PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA E IDENTIFICACIÓN DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN TAREAS ESTRUCTURALES DE LOS TEXTOS OFICIALES DEL V CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

EDWIN CRISTIAN JULIAN TRUJILLO

Dirigido por

FLOR CARRILLO

San Miguel, 2017

Never consider study as a duty, but as an opportunity to penetrate the wonderful world of knowledge

Albert Einstein

DEDICATORIA

A mi padre, DIOS, por la fortaleza y sabiduría para seguir con el cumplimiento de este objetivo.

A mi madre, el motor de mi vida, por sus sabias palabras de aliento y enseñarme con su ejemplo que con mucho esfuerzo se consigue todo en esta vida.

A mi esposa, Elva Tagle, por su amor incondicional, su compresión y sobre por estar a mi lado en las buenas y las malas.

AGRADECIMIENTO

A mi asesora la Mg. Flor Carrillo, por su orientación, infinita paciencia y dedicación durante el desarrollo de la tesis, por sus excelentes aportes que ayudaron a culminar nuestra investigación, por su generosidad al brindarme y compartir conmigo la experiencia investigadora. ¡Gracias por todo!

A la Dra. Cecilia Gaita, por sus pertinentes sugerencias y comentarios sobre el trabajo de edición que conllevaron a una mejora continua.

A la Dra. Jesús Flores, por brindarme formación, asesoría y amistad sincera. Siempre tendré presente sus sabios consejos y grandes enseñanzas.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de la Matemática, por las fructíferas clases útiles e inspiradoras.

RESUMEN

El presente trabajo emplea algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), para identificar los diferentes significados asociados a la tareas estructurales, es decir, aquellas tareas que involucran las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas de los números naturales , fraccionarios y decimales positivos . Para ello, se han analizado algunos textos de matemática superior, textos didácticos e investigaciones que son un referente importante en el estudio de las tareas estructurales. La noción de significado se concretiza haciendo uso de la herramienta configuración epistémica que brinda el EOS. Permite reconocer las definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas con procedimientos y argumentos que los justifican. Por otro lado, los niveles de algebrización permiten otorgar grado según sean los procesos de generalización desarrollados en la soluciones de las tareas. Se han identificado significados como: comparación, cambio, igualación, combinación, proporcionalidad simple, producto de medidas, densidad orden, producto y conjeturas validación.

A continuación, se ha analizado los libros de texto del V ciclo de educación primaria del Perú, los cuales comprenden los grados de 5to y 6to, realizando un análisis epistémico de las tareas estructurales e identificando los niveles de algebrización. Encontrándose que predomina el lenguaje verbal y simbólico, se enfatiza en el uso de propiedades y operaciones fundamentales de los números naturales, fracciones y decimales positivos. Además, se consideran situaciones en su gran mayoría extramatemáticas, esto es, situaciones relacionadas con el mundo real, aunque no se establecen conexiones con otras áreas de conocimiento; esto ocurre pese a que el currículo nacional en la educación primaria establece que las áreas deben propiciar la integración de diversos campos del conocimiento, acorde con las etapas del desarrollo del estudiante. Por otro lado, podemos resaltar que los argumentos empleados corresponden al método deductivo y empírico.

Finalmente, con respecto a los niveles de algebrización la solución de solo una tarea corresponde a un nivel 2, es decir, se plantea una ecuación de primer grado y se entiende la división como operación inversa de la multiplicación.

Palabras clave: Tarea estructural, Niveles de Algebrización, Configuración epistémica.

ABSTRACT

The present work uses some theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach of Cognition and Mathematical Instruction (EOS), to identify the different meanings associated with the structural tasks, that is, those tasks that involve the operations and properties of the numerical structures of the Natural numbers, fractions and positive decimals. For this, some texts of higher mathematics, didactic texts and research have been analyzed that are an important reference in the study of the structural tasks. The notion of meaning is concretized using the epistemic configuration tool provided by the EOS. It allows to recognize the definitions and properties, while solving problems with procedures and arguments that justify them. On the other hand, the levels of algebrization allow to grant degree according to the processes of generalization developed in the tasks. We have identified meanings as: comparison, change, equalization, combination, simple proportionality, product of measures, order density, product and validation conjectures.

Next, we have analyzed the textbooks of the 5th cycle of primary education in Peru, which comprise the 5th and 6th grades, performing an epistemic analysis of structural tasks and identifying levels of algebrization. Finding that verbal and symbolic language predominates, emphasis is placed on the use of properties and fundamental operations of natural numbers. In addition, situations are considered mostly extra mathematics, that is, situations related to the real world, although no connections are established with other areas of knowledge; This occurs despite the fact that the national curriculum in primary education establishes that the areas should promote the integration of diverse fields of knowledge, according to the stages of student development. Besides that, we can emphasize that the arguments used correspond to the deductive and empirical method.

Finally about algebrization levels the solution of only one task corresponds to a level 2, that is to say a first degree equation is proposed and the division is understood as an inverse operation of the multiplication.

Key words: Structural task, Algebrization levels, Epistemic configuration, Meanings.

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

CONSIDERACIONES INICIALES

Nuestro interés por analizar los textos oficiales de matemáticas del V ciclo, el cual comprenden los grados de 5to y 6to del nivel primaria de la educación básica regular del Perú, surgió a raíz de observar que estudiantes de secundaria de matemáticas, no dominan las operaciones fundamentales de la aritmética, por el desconocimiento de las diferentes estructuras numéricas, sus propiedades, entre otros. Pensamos que los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de las matemáticas brindan herramientas necesarias para realizar nuestro análisis. La presente tesis tiene como objetivo realizar un análisis epistémico a las tareas estructurales, es decir, las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas que se encuentran en los textos oficiales de matemática del V ciclo e identificar en qué nivel de algebrización se encuentra la solución realizada de las mismas, todo ello bajo aspectos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), para ello se estructura la tesis en cuatro capítulos de la siguiente manera.

El primer capítulo aborda la problemática de investigación, en la cual hemos realizado una revisión de antecedentes de investigaciones en torno operaciones y propiedades de los números naturales ($\mathbb{N}$), fracciones positivas ($\mathbb{F}^{+}$), números decimales positivos ($\mathbb{D}^{+}$), de forma general los números racionales positivos incluido el cero (${\mathbb{Q}_0}^{+}$). Así también, se han considerado investigaciones sobre el razonamiento algebraico elemental (RAE) y los niveles de algebrización, la justificación de nuestra investigación, y aspectos metodológicos de tipo bibliográfico de Gil (2002) la cual establecerá la estructura de nuestra tesis. El segundo capítulo trata sobre el marco teórico, tomando como referente aspectos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática de Godino, Batanero y Font (2007), así como el RAE y los niveles de algebrización. En el tercer capítulo realizamos la identificación del significado institucional de referencia y del significado pretendido en los libros oficiales de matemáticas de quinto y sexto del Perú, realizando aquí el análisis tras la contratación de los significados, manifestando los principales resultados, por otro lado se adjudica un nivel de algebrización a la solución de las tareas estructurales de los libros oficiales. En el cuarto capítulo se realiza una propuesta de tareas, las cuales en base a la solución de las mismas podemos manifestar que pueden servir de ayuda a los estudiantes, pues estas están validadas bajo el significado de conjeturas y validación, que permiten explorar, ensayar elaborar relaciones, lo cual propiciaría el razonamiento algebraico elemental.

CAPÍTULO 1. LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presentan resultados de las contribuciones teóricas que hacen referencia a nuestro objeto de estudio, así como aspectos relacionados al mismo en investigaciones previas. Asimismo, se argumenta la relevancia de esta investigación a manera de justificación, teniendo como deferencia que constituye una contribución significativa para la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, se establece la pregunta de investigación, los objetivos generales, específicos, la metodología y los procedimientos metodológicos empleados en la investigación.

Antecedentes

Para esta sección, organizamos los antecedentes en dos grupos de investigaciones. En primer lugar, se consideran aquellas en las que el objeto matemático se refiere a las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas como son: los números naturales, racionales positivos y en segundo lugar, aquellas que aportan resultados relacionados con los niveles de algebrización que se le otorga a la resolución de tareas.

Revisamos el trabajo realizado por Soares (2012) que tiene como principal objetivo investigar las dificultades que presentan estudiantes de 11 a 13 años en la resolución de problemas sobre operaciones con números naturales. En ella, se señala que los estudiantes desconocen los algoritmos de solución de las operaciones de multiplicación y división. Además, la autora tiene como finalidad mejorar los conocimientos de estos estudiantes cuando utilizan distintos medios (tecnología) frente a las tradicionales dados por los docentes en clase. Los estudiantes son seleccionados por los coordinadores del Grupo Trapecio debido a que presentan mayores dificultades con las matemáticas. El autor Soares (2012) realiza un análisis previo sobre los conocimientos que poseen tres estudiantes sobre operaciones con números fraccionarios a partir de lecturas y una serie de problemas que le permiten diagnosticar los conocimientos iniciales de los mismos. El estudio es realizado en doce sesiones semiestructuradas, dadas en once encuentros, que incluían actividades matemáticas, además de una entrevista.

En relación al marco teórico, se puede mencionar que los conceptos construidos para los estudiantes se fundamentan en la teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) y el método es la ingeniería didáctica, tomando algunos aspectos de la misma. La investigadora subraya que el uso del ábaco o de la calculadora resultan elementos importantes para comprender las operaciones de adición y sustracción de números naturales, porque mejora en los estudiantes la relación con el saber matemático. Finalmente, la autora indica que el estudio de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos debe ser motivado por medio del juego, material concreto y tecnología como es la calculadora.

Por otro lado, la investigación de Oliveira (2015) tiene como finalidad construir un significado para la enseñanza de las operaciones con números racionales positivos a partir del uso de la calculadora. Para tal fin, realiza una secuencia de enseñanza con cuatro estudiantes de 10 a 12 años del estado brasileño de Pará. Estos decidieron participar de forma voluntaria.

El estudio es realizado en diez encuentros, donde el investigador verifica que los estudiantes verbalizan y escriben reglas para la adición y sustracción de los números racionales positivos con el uso de la calculadora. Lo mismo ocurre con las multiplicaciones y divisiones de números fraccionarios de igual denominador. El fundamento teórico que utiliza el investigador es dado por la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de Registros y Representación Semiótica, además de algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Como resultado de ello, el investigador manifiesta que la calculadora puede ser un recurso pedagógico para la enseñanza de las operaciones con números fraccionarios. También añade que este recurso simplifica las respuestas en las diferentes operaciones y esto puede ser un obstáculo pues el conocimiento de las operaciones con números naturales es percibido de la misma manera con los números fraccionarios.

Continuando con las investigaciones, Konic (2011) en España realiza un estudio exploratorio sobre la introducción de los números decimales en libros de texto. Uno de sus objetivos es saber en qué medida los libros de texto de educación primaria consideran los resultados de las investigaciones sobre los números decimales, además de saber si existen aspectos para mejorar la enseñanza. Para ello, la investigadora desarrolló un estudio en primera instancia y desde una visión conjunta, de cómo se introducen los números decimales en dos libros de textos desarrollados en la escuela primaria. Estos son: Almodóvar et al (como se citó en Konic, 2011), Matemáticas para cuarto curso de primaria de la editorial Santillana y el segundo libro de Ferrero (como se citó en Konic, 2011). Matemáticas para cuarto curso de primaria de la editorial Anaya.

El marco teórico que empleó la investigadora son elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para el análisis de texto, además de ser una investigación mixta, esta presenta componentes cualitativos y cuantitativos. Tras el análisis de los textos, la autora remarca la poca articulación entre conceptos, lenguaje, propiedades y argumentos; de manera que no generan un conjunto integrador en relación a los números decimales en los libros de texto, además añade las dificultades en el significado y manejo de propiedades que dan valor a la validez del sucesor de un número. Esto demuestra el conflicto de significado que dificulta la compresión de la densidad de los números decimales, siendo esta propiedad fundamental para avanzar hacia la construcción de otros conjuntos numéricos.

Otra investigación es la de Peña (2011) que tiene como finalidad reinterpretar el algoritmo para operar aditivamente números fraccionarios estructurando una propuesta. El marco teórico utilizado estuvo compuesto por dos importantes teorías: la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), siendo el método aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Dicha investigación fue realizada con estudiantes de 11 y 12 años en la ciudad de Santiago de Chile. La autora manifiesta cómo los estudiantes extienden la naturaleza de los números naturales hacia las fracciones, por ejemplo al sumar números fraccionarios como números naturales. Es por ello que propone darle una nueva interpretación al algoritmo de la adición de fracciones.

La propuesta de Peña (2011) consigue que la adición de fracciones aflore como solución natural a una tarea de medida compuesta (número mixto $a\frac{b}{c}$), esto es que las medidas compuestas se pueden expresar como una sola fracción, y se sistematizan precisiones relativas al instrumento utilizado para medir (las reglas). Para la investigadora, la interpretación de la fracción como medida es la más propicia para construir el algoritmo aditivo, pues en una situación puntual permite ejecutar las sumas con materiales y, en un proceso de abstracción subsecuente, se establece un recurso común para efectuar la suma.

Por otro lado, se presentan investigaciones donde se da a conocer el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en tareas estructurales, que para nuestra investigación, son problemas que contienen operaciones y propiedades de los estructuras numéricas, los cuales de acuerdo a la forma como son resueltos se les otorga grados de generalidad (niveles de algebrización) que detallamos a continuación.

En Colombia, Martínez (2014) hace una investigación que tiene como objetivo describir la correspondencia entre los niveles de algebrización (grados de generalidad) de las tareas algebraicas identificadas en los libros de texto y el desempeño de los estudiantes cuando resuelven dichas tareas.

Para la investigación, el autor utiliza una colección de libros de matemáticas escritos en inglés que se sigue en el colegio bilingüe Montessori, localizado en Medellín, Colombia. Para alcanzar esta correspondencia entre los niveles de algebrización, libros y desempeño de sus estudiantes, el autor considera cuatro etapas. Primero, clasifica las tareas de carácter algebraico establecidas en los libros de texto como las operaciones con los números racionales positivos, las relaciones de orden, ecuaciones e inecuaciones basados en los Principios y Estándares NCTM sobre el bloque de Álgebra, además de la Taxonomía del Desempeño Algebraico de Burkhardt (Martínez, 2014). En la segunda, plantea una prueba con tareas de carácter algebraico a sus estudiantes. En la tercera, aplica la prueba diseñada con tareas de carácter algebraico y finalmente en la cuarta, contrasta entre los niveles de algebrización atribuidos a las tareas y el desempeño de los niños. En relación al fundamento teórico, el autor utiliza el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Por otro lado, el investigador subrayó que si bien los niveles de algebrización permiten ubicar niveles teóricos a cada una de las soluciones de las tareas, estas no parecen ser suficientes a la variedad de soluciones que presentan las diferentes tareas mostradas en los libros de texto estudiados. Además Martínez (2014) añade que es apresurada la inserción temprana de aspectos simbólicos y variacionales (numérico, estadístico, métrico y geométrico) y la relación entre los mismos.

Otra investigación realizada en España por Aké, Castro, & Godino (2015) tiene como finalidad el análisis de las respuestas que los docentes en formación dan a tareas estructurales. Para ello, se trabaja con cincuenta y dos docentes en formación quienes, otorgan diferentes soluciones a una misma tarea. A cada una de dichas respuestas, y según las características que presentan, se les adjudica un nivel de algebrización. Debido a ello, los investigadores mencionan que las diferentes soluciones implican prácticas matemáticas con distintos niveles de algebrización. El marco teórico utilizado por los investigadores es el Enfoque Ontosemiótico (EOS), así como la propuesta de los niveles de algebrización como parte del razonamiento algebraico elemental (RAE).

Los autores resaltaron que en las soluciones de las tareas desarrolladas por un grupo de docentes en ejercicio se emplean, métodos aritméticos, esto quiere decir, operaciones con números concretos; mientras que otro grupo utiliza alguna incógnita para lograr generalizar valores particulares. Por otro lado, los investigadores mencionan que los docentes en formación requieren de aptitudes para algebrizar las diferentes tareas que se encuentran en los libros de texto. Tras el análisis y término del proceso formativo, los autores remarcan que los docentes en formación reconocen rasgos algebraicos, lo cual les permite construir una visión más ampliada del razonamiento algebraico.

En las investigaciones y artículos presentados se evidencian aprendizajes alcanzados en torno a las operaciones y propiedades que presentan las diferentes estructuras numéricas, así también los niveles de algebrización que se le otorga a la resolución de tareas permiten comprender la caracterización del razonamiento algebraico. A continuación presentamos aspectos relacionados con la justificación de nuestra tesis.

Justificación

En nuestra labor docente hemos observado que los estudiantes, al iniciar sus estudios secundarios, presentan errores al resolver ecuaciones, esto como consecuencia de varios factores. Al respecto, Castellanos y Obando (2009) manifiestan que estos factores radican en la interpretación incorrecta del lenguaje, las propiedades, definiciones y errores al operar algebraicamente. El estudio realizado por los investigadores indica que cuando los estudiantes interpretan letras que representan números existe una tendencia a considerar las letras como valores particulares más que como números generalizados o como variables. Otro factor importante es el mal uso de las propiedades y definiciones, por ejemplo y como consecuencia de ello, es el uso de la propiedad distributiva de la siguiente manera: $2(m+5) = 2m + 5$ y con respecto a las operaciones algebraicas al momento de simplificar la expresión $\frac{(a+b)}{a}$ se obtiene b, deducida equívocamente de $\frac{4\times5}{5} = 4$.

Los investigadores señalan que las ecuaciones en contraste con las expresiones aritméticas, no son consideradas verdades absolutas, es decir, el signo igual no relaciona identidades necesariamente, sino que otorga a la incógnita un valor o conjunto de valores que permiten que la expresión sea verdadera. Esto conlleva a que los estudiantes incurran en una serie de errores. Además, los autores subrayan que al efectuar operaciones en el primer miembro de la misma sin modificar el segundo, genera en que los estudiantes pierdan el sentido de igualdad como el equilibrio entre ambos miembros de la ecuación. Así que podemos dar como ejemplo de ello el uso del "pasa" en una ecuación $2x - 1 = 0$, para calcular el valor de la incógnita x , indicamos que -1 pasa como +1 y luego el 2 que está multiplicando pasa dividiendo, obteniendo $x = \frac{1}{2}$.

De acuerdo a lo mencionado, los expertos recalcaron que los estudiantes que no dominen las operaciones con números traducen estos errores al campo algebraico, incluso hacen hincapié en que se debe enseñar al alumno la aplicación correcta de las propiedades y operaciones.

Por otro lado, este conjunto de errores es motivado según indica Socas (2007) por la forma como se enseñan las propiedades de las operaciones básicas tales como: la adición, sustracción, multiplicación y división. Según el autor esto se debe a que todas las propiedades se enseñan juntas, sin profundizar en cada una de ellas por separado. El investigador recalca en la enseñanza adecuada de las propiedades y manifiesta la confusión por parte de los estudiantes al emplear la propiedad distributiva como la asociativa del producto, inclusive añade que ante expresiones con operaciones combinadas, se jerarquiza el uso de los signos de agrupación, desarrollando primero los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves. Es así que cuando los mismos se enfrentan a operaciones combinadas donde intervienen letras y números utilicen el mismo procedimiento mencionado. Por ello, Socas (2007) manifiesta que los estudiantes no pueden resolver tareas donde se usen paréntesis. Un claro ejemplo de ello es la expresión $z - (x - y)$ pues o dejan de lado el paréntesis o resuelven como si no estuviera.

Por otro lado, operar incorrectamente con números particulares, el mal empleo de las propiedades de los conjuntos numéricos y el no comprender lo que van a resolver, se refleja en los resultados de la ronda 2012 del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), donde un estudio realizado por el Perú (2012a) indica que de los

6.035 estudiantes del territorio peruano, el 47% quedó ubicado en un nivel 1, el cual es considerado el más bajo. Además sus interpretaciones son simples, de comprensión incipiente y de respuesta inmediata. Incluso los mismos muestran dificultad en las operaciones con decimales y cálculo de porcentajes, no interpretan las soluciones en un contexto real. También, el estudio indica que los estudiantes de 15 años de edad no alcanzan estos aprendizajes básicos. Esto podría encontrar explicación, según los estudios, en algunas prácticas escolares que enfatizan el manejo de las operaciones de manera algorítmica y distante de la comprensión del significado y el razonamiento de los mismos.

