

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO**



**FUNCIÓN LINEAL: UNA APROXIMACIÓN POR MEDIO DE LOS
REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS CON
ESTUDIANTES DE NIVEL SECUNDARIO**

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADO POR:

CHACÓN GORA, ALEX FRANCY

Asesora:

MG. REAÑO PAREDES, CAROLINA RITA

Miembros del jurado:

Dra. Flores Salazar, Jesús Victoria

Mg. Neira Fernández, Verónica

Mg. Reaño Paredes, Carolina Rita

San Miguel, 2017

Dedicatoria

A Dios, por permitirme vivir esta experiencia inolvidable, por darme fuerzas en todo momento.

A mi mamá Teresa, por su lucha constante para sacarnos adelante.

A mi papá Alejandro (QEPD), por apoyarme desde donde se encuentre.

A mi hija Sami, por haberla descuidado y prometo que recuperaremos el tiempo perdido.

A mi hermana Nidia, por su invaluable apoyo, ya que sin ella no hubiese sido posible realizar la maestría.

A mis hermanos Jerry y Zelmira, y a todos los que me apoyaron directa o indirectamente en la culminación de mis estudios y en la elaboración de esta tesis.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme salud y permitirme vivir esta experiencia maravillosa de estudiar en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Agradezco a toda mi familia por su apoyo incondicional, y levantarme la moral en los momentos más difíciles en esta etapa de mi vida.

Un agradecimiento especial, a mi asesora Mg. Carolina Rita, Reaño Paredes, ya que gracias a su valioso aporte fue posible la elaboración de la presente tesis, por su apoyo constante y sobre todo por las palabras de aliento para continuar adelante.

A la Dra. Jesús Flores, por sus sugerencias, observaciones, correcciones y apoyo en todo momento al pedirle una orientación.

A la Mg. Verónica Neyra, por sus aportes y sugerencias hacia mi trabajo para poder mejorarlo.

A todos los profesores de la maestría de la Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus enseñanzas, consejos y sugerencias que hicieron que mejore en mi práctica docente.

A todos mis compañeros de la maestría por su valioso apoyo en los momentos difíciles en el tiempo que estudiamos juntos.

Finalmente a todos los estudiantes de la institución Educativa “Nuestra Señora de Lourdes” que participaron en el desarrollo de la presente investigación, por su paciencia, por su interés, por su ánimo mostrado durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar si una secuencia de actividades favorece la aproximación al concepto de función lineal diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, en estudiantes de secundaria de una Institución Educativa pública en Lima (Perú).

Para este trabajo, hemos revisado antecedentes de investigación, los cuales tienen como objeto matemático a la función lineal. Estos nos han servido para diseñar nuestras actividades a partir de las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan al estudio de la función lineal. Como marco teórico, hemos tomado aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), los cuales brindan elementos necesarios para comprender cómo se aproximan a la noción de función lineal, la metodología empleada para alcanzar el objetivo general de nuestra investigación, por ser cualitativa experimental, son aspectos de la Ingeniería Didáctica. Para realizar el análisis, hemos seleccionado, de forma aleatoria, a dos estudiantes que participaron en las tres actividades.

Respecto a la experimentación y análisis de los resultados, elaboramos y aplicamos una secuencia de tres actividades: la primera y segunda actividad constan de tres preguntas; la tercera, de seis. Estas fueron elaboradas con la intención de que los estudiantes transiten por los diversos registros de representación semiótica y se aproximen a la noción de función lineal. Los resultados conseguidos nos muestran que María logró transitar por los siguientes registros de representación semiótica: lengua natural, numérico, algebraico y gráfico, con lo cual creemos que ella se aproximó a la noción de función lineal; en cambio, Juan tuvo dificultades en comprender el propósito de algunas preguntas, en realizar la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico y en explicar y justificar sus respuestas en lenguaje natural.

Finalmente, creemos que la primera pregunta de la segunda y tercera actividad jugaron un papel importante para el logro de nuestros objetivos y nos permitió, en primer lugar, identificar los tratamientos y conversiones que realizan los estudiantes y, en segundo lugar, pudimos distinguir cómo va surgiendo la noción de función lineal en ellos: el marco teórico de la TRRS nos permitió explicar cómo se lleva este proceso.

Palabras clave: Función Lineal, Registro de representación semiótica, conversiones, Registro de Lengua Natural.

ABSTRACT

The present research aims to analyze if a sequence of activities favors the approximation to the concept of linear function designed based on the Theory of Semiotic Representation Records in high school students of a Public Educational Institution in Lima Peru.

For this work, we have reviewed a research background which has as a mathematical object the linear function, which has served us to design our activities based on the difficulties that students face when confronted in the study of linear function. For this work we have taken as theoretical framework aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS) which provides us with the necessary elements to understand how the approach to linear function is approached, the methodology used to achieve the general objective of our Research, being experimental qualitative, are aspects of Didactic Engineering. To perform the analysis we selected two students randomly, who participated in the three activities.

Regarding the experimentation and analysis of the results, we elaborate and apply a sequence of three activities: the first and second activity consist of three questions, the third activity consists of six questions. These were elaborated with the intention that the students transit through the diverse registers of semiotic representation and approach the notion of linear function. The results obtained show that Maria managed to transit through the following registers of semiotic representation: natural, numerical, algebraic and graphical language, with which we believe that Mary approached the notion of linear function, but Juan had difficulties in understanding the purpose Of some questions, in the conversion of the natural language register to the algebraic register and in explaining and justifying their responses in natural language.

Finally, we believe that the first question, of the second and third activity, played an important role in the achievement of our objectives, and allowed us to first identify the treatments and conversions that the students perform, and secondly we were able to distinguish how the Notion of linear function in them, and the theoretical framework of the TRRS, allowed us to explain how this process is carried out.

Keywords: Linear Function, Semiotic Representation Record, Conversions, Natural Language Record.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Registros de representación semiótica para el objeto: función lineal $f(x)=2460x+3000$	25
Figura 2: Problema de función afín.....	35
Figura 3: Gráfico de la función afín.....	36
Figura 4: Función lineal.....	37
Figura 5: Teorema Fundamental de la proporcionalidad.....	37
Figura 6. Capacidades e indicadores de función lineal. Segundo año de secundaria.....	38
Figura 7. Estándares Nacionales del Perú Cambio y Relaciones VI Ciclo.....	38
Figura 8: Matriz; Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.....	39
Figura 9: Lectura de motivación.....	40
Figura 10: Situación problemática número uno.....	41
Figura 11: Situación problemática número dos.....	41
Figura 12: Definición de función lineal y función lineal afín.....	42
Figura 13: Ejercicios resueltos de función lineal y función lineal afín.....	43
Figura 14: Descripción de las actividades de investigación.....	47
Figura 15: Actividad N°1, pregunta 1 producción de María.....	54
Figura 16: Actividad N°1, pregunta 2 producción de María.....	55
Figura 17: Actividad N°1, pregunta N°3, producción de María.....	56
Figura 18: Actividad N°1, pregunta 1 producción de Juan.....	58
Figura 19: Actividad N°1, pregunta 3 producción de Juan.....	59
Figura N°20: Actividad N°2. “Limpiemos y llenemos de agua la piscina”.....	60
Figura 21: Actividad N°2, pregunta N°1, trabajo de María.....	65

Figura 22: Actividad N°2, pregunta N°1, trabajo de María.....	66
Figura 23: Actividad N°2, pregunta N°1, trabajo de María.....	66
Figura 24: Actividad N°2, pregunta 2, trabajo de María.....	67
Figura 25: Actividad N°2, pregunta 3, trabajo de María.....	68
Figura 26. Actividad N°2, pregunta N°1, producción de Juan.....	69
Figura 27. Actividad N°2, pregunta N°1, producción de Juan.....	69
Figura 28. Actividad N°2, pregunta N°1, producción de Juan.....	70
Figura 29. Actividad N°2, pregunta 2, producción de Juan.....	70
Figura 30. Actividad N°2, pregunta 3, producción de Juan.....	71
Figura 31: Actividad N°3.....	72
Figura 32: Actividad N°3, pregunta N°1, trabajo de María.....	81
Figura 33: Actividad N°3, pregunta N°1, trabajo de María.....	82
Figura 34: Actividad N°3, pregunta N°1, trabajo de María.....	83
Figura 35: Actividad N°3, pregunta N°2, trabajo de María.....	84
Figura 36: Actividad N°3, pregunta N°3, trabajo de María.....	85
Figura 37: Actividad N°3, pregunta N°3, trabajo de María.....	85
Figura 38: Actividad N°3, pregunta N°4, trabajo de María.....	86
Figura 39: Actividad N°3, pregunta N°5, trabajo de María.....	87
Figura 40: Actividad N°3, pregunta N°5, trabajo de María.....	88
Figura 41: Actividad N°3, pregunta N°1, trabajo de Juan.....	88
Figura 42: Actividad N°3, pregunta N°1, trabajo de Juan.....	89
Figura 43: Actividad N°3, pregunta N°2, trabajo de Juan.....	90
Figura 44: Actividad N°3, pregunta N°3, trabajo de Juan.....	90
Figura 45: Actividad N°3, pregunta N°4, trabajo de Juan.....	91
Figura 46: Tratamientos en el registro numérico realizados en la expresión presentada por Juan.....	92

Figura 47: Actividad N°3, pregunta N°5, trabajo de Juan.....	92
Figura 48: Actividad N°3, pregunta N°6, trabajo de Juan.....	93

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES.	10
CAPITULO I: LA PROBLEMÁTICA.	11
1.1. Antecedentes.	11
1.2. Justificación del tema de investigación.	17
1.3 Pregunta y Objetivos de la investigación	20
CAPÍTULO II: ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.	22
2.1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.	22
2.2 Metodología de investigación: aspectos de la Ingeniería Didáctica.	25
CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO.	31
3.1 Evolución histórica del concepto de función.	31
3.2 Estudio de la función lineal.	34
3.3 Estudio del objeto matemático función lineal desde el punto de vista didáctico.	37
CAPITULO IV – EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS	46
4.1 Descripción y selección de los sujetos y del escenario de la investigación.	46
4.2 Descripción de las actividades.	47
4.3 Técnicas e instrumentos de recolección de información.	48
4.4. Análisis de las actividades.	49
FUTURAS INVESTIGACIONES.	100
SUGERENCIAS.	101
REFERENCIAS	102
ANEXOS	106

CONSIDERACIONES INICIALES

Nuestro interés al realizar la presente investigación surge al preguntarnos cómo aproximar a los estudiantes de segundo grado de educación secundaria a la noción de función lineal. Para este estudio, consideramos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) nos brindará las herramientas necesarias para entender cómo aprenden los estudiantes.

El objetivo general de esta tesis es analizar cómo una secuencia de actividades favorece la aproximación al concepto función lineal en estudiantes de segundo de secundaria al realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica.

A continuación, resumimos los cuatro capítulos que estructuran la investigación:

En el capítulo I, presentamos la problemática de la investigación. Hemos revisado algunos antecedentes que guardan relación con el objeto matemático función lineal; luego, planteamos la justificación del estudio, así como la pregunta de investigación. Finalmente, establecemos el objetivo general y los específicos.

En el capítulo II, abordamos el marco teórico en el que se fundamenta nuestra investigación, tomando aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004). Específicamente, nos centramos en las dos clases de transformaciones de representaciones semióticas, la conversión y el tratamiento; de igual forma, presentamos aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995): esta es la que guiará la investigación.

El capítulo III refiere al estudio del objeto matemático función lineal. Para ello, realizamos una reseña histórica de la evolución del concepto de función lineal y una revisión de nuestro objeto matemático en dos textos, uno de nivel superior y otro de nivel escolar correspondiente a segundo grado de secundaria, con el cual se trabaja en las Instituciones Educativas Públicas.

El capítulo IV trata sobre la experimentación y análisis. Señalamos las características del escenario, de los sujetos de la investigación y describimos las actividades a realizar. Indicamos los objetivos de cada actividad y el análisis a priori y a posteriori de acuerdo a aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue.

Finalmente, presentamos consideraciones y sugerencias para futuros trabajos que se puedan realizar a partir de esta investigación.

CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA

Los contenidos de esta sección han sido organizados de la siguiente manera: antecedentes, justificación de la investigación, pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos.

1.1. Antecedentes

En el presente trabajo, se analiza diversas investigaciones relacionadas con nuestros objetos matemáticos: función y función lineal. Dichos estudios emplean como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2006), la cual es relevante para nuestra investigación. Hemos seleccionado cuatro tesis de maestría y una tesis de doctorado que se vinculan directa o indirectamente con nuestro objeto matemático. A continuación, pasamos a describir cada uno de ellas.

Posada y Villa (2006) resaltaron la importancia de entender uno de los conceptos matemáticos más importantes del álgebra y análisis matemático como es el concepto de función lineal. Para realizar su investigación, tomaron como referentes conceptuales la noción de variación, la modelación matemática como herramienta didáctica y los registros de representación semiótica. Los autores mencionados refirieron que la Teoría de Registros de Representación Semiótica permiten el estudio, la sistematización, la objetivación y la comprensión del concepto de función lineal. De la misma manera, afirman que, para que el estudiante logre entender un concepto, es necesario que coordine al menos dos registros de representación semiótica de un mismo objeto. Al respecto, Duval menciona que, en la mayoría de los casos, las personas confunden los objetos matemáticos con la representación que de ellos se hace.

Duval (citado por Posada y Villa, 2006) afirma: “Sólo hay un medio para diferenciar un objeto de su representación: es necesario disponer de otra representación semiótica del objeto representado y reconocerla como una misma representación” (pág. 90). La parte experimental fue desarrollada con 15 estudiantes de grado décimo del programa de Media Técnica, de la modalidad de Arte del instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Para que los autores lleven a cabo el experimento, tomaron una prueba diagnóstica; luego, seleccionaron las variables con las cuales se analizó y diseñó las actividades del experimento, así como la intervención didáctica. Posteriormente, plantearon el proceso de modelación desde dos

dimensiones: la primera, como herramienta motivadora en la construcción del concepto de función lineal; y, la segunda, con sentido de conceptualización matemática porque permite reconocer el concepto de función lineal como elemento por medio del cual se puede agrupar una familia de relaciones entre variables.

Posada y Villa (2006), luego de realizar la parte experimental, llegaron a la siguiente conclusión:

El proceso de modelación apoyó dos grandes actividades implícitas.

Actividad motivadora: se observó en los estudiantes que este proceso les permitió interesarse más por la necesidad de identificar regularidades. Además les permitió comprender los objetos matemáticos como herramientas que pueden describir fenómenos y no solamente como un lenguaje abstracto determinado por unas reglas sintácticas para su manipulación algorítmica. [...]

Actividad cognitiva: les permitió abordar los problemas de una manera más organizada, coherente y con sentido tanto matemático como contextual. Esto posibilitó que los estudiantes reconocieran en el concepto de función lineal un modelo que describe situaciones en contextos particulares, pero además generalizables a situaciones donde intervienen razones de cambio constantes entre diferentes cantidades de magnitud. [...] (p. 177).

En la misma línea, Ospina (2012) realiza su investigación con el objetivo de indagar cómo aprenden los estudiantes, qué actividades favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos, en particular, del concepto de función lineal, y realiza una reflexión sobre el alcance que estas tienen en el aprendizaje; para ello, emplea la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Ospina considera que: “El estudiante se apropia del concepto matemático cuando realiza conversiones entre los diferentes registros de representación” (pág. 19).

Hitt (citado por Ospina, 2012) expresa lo siguiente respecto al mismo tema: “Un determinado concepto es estable en un individuo si puede enlazar las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones” (pág. 19). De igual manera, con la investigación realizada, busca identificar los aportes didácticos que favorecen la conceptualización de la función lineal mediante la identificación de las unidades significantes del registro de partida en correspondencia con las unidades significantes del registro de llegada.

Ospina espera aportar elementos que promuevan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del concepto matemático función lineal. Dicho autor menciona lo siguiente:

Enseñar y aprender matemáticas se constituyen en actividades que tienen como finalidad la construcción del conocimiento, es labor del docente indagar cómo aprenden los

estudiantes, qué actividades favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos y reflexionar sobre el alcance que estas tienen en el aprendizaje. (Pág. 20)

Para llevar a cabo la investigación, Ospina trabajó con estudiantes que oscilan los 13 y 15 años, que cursaban el grado octavo de la institución educativa “Eugenio Pacelli” del municipio de Manizales, departamento de Caldas (Colombia). El grupo fue conformado por 12 estudiantes quienes fueron elegidos sin tomar en cuenta su desempeño académico. Las actividades estuvieron centradas en dar solución a situaciones propias del concepto de función lineal. Para el desarrollo de estas, se utilizó dos instrumentos: el primero fue una actividad contextualizada anterior a la enseñanza de la función lineal, la cual tenía como finalidad reconocer el conocimiento previo de los estudiantes sobre el concepto del objeto matemático; el segundo también presenta una secuencia de actividades propias del concepto en cuestión, fue aplicado luego de que a los alumnos se les había enseñado función lineal. Ambos instrumentos fueron analizados tomando en cuenta los tres criterios de congruencia, para ello la investigadora realizó la segmentación del objeto matemático función lineal en sus unidades significantes elementales tanto del registro de partida como del de llegada. Dentro de sus conclusiones, afirma lo siguiente:

El concepto de función debe ser abordado para su enseñanza de la misma forma como se dio epistemológicamente, desde el lenguaje natural y, posteriormente, realizar la conversión hacia otros registros de representación (gráfico, tabular, figural, simbólico), ya que la fórmula algebraica, la cual ha sido privilegiada por los docentes al inicio de la enseñanza del concepto genera una mayor dificultad en la conceptualización del mismo. (Pág. 160)

Esta investigación muestra la importancia de la enseñanza del concepto de función lineal, y la considera como una herramienta eficaz para modelar situaciones reales. También menciona que es importante continuar con estudios en torno a las representaciones semióticas.

Como se puede apreciar, la investigación antes mencionada aborda el objeto función lineal desde el lenguaje natural y la noción de dependencia entre variables. Considera que es importante manejar diferentes registros semióticos, además que enseñar y aprender matemáticas constituyen actividades que tienen como finalidad la construcción del conocimiento; con ello, la labor del docente se debe concentrar en indagar cómo aprenden los estudiantes, qué actividades favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos y reflexionar sobre el alcance que estas tienen en el aprendizaje.

Por su parte, Planchart (2000), en su investigación reconoce que los estudiantes tienen deficiencias al tratar con el concepto de función y, para contribuir en mejorar su enseñanza, se requiere que sea analizado desde diferentes enfoques, entre ellos, en el contexto real de donde muchas veces se desprenden las situaciones matemáticas. En el mismo sentido, Hitt (citado por Planchart, 2000) señaló que:

A través de las funciones, podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. (Pág. 18)

Para llevar a cabo la investigación, Planchart (2000) trabajó con estudiantes que llevan el curso de Precálculo en la Universidad Interamericana de Puerto Rico, al cual asisten estudiantes de diferentes especialidades. En la primera actividad, aplicó una prueba exploratoria; enseguida, realizó entrevistas a una muestra. El trabajo final fue desarrollado con 24 estudiantes a los que les aplicó un cuestionario y, posteriormente, participaron de las actividades de modelación.

Esta investigación propone identificar y analizar las dificultades que surgen durante el proceso que conduce el aprendizaje de las funciones; de igual manera, diseñar módulos de actividades que incorporen la simulación con tecnología, analizar el papel de la visualización en la conceptualización de las funciones y la modelación matemática como articulación de los registros de representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Algunas de las conclusiones a las que llega Planchart son las siguientes:

Algunos estudiantes no pueden realizar la conversión del sistema gráfico al algebraico y, en el caso de las tablas, generalmente esperan que respondan a un patrón o a una ecuación, lo cual pone en duda que ellos representen una función. (Pág. 167)

El investigador dentro de sus recomendaciones, sugiere lo siguiente:

Se recomienda que en la enseñanza de las funciones se enfatice el uso de distintas representaciones para la consecución del concepto de función. En ese sentido, se pueden incorporar metodologías y técnicas que respondan y faciliten los procesos de conversión entre representaciones. (Pág. 174)

En esta investigación, también podemos reconocer la importancia que tiene el manejo de diferentes representaciones semióticas para la comprensión del concepto de función, lo cual brindará aportes a nuestra investigación. Así también, pensamos considerar la sugerencia que

hace el investigador en el sentido que, para contribuir en mejorar la enseñanza de la función —en particular de función lineal—, debemos partir de problemas de contexto real, pues estos son muy cercanos a los estudiantes.

Del mismo modo, Gutiérrez y Parada (2007) realizaron una investigación que tiene como referencia la Teoría de Registros de Representación Semiótica con estudiantes de Ingeniería con el objetivo de caracterizar las transformaciones que efectúan un grupo de estudiantes en situaciones de variación que se modelan mediante la función afín. Al respecto, los investigadores manifiestan la siguiente justificación personal.

El origen de este trabajo surge de nuestra práctica docente con estudiantes de Ingeniería, en los que hemos evidenciado que, a pesar de haber trabajado ampliamente con la función afín tanto en el colegio como en cursos anteriores al de Cálculo, tienen muchas dificultades, especialmente cuando se les propone situaciones enunciadas en lenguaje verbal y sobre las que se pide información relacionada con aspectos que caracterizan la variación tales como identificación de magnitudes que covarían, descripción de situaciones de variación, intervalos de covariación e intervalos de crecimiento y decrecimiento, entre otros. (Pág. 19)

Los autores realizaron la investigación con un total de 36 estudiantes de Ingeniería que llevan el curso de Cálculo diferencial y que, en algún momento de sus estudios, han tocado el tema de función lineal afín, de tal manera que les permitió una comprensión de la función desde el enfoque variacional. Para ello, aplicaron un cuestionario con tres situaciones. Los estudiantes se subdividieron en tres grupos y cada equipo respondió una sola situación. También analizaron los textos de Cálculo con el objetivo de relacionar la presentación del concepto de función lineal afín y las respuestas que dan los estudiantes. Algunas de las conclusiones a las que llegaron Gutiérrez y Parada fueron:

El 75% de los estudiantes evidencia una ausencia del registro verbal como herramienta para comparar dos razones conocidas. Se observa que un alto porcentaje de estudiantes solo encuentra las razones, pero no compara los valores, podría estar relacionado con la baja utilización de este registro en las preguntas que formula el texto.

En general, los estudiantes no representan la situación ni en el registro gráfico ni en el algebraico funcional, las razones de este hecho podrían explicarse en términos de falta de discriminación de las unidades significantes o desconocimiento de las reglas propias de formación en cada registro, o por la no identificación de un modelo lineal en la situación.

Los estudiantes que modelan la situación de temperatura mediante gráficas cartesianas y que articulan con otro registro en su mayoría lo hacen con el aritmético. (Pág. 168-169)

Los investigadores Gutiérrez y Parada (2007) también realizan recomendaciones y la que servirá para nuestro trabajo es la siguiente: “Es necesario incluir situaciones de dependencia que permitan articular diferentes registros de representación para que los estudiantes adquieran un pensamiento variacional adecuado que les permita alcanzar una mejor conceptualización de la función”. (Pág. 179)

En la misma línea, Roldán (2013), para su investigación, parte de realizar un análisis histórico profundo del origen del concepto de función desde la Edad Antigua (Babilonia) hasta la Edad Contemporánea; del mismo modo, realiza un análisis de las definiciones que presentan diversos autores sobre función y función lineal y toma la modelación como una de las principales herramientas para su propuesta didáctica. Al respecto, el autor añade:

En el desarrollo de la propuesta, se presenta las diferentes formas de representación de función como tablas, gráfica cartesiana, fórmulas y se privilegia el paso de una a otra en diferentes sentidos y por distintas rutas. Cada una de las actividades es escogida teniendo como criterio fundamental el potencial que tenga de desarrollo de elementos conceptuales propios de la función lineal que permitan al estudiante un aprendizaje significativo del tema. (Pág. 57)

Roldán (2013) menciona que es necesario que los estudiantes pasen de las tablas al gráfico y luego a la expresión algebraica y que no se privilegie a ninguno de ellos, y añade que es necesario realizarlo en sentido contrario. Propone actividades relacionadas con la vida cotidiana, la experimentación y vivencias de prácticas en laboratorio que ayuden a desarrollar la noción de función lineal en la escuela secundaria.

El autor dentro de sus conclusiones afirma lo siguiente:

La enseñanza de la función lineal debe articular de manera equilibrada las formas más importantes de representación, es decir, las formas tabulares, gráficas cartesianas y algebraicas sin dejar de lado la expresión verbal. Se debe fortalecer el paso de una a otra forma de representación empleando diferentes contextos.

Comprender lo que es función lineal requiere que el estudiante se aleje de la definición formal que se da -en clase y en textos- de ella, y que, a partir de la creación de modelos la relación de los mismos, con datos teóricos y experimentales de situaciones que representan, llegue a una definición propia con sentido que refleje su aprehensión de los elementos teóricos que le subyacen. (Pág. 95)

Elegimos las investigaciones realizadas por Posada y Villa (2006), Planchart (2000), Ospina (2012), Gutiérrez y Parada (2007) y Roldán (2013) porque manifiestan la importancia que tiene el manejo de los diferentes registros de representaciones semióticas en la enseñanza-

aprendizaje del objeto matemático función lineal; reconocen la importancia de que el estudiante transite por los diferentes registros de representación semiótica (lengua natural, algebraico, gráfico, numérico); del mismo modo, los investigadores señalan: cuando el estudiante realiza las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, comprenderá mejor el concepto de función lineal, también sugieren la importancia de enseñar el objeto matemático función lineal partiendo de problemas muy cercanos a la realidad de los estudiantes, ya que permite articular la realidad y la Matemática, ayudando al estudiante a entender el concepto de función lineal y otros conceptos matemáticos. Además, proporciona a los docentes estrategias de enseñanza de la Matemática, lo que se verá reflejado en el mejor desempeño de los estudiantes.

La investigación que realizaremos será con estudiantes de segundo año de educación secundaria que no han estudiado el objeto matemático función lineal, para ello diseñaremos una secuencia de actividades, con base en la Teoría de Registro de Representación Semiótica de Duval (2004) con lo que pretendemos que los estudiantes realicen conversiones y tratamientos entre los registros de representación semiótica de lengua natural al gráfico y, de esta manera, que los estudiantes se aproximen a la noción de función lineal.

1.2. Justificación del tema de investigación

Tomando en cuenta nuestra labor como docente en el nivel de educación secundaria, hemos observado que los estudiantes, cuando realizan el estudio de función lineal, presentan dificultades para su comprensión.

Por lo general, se parte del concepto de función lineal, luego se les da la regla de correspondencia expresada en el registro algebraico y, después de dar algunos valores, se grafica la función lineal, no se le explica al estudiante por qué se unen los puntos hallados mediante una recta.

Otra manera de introducir el concepto de función lineal es presentando un problema expresado en registro de lengua natural y, como ayuda, el docente le proporciona un cuadro conformado por filas y columnas con algunos datos, luego solicita que los estudiantes completen la información faltante y hallen la regla de correspondencia, en ninguno de los dos casos dejan que el estudiante, mediante actividades, se aproxime a la noción del concepto de función lineal y luego con sus propias palabras describa que es una función lineal, con lo cual creemos que los estudiantes se beneficiarían.

La Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) publicó los resultados de la evaluación PISA del año 2012, donde el Perú participó conjuntamente con 64 países. Esta evaluación se realiza cada tres años y mide el logro de estudiantes de 15 años de edad, que cursan algún grado de educación secundaria, en las competencias de Lectura, Matemática y Ciencias. En PISA 2012, se enfatizó en el área de Matemática, es decir, hubo más preguntas a diferencia de la evaluación anterior. PISA busca conocer en qué medida los estudiantes han desarrollado los conocimientos y habilidades para aplicar lo que han aprendido en situaciones similares a las que se encontrarán en el mundo real. Los resultados obtenidos por los estudiantes en PISA 2012 muestran que tienen dificultades, por ejemplo, en la subescala FORMULAR. Tres de cada cuatro estudiantes solo puede comprender indicaciones escritas y sencillas para poder expresarlas de forma matemática. El informe PISA también menciona lo siguiente: “Las expresiones matemáticas que se utilizan, en pocas ocasiones, son elaboradas por ellos mismos. Esto muestra que los estudiantes no logran identificar las matemáticas que se deben utilizar en situaciones problemáticas” (Perú, 2013, p. 35).

El informe de la UMC (2013) señala que un 47% se encuentra debajo del nivel 1 (los estudiantes pueden, en el mejor de los casos, ser capaces de realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas aplicando procedimientos rutinarios con pasos simples); el 27,6% se encuentra en el nivel 1 (los estudiantes pueden responder a las preguntas que involucran contextos conocidos); el 16,1% se encuentra en el nivel 2, (los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa); un 6,7% se encuentra en el nivel 3 (los estudiantes pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales); un 2,6% se encuentra en el cuarto y quinto nivel (el estudiante selecciona y aplica conocimientos matemáticos relevantes para solucionar un problema que puede incluir un pequeño número de pasos del proceso); y, en el sexto nivel, no hay ningún estudiante. En este nivel, los alumnos son capaces de interpretar y formular problemas en términos matemáticos, manejan información más compleja y ensayan un número de pasos de proceso).

