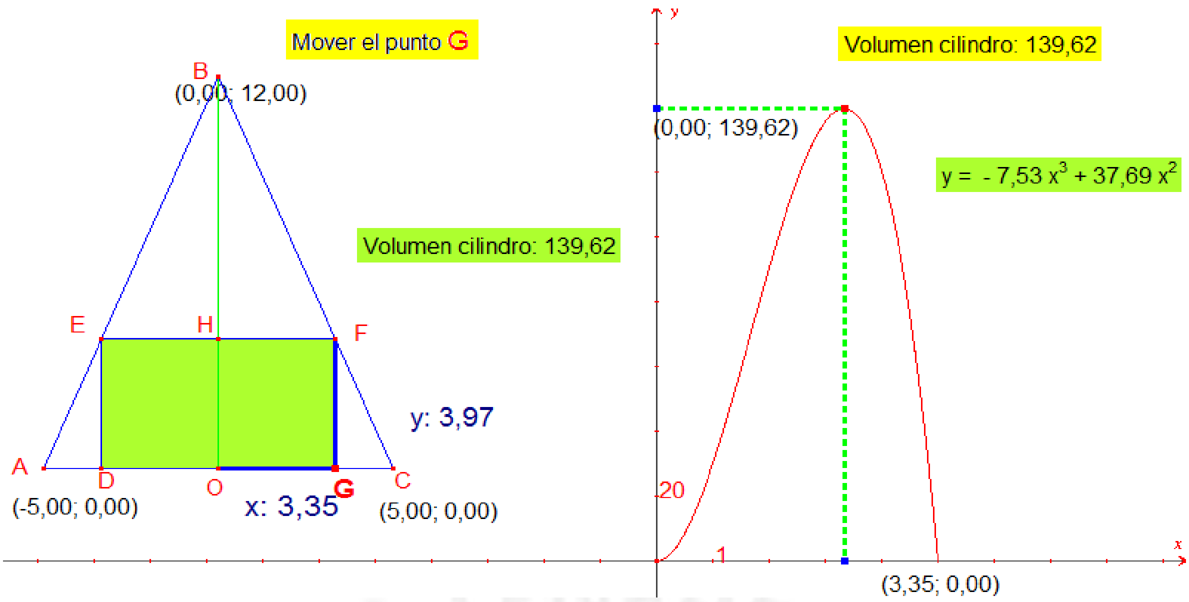


6) Activar los botones:

Registro gráfico

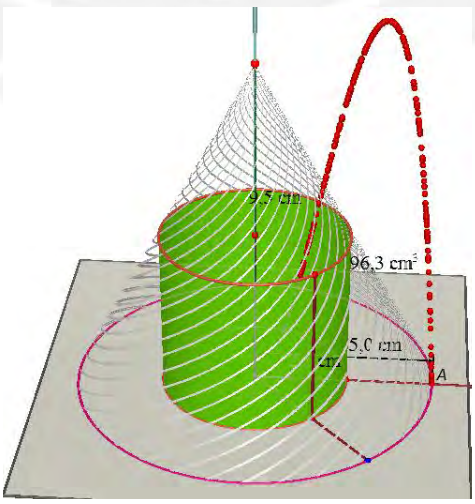
Registro alg ebraico

Con esta acción se pretende que los estudiantes logren articular el registro gráfico con el algebraico, comprobar que se trata de una función cúbica.



7) Luego de la interacción con el softwar se recomienda realizar la validación rigurosamente matemática, haciendo uso del cálculo diferencial, para esto se sugiere tomar en cuenta la justificación matemática que se presentó en la etapa de los comportamientos esperados.

Téngase en cuenta que la Actividad 3 también pudo haberse tratado con Cabrí 3D, de la siguiente forma:



CAPITULO 7: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Concluimos esta investigación, comprobando que el nivel de concepción que tienen los estudiantes de ingenierías de la UPN, que estuvieron matriculados en el curso de cálculo 1 en el semestre 2013-1, sobre el planteamiento y resolución de los problemas de optimización de funciones enunciados en el lenguaje verbal, es alarmante. Ningún estudiante que se consideró como partícipe de esta investigación pudo terminar por completo la solución de alguna de las tres actividades propuestas. Los tipos de representaciones que ellos hicieron no resultaron ser las esperadas, la gran dificultad se encuentra en pasar del registro verbal al algebraico. Estas dificultades se ponen de manifiesto no solo en esta investigación, sino que en base a nuestra experiencia docente damos fe de que en este tipo de representación los estudiantes tienden por lo general a presentar mayores dificultades. Con la intención de superar en cierto grado dichas dificultades, proponemos, como alternativa didáctica, enfrentar a los problemas de optimización valiéndose de los medios tecnológicos y para esto sugerimos hacer uso de algún software de geometría dinámica como el *Cabri Géomètre II*, para rediseñar las actividades y trabajarlas dentro de estos ambientes dinámicos en los que se puede hacer construcciones y representaciones del tipo verbal, algebraico y gráfico.

A continuación, presentamos algunas conclusiones de manera particular para cada actividad diseñada por el investigar y desarrollada por los estudiantes.

Actividad 1: Esta es una actividad diseñada por el propio investigador en base a un contexto real, con la finalidad de que los estudiantes se trasladen por los diferentes tipos de representaciones, desde el punto de vista de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), al resolver cada una de las 10 preguntas planteadas. Con las 10 preguntas planteadas en esta actividad, tratamos de inducir al estudiante a que transite por los registros verbal, algebraico, gráfico y también por supuesto que realice el tratamiento de un registro o bien la conversión entre registros. Al analizar los resultados obtenidos y contrastando con los resultados esperados, lamentablemente se comprobó que solo 2 de los 58 estudiantes que participaron en el desarrollo de las actividades, lograron resolver parcialmente dicha actividad, los demás estudiantes mostraron serias dificultades al pasar del registro verbal al algebraico, a pesar de hacer su esfuerzo solo intentaron llegar hasta el modelo matemático a optimizar y para representar gráficamente a dicho modelo se inclinaron por la tabulación, demostrando carencia de estrategias para graficar funciones cuadráticas, pues el modelo matemático que se obtiene en esta actividad representa a una función cuadrática. A pesar de las dificultades mencionadas, la Actividad 1 fue la más tratada por parte de los estudiantes. Hubiésemos querido que los resultados sean más favorables, así poder hacer un análisis más riguroso sobre el tipo de representaciones semióticas que ellos producen. Pero lamentablemente volvemos a comprobar que la enseñanza y aprendizaje de los problemas de optimización, enunciados en el lenguaje verbal, no están siendo asimilados por nuestros estudiantes. Seguramente que somos nosotros, como docentes, los que jugamos un papel fundamental para revertir estos resultados, no estando pegados a una postura tradicionalista, sino por el contrario buscar los recursos necesarios para ayudar a nuestros estudiantes a entender y comprender los temas matemáticos en general, y la solución de los problemas de optimización en particular. Desde este punto de vista, proponemos tratar dichos problemas en un ambiente interactivo usando como recurso didáctico al Software *Cabri Géomètre II*. En el caso de la Actividad 1, se ha diseñado en el software en mención la construcción del rectángulo PQRD basada en las hipótesis del problema, luego de experimentar y hacer arrastre de elementos de la figura, el estudiante puede identificar o comprobar conjeturas con respecto a las dimensiones de la figura de mayor área. El hecho de que se pueda ingresar ejes coordenados es de suma importancia para poder relacionar el comportamiento que tiene el valor del área de la figura con respecto a la variación en la longitud de uno de sus lados. Usando como herramienta el lugar geométrico, se puede obtener la representación gráfica de la función área. Además, con la herramienta coordenadas u ecuación podemos obtener la representación algebraica del lugar geométrico en mención. En conclusión, el haber diseñado esta actividad usando como recurso didáctico al software Cabri II, se puede articular los registros verbal, algebraico y gráfico desde el punto de vista de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993).