Por otra parte, el estudio de las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas está inmerso en los documentos oficiales del Perú. Uno de ellos es el Currículo Nacional de educación primaria (Perú, 2016). En el área de matemática, una de las competencias es: Resuelve problemas de cantidad donde los estudiantes de 10 y 11 años muestran desempeños, de los cuales dos indican el emplear estrategias para realizar cálculos con el conjunto de las fracciones, números naturales y decimales así como argumentar procesos de resolución empleando las operaciones y propiedades de los conjuntos numéricos en mención.

Es importante mostrar cómo las tareas estructurales, operaciones y propiedades de las estructuras numéricas deben tener un constructo apropiado en la formación de los estudiantes. Es por ello que en Perú (2016) se establecen los aprendizajes que se espera logren los estudiantes como consecuencia de su formación. Asimismo, recalca la importancia del docente enfatizando que "la enseñanza de la matemática pone énfasis en el papel del docente como mediador entre el estudiante y los saberes matemáticos al promover la resolución de problemas en situaciones" (p.135).

Con respecto a los docentes, Godino (2004) plantea que deben ser capaces de diseñar tareas de aprendizaje empleando recursos adecuados. Debido a ello, Konic (2011) señala que uno de los recursos dominantes en muchas clases de matemáticas es el libro de texto, el cual establece un tipo de institución de referencia inmediata utilizado en la programación y desarrollo del proceso formativo.

Siendo el libro de matemáticas un elemento importante, Cárcamo (2012) considera que en todo proceso educativo los libros de texto son el principal mecanismo para desarrollar actividades de enseñanza aprendizaje. Estas herramientas son utilizadas por los docentes para planificar, preparar y desarrollar sus clases a sus estudiantes en su proceso de aprendizaje. Además, la realización de tareas y afianzamiento de los contenidos constituyen recursos indispensables para una óptima educación. Su buen uso permite la interrelación entre los integrantes de la labor educativa. En consecuencia, el autor señala:

> Un buen libro de texto es aquel que hace posible aprender a resolver problemas a través de una enseñanza que se adhiera a los contenidos del libro, independientemente de los años de experiencia del docente o de la asignatura de su especialidad, por eso es necesario que todos los niños y niñas lleven a cabo el aprendizaje utilizando los libros de texto. En consecuencia, los libros de texto se constituyen en el material didáctico principal para las asignaturas, con una organización y distribución que va de acuerdo con la estructura del programa y al ciclo o nivel estudio. (p. 57)

Al respecto Font y Godino (2006) mencionan que los textos escolares forman la fuente inmediata donde se almacena la experiencia práctica de los docentes y, en cierta medida, los resultados de la investigación. Si las tareas estructurales, que constituyen nuestro objeto de estudio y que están presentes en los libros de texto de matemática del V ciclo del Perú, resultan ser adecuadas, las cuales permitirán desde nuestro punto de vista y en base a estudios realizados, la movilización de las operaciones y propiedades que conllevará a que los estudiantes adquieran las características del razonamiento algebraico. Al respecto, Font y Godino (2006) señalan la idea de generalización de diferentes patrones haciendo uso de los símbolos o variables que son colocados en lugar de los números.

Por último, Slavitt (como se citó en Warren, 2003) afirma que para proporcionar una perspectiva inicial del razonamiento algebraico se debe considerar las operaciones ya propiedades de los estructuras numéricas tanto simbólica como contextualmente.

De lo mencionado, creemos pertinente que nuestra investigación sobre las tareas estructurales permitirá dar un primer paso hacia el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Al haber justificado la realización del presente estudio por medio de la relevancia académica, personal y profesional, presentamos a continuación la pregunta y objetivos de la investigación.

Pregunta de la investigación

En esta investigación, se pretende realizar un análisis de los textos oficiales del V ciclo. Este análisis necesita no solo de una descripción y fundamentación detallada, sino la determinación para realizar una configuración epistémica e identificar los niveles de algebrización en la solución de las tareas estructurales. En definitiva, se establece la siguiente pregunta de investigación: ¿ Cuáles son las configuraciones epistémicas asociada a las tareas estructurales y en qué nivel de algebrización se encuentran las soluciones de las tareas estructurales presentes en los textos oficiales de matemática del V ciclo de educación primaria?

Objetivos general de la investigación

Realizar un análisis epistémico de las tareas estructurales e identificar los niveles de algebrización de las soluciones de las tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo, teniendo en cuenta si estos promueven el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Objetivos específicos

Para alcanzar los objetivos generales de nuestra investigación pretendemos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los significados institucionales pretendido y referencial de las tareas estructurales presentes en el V ciclo de educación primaria.
- Analizar las configuraciones epistémicas de las tareas estructurales seleccionadas de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria.
- Contrastar las características de los niveles de algebrización con las soluciones de las tareas estructurales mostradas en los textos de matemática oficiales del V ciclo.

Metodología y procedimientos empleados en la investigación

Uno de los propósitos de nuestra investigación es estudiar *el todo integrado como una unidad*, para nuestro caso los libros de texto oficiales del V ciclo, pues ahí se encuentra el objeto matemático observable en las diferentes tareas y actividades matemáticas, es por ello que Martínez (2006) explica que la investigación cualitativa es aquella que pretende estudiar el todo integrado de algo que constituye una unidad de análisis y que hace que ese algo sea como es (una persona, una entidad social, un producto, etc.). Además, el investigador considera que la pesquisa cualitativa trata de identificar el entorno profundo de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón completa de su conducta y manifestaciones.

Por otro lado, Taylor y Bogdan (1987) sugieren que los investigadores cualitativos parten de datos, pero no manipulan los datos para evaluar modelos, conjeturas o teorías predeterminadas, además los investigadores dicen que el diseño de investigación cualitativo es flexible.

En este tipo de estudio, según los autores, el investigador observa el escenario y a las personas desde una perspectiva holística. Ello quiere decir que los individuos y los escenarios no son reducidos a variables, sino considerados como un todo. Además, los investigadores explican que la confiabilidad y la reproducibilidad son parte de toda investigación científica. La investigación cualitativa pone énfasis en la validez de la misma porque es un estudio sistemático conducido por procedimientos rigurosos, aunque no necesariamente estandarizados.

En cuanto al tipo, usaremos el bibliográfico, de acuerdo con Gil (2002) el método bibliográfico es desarrollado en base al material ya elaborado, compuesto principalmente por libros y artículos científicos, además el investigador manifiesta:

> La investigación bibliográfica, como cualquier otra modalidad de investigación, se disgrega en una serie de etapas. El número de etapas depende de los diferentes factores, tales como la naturaleza del problema, el nivel de conocimiento que tiene el investigador sobre el tema, el grado de precisión que se pretende otorgar a la investigación, etc. Asimismo, cualquier intento de presentar un modelo para el desarrollo de una investigación bibliográfica debería de ser entendida como arbitraria. (p.59)

Nuestra investigación es del tipo bibliográfica, dado que en la investigación analizamos libros de texto del V ciclo (5^{to} y 6^{to} grado de educación primaria) de la Editorial El Nocedal S.A.C, distribuidos en todos los colegios estatales del país, documentos oficiales (el Mapa de progreso de cambio, Rutas de Aprendizaje y el Currículo 2016 de la educación básica regular del Perú). Podemos recalcar que nuestra investigación analiza las tareas estructurales, es decir, aquellas tareas donde se desarrollan las operaciones o propiedades de las estructuras numéricas presentes en los libros de texto de matemática del V ciclo de la educación básica regular del Perú.

Procedimientos metodológicos

De acuerdo con Gil (2002) entonces estructuraremos de la siguiente manera. En la Figura 1 presentamos las seis etapas de la investigación como son: la selección del tema, el levantamiento bibliográfico inicial, la formulación del problema, el desarrollo de la estructura de trabajo, la pesquisa de fuentes relevantes y la organización lógica del análisis de los textos del V ciclo.

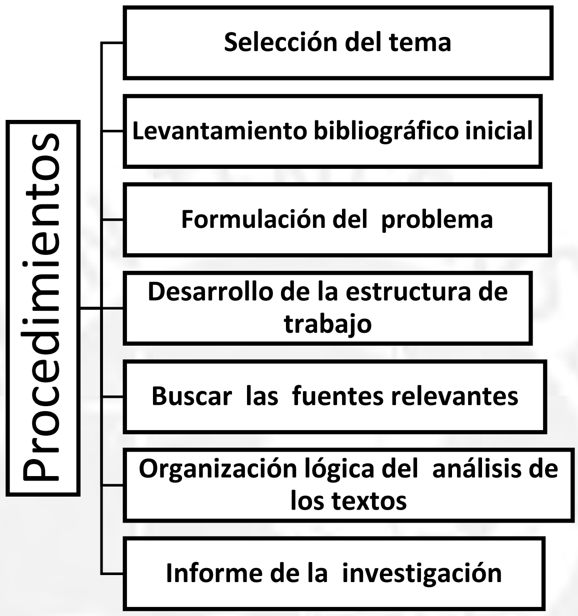


Figura 1. Procedimientos metodológicos

Detallamos a continuación cada una de las seis etapas:

a) **Selección del tema:** en esta primera etapa de nuestra investigación buscamos información relacionada con nuestro objeto de estudio, a saber: las tareas estructurales, quiere decir información relacionada con las operaciones y propiedades de los estructuras numéricas, así como también la identificación del razonamiento algebraico elemental en la solución de las tareas estructurales. Esta selección está relacionada con el análisis de textos del área de Matemática en Educación Primaria, el cual desarrollaremos, centrándonos en el V ciclo que comprende los grados de quinto y sexto grado (estudiantes de 10 a 11 años) que es distribuido por el Ministerio de Educación del Perú.

b) **Levantamiento bibliográfico inicial:** para esta segunda etapa y luego de haber elegido el tema de investigación, seleccionamos las investigaciones que marcarán nuestros antecedentes vinculados con nuestro objeto de estudio que proporcionarán el análisis de los dos libros de texto del V ciclo de la EBR del Perú.

Como estamos interesados en las tareas estructurales nos inclinamos por utilizar el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) de Godino y Batanero (1994), pues nos proporcionarán una herramienta fundamental para el desarrollo de esta investigación.

Godino, Batanero y Font (2007) establecen que el EOS:

> Es la Formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia. (p.1)

c) **Formulación del problema**: en esta tercera etapa enunciamos la pregunta de investigación, así como los objetivos generales y específicos de nuestro trabajo de investigación. Cabe recalcar que a lo largo del desarrollo de nuestro trabajo, este puede sufrir cambios y reestructuraciones en el periodo de construcción de nuestra investigación cualitativa.

d) **Desarrollo de la estructura de trabajo:** en esta cuarta fase se presentan los cuatro capítulos o secciones correspondientes a la estructura dada en nuestro trabajo de investigación.

e) **Buscar las fuentes relevantes:** se filtra la información tomada como una revisión inicial que luego es seleccionada. Posteriormente, se utilizarán esas investigaciones (tesis de maestría, doctorado, artículos, textos de matemática superior y otros) que darán las respuestas adecuadas para la solución de nuestro problema de investigación.

f) **Organización lógica del análisis de los textos:** aquí ejecutamos nuestro plan de trabajo.

- Definir algunos aspectos teóricos del EOS para el análisis las tareas estructurales inmersas en los dos libros de textos seleccionados.

- Definir algunos aspectos del razonamiento algebraico elemental, como son los niveles de algebrización.
- Establecer el significado de referencia institucional que será diseñado a partir de investigaciones, libros de matemática superior, el currículo 2016, rutas de aprendizaje de la EBR del Perú.
- Identificar el significado de referencia pretendido, a partir de los libros de Matemática 5 y Matemática 6, correspondientes al V ciclo.
- Selección de capítulos, unidades y lecciones en los libros de textos seleccionados, donde se encontrará nuestro objeto de estudio que son las tareas de estructurales los estructuras numéricas.
- Identificar aquellas tareas estructurales y sus significados, las cuales serán analizadas a partir de la configuración epistémica.
- Adjudicar un nivel de algebrización a cada solución de las tareas estructurales presentes en las unidades seleccionadas de los libros de Matemática 5 y Matemática 6.

g) **Informe de la investigación**: en esta última etapa de nuestra investigación indicamos todo el cuerpo de la tesis, el análisis de los textos del V ciclo y las consideraciones finales.

En este capítulo se descubren investigaciones previas relacionadas con el marco teórico EOS, y con el objeto matemático de nuestro estudio: las tareas estructurales de los estructuras numéricas, argumentar la relevancia de nuestra investigación a manera de justificación, establecer la pregunta de investigación, los objetivos generales, específicos, el método y los procedimientos empleados en la investigación. En el siguiente capítulo presentamos los elementos teóricos que sustentan nuestra investigación.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de nuestro trabajo de investigación, utilizaremos el modelo teórico conocido como el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática, pues ofrece herramientas fundamentales para el análisis de las tareas que se encuentran en los textos de matemáticas oficiales del V ciclo de educación básica regular del Perú.

Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Para el desarrollo teórico de nuestra investigación, utilizaremos algunas herramientas del EOS de Godino, Batanero y Font (2007). Los investigadores manifiestan que el EOS integra diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en didáctica de la matemática a partir de supuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas.

En este modelo teórico se hace uso de diversos términos, algunos de los cuales se definen a continuación.

- **Práctica matemática:** es un conjunto de hechos o expresiones que pueden ser verbales, gráficas, gestuales, etc. Estas son comunicadas por una persona para resolver un problema de índole matemático, revelando así la solución conseguida, que luego será validada y generalizada en distintos problemas. Las prácticas matemáticas se dividen en dos: personales e institucionales (Godino y Batanero, 1994).
- **Institución:** es un grupo de personas con un interés común, involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. La institución está regida bajo reglas y modos de operar que son mecanismos para la realización de prácticas sociales (Godino y Batanero, 1994).
- **Objeto matemático:** es todo a lo que se pueda hacer referencia en la resolución de un problema. El objeto matemático designa todo lo que es indicado, señalando o nombrando cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Aké, 2013).
- **Sistemas de prácticas:** es una de las posibles maneras de entender el significado del objeto matemático, los cuales son siempre relativos a un contexto o institución,

unidos a la solución de cierta variedad de situaciones – problemas (Godino, Font, & Wilhelmi, 2008).

- **Tarea:** es la actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiantes, profesor, medio) para dar respuesta a una cuestión, son las situaciones-problemas las cuales se conciben como una actividad ligada a la resolución de problemas (Godino, 2013).
- **Tarea estructural:** es una situación-problema que involucra objetos tales como; relación de equivalencia, operaciones y sus propiedades, ecuaciones e inecuaciones (Godino et al., 2015).

Luego de presentar el significado que desde el EOS se atribuye a esos términos, procedemos a detallar otros aspectos del EOS, que tomaremos en cuenta para nuestra investigación.

Herramientas teóricas del EOS

En este apartado mostramos una síntesis de los supuestos y algunas herramientas teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico sobre el conocimiento y la instrucción matemática (EOS) Godino, Batanero y Font (2009). Solo haremos mención de tres herramientas, pues ellas nos permitirán responder a nuestra pregunta de investigación.

a) Significados institucionales, para nuestra investigación utilizaremos el significado institucional de referencia y pretendido.

b) Entidades primarias o tipos de objetos

c) Configuraciones epistémicas.

d) Atributos Contextuales

Estas herramientas del EOS esclarecerán nuestra investigación y serán detallados a continuación.

Significados institucionales del objeto matemático

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante una tarea en concreto, interesa según consideraron Godino, Batanero y Font (2007) considerar los sistemas de prácticas operativas y discursivas puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. Los investigadores indican que ante la pregunta que significa o representa tal objeto matemático, se propone como respuesta, el sistema de prácticas que se realiza en el seno de una institución (significado institucional). Para los investigadores los significados institucionales se clasifican en cuatro: implementado, evaluado, pretendido y referencial. Para nuestra investigación utilizaremos dos.

- **Significado Institucional Pretendido**: es la planificación del proceso de estudio que incluye un sistema de prácticas según indican los investigadores. Podemos indicar que el significado institucional pretendido es cuando una institución elabora diferentes documentos con el fin de conseguir algo en particular. El docente elabora el desarrollo de sus clases, planificando, quiere decir maneja de manera coherente la continuidad de aprendizajes que se quiere lograr con sus estudiantes. Esta planificación la encontramos en los documentos y libros realizados por las instituciones encargadas del sistema educativo, los planes curriculares y sesiones de clase. Específicamente esta planificación la encontramos en los libros de texto que se utilizan como material de aprendizaje de los estudiantes, en nuestro caso los libros de matemática del V ciclo, donde se identifican los significados que dan a las tareas estructurales en contextos intra y extra matemática.
- **Significado Institucional de Referencia**: es el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. La determinación global requiere de un estudio histórico y epistemológico del objeto, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado total del objeto matemático (Godino, Batanero & Font, 2009).

Nosotros entendemos entonces que el significado institucional de referencia es el que construye el investigador a partir de los textos de matemática, investigaciones artículos de divulgación en el ámbito de la educación matemática y documentos oficiales que permiten organizar un significado que es parte significado global de las tareas estructurales, el cual se emplea como referente para nuestra investigación.

Por otro lado Godino et al.(2008) señalan que la explicación semiótica de las prácticas matemáticas institucionales, permite puntualizar los procesos de aprendizaje en términos de articulación de significados, tal como se indica la Figura 2, en ella se muestra los significados institucionales asociadas a un sistema de prácticas de tareas de las que emerge los objetos matemáticos en un momento dado.

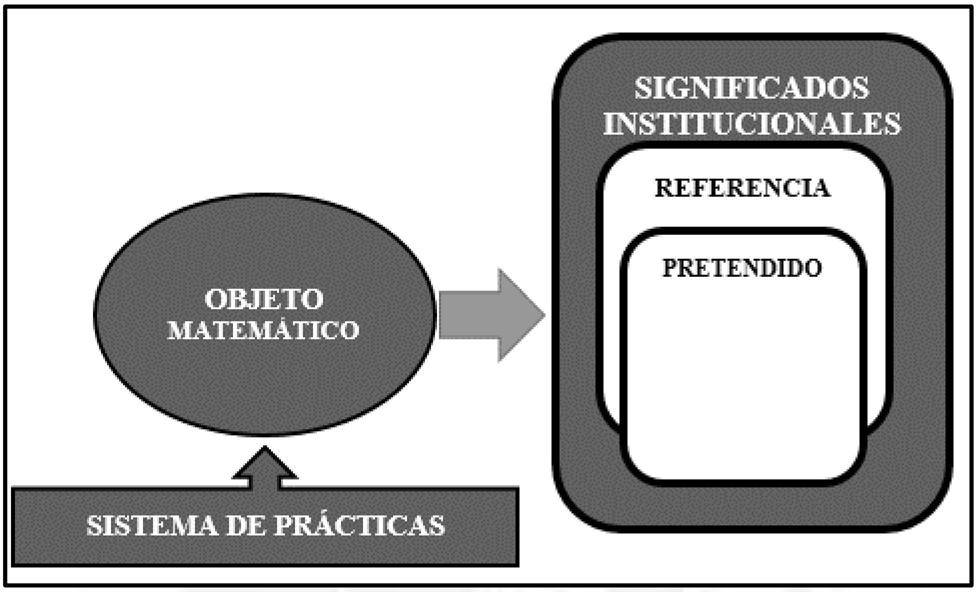


Figura 2. Significados institucionales

Fuente: adaptado de Castro (2011, p. 38)

Cuando se resuelve una tarea; según Godino, Batanero y Font (2009) surgen objetos matematicos que requieren de la actividad matematica para su solución. Desde la perpectiva de los investigadores estos objetos son conocidos como entidades primarias, las cuales detallaremos a continuación.

Entidades primarias o tipos de objetos

La actividad matemática según indica Godino et al (2008) juega un rol central y se encuentra modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. Para Font (2007), en dichas prácticas intervienen objetos matemáticos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (a los que evocamos al hacer matemáticas), los cuales son representados en forma textual, oral o incluso gestual.

Desde la perspectiva de Godino et al (2008) se presenta la siguiente tipología de los objetos matemáticos, llamados entidades u objetos matemáticos primarios.