En el año 2004, el Ministerio de Educación (MINEDU), a través de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC), realizó la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil (E. N.) a los estudiantes de los colegios públicos, en Matemática y Comunicación. Esta evaluación se aplicó al tercer y quinto año de educación secundaria.

Dentro de los contenidos a evaluar, se encontraba la categoría álgebra y funciones, la cual señala lo siguiente:

La noción de función constituye una idea unificadora de gran importancia en la Matemática. Las funciones son correspondencias especiales entre los elementos de dos conjuntos. Esta noción es importante porque constituye la representación matemática de muchas situaciones de entrada y salida que se encuentran en el mundo real. En ocasiones, las personas hacen uso de las funciones aun cuando no son conscientes de ello. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver diversas situaciones de la vida diaria como problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química y física, astronomía o geología y, en general, cualquier situación en la que haya necesidad de relacionar variables. (Pág. 27)

Luego de realizar el análisis de los resultados, en relación a las dificultades en el manejo del álgebra y las funciones, la UMC formuló los siguientes resultados:

Los estudiantes presentan dificultades para comprender la noción de función en su acepción más elemental, es decir: para comprender la idea de cambio o variación asociada a dos o más magnitudes, para interpretar el significado de dicho cambio, para calcular valores puntuales de las funciones en diversas situaciones, y para representarlas de manera gráfica, simbólica o mediante tablas. (Perú, 2004, p. 95).

En el mismo documento presentado por la UMC, en el capítulo cinco, que lleva por título Principales dificultades en el desempeño en matemática, la UMC identifica las dificultades que presentan los estudiantes de quinto de secundaria en el área de matemática. Una de ellas respecto al pensamiento algebraico es la siguiente:

Los estudiantes presentan dificultades para resolver problemas de enunciado verbal que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso del lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones e inecuaciones lineales o modelar, interpretar o graficar situaciones utilizando la noción de función en sus diversas representaciones. Los estudiantes presentan dificultades, específicamente, para recodificar situaciones mediante el empleo de expresiones algebraicas como ecuaciones o funciones. (Perú, 2004, pág. 186)

Al analizar estos resultados, vemos que son pocos los estudiantes que son capaces de resolver problemas, como es el caso del objeto función lineal.

En la misma línea, en el año 2015, el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) realizó por primera vez la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) a estudiantes del segundo año de educación secundaria. La ECE es una evaluación estandarizada que realiza el MINEDU para conocer qué y cuánto están aprendiendo los estudiantes de todas las escuelas públicas y

privadas del país. Evalúa competencia lectora y matemática con el objetivo de conocer el rendimiento de los estudiantes al finalizar el VI ciclo de la Educación Básica Regular (EBR).

Los resultados fueron los siguientes: el 37,6% se encuentra en el nivel **Previo al Inicio** (el estudiante no logró los aprendizajes necesarios para estar en el nivel en inicio); el 40,2% se encuentra en el nivel **Inicio** (el estudiante solo logra realizar tareas poco exigentes respecto de lo que se espera para el VI ciclo); el 12,7%, en el nivel de **Proceso** (el estudiante solo logró parcialmente los aprendizajes esperados al finalizar el VI ciclo); y el 9,5%, en el nivel **Satisfactorio** (el estudiante logró los aprendizajes esperados al finalizar el VI ciclo, está preparado para el siguiente).

Estos resultados indican claramente que cerca del 80% de los estudiantes del segundo año de educación secundaria se encuentra en los niveles más bajos, por lo que no están preparados para pasar al VII ciclo y, solo un 9,5% , se encuentra apto para cursarlo, lo cual invita a reformular la enseñanza de las Matemáticas para que se enseñe a los estudiantes a modelar situaciones reales, a transitar por varios registros de representación semiótica y a presentar situaciones problemáticas con un alto nivel cognitivo.

Por todo lo señalado hasta aquí, nosotros estamos interesados en que los estudiantes del segundo grado de educación secundaria se aproximen a la noción de función lineal por medio de tratamientos y conversiones entre registros cuando se les presentan problemas, en particular, del registro de lengua natural, al registro numérico, al registro gráfico y al registro algebraico.

Tomando como fundamento los antecedentes presentados y la justificación de la investigación, presentamos la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos.

1.3. Pregunta y Objetivos de la investigación

Pregunta de investigación

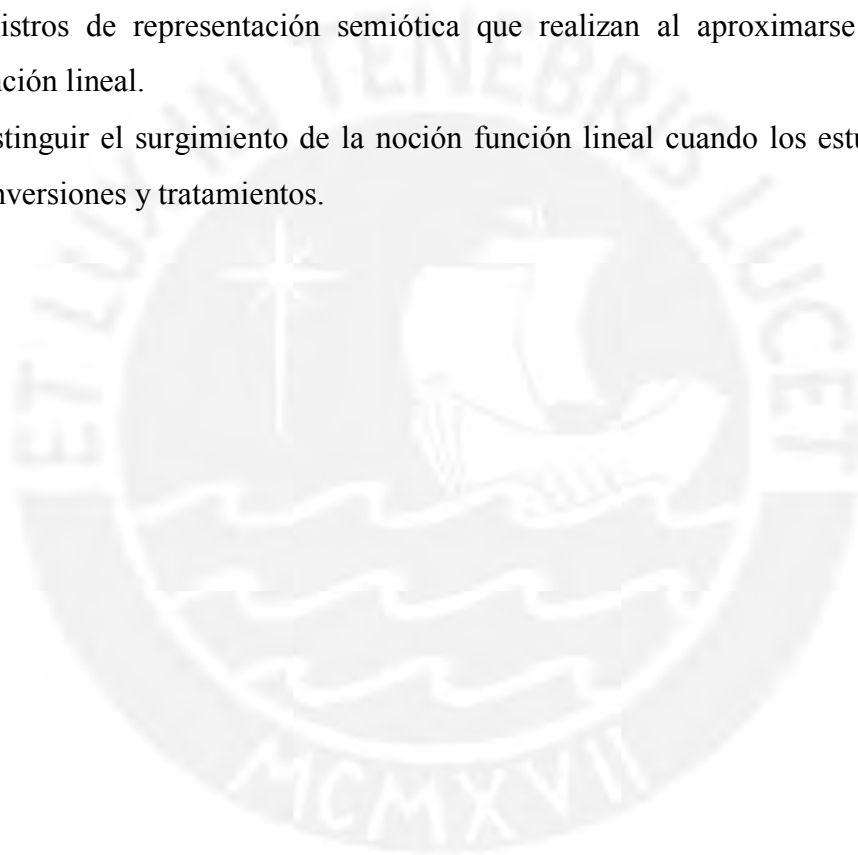
¿Una secuencia de actividades, diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación semiótica, favorecerá que estudiantes de segundo de secundaria se aproximen al concepto función lineal al realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica?

Objetivo General

Analizar una secuencia de actividades, diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación semiótica, favorece la aproximación al concepto función lineal en estudiantes de segundo de secundaria al realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica.

Objetivos Específicos

- Identificar en las acciones de los estudiantes los tratamientos y conversiones entre los registros de representación semiótica que realizan al aproximarse al concepto de función lineal.
- Distinguir el surgimiento de la noción función lineal cuando los estudiantes realizan conversiones y tratamientos.



CAPÍTULO II: ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En el presente capítulo, presentaremos los aspectos teóricos y metodológicos de nuestra investigación: los aspectos teóricos están orientados por la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, y la metodología a emplear estará centrada en aspectos de la Ingeniería Didáctica.

2.1. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica fue desarrollada por Duval (1995), profesor de la Universidad del Litoral y director de estudios de la Academia de Lila, Francia. Ha consolidado su trayectoria investigativa en el Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo), a través de la observación de las actividades de docentes y alumnos en cursos de Matemáticas como del diseño de clases experimentales. Desde 1980, amplió su campo de investigaciones al desarrollo y dominio de las actividades intelectuales fundamentales que se requieren para el aprendizaje de la Matemática y de la lengua materna. Su investigación se ha centrado, sobre todo, en el estudio del papel que desempeñan las representaciones en la conceptualización, razonamiento e interpretación. Duval (2006) concluye afirmando: “De hecho, la comprensión conceptual surge de la coordinación entre los diversos sistemas semióticos usados, y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión”. (Pág. 165-166).

Duval (2004) define dos tipos de representaciones:

Representaciones semióticas: son representaciones conscientes y externas, conscientes porque son de carácter intencional y externas porque son producidas por un sujeto y cumplen la función de comunicación. También cumple con las funciones de objetivación y tratamiento. Por lo tanto, las representaciones semióticas en Matemáticas no solo son esenciales para fines de comunicación, sino también para el desarrollo de la actividad matemática. Sin representaciones semióticas no habría manera de hacer matemática. Al respecto, Duval menciona: “Las actividades de tratamiento están directamente ligadas a la utilización de un sistema semiótico” (Pág. 34).

Representaciones Mentales: son aquellas que están conformadas por todas las imágenes mentales que una persona tiene acerca de un objeto. Son internas, pues son inherentes a una persona y son comunicadas a otra mediante una representación externa.

En el mismo sentido, Duval (2006) señala lo siguiente:

Las representaciones mentales son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significativo perceptible. Por lo general, se igualan con las "imágenes mentales" en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción. Pero las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que el de las imágenes. Es necesario incorporar en ellas no solo los conceptos, las nociones, las "ideas", sino también las creencias y las fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos. (Pág. 36)

Registros de Representación Semiótica: son aquellas que cumplen las tres actividades cognitivas: la primera viene a ser la formación de una representación, esta tiene que ser identificable en un registro dado; la segunda es el tratamiento de una representación, son las transformaciones de la representación dentro de un mismo registro, es interno; y la tercera es la conversión de una representación, es decir, es la transformación de esta representación en otra de registro diferente, esta es externa. El autor reconoce cuatro tipos de registros de representación semiótica: lenguaje natural, algebraico, gráfico y numérico.

Además, para el aprendizaje del concepto de un objeto matemático, es necesaria la utilización de varias formas de expresión y de representación. Duval (2006) considera que muchos objetos matemáticos se pueden representar en diferentes registros de representación semiótica, lo que ayudará en su comprensión.

Para Font (2001), el objeto matemático función puede representarse de cuatro formas: expresión verbal, tabla, gráfica y expresión analítica. Al respecto, señala lo siguiente:

La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la Geometría y la Topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el Álgebra. (Pág. 182)

A continuación, presentamos los registros de representación semiótica en la que se puede representar la función lineal: registro de lengua natural, registro numérico, registro algebraico y registro gráfico.

- **Registro de la Lengua Natural:** este registro permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o explicaciones.
- **Registro Numérico:** los datos se presentan en cuadro formado por filas y columnas lo que permite observar la información de manera global, ayuda a establecer relaciones y comparaciones entre los diferentes datos que en ella se recogen, así como descubrir propiedades relaciones y características del objeto matemático. Este registro tiene limitaciones, ya que solo puede incluirse un número finito de pares de valores
- **Registro Gráfico:** el registro gráfico permite deducir, de manera visual, el comportamiento que va seguir una determinada función, así como realizar tratamientos propios de su registro como son las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc.; este registro hace uso del plano cartesiano.
- **Registro Algebraico:** muestra características particulares del objeto matemático que representa.

De acuerdo con Duval (2004), hay dos actividades cognitivas: tratamiento y conversión.

El **tratamiento** es la transformación de las representaciones de acuerdo con las reglas propias del registro, de modo que se obtengan otras representaciones, estas transformaciones se realizan en el mismo registro donde esta ha sido formada, es de carácter interno. En el caso de función lineal, presentamos el siguiente ejemplo:

Graficar la función lineal afin $f(x)=2x+4$; $x \in \mathbb{R}$, los tratamientos en el registro gráfico son: Construir los ejes x e y , que son dos rectas perpendiculares; dividir cada eje en las escalas adecuadas, ubicar las unidades numéricas en el sistema de coordenadas (x, y) , hallar los puntos, trazar la línea recta.

La conversión de una representación es una transformación de la representación que convierte las representaciones producidas en un registro diferente al registro de inicio. Esta es de carácter externo, esto ocurre, por ejemplo, cuando una función lineal $f(x) = 3x$, para $x \neq 0$, representada en el registro algebraico se convierte a su representación en el registro gráfico consiguiendo reconocer la correspondencia entre el registro de partida y el registro de llegada.

En la Figura 1, mostramos cuatro registros para el objeto matemático función lineal. En primer lugar, se puede observar un problema en el registro de lengua natural. Mediante tratamientos en el registro algebraico obtenemos la regla de correspondencia de la función lineal $f(x)=2460x+3000$, del mismo modo se realizan tratamientos en el registro numérico, de esta forma obtenemos la respuesta del problema. A continuación, presentamos cómo se puede mostrar en cuatro registros de representación semiótica el objeto matemático función lineal.

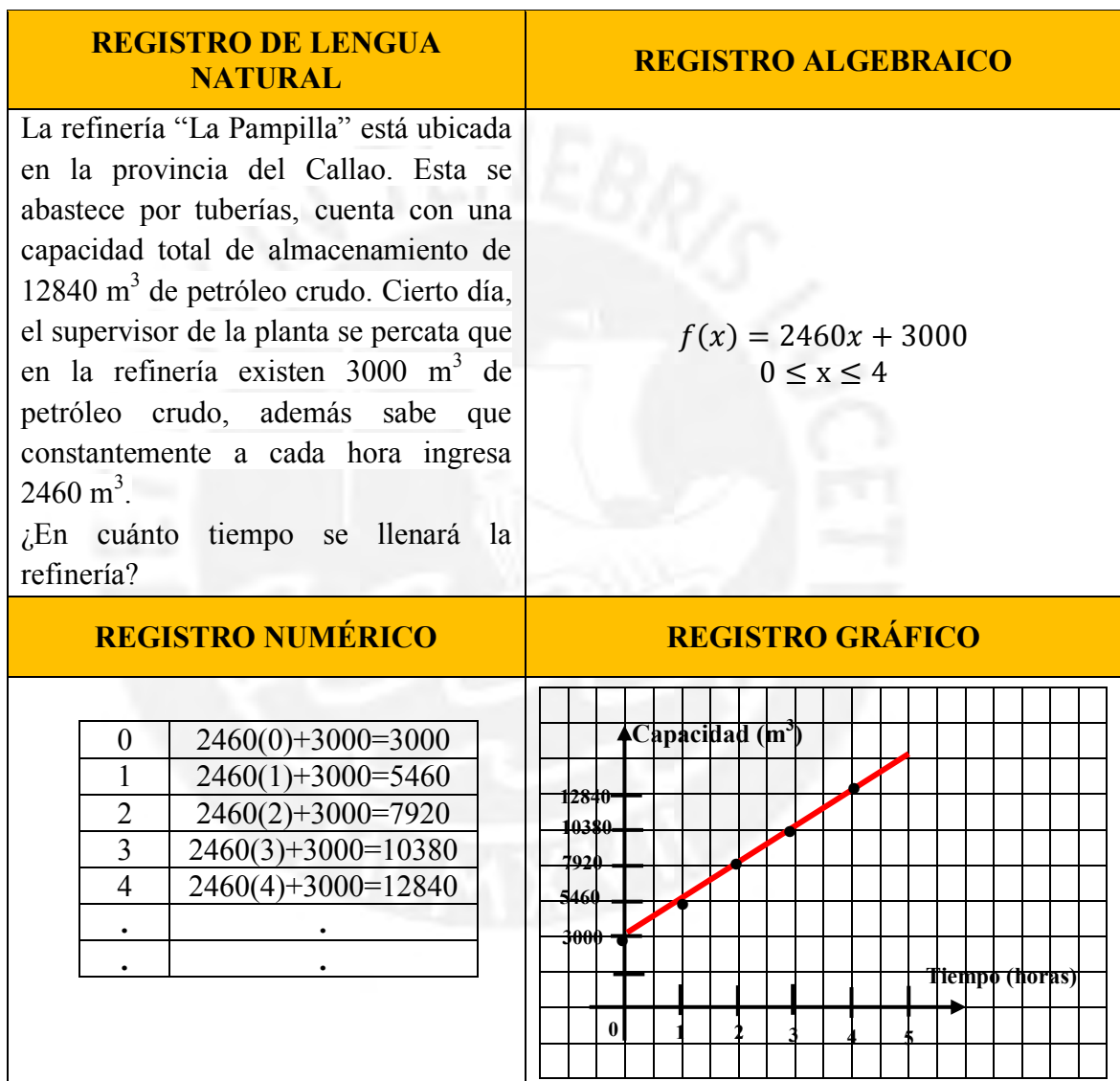


Figura 1. Registros de representación semiótica para el objeto: función lineal $f(x)=2460x+3000$

2.2. Metodología de investigación: aspectos de la Ingeniería Didáctica

El presente estudio tiene características de una investigación cualitativa y, para ello, nos basamos en Hernández, Fernández y Baptista (2010).

Para Hernández et al. (2010), el enfoque cualitativo “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (Pág. 7). Asimismo, los investigadores señalan lo siguiente: “Los estudios cualitativos se caracterizan porque pueden desarrollar preguntas e hipótesis, antes, durante o después de la recolección y análisis de los datos”. (Pág. 7)

Además de estas características, los investigadores indican lo siguiente:

- En la mayoría de los estudios cualitativos no se prueban hipótesis, estas se generan durante el proceso y van refinándose conforme se recaban más datos o son un resultado del estudio.
- El enfoque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico.
- El enfoque cualitativo evalúa el desarrollo natural de los sucesos, es decir, no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad (Corbetta, 2003).
- La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente).
- El investigador pregunta cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe y analiza y los convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales. (Pp. 9-10)

En educación matemática, Borba (citado por Portugal, 2015) describe las características de una investigación cualitativa y señala lo siguiente.

- Una investigación cualitativa tiene la fuente directa de los datos en el medio natural.
- Una investigación cualitativa es descriptiva.
- Los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso a que simplemente por los resultados o productos.
- El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. (Pág. 6)

Del mismo modo, afirman que este tipo de investigación se realiza a través de la interacción con los sujetos de la investigación, cuyo objetivo es describir y analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos, por lo que consideramos importante emplear en nuestra investigación aspectos de la ingeniería didáctica. En seguida pasamos a explicar en qué consiste esta metodología.

Aspectos de la Ingeniería didáctica

Artigue (1995) señala que “la ingeniería didáctica se caracteriza, en primer lugar, por un esquema experimental basado en “realizaciones didácticas” en la clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza”. (Pág. 36)

De acuerdo a la característica antes mencionada, nosotros realizaremos un trabajo experimental, mediante conversiones y tratamientos para aproximar al concepto de función lineal, con estudiantes de segundo de secundaria de la I. E. “Nuestra Señora de Lourdes”. Tomaremos aspectos de la ingeniería didáctica que nos servirá para realizar un análisis a priori y a posteriori de las actividades elaboradas.

La ingeniería didáctica es un método que toma en cuenta el desarrollo de experiencias en un salón de clases, que se encuentran teóricamente justificadas, cuyas fases son secuenciales: en primer lugar, se realizan análisis preliminares; luego, el investigador propone las secuencias didácticas (en nuestro caso, son actividades propias del concepto de función lineal), se experimenta, se observa; y, finalmente, se analiza las producciones de los estudiantes en clase y se realiza la comparación con lo que el investigador se había propuesto obtener.

Fases de la ingeniería didáctica

Artigue (1885), considera cuatro fases, las cuales pasamos a describir.

Fase 1: Análisis preliminar

Es el análisis previo realizado por el investigador para identificar las concepciones de los estudiantes sobre el objeto matemático, la manera en la que se aborda dicho objeto en las instituciones educativas, su desarrollo histórico, los problemas o dificultades surgidos en la enseñanza y aprendizaje de dicho objeto matemático, entre otros.

Los análisis preliminares se realizan teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación y, para ello, se debe tener presente, como lo señala la autora, los siguientes aspectos:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. (Pág. 38)

Con respecto a nuestra investigación, presentamos el primer y tercer aspecto:

- **Análisis epistemológico:** realizamos una presentación de los aspectos históricos relacionados con la función lineal, luego procedemos al análisis del objeto matemático función lineal desde la perspectiva de la matemática formal.

- **Análisis de las concepciones de los estudiantes:** se refiere a cómo se está enseñando el objeto matemático a los estudiantes, aquí debemos analizar cómo se presenta el objeto matemático en los libros de los estudiantes de la Educación Básica Regular.
- En nuestra investigación, mostramos el texto de Matemática de Segundo Grado de Educación Secundaria, Editorial Norma. Realizamos el análisis de cómo se ha trabajado a nivel didáctico al objeto matemático función lineal en términos de la Teoría de registros de representación semiótica.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

En primer lugar, debemos mencionar que la concepción es la generación de una idea para empezar la ingeniería, la cual se basa en nuestros antecedentes, el marco teórico, el estudio del objeto matemático y los análisis preliminares. En esta fase, debemos tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, así como también de las dificultades y posibles errores de los estudiantes y posibles respuestas a las preguntas formuladas en los instrumentos de la parte experimental.

Artigue (1995) afirma que, en esta fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. En esta perspectiva, la autora, para ayudar al análisis de la ingeniería, propone dos tipos de variables de comando las cuales son adecuadas para el problema estudiado: en primer lugar, tenemos las variables macrodidácticas, que se refiere a la organización global de la ingeniería, en otros términos, encaminan y organizan en forma general la investigación; en segundo lugar, las variables microdidácticas que, según Artigue, nos permite la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase. Estas variables pueden ser manipuladas según las necesidades del investigador.

Para llevar a cabo nuestra investigación, desarrollaremos una microingeniería, pues se basa en la realización didáctica en el salón de clases, siendo nuestro objeto matemático de estudio la función lineal. Asimismo, luego de haber planificado la secuencia de actividades, realizaremos el análisis a priori, que vienen a ser las probables soluciones de las producciones de los estudiantes y, para ello, tomaremos en cuenta nuestro marco teórico empleado.

Fase 3: La experimentación

La autora sostiene que en esta fase se pone en funcionamiento la ingeniería didáctica. Esta se inicia cuando el investigador, el profesor, el observador u observadores y los estudiantes que son los sujetos de investigación se reúnen en el aula, lugar donde se llevará a cabo el proceso de aprendizaje.

La experimentación en nuestra investigación se realizará de la siguiente manera:

- Explicar claramente los objetivos de la investigación y las condiciones en las que se llevará a cabo la aplicación de los instrumentos y la recolección de datos a los estudiantes que participarán en la investigación.
- Aplicación de los instrumentos elaborados por el investigador. Estos instrumentos son tres actividades diseñadas para que los estudiantes trabajen en encuentros de aplicación apoyados en sus conocimientos previos. Estas actividades fueron elaboradas con apoyo del marco teórico y los objetivos específicos de la presente investigación.
- Registrar las observaciones realizadas de las secuencias de las tres actividades y las producciones de los estudiantes en clase.

Nuestros instrumentos para recoger información serán fichas impresas con las actividades, las cuales cuentan con preguntas para ser desarrolladas y completadas por los estudiantes. También se tiene una ficha de observación empleada por el docente observador.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

Según Artigue (1995), esta es la última fase, la cual consiste en el recojo de toda la información realizada en la fase de experimentación: las observaciones de las actividades y producciones de los estudiantes, el análisis por parte del investigador y, finalmente, la confrontación con el análisis a priori.

En nuestra investigación, la confrontación concierne al análisis de los resultados de la fase experimental con base en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y a la problemática de nuestra investigación. Esta fase finaliza con la validación interna, la cual

consiste en contrastar lo que se planificó y lo que realmente sucedió en la experimentación llevada a cabo en clase.

A continuación, presentaremos brevemente los orígenes del estudio del objeto matemático función lineal.



CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

A continuación, presentamos una aproximación de la evolución histórica del objeto matemático función lineal. Pensamos que es pertinente y servirá como base para elaborar las actividades propuestas. Por lo tanto, vamos a realizar un recorrido en la historia y entender cómo ha ido evolucionando la construcción del concepto de función lineal.

3.1. Evolución histórica del concepto de función

En la Edad Antigua, abarcaremos Babilonia y Grecia. Procuraremos acercarnos a los orígenes del concepto de función.

Las primeras manifestaciones de la Matemática suelen considerarse en la civilización babilónica, un conjunto de pueblos que vivieron en la Mesopotamia a lo largo de un periodo que comienza hacia el año 5000 a. C. y termina en los primeros tiempos del cristianismo.

Al respecto, Ortiz (2005) señala lo siguiente:

Alrededor de 300 tablillas han sido identificadas como tablillas matemáticas, que contienen diversos problemas matemáticos y que pertenecen a diversos periodos de la historia de Babilonia; así tenemos textos matemáticos que posiblemente datan de alrededor del 2100 a. C., otros de alrededor del 1600 a. C., y otros de antigüedad del 600 al 300 a. C. En estos textos, se aprecia que los antiguos babilonios tenían un alto nivel de habilidad en el cálculo; su escala numérica fue en base 60. A ellos les debemos que 1 hora tenga 60 minutos. (Pág. 12)

En referencia a las tablillas, Acosta y Vega (2013) señalan lo siguiente:

Un ejemplo particular de uso de tablas es el trabajo de Claudio Tolomeo, quien vivió en Alejandría, pues utilizó tablas para tomar datos astronómicos como los ángulos y arcos que forman la intersección de la eclíptica con el meridiano y el horizonte. Además, Tolomeo encontró la variación anual de la excentricidad de la órbita de la Luna usando la hipótesis de los epiciclos. Aunque errónea, su teoría contribuyó en gran medida a la teoría del movimiento planetario. Más ligado al objeto función lineal, está el problema de las cuerdas vibrantes y la teoría pitagórica sobre las proporciones. (Pág. 122)

En las matemáticas griegas, también se vislumbran otras nuevas formas de aparición del concepto de función lineal. Los pitagóricos intentan buscar relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, como pueden ser las leyes simples de la acústica.

Pitágoras encontró la relación entre la porción vibrante de una cuerda y la cuerda entera la expresó en términos de razones.

Sin embargo, lo que más resalta de esta época, es el uso de las proporciones de carácter numérico. En este sentido Ortiz menciona.

Probablemente se debe a Pitágoras la siguiente definición sobre proporcionalidad, que aparece en los Elementos de Euclides (definición 20, Libro VII): "Los números son proporcionales si el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto". (Pág. 63-64)

Además, el uso de las cantidades conmensurables, nos dan a conocer que usaban la función lineal para analizar cuantitativamente los fenómenos de cambio.

En la Edad Moderna, contribuyeron en la formación del concepto de función Galileo, Descartes, Newton, Leibniz y Euler.

Galileo Galilei, para expresar las leyes del movimiento, empleó la proporcionalidad directa y la proporcionalidad indirecta, por lo que la función lineal se asocia al concepto de dependencia entre magnitudes más que a la variación.

Al respecto Vázquez, Rey y Boubée, (2008), mencionan lo siguiente:

Quien también contribuyó a la creación de la idea de función fue Galileo (1564-1642). Él introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra, se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales. Con palabras, y en el lenguaje de las proporciones, muestra claramente que está tratando con variables y funciones. (Pág. 145)

René Descartes fue el primero que intentó clasificar las curvas conforme al tipo de ecuaciones que las producen y colaboró en la elaboración de la teoría de las ecuaciones, así mismo fue el primero en emplear las primeras y las últimas letras del alfabeto para nombrar las cantidades conocidas y desconocidas respectivamente.

Al respecto Vázquez, et al (2008), declaran lo siguiente:

Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica. Él quería reducir la solución de todos los problemas algebraicos y de ecuaciones a un procedimiento estándar que le permitiera encontrar las raíces. Este matemático fue el primero en poner en claro que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores funcionales, en contra de la consideración discreta y estática imperante hasta el momento. (Pág. 146-147)

Cuando Descartes murió, otro gran genio ya había nacido, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) quien empleó por primera vez el término de función; esta definición aparece en una serie de cartas escritas al matemático suizo Jean Bernoulli.