Actividad 2: Esta actividad es una adaptación de la construcción geométrica que elaboramos en el curso de Geometría en la Maestría en Enseñanza de la Matemática en las Aulas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, guiados por el docente Mariano Gonzáles Ulloa. Al igual que en la Actividad 1, la finalidad de esta actividad es lograr que los estudiantes se trasladen por los diferentes tipos de Representación Semiótica, al resolver las 9 preguntas planteadas en esta actividad. Luego de contrastar el análisis a posteriori con el análisis a priori, comprobamos que ningún estudiante logró desarrollar completamente dicha actividad. Del primer grupo de estudiantes solo 16 llegaron a contestar las dos primeras preguntas de las 9 planteadas, mientras que del segundo grupo hicieron lo mismo solo 8 estudiantes. Nuevamente estamos frente a una situación desafortunada y preocupante, puesto que el nivel de concepción, con respecto a la solución de problemas de optimización, de nuestros estudiantes no es el esperado. Frente a esta situación como investigadores, en aras a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la solución de problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal, proponemos que dicha actividad sea adaptada y tratada haciendo uso del software Cabri II. De esta forma estaríamos intentando motivar al estudiante a prestar especial interés en la solución de dichos problemas, de tal manera que mediante la experimentación y la facilidad de arrastre de los elementos de la figura se cree en el estudiante el conflicto cognitivo y así logre articular los diferentes registros de representación.

Actividad 3: Se trata de un problema de optimización planteado en uno de los libros texto, al que se le ha dado un contexto diferente tratando despertar la motivación e interés por parte de los estudiantes. Con las 9 preguntas de esta actividad, al igual que en las actividades anteriores, también esperamos rescatar las representaciones que producen los estudiantes al dar solución cada pregunta. Luego del contraste entre el análisis a priori y el a posteriori, comprobamos que solo 2 estudiantes de los 58 que participaron en el desarrollo de tales actividades, intentaron resolver y obtener el modelo matemático a optimizar. Esta es la realidad actual de nuestros estudiantes, y tenemos que como investigadores o como docentes, buscar las estrategias y recursos necesarios para mejorar la enseñanza y aprendizaje de los problemas matemáticos enunciados en el lenguaje verbal en general. Por esta razón es que estamos proponiendo el tratamiento de los problemas de optimización en general usando como recurso didáctico algún software de Geometría dinámica, puesto que una de las principales ventajas, frentes a otros recursos (lápiz, papel, etc.), es que las figuras dejan de ser estáticas y vistas en el plano para pasar a la pantalla de un ordenar y presentarse en forma de animaciones que nos permiten observarlas desde diferentes ángulos. Pero no es solo el movimiento de las figuras los que proporcionarían interés para el aprendizaje de las matemáticas, lo realmente innovador e interesante es que las actividades diseñadas pueden ser concebidos para poder modificar ciertos parámetros en la construcción y comprobar los efectos de nuestros cambios. Así por ejemplo, en la

Actividad 1 diseñada en Cabri, al mover o arrastrar el punto P del rectángulo PQRD, varía inmediatamente las dimensiones del rectángulo, en consecuencia también varía su área.

Con el diseño de las tres actividades para ser solucionadas con lápiz y papel se ha podido analizar los tipos de registros de representación que producen los estudiantes desde el punto de vista de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), además se ha comprobado las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal cuyos modelos matemáticos son funciones cuadráticas o cúbicas. Logrando así uno de nuestros objetivos específicos planteado en el Capítulo 1.

Luego de confrontar los resultados obtenidos con los esperados y comprobar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver este tipo de problemas, se propone la secuencia didáctica de las tres actividades diseñadas, tratadas con lápiz y papel, pero usando como recurso didáctico al software Cabri, de tal manera que se logre mejorar la articulación de los registros de representación semiótica. De esta forma estaríamos logrando nuestro segundo objetivo específico.

Por lo tanto, creemos haber logrado contestar a nuestra pregunta de investigación, así como también a nuestros objetivos (general y específicos), pero recalcamos que con esta propuesta no pretendemos desmerecer al cálculo diferencial para resolver dichos problemas, sino por el contrario sería la herramienta fundamental para validar los resultados obtenidos por experimentación con el software.

Hubiese sido interesante ejecutar la propuesta y comprobar los efectos, pero para lograr esto se necesita mayor tiempo de investigación, así como ambientes implementados con algún software de geometría dinámica como el Cabri, de tal manera que sea posible la puesta en marcha de este tipo de estudios. Por lo tanto, estamos dejando un campo abierto para seguir investigando sobre los temas tratados.

RECOMENDACIONES

Debido a la importancia y ventajas que ofrecen los softwares de geometría dinámica para la enseñanza de las matemáticas, se recomienda a las Instituciones Educativas destinar un presupuesto para la obtención de la licencia de dichos softwares e implementar laboratorios de cómputo, de tal manera que cada estudiante tenga un ordenador.

Se recomienda implementar un plan de capacitaciones a los docentes involucrados en temas de enseñanza de las matemáticas en general y del cálculo diferencial en particular, puesto que, pocos son los docentes que conocen este tipo de recursos didácticos, y si queremos contribuir en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de este tipo de problemas, todos los docentes de la institución debemos estar hablando el mismo lenguaje.

Se recomienda que todos los problemas de optimización sean tratados primero en un ambiente de geometría dinámica, de tal manera que el estudiante pueda experimentar, hacer y comprobar conjeturas. En segundo lugar hacer la formalización y estricta validación de los resultados haciendo uso del cálculo diferencial.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Beighter, Ch., Douglass, J. (1967). *Foundations of Optimization.* Englewood, N.J., USA. Ed. Prentice Hall, Inc.

Campero, J. (2010). *Propuesta Didáctica en Optimización Dinámica: El Caso del Cálculo de variaciones y la Teoría de Control (Tesis doctoral en Matemática Educativa).* Instituto Politécnico Nacional. México.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. Actas del IV Simposio de la SEIEM. España: Huelva.

Dávila, M., Grijalva, A, Bravo, J.,(2001) .Construcción del significado geométrico de la derivada a partir de la resolución de problemas de optimización y uso de Geogebra. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*; Hermosillo, Sonora,1-8.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), Lecturas en didáctica de la matemática*: Escuela Francesa,* (118-144) México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1995) *Semiosis y pensamiento humano*. Peter Lang. Universidad del Valle.

Encinas, J., Ávila, R. (2011). La metacognición y la competencia de estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas;* Hermosillo, Sonora, 9-14.

George, B., & Thomas, J. (2006). *Cálculo de Una variable.* México: Pearson.

Gutierrez, S., Aparicio, D. (2007). Caracterización de los niveles de conceptualización de variación en los estudiantes de los primeros semestres de la Escuela Colombiana de Ingeniería.

Guzmán, I. (1998). Registros De Representación, El Aprendizaje de Nociones Relativas A funciones: Voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, 5-21.

Hoffmann, L. D., Gerald L, B., & Kenneth H, R. (2006). *Cálculo Aplicado.* México: McGraw-Hill.

Larson, R., & Bruce, H. (2010). *Cálculo 1 de Una Variable.* México: McGraw-Hill.