- **Situaciones-problemas:** son aquellas situaciones (tareas, ejercicios, problemas) y aplicaciones Extramatemática o Intramatemática que promueven la actividad matemática y a partir de las cuales han surgido los conceptos y teorías. Para nuestra investigación estas situaciones además de estar clasificadas como Extramatemática o Intramatemática veremos si están conectadas con alguna otra área, por ejemplo la medicina, la ingeniería, etc.
- **El lenguaje matemático:** para resolver los problemas matemáticos, para generalizar su solución o para describirlos requerimos usar elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. Asimismo, la notación simbólica, nos permite representar tanto objetos abstractos como situaciones concretas.
- **Procedimientos:** para resolver los problemas propuestos se pueden emplear diversas operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y estrategias que los estudiantes deben conocer para resolver las diferentes tareas. Estos procedimientos llegan a automatizarse, se hacen específicos del tipo de problema y se convierten en objeto de enseñanza.
- **Conceptos:** introducidos mediante definiciones o descripciones vinculados a un objeto matemático. En las descripciones anteriores de la actividad matemática al resolver un problema, no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita utilizar diferentes conceptos o nociones matemáticas que previamente conoce y en los que se apoya para resolver el problema, mediante sus definiciones o descripciones características.
- **Propiedades:** enunciados sobre conceptos que deben ser utilizados para la resolución de un problema. Las propiedades son condiciones de realización de las acciones, a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos. Cada propiedad de un objeto matemático lo relaciona con otros diferentes y contribuye al crecimiento del significado del objeto en cuestión. Asimismo, se plantea el problema de selección y secuenciación de las propiedades de un objeto

que deben ser enseñadas en cada nivel educativo y qué tipo de situaciones problemas ponen en juego las propiedades.

- **Argumentos:** enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, en la solución de problemas. Estas justificaciones para nuestra investigación pueden ser deductivas o empíricas.

Para Godino (2004) estos seis tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática, son los componentes primarios de otros objetos como las teorías, etc. Para el autor las situaciones-problemas promueven y contextualizan la actividad matemática, los otros tres componentes tales como: los conceptos-definiciones, proposiciones y argumentaciones desempeñan un papel formal en las matemáticas.

El investigador indica que los seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones. Con respecto a las configuraciones, el autor subraya que son redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre ellos. Asimismo señala, que las configuraciones pueden ser epistémicas cuando se trata de redes de objetos institucionales, como la que realiza un experto, o bien configuraciones cognitivas cuando se trata de las redes de objetos personales, como la efectúa cada alumno (inexperto).

Para nuestra investigación mencionaremos las configuraciones epistémicas, pues ellas permitirán realizar un estudio detallado de las características que presentan las tareas estructurales de los libros de texto del V ciclo.

Configuración epistémica

Godino, Contreras y Font (2006) señalan que la configuración epistémica es el sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos referentes a la resolución de una situación-problema. Para los autores las configuraciones epistémicas se componen de los objetos que intervienen y surgen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso.

Entendemos que cuando los seis objetos primarios descritos anteriormente se articulan, forman configuraciones epistémicas cuyo análisis según Font y Godino (2006) nos informa de la estructura de un texto matemático. Debido a ello desde el EOS, se propone una ontología constituida por los objetos primarios y dichos elementos permitirán analizar un texto de matemática usado en el proceso de instrucción (Godino, 2002).

Al respecto, podemos señalar que nuestro objeto de estudio, las tareas estructurales, presentes en los libros de texto del V ciclo de la Educación Básica Regular del Perú (EBR), podrán ser descritos mediante las configuraciones epistémicas.

La articulación de los objetos primarios que forman configuraciones como manifiestan los autores, se esquematiza en la Figura 3.

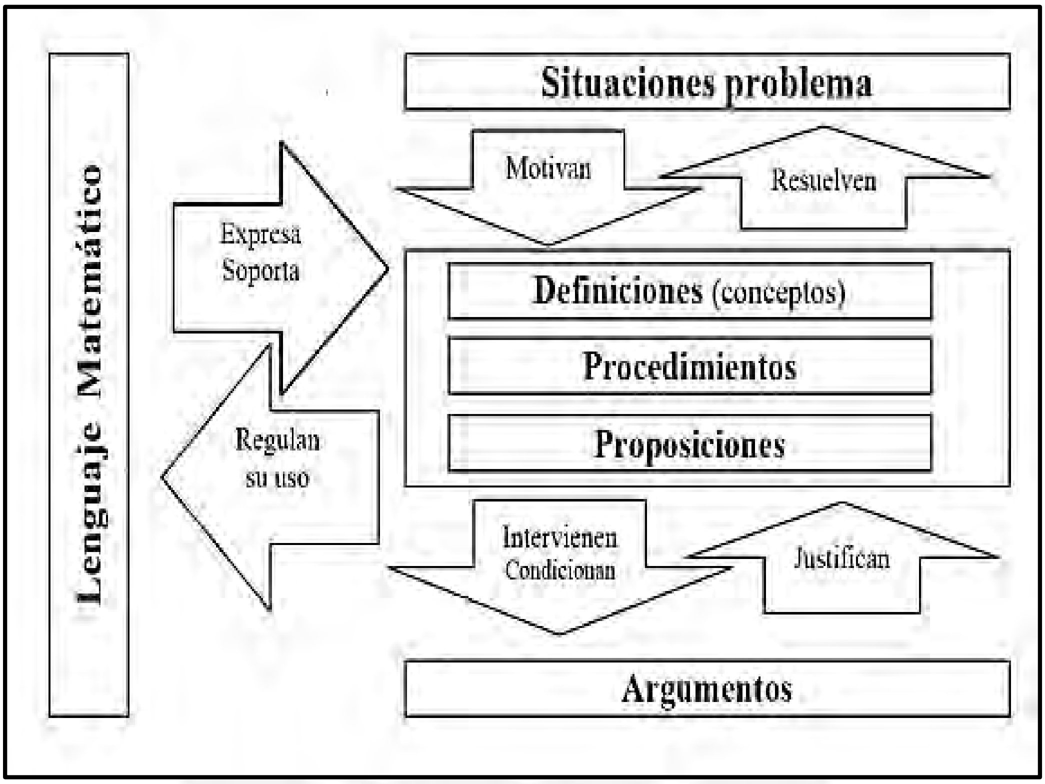


Figura 3. Configuración epistémica

Fuente: (Castro, 2011, p. 40)

Para Font y Godino (2006) cada situación-problema establece una configuración epistémica diferente, al respecto los investigadores propusieron dos tipos básicos de configuraciones epistémicas: las formales o Intramatemática (propias de la matemática) y las empíricas o Extramatemática (en contexto).

Por otro lado, para Godino, Batanero y Font (2007) los seis tipos de entidades primarias que forman configuraciones epistémicas, se complementan y enriquecen con la distinción de dimensiones duales.

Atributos Contextuales

La denominación de atributos contextuales o juegos de lenguaje es atribuida a Wittgenstein (como se citó en Aké, 2013), al respecto Godino et al (2007) describe que según las eventualidades contextuales y del juego del lenguaje en que participan, las entidades matemáticas primarias pueden ser consideradas desde dimensiones duales. Estas dimensiones son: personal e institucional, ostensiva-no ostensiva, extensivo-intensivo, unitario–sistémico y finalmente expresión-contenido. Solo mencionaremos la dimensión extensivo – intensivo, pues uno de los aspectos de nuestro estudio es la idea de generalización.

La dualidad extensivo-intensiva, de acuerdo con Godino (2014) permite fijar la atención en la argumentación entre lo particular y lo general, en ese sentido y según indica el autor, la dualidad se utiliza para explicar el uso de elementos genéricos. Por ejemplo un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular: $2 + 3 = 3 + 2$ y una clase más general por ejemplo: $a + b = b + a$, con a y b números racionales.

Al respecto Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) manifiestan que la dualidad extensivo – intensivo sirve para mostrar rasgos característicos del razonamiento. Uno de ellos es la indeterminación donde intervienen conceptos como ecuación, inecuación e incógnita; aquí las operaciones y sus propiedades cumplen un rol importante al ser realizadas sobre los elementos de conjuntos de distintos objetos. Otro importante rasgo es la relación, de equivalencia o de orden, estas relaciones son empleadas para definir nuevos conceptos matemáticos. Finalmente, los investigadores consideran a la generalización como otro rasgo algebraico donde los conceptos de variable y fórmulas están ligados a las operaciones de adición, sustracción, multiplicación división y propiedades tales como: conmutativa, asociativa, distributiva, etc.

A continuación, daremos algunos alcances del razonamiento algebraico, el cual abre camino a otro de los objetivos de nuestra investigación.

Aproximaciones al razonamiento algebraico elemental (RAE)

El aprendizaje y la enseñanza del álgebra ha sido siempre un elemento fundamental que ha sido llevado a cabo por investigadores en álgebra de la International Group de Investigación Psychology of Mathematics Education (PME). Los principales temas que han surgido desde 1977-2006 en la investigación del PME fueron principalmente tres. Según indica Kieran (2006) estos son:

- La transición de la aritmética al álgebra.
- El uso de herramientas tecnológicas y un enfoque en múltiples representaciones y generalización.
- La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria.

Además, la misma autora desde 1982 hasta 1992, acentúa que las dificultades de los estudiantes de secundaria en el tránsito de la aritmética al álgebra se centran en la necesidad de manipular letras y dotar a esta actividad de significado. También afirma que la manipulación de las variables como valores particulares forma parte de una estructura de números naturales. Es en ese sentido que los estudiantes, requieren primero de dominar las habilidades de manipulación simbólica para luego dar paso a aprender acerca de la finalidad y el uso del álgebra, según dio a conocer Aké (2013).

Es por ello que, en ese camino Santrock (como se citó en Aké, 2013), aduce que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo. Este proceso proclama que la enseñanza se inicie desde la escuela primaria tal como argumentan Carpenter, Franke y Levi (como se citó en Aké, 2013)

Por otra parte, Godino y Font (2000) afirman que el razonamiento algebraico:

> Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar […], especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones […]. (p.8)

De modo análogo, Kaput (2002) lo interpreta de la siguiente manera:

> Por razonamiento algebraico, nos referimos al compromiso de los estudiantes en actos regulares de generalización acerca de los datos, las relaciones y las operaciones matemáticas, estableciendo sus generalizaciones a través de actos públicos de elaborar conjeturas y de argumentación, las cuales se expresan en formas cada vez crecientes de formalización. (p.19)

Es en este complicado proceso, pero necesario, desde el punto de vista educativo de Radford (como se citó en Godino, Aké, Gonzato y Wilhemi, 2014) se necesita ahondar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que este se relaciona con uno de sus principales rasgos que es la generalización.

Con respecto a la generalización de la aritmética al razonamiento algebraico Carpenter, Frankie y Levi (2003) aseveran que una gran de cantidad de estudiantes concibe la aritmética como una serie de operaciones y no piensan mucho sobre las propiedades de las estructuras numéricas. Por ende, al estudiar álgebra no comprenden que los recursos que utilizan para resolver ecuaciones y simplificar expresiones están basados en las propiedades de los mismos. Esto supone que la aritmética tiene una naturaleza propiamente algebraica, es decir, casos genéricos cuyo sistema puede ser estudiado de manera sucinta en la literatura algebraica.

Por otro lado, Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (como se citó en Aké, 2013) plantean que las definiciones y los términos algebraicos deben ser estudiados como un conjunto de la matemática elemental. Para ellos, el sentido algebraico de las operaciones aritméticas no es obligatorio, sino un elemento indispensable, en tanto que los preceptos que guían la resolución de ecuaciones en álgebra se ajustan a las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos.

Asimismo, Socas (2011) asegura que aquellos conocimientos que facilitan la transición del pensamiento numérico al algebraico y que tienen que ver con ideas acerca de los distintos tipos de números y de las relaciones numéricas, en particular las ideas de estructuras y procesos numéricos constituyen la base para la Aritmética Generalizada, la cual involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas.

RAE desde el Enfoque Ontosemiótico

Aké (2013) plantea que para el logro del paso de la aritmética hacia el álgebra, además de otorgarle un sentido algebraico a las actividades matemáticas, es indudablemente el conocimiento de la estructura matemática, lo que conlleva a un entendimiento de los objetos matemáticos, es decir, de la relación entre ellos y de sus propiedades. Por ende, la estructura matemática se ocupa de lo siguiente:

- Las relaciones entre las cantidades (por ejemplo, las cantidades equivalentes, una cantidad menor o mayor que otra).
- Propiedades de las operaciones (por ejemplo, la asociativa y conmutativa).

- Las relaciones entre las operaciones (por ejemplo, la división y multiplicación).
- Las relaciones a través de las cantidades (por ejemplo, la transitividad de la igualdad y la desigualdad).

Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi (2012) señalan los siguientes dos interrogantes: ¿Solo se puede considerar como solución aritmética aquella actividad matemática que involucra números concretos y operaciones? ¿Solo se puede considerar como solución algebraica actividades matemáticas que involucra el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos?

Los investigadores indican que estas dos interrogantes no son nada triviales, consecuencia de ellas es la existencia de una gama de estudios que abordan la compresión de las mismas. El tránsito de la aritmética al álgebra crea surcos que imposibilitan el libre pase, mientras que en la aritmética se opera con números concretos; en álgebra, se opera con cantidades infinitas.

Es claro que para Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), las dificultades que muestran los estudiantes de secundaria sobre el álgebra son, en gran medida, las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y las matemáticas de formal general en la primaria. Se buscan justificaciones teóricas y experimentales que apoyen la inclusión del álgebra desde la primaria, esto implica incluir en el currículo una concepción más amplia del razonamiento algebraico elemental. Además, los autores plantean rasgos que caracterizan al RAE. Estos son:

- La generalización (construir variables).
- Medios para simbolizar las situaciones de generalización y las de indeterminación.

El punto de vista del EOS permite caracterizar el álgebra en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. Godino et al. (2014) consideran que una práctica matemática de naturaleza algébrica debe contener ciertos tipos de objetos algebraicos. Estos son: estructuras, funciones y modelización.

Para nuestra investigación, haremos hincapié en el objeto "Estructuras", que para Godino et al. (2014) están conformadas por: relación de equivalencia, propiedades y operaciones, ecuaciones e inecuaciones. Nosotros haremos hincapié en las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas las cuales denominaremos tareas estructurales, las cuales son empleados en la Educación Primaria, específicamente en el V ciclo de la Educación Básica Regular del Perú.

Dentro de las prácticas algebraicas tales como extensivo (particular) e intensivo (general), los investigadores indican que estas van a desempeñar un rol de gran envergadura, siendo la generalización uno de los rasgos característicos del álgebra.

Por ejemplo, la relación de orden entre números racionales positivos es extensivo, si dado el caso de tres números en particular $\mathbf{5};\ \mathbf{5,1}$ y $\mathbf{6,1}$ procedemos de la siguiente manera $\mathbf{5 < 5,1}$ y $\mathbf{5,1 < 6,1}$, se puede concluir que $\mathbf{5 < 6,1}$. Si podemos escribir de forma general , sean $\boldsymbol{x < z}$; $\boldsymbol{z < y}$ entonces $\boldsymbol{x < y}$ (transitividad), un objeto es intensivo. Esto muestra la existencia de niveles de generalización.

Por lo tanto, el proceso de particularización y generalización de los objetos que se generan en los mismos, aportan un nuevo criterio de clasificación de las prácticas algebraicas. Estas permitirán discriminar diferentes tipos de generalizacion (Godino et al., 2012).

Para poder resolver el siguiente interrogante, ¿solo se puede considerar como solución algebraica actividades matemáticas que involucran el uso de incógnitas, ecuaciones, símbolos literales y operaciones con dichos símbolos?, necesitamos otorgar niveles de algebrización de la actividad matemática escolar.

Niveles de algebrización

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) indican que los niveles de algebrización son esencialmente grados de generalidad, los cuales son asignados a la solución de la tarea y no a la tarea en sí. Estos niveles del razonamiento algebraico elemental se encuentran enmarcados en dos grupos:

- Para la educación primaria (niveles 0; 1 y 2).
- Para la educación secundaria, bachillerato y superior (niveles 3; 4; 5 y 6).

Aké (2013, p 114) propone utilizar tres criterios para distinguir los niveles de RAE:

- La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
- Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
- El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

Para nuestra investigación, la atención estará centrada en los niveles 0; 1 y 2 tal como se aprecia en la Figura 4, pues la solución a las tareas es propia de valores particulares y no de variables.

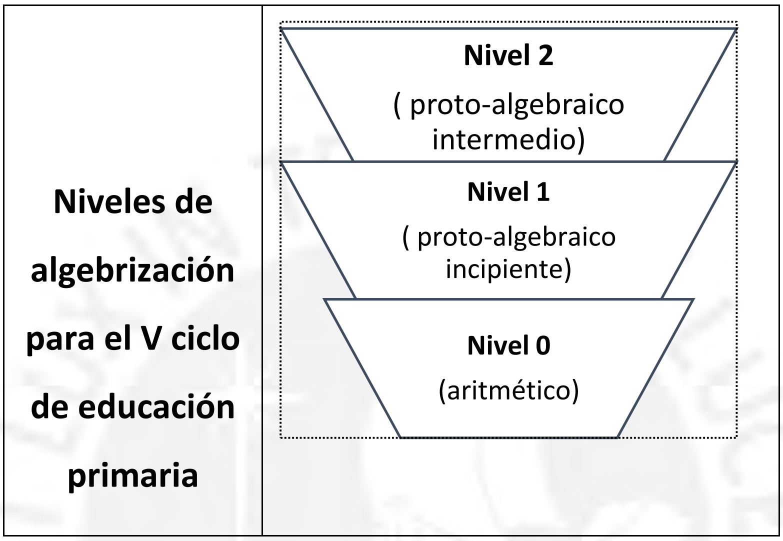


Figura 4. Niveles de algebrización para el V ciclo

Los siguientes niveles de algebrización identificados en la solución de las tareas estructurales presentados en el V ciclo de la educación Básica Regular del Perú serán detallados a continuación.

Los autores Godino et al. (2014) resumen las características de los niveles 0-2.

- **Nivel 0:** en este nivel las prácticas matemáticas son aquellas que no incluyen características algebraicas, interviniendo objetos extensivos (objetos particulares). En este nivel, intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido, manipulando los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares.

- **Nivel 1:** aquí aparecen los objetos intensivos. Esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales.

Además, se movilizan las propiedades de las estructuras numéricas. Pueden intervenir datos desconocidos.

- **Nivel 2:** se declara a la variable interviniendo así cantidades indeterminadas expresadas en lenguaje simbólico- literal. Se puede indicar que se presentan ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$. Aquí no se opera con las variables, sino se aplica la transposicion de valores como A, B y C.

Para poder clasificar los niveles de algebrizacion, Godino et al. (2014) presentan una serie de tareas que son clasificadas de acuerdo a las características que le corresponde a cada nivel.

La siguiente tarea tomada de Aké (2013), realizada en la Universidad de Granada (España) a docentes en formación, permitió establecer el grado de algebrización que se le adjudicó a las respuestas otorgadas por tres docentes en formación.

Tarea sobre Igualdad con datos desconocidos: Determine el número que falta

$$52 \times 11 = 52 \times 10 + \Delta$$

En la Tabla 1 observamos las razones para adjudicar niveles de algebrización.

Tabla 1. *Respuestas de tres estudiantes (Docentes en formación)*

Nivel	**Soluciones**	**Razón de adjudicación del Nivel de Algebrización**
	Estudiante A	
O	52 por 11 son 472; del otro lado de la igualdad tenemos $52 \times 10 = 520$. A 520 le faltan 52 para sumar 572, por lo que $\Delta = 52$	El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números específicos, no incluye ninguna característica algebraica.

1	**Estudiante B** Del lado izquierdo tenemos 11 veces 52, pero del lado derecho tenemos 10 veces 52 de ahí que el valor de $\Delta = 52$. $(52 \times 11 = 52 \times (10+1)$ $= 52 \times 10 + 52)$	Interviene el símbolo Δ, el cual representa un valor desconocido sujeto a ciertas condiciones. Interviene el concepto de incógnita, el signo igual es un indicador de equivalencia entre dos expresiones. Se nota la clara presencia de las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
2	**Estudiante C** $52 \times 11 = 52 \times 10 + x$ $572 = 520 + x$ $x = 572 - 520$ $x = 52$	Se advierte la noción de incógnita, el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax + B = C$ y el uso de una simbología literal.