El gran matemático Leonard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli, fue el primero en usar letras para denotar funciones, al indicar entre paréntesis las variables. Así, escribía $f(x)$ para indicar el valor de la función “ f ” asociada al valor de “ x ”. Podemos decir que, con Euler, se establece el concepto de función. Entonces, se puede decir que, en el año 1748, el concepto de función saltó a la fama en Matemáticas, debido a que Euler publicó su libro titulado *Introductio in analysin infinitorum* en el que hace central el concepto de función en su presentación del análisis. En este sentido, Boyer (1986) nos dice lo siguiente:

Pero las conocidas identidades de Euler se publicaron por primera vez en la *Introductio* en 1748. Las funciones trascendentes elementales, trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas y exponenciales, aparecen escritas y consideradas de forma prácticamente idéntica a como las tratamos hoy. Las notaciones abreviadas $\sin.$, $\cos.$, tang. , cot. y cosec. , que usa Euler en su *Introductio* publicada en latín se parecen más a las formas actuales en inglés que a las abreviaturas correspondientes en los idiomas latinos. Por otra parte, Euler fue de los primeros en tratar los logaritmos como exponentes, de la manera que nos es hoy tan familiar. (Pág. 559)

En el mismo sentido, Coveñas (2008) declara lo siguiente:

En 1755, Euler publicó un libro muy importante, *Institutiones calculi differentialis*. En este libro, definió una función de manera totalmente general, y dio lo que podemos razonablemente afirmar que era una definición verdaderamente moderna de función: “Si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas. Esta definición se aplica de manera más bien amplia e incluye todas las formas en que una cantidad puede ser determinada por otra. Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen desde cualquier modo, o que son determinadas por ella, son llamadas funciones de “ x ”. (Pág. 37)

A principios del siglo XIX, Lagrange restringe el concepto a las funciones analíticas. En este mismo siglo también son importantes las aportaciones de Fourier, el cual logra desarrollar en series de funciones trigonométricas las funciones arbitrarias.

Dirichlet, en 1837, da una definición muy general en los siguientes términos: “Si una variable y , está relacionada con otra x , de tal manera que, siempre que se atribuya un valor numérico a x , hay una regla según la cual, queda determinado un único valor de y , entonces, se dice que y es una función de la variable independiente x ”.

En el mismo sentido, Posada y Villa (2006) mencionan lo siguiente:

Con base en la definición de Dirichlet citada anteriormente y la introducción de la teoría de conjuntos se constituye un nuevo nivel en el concepto de función que alcanza su máxima abstracción con el grupo Bourbaki, quienes con un lenguaje conjuntista proporcionaron la siguiente definición:

Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ que está relacionado con x en la relación dada. (Pág. 59)

El concepto de función y en particular de función lineal seguirá evolucionando con el transcurso del tiempo, pero como podemos observar el concepto de función surge de situaciones reales, y estas tenían que ser resueltas por el hombre, y con el transcurrir del tiempo esta se ha ido perdiendo hasta convertirse en una definición abstracta, en una definición estática, desvinculado de los fenómenos de cambio.

3.2. Estudio de la función lineal

En este acápite, estudiaremos el objeto matemático función lineal desde dos aspectos: el primero, desde el aspecto de la matemática formal en el que se define el concepto de función lineal afín y función lineal; y, el segundo, desde el aspecto didáctico. Para realizar el estudio matemático de la función lineal, utilizaremos la orientación del libro de Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000). Luego, para realizar el estudio didáctico de la función lineal en el segundo año de educación secundaria revisamos el libro de Matemática del grupo editorial Norma que el Ministerio de Educación distribuye a todos los alumnos que estudian en las instituciones educativas públicas del Estado peruano.

La función lineal afín

Para Lima et al. (2000) “una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama afín cuando existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que: $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ ” (Pág. 81). Los autores señalan como ejemplo de

función afín a la función identidad ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$), las traslaciones de la forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, y como casos particulares de las funciones afines son las funciones lineales ($f(x) = ax$), y las funciones constantes ($f(x) = b$).

Los autores mencionados presentan un ejemplo de función afín como se puede observar en la Figura 2. Este problema está expresado en registro de lengua natural y registro algebraico de la forma $f(x) = ax + b$, e indican que representan tanto “ x , a y b ” en el problema. Es probable que presenten para hacernos ver que en el mundo existen muchos ejemplos sencillos de la noción de función.

Ejemplo 7. El precio a pagar por una carrera de taxi está dado por una función afín $f: x \mapsto ax + b$, donde x es la distancia recorrida (usualmente medida en kilómetros), el valor inicial b es la llamada *bajada de bandera* y el coeficiente a es el precio de cada kilómetro recorrido.

Figura 2: Problema de función afín
Fuente: Lima et al (2000, p. 82)

Para los autores la función afín $f: x \rightarrow ax + b$ es una línea recta, y señalan que solo basta con demostrar que tres puntos cualesquiera son colineales, presentan los tres puntos: $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ y $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ y señalan que para que esto se verifique es necesario y suficiente que el mayor de los tres números como resultado de calcular la distancias: $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ y $d(P_1, P_3)$ sea igual a la suma de los otros dos, los autores parten de la suposición que las abscisas x_1, x_2 y x_3 fueron numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Luego de aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos, da como resultado las siguientes expresiones representadas en registro algebraico.

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2; P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1; P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

De esto, se sigue inmediatamente que:

$$d(P_1; P_3) = d(P_1; P_2) + d(P_2; P_3)$$

Como se puede observar, al iniciar la definición de función afín se emplea el registro de lengua natural y, luego, para realizar las demostraciones, los autores emplean el registro algebraico y finalizan realizando una conversión del registro algebraico al registro gráfico que

puede ser observado en la Figura 3: la función afín representada en el registro gráfico por una recta.

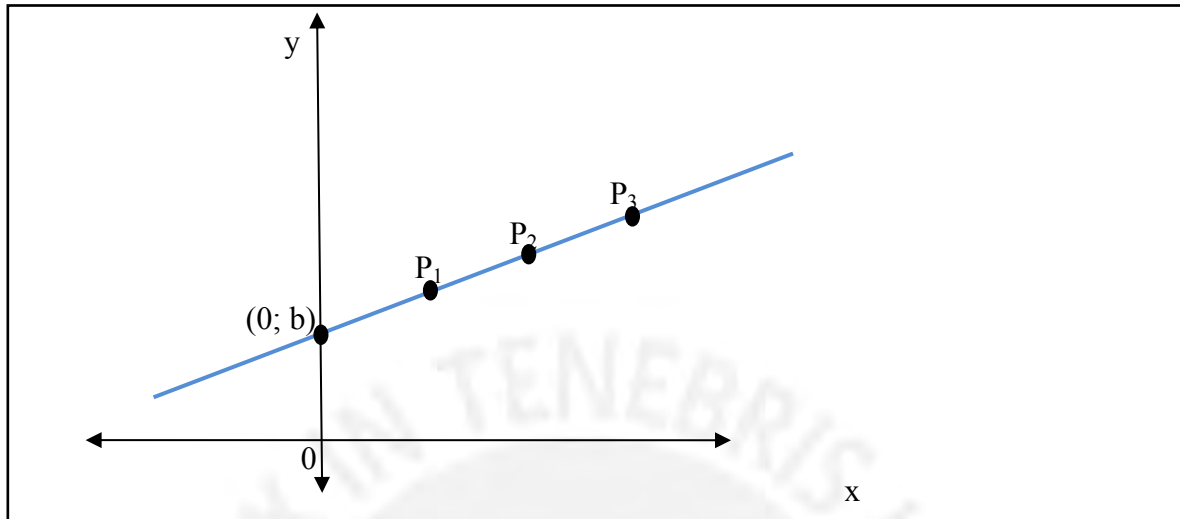


Figura 3: Gráfico de la función afín

Fuente: Adaptado de Lima et al. (2000, p. 83)

A continuación, presentamos algunos comentarios que Lima et al. (2000) plantean sobre la función afín:

Si la función afín f está dada por $f(x) = ax + b$, no es adecuado llamar al número a de coeficiente angular de la función f . El nombre más apropiado que usamos es tasa de variación (o tasa de crecimiento). En primer lugar, no hay, en la mayoría de los casos, ningún ángulo en el problema estudiado. En segundo lugar, aun considerando el gráfico de f , el ángulo que hace con el eje horizontal depende de las unidades escogidas para medir las magnitudes x y $f(x)$. En resumen: se tiene tasa de variación de una función y coeficiente angular de una recta. (Pág. 86)

En esta última parte, Lima et al (2000) emplean el registro de lengua natural, para explicar el nombre más apropiado que se debe asignar a “ a ”, generalmente se denomina pendiente, y como sabemos la definición de pendiente tiene que ver con el ángulo, lo que estaría en contradicción con lo que mencionan los autores.

Un segundo comentario se refiere al mal uso que se dan en los textos escolares donde, en palabras de los autores, se refieren a la función afín como función de primer grado (cuando hablamos de primer grado nos referimos a un polinomio).

La función lineal

Observemos en la Figura 4 cómo Lima et al (2000) señalan lo siguiente:

La función lineal, dada por la fórmula $f(x) = ax$, es el modelo matemático para los problemas de proporcionalidad. La proporcionalidad es, probablemente, la noción matemática más difundida en la cultura de todos los pueblos y su uso universal data de milenios.

Figura 4: Función lineal

Fuente: Lima et al (2000, p. 86)

Además, indican que el siguiente teorema (ver Figura 5) es la llave para determinar, en todas las situaciones, si una función dada es o no lineal.

Teorema Fundamental de la Proporcionalidad: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Poniendo $a = f(1)$, se tiene $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$.

Figura 5: Teorema Fundamental de la proporcionalidad

Fuente: Lima et al (2000, p. 88)

La definición presentada por Lima et al. (2000) en la figura 4 pertenece a la representación en el registro algebraico, donde “a” es la tasa de variación, como mencionan los autores en la página 86; de igual forma, el teorema fundamental de la proporcionalidad se encuentra en el registro algebraico.

3.3. Estudio del objeto matemático función lineal en los libros de texto

En primer lugar, señalamos que nuestro objeto matemático, función lineal, forma parte del Diseño Curricular Nacional del Perú (2009) y se encuentra en el segundo año de educación secundaria (dentro de la competencia número, relaciones y funciones). Las capacidades, indicadores y conocimientos que deben desarrollar los estudiantes sobre función lineal son las que mostramos en la Figura 6.

CAPACIDADES	INDICADORES	CONOCIMIENTOS
Razonamiento y demostración	<p>Determina el dominio y rango de una función.</p> <p>Establece relaciones entre la proporcionalidad directa y la función lineal.</p> <p>Formula fenómenos del mundo real con funciones lineales.</p>	<p>Función Lineal</p> <p>Función lineal afín</p> <p>Dominio y rango de una función lineal</p> <p>Modelos lineales</p>
Comunicación Matemática	<p>Representa de diversas formas la dependencia funcional entre variables; verbal, tablas, gráficos, etc.</p> <p>Representa relaciones y funciones a partir de tablas, gráficos y expresiones simbólicas.</p>	<p>Representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales</p>

Figura 6. Capacidades e indicadores de función lineal. Segundo año de secundaria

Fuente: Adaptado del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2009. Pág. 324)

En el año 2013, el Ministerio de Educación publicó los Mapas de Progreso, que vienen a ser los estándares nacionales y son las metas que esperamos que los estudiantes de todo el país logren al término de cada ciclo.

VI CICLO 1° y 2° de secundaria	<p>Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.</p>
---------------------------------------	---

Figura 7. Estándares Nacionales del Perú Cambio y Relaciones VI Ciclo

Fuente: Adaptado Perú (2013, p. 9)

En la figura 7, podemos observar que los mapas de progreso exigen que los estudiantes modelen diversas situaciones referentes a la función lineal y las representen en tablas y en el plano cartesiano.

Por otro lado, en las Rutas del Aprendizaje (2015), que es un documento oficial impartido por el MINEDU, el cual presenta un conjunto de orientaciones pedagógicas y didácticas para el logro efectivo de los aprendizajes de los estudiantes.

En la figura 8, presentamos cómo está organizado el objeto matemático función lineal en el segundo año de educación secundaria para el desarrollo de la competencia Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.

CAPACIDADES	INDICADORES
Matematiza situaciones.	Expresa modelos referidos a funciones lineales y lineales afines, usa modelos de variación referidos a la función lineal al plantear y resolver problemas.
Comunica y representa ideas matemáticas.	Emplea representaciones tabulares, gráficas de la función lineal y lineal afín, describe las características de la función lineal de acuerdo a la variación de la pendiente.
Elabora y usa estrategias.	Emplea estrategias heurísticas y procedimientos para resolver problemas de función lineal y lineal afín considerando ciertos valores, su regla de la función, o a partir de su representación.
Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Plantea conjeturas sobre el comportamiento de la función lineal y lineal afín al variar la pendiente, justifica a partir de ejemplos, reconociendo la pendiente y la ordenada al origen.

Figura 8: Matriz: Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio

Fuente: Adaptado de Rutas del Aprendizaje. VI Ciclo (2015, p. 44-47)

A continuación, presentamos los contenidos que se imparten sobre nuestro objeto matemático función lineal en las instituciones educativas de nuestro país, para ello realizaremos un estudio del texto de Matemática que se emplea en las instituciones educativas de educación secundaria desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004). El texto analizado es:

Matemática 2° de secundaria (2012): es el texto producido por la editorial Norma que el Ministerio de Educación distribuye a todas las instituciones educativas públicas; es de uso obligatorio tanto para los profesores como para los estudiantes en el Perú.


El objeto matemático función lineal se inicia con una lectura referente a las zonas turísticas de nuestro país; en esta situación, describen y resaltan la importancia de la ciudad de barro de Chan Chan como patrimonio cultural de los peruanos y de la humanidad (Figura 9). Creemos que esta lectura se presenta para atraer la atención de los estudiantes antes de los ejercicios y definiciones. Dicho texto se toma como base para el inicio del estudio del objeto matemático función lineal.



Figura 9: Lectura de motivación.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 43)

En seguida, presentan un problema (Figura 10) referido a la lectura anterior para que se resuelva en grupo por los estudiantes. Este ejercicio, según Duval (2004), está presentado en registro de lenguaje natural, en el que el estudiante deberá realizar una conversión del registro de lenguaje natural al registro numérico. Se presenta a modo de ayuda un cuadro de doble entrada con los datos y la información lista para que el alumno complete el cuadro, el cual sirve de ayuda para realizar la conversión, puede ser al registro algebraico y al registro gráfico. El cuadro también permite observar la relación de proporcionalidad entre las dos magnitudes, número de personas y monto a pagar; del mismo modo, el problema exige que el estudiante identifique las relaciones que existen entre la variable dependiente (monto a pagar) y la variable independiente (número de personas). Esta forma inductiva que presenta el libro, posteriormente ayudaría a realizar la conversión al registro algebraico.

En grupo 

EJERCICIO 1

Al estar en Trujillo, María y sus amigos acordaron reunirse en la puerta de ingreso a la ciudadela de Chan Chan. Si el costo de ingreso es de 5 nuevos soles por persona y algunos no confirmaron su participación, ¿cuánto les costará la visita a dicho lugar?

Completa la tabla y **responde** las preguntas.

Nro. de personas	1	2	3	4	5	6	n
Monto a pagar (S/.)	5(1)	5(2)	5(3)				
	5	10					

Identifiquen:

- ¿Qué sucede con el monto a pagar si el número de visitantes aumenta?
- ¿De qué depende que el monto a pagar se incremente?
- Indica el monto a pagar por el ingreso de 10, 50 y 100 turistas.





Figura 10: Situación problemática número uno.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 43)

Luego, se presenta un segundo problema en el registro de lenguaje natural. El enunciado induce a que el estudiante realice la conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico. A diferencia del ejercicio anterior, en el enunciado se emplea la variable “x” que representa al número de juegos a los que se desea subir (variable independiente); así también, “y” para que represente el dinero a gastar en la feria (variable dependiente), también exige que el estudiante halle la regla de correspondencia identificando la variable independiente y dependiente. (Ver Figura 11).

Individual 

EJERCICIO 2

El costo del ingreso a una feria es de 3 nuevos soles y el costo de la entrada a cada juego mecánico es de 4 nuevos soles. Si represento con “x” al número de juegos a los que se desea subir e “y” al dinero que gastaré en la feria, entonces ¿cuál es la representación simbólica de la relación de “x” con “y”?




Figura 11: Situación problemática número dos

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 44)

Después de haber presentado dos problemas, en el texto muestran la definición de función lineal y función lineal afín; en el registro algebraico $f(x) = mx$, para la función lineal y $f(x) = mx + b$, para la función lineal afín; donde “m” y “b” pertenecen al conjunto de números racionales diferentes de cero.

Estas definiciones son presentadas en un solo registro, el registro algebraico, esta limitación podría constituir un obstáculo didáctico. Al respecto, Brousseau (2001) afirma lo siguiente: “Los obstáculos didácticos son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo [...]” (Pág. 8). Es decir que, estos obstáculos provienen de los errores que se cometen en la enseñanza, pueden ser la metodología que usa el docente, los programas curriculares mal elaborados o la noción de un concepto mal enseñado.

Por tanto, sería recomendable que se mencione que “ x ” es la variable independiente y de igual manera indicar que $f(x)$ viene a ser la variable dependiente, es decir depende de los valores que toma “ x ”; mientras que “ m ” y “ b ” son cantidades constantes que pertenecen al conjunto de los números racionales diferentes de cero.

El texto define a la función lineal como función de proporcionalidad directa porque relaciona a dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, su cociente es constante. Dicho cociente recibe el nombre de constante de proporcionalidad y se representa con la letra “ m ”, también se le conoce como pendiente de la recta (ver Figura 12).

Función lineal y función lineal afín

TOMA NOTA EN TU CUADERNO

Una **función lineal** es aquella cuya regla de correspondencia es de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número diferente de cero que se llama constante de proporcionalidad. Una función lineal se llama también función de proporcionalidad directa.

Una **función lineal afín** es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x) = mx + b$, donde m y b son números racionales diferentes de cero.

Figura 12: Definición de función lineal y función lineal afín

Fuente: Matemática segundo de Secundaria (2012, p. 44)

A continuación, se presentan dos ejercicios que se encuentran expresados algebraicamente, ambos ejercicios tienen la misma constante de proporcionalidad (igual pendiente), lo que permitirá que el estudiante diferencie entre función lineal y función lineal afín. En ambos casos, pide realizar la gráfica de las dos funciones. Para Duval (2004), esta situación significa realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico. Consideramos que al realizar

dicha conversión aportará información para que el estudiante tenga una mejor aproximación al concepto de función lineal, que en la presentación algebraica no es posible clarificar.

En la página 44 del texto (ver Figura 13), se presenta un ejemplo con el siguiente enunciado: “Grafica y analiza las siguientes relaciones [...]; creemos que en lugar de escribir “**las siguientes relaciones**”, debería decir las “**siguientes funciones**” porque puede prestarse a confusiones cuando el estudiante lea el ejemplo.

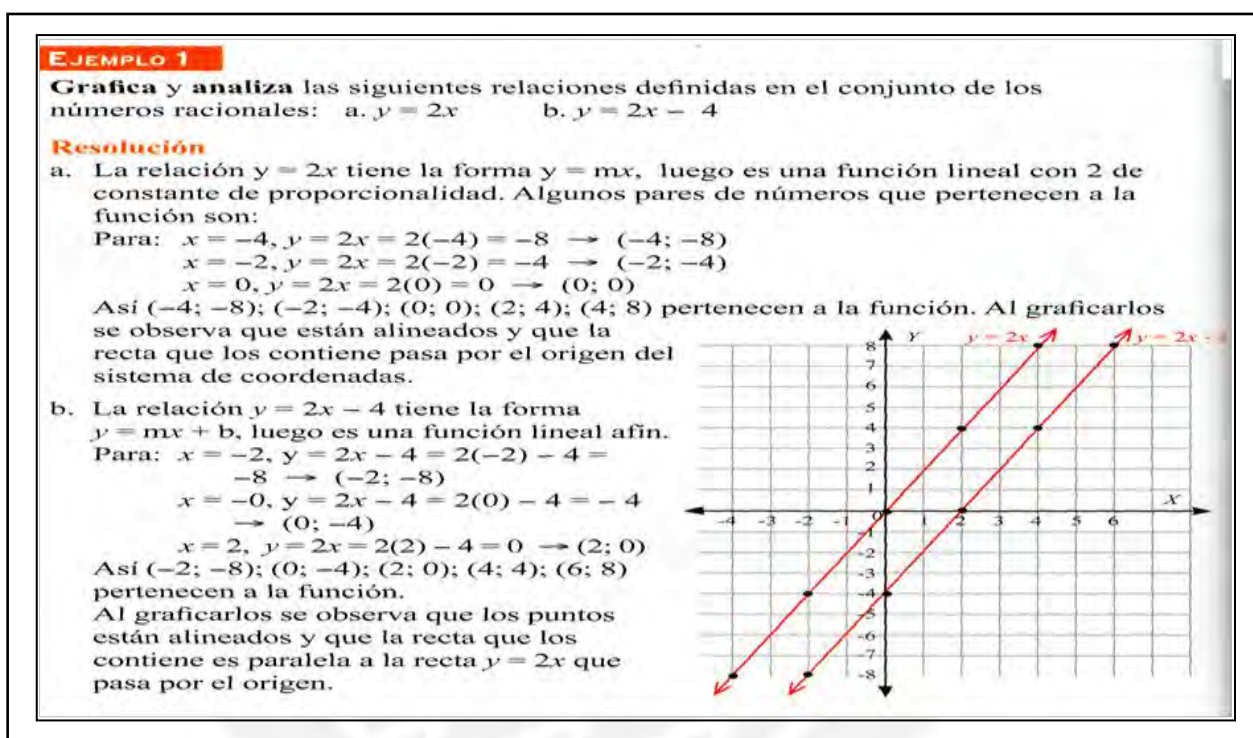


Figura 13: Ejercicios resueltos de función lineal y función lineal afín

Fuente: Matemática segundo de Secundaria (2012, p. 44)

El primer ejercicio tiene la forma $f(x) = mx$. En el libro, indican que se trata de una función lineal. Para graficar, desarrollan el ejercicio dando valores enteros a la variable independiente “x”, y realizan el tratamiento y obtienen cuatro pares ordenados que representan puntos del gráfico; al respecto, Duval (2004) afirma lo siguiente: “Un tratamiento es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal) respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad...” (Pág. 44). Luego añade: “El cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de escritura de los números, expresiones nuevas por expresiones dadas” (Pág. 44).

Luego del tratamiento, hallan los valores de $f(x)$, obteniendo de esta manera cuatro pares ordenados, estos representan a un punto y , luego, los unen formando una línea recta que, consideramos que no deben unir los puntos porque al iniciar la presentación del ejemplo en el libro se menciona “[...] **conjunto de los números racionales**” cuando en realidad deberían de escribir “conjunto de los números reales” por ser un conjunto más denso.

En el texto (Figura 13), el segundo ejercicio se presenta de la siguiente forma $y = mx + b$, e indica que se trata de una función lineal afín, cuando en realidad esa notación representa a la ecuación de una recta que representa gráficamente la función. En el libro, al referirse a la función (en este caso a la función lineal afín), deberían denotarla de la siguiente manera $f(x) = mx + b$; el desarrollo (tratamiento) es semejante al del primer ejercicio; presentan el resultado en el registro gráfico, analizan el gráfico haciendo uso del registro de lenguaje natural, indicando que el gráfico de $y = 2x$; pasa por el origen de coordenadas y es paralela al gráfico de $y = 2x - 4$.

Creemos que existe una incoherencia al presentar a la función lineal denotada de la siguiente forma: $y = mx$, y para la función lineal afín: $y = mx + b$; cuando estas representan a la ecuación de una recta empleada en geometría analítica, deben emplear la notación de función: $f(x) = mx, f(x) = mx + b$.

Asimismo, consideramos que sería necesario que, además de los dos ejercicios con igual pendiente, se proponga otra con pendiente negativa, y uno con diferente pendiente, de modo que los estudiantes realicen conjeturas respecto a qué sucede cuando tienen diferentes pendientes o cuando esta es negativa e incluso se puede añadir una pregunta como la siguiente: ¿Por qué crees que las dos rectas son paralelas?, los estudiantes de segundo grado de secundaria pueden responder esta pregunta, ya que en primer año de secundaria se les explica con lenguaje natural apoyado con representación gráfica lo siguiente: rectas paralelas son aquellas que, por más que se prolonguen, sus trayectorias nunca se cortan; creemos también que son necesarias las respuestas que brinden los estudiantes y estas deben ser escritas y fundamentadas debidamente.

La organización del texto de matemática para 2° de secundaria de la editorial Norma (2012) presenta el título desde el inicio, luego muestra una situación real (la ciudad de Chan Chan).

Emplean esta lectura como conexión para presentar un problema relacionado con ella. Como ayuda se exhibe un cuadro con las dos magnitudes escritas (número de personas y monto a pagar) y los datos numéricos que corresponden al número de personas. Creemos que no deben presentar el cuadro como una ayuda para que, de esta manera, el estudiante pueda resolver por sí mismo el problema empleando el procedimiento que crea conveniente y podría ser mejor si solicitamos a los estudiantes que resuelvan el problema con más de dos formas diferentes. Posteriormente, presentan un problema cercano a lo cotidiano de los estudiantes; en seguida, se brinda la definición de función lineal y función lineal afín. Al respecto, pensamos que no se debería iniciar por la definición, por el contrario, creemos que sería mejor comenzar con actividades que promuevan el pensamiento, las cuales ayuden a relacionar dos magnitudes y, de preferencia, que estas sean de variable continua; además, se debe proponer otras actividades donde los estudiantes tengan que relacionar problemas con gráficas y, finalmente, que la noción de función lineal resulte expresada por los estudiantes. Creemos que este nuevo planteamiento los beneficiaría a comprender mejor el objeto matemático función lineal.

Luego de haber realizado el análisis de los textos tanto a nivel superior como a nivel secundaria, observamos que no existe una uniformidad respecto al concepto de función lineal, por lo que para nuestra investigación consideraremos a la función lineal en su forma pendiente intersección con el eje de las ordenadas “y”, es decir: $f(x) = mx + b$ y como un caso particular cuando $b = 0$.

A continuación, presentamos el capítulo cuatro, el cual contiene el experimento de la investigación, la descripción de las actividades, instrumentos de recolección de información, análisis a priori y a posteriori, los resultados y las consideraciones finales.

CAPITULO IV: EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo, señalamos las características del escenario, de los sujetos de la investigación y describimos las actividades a realizar. Asimismo, señalamos el objetivo de cada actividad y el análisis a priori y a posteriori de acuerdo a algunos aspectos de la ingeniería didáctica.

4.1. Descripción y selección de los sujetos y del escenario de la investigación.

- **Escenario**

La parte experimental de esta investigación se desarrollará en la Institución Educativa “Nuestra Señora de Lourdes” ubicada en el distrito de Surquillo (Lima, Perú). Actualmente, cuenta con 24 secciones repartidas en dos turnos: mañana y tarde. Cada sección oscila entre los 25 y 30 estudiantes. En este grado, se brinda 6 horas pedagógicas semanales de Matemática (una hora pedagógica equivale a 45 minutos cronológicos). Para desarrollar las tres actividades, empleamos la misma aula que ocupan los estudiantes durante sus clases regulares.

- **Sujetos**

Las tres actividades se realizarán con 27 estudiantes cuyas edades oscilan entre trece y catorce años, quienes actualmente se encuentran en el segundo año de educación secundaria de la sección “D” en el turno de la mañana.

Para realizar el análisis del trabajo realizado por los estudiantes, escogeremos a dos de ellos de manera aleatoria, a los que llamaremos María y Juan. A continuación, describiremos a los dos estudiantes.

María y Juan han estudiado el primer año en la misma sección, ambos recibieron la misma formación académica conforme a lo establecido en el currículo nacional. De igual manera, los contenidos que corresponden al área de Matemática del primer año han sido desarrollados con apoyo de los textos que proporciona el Perú (2012). Estos libros son distribuidos a todos los estudiantes de forma gratuita; y, en el segundo año de secundaria, se viene trabajando con el texto que le corresponde.

María es una estudiante responsable, inquieta por aprender, pregunta sobre cualquier duda que tiene e investiga siempre sobre algo que no le queda claro; Juan es un estudiante responsable, pregunta poco, casi no interviene en clases, es callado y respetuoso.

En las tres actividades, los estudiantes trabajarán individualmente. En la parte experimental, participarán también el profesor investigador, un observador y una colaboradora.

4.2. Descripción de las actividades

Para llevar a cabo nuestra investigación, hemos desarrollado una secuencia de tres actividades que serán realizadas en tres encuentros, los cuales pasamos a detallar (ver Figura 14).

ENCUENTRO	ACTIVIDAD	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	DURACIÓN
I	Actividad 1	“Dándonos prisa llegamos temprano a nuestra institución educativa” (la idea de esta actividad fue tomada de la Tesis de Ospina, 2012).	45 minutos
II	Actividad 2	“Limpiemos y llenemos de agua la piscina”	60 minutos
III	Actividad 3	“ Refinería la Pampilla”	90 minutos

Figura 14: Descripción de las actividades de investigación

La primera actividad consta de tres preguntas y será desarrollada individualmente; en la primera pregunta, los estudiantes deben relacionar las narraciones hechas por Mario, Juan y Ricardo con su respectiva representación en el plano cartesiano; en la segunda, a los estudiantes se les presenta la narración hecha por Bryan en el registro de lengua natural y deben realizar la representación en el plano cartesiano; en la tercera pregunta, se presenta un gráfico en el plano cartesiano y los estudiantes tienen que crear la narración hecha por Sebastián (registro de lengua natural), en esta actividad no intervienen el docente investigador ni los observadores.