Saiz, I. E., & Acuña, N. (2006). *El Portal Educativo del estado Argentino*. Obtenido de Núcleo Teórico: Influencia de las TIC: http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/influencia-de-las-tic/

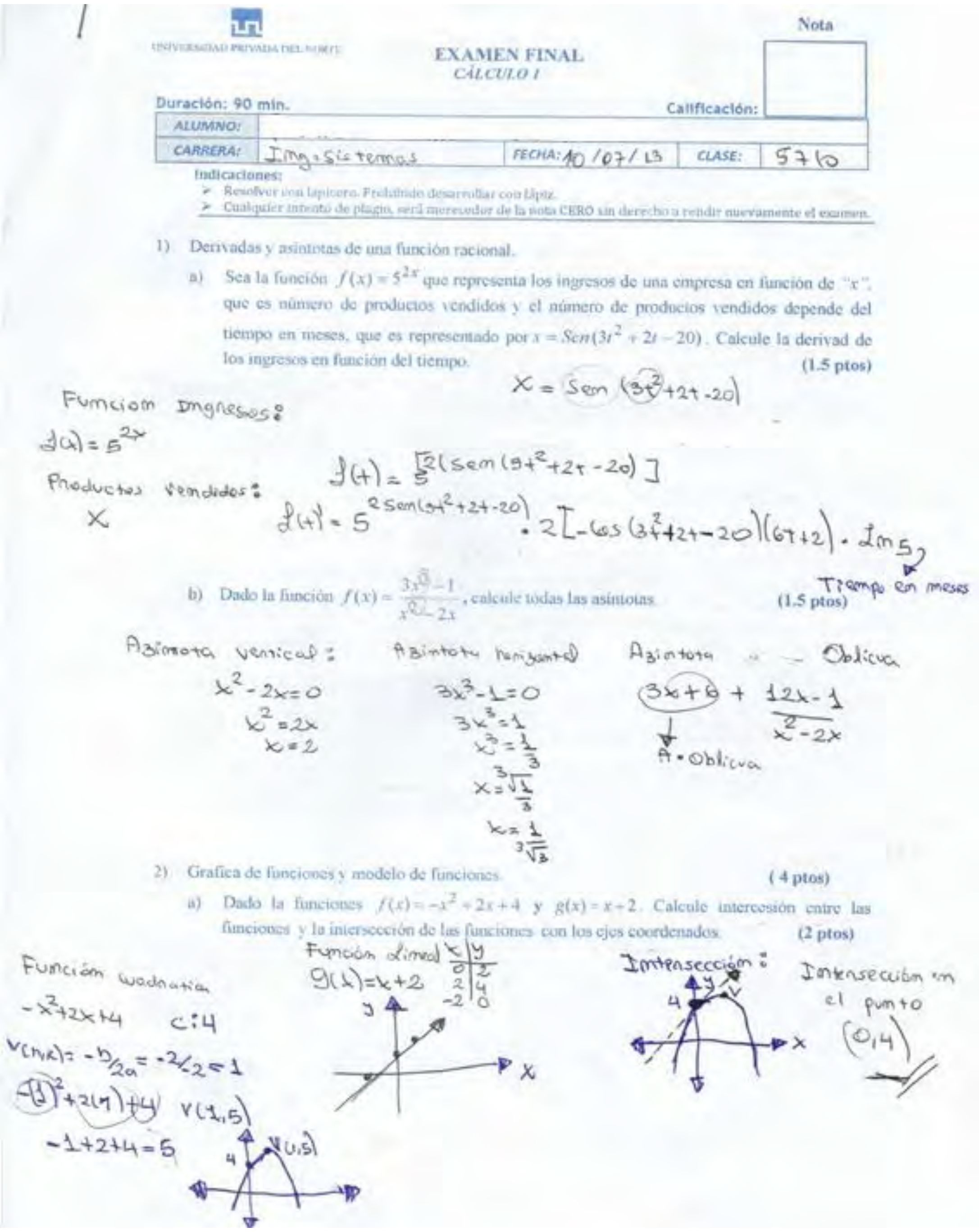
Villegas, J., Castro, E., Gutierrez,J. (2009). Representaciones en solución de problemas. Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Phychology*, 1696-2095Nº 17/ 7(1) ,279-308.

Núñez, N. (2012). Resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (*Tesis para obtener el grado de Magister en Enseñanza de La Matemática*). Pontificia Universidad Católica del Perú.

ANEXOS

- ANEXO 1:

Exámenes finales de los estudiantes E1, E2; E3 en curso de Cálculo 1.



UNIVERSIDAD PRIVADA DEL NORTE

EXAMEN FINAL

CÁLCULO I

Nota

Duración: 90 min. Calificación:

ALUMNO:					
CARRERA:	Ing. Sistemas	FECHA:	10 / 07 / 13	CLASE:	5710

Indicaciones:

- Resolver con lapicero. Prohibido desarrollar con lápiz.
- Cualquier intento de plagio, será merecedor de la nota CERO sin derecho a rendir nuevamente el examen.

1) Derivadas y asíntotas de una función racional.

a) Sea la función $f(x) = 5^{2x}$ que representa los ingresos de una empresa en función de "x", que es número de productos vendidos y el número de productos vendidos depende del tiempo en meses, que es representado por $x = Sen(3t^2 + 2t - 20)$. Calcule la derivad de los ingresos en función del tiempo. **(1.5 ptos)**

$x = Sen(3t^2+2t-20)$

Funcion Ingresos:

$f(x) = 5^{2x}$

Productos vendidos:

x

$f(t) = 5^{[2(sen(3t^2+2t-20)]}$

$f'(t) = 5^{2sen(3t^2+2t-20)} \cdot 2[-cos(3t^2+2t-20)(6t+2)] \cdot ln 5$

Tiempo en meses

b) Dado la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 1}{x^2 - 2x}$, calcule todas las asíntotas. **(1.5 ptos)**

Asintota vertical:

$x^2 - 2x = 0$

$x^2 = 2x$

$x = 2$

Asintota horizontal

$3x^3 - 1 = 0$

$3x^3 = 1$

$x^3 = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Asintota Oblicua

$(3x+6) + \dfrac{12x-1}{x^2-2x}$

A. Oblicua

2) Grafica de funciones y modelo de funciones. **(4 ptos)**

a) Dado la funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. **(2 ptos)**

Función cuadratica

$-x^2+2x+4$ c: 4

$V(h,k) = -b/2a = -2/-2 = 1$

$-(1)^2+2(1)+4$ V(1,5)

$-1+2+4 = 5$

Función lineal

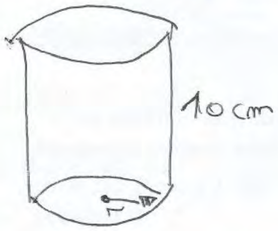
$g(x) = x+2$

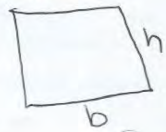
x	y
0	2
2	4
-2	0

Intersección:

Intersección en el punto (0,4)

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**





$f(c) = 10 \cdot 10$ $\quad b \cdot h$

$f(c) = 100$ centimos

Costo de cada envase

3) El peso de una persona varía según la altura en millas, medido desde la superficie de la tierra, el cual es modelado mediante la siguiente función $W(h) = 130\left(\dfrac{3960\,h}{3960\,h + h^2}\right)^2$. **(3 ptos)**

$w(h)' =$

$260 \cdot \left(\dfrac{3960h}{3960h+h^2}\right)\left[\dfrac{3960(3960h+h^2) - (3960h)(3960+2h)}{(3960h+h^2)^2}\right]$

a) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 100 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

$W(100) =$ Se aproximo a

-0.06092360856 su peso

b) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 1000 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