Fuente: (Aké, 2013, p. 215)

De la Tabla 1 podemos mencionar que cuando se emplean correctamente las propiedades de los números naturales en la solución de una tarea, estas generan en el estudiante un desarrollo paulatino del razonamiento algebraico. Por otro lado, la forma de adjudicar un nivel de algebrización a cada solución de las diferentes tareas estructurales presentes en los textos oficiales del V ciclo de educación primaria del Perú que conciernen a nuestra investigación serán otorgados utilizando los tres criterios mencionados, propuestos por Aké (2013). Para poder adjudicar un nivel de algebrización, primero construiremos el significado de referencia del objeto matemático, tareas estructurales; que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de situaciones problemas como son: extramatemática e intramatemática. Luego identificaremos el significado pretendido obtenido de la planificación del proceso de estudio, tal como manifiestan Godino y Batanero (1994). Todo ello será detallado en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LAS TAREAS ESTRUCTURALES

Con la finalidad de explicitar las prácticas matemáticas que se ponen en juego al abordar tareas estructurales presentes en el V ciclo, identificamos los significados institucionales de referencia y pretendido empleando aspectos del EOS, es decir conocer el concepto usos y/o tratamientos del objeto algebraico que engloba a las tareas estructurales. .

1) SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LAS TAREAS ESTRUCTURALES

El significado institucional de referencia de un objeto matemático, en nuestro caso específico de las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas, se entiende como el sistema de prácticas compartidas en el seno de una institución para resolver un tipo de situaciones- problemas tal como indican (Godino, Batanero, Font, 2007).

El significado de referencia es variable y esto dependerá de la institución. Para nuestra investigación, nuestro interés es construir el significado de referencia para la institución del V ciclo de educación primaria del Perú. El significado de referencia es determinado por libros didácticos, textos matemáticos así como investigaciones en educación matemática que abordan el significado institucional de estructuras numéricas para la enseñanza en la primaria. En la Tabla 2 se esquematizan los libros e investigaciones usados en la construcción del significado de referencia.

Tabla 2. *Libros e investigaciones*

Libros e Investigaciones utilizados		
La Matemática de la Enseñanza Media Volumen 1	Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner y Augusto César Morgado.	Colección la Enseñanza Matemática del IMCA (2000)
Análisis Real Volumen 1	Elon Lages Lima	Colección textos del IMCA (1997)
Estructuras numéricas y su didáctica para maestros	Eva Cid , Juan Godino y Carmen Batanero	Proyecto Edumat-Maestros (2003)

Currículo Nacional de la Educación Primaria.	Perú	(2016)
Problemas aritméticos escolares	Puig, L.; Cerdán.	Síntesis. Versión Puig, L.; Cerdán, conmemorativa 20º aniversario 1989
Algunas dificultades en los problemas aditivos,;	Bruno, A.; Martinón, A. Velázquez, F.	SUMA. (2001)
Estructura Aritméticas elementales y su modernización	Castro, E.; Rico, L.; Castro, E.	Bogotá, D.C. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. (1995)
Curso de Álgebra Volumen 1	Hefez, A.	Lima, Perú. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines. (1997)
Matemáticas números racionales	GCBA	Buenos Aires. Ministerio de Educación de la ciudad de Buenos Aires. (2006)

En estos textos identificamos las situaciones problemas y los objetos primarios que surgen cuando se da solución, los mismos que nos permitirán realizar las diferentes configuraciones epistémicas cuando dichos objetos se articulen. Debido a ello es que podremos identificar el significado de referencia de las tareas estructurales del V ciclo de la EBR del Perú.

Significado de las tareas estructurales asociados a los números naturales del V ciclo

Estructura numérica de los números naturales $(\mathbb{N},+,\times,\leq)$

Investigaciones como la de Cid, Godino y Batanero (2003) plantean que los números naturales son cualquier sistema de objetos, perceptibles o pensados, que se usan para comunicar el cardinal de los conjuntos y para ordenar sus elementos, indicando el lugar que ocupa cada elemento dentro del conjunto. Las formas de representarlos más usados son las palabras y los símbolos $0, 1, \cdots$. Para poder ser usados en las situaciones de recuento y ordenación, estos sistemas de objetos numéricos deben tener una estructura recursiva específica que se concreta con los axiomas de Peano.

Al respecto Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000) acotan, $\mathbb{N}$ es un conjunto cuyos elementos son llamados números naturales y verifican las siguientes condiciones.

- Todo número natural tiene un único sucesor
- Existe un primer elemento que es 0 que no es sucesor de ningún otro elemento.
- Números diferentes tienen sucesores diferentes.
- Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ que contiene el 0 y que contiene el sucesor de cada uno de sus elementos coincide con $\mathbb{N}$ (principio de inducción).

En el aspecto ordinal del número según lo concibió axiomatizado Peano como indican Puig y Cerdán (1989), se accede en la escuela por medio de la actividad de contar, debido a ello los autores acotan: “La creación de los números viene dada por la operación siguiente de y las operaciones con los números heredan de la propia generación de éstos su carácter recursivo y dinámico” (p. 10).

Para Lages (1997) “la operación de adición en $\mathbb{N}$ es la que asocia a cada par de números naturales $(m; n)$ su suma $m + n$ ” (p. 2), el autor subraya que se caracterizan por las siguientes igualdades que sirven como definición:

- $m + 1 = Sucesor(m)$
- $m + Sucesor\ (n) = Sucesor\ (m + n)$

Por ejemplo, para sumar $3 + 2$ se debe empezar por reconocer 2 como $Sucesor$ (1) y continuar argumentando que conocido $3 + 1$, $Sucesor$ $(3 + 1)$, que se conoce por la propia construcción de la serie numérica coincide con $3 + Sucesor(1)$, esto es, $3 + 2$.

Además, para Cid et al. (2004) desde una definición conjuntista se puede indicar que dados dos números naturales a, b, se llama suma $\boldsymbol{a + b}$ al cardinal del conjunto $\boldsymbol{A \cup B}$**,** siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b respectivamente, las cuales verifican las siguientes propiedades.

- Clausura: la suma de dos números naturales es otro número natural.

  Por ejemplo, $2\ y\ 3\ \in \mathbb{N}$ luego $2 + 3$ que resulta $5 \in \mathbb{N}$

- Asociativa : $(a + b) + c\ =\ a + (b + c)$

  $(2 + 5) + 7$ resulta 14 al igual que $2 + (5 + 7)$

- Conmutativa: $a + b\ = b + c$

- Existencia del elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$

Al tener la propiedad de clausura, los investigadores acotan que la adición es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$, es decir, al tener dos números naturales estos hacen corresponder otro número natural.

Por otra parte, Cid et al. (2004) mencionan que otra de las operaciones en $\mathbb{N}$ es la sustracción, cuyas propiedades dadas para la adición no la verifican. Por ejemplo, no se aplica la ley de composición interna pues $7 - 9$ no pertenece a $\mathbb{N}$. Además, no es conmutativo pues $7 - 9 \neq 9 - 7$, y tampoco asociativo, pero la sustracción es una operación en $\mathbb{N}$ porque permite calcular ciertas diferencias.

Por ejemplo, sean los números naturales a, b, c , siempre que a sea mayor que la suma de b y c se tiene que: $a - (b + c) = (a - b) - c$. Por ejemplo, $22 - 12$; si a 22 le restamos 2 y a 12 también, entonces $(22 - 2) - 10 = 20 - 10$ que resulta 10.

Otra de las operaciones fundamental en $\mathbb{N}$ es la multiplicación, que hace corresponder al par $(a;\, b)$ su producto $a \times b$ (Lages, 1997). Esta operación sigue las mismas propiedades de la adición; como señala el autor, indica de números naturales sigue las mismas definiciones de la adición.

- $a \times 1 = a$
- $a \times Sucesor(b) = a \times b + b$

En el contexto escolar, Puig y Cerdán (1988) manifiestan que para multiplicar 3×2 se debe empezar por reconocer 2 como $Sucesor(1)$ y como 3×1, ya se sabe que 3×2 es tres más que 3×1, lo que conduce a la noción de multiplicación como suma repetida de sumandos iguales.

Desde una definición conjuntista, Cid et al. (2004) plantean que dados dos números naturales $a;\, b$, se llama producto $\boldsymbol{a.b}$ o $\boldsymbol{a \times b}$ al cardinal del conjunto producto cartesiano $\boldsymbol{A \times B}$**,** siendo A y B dos conjuntos cuyos cardinales son a y b respectivamente.

Propiedades:

- Clausura: el producto de dos números naturales es otro número natural.

Por ejemplo, $2\ y\ 3 \in \mathbb{N}$ luego 2×3 que resulta $6 \in \mathbb{N}$

- Asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$(2 \times 5) \times 7$ Resulta 70 da el mismo resultado que $2 \times (5 \times 7)$

- Conmutativa: $a \times b = b \times a$
- Existencia del elemento neutro: $a \times 1 = 1 \times a = a$
- Distributiva respecto a la adición: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Al tener la propiedad de clausura, la multiplicación es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$, es decir, dados dos números naturales estos hacen corresponder otro número natural.

Otra operación en $\mathbb{N}$ es la división entera, que no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$ dado que a dos naturales llamados, dividendo y divisor, se le hace corresponder no uno si no dos números naturales llamados cociente y residuo. Sin embargo, al igual que la sustracción se considera como una de las operaciones aritméticas en $\mathbb{N}$, además, si el residuo es cero, en este caso la división se puede considerar como una operación inversa a la multiplicación (Cid et al., 2004).

Con respecto al orden de los números naturales, Lages (1997) indica una breve descripción: dados dos números naturales a , b se escribe $a < b$ cuando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a + p = b$. La notación $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$.

Esta relación de orden es compatible con las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{N}$**.** Si por ejemplo se suma a los dos miembros de una desigualdad una misma cantidad, no cambia el sentido de la desigualdad. Si fuera el caso de multiplicar sucedería lo mismo, es decir, permanece el sentido de la desigualdad.

Por ejemplo, $5 < 9$. Si sumamos 7 a ambos lados, tenemos $5 + 7 < 9 + 7$, con lo cual decimos que 12 es menor a 16. Si ahora multiplicamos, $5 < 9$, tenemos $5 \times 7 < 9 \times 7$ verificando que el sentido de la desigualdad permanece, por lo cual 35 es menor a 63.

Por otro lado, la forma como la matemática formal de los números naturales se presenta en situaciones problemas en los libros de texto ha conllevado a realizar distintas investigaciones, una de ellas es la realizada por Bruno, Martinón y Velázquez (2001), los cuales consideran a los tipos de problemas o situaciones problemas aditivas de la forma $a + b = c$ cuando es una suma y $a - b = c$ cuando es una resta, con a, b y c números naturales, cuatro tipos o clases de situaciones problema, las cuales son: comparación, igualación, cambio y cambio-comparación.

Situación 1: Comparación

Esta situación maneja el siguiente esquema $a + d = b$ y según Castro, Rico y Castro (1995) implican una comparación entre dos colecciones, además la relación entre las cantidades se establece utilizando los términos "más que" y "menos que". Los autores manifiestan que cada situación problema de comparación tiene tres cantidades expresadas: una cantidad comparativa, una cantidad de referencia y otra de diferencia.

Por ejemplo: Julián tiene 7 insignias y Elva tiene 2 insignias más que él, ¿cuántas insignias tiene Elva? Notamos el término "más que" y la comparación de insignias entre Julián y Elva. *Del ejemplo la cantidad comparativa y referente son conocidas, se desconoce la diferencia*.

Situación 2: Cambio

En esta situación, para los investigadores las situaciones – problema involucran un aumento o disminución de una cantidad inicial hasta crear una serie final, siendo incluida una acción. Las tres cantidades del esquema $a + d = b$ son llamadas una inicial, otra de cambio y una final. Los autores subrayan que la cantidad desconocida puede ser cualquiera de ellas; por otro lado, el cambio puede ser de aumento (cambio-unión) o de disminución (cambio- separación). Finalmente Castro et al. (1995) recalcan que en todos los casos el cambio ocurre en el tiempo, la condición inicial se da en un tiempo T_1, el cambio se produce en un tiempo T_2 y el resultado se logra en un tiempo T_3.

Por ejemplo: Elva tenía algunas crayolas, José su hermano le dio 7 y ahora tiene 15, ¿cuántas Crayolas tenía Elva? Del ejemplo *La incógnita es la magnitud inicial conociéndose la magnitud del cambio y el resultado final*.

Situación 3: Igualación

En esta situación los investigadores manifiestan que se debe responder a la pregunta: ¿Qué hacer con una de colecciones para que presente el mismo número de elementos que la otra? Del esquema $a + d = b$ Bruno et al. (2001) plantea que la diferencia d también puede expresarse como: "añadir", cuando se dice lo que se ha de añadir al estado menor para igualar al mayor y “quitar”, cuando se dice lo que se ha de quitar al estado mayor para igualar al menor.

Por ejemplo: Luis tiene 10 esferas y Anderson tiene 5 esferas, ¿cuántas esferas tiene que ganar Anderson para tener tantos como Luis? Los investigadores respecto al ejemplo indican que *la acción se realiza sobre la menor de las colecciones en este caso se tiene una unión-igualación.*

Situación 4: Combinación

Otra situación dada por Castro et al. (1995) corresponde a las situaciones - problemas de combinación, la cual hace referencia a la relación que existe entre una colección y dos subcolecciones disjuntas de la misma, siendo que en esta situación no implica acción. Por ejemplo: Josh tiene 2 libros de álgebra y 4 de aritmética, ¿cuántos libros tiene Josh? Al respecto los investigadores indican que en el ejemplo se *conocen las dos subcolecciones y se desconoce la colección total.*

Situación 5: Conjeturas y validación

Esta situación según señala el Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires - GCBA (2006) es la de proponer a los estudiantes situaciones que exijan un cierto nivel de exploración, de ensayos y de elaboración de relaciones, que permita producir y validar una nueva propiedad.

Por ejemplo: observe las siguientes igualdades

$$1+3+5=3+3+3$$

$$1+3+5+7=4+4+4+4$$

$$1+3+5+7+9=5+5+5+5+5$$

¿Cuáles son las dos filas siguientes? Enuncie una regla general.

Con este ejemplo el estudiante produce y valida una nueva variante a la fórmula de la suma de los números impares: $\underbrace{1+3+5+7\cdots+..}_{"n"\ números}=\underbrace{n+n+n+n\cdots+n}_{n\ veces}$

Por otro lado, con respecto a la multiplicación y división Castro et al. (1995) subrayan:

> Al igual que en el caso de la suma y resta, el aprendizaje del producto y la división es el comienzo de la construcción de una nueva estructura: la estructura multiplicativa, que es una de las más ricas de la matemática. Sin embargo existen algunas diferencias con

> respecto a la estructura aditiva. Comenzar a trabajar en el producto y en la división exige que el niño tenga un nivel de uso y dominio de los números, que conozca su simbolización, todo ello en un grado más completo que en el caso de la suma y la resta. (p. 45)

De acuerdo a las diferencias enunciadas por los investigadores, los mismos indican las siguientes situaciones problemas.

Situación 1: Proporcionalidad simple

Esta situación abarca problemas en las que incluyen repartos iguales, precios constantes, densidades constantes a lo largo de una línea o en una superficie o en un volumen.

Por ejemplo: Luis compra 8 bombones al precio de 9 soles cada uno, ¿cuánto tiene que pagar? Del problema podemos manifestar que el segundo dato corresponde a una razón pues se refiere a 9 soles por cada bombón, mientras que el primer dato 8 se refiere a bombones, es decir, el multiplicador es la cantidad de bombones y el multiplicando el precio de cada bombón, siendo los datos de naturaleza distinta.

Situación 2: El producto de medidas

El esquema que identifica es dado por: $M_1 \times M_2 = M_3$. Esta situación refiere un buen número de problemas relativos a áreas, volúmenes y a productos cartesianos de conjuntos discretos.

Por ejemplo: Cristian tiene tres polos de diferentes colores y cuatro pantalones de diferentes marcas. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir? Luego de pasar por el proceso de combinar, el estudiante llega a la conclusión de que $3 \times 4 = 12$, es la cantidad de formas de vestir.

Situación 3: Como comparación

Los problemas de comparación multiplicativa, tal como explica Esposito (2012) abarcan situaciones en las que se debe efectuar la comparación de dos conjuntos, o dos cantidades, en términos de "cuantas veces más".

Por ejemplo. Elva tiene 4 ligas y Mary tiene 3 veces más que Elva ¿Cuántas ligas tiene Elva?

Situación 4: Conjeturas y validación

Al igual que en la adición el objetivo de esta situación permita producir y validar una nueva propiedad (GCBA, 2006).

Ejemplo: observe las siguientes igualdades

$$2+4+6=3\times 4$$

$$2+4+6+8=4\times 5$$

$$2+4+6+8+10=5\times 6$$

Enuncie una regla general.

Del ejemplo el estudiante produce y valida la fórmula la suma de los números pares:

$2+4+6+8\cdots+(2n)=n\times(n+1)$

A modo de síntesis la Tabla 3 presenta la configuración epistémica de las situaciones problemas de las tareas estructurales asociadas a la estructura numérica de los números naturales ($\mathbb{N}$).

Por otro lado, toda la representación de los números naturales según indica Hefez (1997) es dada de varias maneras y a cada de ellos se les llama *sistema de numeración*. De aquí los números son representados por el uso de un número reducido de símbolos llamados cifras o dígitos. Los sistemas de numeración más utilizados subraya el autor son los sistema de base constante y se basan en el siguiente teorema.

> **Teorema .** Dados naturales a y b con $a\geq 0$ y $b>1$, existen naturales $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ unívocamente determinados por las siguientes condiciones:
> (i) Existe un número natural m tal que $c_n=0$, para todo $n\geq m$
> (ii) Para todo n, tenemos que $0\leq c_n<b$
> (iii) $a=c_0+c_1\times b+\cdots+c_n\times b^n+\cdots$ (p, 62)

Nuestro sistema de numeración es del decimal, o sea, la base es 10, debido a ello es que formamos grupos de decenas para poder operar; desde los primeros ciclos esta forma es recurrente y no es hasta los últimos grados de secundaria que el estudiante recién retoma los sistemas de numeración pero en bases distintas a la diez.

Por ejemplo: $1101_{(2)}$ se encuentra en un sistema binario, para saber qué número representa en nuestro sistema decimal seguimos lo mencionado en el teorema: $1101_{(2)}=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1=13$. Es importante recalcar las operaciones y las conversiones en diferentes sistemas y entender que en un determinado ámbito cada sistema juega un rol importante. A modo de síntesis la Tabla 3 presenta la configuración epistémica de las situaciones problemas de las tareas estructurales asociadas a la estructura numérica de los números naturales (ℕ)

Tabla 3. *Configuración epistémica de las tareas estructurales asociadas a la estructura numérica de los números naturales del V ciclo*

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Situaciones problemas

Intramatemática, es decir las operaciones en términos de relaciones entre sus elementos.

Extramatemática, se consideran los significados de las operaciones. Problemas que simulan situaciones del mundo real</td>
<td>Para el caso de la adición y sustracción:
• Comparación
Ejemplo: Elva tiene 280 soles y Julián 145 soles ¿cuántos soles más tiene Elva?
• Cambio
Ejemplo: la empresa ABC ingenieros, trabajan 157 empleados. A la hora de almorzar se van 132 ¿cuántos empleados quedan en la empresa?
• Igualación
Ejemplo: tengo 67 soles. Si me dieran 32 soles tendría el mismo dinero que tiene Elva ¿cuántos soles tiene Elva?
• Combinación
Ejemplo: en una granja hay 275 aves contando palomas y gallos. De los cuales 128 son gallos ¿cuántas palomas hay?
• Conjetura y validación
Por ejemplo: observe las siguientes igualdades
$1+3+5=3+3+3$
$1+3+5+7=4+4+4+4$
$1+3+5+7+9=5+5+5+5+5$
¿Cuáles son las dos filas siguientes? Enuncie una regla general.</td>
</tr>
<tr>
<td>Para el caso de la multiplicación y división
• Proporcionalidad simple
Por ejemplo: Mary va a guardar 360 lapiceros en cajas. En cada caja quepan 20 lapiceros ¿cuántas cajas van a hacer falta?
• El producto de medidas
Por ejemplo: ¿cuál es el área de una habitación rectangular que mide 4 metros de largo por 2 metros de ancho?
• Comparación
Ejemplo: la entrada al cine cuesta 18 soles. Un chupetín cuesta 2 soles ¿cuántas veces menos cuesta el chupetín que la entrada al cine?</td>
</tr>
</table>

- ***Conjetura y validación***

Ejemplo: Observe las siguientes igualdades

$$2+4+6=3\times 4$$

$$2+4+6+8=4\times 5$$

$$2+4+6+8+10=5\times 6$$

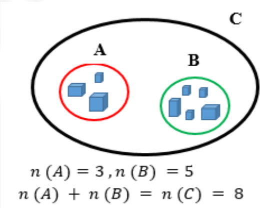
Enuncie una regla general.