La segunda actividad es un problema que consta de tres preguntas de respuestas abiertas, el

cual será resuelto individualmente; esta actividad es un problema propio del concepto de función lineal expresado en registro de lengua natural donde intervienen magnitudes de variable continua (aquellas que admiten infinitos valores numéricos); creemos que las preguntas formuladas van a propiciar la conversión del registro de lengua natural al registro numérico, al registro algebraico y al registro gráfico.

La tercera actividad es un problema que consta de seis preguntas, la cual será desarrollada individualmente. Las magnitudes que intervienen son continuas. Dicha actividad también es un problema que parte de una situación real expresado en registro de lengua natural y es propia del concepto de función lineal. Creemos que la segunda pregunta inducirá a los estudiantes a que, en la pregunta tres, realicen la conversión al registro gráfico, con lo cual pensamos que los estudiantes estarían aproximándose a la noción del concepto de función lineal. Es necesario mencionar que las tres actividades se desarrollarán durante las horas del dictado del curso de Matemática, de esta manera podremos contar con la totalidad de los estudiantes.

4.3. Técnicas e instrumentos de recolección de información

La **técnica** empleada fue la observación, la cual nos permitió apreciar directamente el desarrollo de los hechos y recoger datos directamente de los estudiantes que participaron en nuestra investigación.

- **La observación:** en la aplicación de nuestras actividades estuvimos presentes el docente investigador como primer observador, una alumna de la maestría en enseñanza de la matemática de la PUCP como segunda observadora, y un docente del área de matemática de la I. E. “Nuestra Señora de Lourdes” como tercer observador.

Los **instrumentos** de recolección de información nos permitieron recabar datos sobre los sujetos de estudio. Los instrumentos empleados en nuestra investigación fueron:

- **Fichas de actividades:** cada ficha contiene las actividades, indicaciones y sus respectivas preguntas. Estas actividades se desarrollaron en tres encuentros con diferentes duraciones, como se indica en la Figura 14.

- **Ficha de observación:** esta se empleó para que los observadores tengan más facilidad de registrar la información producto de la observación que realizaron, lo cual convergió el posterior análisis de nuestra investigación. Esta ficha fue elaborada previamente para cada una de las actividades.

Los **recursos** son los medios que nos sirvieron para llevar a cabo nuestra investigación; los recursos empleados fueron:

- Cámara fotográfica
- Lapicero, lápiz, reglas, papel y borrador
- Pizarra acrílica
- Fichas impresas con las tres actividades

4.4. Análisis de las actividades

A continuación, presentamos el análisis a priori y a posteriori de las actividades trabajadas por los estudiantes María y Juan. Para realizar este análisis, hemos tomado en cuenta aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004).

Actividad 1. Presentamos la ficha de trabajo de esta actividad.

DÁNDONOS PRISA LLEGAMOS TEMPRANO A NUESTRO CENTRO DE TRABAJO

Mario, Juan, Ricardo, Bryan y Sebastián, son cinco amigos que trabajan para la empresa de taxi "VIAJE SEGURO", todos ellos viven en las Torres de Limatambo del distrito de San Borja, que se encuentra ubicado a unos 400 metros de distancia de la empresa de taxi en la que laboran como choferes, como la distancia es corta siempre van caminando. Todos los días su turno empieza a las 00:30 a.m., por lo que de sus casas deben de salir a las 0:00 horas, para llegar temprano. Cierta día, Mario, Juan y Ricardo contó al administrador de la empresa de taxi lo que les sucedió cuándo se dirigían a su centro de trabajo.

Mario narra su recorrido: Señor administrador yo siempre salgo a las 0:00 horas, y voy despacio. Pues tengo suficiente tiempo, pero hoy al querer cruzar la Av. Angamos el semáforo estaba en luz roja por lo que tuve que esperar 1 minuto, hasta las 0:21 a.m., continuando mi camino con más prisa que antes, llegando a la empresa 5 minutos antes.

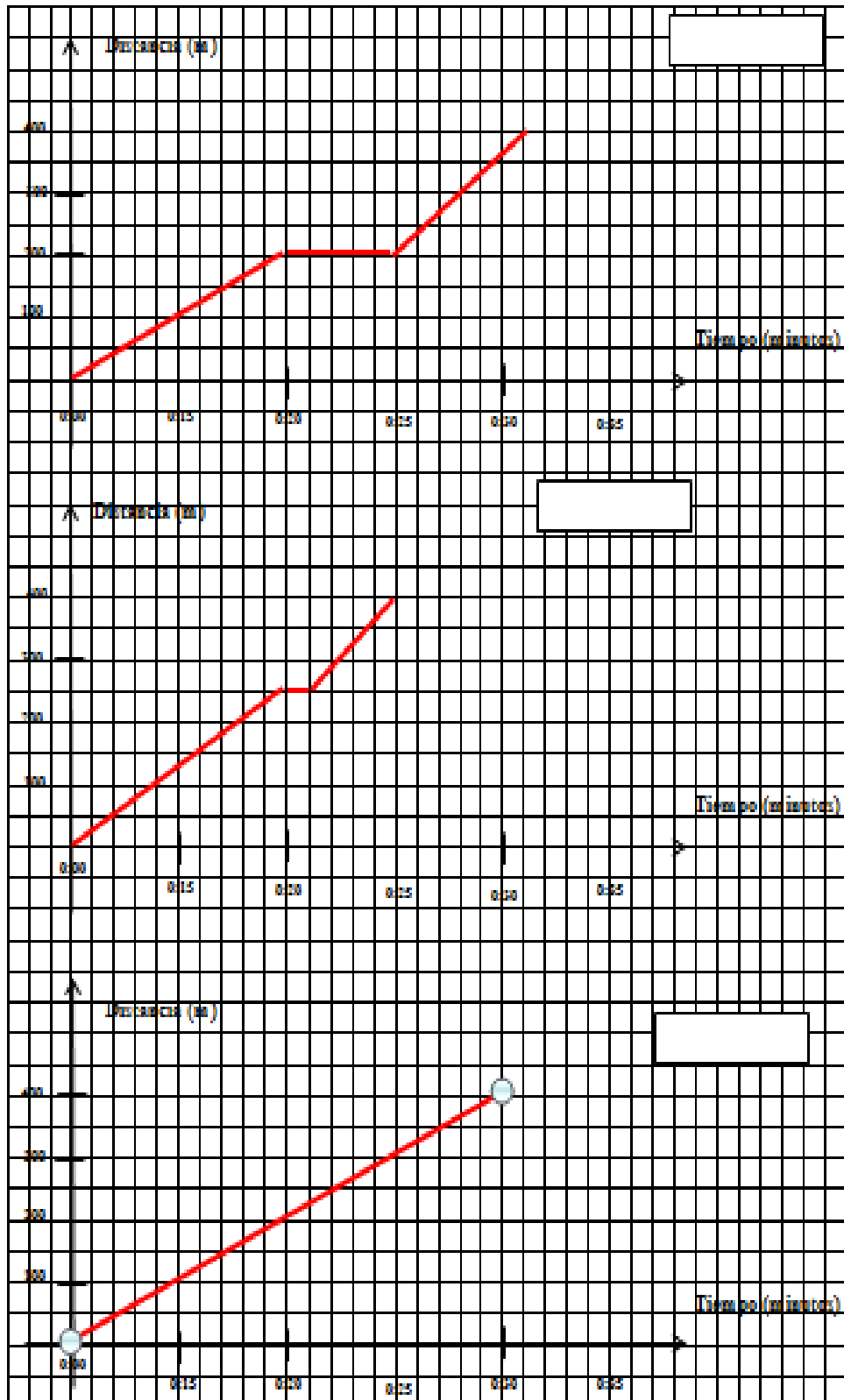
Juan narra su recorrido: Hoy salí de mi casa a la misma hora que salió Mario, caminé sin darme prisa como todos los días, para suerte mía cuando tenía que cruzar la Av. Angamos, el semáforo se encontraba en luz verde, y no tuve que detenerme hasta llegar a la empresa, llegando a la hora exacta.

Ricardo narra su recorrido. Yo también salí de mi casa a las 0:00 horas., pero en la mitad del camino me encontré con Susana una amiga que estudia de noche, y me detuve a conversar durante cinco minutos, al darme cuenta de la hora, nos despedimos y aceleré mis pasos, el semáforo en la Av. Angamos se encontraba en luz verde, y seguí con la misma velocidad el resto del camino, pero llegué tarde a la empresa.

PREGUNTA Nº1.

Con esta información:

- Relacione cada una de las narraciones realizadas por Mario, Juan y Ricardo, con su respectivo gráfico. Recuerde que debes de leer muy bien la actividad planteada.
- Escriba en el recuadro el nombre que corresponda.

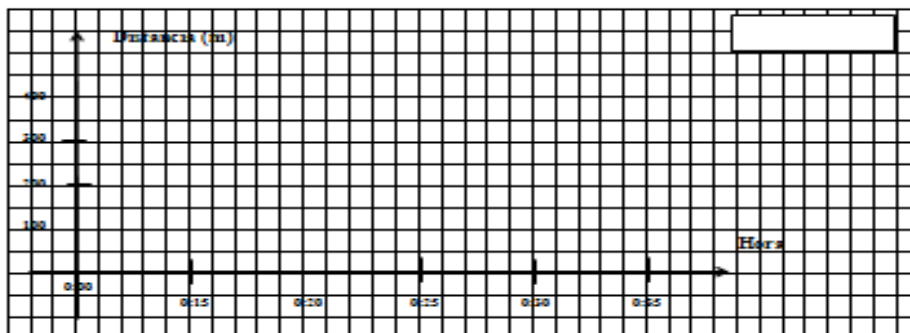


PREGUNTA N°2

Bryan narra su recorrido. Yo salí de mi casa a la misma hora que Mario, Juan, Ricardo y Sebastián, ni muy lento ni muy rápido, cuando el reloj marcaba 0:15 a.m., me encontraba en la mitad del camino, en esos momentos pisé mal y tuve que caminar lento, al llegar a la Av. Angamos ya eran las 0:25 a.m. y el semáforo se encontraba en luz roja por lo que tuve que esperar un minuto, continuando el resto del camino igual de lento pues el pie me dolía, llegando a la empresa cinco minutos tarde.

Con esta información:

- Represente gráficamente el relato de Bryan.

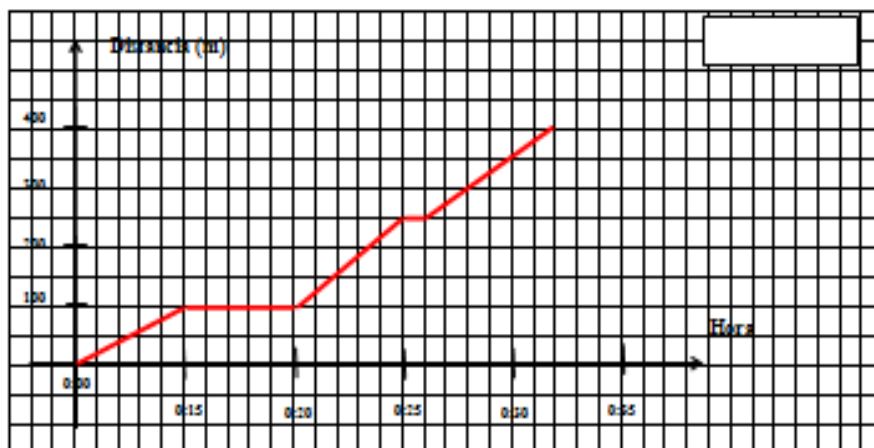


PREGUNTA N°3

A continuación presentamos la representación gráfica correspondiente a Sebastián.

En base a ello:

- Narre lo que Sebastián le contó al administrador de la empresa de taxi.



Objetivo de la pregunta 1

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes logren relacionar el problema expresado en registro de lengua natural con su respectivo gráfico (registro gráfico).

Análisis a priori de la pregunta 1

Esperamos que en esta primera pregunta los estudiantes relacionen el enunciado en registro de lengua natural con el registro gráfico; creemos que se guiarán de las cantidades numéricas presentados en ambos registros. Es muy probable que relacionen la variación de velocidad con la inclinación de los segmentos y un segmento horizontal con un cuerpo en reposo o sin movimiento.

Objetivo de la pregunta 2

Averiguar si los estudiantes relacionan el problema expresado en el registro de lengua natural y realizan la conversión al registro gráfico con sus respectivos tratamientos (trazos de la función de acuerdo a la variación de la velocidad o al estado de reposo, en este caso, de Bryan, hallar los puntos).

Análisis a priori pregunta 2

Esperamos que los estudiantes se guíen de los tres gráficos presentados en la primera pregunta, además de los parámetros presentados en ambos registros, de esta manera podrían realizar el gráfico respectivo.

Creemos que los estudiantes van a relacionar los cambios de velocidad expresados en el registro de lengua natural (ni muy lento ni muy rápido, caminar lento, igual de lento) con los segmentos inclinados representados en el registro gráfico.

Objetivo de la pregunta 3

Identificar de qué manera los estudiantes, a partir del registro gráfico, generan la historia de Sebastián en el registro de lengua natural con tratamientos propios de este registro tales como descripción de situaciones de variación de velocidad, explica.

Análisis a priori pregunta 3

Creemos que los estudiantes identificarán los tres momentos en que Sebastián se encuentra en movimiento (donde hay un cambio de velocidad). De igual manera, creemos que los estudiantes relacionarán los segmentos constantes u horizontales que significan estar en reposo o permanecer detenido, donde deben emplear las palabras adecuadas. También suponemos que los estudiantes se guiarán de las situaciones anteriores y realizarán la conversión del registro gráfico al registro de lengua natural.

Análisis del trabajo de María

Pregunta 1. Trabajo realizado por María

Dándonos prisa llegamos temprano a nuestro centro de trabajo

Mario, Juan, Ricardo, Bryan y Sebastián, son cinco amigos que trabajan para la empresa de taxi “VIAJE SEGURO”, todos ellos viven en las Torres de Limatambo del distrito de San Borja, que se encuentra ubicado a unos 400 metros de distancia de la empresa de taxi en la que laboran como choferes, como la distancia es corta siempre van caminando. Todos los días su turno empieza a las 00:30 a.m., por lo que de sus casas deben de salir a las 0:00 horas, para llegar temprano. Cierta día, Mario, Juan y Ricardo contó al administrador de la empresa de taxi lo que les sucedió cuándo se dirigían a su centro de trabajo.

Mario narra su recorrido: Señor administrador yo siempre salgo a las 0:00 horas, y voy despacio. Pues tengo suficiente tiempo, pero hoy al querer cruzar la Av. Angamos el semáforo estaba en luz roja por lo que tuve que esperar 1 minuto, hasta las 0:21 a.m., continuando mi camino con más prisa que antes, llegando a la empresa 5 minutos antes.

Juan narra su recorrido: Hoy salí de mi casa a la misma hora que salió Mario, caminé sin darme prisa como todos los días, para suerte mía cuando tenía que cruzar la Av. Angamos, el semáforo se encontraba en luz verde, y no tuve que detenerme hasta llegar a la empresa, llegando a la hora exacta.

Ricardo narra su recorrido. Yo también salí de mi casa a las 0:00 horas, pero en la mitad del camino me encontré con Susana una amiga que estudia de noche, y me detuve a conversar durante cinco minutos, al darme cuenta de la hora, nos despedimos y aceleré mis pasos, el semáforo en la Av. Angamos se encontraba en luz verde, y seguí con la misma velocidad el resto del camino, pero llegué tarde a la empresa.

Figura 15: Actividad N.º 1, pregunta 1. Producción de María

Análisis a posteriori pregunta 1

María relacionó correctamente las narraciones de Mario, Juan y Ricardo presentadas en registro de lengua natural con su respectivo registro gráfico, para ello María subraya las narraciones de Mario, Juan y Ricardo como podemos observar en la Figura 15. Estos subrayados corresponden en su mayoría a los valores numéricos presentes en el plano cartesiano y, en algunos casos, al estado en reposo de los personajes de la historia, contribuyendo de esta manera a que María haya relacionado correctamente cada uno de los relatos con su respectivo gráfico. Creemos que es necesario mencionar que María no identifica, en la narración de Juan, la variación de la velocidad “**caminé sin darme prisa**”, puesto que no realiza el subrayado respectivo, así mismo creemos que María relacionó correctamente cada historia con su respectivo gráfico tomando en cuenta los datos numéricos “**la hora de partida, el momento en que se encontraron con un amigo o el semáforo en luz roja y la hora de llegada**”.

Luego del análisis de esta pregunta, pensamos que los tratamientos en el registro de lengua natural son fundamentales para realizar la conversión al registro gráfico, de esta manera se confirma nuestro análisis a priori.

Pregunta 2. Trabajo realizado por María

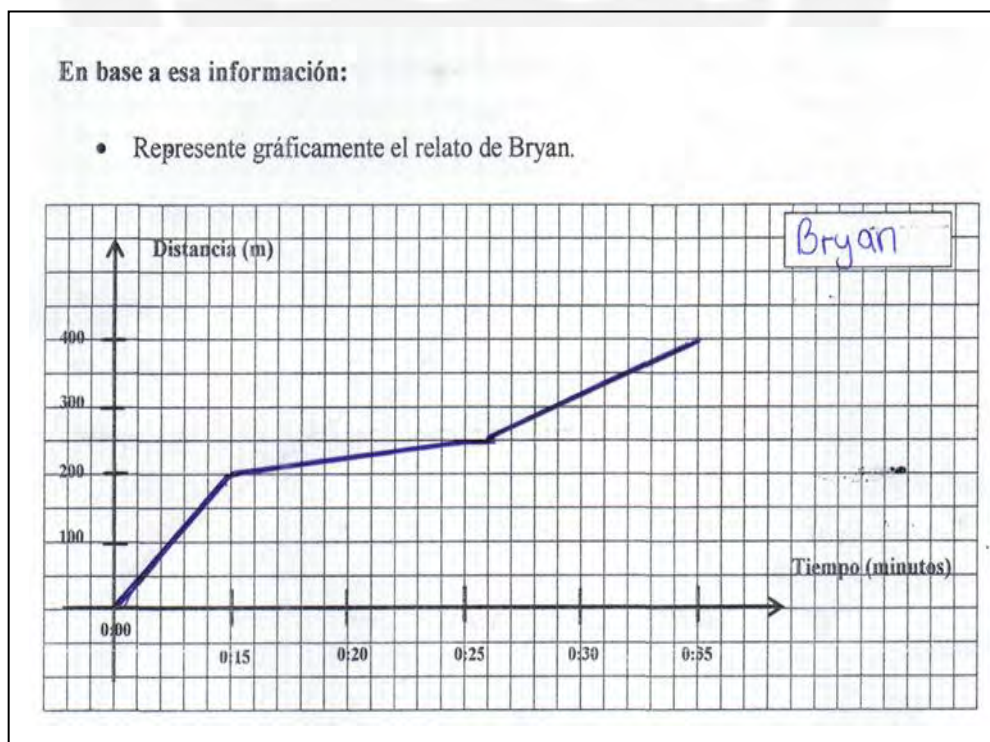


Figura 16: Actividad N.º1, pregunta 2. Producción de María

Análisis a posteriori pregunta 2

Como podemos observar, María reconoce, en el registro de lengua natural, los parámetros necesarios para realizar un gráfico adecuado sobre la narración de Ricardo: las horas, el tiempo de permanencia (semáforo). Del mismo modo, constatamos que identifica la variación del tiempo (caminar lento) y lo plasma en el gráfico. Afirmamos ello al observar el subrayado que realiza María. De esta manera, podemos aseverar que María realiza la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico efectuando el trazado de los segmentos de acuerdo a la variación de la velocidad de Bryan. En relación a nuestro análisis a priori, confirmamos que María se guía de los parámetros presentados en el registro de lengua natural y en el registro gráfico; asimismo, relaciona los cambios de velocidad expresados en el registro de lengua natural con los segmentos representados en el registro gráfico.

Pregunta 3. Trabajo realizado por María

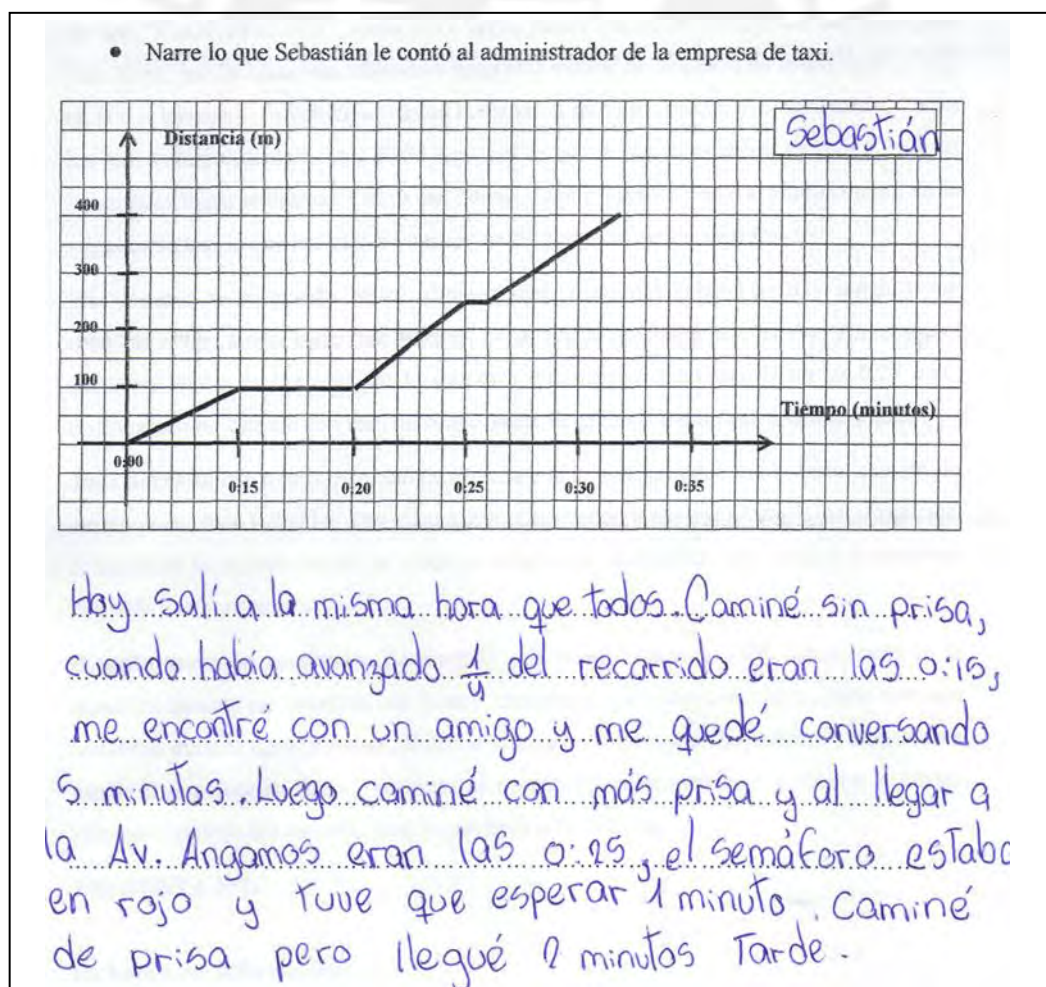


Figura 17: Actividad N.º 1, pregunta N.º 3. Producción de María

Análisis a posteriori pregunta 3

En la Figura 17, notamos que María ha tenido en cuenta los tres momentos en que Sebastián camina con un cambio de velocidad representado por los segmentos inclinados, establece la relación del cambio de velocidad con la mayor o menor inclinación en una porción de la gráfica, empleando términos como **“caminé sin prisa”**, **“con más prisa”** o bien asocia un segmento horizontal con velocidad cero al escribir **“tuve que esperar”**; es decir describe situaciones de variación de velocidad, discrimina la información que son tratamientos en el registro de lengua natural; así también, reconoce el parámetro 100m y en su lugar emplea **“¼ del recorrido”**.

María reconoce todos los parámetros, los cambios de velocidad y los dos momentos de reposo presentes en el registro gráfico y los pone en correspondencia en el registro de lengua natural, en consecuencia, María realiza la conversión del registro gráfico al registro de lengua natural. Al respecto, Duval (2004) plantea “que el cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación” (p. 62).

Análisis del trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 1

Para contestar esta pregunta, Juan no realizó ningún escrito ni marca en especial en la hoja de la actividad 1. Los nombres de Mario, Juan y Ricardo se encuentran correctamente ubicados en el gráfico respectivo. Creemos que Juan relaciona algunos datos del registro de lengua natural, (nos referimos a la hora de salida, llegada, tiempo de espera, etc.) con el registro gráfico (parámetros numéricos).

Pregunta 2. Trabajo realizado por Juan

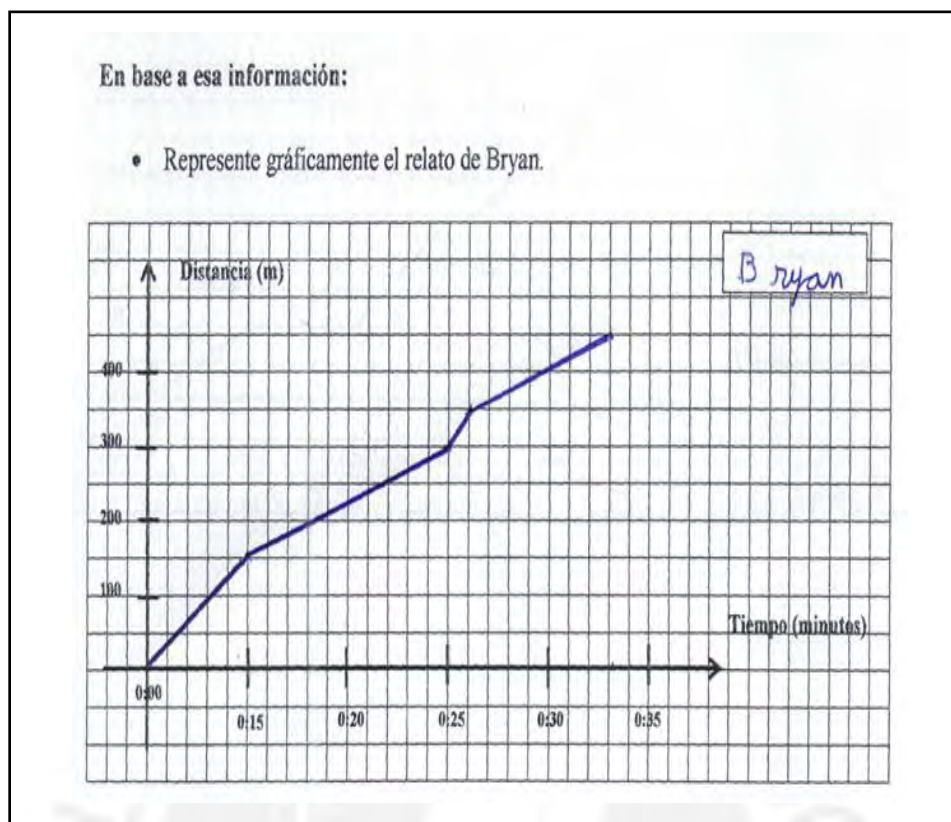


Figura 18: Actividad N.º1, pregunta 2. Producción de Juan

Análisis a posteriori pregunta 2

Como podemos observar, Juan identifica y relaciona algunos parámetros numéricos presentes en el registro de lengua natural y registro gráfico (0:00, 0:15, 0:25). Juan no identifica “**en la mitad del camino, cinco minutos tarde**”, no discrimina el hecho de que Bryan se “**encuentra esperando**” expresado en registro de lengua natural y en el registro gráfico significa en movimiento, pues dibuja un **segmento inclinado** hacia la derecha; en la producción de Juan, no existe evidencias (subrayados, marcas) que nos indiquen que reconoce la variación de la velocidad. Concluimos que Juan no realiza la conversión del registro de lenguaje natural al registro gráfico, puesto que no grafica el trazado de los segmentos de acuerdo a la variación de la velocidad de Bryan, creemos que esto se debe a una falta de interpretación general de la situación y de reconocimiento de los parámetros presentes en el plano cartesiano.