Se aproxima a

$-0{,}03341324771$

su peso

4) Calcular los siguientes límites: **(3 ptos)**

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 6 + x}{\sqrt{x^2+7} - 4} = \dfrac{x^2-6+x}{\sqrt{x^2+7}-4} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}$

$\dfrac{x^2+x-6\,(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2+7-16} = \dfrac{(x+3)(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2-9}$

$\dfrac{\cancel{(x+3)}(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$

$\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x-3)}$

$\dfrac{(-3-2)(\sqrt{9+7}+4)}{(-3-3)}$

$\dfrac{(-5)(4+4)}{-6} = \dfrac{-40}{-6} = \dfrac{20}{3}$ //

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x^2 - 6)(x+2)^6 + x}{x^8 + 4x^2 - 6x}$

$\dfrac{4x^8}{x^8}$

$\dfrac{\frac{4x^8}{x^8}}{\frac{x^8}{x^8}} = \dfrac{4}{1} = 4$ //

UNIVERSIDAD PRIVADA DEL NORTE

EXAMEN FINAL

CÁLCULO I

Nota

Duración: 90 min. Calificación:

ALUMNO:					
CARRERA:	Ing de sistema	FECHA: 08 / 07 / 13		CLASE:	

Indicaciones:

- Resolver con lapicero. Prohibido desarrollar con lápiz.
- Cualquier intento de plagio, será merecedor de la nota CERO sin derecho a rendir nuevamente el examen.

1) Derivadas y asíntotas de una función racional.

a) Sea la función $f(x) = 5^{2x}$ que representa los ingresos de una empresa en función de "x", que es número de productos vendidos y el número de productos vendidos depende del tiempo en meses, que es representado por $x = Sen(3t^2 + 2t - 20)$. Calcule la derivad de los ingresos en función del tiempo. **(1.5 ptos)**

$f(x) = 5^{2x}$ = ingresos

x = nº de productos vendidos

$f'(x) = 5^{2x}(2)\ln 5$.

$5^{2x}(2)\ln 5 = sen(3t^2+2t-20)$

$f(x) = 5^{2sen\,3t^2+2t-20)}$

$f'(x) = 5^{2 sen\,3t^2+2t-20} \cdot (2sen\,3t^2+2t-20)' \cdot \ln 5$

$f'(x) = 5^{2sen\,3t^2+2t-20} \cdot 2sen3t^2\,(cos\,6t+2)\ \ln 5$

b) Dado la función $f(x) = \dfrac{3x^3-1}{x^2-2x}$, calcule todas las asíntotas. **(1.5 ptos)**

$y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x^3-1}{x^2-2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-1}{x^3-2x^2}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3}} = \dfrac{3-0}{1-0}$

$\boxed{m = 3}$

ahora "n"

$n = \dfrac{3x^3-1}{x^2-2x} - 3x$

$n = 3x^3 - 1 - 3x^3 + 6x^2$

$n = 6x^2 - 1$

$\therefore\ 3x + \dfrac{6x^2-1}{x^2-2x}$

Asintota V: x^2-2x

$x(x-2) = 0$

$\boxed{x=0}$; $x-2=0$ $\boxed{x=2}$

Asint hor: $6x^2-1$

la recta es: $3x$

2) Grafica de funciones y modelo de funciones. **(4 ptos)**

a) Dado la funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. **(2 ptos)**

$f(x) = -x^2 + 2x + 4$

$h = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2(-1)} = 1$

$K = -(1)^2 + 2(1) + 4 = 5$

$\boxed{V = (1,5)}$

$Df = R$

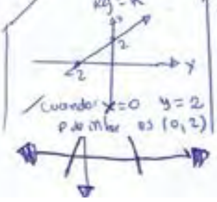
$Rf = \langle -\infty, 5]$

$g(x) = x + 2$

x	y
0	2
-2	0

$Dg = R$

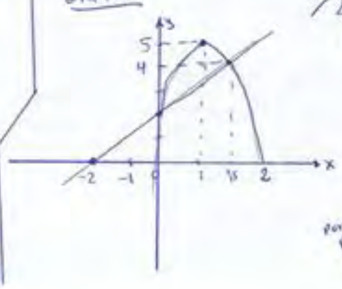
$Rg = R$



cuando $x=0$ $y=2$

p de inter es $(0,2)$

Gráfico



La intersección con el eje coordenados.

$(0,2)$ y $(1,5, 4)$

cuando $x = -2$

el punto de intersección es

$y = -2 + 2$

$y = 0$

para lo restado

cuando $x = 1,5$

$y = -(1,5)^2 + 2(1,5) + 4$

$y = 4,75$

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**

$r = cm = 10\,cm$ de altura.

$C(I) \times cm^2 = 10$ centimos

$U = I \cdot Ct$

$I = CV.(x)$ → $10(10)$ S/1 sol por $10\,cm^2$

El costo de cada envase es de 1 sol por $10\,cm^2$ por la ecuación lineal.

3) El peso de una persona varía según la altura en millas, medido desde la superficie de la tierra, el cual es modelado mediante la siguiente función $W(h) = 130\left(\dfrac{3960\,h}{3960\,h + h^2}\right)^2$. **(3 ptos)**

a) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 100 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

lim a 100 millas $x=0$

$\lim_{x \to 100} 130\left(\dfrac{3960h}{3960h+h^2}\right)^2 \quad \lim_{x\to 100} \dfrac{\frac{3960\,h^2}{3960\,h^2}}{\frac{3960\,h^2 + 3960\,h^2}{h^2}} = 40$ kilos. aproximad

b) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 1000 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

a 1000 millas $x=0$

$\lim_{x\to 1000} 130\left(\dfrac{3660(1000)}{3960(1000)+(1000)^2}\right)^2 = \lim_{x\to 1000} = 130$ kilos aproximado

4) Calcular los siguientes límites: **(3 ptos)**

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 6 + x}{\sqrt{x^2+7} - 4}$

$\lim_{x\to 3} \dfrac{(x^2-6+x)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)} = \dfrac{(x^2+x-6)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}$

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x^2+7-16)} = \dfrac{(x+3)(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x^2-9)} = \dfrac{\cancel{(x+3)}(x-2)(\sqrt{x^2+7}+4)}{\cancel{(x+3)}(x-3)}$

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+7}-4)}{(x-3)}$

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(-3-2)(4-4)}{(-3-3)}$

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(-5)(0)}{-6} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x^2 - 6)(x+2)^6 + x}{x^8 + 4x^2 - 6x}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(\frac{4x^8}{x^8} - \frac{6}{x^8}\right)\frac{x}{x^8} + \frac{2}{x^8} + \frac{x^8}{x^8}}{\frac{x^8}{x^8} + \frac{4x^2}{x^8} - \frac{6x}{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4}{1} = 4$

UNIVERSIDAD PRIVADA DEL NORTE

EXAMEN FINAL
CÁLCULO I

Nota

Duración: 90 min. Calificación:

ALUMNO:					
CARRERA:	Ing. de Sistemas	FECHA:	10/07/13	CLASE:	5710

Indicaciones:

- Resolver con lapicero. Prohibido desarrollar con lápiz.
- Cualquier intento de plagio, será merecedor de la nota CERO sin derecho a rendir nuevamente el examen.