Lenguaje

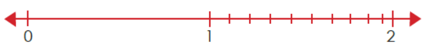
Verbal : expresión numérica, adición, sustracción, multiplicación, división, signos de agrupación, leemos y escribimos números, ordenamos de mayor a menor, valor posicional de cada cifra, propiedades de las operaciones, conmutativa, asociativa, distributiva, factores, sumandos, determinen mentalmente cada producto, exploren con calculadora, descomposición según el valor posicional, más que, menos que, añadir, quitar, minuendo, sustraendo, diferencia, multiplicando, multiplicador, divisor, cociente, residuo, dividendo.

Gráfico:

- ***Diagramas de Venn***

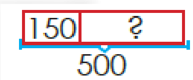


- ***La recta numérica***



- ***Esquema :***

Tengo 150 soles, cuánto me falta para tener 500 soles.



Icónico: se trata de representar la realidad a través de imágenes.

(el salón de 5to grado)

Simbólico literal:

$+;\ -;\ \times;\ \div;\ \rightarrow, <, >;$ $5+3=8;$ $?+3=8;$ $8-?=2;$ $a+b=c;$ $a-b=c;$ $x+a=b,$ $a\times b=c,$ $a\div b=c$ $Card.(A\cup B)=Card.A+Card.B;$ $si, A\cap B=\Phi.$

- ***Conjuntista:***

Dados dos números naturales a, b, se llama suma $a+b$ al cardinal del conjunto $A\cup B$, siendo A y B dos conjuntos

Definiciones		disjuntos cuyo cardinal es a y b, respectivamente. (Godino, 2004, p 54) Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces $a - b = Card\ (B')$, donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A. (Godino, 2004 , p 55) • ***Significados del número*** • ***Axiomas de Peano*** • ***Sistema decimal de numeración y otras bases*** • ***Orden entre naturales*** • ***Adición, sustracción, multiplicación y división***
Procedimientos	***Determinación de una heurística***	Reglas generales que consiguen convertir la tarea en un contexto sencillo. • *Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.* • *Usos básicos de la calculadora con naturales.* • *Diversidad de representaciones de un mismo número.* • *Cálculo mental.* • *Estimación de los resultados de una operación.* • *Reconocimiento de patrones numéricos.* • *Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números.* • *Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla.*
		Secuencia de actividades y pasos • *Algoritmo para la suma o resta.* • *Algoritmo de suma o resta con llevada.* • *Algoritmos para la multiplicación y división.* Al respecto la multiplicación geométrica, se fundamenta en la semejanza de triángulos, y el teorema de Thales. Por ejemplo: calcular $\mathbf{2 \times 4}$. En una hoja cuadriculada trazar dos rectas perpendiculares las cuales se denominaran ejes, a partir del punto de intersección y considerando la misma escala se hacen divisiones cada cuadrito y se representan por los números 1,2,3…

	Algoritmos para las operaciones	; se marca sobre el eje horizontal el multiplicando 2 y sobre el eje vertical se marca el multiplicador 4, posteriormente se une con una recta el punto correspondiente al 2 con la unidad en el eje vertical, luego por el punto 4 se traza una paralela a la anterior y se obtiene el punto de intersección de la paralela con el eje horizontal, este corresponde al producto 8. (Esposito, 2012, p. 29)
Propiedades	***Asociativa:*** $(m+n)+p = m+(n+p)$, $m.(n.p) = (m.n).p$ ***Distributiva:*** $m.(n+p) = m.n + m.p$ ***Conmutativa:*** $m+n = n+m$, $m.n = n.m$ ***Ley de corte:*** $m+n = m+p \Rightarrow m = p$, $m.n = m.p \Rightarrow n = p$ ***Orden:*** $m < n$ Cuando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m+p = n$. La notación $m \leq n$ significa que $m < n$ o $m = n$. Ejemplo: cálculo mental 12×4 En esta caso $12 \times 4 = (10+2) \times 4$, luego $\underbrace{10 \times 4 + 2 \times 4}_{distributiva}$ Obteniendo $40 + 8$ que da como resultado 48. Del ejemplo notamos: el uso de la propiedad distributiva, la descomposición y la igualdad como equivalencia. ***Con respecto a la sustracción:*** $\boldsymbol{M+S+D = 2M}$, donde M es el minuendo, S el sustraendo y D la diferencia. ***Con respecto a la división:*** $\boldsymbol{r + r_e = d}$, (r) es el residuo por defecto y (re) el residuo por exceso. $\boldsymbol{0 < residuo < d}$, donde d es el divisor. $\boldsymbol{r_{mínimo} = 1}$, $\boldsymbol{r_{máximo=}d - 1}$	
		• ***A partir de las definiciones o propiedades.*** ***Ejemplo:*** la suma de los tres términos de una sustracción es 12. ¿Cuál es el valor del minuendo? De la propiedad se deduce que el minuendo es 6 • ***A partir de regularidades numéricas.***

Argumentos	Deductivo	***Ejemplo:*** dadas las siguientes igualdades: $3^2 = 1^2 + 4 \times 1 + 4$ $4^2 = 2^2 + 4 \times 2 + 4$ $5^2 = 3^2 + 4 \times 3 + 4$ .Entonces ¿Cuál es la operación que corresponde a 98^2 ? Posible argumento. Se puede observar que la diferencia de las bases de potencia es 2. Luego se debe empezar con 96^2; a continuación viene la multiplicación de 4 con el mismo número obtenido anteriormente vale decir 4×96 y finalmente le agregamos el número 4, por lo tanto: $98^2 = 96^2 + 4 \times 96 + 4$
	Inductivo	• ***A partir de casos particulares encontrados empíricamente.*** ***Ejemplo:*** es cierto que todos los números que terminan en 5 son divididos por 5. Para ello el argumento es tomar casos particulares, por ejemplo: $\mathbf{15 \div 5 = 3}$ $\mathbf{115 \div 5 = 23}$ • ***Formalización del término general encontrado empíricamente.*** ***Ejemplo:*** de siguientes igualdades $2 + 4 + 6 = 3 \times 4$ $2 + 4 + 6 + 8 = 4 \times 5$ $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \times 6$ Enuncie una regla general para la suma de n términos. Posible argumento: $S(3) = 3 \times consecutivo\ de\ 3 = 3 \times 4$ $S(4) = 4 \times consecutivo\ de\ 4 = 4 \times 5$ $S(5) = 5 \times consecutivo\ de\ 5 = 5 \times 6$ Si la cantidad de términos es n: $S(n) = n \times consecutivo\ de\ n = n \times (n + 1)$

Estructura numérica de los números fraccionarios $(\mathbb{F}^{+}, +, \times, \leq)$

En la investigación realizada por Ordoñez (2012) una fracción es un par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representado como $\frac{a}{b}$, con a primera componente que es el numerador y

b segunda componente que es el denominador, siendo $b \neq 0$, a y $b \neq 0$ simultaneamente. Así por ejemplo $(3;5) = \frac{3}{5}$

Cid et al. (2004) indican que dos fracciones a/b, c/d son equivalentes si se cumple la igualdad de los productos cruzados $a \times d = b \times c$.

Debido a ello, González (2005) subraya que “el conjunto de las fracciones queda dividido en clases de equivalencia, cada una de ellas formada por todas las fracciones equivalentes entre sí” (párr. 5).

Por ejemplo $\left[\frac{1}{5}\right] = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \dots\}$ lo identificamos con la fracción $\frac{1}{5}$ cuando es usada como representante de cualquier otro miembro de la clase de fracciones equivalentes a $\frac{1}{5}$.

Con respecto a las operaciones, Cid et al. (2004) manifiestan que la adición y sustracción de fracciones se justifica a partir del mismo tipo de situaciones que daban sentido a la adición de números naturales, esto es, cambian únicamente las cantidades que intervienen, las cuales ahora son medidas o partes de un todo mientras que antes eran cardinales.

Cuando las fracciones tienen el mismo denominador, la adición se define como la adición de numeradores dejando invariante el denominador. Por ejemplo: $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ la suma es el resultado de $\frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$, para el caso de la sustracción el procedimiento es el mismo.

Si por el contrario los denominadores son diferentes, se reducen a denominador común y se aplica la definición anterior. Por ejemplo: $\frac{3}{2} + \frac{1}{5}$, aquí el denominador común es 10 utilizando la equivalencia de cada termino obtenemos $\frac{15}{10}$ y $\frac{2}{10}$ la suma es entonces resultado de $\frac{15+2}{10} = \frac{17}{10}$.

Con respecto a la multiplicación Cid et al. (2003) manifiestan que “el sentido de la multiplicación de fracciones cambia en relación al de los números naturales. La situación que permite entender mejor la multiplicación es verla como la partición de un todo” (p. 113). Es así que para multiplicar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{F}^{+}$ se procede de la siguiente manera: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Para el caso de la división tenemos el siguiente ejemplo: $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$, para ello: $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ obteniendo como resultado $\frac{14}{15}$.

Con respecto a las propiedades solo cambiamos el tipo de conjunto numérico de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{F}^+$.

- **Clausura:**

$\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{m}{n};\frac{p}{q} \in \mathbb{F}^+ \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{m}{n}, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$

- **Conmutativa:**

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}, \ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

- **Asociativa:**

$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right), \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$

- **Distributiva:**

$$\frac{e}{f} \times \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{e \times a}{f \times b} + \frac{e \times c}{f \times d}$$

En el caso de la sustracción, las propiedades dadas para la adición no verifican, vale decir, no es una ley de composición interna pues $\frac{7}{5} - \frac{9}{5}$ no pertenece a $\mathbb{F}^+$. No es conmutativo ni asociativo, pero la sustracción es una operación en $\mathbb{F}^+$ ya que permite calcular ciertas diferencias.

De acuerdo a lo manifestado por Lages (1997) respecto a $\mathbb{N}$, siendo este un conjunto ordenado, con las fracciones sucede lo mismo, es decir es un conjunto ordenado. Al respecto Hefez (1997) manifiesta que el $\mathbb{F}^+$ es ordenado. Veamos; dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{F}^+$ decimos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, si $a \times d < b \times c$. Por ejemplo $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$, pues $4 \times 2 < 3 \times 3$ quiere decir $8 < 9$. Si b y d son iguales solo basta comparar los denominadores.

Como $\mathbb{F}^+$ es ordenado, el autor acota si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces existe un $\frac{m}{n} \in \mathbb{F}^+$ tal que $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$. Esto quiere decir que entre dos números fraccionarios hay otro fraccionario. Conocida como la densidad de los números fraccionarios.

Esta presentación de los números fraccionarios debe adecuarse al contexto escolar y especialmente V ciclo que concierne nuestra investigación. Esta presentación menos formal ha conllevado a realizar distintas investigaciones una de ellas es la realizada por GCBA (2006) la cual clasifica las situaciones problemas en: proporcionalidad y orden, como medida y orden, orden y densidad, como producto, conjeturas y validación de propiedades. Además podemos integrar las situaciones problemas ya mencionadas en la estructura $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$.

Situación 1: Proporcionalidad

En esta situación, GCBA (2006) describe el abordaje de algunas constantes de proporcionalidad particulares: porcentaje, velocidad, escala; asimismo se avanza sobre la repartición proporcional. Todo ello implica establecer una relación entre dos conjuntos de números en los cuales las cantidades que se corresponden forman razones equivalentes.

Ejemplo: Por cada cinco estudiantes de la clase de algebra que fueron a un viaje, tres se quedaron. ¿Qué parte de la clase no realizó el viaje? El abordaje de la tarea implica abordar tres relaciones: la proporción sobre el total de los que realizaron el viaje $\left(\frac{5}{8}\right)$, la proporción sobre el total de los que no realizaron el viaje $\left(\frac{3}{8}\right)$ y la relación entre los que no realizaron el viaje y los que sí lo realizaron $\left(\frac{3}{5}\right)$. El denominador 8 proviene de seleccionar una especie de mínima unidad que permite establecer que si el total de la clase fuera de 8 personas, 3 no habrían realizado el viaje y 5 sí.

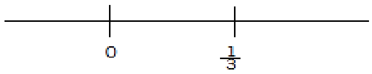
Situación 2: Contexto de la medida

En esta situación, GCBA (2006) señala que se debe establecer la medida de un segmento considerando otro como unidad. La idea que se pone en juego en esta situación, de acuerdo a lo indicado por Hincapié (2011), es identificar que una fracción $\frac{a}{b}$ es a veces $\frac{1}{b}$, es decir si se repite 5 veces $\frac{1}{7}$ se obtendrá $\frac{5}{7}$.

Ejemplo: dos estudiantes midieron el largo de la pizarra de su aula y llegaron a las siguientes conclusiones; Elva midió con su carpeta y le dio 10 "largos de carpeta", mientras que Julián midió con su pulgar y le dio 50 pulgares. ¿Cuánto mide el largo de la carpeta de Elva, si la unidad es el pulgar de Julián? Podemos indicar la relación existente entre medir un objeto, por ejemplo la carpeta, tomando como unidad los pulgares y hacerlo al revés, la medida de un pulgar, considerando como unidad el largo de la carpeta, se nota la noción de inverso de un fraccionario.

Situación 3: Densidad y orden

En esta situación, GCBA (2006) subraya las diferentes tareas que están en torno a la relación de orden y la noción de densidad. La ubicación de los números en la recta numérica cumple vital importancia.

Ejemplo: ubicar en la recta que sigue: 

el número $\frac{3}{4}$. Para esta labor el estudiante deberá trasladar 3 veces la distancia entre 0 y para marcar 1, y luego dividir la unidad en 4 partes iguales. Así compara y ordena.

Situación 4: Como producto

En esta situación, GCBA (2006) plantea que es poner en discusión los cambios que sufren las operaciones al pasar de los números naturales a los números fraccionarios. El funcionamiento de los números fraccionarios supone rupturas con relación al de los números naturales, especialmente en las operaciones y en particular en la multiplicación.

Ejemplo: en un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno y el ancho, dos quintos del ancho del mismo. ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela? En este problema se utiliza el área para contextualizar la multiplicación de fracciones y empezar a comparar el funcionamiento de los naturales y de las fracciones en torno a la multiplicación.

Y finalmente, la ***situación 5 de conjeturas y validación*** en la que al igual que en los números naturales se busca producir y validar una nueva propiedad (GCBA, 2006).

Por ejemplo: con tres números consecutivos se construyen dos fracciones y se las compara, si escogemos 5, 6 y 7 se obtiene $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ .Con otros números consecutivos. ¿Se obtiene siempre la misma relación de orden? ¿Será posible enunciar la relación para tres números naturales consecutivos cualesquiera? Ante esta situación el estudiante debe analizar la manera de formular y escribir la regla, pretendiendo que dicha formulación responda a las condiciones que propone el enunciado de la tarea.

Por otra parte, la estructura numérica que está relacionada con la de $\mathbb{F}^{+}$ es la de los números decimales.

Estructura numérica de los números decimales positivos $(\mathbb{D}^+, +, \times, \leq)$

En los estudios realizados por Lages et al. (2000), se enuncia que un número decimal es un símbolo de la forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 000 \ldots$

Donde $a_0 \epsilon \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ son dígitos, esto es, números naturales tales que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \epsilon \mathbb{N}$, se tiene un dígito a_n , llamado el n-ésimo dígito de la expresión decimal α. El número natural a_0 se llama parte entera de α.

Entonces $\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots \frac{a_n}{10^n}$, es en realidad una fracción decimal (fracción cuyo denominador es una potencia de 10). Por ejemplo:

$5{,}6800 \ldots = 5 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100} = \frac{568}{100}$.

Por otra parte, Lages et al. (2000) manifiesta que el gran interés de la notación decimal se deriva de que todos los algoritmos desarrollados para realizar las operaciones aritméticas se extienden casi sin problema al conjunto $\mathbb{D}^+$**.** Esto es posible gracias a las propiedades del sistema de numeración decimal.

Respecto a las operaciones, el autor argumenta que el procedimiento para las operaciones de adición y sustracción consiste en que los números decimales tengan la misma cantidad de cifras después de la coma. Esto se realiza añadiendo ceros a la derecha del número que tenga la parte decimal más corta. Por ejemplo: $2{,}15 + 7{,}7 = 2{,}15 + 7{,}70 = 9{,}85$.

Para el caso de la multiplicación se prescinde de la coma decimal y se opera como números naturales. Para colocar la coma en el producto, contando de derecha a izquierda el número de cifras igual a suma de las partes decimales de los dos factores. Así tenemos que $5{,}3 \times 2{,}1 = 11{,}13$. Por otra parte, las propiedades dadas en $\mathbb{N}$ **y** $\mathbb{F}^+$ verifican para $\mathbb{D}^+$**.** Además, lo manifestado por Hefez (1997) podemos ampliarlo a $\mathbb{D}^+$ pues es ordenado, es decir que si $m < n$, con m y $n \in \mathbb{D}^+$ entonces existe un $q \in \mathbb{D}^+$ tal que $m < q < n$. Lo cual se conoce como la densidad de los números decimales.

Paralelamente, Lages et al. (2000) menciona que una expresión decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ se llama décima periódica simple, de periodo $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ cuando los primeros p dígitos después de la coma se repiten indefinidamente en el mismo orden. Así, $0{,}555\ldots$ y $0{,}151515\ldots$ son décimas periódicas simples (periódicas puras), con periodos 5 y 15 respectivamente.

Se puede decir que toda décima periódica simple representa un número racional y se le denomina fracción generatriz. Por ejemplo: $0{,}514514514\ldots=\frac{514}{999}$.

Existen todavía décimas periódicas llamadas compuestas o periódicas mixtas. Son aquellas que después de la coma tienen una parte que no se repite, seguida de una parte periódica. Si $\alpha=0{,}31767676\ldots$ entonces la fracción generatriz se obtiene $=\frac{3176-31}{9900}$. Para estas expresiones los autores subrayan que no es posible realizar las cuatro operaciones con expresiones decimales usándolas integralmente pues estas son organizadas de izquierda a derecha; mientras que las operaciones son normalmente desarrolladas de derecha a izquierda.

De las tres estructuras mencionadas siendo el caso de los naturales $(\mathbb{N},+,\times,\leq)$, las fracciones positivas $(\mathbb{F}^{+},+,\times,\leq)$, los decimales $(\mathbb{D}^{+},+,\times,\leq)$ todas estas estructuras mencionadas son subconjuntos del sistema numérico de los racionales $(\mathbb{Q}_0^{+},+,\times,\leq)$, los cuales verifican todas las propiedades y operaciones iniciales.

Estas rigurosidades matemáticas mostradas para los números decimales son modificadas cuando son expuestas en los libros de texto, que para nuestra investigación son los libros del V ciclo de educación primaria.

El estudio realizado con los números fraccionarios en lo que respecta a las situaciones problemas presentadas será el mismo para los números decimales, así encontraremos: *proporcionalidad, medida, orden y densidad, como producto y conjeturas – validación.*

A modo de resumen la Tabla 4 presenta la configuración epistémica de las situaciones problemas de las tareas estructurales asociadas a la estructura numérica de los números fraccionarios $\mathbb{F}^{+}$ y decimales $\mathbb{D}^{+}$ positivos.

Tabla 4. *Configuración epistémica de las tareas estructurales asociadas a las estructuras numéricas de los números fraccionarios y decimales del V ciclo*

Situaciones problemas

Intramatemática es decir las operaciones en términos de relaciones entre sus elementos.

Extramatemática

Se considera los significados de las operaciones. Problemas que simulan situaciones del mundo real.