Pregunta 3. Trabajo realizado por Juan

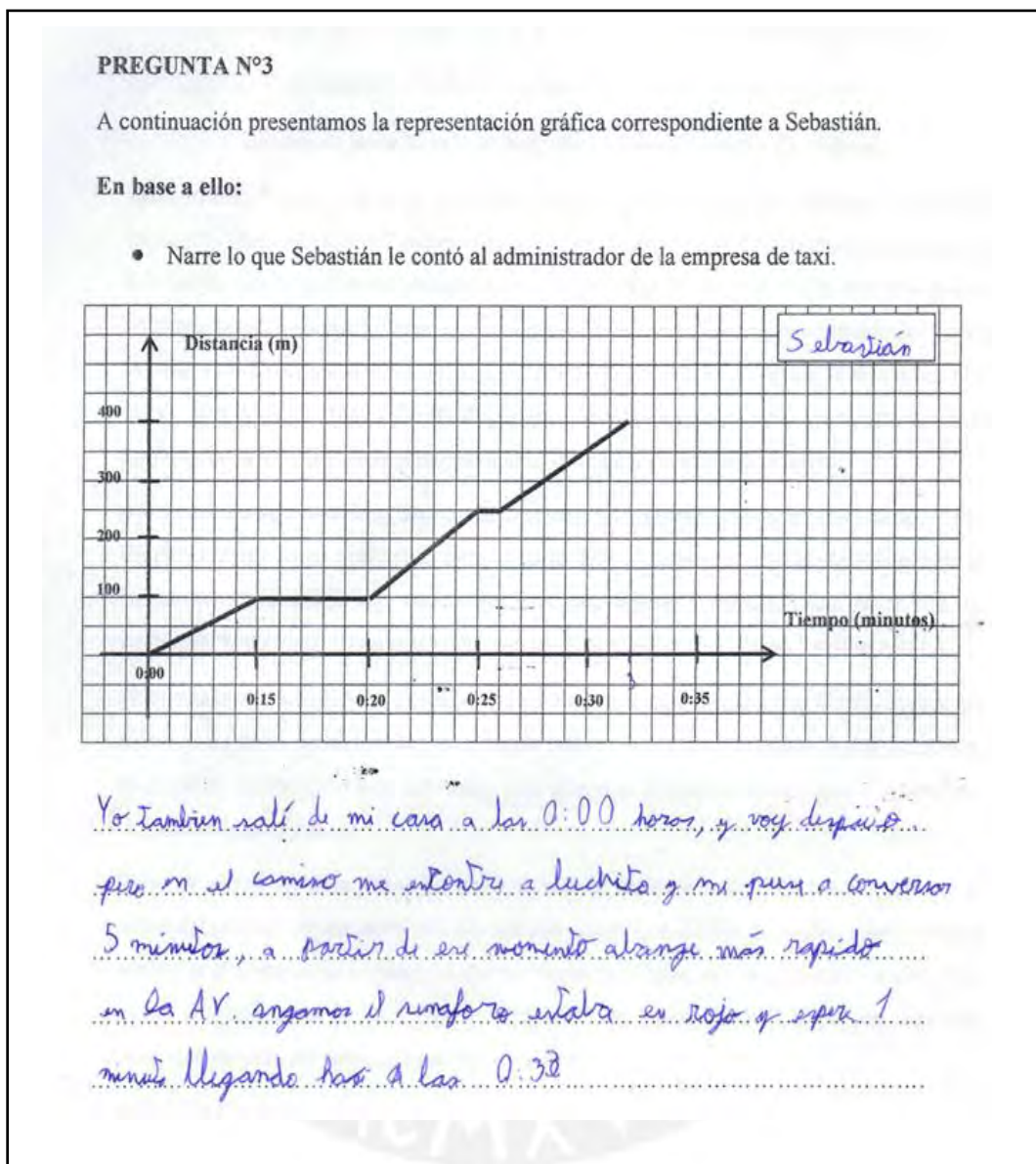


Figura 19: Actividad N. °1, pregunta 3. Producción de Juan

Análisis a posteriori pregunta 3

Juan reconoce tres parámetros presentes en el registro gráfico, los que se refieren a la hora (0:00; 0:15-0:20 y 0:32), aunque el segundo no lo escribe, pero entendemos que es implícito ya que Juan escribe “**conversando 5 minutos**”. Juan reconoce que, luego del primer tramo, la pausa dura cinco minutos y Juan escribe “**me puse a conversar**”, de igual manera reconoce la

segunda pausa que dura un minuto y escribe “esperé 1 minuto”; asimismo, reconoce dos de los tres cambios de velocidad que son el primer tramo (voy despacio) y el segundo tramo (avancé más rápido); Juan no reconoce el tercer tramo en el que se evidencia variación de velocidad.

En la descripción verbal, Juan muestra que reconoce algunos elementos presentes en el registro gráfico y trata de plasmar la conversión al registro de lengua natural; creemos que, para efectuar una interpretación correcta de una representación gráfica, es necesario que Juan realice una observación general a toda la gráfica y entender el significado de cada uno de los parámetros presentes en el registro gráfico.

A continuación, presentamos la actividad N.º 2 (ver Figura 20). Es un problema de variable continua que consta de tres preguntas de respuestas abiertas: parte del registro de lengua natural. Creemos que las preguntas formuladas van a propiciar la conversión entre el registro de lengua natural, registro numérico, registro algebraico y gráfico.

ACTIVIDAD N.º 2
LIMPIEMOS Y LLENEMOS DE AGUA LA PISCINA

Teresa, mamá de María le recuerda que si quiere invitar a sus amigas para que jueguen en la piscina, lo primero que tiene que hacer es limpiar y le recuerda que la capacidad de la piscina es de 8000 litros.

Una vez limpia la piscina, María conecta la manguera al caño y empieza a entrar agua a razón de 1600 litros por hora. Considerando que el agua ingresa de forma constante.

Responda las siguientes preguntas.

1.- ¿En cuánto tiempo María llenará la piscina? ¿Qué procedimientos emplearon para resolver la situación? Emplear más de dos procedimientos.

.....

.....

.....

2. ¿Si la piscina tuviese una capacidad de 14400 litros, cuánto tiempo tardaría en llenarse? ¿Cuál es el procedimiento que realizarían para averiguarlo?

.....

.....

.....

3. ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular la cantidad de agua que ingresa a la piscina en un determinado tiempo? Justifique su respuesta.

Figura N.º 20: Actividad N.º 2 “Limpiemos y llenemos de agua la piscina”

Objetivos de la pregunta 1

Los objetivos de esta actividad es que los estudiantes consigan:

- Realizar la conversión del registro de lengua natural al registro numérico, gráfico y algebraico, efectuando tratamientos de los registros mencionados.
- Representar en el registro gráfico los puntos que pertenecen a las parejas conformadas por el tiempo (horas) y volumen (m^3).

Análisis a priori de la pregunta 1

Esperamos que los estudiantes realicen la conversión del registro de lengua natural al registro numérico y realicen tratamientos en este registro, efectuando una división y que concluyan escribiendo que la piscina se llenará en 5 horas.

$$\frac{8000}{1600} = 5 \quad \text{La piscina se llenará en 5 horas.}$$

Otra manera de responder la pregunta es empleando la técnica de la regla de tres simple y, luego, realizarían tratamientos de multiplicación y división (registro numérico). Los estudiantes tendrían que identificar que las magnitudes son directamente proporcionales, para ello se preguntarían: “Si para llenar una piscina de menor capacidad se necesitan menos horas, entonces, para llenar una piscina con mayor capacidad se necesitarán más horas”. Y el planteamiento quedaría así:

$$\begin{array}{l} 1600 \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ hora} \\ 8000 \text{ litros} \rightarrow x \text{ horas} \\ x = \frac{8000 \text{ l. } 1h}{1600l} = 5h \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1600 \text{ litros} \rightarrow 1 \text{ hora} \\ 8000 \text{ litros} \rightarrow x \text{ horas} \\ x = \frac{8000 \text{ l. } 1h}{1600l} = 5h \end{array}} \right\} \text{Tratamientos en el} \\ \text{registro numérico}$$

También pueden responder a la pregunta realizando la conversión del registro de lengua natural al registro numérico mediante una descomposición del llenado completo en llenados parciales; como se muestra a continuación, los tratamientos realizados son sumas que pertenecen al registro numérico:

$$1600 \text{ l} + 1600 \text{ l} + 1600 \text{ l} + 1600 \text{ l} + 1600 \text{ l} = 8000 \text{ litros}$$

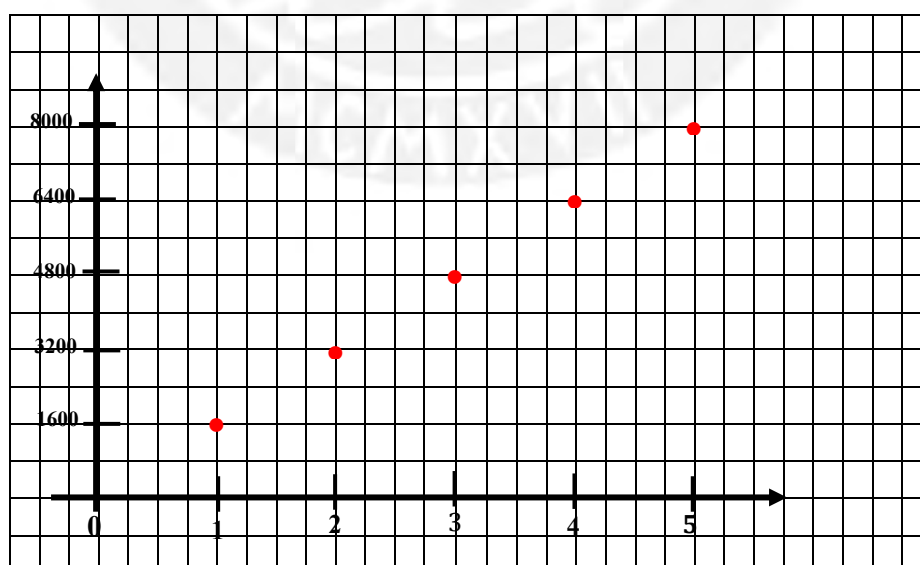
Cada 1600 l equivale a 1 hora = 5 horas

Al solicitar a los estudiantes que presenten más de dos procedimientos pensamos que podrían emplear una tabla para organizar la información, creemos que la tabla la emplearían como un medio de ayuda para realizar la conversión al registro gráfico.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Litros	0	1600	3200	4800	6400	8000

También es posible que utilicen el registro gráfico (plano cartesiano) e identifiquen que los patrones numéricos que corresponden a la magnitud tiempo se relacionan uno a uno con los patrones numéricos correspondientes a la magnitud capacidad y, de esta manera, ubiquen los puntos en el plano cartesiano. Creemos que es posible que empleen la tabla anterior como apoyo para realizar la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico.

Del mismo modo, podría suceder que algunos estudiantes presenten el plano cartesiano como se muestra a continuación.



A continuación, presentaremos los objetivos y análisis a priori de la pregunta dos. Creemos que es necesario mencionar que esta pregunta es similar a la pregunta uno, asimismo suponemos que las conversiones y tratamientos que vayan a emplear los estudiantes sean semejantes a las usadas en la pregunta uno.

Objetivos de la pregunta 2

Esta pregunta tiene por finalidad reforzar las conversiones realizadas por los estudiantes en la pregunta uno para aproximarse a la noción de función lineal. Además de ello, identificar qué registros de representación semiótica son empleados por los estudiantes para calcular el tiempo que demorará el llenado de una piscina con mayor capacidad.

Análisis a priori de la pregunta 2

Esperamos que los estudiantes realicen un tratamiento en el registro numérico, dividiendo 14400 entre 1600, obteniendo de esta manera la respuesta.

Tratamientos en el registro numérico	{	14400	1600
		14400	9
Respuesta: La piscina tardaría en llenarse 9 h.			

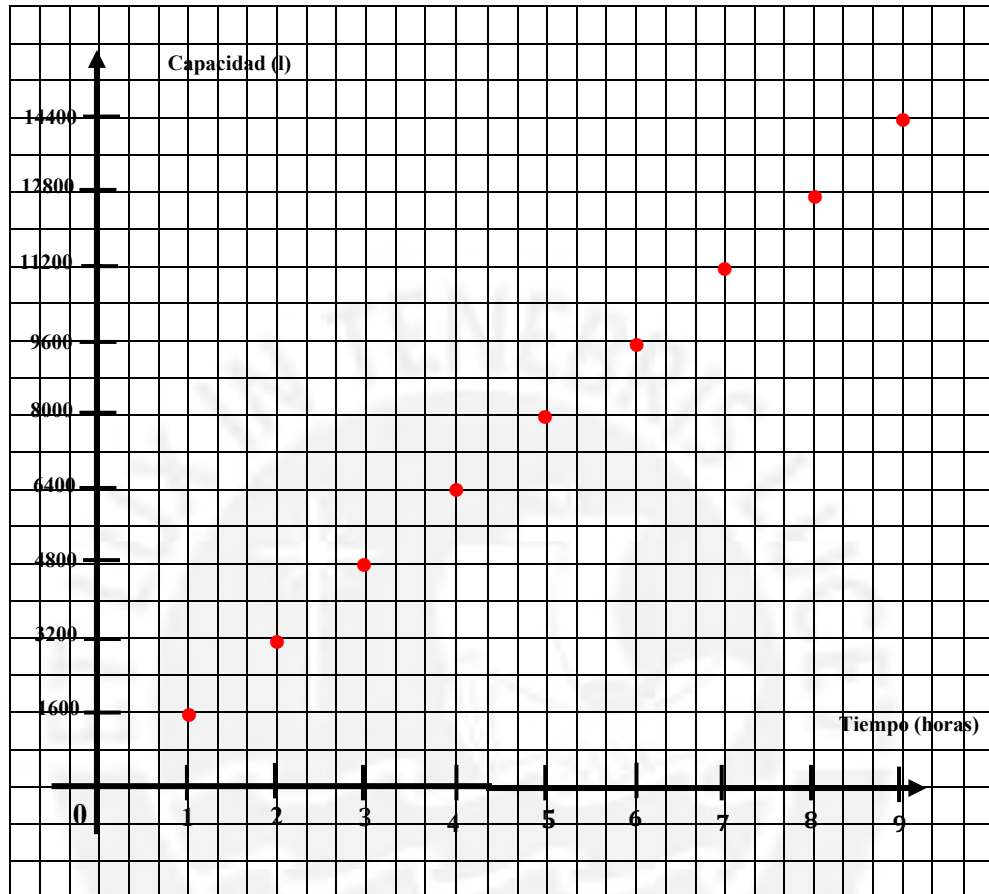
Consideramos que, para dar solución a esta pregunta, es posible que los estudiantes empleen la regla de tres simple directa efectuando los mismos tratamientos que en la pregunta 1.

8000 litros → 5 horas
14400 litros → x horas

También es posible que utilicen la tabla empleada en la pregunta uno, los estudiantes tendrían que aumentar columnas hasta llegar a los 14400 litros realizando tratamientos en el registro numérico de adición o multiplicación.

Tiempo(h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Capacidad(l)	0	1600	3200	4800	6400	8000	9600	11200	12800	14400

Otra posible forma de responder la pregunta es empleando el registro gráfico (plano cartesiano) del siguiente modo:



Objetivos de la pregunta 3

- El propósito de esta pregunta es lograr que los estudiantes encuentren una expresión algebraica mediante tratamientos en el registro numérico. Para ello, tendrían que identificar el valor numérico constante y el valor numérico variable (variable independiente).

Análisis a priori de la pregunta 3

Puede ocurrir que algunos de los estudiantes no entiendan lo que se solicita en la pregunta. Ante esta situación, el docente investigador podría intervenir con las siguientes interrogantes: Suponiendo que la piscina tiene una capacidad de 9600 litros o una cantidad mucho mayor, ¿cómo harían ustedes, sin plantear una regla de tres simple, sin usar una tabla o una división, dar la respuesta con pequeñas operaciones simples?

Creemos que algunos estudiantes entenderán lo que se les solicita y hallarán la expresión (regla de correspondencia). Es posible que esta expresión esté representada en términos de la variable “x”, puede ser cualquier otra variable, puesto que los estudiantes de segundo grado de secundaria recién empiezan a habituarse al empleo de variables.

Análisis del trabajo de María

Pregunta 1. Trabajo realizado por María

① 1ra forma

litros	horas
1600	1
8000	x

$$x = \frac{8000 \times 1}{1600} = \frac{8000}{1600} = 5 \text{ horas}$$

operación

$$\begin{array}{r} 8000 \\ 160 \overline{) 8000} \\ \underline{8000} \\ 0 \end{array} \quad 5$$

Esta es la regla de tres simple directa; a más horas, más litros.

Figura 21: Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Trabajo de María

Análisis a posteriori pregunta 1

El primer procedimiento que emplea María para contestar esta pregunta es realizando la conversión del registro de lengua natural al registro numérico y plantea una regla de tres simple directamente proporcional. Creemos que María comprende el problema y reconoce que las magnitudes capacidad (litros) y tiempo (horas) son directamente proporcionales. Realiza tratamientos de multiplicación y división; luego, halla la respuesta, a lo que Duval (2006) llama “economía del tratamiento”, pues es más simple para María realizar los tratamientos en el registro numérico.

A continuación, presentamos el segundo procedimiento realizado por María con su respectivo análisis a posteriori.

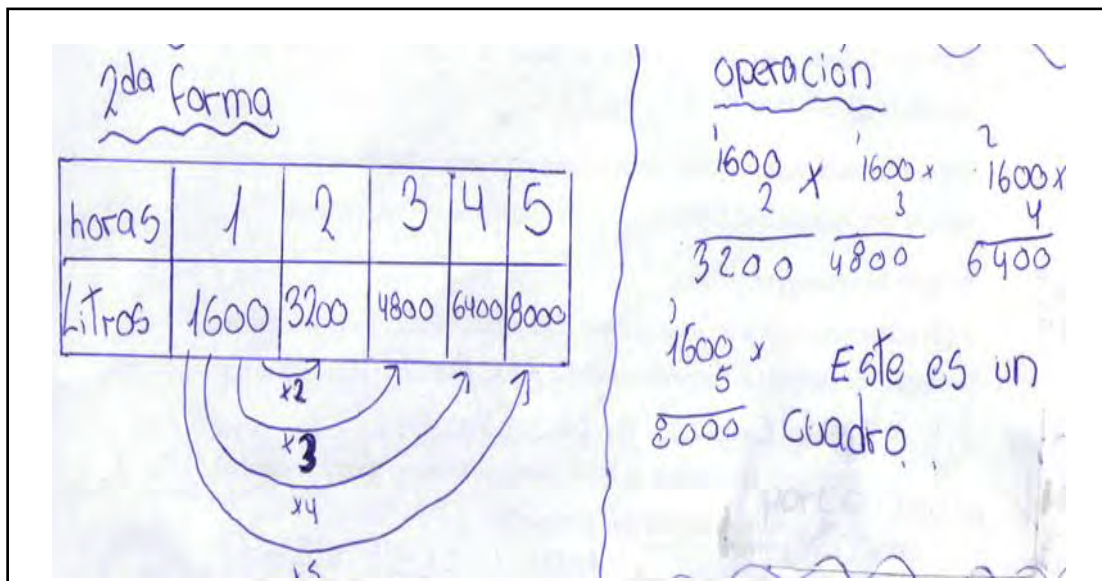


Figura 22: Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Trabajo de María

El segundo procedimiento empleado por María es una tabla al que llama “cuadro”. Es evidente que María reconoce las magnitudes que intervienen como el tiempo (horas) y la capacidad (litros). María realiza tratamientos de multiplicación en el registro numérico y, de esta manera, completa la tabla dando respuesta a la pregunta. Ahora, veremos el tercer procedimiento de María.

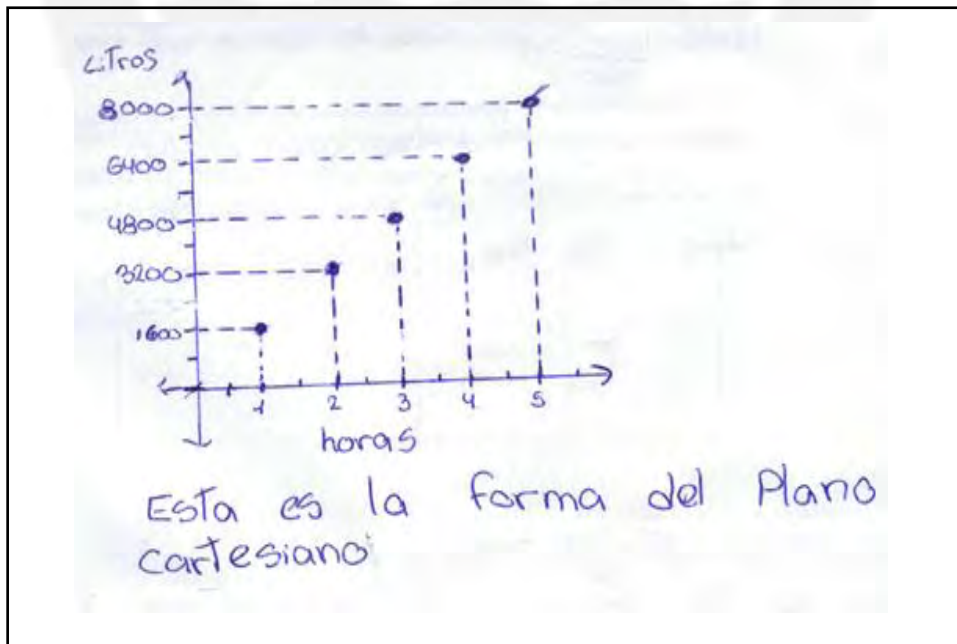


Figura 23: Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Trabajo de María

Es posible que María se apoye en la tabla para realizar la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico (plano cartesiano), para ello María realiza tratamientos en el registro gráfico al trazar las dos rectas que corresponden al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas, luego divide en escalas ambos ejes, ubica los puntos e identifica las magnitudes que covarían: tiempo (horas) y capacidad (litros). Estas tres formas usadas por María es por la condición del problema, donde se solicita a los estudiantes que realicen **más de dos procedimientos**, lo que obliga a María a realizar las siguientes conversiones: del registro de lengua natural al registro numérico y del registro de lengua natural al registro gráfico. Según Duval (2004), al realizar conversiones, estas favorecen la aproximación en la comprensión del concepto de función lineal.

De esta manera, se confirma lo que habíamos previsto en nuestro análisis a priori.

Pregunta 2. Trabajo realizado por María

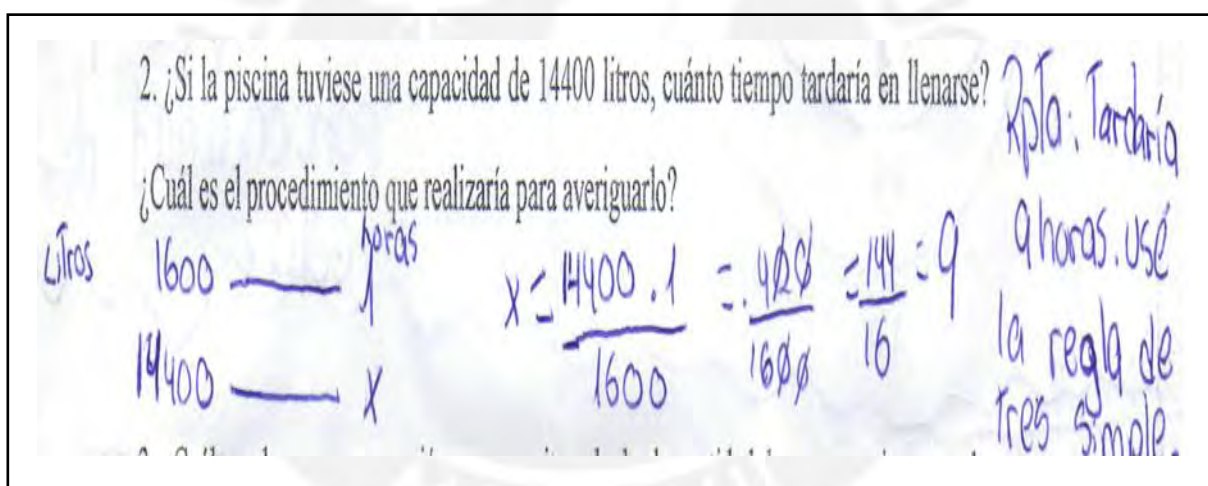


Figura 24: Actividad N.º 2, pregunta 2. Trabajo de María

Análisis a posteriori pregunta 2

Para responder a la pregunta, María realiza una conversión del registro de lengua natural al registro numérico. Para ello, emplea la regla de tres simple directa identificando que las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales. Es probable que emplea la regla de tres simple porque es la más cercana y común a su labor como estudiante. Los tratamientos realizados son una multiplicación y una división propios del registro numérico, esto le sirve para responder a la pregunta. Las magnitudes que intervienen en la solución del problema se

encuentran explícitas en el registro de llegada y, la respuesta en el registro de lengua natural, es apropiada.

De este modo, pensamos que María logró lo que habíamos previsto en nuestro análisis a priori.

Pregunta 3. Trabajo realizado por María

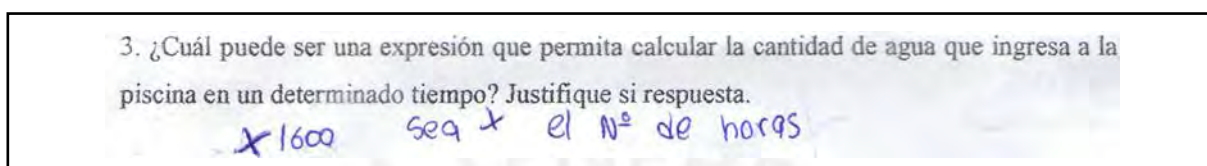


Figura 25: Actividad N.º 2, pregunta 3. Trabajo de María

Observamos que María expresa su respuesta en el registro algebraico, no existen evidencias de tratamientos efectuados para que María llegue finalmente a la expresión que presenta, por lo que suponemos que todo el trabajo realizado por María en las anteriores preguntas le sirvió para deducir y dar con la respuesta correcta, asimismo podemos afirmar que María identifica a “ x ” como la variable que varía, la cual representa al número de horas y a 1600 como la cantidad constante.

Para responder a esta interrogante, María preguntó: “Profesor, ¿lo que desea es que halle la fórmula?” A lo que el docente colaborador respondió: “Bueno, si es como una fórmula es una expresión que te permita calcular de forma directa la cantidad de agua que ingresa a la piscina en un determinado tiempo”. María, apoyada en esta breve explicación, pudo dar respuesta al problema. De esta manera, confirmamos nuestro análisis a priori.

A continuación, presentamos el análisis del trabajo realizado por el estudiante Juan.

Análisis del trabajo de Juan

Pregunta 1. Trabajo realizado por Juan

Solución:

① - 1 H — 1600
 x — 8000

Primero:

$$x = \frac{8000 \times 1}{1600} = \frac{8000}{1600} = 5$$

Figura 26. Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Producción de Juan (1ra forma)

Análisis a posteriori pregunta 1

Juan inicia el proceso de solución realizando una conversión del registro de lengua natural al registro numérico. Esto se puede evidenciar cuando, luego de plantear una regla de tres simple directa, Juan realiza tratamientos de multiplicación y división. Creemos que Juan sabe que las magnitudes tiempo y capacidad son directamente proporcionales, pues se pregunta si en una hora ingresa 1600 litros, entonces en cuántas horas ingresará 8000 litros, obteniendo, de esta manera, la respuesta.

A continuación, presentamos la segunda forma empleada por Juan para contestar la pregunta uno.

Segunda:

1	2	3	4	5
1600	3200	4800	6400	8000

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 1600 \times \\ \hline 5 \\ \hline 8000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \times \\ \hline 2 \\ \hline 3200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \times \\ \hline 3 \\ \hline 4800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \times \\ \hline 4 \\ \hline 6400 \end{array}$$

Figura 27. Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Producción de Juan (2da forma)

En la segunda forma, Juan construye una tabla formada por filas y columnas. En la tabla, se observa que Juan no reconoce las magnitudes que intervienen en la situación (tiempo y capacidad). Del mismo modo, Juan no relaciona el tiempo cero con la expresión en lenguaje natural “... **limpia la piscina**” y la relación de variación proporcional entre las magnitudes mencionadas. Para completar la tabla, Juan realiza tratamientos en el registro numérico, como se puede apreciar al lado derecho (ver Figura 27). Ubica los valores hallados en la tabla, lo que permite a Juan contestar la pregunta.

Ahora, presentamos el tercer procedimiento realizado por el estudiante Juan.

Handwritten work for Figure 28:

$$\begin{array}{r} \text{Tercera} \\ 1600 \times \\ \underline{\quad 5} \\ 8000 \end{array}$$

Rsp. 5 horas tardaría

Figura 28. Actividad N.º 2, pregunta N.º 1. Producción de Juan (3ra forma)

Creemos que la tercera forma que usa Juan para contestar la pregunta uno es producto de los tratamientos efectuados en la primera y segunda forma. Suponemos que observa lo trabajado en la forma anterior (ver Figura 27, parte superior derecha), se da cuenta de que el producto tiene como resultado 8000, entonces opta por copiar. De esta manera, Juan estaría respondiendo la primera pregunta.