1) Derivadas y asintotas de una función racional.

   a) Sea la función $f(x)=5^{2x}$ que representa los ingresos de una empresa en función de "x", que es número de productos vendidos y el número de productos vendidos depende del tiempo en meses, que es representado por $x=Sen(3t^2+2t-20)$. Calcule la derivad de los ingresos en función del tiempo. **(1.5 ptos)**

$f(x) = 5^{2x}$

$f(x) = 5^{2(Sen(3t^2+2t-20))}$

$f'(x) = 5^{2Sen(3t^2+2t-20)} \cdot 2'(Sen(3t^2+2t-20)) + 2\,Cos(3t^2+2t-20) \cdot \ln 5$

$f'(x) = 5^{2Sen(3t^2+2t-20)} \cdot 2\,Cos(3t^2+2t-20) \cdot \ln 5$

   b) Dado la función $f(x)=\dfrac{3x^3-1}{x^2-2x}$, calcule todas las asintotas. **(1.5 ptos)**

$A\theta = 3x+6 \quad \dfrac{12x-6}{x^2-2x}$

$Av = x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=2$

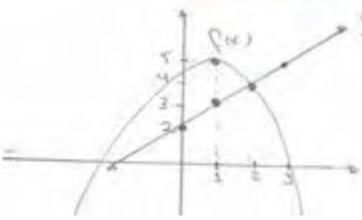
$x=0$

$Av=0$

$Av=2$

2) Grafica de funciones y modelo de funciones. **(4 ptos)**

   a) Dado la funciones $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x+2$. Calcule intercesión entre las funciones y la intersección de las funciones con los ejes coordenados. **(2 ptos)**



$f(x) + g(x)$

$f(x)+g(x) = -x^2+2x+4+x+2$

$f(x)+g(x) = -x^2+3x+6$

Dom $= \mathbb{R}$

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Dom $g(x) = \mathbb{R}$

b) Una empresa dedicada a la fabricación de envases para conservas de atún, como se muestra en la imagen. Si el envase es de forma cilíndrica de r cm de radio y 10 cm de altura, además se sabe que el costo por centímetro cuadrado es 10 céntimos. Determine un modelo matemáticos que represente al costo de cada envase. **(2 ptos)**

$h = 10$

Costo Área = 1

$V = \pi r^2 . h$

$V = \pi . r^2 . 10$

$V = 10\pi r^2$

$C(V) = 10\pi r^2$

3) El peso de una persona varía según la altura en millas, medido desde la superficie de la tierra, el cual es modelado mediante la siguiente función $W(h) = 130\left(\dfrac{3960\,h}{3960\,h + h^2}\right)^2$. **(3 ptos)**

a) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 100 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

$W'(h) = \dfrac{520(3960h^2)}{(3960h+h^2)^2} \to h = 100 \to W'(100) = \dfrac{520(3960(100)^2)}{[3960(100)+(100)^2]^2} = 0{,}12$ se aproxima su peso

b) ¿Cuándo la altura de aprtoxima a 1000 millas sobre la tierra a que valor se aproxima su peso?

$W'(h) = \dfrac{520(3960h^2)}{(3960h+h^2)^2} \to h = 1000 \to W'(1000) = \dfrac{520(3960(1000)^2}{[3960(1000)+(1000)^2]^2} = 0{,}08$ se aproxima su peso

4) Calcular los siguientes límites: **(3 ptos)**

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 6 + x}{\sqrt{x^2+7} - 4} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x^2+7) - 16}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x^2 - 6)(x+2)^6 + x}{x^8 + 4x^2 - 6x} = \infty$

- ANEXO 2:

Guías conteniendo las actividades que desarrollaron los estudiantes participantes en esta investigación.

UNIVERSIDAD PRIVADA DEL NORTE

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Duración: 100 min.

CURSO:		*FECHA:* / /	*CLASE*	

Datos Generales del estudiante:				
Apellidos y nombres				
Carrera			Edad	
Colegio de procedencia	Estatal	Particular	Religioso	Militar
	Distrito	Provincia	Departamento	
	Año en el que culminó la secundaria			
Modalidad de Ingreso a la Universidad Privada del Norte:		Admisión	PDN	Traslado externo
Solo para los de traslado externo o los que tienen otros estudios y convalidaron cursos				
Institución de Procedencia	Carrera	Cursos de matemática convalidados		
Tiempo de preparación para ingresar a la Universidad:				
sin preparación	de 1 a 3 meses	De 4 a 6 meses	De 6 meses a más	
En relación a los problemas de optimización justifique cada respuesta				
No me enseñaron	Me enseñaron y no lo aprendí	Me enseñaron y lo aprendí		

INDICACIONES GENERALES:

A continuación se le proporciona tres problemas de optimización de funciones reales de una variable, los que serán resueltos de forma individual solo usando lápiz y evitando borrones. Este trabajo será considerado como parte de una investigación científica en aras de mejorar la enseñanza y aprendizaje de dichos problemas, por lo que le pedimos que demuestre la seriedad del caso y que haga su máximo esfuerzo.

Actividad Nº 1:

Un estudiante de ingeniería está interesado en construir un tanque de máxima capacidad debajo del primer plano inclinado de la escalera de su casa. Para tal efecto obtiene las medidas las cuales se muestran en la (Figura 1). Dicho tanque debe tener la forma de un paralelepípedo rectangular recto donde una de sus aristas debe tener longitud igual al ancho de la escalera (100 cm).

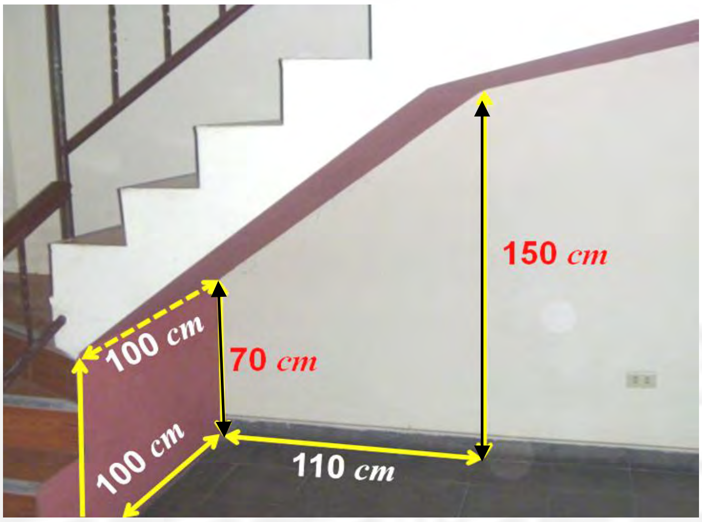


Figura n°1: Imagen de la escalera

Fuente: Propia

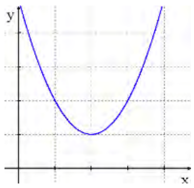
Indicaciones: Sólo con el uso de lápiz conteste las siguientes interrogantes:

1) A partir del enunciado, relacione con variables las aristas desconocidas del paralelepípedo y explique con sus propias palabras qué tendrá que hacer para hallar el volumen máximo de dicho tanque.
2) Escriba una expresión algebraica que determine las restricciones del problema.
3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función que se tendrá que optimizar.

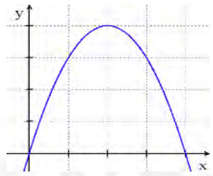
4) Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.

5) Cuál cree que sería la forma del gráfico correspondiente a la función obtenida en el paso anterior.

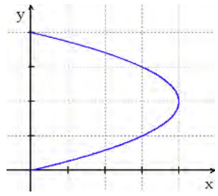
a)



b)



c)



Justifique su respuesta verbalmente:

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

6) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso 4.

7) Cuál es el valor máximo de dicha función.

8) Represente gráficamente el modelo matemático obtenido para la función.

9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.

10) Cuáles deben ser las dimensiones del paralelepípedo para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo.