- ***Proporcionalidad***

Ejemplo: en un concurso de pintura al aire libre se presentaron 30 participantes y 8 obtuvieron algún premio. ¿Qué fracción representa los ganadores?

- ***Medida***

Ejemplo: representa un ruta que una la ciudad M con la ciudad P, con avisos que indiquen las distancias de 1Km ; 3Km; $\frac{14}{8}$ Km ; $\frac{13}{6}$ Km

- ***Orden y densidad***

Ejemplo: identifica seis números que estén comprendidos entre 2,5 y 3

- ***Como producto***

Ejemplo: calcular el valor de a, de modo que verifique la siguiente igualdad: $\frac{5}{7} \times a = 1$

- ***Conjetura y validación***

Por ejemplo: comparar las siguientes fracciones $\frac{20}{4n+3}$ y $\frac{5}{n}$, para diferentes valores de *n*.

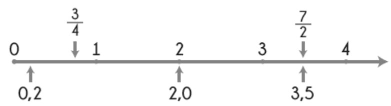
Lenguaje

Verbal : Expresión numérica, adición, sustracción, multiplicación, división, signos de agrupación, leemos y escribimos números, ordenamos de mayor a menor, valor propiedades de las operaciones, conmutativa, asociativa, distributiva, factores, sumandos, determinen mentalmente cada producto, exploren con calculadora, descomposición según el valor posicional, más que, menos que, añadir, quitar, minuendo, sustraendo, diferencia, multiplicando, multiplicador, divisor, cociente, residuo, dividendo, ¿ qué parte del cilindro está lleno de agua?, fracciones equivalentes, numerador, denominador, partir y repartir una cantidad en partes iguales, representa como número mixto aproximación y redondeo de números decimales, décimas, centésimas, recta numérica, conversión de unidades de medida, ubicamos en la recta.

Gráfico:

- ***Esquemas***

- ***La recta numérica***



- ***Icónico:*** se trata de representar la realidad a través de imágenes.

(el salón de 6to grado)

Simbólico literal:

$+;\ -;\ \times;\ \div;\rightarrow,<,>;\ 2{,}5\ \pm\ 3{,}6\ =\ 6{,}1;\ ?\div\frac{1}{2}\ =\ 8;\ \frac{2}{3}\times\ ?\ =\ 2;\ \ a\ \pm\ b\ =\ c;a\ \div b\ =\ c;\ \ a\ =\ \frac{b}{2},a\times b=,\frac{1}{3}=0{,}333\cdots$

Definiciones

- *Significados del número*
- *Sistema decimal de numeración y otras bases.*
- *Orden entre fracciones y decimales*
- *Adición, sustracción, multiplicación y división*
- *Densidad de los números*
- *Clases de equivalencia*

Procedimientos

Determinación de una heurística

Reglas generales que consiguen convertir la tarea en un contexto sencillo.

- *Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.*
- *Usos básicos de la calculadora con decimales y fracciones.*
- *Diversidad de representaciones de un mismo número.*
- *Cálculo mental.*
- *Reconocimiento de patrones numéricos*
- *Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números.*

Procedimientos

Secuencia de actividades y pasos

- *Algoritmo para la suma o resta*

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\times d\pm b\times c}{bd}$$

$$N=a_0,a_1\ldots a_n+M=b_0,b_1\ldots n_m$$

Tener la misma cantidad de términos después de la coma, de no haber completar con ceros y cada termino se opera como números naturales.

Algoritmos para las operaciones

- *Algoritmos para la multiplicación y división.*

  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{bd}$; $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

- *Algoritmo para la obtener la fracción generatriz*

  $$F = \underbrace{0, a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n_m}}_{k\ cifras} = \frac{\overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n_m}}}{\underbrace{100 \cdots 00}_{k\ ceros}}$$

  $0{,}23 = \frac{23}{100}$, *en otra base:* $0{,}32_{(5)} = \frac{32_{(5)}}{100_{(5)}}$

Para el caso de una expresión decimal:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

$$F = 0, \underbrace{ab\widehat{c \cdots x}_{(n)}}_{K\ cifras} = \frac{\overline{abc \cdots}_{(n)}}{n^k - 1}$$

$$F = 0, \underbrace{\overline{ab \cdots h}}_{Kcifras}, \underbrace{pr\widehat{s \cdots x}_{(n)}}_{T\ cifras} = \frac{\overline{ab \cdots hprs \cdots x}_{(n)} - \overline{prs \cdots x}_{(n)}}{\underbrace{(n-1)(n-1) \cdots (n-1)}_{T\ cifras}\underbrace{000 \cdots 00_{(n)}}_{K\ cifras}}$$

$$0, \widehat{23} = \frac{23}{99} ;\ 0{,}21\hat{3} = \frac{213-21}{900}$$

Propiedades

- ***Asociativa, Distributiva, Conmutativa, Ley de corte:***
- ***Orden:***

  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ cuando $a \times d < b \times c$

  $a, bcd \cdots x < m, npr \cdots y$, si $a \leq m; b \leq n; c \leq p; \cdots x \leq y$

- ***Con respecto al número mixto***

  $\boldsymbol{\frac{a}{b} = A\frac{c}{d} = A + \frac{c}{d},\ si\ a > b.}$

- ***Otras propiedades***

  Si $f = \frac{a}{b} < 1$ *y* $g = \frac{a+n}{b+n}$ $\therefore f < g$

  Sea f y g dos fracciones irreductibles : $f = \frac{a}{b}$ *y* $g = \frac{c}{d}$

  Si $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k$ *entonces* $b = d$

- ***Fracción continua simple***

$$F = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x}}}}$$

Con $a; b; c \cdots x \in \mathbb{N}$ *,luego* $\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}; \cdots \boldsymbol{x}]$

La fracción $\frac{19}{4} = [3; 1; 4]$

Argumentos

Deductivo

A partir de las definiciones o propiedades.

Ejemplo: Indica cuantos lugares después de la coma tendrá la fracción: $\frac{35}{1000}$

Tiene 3 lugares

A partir de regularidades numéricas

Ejemplo: ¿Cuál es la altura del rectángulo número 10 de la serie?

Base	Altura	Área
5	$\frac{4}{5}$	4
$\frac{5}{2}$	**?**	4
$\frac{5}{3}$ $\vdots$	**?** $\vdots$	4 $\vdots$

Posible argumento: el valor de la base en el primer rectángulo es 5 o $\frac{1}{5}$, y su altura es $\frac{4}{5}$ o $4 \times \frac{1}{5}$, en el rectángulo 2: la base es $\frac{5}{2}$, y su altura es o $4 \times \frac{2}{5}$ siendo 4 el producto, en rectángulo 3: tenemos la base es $\frac{5}{3}$, y su altura es o $4 \times \frac{3}{5}$ obteniendo 4 al operar dichas dimensiones. Para el rectángulo 10 tendremos entonces: de base $\frac{5}{10}$, y de altura $4 \times \frac{10}{5}$ obteniendo 4. Por lo tanto la altura es $4 \times \frac{10}{5}$

Inductivo

A partir de casos particulares encontrados empíricamente.

Ejemplo: Calcular el valor de M

$$M = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \frac{1}{49 \times 50}$$

Posible argumento: son 49 sumandos el realizarlo todos demandaría mucho tiempo. Utilizamos casos particulares por ejemplo:

$$M = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$M = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}$$

Luego obtenemos :

$$M = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \frac{1}{49 \times 50} = \frac{49}{50}$$

Formalización del término general encontrado empíricamente

Ejemplo: De siguientes igualdades

$$0{,}21_{(6)} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6 \times 6}$$

$$0{,}345_{(7)} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7 \times 7} + \frac{5}{7 \times 7 \times 7}$$

Cuál es la igualdad: $0, abc \cdots x_{(n)}$

A partir de los casos particulares llegará a indicar $0, abc \cdots x_{(n)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n \times n} + \frac{c}{n \times n \times n} + \frac{x}{\underbrace{n \times n \times n \cdots \times n}_{\#\ despues\ de\ la\ coma}}$

El apartado denominado "Significado institucional de referencia de las tareas estructurales" ha sido dedicado a la identificación del significado de referencia de las tareas estructurales del V ciclo de educación primaria asociadas a las estructuras numéricas $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{F}^+, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{D}^+, +, \times, \leq)$; como consecuencia hemos identificado cinco distintas formas con respecto a $\mathbb{N}$ y cinco para $\mathbb{F}^+$ y $\mathbb{D}^+$ las cuales originan diferentes significados que se le da a las tareas estructurales cuando se emplea en este contexto.

2) SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO DE LAS TAREAS ESTRUCTURALES

El significado institucional pretendido es el que se encuentra desarrollado en documentos oficiales y libros de texto, en los cuales se pone de manifiesto la forma como se organizan los conocimientos a ser alcanzados en las instituciones. Para nuestra investigación este significado está presente en los libros de texto oficiales del V ciclo de educación primaria, donde se plasman de lo que se desea lograr en las aulas.

La identificación del significado pretendido de las tareas estructurales se basa en la clasificación y agrupación de los objetos primarios que permite la determinación de configuraciones epistémicas. Además de asociar a las soluciones de las tareas los niveles de algebrización. Se han considerado como documentos oficiales el currículo nacional 2016, el mapa de progreso del 2013 y rutas de aprendizaje del 2015

a) Documentos oficiales del Perú

El Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) nos presenta aquellas metas que están relacionadas con el RAE para estudiantes de V ciclo de educación primaria y que el docente debe tener en consideración para establecer aprendizajes. En él encontramos en los mapas de progreso, la cual de acuerdo a las competencias de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso: número y operaciones, cambio y relaciones, geometría, y estadística y probabilidad. Nosotros nos centraremos en números y operaciones pues las tareas estructurales que es nuestro objeto de estudio están enfocadas en las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas $(\mathbb{N},+,\times,\leq)$, $(\mathbb{F}^{+},+,\times,\leq)$ y $(\mathbb{D}^{+},+,\times,\leq)$, siendo estas tareas las estudiadas con los alumnos del V ciclo de la educación básica regular del Perú. En la Tabla 5 se describen las características de números y operaciones, donde notamos que para el desarrollo del RAE los docentes deben cumplir una función de gran envergadura. Esto se da a partir de la caracterización de los rasgos algebraicos presentes en las tareas que elaboran y/o seleccionan de los libros que el Ministerio de Educación entrega a los estudiantes de Educación Básica Regular, en particular a los de primaria (V ciclo), logrando así en sus estudiantes la comprensión y crecimiento en el álgebra escolar.

Tabla 5. *Mapas de progreso*

Mapa de progreso de número y operaciones	Describe el desarrollo progresivo de la competencia para comprender y usar los números, sus diferentes representaciones y su sentido de magnitud; comprender el significado de las operaciones en cada conjunto numérico; usar dicha comprensión en diversas formas para realizar juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles en diversas situaciones.

Fuente: (Perú, 2013, p. 8)

Es en este ciclo, el Perú (2013) declara que los estudiantes:

> Representa cantidades discretas o continuas mediante fracciones, decimales y porcentaje. Compara y establece equivalencias entre números naturales, fracciones, decimales y porcentajes más usuales. Identifica la equivalencia de números de hasta seis dígitos en

centenas, decenas y unidades de millar, y de unidades en decimos y centésimos. Estima, compara y mide la masa de objetos en miligramos; la duración de eventos en minutos y segundos; y la temperatura en grados Celsius. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades, combinar los elementos de dos conjuntos o relacionar magnitudes directamente proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando el procedimiento seguido. Identifica la potencia como un producto de factores iguales. (p. 22)

En otro de los documentos oficiales el Perú (2015) afirma:

> Los niños en la educación básica regular tienen un largo camino por recorrer para desarrollar competencias y capacidades, las cuales se definen como la facultad de toda persona para actuar conscientemente sobre una realidad, sea para resolver un problema o cumplir un objetivo, haciendo uso flexible y creativo de los conocimientos, las habilidades, las destrezas, la información o las herramientas que tengan disponibles y considere pertinentes a la situación. (p. 17)

Estas competencias propuestas en la Educación Básica Regular se organizan sobre la base de cuatro situaciones que se describen en la Figura 5.

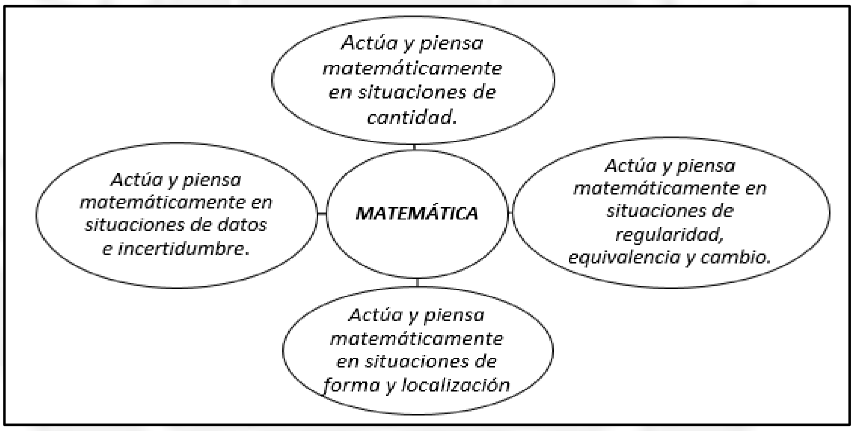


Figura 5. Competencias propuestas en la Educación Básica Regular

Fuente: (Perú, 2015, p. 17)

De la Figura 5, tomamos para nuestra investigación la competencia Actuar y pensar en situaciones de cantidad, de la cual se indica:

> Actuar y pensar en situaciones de cantidad implica resolver problemas relacionados con cantidades que se pueden contar y medir para desarrollar progresivamente el sentido numérico y de magnitud, la construcción del significado de las operaciones, así como la aplicación de diversas estrategias de cálculo y estimación. (Perú, 2015, p.18)

Esta idea de generalizar patrones evoca lo manifestado por Godino et al. (2014), puesto que según argumentan, la dualidad de particularización y generalización constituyen rasgos del pensamiento algebraico. Por ende, podemos indicar que es pertinente que el docente de primaria esté capacitado para poder generar en sus estudiantes las competencias que indican se deben dar en V ciclo de la Educación Básica Regular en el Perú. Esto conllevará a que el estudiante alcance cada nivel de algebrización del RAE, esto es, una clasificación con respecto a la solución de tareas donde se identificarán rasgos algebraicos. En el 2016 el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) realizó un ajuste de la Currículo Nacional. Esto permitirá seguir avanzando hacia el posicionamiento del enfoque por competencias y no memorístico en las aulas, así como la inclusión de más horas y el fortalecimiento de las áreas curriculares de toda la educación básica.

La Figura 6 nos indica las competencias del Currículo Nacional del Perú. En ella podemos apreciar la competencia “Resuelve problemas de cantidad”. Es en esta competencia donde daremos mayor énfasis, pues como indica Socas (2011), el tránsito de la Aritmética al Álgebra desde una perspectiva general comprende el desarrollo del pensamiento operacional, estructural y procesal.

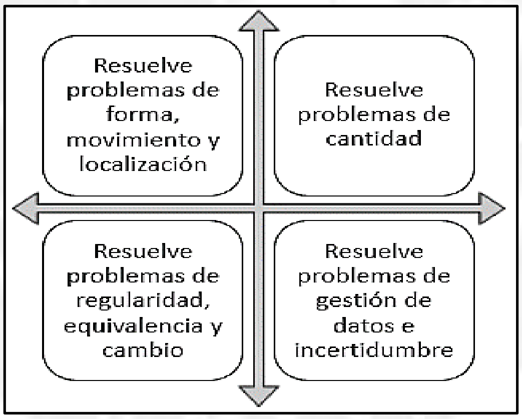


Figura 6. Competencias del Currículo Nacional del Perú

Fuente: adaptado de (Perú, 2016a, p. 134)

En los estándares dedicados al V ciclo de la Educación Básica Regular en el Perú, que comprende los grados de quinto y sexto del nivel primario y cuyas edades fluctúan entre 11 y 12 años se establece que la competencia Resuelve Problemas de Cantidad, indicada en la Figura 7, muestra los siguientes contenidos.

NIVEL ESPERADO AL FINAL DEL CICLO V	Resuelve problemas referidos a una o más acciones de comparar, igualas, repetir cantidades, partir y repartir una cantidad en partes iguales; las traduce a expresiones aditivas, multiplicativas y la potenciación cuadrada y cúbica, así como a expresiones de adición, sustracción y multiplicación con fracciones y decimales (hasta el centésimo). Expresa su comprensión del sistema de numeración decimal con números naturales hasta de seis cifras, de divisores y múltiplos, y del valor posicional de los números decimales hasta los centésimos; con lenguaje numérico y representaciones diversas. Representa de diversas formas su compresión de la noción de fracción como operador y como cociente, así como las equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales. Selecciona y emplea estrategias diversas, el cálculo mental o escrito para operar con números naturales, fracciones, decimales y porcentajes de manera exacta o aproximada; así como para hacer conversiones de unidades de medida de masa, tiempo y temperatura, y medir de manera exacta o aproximada usando la unidad pertinente. Justifica sus procesos de resolución así como sus afirmaciones sobre las relaciones entre las cuatro operaciones y sus propiedades, basándose en ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Figura 7. Nivel esperado al final del Ciclo V

Fuente: (Perú, 2016, p. 142)

Con respecto a las tareas estructurales (operaciones y propiedades de los estructuras numéricas), este nivel de competencia "Resuelve Problemas de Cantidad" justifica sus procesos de resolución así como sus afirmaciones sobre las relaciones entre las cuatro operaciones y sus propiedades, basándose en ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Es en estas soluciones se observan diferentes características propias del RAE, las cuales serán caracterizadas en niveles de algebrización. Además establece que la enseñanza de la matemática pone énfasis en el papel del docente como mediador entre el estudiante y los saberes matemáticos.

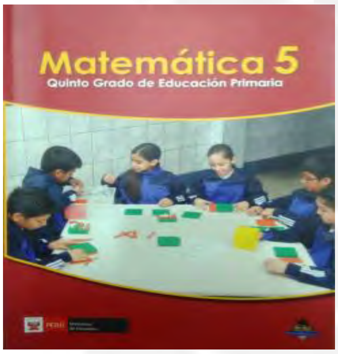
De acuerdo a los documentos mencionados podemos indicar que los futuros docentes de primaria deben abrir el camino hacia el desarrollo gradual del pensamiento algebraico o del RAE utilizado por Godino et al. (2014), en los estudiantes de educación primaria. Para lograr tal cometido, es provechoso utilizar mecanismos que conlleven a tal fin, primero formando maestros que sean capaces de identificar niveles de algebrización para luego poder diseñar tareas que conlleven al crecimiento del pensamiento algebraico.

b) Análisis de los libros de texto del V ciclo

Para realizar el análisis tendremos en cuenta los significados de referencia que se han determinado; a continuación hacemos una descripción de los libros de texto, seleccionamos las unidades a trabajar e identificar las tareas que contienen el objeto de estudio, es decir, las tareas estructurales asociadas a $\mathbb{N}$, $\mathbb{F}^+$ y $\mathbb{D}^+$ en los textos oficiales de matemática del V ciclo que entrega el MINEDU, luego las analizamos utilizando la configuración epistémica y asociando a la solución de las tareas un nivel de algebrización.

Los libros de texto en los que se desarrollará el análisis son los de quinto y sexto de educación primaria, distribuidos ambos por el MINEDU a las diferentes instituciones educativas del Perú. En la Figura 8 se muestran algunas características de los libros de texto del V ciclo.

Matemática 5

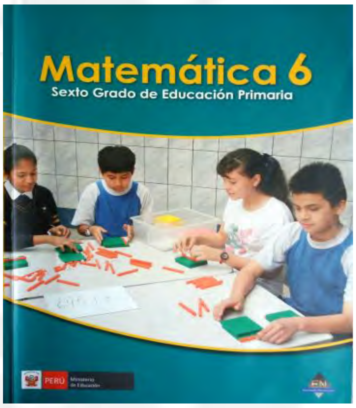


Título del libro de texto: Matemática 5

Autores: Cuba Rosa, Teodoro A, Dos Reis Montagli Isabel, Martes Filena, Lapa Senobia.

Editorial: El Nocedal S.A.C

Matemática 6



Título del libro de texto: Matemática 6

Autores: Dos Reis Montagli Isabel, Sullca Elsa, Val Eugenia.