Pregunta 2. Trabajo realizado por Juan

Handwritten work for Figure 29:

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \quad 14 \text{ --- } 1600 \\ \quad \times \text{ --- } 14400 \\ \quad \times = \frac{14400 \times 1}{1600} = \frac{14400}{1600} = 9 \end{array}$$

Rsp. 9 horas tardaría

Figura 29. Actividad N.º 2, pregunta N.º 2. Producción de Juan

Análisis a posteriori pregunta 2

Juan realiza la conversión del registro de lengua natural al registro numérico planteando una regla de tres simple directa. Realiza tratamientos de multiplicación y división que pertenecen al registro numérico, por lo que podemos afirmar que Juan identifica que las magnitudes que varían son directamente proporcionales. Podemos añadir que los tratamientos de multiplicación y división son lo que Juan conoce mejor y opta por estos tratamientos en el registro numérico, los cuales resultan ser los más convenientes para su propósito.

Esto nos lleva a confirmar lo que estaba previsto a priori.

Pregunta 3. Trabajo realizado por Juan

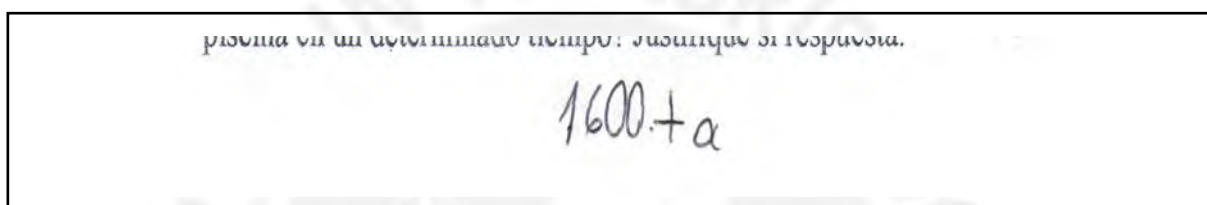


Figura 30. Actividad N.º 2, pregunta N.º 3. Producción de Juan

Juan no logra resolver correctamente esta pregunta a pesar de las indicaciones orales que se dio a todos los estudiantes. En lugar de representar su respuesta como un producto, Juan representa como una suma. Suponemos que Juan identifica a 1600 como la cantidad constante y la letra “a” representa la cantidad variable. No existen evidencias de que Juan realice tratamientos en algún registro para dar su respuesta. Creemos que Juan confunde la multiplicación con la suma. Suponemos que se debe a que Juan lee el enunciado sin analizar ni entender y se limita a realizar una lectura rápida para hallar la expresión que se le solicita.

Teniendo en cuenta el análisis de esta pregunta, creemos que los tratamientos en el registro en lengua natural son esenciales para realizar la conversión al registro numérico, algebraico y gráfico.

A partir del trabajo realizado por Juan, observamos que no contemplamos, en nuestro análisis a priori, la expresión de la forma “a + 1600” escrita por Juan.

A continuación, presentamos nuestra tercera actividad.

ACTIVIDAD 3:

REFINERÍA LA PAMPILLA

Una refinería de petróleo o destilería es una plataforma industrial destinada a la refinación del petróleo crudo, por medio de la cual, mediante un proceso adecuado, se obtienen diversos combustibles fósiles capaces de ser utilizados en motores de combustión (gas oil, gasolina, etc.), aceites minerales, asfaltos y otros. La refinería “La Pampilla” está ubicada en el distrito de Ventanilla, provincia del Callao, esta se abastece por tuberías, cuenta con una capacidad total de almacenamiento de 12840 metros cúbicos de petróleo crudo.

Cierto día el supervisor de la planta se percató que en la refinería existen 3000 metros cúbicos de petróleo crudo, además sabe que constantemente cada hora ingresa 2460 metros cúbicos.

Teniendo en cuenta esta información responda las siguientes preguntas.

1. ¿En cuánto tiempo la planta de refinería contará con los 12840 metros cúbicos de petróleo crudo? Justifique su respuesta. Emplear más de dos procedimientos para encontrar la respuesta.
2. ¿Si la planta tuviese una capacidad de 17760 metros cúbicos de petróleo crudo, cuantas horas tardaría en llenarse? Use la siguiente tabla, para responder la pregunta.

Tiempo (T)	T ₁ =	T ₂ =	T ₃ =	T ₄ =	T ₅ =	T ₆ =	T ₇ =
Volumen (V)	V ₁ =	V ₂ =	V ₃ =	V ₄ =	V ₅ =	V ₆ =	V ₇ =

3. A partir de la tabla, de que otra forma puedes representar los valores obtenidos. Justifique su respuesta.
4. ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular la cantidad de petróleo crudo que ingresa en un determinado tiempo. Justifique su respuesta.

5. Halle el valor numérico de las siguientes expresiones.

- a) $m = \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} =$
- b) $m = \frac{V_2 - V_2}{T_2 - T_2} =$
- c) $m = \frac{V_4 - V_2}{T_4 - T_2} =$
- d) $m = \frac{V_5 - V_4}{T_5 - T_4} =$

6. ¿Qué relación tiene el valor encontrado de “m” con la expresión hallada en la pregunta 4 con la representación obtenida en la pregunta 3?

Figura 31: Actividad N.º 3

Objetivo de la pregunta 1

- Identificar qué registros de representación semiótica emplean los estudiantes al determinar la respuesta, así como la conversión y los tratamientos que ellos realizan.

Análisis a priori de la pregunta 1

Los estudiantes, al leer el enunciado del problema, comprenderán que en la refinería ya existen 3000 m^3 de petróleo crudo y, a partir de esta cantidad, realizarían tratamientos en el registro numérico.

$12840 - 3000 = 9840$ $9840 : 2460 = 4$	} Tratamientos en el Registro Numérico
Respuesta: La planta contará en 4 horas con 12840 m^3 de petróleo crudo.	

Es posible que algunos estudiantes, luego de realizar el tratamiento en el registro numérico y obtener la diferencia que viene a ser 9840, planteen una regla de tres simple directa. En este caso, ellos tendrán que identificar que las magnitudes volumen y horas son directamente proporcionales.

$2460 \text{ m}^3 \mapsto 1h$ $9840 \text{ m}^3 \mapsto xh$	$xh = \frac{9840 \text{ m}^3 \cdot 1h}{2460 \text{ m}^3}$	$x = 4h$, respuesta.
--	---	-----------------------

Es muy probable que los estudiantes realicen la conversión al registro numérico efectuando un tratamiento de división entre la capacidad total de la refinería con la cantidad de petróleo crudo que ingresa a cada hora. Observemos:

12840	2460	
12300	5,21...	}
- 5400		
4920		
4800		
2460		
234		

Tratamientos en el registro numérico

Y responderían 5,21...horas

De esta forma se obtendrá una respuesta equivocada, ya que los estudiantes no estarían considerando los 3000 m³ de petróleo que existen en la refinería. Es probable que no consideren el petróleo existente por una mala comprensión e interpretación del problema. Por tanto, la conversión del registro de lengua natural al registro numérico sería incorrecta.

Al igual que en la actividad 2, como la condición de esta pregunta es que los estudiantes presenten más de dos procedimientos para encontrar la respuesta, pensamos que podrían emplear una tabla para organizar la información; sin embargo, para que los estudiantes completen la tabla tendrían que realizar tratamientos de suma en el registro numérico e identificar que, para un tiempo T=0, le corresponde 3000m³ de petróleo crudo que se encuentran en la planta de refinería.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4
Capacidad (m ³)	3000	5460	7920	10380	12840

Para completar la tabla anterior, los tratamientos en el registro numérico podrían ser:

$$3000+2460=5460$$

$$5460+2460=7920$$

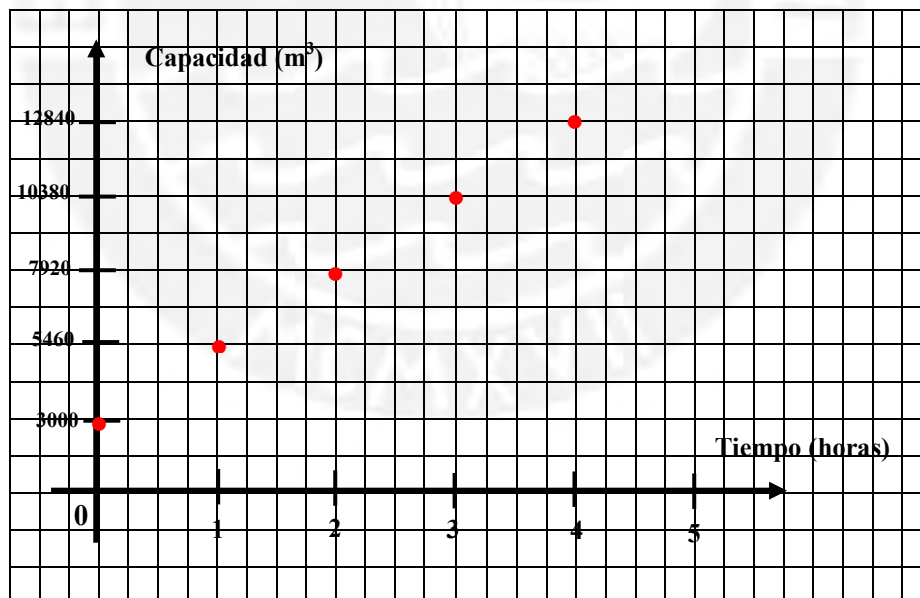
$$7920+2460=10380$$

$$10380+2460=12840$$

Tratamientos en el registro numérico

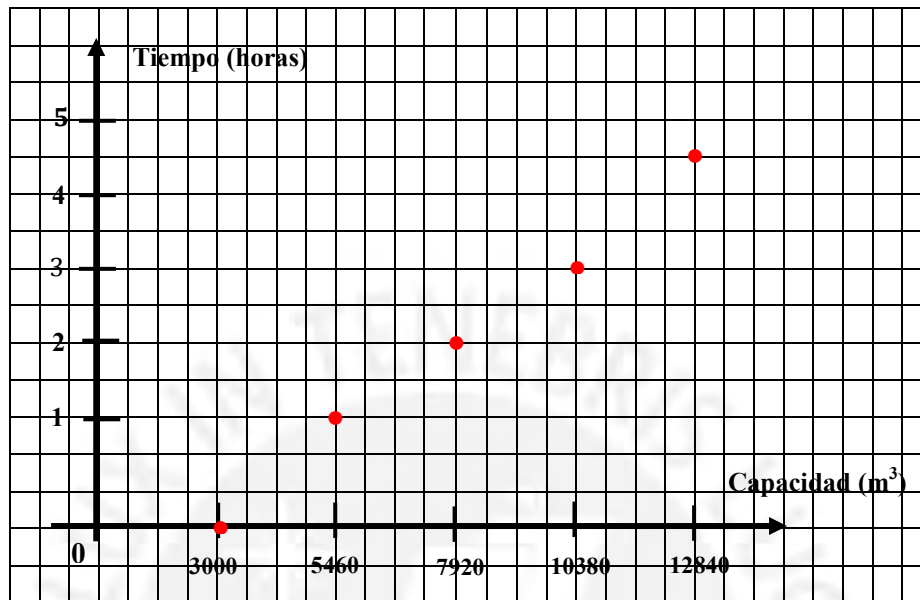
Respuesta: La refinería contará en 4 horas con los 12840 m³ de petróleo crudo.

Del mismo modo que en la actividad 2, es posible que los estudiantes realicen la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico. Empleando la tabla anterior como ayuda, los tratamientos en el registro gráfico son dibujar el eje de las abscisas “x”, el eje de las ordenadas “y”, dividir utilizando una escala adecuada en los ejes, ubicar las cantidades numéricas, las magnitudes que covarían y los puntos que pertenecen a la combinación del tiempo (hora) con la capacidad (m³). De esto, se obtiene la siguiente conversión:



Es probable que algunos de los estudiantes no identifiquen que al origen de las abscisas le corresponde el eje de las ordenadas los 3000m³ de petróleo crudo que existen en la refinería, entonces no graficarían el punto sobre el eje y, correspondiente a dicha cantidad.

Podría suceder que algún estudiante realice la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico en diferente orden, es decir, que los valores numéricos que corresponden al tiempo los ubique en el eje “y” y los valores numéricos del volumen los ubique en el eje “x”.



Objetivo de la pregunta 2

- El propósito de esta pregunta es que los estudiantes, partiendo de una tabla, organicen la información obtenida y, luego de realizar tratamientos de sustracción y adición en el registro numérico, descubran la proporcionalidad entre tiempo y volumen.

Análisis a priori de la pregunta 2

Es probable que los estudiantes completen la tabla con la información que tienen en el enunciado del problema, expresado en registro de lengua natural, obteniendo los siguientes datos y, de esta forma, estarían respondiendo a la pregunta.

Tiempo (T)	$T_1=0$	$T_2=1$	$T_3=2$	$T_4=3$	$T_5=4$	$T_6=5$	$T_7=6$
Volumen (V)	$V_1=3000$	$V_2=5460$	$V_3=7920$	$V_4=10380$	$V_5=12840$	$V_6=15300$	$V_7=17760$

Pensamos que algún estudiante, al momento de completar la tabla, considere a $T_1=1$ y $V_1=5460$, debido a una falta de comprensión del problema, de esta manera estarían respondiendo parcialmente bien, y como la tabla está diseñada para que en la última columna se obtenga el resultado, pensamos que podría confundir a los estudiantes con la respuesta que obtengan.

Tiempo (T)	$T_1=1$	$T_2=2$	$T_3=3$	$T_4=4$	$T_5=5$	$T_6=6$	$T_7=7$
Volumen (V)	$V_1=5460$	$V_2=7920$	$V_3=10380$	$V_4=12840$	$V_5=15300$	$V_6=17760$	$V_7=20220$

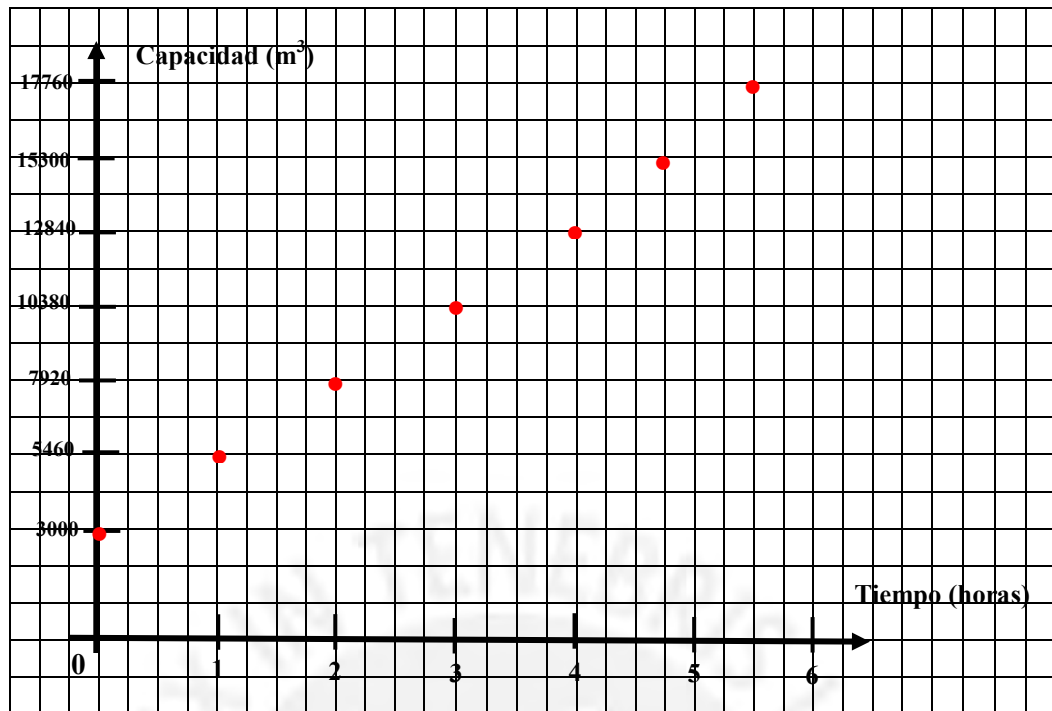
Creemos que, al completar la tabla, los estudiantes tendrán una percepción de movimiento, puesto que los datos numéricos de ambas magnitudes cambian constantemente de forma proporcional.

Objetivo de la pregunta 3

- La finalidad de esta pregunta es que los estudiantes, al usar como apoyo la tabla de la pregunta dos, puedan realizar la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico.

Análisis a priori de la pregunta 3

Luego de que los estudiantes comprendan el propósito de la pregunta, entonces es posible que empleen el registro gráfico (plano cartesiano) para representar la información obtenida en la tabla de la pregunta dos, obteniendo el siguiente gráfico.



Suponemos que algunos de los estudiantes no lleguen a emplear el registro gráfico (plano cartesiano) y realicen tratamientos de adición que pertenecen al registro numérico como presentamos a continuación.

$3000+2460=5460$	}	Tratamientos en el registro numérico
$5460+2460=7920$		
$7920+2460=10380$		
$10380+2460=12840$		
$12840+2460=15300$		
$15300+2460=17760$		
<p>Respuesta: La refinería contará en 6 horas con</p> <p>17760 m^3 de petróleo crudo.</p>		

Es probable que los estudiantes no unan los puntos con una línea recta, puesto que no han estudiado el objeto matemático función lineal.

Objetivo de la pregunta 4

- Esta pregunta se planteó con el objetivo de que los estudiantes encuentren la regla de correspondencia expresada con variables (no necesariamente en términos de x). Para ello, tendrían que identificar que la variable empleada representa el número de horas, la cual es una cantidad numérica variable; del mismo modo, identificar aquellas cantidades numéricas que permanecen constantes.

Análisis a priori de la pregunta 4

Se espera que los estudiantes, luego de haber resuelto las preguntas 1; 2; 3 y 4 consigan realizar la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico. Esta expresión permitirá calcular la cantidad de petróleo crudo que ingresa a la planta en un determinado tiempo (regla de correspondencia), así los estudiantes estarán en la capacidad de interpretar el significado de esta expresión.

$3000+2460(0) = 3000$
 $3000+2460(1) = 5460$
 $3000+2460(2) = 7920$
 $3000+2460(3) = 10380$
 $3000+2460(4) = 12840 \dots$

Tratamientos en el registro numérico

Entonces se tendrá: $3000+2460(x)$

Podría ocurrir que, algunos de los estudiantes no entiendan el enunciado de la pregunta, ante esta situación el docente investigador puede intervenir expresando lo siguiente: “Quiere decir que, a partir de lo trabajado hasta el momento, ustedes hallen una expresión que permita calcular, con operaciones cortas, la cantidad de petróleo que existe en un determinado tiempo. Es decir, si solicito que ustedes respondan cuánto petróleo habrá en 20 horas, en 40 horas, etc., sin realizar operaciones de sumas consecutivas, por ejemplo, añadiendo 2460 al anterior, y a este resultado nuevamente 2460, y así sucesivamente, hasta llegar a la respuesta, pues... eso no es lo que se quiere que hagan”.

Objetivo de la pregunta 5

- La finalidad de esta pregunta es la generación de la noción de pendiente de una función lineal, y que comprendan que esta es un valor constante e igual para dos puntos distintos.

Análisis a priori de la pregunta 5

Es probable que los estudiantes hallen los valores numéricos de la expresión presentada, para ello realizarían, en primer lugar, sustracciones tanto en el numerador como en el denominador para finalmente dividir estos resultados, los cuales vienen a ser tratamientos en el registro numérico. Los estudiantes concluirían que los valores numéricos obtenidos son iguales; de esta manera, se darían cuenta de que si restan dos valores consecutivos que pertenecen tanto al volumen y al tiempo para finalmente dividirlos, entonces siempre obtendrían resultados iguales.

Objetivo de la pregunta 6

- La finalidad de esta pregunta es que, a partir de lo trabajado en las preguntas 3 y 4, los estudiantes logren identificar que el número 2460 representa a la cantidad de m^3 que ingresa a la planta de refinería y que, además, este valor numérico es constante.

Análisis a priori de la pregunta 6

Luego de que los estudiantes hayan respondido las preguntas tres y cuatro, es probable que respondan afirmando que en las tres preguntas se trata del mismo número que viene a ser 2460, siendo este número constante pues representa a la cantidad de m^3 de petróleo que ingresa cada hora.

A continuación, presentamos el análisis a posteriori del trabajo realizado por María.

Análisis del trabajo de María

Pregunta 1. Trabajo realizado por María

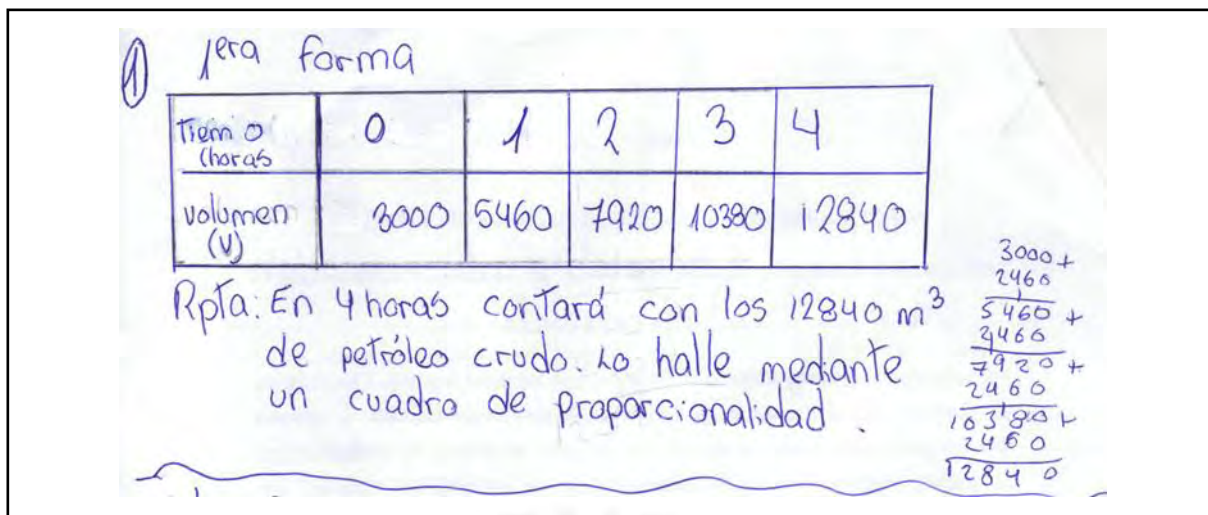


Figura 32: Actividad N.º 3, pregunta N.º 1. Trabajo de María (1ra forma)

Análisis a posteriori pregunta 1

Presentamos la primera forma de cómo María desarrolla la primera pregunta. El orden en que María presenta las magnitudes tiempo y volumen es evidencia del reconocimiento que tiene de las variables que intervienen en el problema y de sus relaciones de variación proporcional, además, la información que María presenta en la tabla es acorde con la información expresada en el registro de lengua natural. Ella reconoce, en primer lugar, los 3000 m³ de petróleo crudo que existe en la refinería y los asocia con el tiempo cero y, para completar la tabla, realiza la conversión del registro de lengua natural al registro numérico: efectúa tratamientos de sumas consecutivas y estos resultados son escritos en la tabla.

En este primer procedimiento, tal como lo previsto a priori, María emplea la tabla para responder la pregunta.

A continuación, presentamos la **segunda forma** hecha por María.

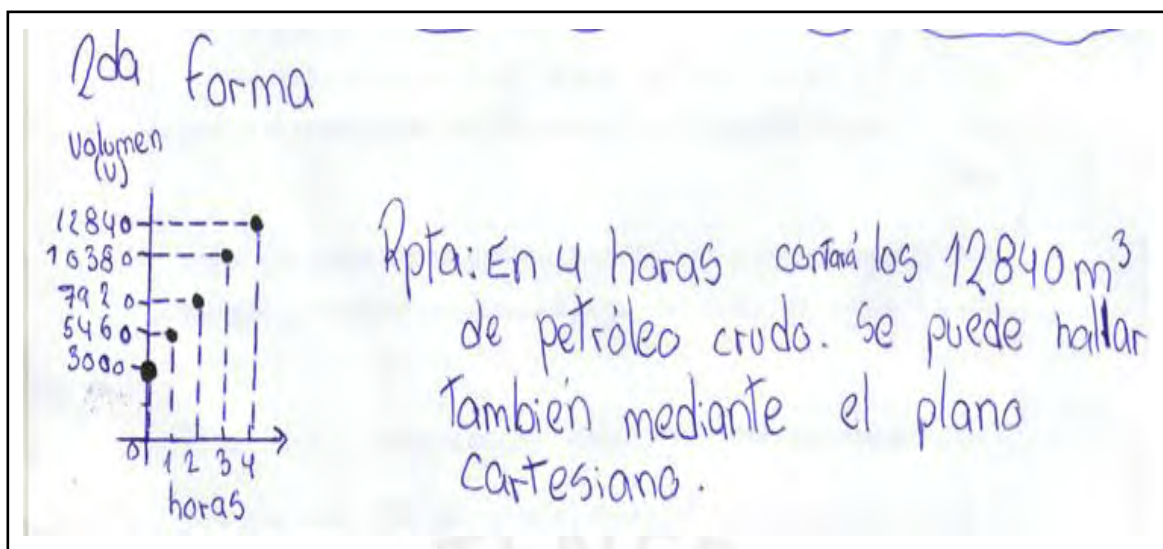


Figura 33: Actividad N.º 3, pregunta N.º 1. Trabajo de María (2da forma)

En esta segunda forma, tal como habíamos previsto a priori, María usa el plano cartesiano, realizando la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico, tal como se puede apreciar en la Figura 33. Con apoyo en la tabla (primera forma), María realizó la conversión al registro gráfico, empleando los siguientes tratamientos: traza dos rectas que vienen a ser el eje de las ordenadas “y” y el eje de las abscisas “x”, ambas divididas a escala adecuada; ubica las magnitudes en el sistema de coordenadas (x; y). Ella relaciona el origen del eje de las abscisas con los 3000 m³ de petróleo crudo, ubicado en el eje de las ordenadas, puesto que hay evidencia (punto sobre el eje de las ordenadas); las magnitudes tiempo (horas) y volumen (m³) se encuentran correctamente relacionadas (dibujo de puntos), pero no escribe las unidades de medida del volumen (m³).

Así mismo, creemos que los estudiantes pueden establecer conexiones entre las representaciones de los puntos y la recta que resulta de unir estos puntos, lo cual puede facilitar la representación gráfica de la recta.

A continuación, presentamos la **tercera forma** hecha por María.

3ra forma

$$0 = 2460 \cdot 0 + 3000 = 3000$$

$$1 = 2460 \cdot 1 + 3000 = 2460 + 3000 = 5460$$

$$2 = 2460 \cdot 2 + 3000 = 4920 + 3000 = 7920$$

$$3 = 2460 \cdot 3 + 3000 = 7380 + 3000 = 10380$$

$$4 = 2460 \cdot 4 + 3000 = 9840 + 3000 = 12840$$

Rpta: En 4 horas contará con los 12840 m³ de petróleo crudo.

Figura 34: Actividad N.º 3, pregunta N.º 1. Trabajo de María (3ra forma)

Ella realiza una conversión del registro de lengua natural al registro numérico tal como se puede apreciar en la Figura 34. Para ello, María logra identificar las cantidades numéricas constantes (2460 y 3000) y la cantidad variable (horas). Una vez identificadas estas cantidades, efectúa tratamientos de adición y multiplicación propios del registro numérico hasta obtener la respuesta.

Así mismo, creemos que María establece un nexo entre los valores numéricos que permanecen constantes y los valores numéricos variables. Consideramos que todo este proceso es el resultado del trabajo realizado por María, tanto en la primera como en la segunda actividad.

Como podemos observar en la Figura 34, la conversión al registro numérico realizada, no estaba contemplada en nuestro análisis a priori. Luego de ver el trabajo de María, notamos que realiza dos conversiones del registro de lengua natural al registro gráfico y del registro de lengua natural al registro numérico, ambos apoyados en la tabla. Duval (2004) considera que cuando el estudiante realiza conversiones entre registros de representación semiótica, habrá una mejor comprensión del concepto matemático.

Pregunta 2. Trabajo realizado por María

horas tardaría en llenarse? Use la siguiente tabla, para responder la pregunta.