<u>Actividad Nº 2</u>:

En el curso de dibujo técnico, el profesor les encarga a sus estudiantes la siguiente tarea: Considerar una hoja rectangular ABCD de lados *a* y *b*, $0 < a \leq b$ (Figura 2). De tal manera que al doblar la hoja, el vértice B "caiga" sobre el lado opuesto AD en el punto B´ formando el triángulo rectángulo PAB´ (P es el punto de doblez del lado AB) cuya área sea la mayor posible.

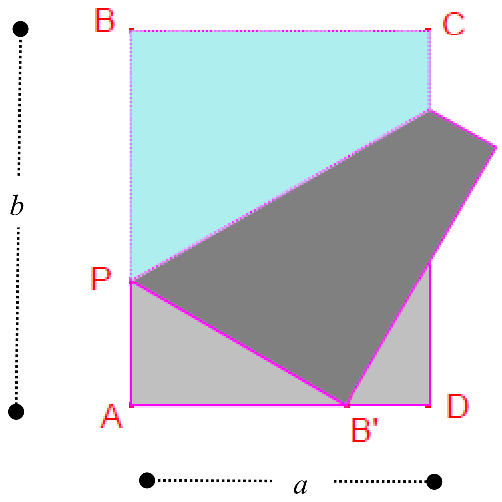


Figura n° 2: Imagen de la Hoja rectangular

Indicaciones: Sólo con el uso de lápiz conteste las siguientes interrogantes:

1) A partir del enunciado, relacione con variables los lados desconocidos del triángulo rectángulo PAB´.
2) Escriba una expresión algebraica que relacione los tres lados del triángulo rectángulo PAB´.
3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función área del triángulo rectángulo PAB´.
4) Qué tipo de función real de una variable obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.
5) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior.
6) Cuál es el valor máximo de dicha función.
7) Cuáles deben ser las dimensiones del triángulo rectángulo PAB´ para que su área sea la mayor posible y cuál es el área máxima.
8) En el caso particular para: $a = b = 6$, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 4.

9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.

<u>Actividad Nº 3</u>:

Un estudiante de arquitectura observa que los granos en reposo (maíz, arroz, frijol, etc.) de manera natural forman una figura cónica regida por propiedades físicas. A raíz de esta situación está motivado en diseñar un silo para almacenar grandes cantidades de granos. El silo a diseñar debe tener altura H y constituido por una parte inferior cilíndrico y la parte superior de forma cónica similar al que se muestra en la figura 5. La parte inferior debe ser un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H igual al del silo ($H > 2R$) de tal manera que el volumen de dicho cilindro sea el máximo.

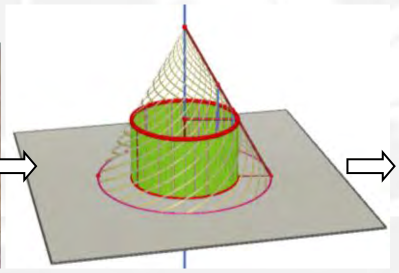




Figura 3 Figura 4 Figura 5

Indicaciones: Sólo con el uso de lápiz conteste las siguientes interrogantes:

1) A partir del enunciado, relacione con variables la altura y radio del cono, así como la altura y generatriz del cilindro inscrito en el cono circular recto.
2) Halle la relación entre la altura y radio del cono con la altura y generatriz del cilindro.

3) Halle el modelo matemático correspondiente a la función volumen del cilindro circular recto inscrito en el cono.

4) Qué tipo de función real de una variable se obtuvo en el paso anterior y cuál es el dominio de dicha función.

5) En qué punto alcanza su valor máximo la función obtenida en el paso anterior.

6) Cuál es el valor máximo de dicha función.

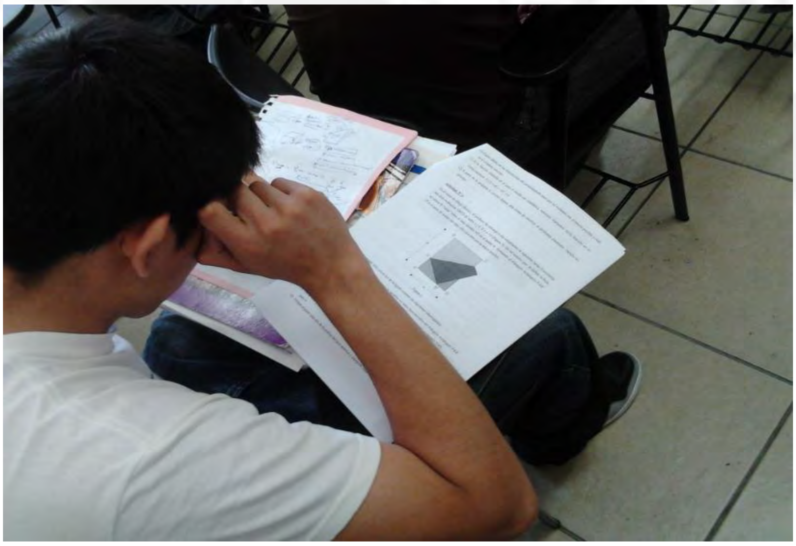
7) Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro circular recto inscrito en el cono para que su volumen sea el mayor posible y cuál es el volumen máximo del cilindro.

8) En el caso particular par H=12m y R=5m, represente gráficamente el modelo matemático obtenido en el paso 4.

9) Ubique el punto más alto de la gráfica del paso anterior e interprete cada una de sus coordenadas.

- ANEXO 3:

Fotos de los estudiantes que participaron en la investigación.



- ANEXO 4:

Sílabo del curso de Cálculo 1 de la UPN.

UNIVERSIDAD PRIVADA DEL NORTE

SÍLABO DEL CURSO DE CÁLCULO 1

I. INFORMACIÓN GENERAL:	
1.1 Facultad:	Arquitectura y Diseño Ingeniería
1.2 Carrera Profesional:	Arquitectura y Urbanismo Arquitectura y Gerencia de Proyectos Ingeniería Ambiental Ingeniería Civil Ingeniería Empresarial Ingeniería Industrial Ingeniería Mecatrónica Ingeniería Minas Ingeniería de Sistemas Computacionales
1.3 Departamento:	Ciencias
1.4 Requisito:	Matemática básica (1° Ciclo)
1.5 Periodo Lectivo:	Semestre 2013 - 1
1.6 Ciclo de Estudios:	2
1.7 Inicio – Término:	25 de Marzo al 21 de Julio del 2013
1.8 Extensión Horaria:	7H (5 HC y 2H NP)
1.9 Créditos:	4
1.10 Equipo Docente:	Carlos Piedra ; Rocío López, Karla Pérez, Elías Mejía, Elmer Marquina, Hugo Flores, Alberto Morales, Juan Broncano, Ada Aguilar, Ernaldo Caruajulca.

II. SUMILLA:

El curso contribuye a desarrollar en el estudiante habilidades para obtener modelos matemáticos, gráficas y optimizaciones. El curso es de naturaleza teóricapráctica. Los principales temas son: Funciones, Límites, Continuidad y Cálculo Diferencial (Derivada y Aplicaciones)

III. LOGRO DEL CURSO

Al finalizar el curso, el estudiante resuelve problemas utilizando el análisis de funciones y el cálculo diferencial, aplicados a situaciones diversas en forma individual y grupal.