Editorial: El Nocedal S.A.C

Figura 8. Textos del V ciclo de EBR del Perú

Los libros de texto Matemática 5 y Matemática 6 están estructurados en ocho unidades; con respecto al primero, las tareas estructurales están ubicadas en las unidades 1, 2 y 3 pues ahí encontramos números naturales, fracciones y números decimales. Por su parte en el segundo libro, las unidades 2 y 3 están destinadas para el estudio de los números naturales, fracciones y representaciones decimales.

Para la selección de las tareas estructurales procuramos que la resolución de las mismas reúnan las siguientes características:

- Operaciones aritméticas con números particulares.
- Aplicación de las propiedades de los estructuras numéricas naturales, fracciones positivas, decimales positivos de forma general racionales positivos incluidos el cero $(\mathbb{N}, \mathbb{F}^{+}, \mathbb{D}^{+}) \subset \mathbb{Q}_{\mathbf{0}}{}^{+}$
- Situaciones extra matemáticos e intramatemático que conllevan a representaciones de la forma $Ax + B = C$; $Mx = N$.

Con dichas características, en base a los niveles de algebrización 0-2, realizamos el análisis epistémico y además de la adjudicación a la solución de diez tareas de 5to grado y diez tareas del 6to grado, escogidos en base a las características mencionadas.

Mostramos a continuación el análisis de las diez tareas del libro de texto de matemática para quinto grado de educación primaria.

Tarea 1

Nos muestra una situación problema intramatemático, es decir, propia de la matemática, donde a la adición asociamos la situación de igualación y a las multiplicaciones como producto de medidas. La Tabla 6 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 6. *Configuración epistémica, tarea 1 del texto: Matemática 5*

Situación problema
Indicamos como calculamos mentalmente el valor de las siguientes expresiones. a) $17 + (13 + 15)$ b) $2 \times 17 \times 5$ c) 5×112 Es una situación intramatemática. **Solución** a) $17 + (13 + 15) = (17 + 13) + 15$ (Reagrupando o asociando sumandos) $= 30 + 15 = 45$ b) $2 \times 17 \times 5 = 2 \times 5 \times 17$ (Reacomodando o conmutando factores) $= (2 \times 5) \times 17$ (Asociando los factores) $= 10 \times 17 = 170$ c) $5 \times 112 = 5 \times (100 + 12)$ (Descomponiendo 112 en 2 sumandos) $= 5 \times 100 + 5 \times 12$ (Aplicando la propiedad distributiva) $= 500 + 60 = 560$
Lenguaje
Verbal: calculamos mentalmente, sumar, multiplicar. **Simbólico :** $+ ,\times, (\ ), 17,13,15,2,5,112$
Definiciones
Operaciones fundamentales de los números naturales (Axiomas de Peano)
Procedimientos
Determinación de un a heurística, uso de las propiedades del sistema numérico $\mathbb{N}$ $(17 + 13) + 15$ (Reagrupando o asociando sumandos) $2 \times 5 \times 17$ (Reacomodando o conmutando factores) $5 \times (100 + 12)$ (Descomponiendo 112 en 2 sumandos) $5 \times 100 + 5 \times 12$ (Aplicando la propiedad distributiva)

Propiedades
Asociativa, conmutativa, distributiva, descomposición de sumandos.
Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p.18)

Nivel de algebrización 1

Aquí aparecen los objetos intensivos. Esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Además, se aplicarán relaciones donde pueden intervenir datos desconocidos. Debido a ello se le asigna un nivel 1 pues interviene el signo igual como un indicador de equivalencia entre dos expresiones. Existe la presencia de propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Tarea 2

Esta tarea es una situación problema extramatemática, en otras palabras, toma la realidad como medio para asociar el estudio del número; la tarea es una situación de proporcionalidad simple de acuerdo a las características mencionadas al identificar el significado de referencia. En la Tabla 7 se observa el análisis realizado.

Tabla 7. *Configuración epistémica, tarea 2 del texto: Matemática 5*

Situación problema

Un camión sale de una embotelladora con 6258 gaseosas en cajas de 14 botellas cada una. ¿Cuántas cajas van en el camión?
Es una situación extra matemático sin conexión (Aislados)

Solución

Efectuamos la división 6258÷14. Recordamos la técnica operativa.

Multiplicamos y sustraemos los productos parciales.	**Multiplicamos y restamos mentalmente los productos parciales.**	**Estimamos el cociente con una multiplicación.**	**Verificamos cuando el cociente es exacto.**
6258 | 14 -56 | 447 65 -56 98 -98 0	6258 | 14 65 | 447 98 0	Piensa 14 x 500 = 7000 Entonces, una buena estimación es un poco menos que 500 o cerca de 450.	447x 14 1788 47 6258

Es una situación extramatemática sin relación con otra disciplina.

Lenguaje

Verbal: Cuántas cajas, técnica operativa, relacionar el contexto.

Simbólico : 14; 625; ÷; ×

Definiciones

Operaciones fundamentales de los números naturales.

Procedimientos

Algorítmicos para las operaciones de multiplicación y división.

Propiedades

Propiedades de la división, división por defecto donde el residuo es cero.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 21)

Nivel de algebrización 0

En este nivel las prácticas matemáticas son aquellas que no incluyen características algebraicas, interviniendo objetos extensivos (objetos particulares). En este nivel intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido, manipulando los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares. Debido a ello se le otorga el nivel 2 pues el resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas uso dela algoritmo de la multiplicación sobre números específicos. No incluye ninguna característica algebraica.

Tarea 3

Esta tarea es una situación problema extramatemática, clasificado es una situación de cambio. La Tabla 8 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 8. *Configuración epistémica, tarea 3 del texto: Matemática 5*

Situación problema

Un día le regalaron a Carlos algunos cuyes. Al pasar el tiempo, los cuyes se habían rerodu-cido. ¡Tenía 500 cuyes! Entonces se le ocurrió que podría hacer un buen negocio vendién-dolos en la feria. Si ya ha vendido 150 cuyes, ¿cuántos cuyes le quedan todavía?

Resolución:

¿Qué datos me dan?
Carlos tenía 500 cuyes.
Carlos vende 150 cuyes.

¿Qué me piden?
Determinar el número de cuyes que le quedan a Carlos.

Representemos esta situación con un esquema: $\underbrace{\boxed{150}\boxed{\quad ? \quad}}_{500}$

Elaboro un plan:
En el esquema vemos el número total de cuyes y el número de cuyes vendidos. Para cal-cular cuántos le quedan a Carlos, tenemos que restar la cantidad de cuyes vendidos de la cantidad total de cuyes.

Desarrollo el plan: 500 - 150= 350

Verificación: 350 + 150 = 500

Respuesta: A Carlos le quedan 350 cuyes.

Es una situación extramatemática sin conexión (Aislados)

Lenguaje

Verbal : número de cuyes, relacionar el contexto, sumar, restar

Simbólico : $150;\ 625; +; -$

Icónico: 

Esquemática: 

Definiciones

Sustracción de dos números. Operaciones fundamentales de los números naturales.

Procedimientos

Representación de un esquema, lo que falta a 150 para completar 500, elabora un plan (determinación de una heurística).

Propiedades

El minuendo es la suma del sustraendo con la diferencia.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p.22)

Nivel de algebrización 1

A la solución de la tarea se le adjudica el nivel 1, debido a que para resolver este ejercicio se resuelve la expresión que se proporciona de manera verbal: $150+? = 500$, propicia el uso de la adición y sustracción como operaciones inversas..

Tarea 4

Esta tarea es una situación problema extramatemática clasificado como una situación de conjetura y validación. En la Tabla 9 se puede ver el análisis realizado.

Tabla 9. *Configuración epistémica, tarea 4 del texto: Matemática 5*

Situación problema

El ahorro.
Luis tiene 13 monedas, algunas de S/.5 y otras de S/.2, cuyo valor total es de S/.50. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

Resolución:

¿Qué datos me dan?
Hay S/.50 en 13 monedas, algunas de S/.5 y otras de S/.2.

¿Qué me piden?
Determinar la cantidad de monedas de S/.5 y de S/.2.

Elaboro un plan
Utilizo el tanteo organizado como estrategia para resolver este problema. Para facilitar mi razonamiento, organizo los datos en una tabla.

Desarrollo el plan
Utilizo dos caminos alternativos.

a. Empiezo considerando el mayor número posible de monedas de S/.2 (que son 12) y voy probando.

a. Empiezo considerando el mayor número posible de monedas de S/.2 (que son 12) y voy probando.

S/.2	S/.5	Total en S/.	¿Cumple?
12	1	12 x 2 + 5 = 29	no
11	2	11 x 2 + 2 x 5 = 32	no
10	3	10 x 2 + 3 x 5 = 35	no
......	......	....	......
5	8	5 x 2 + 8 x 5 = 50	sí

b. Considero el mayor número posiblle de monedas de S/.5, que son 9 (9 x 5 = 45 y 10 x 5 = 50).

S/.5	S/.2	Total en S/.	¿Cumple?
9	4	9 x 5 + 4 x 2 = 53	no
8	5	8 x 5 + 5 x 2 = 50	sí

Verificación: 350 + 150 = 500

Respuesta: A Carlos le quedan 350 cuyes.

Es una situación extramatemática sin relación con otra disciplina

Lenguaje

Verbal: cuantas monedas, relacionar el contexto, valor total, mayor número posible, verifica si cumple o no.

Simbólico : $13;\ 5; 2; 50; +; -;\times; =$

Icónico: 

Definiciones

Operaciones fundamentales de los números naturales.

Procedimientos

Determinación de una heurística, utiliza el método de la falsa suposición induciendo al cálculo erróneo.

Propiedades

Clausura, adición y multiplicación de números $\mathbb{N}$.

Argumentos

El argumento utilizado es empírico, el resultado obtenido es por ensayo error.

Fuente: (Perú, 2012b, p.26)

Nivel de algebrización 0

A la solución de la tarea se le adjudica el nivel 0 debido a que es desarrollada por ensayo y error se da valores particulares hasta obtener lo pedido. En este nivel, intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido, manipulando los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares.

Tarea 5

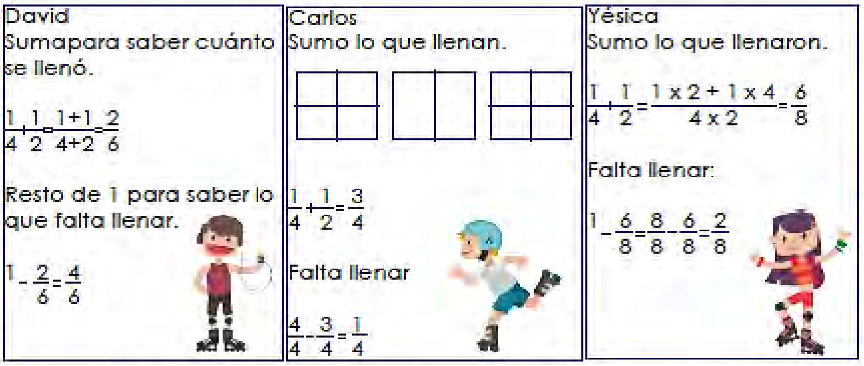
En esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática clasificando la situación de proporcionalidad, es decir, constituyen un contexto a partir del cual repensar aspectos sobre el funcionamiento de las fracciones. La Tabla 10 presenta el análisis realizado.

Tabla 10. *Configuración epistémica, tarea 5 del texto: Matemática 5*

Situación problema

Jimena, la mamá de Pedro, también compra agua y la guarda en cilindros. Su hermana llena 1/2 del cilindro y Pedro llena 1/4 del mismo. ¿Cuánto les falta para tener el cilindro lleno hasta el borde?

a. Analiza las soluciones que obtuvieron David, Carlos y Yésica:



b.¿cúal o cuáles son las soluciones correctas? ¿Por qué alguna de estas soluciones no es correcta?

c.Analizamos las respuestas de David, Carlos y Yésica.

-David no dio una respuesta correcta, ya que 1/4 y 1/2 no son fracciones homogéneas y no se puede operar de esta forma.
-Carlos obtiene la respuesta correcta ayudándose con unos gráficos.
-Yésica llega a la respuesta correcta usando una estratégia de cálculo.

d.Observa otras 2 formas de resolver 1/4 + 1/2:

- Usar fracciones equivalentes para obtener un común denominador:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$

-Obtener un denominador común que no es el mínimo (multiplicando los denominadores y en aspa):

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times 1+4\times 1}{8}=\frac{2+4}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Es una situación extramatemática.

Lenguaje

Verbal: cuantas les falta, sumar, restar, sumar, fracciones homogéneas, fracciones equivalentes, denominador común.

Simbólico: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $2; 50; +; -; \times; =$

Definiciones

Operaciones fundamentales de las fracciones positivas.

Procedimientos

Uso de gráficos, determinación de una heurística.

Sumo lo que llenan  finalmente falta $\frac{1}{4}$

Propiedades

Adición y multiplicación $(\mathbb{F}^{+}, +, \times, \leq)$

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de fracciones positivas. Hace uso de también de las representaciones gráficas, parte de un todo como la suma de sus partes.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 41)

Nivel de algebrización 0

Se utilizan representaciones gráficas como ayuda para resolver. El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números fraccionarios específicos; no incluye característica algebraica, debido a ello el nivel es asignado es 0.

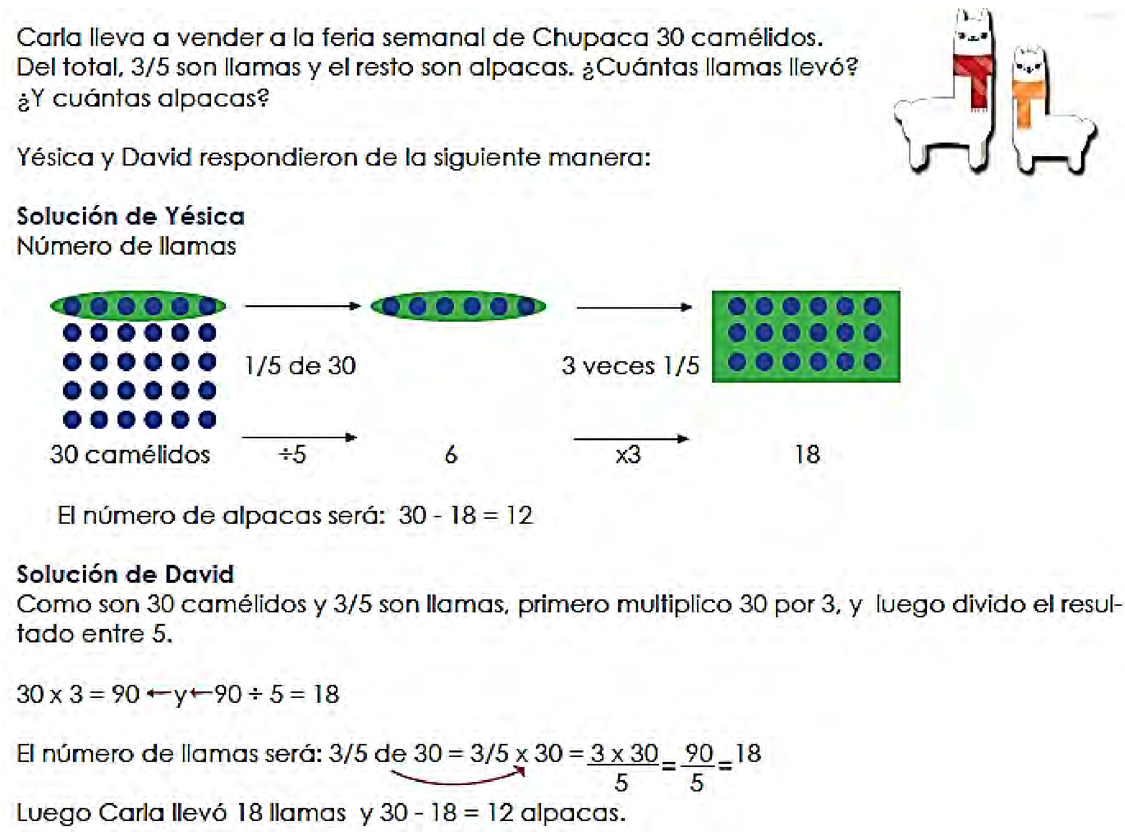
En este nivel las prácticas matemáticas son aquellas que no incluyen características algebraicas, interviniendo objetos extensivos (objetos particulares). En este nivel intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido manipulando los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares.

Tarea 6

Con esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática, o sea, tomando aspectos de la realidad no tiene conexión con alguna disciplina tal como la arquitectura, ingeniería, etc. La situación problema presente en la tarea se clasifica como proporcionalidad, pues se busca repensar aspectos sobre el funcionamiento de las fracciones. La Tabla 11 nos muestra el análisis epistémico y el nivel de algebrización asociado a la resolución de la tarea

Tabla 11. *Configuración epistémica, tarea 6 del texto: Matemática 5*

Situación problema



Carla lleva a vender a la feria semanal de Chupaca 30 camélidos. Del total, 3/5 son llamas y el resto son alpacas. ¿Cuántas llamas llevó? ¿Y cuántas alpacas?

Yésica y David respondieron de la siguiente manera:

Solución de Yésica
Número de llamas

El número de alpacas será: 30 - 18 = 12

Solución de David
Como son 30 camélidos y 3/5 son llamas, primero multiplico 30 por 3, y luego divido el resultado entre 5.

30 x 3 = 90 ←y← 90 ÷ 5 = 18

El número de llamas será: 3/5 de 30 = 3/5 x 30 = $\frac{3 \times 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$

Luego Carla llevó 18 llamas y 30 - 18 = 12 alpacas.

Es una situación extramatemática.

Lenguaje

Verbal: cuantas alpacas llevó, cuantas llamas, parte todo, fracciones.

Simbólico : $\frac{3}{5}$; 30; +; −;×; =

Icónico: 

Definiciones

Operaciones fundamentales de los números racionales.

Procedimientos
Determinación de una heurística. Yesica: primero divide ($30 \div 5$), para que dicho resultado 6, quede multiplicado ($6 \times 3 = 18$). Finalmente, $30 - 18 = 12$ es el número de alpacas. David: primero multiplica (30×3), para que dicho resultado 90, quede divid0 ($90 \div 5 = 18$). Finalmente, $30 - 18 = 12$ es el número de alpacas.
Propiedades
Adición y multiplicación $(\mathbb{Q}^{+}, +, \times, \leq)$
Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números positivos, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 43)

Nivel de algebrización 0

El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números fraccionarios específicos, es decir, se manipulan los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares, no incluye característica algebraica debido a ello el nivel asignado es 0.

Tarea 7

En esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática, es decir, tomando aspectos de la realidad tiene conexión a la nutrición. La situación problema presente en la tarea se clasifica como densidad y orden. La Tabla 12 nos muestra el análisis epistémico y el nivel de algebrización asociado a la resolución de la tarea

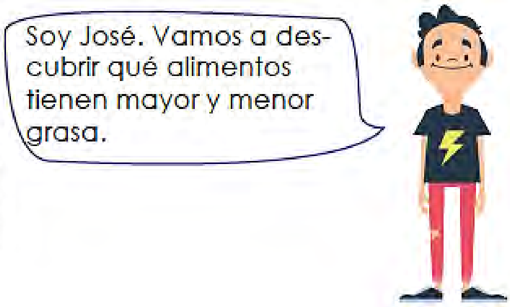
Tabla 12. *Configuración epistémica, tarea 7 del texto: Matemática 5*

Situación problema

La mamá de José ha recibido un consejo de su médico: "Sus hijos deben consumir menos grasa". Ella quiere saber qué carnes tienen menos grasa. Lee e interpreta la tabla siguiente.

100 gramos de alimento	Gramos de grasa
Carne de cerdo	15.1
Pechuga de gallina	2.9
Pierna de gallina	3.60
Carne de pato	28.6
Carne de conejo	8.6
Carne de cuy	1.6
Bonito asado	3.7
Pierna de chivo	3.6

Fuente: Revista Peruana de Cardiología (2010)



¿Qué tipo de número se han utilizado en la tabla para expresar la cantidad de grasa que tienen los alimentos indicados?

Según la tabla anterior, ¿qué alimento contiene más grasa?¿Cuál contiene menos?¿Cuáles contienen menos?¿Cuáles contienen la misma cantidad de grasa?