Tiempo (T)	$T_1=0$ horas	$T_2=1$ hora	$T_3=2$ horas	$T_4=3$ horas	$T_5=4$ horas	$T_6=5$ horas	$T_7=6$ horas	$\begin{array}{r} 2460 \times \\ 5 \\ \hline 12300 + \\ 3000 \\ \hline 15300 \end{array}$
Volumen (V)	$V_1=3000$	$V_2=5460$	$V_3=7920$	$V_4=10380$	$V_5=12840$	$V_6=15300$	$V_7=17760$	$\begin{array}{r} 2460 \times \\ 6 \\ \hline 14760 + \\ 3000 \\ \hline 17760 \end{array}$

3. A partir de la tabla, de que otra forma puedes representar los valores obtenidos.

Figura 35: Actividad N.º 3, pregunta N.º 2. Trabajo de María

Análisis posteriori pregunta 2

María identifica que al T_1 le corresponde cero horas. Creemos que ella realiza una lectura comprensiva del problema, por consiguiente, entiende que hasta ese instante aún no ingresa petróleo y en la planta de refinería existen 3000 m^3 de petróleo crudo. Del mismo modo, María comprende que en el transcurso de una hora comenzará a ingresar petróleo de forma constante a razón de 2460 m^3 cada hora; luego, completa la tabla realizando tratamientos de adición y multiplicación en el registro numérico, como se puede observar al lado derecho de la Figura 35. En este sentido, consideramos que María reconoce la relación que se establece entre las horas que transcurren y los metros cúbicos de petróleo crudo que ingresan a la refinería. De esta manera, estaríamos confirmando nuestro análisis a priori.

Pregunta 3. Trabajo realizado por María

A continuación, presentamos las dos partes en que María contesta esta pregunta, tal como podemos observar en la Figura 36 y 37.

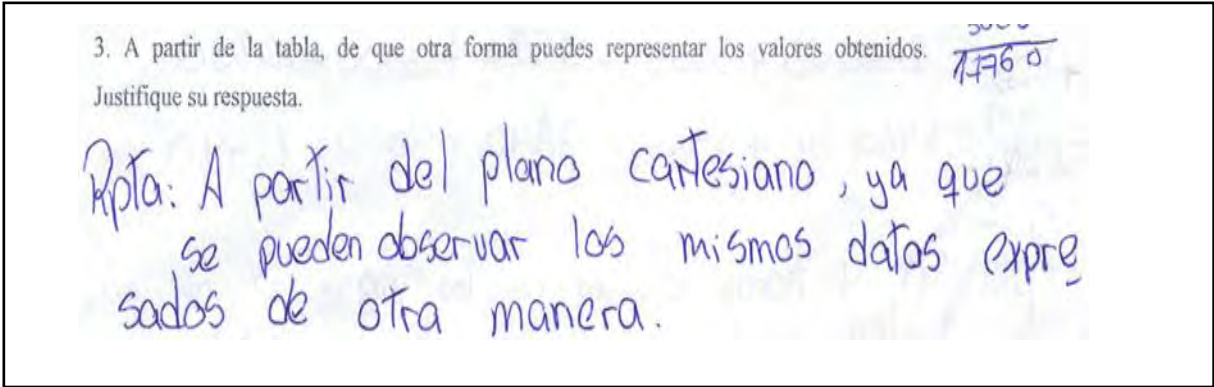


Figura 36: Actividad N.º 3, pregunta N.º 3. Trabajo de María

Análisis a posteriori pregunta 3

Como se puede observar en la Figura 36, María contesta la pregunta empleando el registro de lengua natural y escribe: “A **partir del plano cartesiano...**”, que es nuestro objetivo. Creemos que la respuesta de María se debe a la comprensión e interpretación de la pregunta y al reconocimiento de todos los elementos presentes en la tabla de la pregunta dos, de esta manera, relaciona con el plano cartesiano, asimismo creemos que lo trabajado en las actividades 1, 2 y las primeras preguntas de la tercera actividad, apoyan en la solución de esta pregunta.

A continuación, María realiza la conversión al registro gráfico como se muestra en la figura 37.

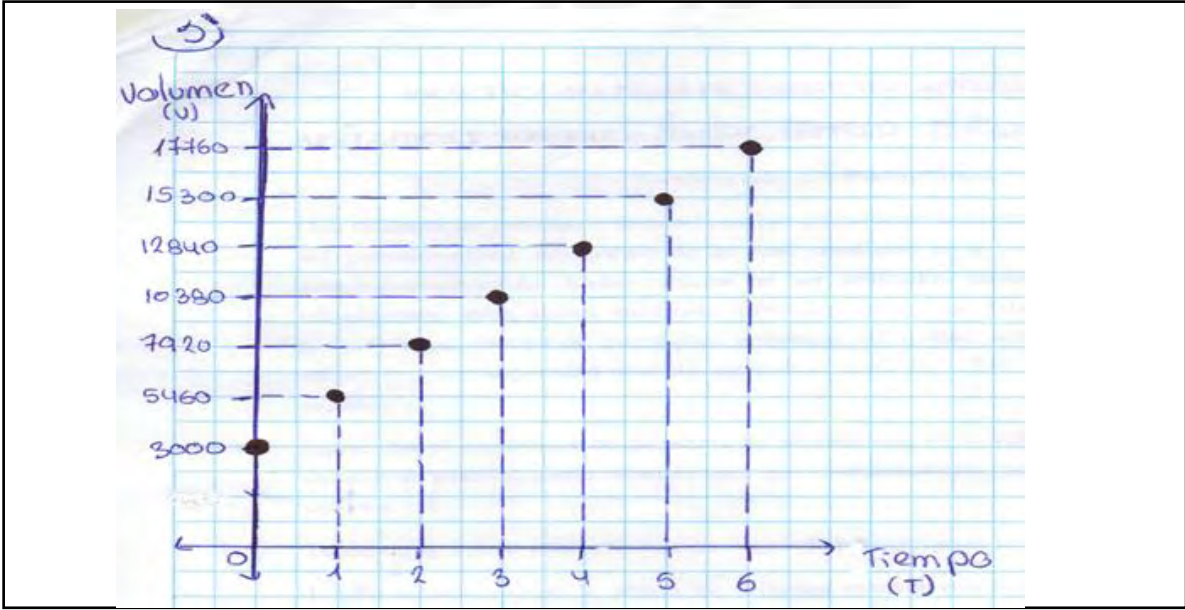


Figura 37: Actividad N.º 3, pregunta N.º 3. Trabajo de María

María comprende el enunciado de la pregunta y, tomando la tabla como apoyo, efectúa la transformación del registro de lengua natural al registro gráfico, realizando los siguientes tratamientos: construye dos rectas perpendiculares que representan a los ejes de coordenadas; luego, divide en escalas adecuadas cada semieje; después, ubica las magnitudes que intervienen en el problema (tiempo y volumen) y, finalmente, ubica los puntos obteniendo la conversión esperada; de esta manera, logra el objetivo propuesto en esta pregunta.

Podemos afirmar que María desarrolló exitosamente la pregunta tres en su totalidad, entonces no tendría dificultades para aproximarse a la noción de función lineal y representar en el registro gráfico la función lineal, lo cual implica que, al establecer nexos entre el enunciado del problema presentado en registro de lengua natural, cantidades constantes (ingresa constantemente a cada hora 2460m^3 de petróleo, existe 3000m^3 de petróleo crudo en la planta) y las magnitudes variables que intervienen (tiempo y volumen), María consiguió realizar la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico. De esta manera, se confirma nuestro análisis a priori.

Pregunta 4. Trabajo realizado por María

4. ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular la cantidad de petróleo crudo que ingresa en un determinado tiempo. Justifique su respuesta.

$$x = 2460 \cdot x + 3000$$

5. Halle el valor numérico de las siguientes expresiones.

donde 'x' es el número de horas (ver 3ra forma de la pregunta 1)

Figura 38: Actividad N.º 3, pregunta N.º 4. Trabajo de María

Como podemos observar en la Figura 38, María escribe la expresión en el registro algebraico. Creemos que María realiza la conversión del registro numérico al registro algebraico por los tratamientos realizados en la pregunta 1 (ver Figura 34) e incluso reconoce que “x” representa al número de horas, lo cual se puede observar al lado derecho en la Figura 38. En consecuencia, podemos afirmar que María entiende a los números 2460 y 3000 como cantidades constantes. Luego de observar la respuesta de María, consideramos que es muy importante, para la conversión del registro de representación de lengua natural al registro

algebraico, que primero empleen el registro numérico como un registro de tránsito obligatorio, puesto que este registro permite generalizar la información y, de esta forma, realizar la conversión al registro de representación algebraico. Entonces, se logra lo que habíamos previsto a priori.

Pregunta 5. Trabajo realizado por María

10 EL VALOR NUMÉRICO DE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES.

$\begin{array}{r} 5460 - \\ 3000 \\ \hline 2460 \end{array}$	$\leftarrow a) m = \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \frac{5460 - 3000}{1 - 0} = \frac{2460}{1} = 2460$
$\begin{array}{r} 7920 - \\ 5460 \\ \hline 2460 \end{array}$	$\leftarrow b) m = \frac{V_3 - V_2}{T_3 - T_2} = \frac{7920 - 5460}{2 - 1} = \frac{2460}{1} = 2460$
$\begin{array}{r} 10380 - \\ 7920 \\ \hline 2460 \end{array}$	$\leftarrow c) m = \frac{V_4 - V_3}{T_4 - T_3} = \frac{10380 - 7920}{3 - 2} = \frac{2460}{1} = 2460$
$\begin{array}{r} 12840 - \\ 10380 \\ \hline 2460 \end{array}$	$\leftarrow d) m = \frac{V_5 - V_4}{T_5 - T_4} = \frac{12840 - 10380}{4 - 3} = \frac{2460}{1} = 2460$

Figura 39: Actividad N.º 3, pregunta N.º 5. Trabajo de María

María reconoce los valores numéricos de las variables T y V, hallados en la tabla de la pregunta dos (Figura 35), reemplaza y efectúa tratamientos en el registro numérico sin tener dificultad tal como se había planificado en el análisis a priori, ya que, de acuerdo con Duval (2004), estas transformaciones son exitosas si los estudiantes conocen las reglas del funcionamiento del registro en el que están trabajando (registro de representación numérico). María reconoce que para hallar el valor de “m” basta con reemplazar en la representación algebraica los valores tanto de V₁, V₂, etc. como los valores de T₁, T₂, etc., los cuales se obtuvieron en la pregunta dos. Esta situación estuvo contemplada en nuestro análisis a priori.

Pregunta 6. Trabajo realizado por María

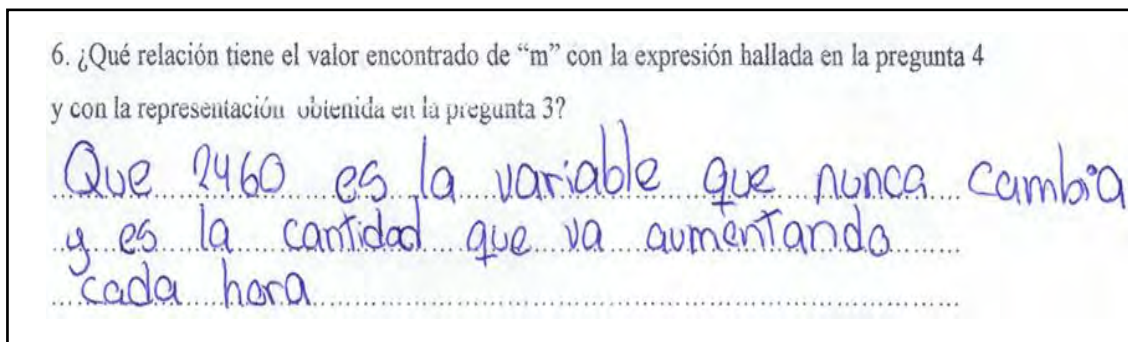


Figura 40: Actividad N.º 3, pregunta N.º 5. Trabajo de María

María expresa su respuesta en el registro de lengua natural. Con relación a la primera parte de esta pregunta, María reconoce al número 2460 como una cantidad constante (nunca cambia). Creemos que lo trabajado en la pregunta 4 (Figura 38) ayuda a María a responder esta parte de la pregunta. Con relación a la segunda parte de esta pregunta, María, al afirmar que “es la cantidad que va aumentando cada hora”, se refiere a la cantidad de petróleo crudo que ingresa a la refinería cada hora. Como el objetivo de esta pregunta es que los estudiantes expresen en el registro de lengua natural la relación que existe entre los resultados obtenidos en la pregunta 5 con los resultados de las preguntas 3 y 4, como lo previsto en nuestro análisis a priori, entonces, del trabajo observado de María podemos confirmar que sí se ha logrado.

A continuación, presentamos el trabajo realizado por Juan.

Análisis del trabajo de Juan

Pregunta 1. Trabajo realizado por Juan

1	2	3	4
5460	5460 + 2460	7920 + 2460	10380 + 2460

Figura 41: Actividad N.º 3, pregunta N.º 1. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 1

A continuación, presentamos la primera forma hecha por Juan. En la tabla mostrada en la Figura 41, Juan no escribe las magnitudes que intervienen: tiempo y volumen; sin embargo, creemos que se encuentran implícitos, pues escribe los números del 1 al 4, que son las horas que transcurren. Así mismo, no identifica que existe un $T_1=0$ al que le corresponde los 3000 m^3 de petróleo crudo que existían en la planta; en su lugar, Juan realiza una suma entre 3000 y 2460 obteniendo 5460 y lo ubica en la primera columna. Al realizar esta suma, él entiende que, luego de haber transcurrido una hora, en la planta habrá 5460 m^3 de petróleo crudo; al interior de la tabla, Juan realiza tratamientos en el registro numérico y no llega a escribir el resultado de la suma.

A continuación, presentamos la **segunda forma** hecha por Juan.

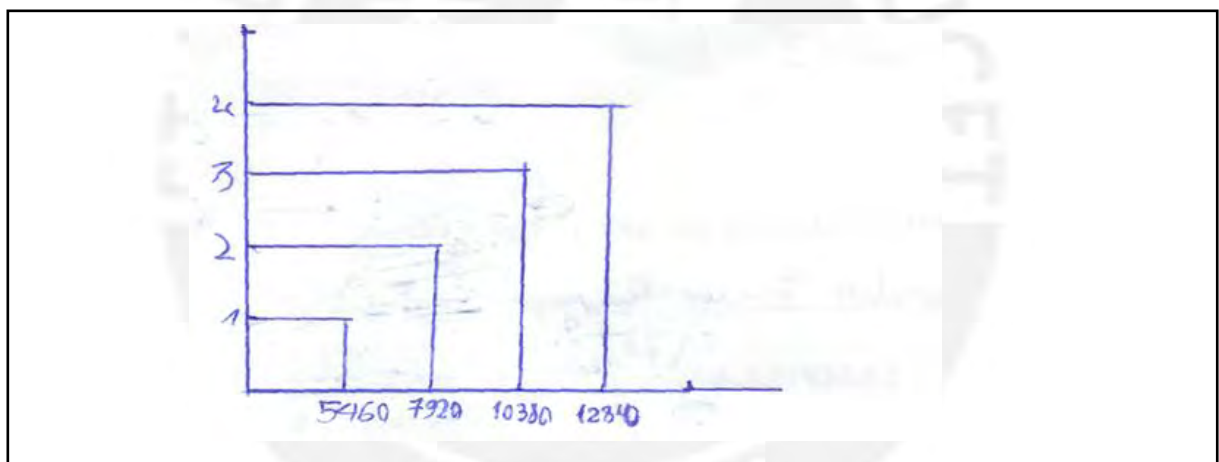


Figura 42: Actividad N.º 3, pregunta N.º1. Trabajo de Juan

Observamos que Juan no realiza una conversión correcta del registro de lengua natural al registro gráfico, ya que hay un orden diferente en la percepción de las expresiones presentes en el registro de lengua natural, cambiando su sentido en el registro gráfico; no obstante, ello no está del todo mal, pues permitiría a Juan dar respuesta a la pregunta. Creemos que esto se debe a que no se les ha enseñado función lineal, así mismo es posible que las magnitudes (tiempo y volumen) se encuentren implícitos, pues no las escribe.

Consideramos que es necesario mencionar que Juan solo presenta dos formas de resolver el problema, posiblemente porque no entendió la condición de la pregunta al momento de leer,

es decir confundió “...más de dos procedimientos” por “dos procedimientos”, no tomó en cuenta el adverbio más (cantidad). En este caso, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, no hubo un tránsito exitoso entre el registro de lengua natural y el registro gráfico, tal como habíamos previsto a priori.

Pregunta 2. Trabajo realizado por Juan

Tiempo (T)	$T_1 = 1$	$T_2 = 2$	$T_3 = 3$	$T_4 = 4$	$T_5 = 5$	$T_6 = 6$	$T_7 = 7$
Volumen (V)	$V_1 = 5460$	$V_2 = 7920$	$V_3 = 10380$	$V_4 = 12840$	$V_5 = 15300$	$V_6 = 17760$	$V_7 = 20220$

Figura 43: Actividad N.º 3, pregunta N.º 2. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 2

Juan no identifica que a los 3000 m³ de petróleo crudo que existían en la refinería le corresponde un T₁ igual a cero. El proceso es similar al efectuado en la primera pregunta, incluso completa la tabla hasta sobrepasar la cantidad de petróleo crudo que se solicitaba en el enunciado. Es posible que Juan completa la tabla en forma mecánica, sin tomar en cuenta la pregunta, lo que nos lleva a suponer que Juan realiza una lectura rápida sin comprender el propósito de la pregunta. Del mismo modo, creemos que Juan realiza tratamientos en el registro numérico para completar la tabla, confirmando nuestro análisis a priori.

Pregunta 3. Trabajo realizado por Juan

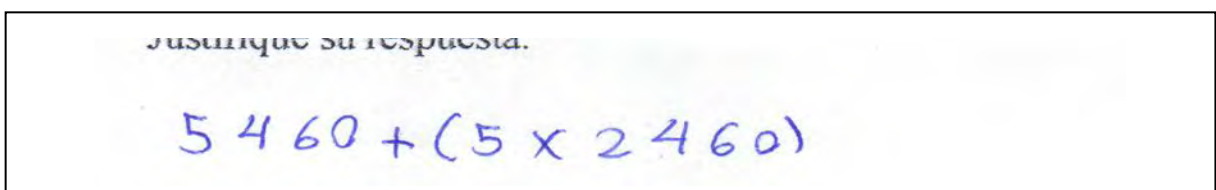


Figura 44: Actividad N.º 3, pregunta N.º 3. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 3

En la figura 44, podemos observar que Juan no comprende lo que se le solicita en la pregunta; sin embargo, creemos que trata de hallar una expresión que le permita contestarla, puesto que, cuando desarrollamos la expresión presentada por Juan, el resultado es 17760, por tanto, podemos afirmar que entendió que debe hallar una expresión que le permita calcular la respuesta, lo cual no estuvo contemplado en nuestro análisis a priori.

Pregunta 4. Trabajo realizado por Juan

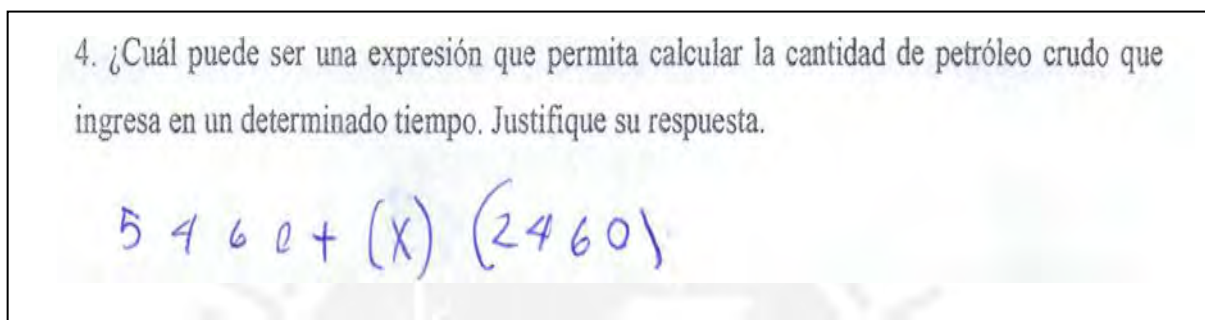


Figura 45: Actividad N.º 3, pregunta N.º 4. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 4

Antes de contestar a la interrogante:

Juan preguntó: “¿Puede ser una fórmula?” A lo que el docente investigador respondió: “Bueno... sí, algo como una fórmula”. Juan intervino nuevamente y preguntó: “¿Con la letra x ?” El docente investigador replicó: “Puede ser con cualquier letra, no necesariamente con la variable x ”. Podemos observar en la figura 46 que Juan comprende parcialmente lo solicitado en la pregunta. Decimos “parcialmente”, pues la expresión hallada por Juan permite hallar la cantidad de petróleo crudo en un tiempo diferente al presentado en el problema. Eso se debe a que Juan no identifica los 3000 m^3 de petróleo crudo que existían en la planta si consideramos a la variable “ x ” como la magnitud tiempo y a 2460 como una cantidad constante (cantidad de petróleo que ingresa cada hora); y, al reemplazar a “ x ” por 0, 1, 2, 3... etc., entonces tendríamos los siguientes resultados que presentamos en la figura 46:

Expresión algebraica hallada por Juan: $5460+(x)(2460)$, si $x=0;1;2;3;4\dots$ obtendríamos los siguientes resultados:

Si: $x=0$, entonces: $5460 + (0)(2460) = 5460$ (valor que corresponde a $T=1$)

Si: $x=1$, entonces: $5460 + (1)(2460) = 7920$ (valor que corresponde a $T=2$)

Si: $x=2$, entonces: $5460 + (2)(2460) = 10380$ (valor que corresponde a $T=3$)

Si: $x=3$, entonces: $5460 + (3)(2460) = 12840$ (valor que corresponde a $T=4$)

Si: $x=4$, entonces: $5460 + (4)(2460) = 15300$ (valor que corresponde a $T=5$)...

Figura 46: Tratamientos en el registro numérico realizados en la expresión presentada por Juan

Como podemos observar, la expresión hallada por Juan sirve parcialmente para contestar la pregunta. El inconveniente es para cuando $T=0$, el resultado debe ser 3000, y los demás tiempos no concuerdan con los valores de “ x ”. En tal sentido, pensamos que Juan presenta estas dificultades porque está poco familiarizado con el empleo de la lengua natural asociado a una expresión algebraica para generalizar un problema relacionado al objeto matemático función lineal. La expresión presentada no estuvo contemplada en nuestro análisis a priori.

Pregunta 5. Trabajo realizado por Juan

5. Halle el valor numérico de las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{r} 7920 - \\ 5460 \\ \hline 2460 \\ 10380 - \\ 7920 \\ \hline 2460 \end{array}$$

a) $m = \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} = \frac{7920 - 5460}{2 - 1} = \frac{2460}{1} = 2460$

b) $m = \frac{V_3 - V_2}{T_3 - T_2} = \frac{10380 - 7920}{3 - 2} = \frac{2460}{1} = 2460$

c) $m = \frac{V_4 - V_3}{T_4 - T_3} = \frac{12840 - 10380}{4 - 3} = \frac{2460}{1} = 2460$

d) $m = \frac{V_5 - V_4}{T_5 - T_4} = \frac{15300 - 12840}{5 - 4} = \frac{2460}{1} = 2460$

Figura 47: Actividad N.º 3, pregunta N.º 5. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori. Pregunta 5

Esta pregunta tiene relación con la pregunta dos y, como Juan presenta dificultades en la pregunta mencionada, completa los valores numéricos con los mismos errores. Al margen de estas fallas, creemos que es necesario mencionar lo siguiente: para hallar el valor de “ m ”, Juan ha empleado tratamientos de sustracción y división en el registro de representación numérico y no tiene dificultades al realizar estos tratamientos. El error cometido por Juan tiene que ver, como mencionamos en el análisis a posteriori de la pregunta dos, con el hecho de que no relaciona de forma correcta los 3000 m³ de petróleo existentes en la refinería con un tiempo igual a cero, todo esto debido a que él no comprendió el propósito de la pregunta dos, lo cual no estuvo contemplado en nuestro análisis a priori.

Pregunta 6. Trabajo realizado por Juan

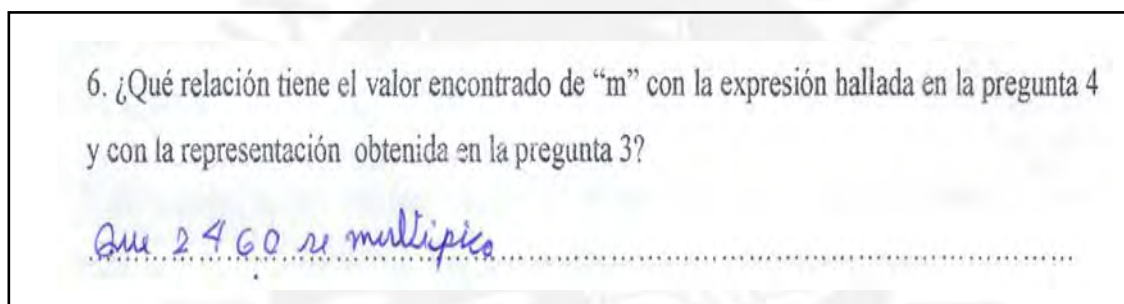


Figura 48: Actividad N.º 3, pregunta N.º 6. Trabajo de Juan

Análisis a posteriori pregunta 6

Recordemos que el objetivo de esta pregunta es que los estudiantes expresen, en el registro de lengua natural, la relación existente entre los resultados obtenidos en la pregunta 5 con los resultados de las preguntas 3 y 4, como lo previsto en nuestro análisis a priori. Creemos que Juan considera al número 2460 como la única cantidad numérica constante al decir “que multiplica”, tal como se observa en las preguntas 3 y 4, presentadas por Juan. Creemos que él presenta estas dificultades porque está poco familiarizado con el empleo de la lengua natural vinculada a una situación matemática para explicar y evidenciar resultados matemáticos de un problema dado. En el mismo sentido creemos que Juan muestra problemas para justificar, en el registro del lenguaje natural, temas relacionados con nociones matemáticas. Del trabajo efectuado por Juan, no podemos confirmar nuestro análisis a priori.

CONSIDERACIONES FINALES

Antes de explicar las consideraciones finales, es necesario destacar que hay una gran diferencia entre un modelo teórico y las complicadas situaciones que existen en las aulas; sin embargo, es necesario que el docente realice una reflexión sobre su práctica y que, más allá de su experiencia, diseñe sesiones de aprendizaje significativas, tomando como referencia marcos teóricos, con los cuales logrará que los estudiantes construyan sus propios aprendizajes matemáticos.

En la práctica de nuestro trabajo de investigación, hemos constatado cómo los estudiantes, con muy poca ayuda, se van aproximando a la noción de función lineal empleando actividades diseñadas sobre la base de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), las que permitieron a los estudiantes transitar en los diferentes registros de representación: registro de lengua natural, registro numérico, registro algebraico y registro gráfico.

A continuación, presentamos las consideraciones finales sobre aspectos que estimamos relevantes en la investigación en relación con los objetivos específicos propuestos.

Con respecto a nuestro primer objetivo específico, **identificar en las acciones de los estudiantes los tratamientos y conversiones entre los registros de representación semiótica que realizan al aproximarse al concepto de función lineal**, podemos decir que sí hemos logrado este objetivo específico, dado que los estudiantes, al no tener noción de cómo es la representación gráfica de la función lineal, mediante la primera pregunta de nuestra primera actividad, conseguimos que los estudiantes relacionen el problema presentado en registro de lengua natural con el gráfico en el plano cartesiano (registro gráfico). Prueba de ello es que, en la segunda pregunta, María realizó la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico de forma exitosa; mientras que Juan realizó una conversión cercana a lo que se solicitaba, pues logró relacionar algunas expresiones del registro de lengua natural con el trazado de tres segmentos inclinados, dibujados en el registro gráfico.

Similares resultados se obtuvieron con la tercera pregunta de esta primera actividad: María realizó correctamente la conversión del registro gráfico al registro de lengua natural, ella

identificó los cambios de velocidad representados por segmentos con una mayor o menor inclinación y los puso en correspondencia en el registro de lengua natural, utilizando expresiones como **sin prisa, con más prisa, caminé de prisa**, y relacionó un segmento horizontal con **me quedé conversando, tuve que esperar**; así mismo, Juan, al realizar la conversión al registro de lengua natural, empleó expresiones tales como **voy despacio, más rápido**, y cuando Juan observó un segmento horizontal lo relacionó con expresiones en registro en lengua natural tales como **me puse a conversar, esperé**.