IV. UNIDADES DE APRENDIZAJE

Nombre de Unidad I: Funciones reales de variable real					
Logro de Unidad: Al finalizar la unidad, el estudiante analiza el comportamiento de funciones graficándolas en el plano cartesiano, determinando su ley de formación y resolviendo problemas vinculados a ingeniería y gestión.					
Semana	**Contenidos**				
	Saberes Básicos	**Actividades de Aprendizaje**		**Recursos**	**Evaluación (criterios de evaluación)**
		Horas Presenciales	**Horas No Presenciales**		
1	• Funciones: definición, dominio y rango • Funciones elementales: lineal, cuadrática y raíz cuadrada.	• Los estudiantes responden preguntas impartidas por el docente. • Los estudiantes, mediante grupos de trabajo, resuelven ejercicios y problemas. • Utilizan algún software matemático para realizar el trazo de diversas funciones.	• Uso del aula virtual.	• Hoja de trabajo • PPTs • Aula virtual	• Participación en clase (oral o escrita).
2	• Funciones elementales: racional, función definida por trozos y valor absoluto.	• Participación activa de los estudiantes. • Se organizan en equipos de trabajo para resolver ejercicios y problemas, con asesoramiento del docente. • Desarrollan en forma individual la práctica calificada sobre el análisis de funciones.	• Uso del aula virtual. • Grafican funciones usando software. • Resolución de la práctica calificada.		• Participación en clase (oral o escrita). • Práctica calificada

3	• Funciones elementales: exponenciales y logarítmica • Funciones Trigonométricas: Seno, coseno y tangente.	• Los estudiantes responden preguntas impartidas por el docente. • Resolución de ejercicios y problemas en forma grupal. • Se organizan en equipos de trabajo para resolver casos con el asesoramiento del docente.	• Uso del aula virtual. • El alumno resuelve la autoevaluación del T1 en el aula virtual	• Proyector multimedia • Software matemático • Pizarra y plumones	• Participación en clase (oral o escrita). • Presentación de un informe solución de un caso de estudio de acuerdo a los criterios de la rúbrica.
4	• Operaciones con funciones: adición, sustracción, multiplicación y división	• Resuelven ejercicios y problemas en forma grupal. • Desarrollan en forma individual el examen de conocimientos (T1).	• Uso del aula virtual • Resolución del examen T1.	• Hoja de trabajo • PPTs • Aula virtual • Proyector multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita). • Examen T1.

Evaluación: (T1): EE (0.40), PC (0.20), PDC (0.20), P (0.20)
Examen escrito (EE), Práctica Calificada (PC), Problema de casos (PDC), Participaciones en clases (P)

5	• Composición de funciones. • Modelos matemáticos aplicados a la ingeniería, arquitectura y gestión empresarial	• Los estudiantes responden preguntas impartidas por el docente • Resuelven ejercicios y problemas en forma individual o grupal.	• Uso del aula virtual	• Hoja de trabajo • PPTs • Aula virtual • Proyector multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita).

Nombre de Unidad II: Límites y continuidad de una función

Logro de Unidad:
Al finalizar la unidad, el estudiante analiza el comportamiento de funciones a partir de límites y continuidad.

Semana	Contenidos			Recursos	Evaluación (criterios de evaluación)
	Saberes Básicos	Actividades de Aprendizaje			
		Horas Presenciales	Horas No Presenciales		
6	• Cálculo algebraico del límite	• Los estudiantes	• Uso del aula	• Hoja de	

	de una función • Cálculo de Límites: laterales y al infinito	responden preguntas impartidas por el docente • Resuelven ejercicios y problemas en forma individual o grupal.	virtual. • Uso de la Biblioteca.	trabajo • PPTs • Aula virtual • Proyector multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita).
7	• Continuidad de una función • Asíntotas de una función: horizontales, verticales y oblicuas	• Los estudiantes responden preguntas impartidas por el docente • Resuelven ejercicios en forma individua o grupal. • Los estudiantes se organizan en equipos de trabajo para resolver problemas de casos con asesoramiento del docente.	• Uso del aula virtual. • Uso de la Biblioteca. • El alumno resuelve la autoevaluación del Examen parcial en el aula virtual		• Participación en clase (oral o escrita). • Presentación de un informe con la solución de un caso de estudio de acuerdo a los criterios de la rúbrica.

Nombre de Unidad III: Derivada de una función
Logro de Unidad: Al finalizar la unidad, el estudiante resuelve problemas usando el cálculo, la interpretación geométrica e la interpretación física de la razón de cambio de una función.

Semana	**Contenidos**				
	Saberes Básicos	**Actividades de Aprendizaje**		**Recursos**	**Evaluación (criterios de evaluación)**
		Horas Presenciales	**Horas No Presenciales**		
8	• Derivada de una función: definición • Interpretación geométrica	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Resuelven ejercicios en forma • individual o grupal.	• Uso del aula virtual	• Hoja de trabajo. • PPTs	• Participación en clase (oral o escrita).
EXAMEN PARCIAL: Examen Escrito individual					
9	• Interpretación como razón instantánea de cambio de una función. • Reglas de derivación	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Resuelven ejercicios en forma individual	• Uso del aula virtual	• Aula virtual	• Participación en clase (oral o escrita). • Presentación del informe de planificación del trabajo de

		o grupal.			aplicación final(IP)
10	• Regla de la cadena • Recta tangente y normal a la curva en un punto	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Resuelven ejercicios en forma individual o grupal. • Desarrollan en forma individual la práctica calificada de derivadas.	• Uso del aula virtual. • Resolución de la práctica calificada. • El alumno resuelve la autoevaluación del T2 en el aula virtual	• Proyector multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita). • Práctica calificada.
11	• Derivadas implícitas y problemas de aplicación	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Los estudiantes, en forma individual, resuelven ejercicios y problemas (T2).	• Uso del aula virtual • Uso de la biblioteca. • Resolución del examen T2	• Hoja de trabajo • PPTs • Aula virtual • Proyector Multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita). • Examen de conocimientos (T2).

Evaluación: (T2): EE (0.40), PC (0.20), PDC (0.20), P (0.20)
Examen escrito (EE), Práctica Calificada (PC), Problema de casos (PDC), Participaciones en clases (P)

Unidad IV: Aplicaciones de la derivada

Logro de Unidad: Al finalizar la unidad, el estudiante determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, analizando los máximos y mínimos. Aplica objetivamente estos conocimientos resolviendo problemas de aplicación sobre optimizaciones.

Semana	**Contenidos**				
	Saberes Básicos	**Actividades de Aprendizaje**		**Recursos**	**Evaluación (criterios de evaluación)**
		Horas Presenciales	**Horas No Presenciales**		
12	• Funciones crecientes y decrecientes en un intervalo • Valores máximos y mínimos locales de una función	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Resuelven ejercicios en forma individual o grupal.	• Uso del aula virtual.	• Hoja de trabajo	• Participación en clase (oral o escrita).
13	• Intervalos de concavidad y puntos de inflexión • Gráfica de una función	• Participan en clase en forma oral o escrita. • Los estudiantes se organizan en equipos de trabajo para resolver	• Uso del aula virtual • Uso de la	• PPTs • Aula virtual	• Participación en clase (oral o escrita). • Presentación del informe del trabajo en

		ejercicios y problemas con asesoramiento del docente.			equipo.
14	• Problemas de Optimización • **Práctica Calificada**	• Participan en clase en forma oral o escrita • Resuelven ejercicios en forma individual o grupal. • Desarrollan en forma individual ejercicios y problemas de la práctica calificada.	• Uso del aula virtual. • Uso de la biblioteca. • Resolución de la práctica calificada.	• Proyector multimedia • Pizarra y plumones.	• Participación en clase (oral o escrita). • Práctica calificada.
15	• Proyecto de aplicación de fin de curso (PA)	• Presentan y sustentan los trabajos de aplicación de fin de curso.	• Uso del aula virtual. • El alumno resuelve la autoevaluación del Examen Final en el aula virtual.		• Participación en clase (oral o escrita). • Presentación del informe final del trabajo de aplicación del curso de acuerdo a los criterios de la rúbrica (IF) • Exposición del trabajo de aplicación de acuerdo a los criterios de la rúbrica (E).
Evaluación: (T3): IP(0.20), IF (0.30), E (0.30), PC (0.20) Informe Preliminar (IP), Informe Final (IF), Exposición (E), Práctica Calificada (PC)					
16	**EXAMEN FINAL**				
17	**EXAMEN SUSTITUTORIO**				

V. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS:

El curso de cálculo 1 se desarrolla a través de metodologías activas, donde el rol del docente es un facilitador del aprendizaje. Entre las metodologías y técnicas a utilizar se tienen las siguientes:

Metodologías	Técnicas
• Estudio de casos. • Aprendizaje colaborativo. • Trabajo en equipo	• Desarrollo de prácticas grupales. • Participación activa en clase. • Actividades en aula virtual - Argos

VI. SISTEMA DE EVALUACIÓN DEL CURSO:

Es obligatoria la asistencia a un mínimo del 70% de las clases teóricas y prácticas programadas. El alumno que no cumpla con este requisito quedará automáticamente **<u>inhabilitado en el curso</u>** y como consecuencia de ello, desaprobará. El alumno que no esté presente al llamado de lista será considerado ausente. El cómputo de la asistencia se realiza desde el primer día de clases.

El sistema de evaluación mide el logro de determinados objetivos (contenidos), para lo cual contempla dos tipos de prueba: exámenes parciales y evaluación T. Los parciales son dos (a mitad y final del ciclo) y evalúan los contenidos conceptuales del curso. No es posible la recuperación de ninguna nota parcial de la evaluación continua, bajo ningún concepto.

El cronograma de la evaluación continua del curso es el siguiente:

ESPECIFICACIÓN DE ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN CONTINUA EN EL CURSO		
T	**Descripción**	**Semana**
T1	• Funciones. Gráficas, dominio y, rango y problemas de aplicación.	4
T2	• Límites y continuidad de funciones, y derivada de una función y problemas de aplicación	11
T3	• Aplicaciones de la derivada y sustentación del proyecto de fin de curso.	15

ESPECIFICACIÓN DE ACTIVIDADES PARA LAS EVALUACIONES: PARCIAL Y FINAL		
	Descripción	**Semana**
PARCIAL	Se evaluará los temas que se realizaron en las ocho primeras semanas.	8
FINAL	Se evaluará los temas que se realizaron desde la primera semana hasta la semana quince.	16

Los pesos ponderados de los resultados de evaluación son los siguientes:

EVALUACIÓN	PESO (%)	ESCALA VIGESIMAL
PARCIAL	20	4
CONTINUA (Ts)	60	12
FINAL	20	4
TOTAL	**100%**	**20**

La **evaluación sustitutoria** evalúa toda la temática desarrollada en el semestre y se rinde la semana consecutiva al término de los exámenes finales y su nota reemplazará, necesariamente, a la nota de un Examen (Parcial o Final) o a la nota de un T, de tal manera que el resultado final sea favorable al alumno.

VII. BIBLIOGRAFÍA:

1. Bibliografía Básica

#	CÓDIGO UPNT	CÓDIGO UPNC	CÓDIGO UPNL	AUTOR	TITULO	EDITORIAL	AÑO
1	515 NEUH	515 NEUH	515 NEUH	Neuhauser, Claudia	Matemática para Ciencias	Pearson Educación	2004
2	515.3 PITA	515.3 PITA	515.3 PITA	Pita Ruiz, Claudio	Cálculo de una variable	Prentice Hall	1998
3	515 TÉBA	515 TÉBA	515 TÉBA	Tébar Flores, Emilio	Problemas de cálculo Infinitesimal	Tébar	2005
4	515 HUDH	515 HUDH	515 HUDH	Hudhes – Hallett, Deborah	Cálculo Aplicado	Continental	2004
5	515.15 LARS	515.15 LARS 2002	515.15 LARS	Larson, Ron / Hostetler, Robert / Edwards, Bruce	Cálculo.	McGraw-Hill	2006
6	515.33 BENÍ	515.33 BENÍ	515.33 BENÍ	Benítez López, René	Cálculo diferencial para ciencias básicas e ingeniería.	Trillas	1997
7	510 HARS	510 HARS	510 HARS	Harshbarger, Ronald J.	Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales.	McGraw-Hill	2005
8	519 BUDN 2007	510 BUDN 2007	519 BUDN 2007	Budnick, Frank S.	Matemáticas Aplicadas para la administración, economía y ciencias sociales.	McGraw-Hill	2007

2. Bibliografía Complementaria

#	CÓDIGO UPNT	CÓDIGO UPNC	CÓDIGO UPNL	AUTOR	TITULO	EDITORIAL	AÑO
9	515 ARYA 2002	515 ARYA2002	515 ARYA2009	Arya, Jagdish / Lardner, Robin	Matemáticas aplicadas a la Administración y la Economía.	Pearson Educación	2009
10	510 HAEU/M	510 HAEU/M 2008	510 HAEU/M 2008	Haeussler, Ernest / Richard, Paul.	Matemática para Administración y Economía.	Pearson Educación	2008
11	515 HOFF/C 2006	515 HOFF/C 2006	515 HOFF/C 2006	Hoffmann, Laurence Bradley, Gerald	Calculo aplicado a la Administración, economía y Ciencias Sociales.	McGraw-Hill	2006
12	515 BITT	515 BITT	515 BITT	Bittinger, Marvin L	Cálculo para ciencias Económico–Administrativas.	Pearson Educación	2002
13	510 TAN	510 TAN	510 TAN		Matemática Para Administración y Economía.	Thompson	2005

3. Páginas Web para consultar en Internet

RELACIONES Y FUNCIONES

- http://www.escolar.com/menumate.htm
- http://elcentro.uniandes.edu.co/cr/mate/estructural/libro/estructural/node21.html
- http://www.fi.uba.ar/materias/61107/Apuntes/Rel00.pdf

LíMITE Y CONTINUIDAD

- http://euler.us.es/~renato/clases/eam2002-3/node24.html
- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/39-1-u-continuidad.html

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

- http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas4.htm
- http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m3ap02/apm3_27e_Derivadas.php

APLICACIONES DE LA DERIVADA

- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0295-01/punto5/punto5.html http://docencia.udea.edu.co/ingenieria/calculo/pdf/4_10_1.pdf

VIII. ANEXOS

Competencias Genéricas UPN	
Competencias	**Descripción**
1. Liderazgo	Inspira confianza en un grupo, lo guía hacia el logro de una visión compartida y genera en ese proceso desarrollo personal y social.
2. Trabajo en Equipo	Trabaja en cooperación con otros de manera coordinada, supera conflictos y utiliza sus habilidades en favor de objetivos comunes.
3. Comunicación Efectiva	Intercambia información a través de diversas formas de expresión y asegura la comprensión mutua del mensaje.
4. Responsabilidad Social	Asegura que sus acciones producirán un impacto general positivo en la sociedad y en la promoción y protección de los derechos humanos.
5. Pensamiento Crítico	Analiza e Interpreta, en contextos específicos, argumentos o proposiciones. Evalúa y argumenta juicios de valor.
6. Aprendizaje Autónomo	Busca, identifica, evalúa, extrae y utiliza eficazmente información contenida en diferentes fuentes para satisfacer una necesidad personal de nuevo conocimiento.
7. Capacidad para Resolver Problemas	Reconoce y comprende un problema, diseña e implementa un proceso de solución y evalúa su impacto.