Al culminar esta primera actividad, los estudiantes eran capaces de relacionar el registro de representación en lengua natural con el registro de representación gráfico; asimismo, identificamos las conversiones que pueden realizar. Por ejemplo, en la segunda pregunta se les presentó en el registro de lengua natural la narración hecha por Bryan y el plano cartesiano con las magnitudes que intervienen y los parámetros numéricos. Tuvimos que incluir estos elementos, pues los estudiantes no han estudiado el objeto matemático función lineal. María y Juan tenían que realizar el trazado de los segmentos de acuerdo con la narración de Bryan. Ella identifica todos los elementos en el registro de lengua natural y los hace corresponder en el registro gráfico de manera exitosa (ver Figura 16); en cambio, Juan reconoció algunos elementos del registro de lengua natural y tuvo algunos errores al realizar la conversión al registro gráfico tal como se puede observar en la Figura 18. La tercera pregunta es contraria a la pregunta dos. En ella se presenta a los estudiantes el gráfico correspondiente a Sebastián y se les solicita que creen la narración de Sebastián en registro de lengua natural. Aquí pudimos identificar que la conversión que realiza María es correcta (como se evidencia en la Figura 17); en cambio, Juan tiene dificultades en reconocer algunos parámetros presentes en el registro gráfico, tal como se puede observar en la Figura 19.

Con respecto al segundo objetivo específico de esta investigación, **distinguir el surgimiento de la noción de función lineal cuando los estudiantes realizan conversiones y tratamientos**, el análisis de las actividades dos y tres nos ha permitido distinguir cómo los estudiantes empiezan a aproximarse a la noción de función lineal al lograr que ellos realicen la conversión del registro de representación de lengua natural al registro gráfico. Esta se produjo a partir de condicionar la primera interrogante de estas actividades, en la que se les solicitaba que **“resuelvan la pregunta empleando más de dos procedimientos”**. El solicitar a los estudiantes más de dos procedimientos provocó que tengan la necesidad de pensar,

razonar, movilizar todos sus conocimientos previos para hallar diferentes formas de resolver y contestar la pregunta y es en esta situación donde María llega a realizar la conversión del registro de lengua natural al registro gráfico apoyada en una tabla formada por filas y columnas que ella misma construyó. De no haber condicionado la pregunta como lo hicimos, es posible que María hubiese resuelto empleando una regla de tres simple directa. En cambio, Juan, para realizar la conversión del registro de lengua natural al registro numérico, primero empleó una regla de tres simple directa. En esta técnica realizó tratamientos de multiplicación y división (registro numérico), luego construyó una tabla similar a la de María. La tercera forma empleada por Juan es producto de los tratamientos efectuados para completar la tabla. Lo realizado en esta parte le sirvió para cumplir con los requisitos de la pregunta. Creemos que es posible que Juan llegue a realizar la conversión al registro gráfico, siempre y cuando hubiésemos puesto otras condiciones para resolver el problema. Una de estas condiciones hubiese sido solicitarle que no se centre en realizar multiplicaciones, divisiones o sumas. Por tanto, creemos que, en Matemática, es importante solicitar a los estudiantes que resuelvan un problema con más de dos formas. Esta condición obligará a los estudiantes, como mencionamos líneas arriba, a movilizar sus conocimientos. No necesariamente puede ser la misma condición, dejamos en manos de los docentes la libertad de mejorar o cambiar esta parte de la pregunta.

Nuestra tercera actividad presentó una variante en el enunciado del problema con respecto a la segunda actividad. La primera pregunta es similar a la de la actividad dos, con la misma condición, donde los estudiantes deben resolver el problema empleando más de dos procedimientos. Esta tercera actividad nos permitió continuar comprendiendo cómo el estudiante se aproximaba más a la noción de función lineal. Prueba de ello es el trabajo realizado por María quien, para iniciar el proceso de solución, realiza una lectura comprensiva del problema, luego, emplea una tabla, identifica y completa las magnitudes que intervienen de forma correcta, incluso relaciona el origen de coordenadas con los 3000 m^3 de petróleo que existían en la refinería. Para completar la tabla, ella realiza tratamientos en el registro numérico y responde a la pregunta de manera clara, empleando el registro de lengua natural tal como se puede apreciar en la Figura 32. La segunda forma que emplea María es el registro gráfico, para ello, construye el plano cartesiano, identifica las magnitudes que intervienen y los patrones numéricos sobre los ejes; luego, dibuja los puntos. Creemos que, al ubicar los puntos en el registro gráfico (plano cartesiano), María podría estar percibiendo una línea recta,

incluso si las distancias entre las cantidades numéricas representadas en el eje de las abscisas fueran más cercanas, le darían la idea intuitiva de una línea recta (Figura 33). En la última forma, ella realizó la conversión del registro de lengua natural al registro numérico mediante tratamientos de adición y multiplicación. Estos tratamientos le sirvieron para contestar la pregunta cuatro, donde se solicitaba que hallen la regla de correspondencia; para responder a esta pregunta, María realiza una conversión del registro numérico al registro algebraico. Hasta aquí podemos identificar, en el trabajo realizado por María, las siguientes conversiones:

- Del registro de lengua natural al registro gráfico (apoyada en la tabla)
- Del registro de lengua natural al registro numérico
- Del registro numérico al registro algebraico

Con respecto al trabajo de Juan, él presentó algunas dificultades para responder la pregunta uno. Lo importante fue que no usó los mismos procedimientos que empleó en la actividad anterior, posiblemente porque el problema tenía una variación respecto al de la segunda actividad, entonces buscó otras formas de resolver. Es así que emplea una tabla; luego, el registro gráfico identificando en orden contrario las magnitudes que intervienen, por lo que podemos afirmar que, si seguimos realizando más actividades, Juan logrará hacer la conversión al registro gráfico y, de esta manera, se aproximará a la noción de función lineal.

La pregunta dos se planteó por dos motivos. El primero fue que, a partir de la tabla, organicen la información que proviene del registro de lengua natural y realicen la conversión al registro gráfico; el segundo motivo fue que los estudiantes completen la pregunta 5 y, a partir de esta, generar en ellos la noción de pendiente.

María no presentó ninguna dificultad para resolver y contestar las preguntas del 2 al 6. En cambio, Juan se equivocó al contestar la pregunta 3. Creemos que la dificultad estuvo, básicamente, en que él no entendió la pregunta expresada en lenguaje natural ni las orientaciones orales que brindó el docente investigador al momento de la experimentación. A lo mencionado, podemos añadir que, tal vez, Juan no percibió de forma clara la información que le dio la tabla. En la pregunta 4, planteó una respuesta que parcialmente sirvió para responder a la pregunta.

Respecto a nuestro objetivo general de la investigación, **analizar una secuencia de actividades diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica favorece la aproximación al concepto de función lineal en estudiantes de segundo de secundaria al realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica**, podemos señalar lo siguiente:

María logró transitar por los siguientes registros de representación semiótica: lenguaje natural, numérico, algebraico y gráfico; lo cual le permitió aproximarse a la noción de función lineal al realizar conversiones entre registros y tratamientos al interior de cada uno de ellos. En cambio, Juan logró transitar del registro de lengua natural al registro numérico, pero con errores en el registro gráfico.

Luego de realizar el análisis de los tratamientos y conversiones en los registros de representación semióticos mencionados, podemos constatar que los tratamientos en el registro de lengua natural son importantes para que los estudiantes logren la conversión al registro numérico, algebraico y gráfico, ya que permiten que los estudiantes comprendan el problema.

Tomando como base el análisis de la investigación, se ha constatado que, si los estudiantes realizan, en primer lugar, la conversión al registro numérico, la conversión al registro algebraico será mucho más fácil (tal como se puede evidenciar en la figura 34). De igual manera, podemos afirmar que, si el estudiante presenta dificultades al transitar en el registro de lengua natural, tendrá problemas para realizar conversiones a los otros registros (numérico, algebraico y gráfico).

Por lo que acabamos de explicar y luego de alcanzar a responder nuestros dos objetivos específicos, entonces pudimos contestar a nuestra pregunta de investigación:

¿Una secuencia de actividades, diseñada con base en la Teoría de Registros de Representación semiótica, favorecerá que estudiantes de segundo de secundaria se aproximen al concepto función lineal al realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica?

A continuación, presentamos un panorama de futuras investigaciones a partir de nuestro trabajo.



FUTURAS INVESTIGACIONES

Este trabajo nos da muchas ideas para seguir investigando. En primer lugar, se puede continuar con el estudio del objeto matemático función lineal.

Creemos que, si partimos del punto donde nos quedamos, los resultados serán muy fructíferos y los mayores beneficiarios serán los estudiantes.

Pasamos a mencionar algunas ideas de futuras investigaciones:

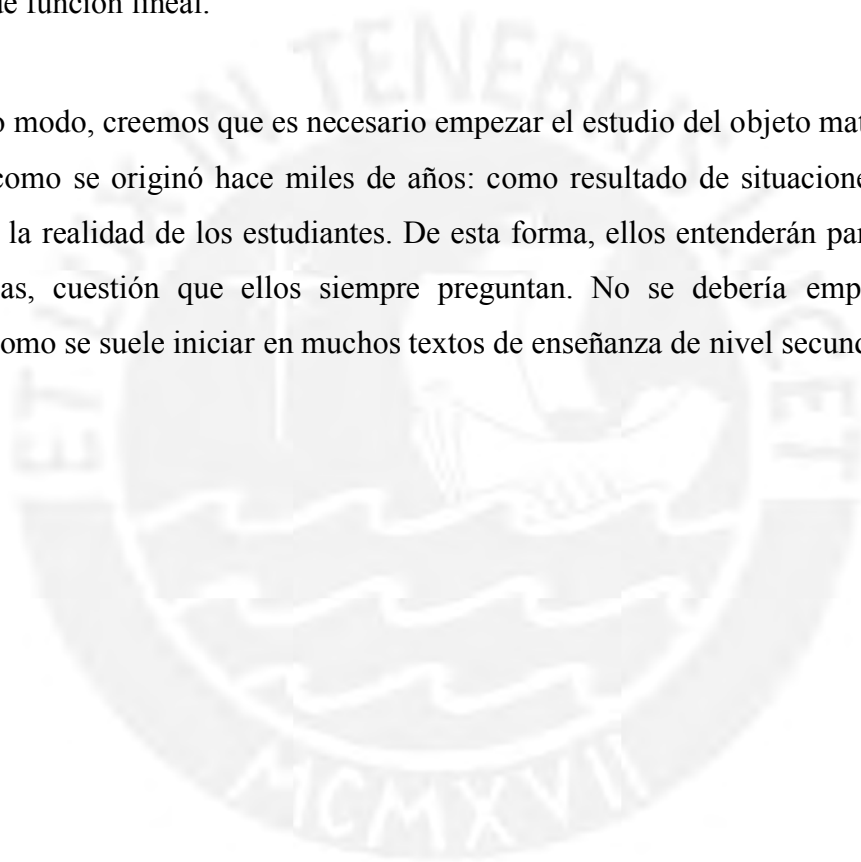
- Continuar la investigación del objeto matemático función lineal empleando la Teoría de Registros de Representación Semiótica y considerando las unidades significantes de sus registros de representación semiótica (registros de representación en lengua natural, numérico, gráfico y algebraico).
- Realizar la experimentación presentada con otros grupos de estudiantes para observar si los comportamientos y dificultades registrados en la presente investigación se reproducen.
- Investigar y diseñar actividades que contribuyan a realizar el proceso de conversión del objeto matemático función lineal desde el registro de representación gráfico al algebraico y, finalmente, al de lengua natural.
- Creemos que es fundamental incluir herramientas tecnológicas para estudiar el objeto matemático función lineal, sobre todo, GeoGebra por ser un software dinámico.

SUGERENCIAS

A continuación, presentamos algunas sugerencias:

Es importante elaborar actividades diseñadas con base en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, las cuales contribuirán, en primer lugar, a que los estudiantes se aproximen a la noción de la función lineal y, posteriormente, a que los estudiantes aprendan el concepto de función lineal.

Del mismo modo, creemos que es necesario empezar el estudio del objeto matemático función lineal tal como se originó hace miles de años: como resultado de situaciones problemáticas cercanas a la realidad de los estudiantes. De esta forma, ellos entenderán para qué sirven las Matemáticas, cuestión que ellos siempre preguntan. No se debería empezar de manera abstracta como se suele iniciar en muchos textos de enseñanza de nivel secundario.



REFERENCIAS

- Acosta, M. y Vega, A. (2013) Ingeniería didáctica para la enseñanza de la función lineal: Análisis preliminar. *Astrolabio*, 12(2), pp 115-127. Recuperado de http://astrolabio.phipages.com/storage/instance_30026/ASTROLABIO_12- art.8.pdf
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brousseau, G. (2001). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas, 1-16. Recuperado de <http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/obstaculos.pdf>
- Coveñas, M., (2008). *Matemática cuarto año de secundaria*. Lima: Bruño.
- Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. & Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNION*, (41), 20-38. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revista41.php>.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*; Vol 9.1, pp 143-168. Madrid, RSME. http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. *Revista de innovación en educación matemática (EMA)*. 6(2), pp. 180 – 200. Recuperado de http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/%2804%29RD.pdf

- Gutiérrez, S. y Parada, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. (Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, Mc Graw-Hill/Interamericana Editores, S.A. Recuperado de: https://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sam_pieri
- Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Volumen 1. Instituto de matemática y ciencias afines Lima: IMCA.
- Martínez, M. (2006). La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual). *IIPSI*, 9 (1), 123-146. Recuperado de: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la matemática*. Volumen 1. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima Perú.
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función Lineal*. (Tesis de Maestría, Universidad autónoma de Manizales, Colombia). Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis>
- Perú, Ministerio de Educación (2005). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004*. Unidad de Medición de la Calidad Educativa. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.

Perú, (2012). *Matemática Segundo de Secundaria*. Lima Editorial Norma S.A.C

Perú, Ministerio de Educación (2013a). *Pisa 2012: Primeros resultados, informe nacional del Perú*. Lima. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2013/12/reporte_pisa_2012.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Evaluación Censal de estudiantes*. Unidad de Medición de la Calidad Educativa. Recuperado de <http://umc.minedu.gob.pe/?p=3047>

Planchart, O. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de Función*. (Tesis Doctoral, Universidad Autónoma del Estado de Morelos). Recuperado de <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>

Portugal, M. (2015). El cubo y sus elementos: una secuencia didáctica basada en el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Posada, F., y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función Lineal desde una perspectiva variacional*. (Tesis de Maestría), Universidad De Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1380/1/JC0234.pdf>

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf>

Tamayo, Ó. (2006) .Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas Revista Educación y Pedagogía, 18 (45), 37 – 49. Recuperado de <https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6085/54>

91

Vázquez, S., Rey, P. y Boubée, G. (2008). El concepto de función a través de la historia. UNION, (16), 141-155. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revista16.php>

Villa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis*, 8(16), 133-148. doi:1011144/Javeriana.m8-16.mmpe



ANEXOS

ANEXO 1

ACTIVIDAD N.º 1

DÁNDONOS PRISA LLEGAMOS TEMPRANO A NUESTRO CENTRO DE TRABAJO

Mario, Juan, Ricardo, Bryan y Sebastián son cinco amigos que trabajan para la empresa de taxi “VIAJE SEGURO”. Todos ellos viven en las Torres de Limatambo del distrito de San Borja, que se encuentra ubicado a unos 400 metros de distancia de la empresa de taxi en la que laboran como choferes. Como la distancia es corta, siempre van caminando. Todos los días su turno empieza a las 00:30 a. m., por lo que, de sus casas deben salir a las 0:00 horas para llegar temprano. Cierta día, Mario, Juan y Ricardo contaron al administrador de la empresa de taxi lo que les sucedió cuando se dirigían a su centro de trabajo.

Mario narra su recorrido: Señor administrador, yo siempre salgo a las 0:00 horas y voy despacio, pues tengo suficiente tiempo, pero hoy, al querer cruzar la avenida Angamos, el semáforo estaba en luz roja, por lo que tuve que esperar 1 minuto, hasta las 0:21 a. m. Continué mi camino con más prisa que antes y llegué a la empresa 5 minutos antes.

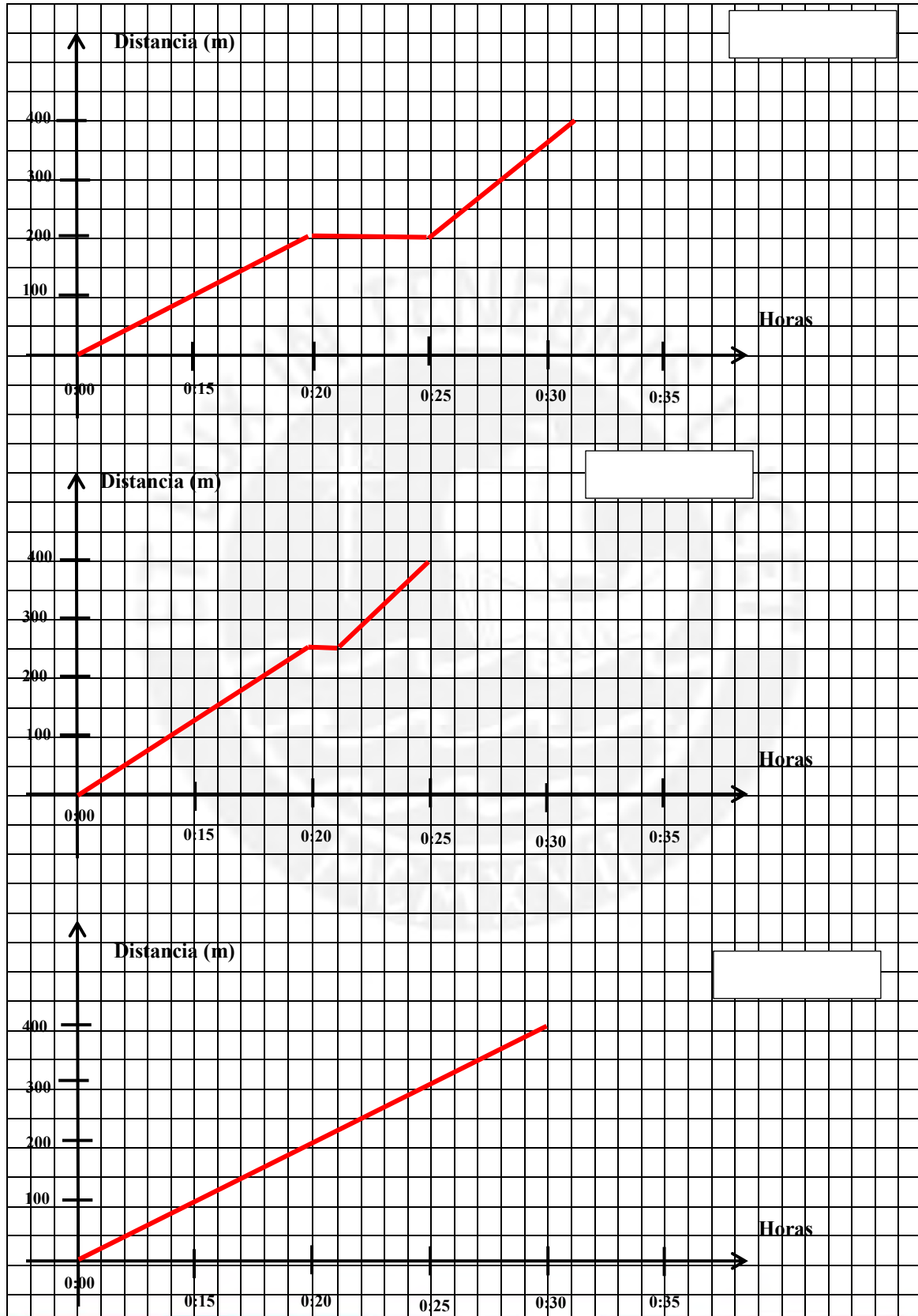
Juan narra su recorrido: Hoy salí de mi casa a la misma hora que salió Mario. Caminé sin darme prisa como todos los días. Para suerte mía, cuando tenía que cruzar la av. Angamos, el semáforo se encontraba en luz verde y no tuve que detenerme hasta llegar a la empresa. De esta manera, arribé a la hora exacta.

Ricardo narra su recorrido. Yo también salí de mi casa a las 0:00 horas, pero, en la mitad del camino, me encontré con Susana, una amiga que estudia de noche, y me detuve a conversar durante cinco minutos. Al darme cuenta de la hora, nos despedimos y aceleré mis pasos. El semáforo en la av. Angamos se encontraba en luz verde, entonces seguí con la misma velocidad por el resto del camino, pero llegué tarde a la empresa.

PREGUNTA N.º 1

Con esta información:

- Relacione cada una de las narraciones realizadas por Mario, Juan y Ricardo con su respectivo gráfico. Recuerde que debe leer muy bien la actividad planteada.
- Escriba en el recuadro el nombre que corresponda.

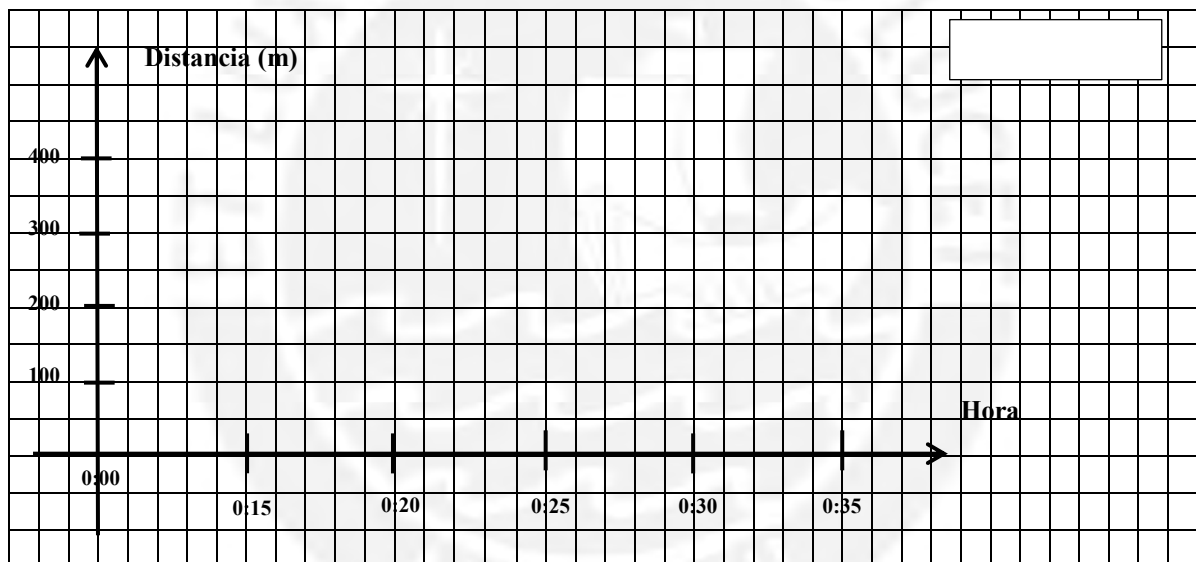


PREGUNTA N.º 2

Bryan narra su recorrido. Yo salí de mi casa a la misma hora que Mario, Juan, Ricardo y Sebastián, ni muy lento ni muy rápido. Cuando el reloj marcaba 0:15 a. m., me encontraba en la mitad del camino. En esos momentos pisé mal y tuve que caminar lento. Al llegar a la av. Angamos, ya eran las 0:25 a. m. y el semáforo se encontraba en luz roja por lo que tuve que esperar un minuto. Continué el resto del camino igual de lento, pues el pie me dolía, y llegué a la empresa cinco minutos tarde.

Con esta información:

- Represente gráficamente el relato de Bryan.

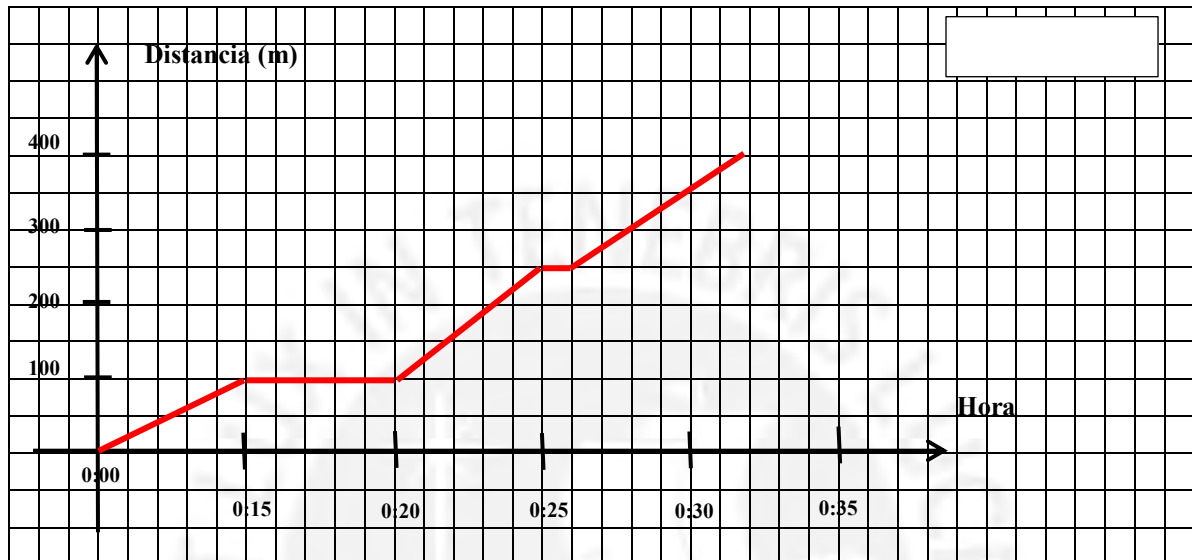


PREGUNTA N.º 3

A continuación, presentamos la representación gráfica correspondiente a Sebastián.

Con base en ello:

- Narre lo que Sebastián le contó al administrador de la empresa de taxi.



.....

.....

.....

.....

.....

ANEXO N.º 2

ACTIVIDAD N.º 2

LIMPIEMOS Y LLENEMOS DE AGUA LA PISCINA

Teresa, mamá de María, le recuerda que, si quiere invitar a sus amigas para que jueguen en la piscina, lo primero que tiene que hacer es limpiar y le recuerda que la capacidad de la piscina es de 8000 litros.

Una vez limpia la piscina, María conecta la manguera al caño y empieza a entrar agua a razón de 1600 litros por hora (considerando que el agua ingresa de forma constante).

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿En cuánto tiempo María llenará la piscina? ¿Qué procedimientos empleó para resolver la situación? Utilizar más de dos procedimientos.

.....
.....
.....

2. Si la piscina tuviese una capacidad de 14400 litros, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse? ¿Cuál es el procedimiento que realizarías para averiguarlo?

.....
.....
.....

3. ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular la cantidad de agua que ingresa a la piscina en un determinado tiempo? Justifique su respuesta.

ANEXO N.º 3
ACTIVIDAD N.º 3
REFINERÍA LA PAMPILLA

Una refinería de petróleo o destilería es una plataforma industrial destinada a la refinación del petróleo crudo, por medio de la cual, mediante un proceso adecuado, se obtiene diversos combustibles fósiles capaces de ser utilizados en motores de combustión (gasoil, gasolina, etc.), aceites minerales, asfaltos y otros. La refinería “La Pampilla” está ubicada en el distrito de Ventanilla, provincia del Callao. Esta se abastece por tuberías, cuenta con una capacidad total de almacenamiento de 12840 metros cúbicos de petróleo crudo.

Cierto día, el supervisor de la planta se percató de que en la refinería existen 3000 metros cúbicos de petróleo crudo, además sabe que, constantemente, a cada hora ingresa 2460 metros cúbicos.

Teniendo en cuenta esta información, responde las siguientes preguntas:

1. ¿En cuánto tiempo la planta de refinería contará con los 12840 metros cúbicos de petróleo crudo? Justifique su respuesta. Emplee más de dos procedimientos para encontrar la respuesta.
2. Si la planta tuviese una capacidad de 17760 metros cúbicos de petróleo crudo, ¿cuántas horas tardaría en llenarse? Use la siguiente tabla para responder la pregunta.

Tiempo (T)	$T_1=$	$T_2=$	$T_3=$	$T_4=$	$T_5=$	$T_6=$	$T_7=$
Volumen (V)	$V_1=$	$V_2=$	$V_3=$	$V_4=$	$V_5=$	$V_6=$	$V_7=$

3. A partir de la tabla, ¿de qué otra forma puedes representar los valores obtenidos? Justifique su respuesta.
4. ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular la cantidad de petróleo crudo que ingresa en un determinado tiempo? Justifique su respuesta.
5. Halle el valor numérico de las siguientes expresiones:

$$a) m = \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} =$$

$$b) m = \frac{V_3 - V_2}{T_3 - T_2} =$$

$$c) m = \frac{V_4 - V_3}{T_4 - T_3} =$$

$$d) m = \frac{V_5 - V_4}{T_5 - T_4} =$$

6. ¿Qué relación tiene el valor encontrado de “m” con la expresión hallada en la pregunta 4 y con la representación obtenida en la pregunta 3?

.....
.....
.....