El alimento que contiene la mayor cantidad de grasa es la carne de pato (28,60 gramos de grasa) y el que contiene la menor cantidad es la carne de cuy (1,60 gramos de grasa). En cambio la pierna de gallina y la pierna de chivo contienen la misma cantidad de grasa.

El alimento que contiene la mayor cantidad de grasa es la carne de pato (28,60 gramos de grasa) y el que contiene la menor cantidad es la carne de cuy (1,60 gramos de grasa). En cambio la pierna de gallina y la pierna de chivo contienen la misma cantidad de grasa.

Comparamos los números decimales de esta manera:

1. Si los números tienen partes enteras diferentes, son estas las que deben compararse. Por ejemplo, comparemos los números 1,60 y 28,6.

Como $1 < 28$

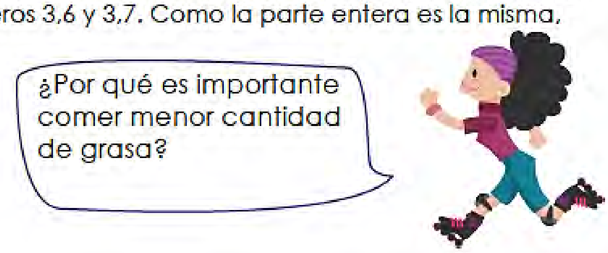
entonces $\boxed{1.60} < \boxed{28.6}$

2.Si los números tienen la misma parte entera, entonces debemos comparar la parte decimal. Por ejemplo, comparemos los números 3,6 y 3,7. Como la parte entera es la misma, comparamos la parte decimal.

3,6 3,7

$\boxed{0.6 < 0.7}$

entonces $1.60 < 28.6$



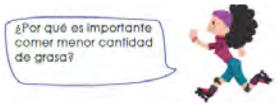
Explica usando el material Base Diez.

Es una situación extramatemática con conexión a la nutrición.

Lenguaje

Verbal: números decimales, cantidad de grasa, mayor y menor grasa, parte entera, parte decimal.

Simbólico : $15{,}1;\ 2{,}9; 3{,}60; 28{,}6; 8{,}6; 1{,}6; 3{,}7; +; -; \times; =; <; >$

Icónico: 

Definiciones

Relación de orden de los números decimales.

Procedimientos

Determinación de una heurística.

1. Comparar la parte entera.
2. Comparar la parte decimal, decimas, centésimas y más.

Propiedades

Orden entre los números naturales.

Dados dos números naturales m, n se escribe $m < n$, cuando existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de la relación de orden de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 62)

Nivel de algebrización 1

El resultado se obtiene de utilizar la relación de orden de los números naturales, además hace uso de las representaciones equivalentes. En este nivel aparecen los objetos intensivos. Esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Por todo lo mencionado se le adjudica un nivel 1 de algebrización.

Tarea 8

Con esta tarea nos encontramos ante un contexto intramatemático sin conexión con alguna otra disciplina. La situación problema presente en la tarea se clasifica como densidad y orden. La Tabla 13 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 13. *Configuración epistémica, tarea 8 del texto: Matemática 5*

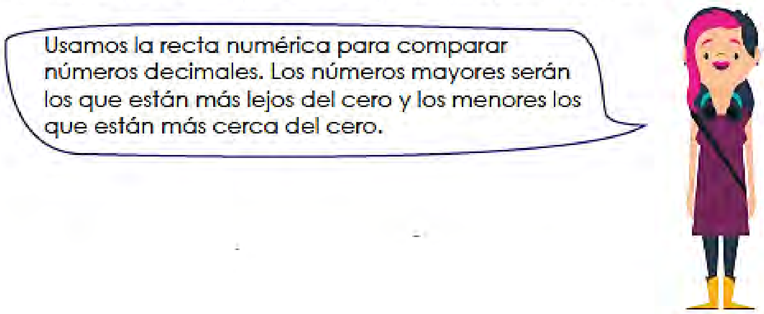
Situación problema

Comparamos los números decimales 1,2 y 1,6.

Representamos en una recta los números naturales 0,1 y 2. Como 1,2 y 1,6 son números mayores que 1 y menores que 2, dividimos la parte comprendida entre 1 y 2 en diez partes iguales:

Cada una de las diez partes representa una décima 1/10. Por lo tanto: 1,2 y 1,6 quedan ubicados así:

Entonces, como 1,6 está más lejos del cero, es mayor que 1,2.



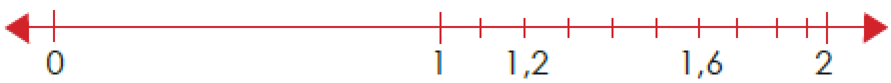
Contexto Intramatemática.

Lenguaje

Verbal: comparar números decimales, cercano al cero, lejano al cero.

Simbólico : 0; 1; 1,2; 1,6; 2; $+$; $-$;$\times$; $=$; $<$; $>$

Gráfico:



Definiciones
Relación de orden de los $\mathbb{D}^{+}$
Procedimientos
Determinación de una heurística. 1. Representa en una recta numérica los números naturales, $0, 1$ y 2 2. Dividir la parte comprendida entre 1 y 2 en 10 partes iguales **3.** Ubicar los números $1{,}2$ y $1{,}6$
Propiedades
Orden entre los números naturales. Dados dos números naturales m, n se escribe $m < n$, cuando existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$
Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte de la relación de orden de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p.63)

Nivel de algebrización 1

El resultado se obtiene de utilizar la relación de orden de los números naturales y la aplicación indirecta de la densidad de los números decimales. En la solución los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales debido a ello se le asigna el nivel 1.

Tarea 9

En esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática. La situación problema se clasifica como producto, en esta situación el funcionamiento de los números fraccionarios supone rupturas con relación al de los números naturales, especialmente en la operación de multiplicación. Por otro lado, si las medidas en cuestión son números naturales podríamos considerarlo también producto de medidas por la característica de ser una tarea relacionada al cálculo de áreas. En la Tabla 14 se aprecia el análisis realizado que consiste en la configuración epistémica y la adjudicación un nivel de algebrización asociado a la solución de la tarea.

Tabla 14. *Configuración epistémica, tarea 9 del texto: Matemática 5*

Situación problema

El piso del salón de clase de 5to grado de la escuela Santa Rosa tiene forma rectangular.

Si sus dimensiones son 6,5 m de largo y 5,4 m de ancho, ¿cuál es el área del piso del salón de clase?

Julio resuelve el problema así
Área del rectángulo: largo x ancho
Área del rectángulo:

$$
\begin{aligned}
6{,}5 \times 5{,}4 &= 6{,}5 \times (5 + 0{,}4)\\
&= 6{,}5 \times 5 + 6{,}5 \times 0{,}4\\
&= 32{,}5 + 6{,}5 \times 4/10\\
&= 32{,}5 + (6{,}5 \times 4) \div 10\\
&= 32{,}5 + (26 \div 10)\\
&= 32{,}5 + 2{,}6\\
&= 35{,}1
\end{aligned}
$$

Respuesta:
El área del rectángulo es 35,1 m²

Raquel responde así
Área del rectángulo: largo x ancho
Área del rectángulo:

$$
\begin{array}{r}
6{,}5\times \\
\underline{5{,}4} \\
260 \\
\underline{325\ \ } \\
35{,}10
\end{array}
$$

Y dice: "Para multiplicar dos números decimales, halla el producto como si fuesen dos números naturales. En el producto que obtengo separo tantas cifras decimales como decimales tienen los dos factores juntos que he multiplicado".

Respuesta:
El área del rectángulo es 35,1 m².

¿Julio y Raquel obtuvieron el mismo resultado?¿Por qué es correcto el procedimiento que utilizó Julio?¿Por qué es correcto el que utilizó Raquel? ¿Cómo habrías hecho tú el cálculo para hallar el área del rectángulo? En el futuo, ¿aplicarías la regla práctica utilizada por Raquel cada vez que tengas que hallar el producto de dos números decimales?

Contexto extramatemática.

Lenguaje

Verbal : área del piso, dimensiones del rectángulo, largo y ancho

Simbólico : 6,5; 5,4; ; +;×; =;÷

Icónico:	

Definiciones
Adición y multiplicación $(\mathbb{Q}^+, +, \times, \leq)$

Procedimientos
Uso de la heurística para el caso de julio. Descompone el número Utiliza la propiedad distributiva. Cambio de representación de un número decimal a una fracción. Opera utilizando las operaciones básicas según jerarquía. Algoritmo para las operaciones para el caso de Raquel. Algoritmo para la multiplicación de dos números decimales.

Propiedades
Distributiva, operaciones en $\mathbb{Q}^+$.

Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte de los operaciones de los números racionales positivos, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 79)

Nivel de algebrización 1 y 0

A la solución dada por Julio se le otorga un nivel 1, interviene el signo igual como un indicador de equivalencia entre dos expresiones. Existe la presencia de propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Por otro lado, a Raquel se le asigna un nivel 0 pues el resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticos sobre números decimales específicos, no incluye característica algebraica

Tarea 10

Con esta tarea nos encontramos ante un contexto intramatemático. La situación problema se clasifica como proporcionalidad. La Tabla 15 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 15. *Configuración epistémica, tarea 10 del texto: Matemática 5*

Situación problema

Escribe el número decimal 62,84 como resultado de la combinación de operaciones con tres o más números.

Ana responde así:	La respuesta de Julio es:
62,84 = (6,2 x 10) + (84 ÷ 100)	62,84 = 70 - 10,16 + 3
	62,84 = (7000 ÷ 100) - (10 + 16/100)+3

¿Estás de acuerdo con la respuesta de Ana?¿Y con la respuesta de Julio?

Contexto Intramatemática.

Lenguaje

Verbal: escribe el número decimal, combinación de operaciones.

Simbólico : 62,84; $+$;$\times$; $=$;$\div$; $(\quad)$; $-$; $\frac{0}{0}$

Definiciones

Adición y multiplicación $(\mathbb{Q}^{+}, +, \times, \leq)$

Procedimientos

Uso de la heurística para ambos casos.

Descompone el número.

Cambio de representación de un número decimal a una fracción.

Opera utilizando las operaciones básicas según jerarquía.

Propiedades

Operaciones en $\mathbb{Q}^{+}$.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de los operaciones de los números racionales positivos, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012b, p. 84)

Nivel de algebrización 1

A las soluciones dadas por Ana y Julio les asignamos el nivel 1, esto es debido la descomposición de dos números decimales dados.

Mostramos a continuación el análisis otorgado a las diez tareas del libro de texto de matemática para sexto grado de educación primaria.

Tarea 1

La situación mostrada es dada por la proporcionalidad, que en este caso es entendida como razón parte todo. La Tabla 16 presenta el análisis realizado.

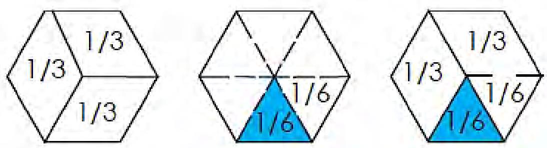
Tabla 16. *Configuración epistémica, tarea 1 del texto: Matemática 6*

Situación problema

Remigio guardó su cosecha de papa en tres sacos de la misma capacidad. Un mes después, ya había ocnsumido la mitad de uno de los sacos. ¿Qué parte de la cosecha fue la que consumió?

Veamos: En cada saco, Remigio guardó un terciode su cosecha.
En el primer mes consumió la mitad de un tercio, lo que equivale a un sexto de la cosecha.

Simbólicamente 1/2 de 1/3 es 1/6
Se puede expresar así: 1/2 x 1/3 = 1/6
Observa la representación de 1/2 de 1/3 en el hexágono:



Lenguaje

- **Verbal:** Qué parte de la cosecha, tres sacos de la misma cantidad, mitad de uno de los sacos.
- **Simbólico :** $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \times; =$
- **Icónico:** 

Definiciones

Multiplicación de dos fracciones (sistema numérico $\mathbb{Q}_0^+$).

Procedimientos

Representa “de” como equivalencia de multiplicación

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ lo cual resulta $\frac{1}{6}$

Propiedades

De forma tácita utiliza la clausura en $\mathbb{Q}_0^+$.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de la multiplicación de dos fracciones, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Fuente: (Perú, 2012c, p. 44)

Nivel de algebrización 0

El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números fraccionarios específicos, no incluye característica algebraica. Es decir, se realiza la multiplicación como operación con números particulares, debido a ello se le adjudica el nivel 2.

Tarea 2

Esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática. La situación problema se clasifica como proporcionalidad. La tabla 17 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 17. *Configuración epistémica, problema 2 del texto: Matemática 6*

Situación problema

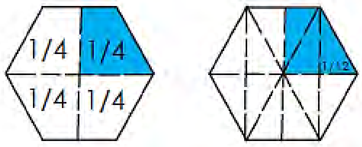
Francisca reparte equitativamente un terrno hexagonal entre sus cuatro hijos. Raúl, uno de ellos, quiere, a su vez, repartir su parte entre sus tres hijos.

¿Qué parte del terreno le toca a cada hijo de Raúl?

Resolución:

-A cada hijo de Francisca le toca un cuarto del terreno.

-¿Qué parte del terreno le toca a cada hijo de Raúl?
Para saber cuánto le toca a cada hijo de Raúl, hay que dividir un cuarto entre tres.



Si dividimos 1/4 entre 3, se obtiene 1/12 ó 1/4 ÷ 3 = 1/(4x3) = 1/12

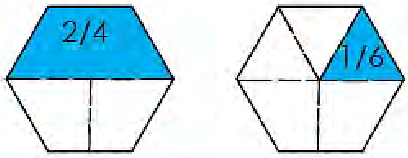
Respuesta

-A cada hijo de Francisca le toca 1/4, que es 3/12 del terreno.
-A cada hijo de Raúl le corresponde 1/12 del terreno.

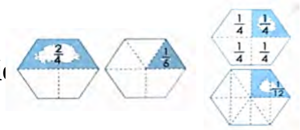
Hacemos otra división a partir del gráfico:

Si fueran dos cuartos divididos entre 3, se tendría como resultado 1/6.

$$\frac{2}{4} \div 3 = \frac{2}{4x3} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{1}{6}$$



Lenguaje

- **Verbal:** Reparte equitativamente un terreno hexagonal, que parte del terreno le toca a cada hijo de Raúl.
- **Simbólico :** $\frac{1}{4}; 3; \frac{1}{12}; \times; \div; =$
- **Icóni** 

Definiciones

Multiplicación de dos números fraccionarios positivos. División de números racionales positivos.

Procedimientos

Dividir la región hexagonal en cuatro partes iguales para luego dividir cada cuarto en tres partes: $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$

Propiedades

Si dividimos dos números naturales no siempre se obtendrá otro natural.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de la división de dos números racionales ,
$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b \times c}$

Fuente: (Perú, 2012c, p. 45)

Nivel de algebrización 0

La solución se apoya en el uso de figuras dividiéndolas en partes iguales. El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números fraccionarios y naturales específicos. No incluye característica algebraica, debido a ello se adjudica un nivel de algebrización 0.

Tarea 3

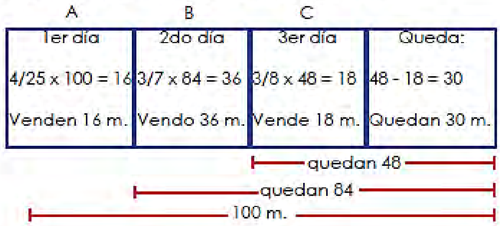
En esta tarea nos encontramos ante un contexto extramatemática. La situación problema está situada en el contexto de la medida. La Tabla 18 nos muestra el análisis realizado.

Tabla 18. *Configuración epistémica, tarea 3 del texto: Matemática 6*

Situación problema

Felipe vende papelina para hacer camisas. De un fardo de 100 m, el primer día vende 4/25 del total , el segundo día vende 3/7 de lo que le quedó y el tercer día 3/8 del resto. ¿Cuánto vendió en los tres días? ¿Cuántos metros de popelina le quedaron?

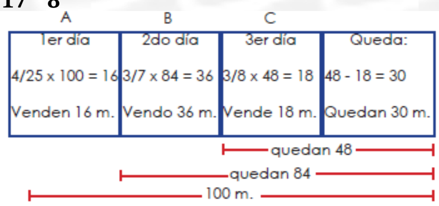
Resolución:
Representamos con un esquema:



Contexto extramatemática.

Lenguaje

- **Verbal:** el primer día vende cuatro veinticincoavos, ¿Cuánto vendió en los tres días?, ¿cuantos metros de popelina le quedaron?
- **Simbólico :** $\frac{4}{25}; \frac{3}{17}; \frac{3}{8}; \times; \div; +; =; (\quad)$
- **Esquema:**



Definiciones

Multiplicación y división en $\mathbb{F}^{+}$.

Procedimientos

Representa un esquema, utiliza la relación parte todo.

El 1er día $\frac{4}{25} \times 100 = 16$, luego se vende 16 metros queda 100-16=84, repitiendo los pasos.

Propiedades

Multiplicación y división en $\mathbb{Q}_0^+$

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de la relación parte todo, hacia algo particular.

Parte $\frac{a}{b}$ todo c luego $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$, queda $c - \frac{a \times c}{b}$

Fuente: (Perú, 2012c, p. 47)

Nivel de algebrización 0

Los $30m$ se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números fraccionarios específicos, se apoya de un esquema que guía las operaciones a realizar. No incluye característica algebraica.

Tarea 4

Con esta tarea nos encontramos ante un problema extramatemática. La situación problema está situada en el contexto de la proporcionalidad. En la Tabla 19 se realiza la configuración epistémica y a la solución de la tarea se le adjudica un nivel de algebrización.

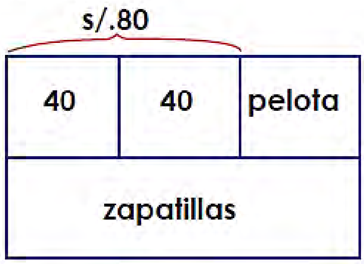
Tabla 19. *Configuración epistémica, tarea 4 del texto: Matemática 6*

Situación problema

Los ahorros de Alfredo

Alfredo gastó la mitad de sus ahorros en un par de zapatillas y un tercio de lo quedaba en un pelota de futbol. Si aún le quedan S/. 80. ¿Cuánto tenia ahorrado?

Resolución



En este problema, utilizaremos como estrategia un gráfico que nos permita ver el problema de manera global. El rectángulo representa lo que Alfredo tenía ahorrado. Sombreamos de celeste la mitad, que es lo que corresponde al par de zapatillas. Lo que queda es la otra mitad. Esa mitad la dividimos en tres partes y sombreamos con color amarillo una parte que corresponde a la pelota de futbol.

Entonces, quedan dos sextos de los ahorros, lo que equivale a S/.80.

Un sexto equivale a S/. 40.¿ Porque dividimos 80÷2?

Respuesta:

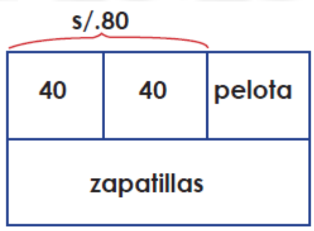
Alfredo tenia ahorrado: 40 ×6=240 nuevos soles.

Este proceso, consiste en utilizar un gráfico para observar globalmente el problema, es muy útil y hay que usarlo cuando las condiciones lo permitan.

Situación Extra matemática sin conexión.

Lenguaje

- **Verbal:** Alfredo gastó la mitad, un tercio de lo que le quedaba
- **Simbólico :** $\times; \div; =; 80; 40; 2; \frac{2}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{2}$
- **Esquemático:**



Definiciones

Definición conjuntita, estructura numérica $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$.

Procedimientos
Determinación de una Heurística. • El rectángulo representa lo que Alfredo tenia ahorrado. • Sombrea de celeste la mitad, que es lo que corresponde al par de zapatillas. • Lo que queda es la otra mitad. Esa mitad la dividimos en tres partes y sombre con color amarillo una parte que corresponde a la pelota de futbol. Entonces, quedan dos sextos de los ahorros, lo que equivale a S/.80. Un sexto equivale a S/. 40
Propiedades
No utiliza propiedades del sistema numérico $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$.
Argumentos
El argumento utilizado es empírico, basado en la observación.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 54)

Nivel de algebrización 0

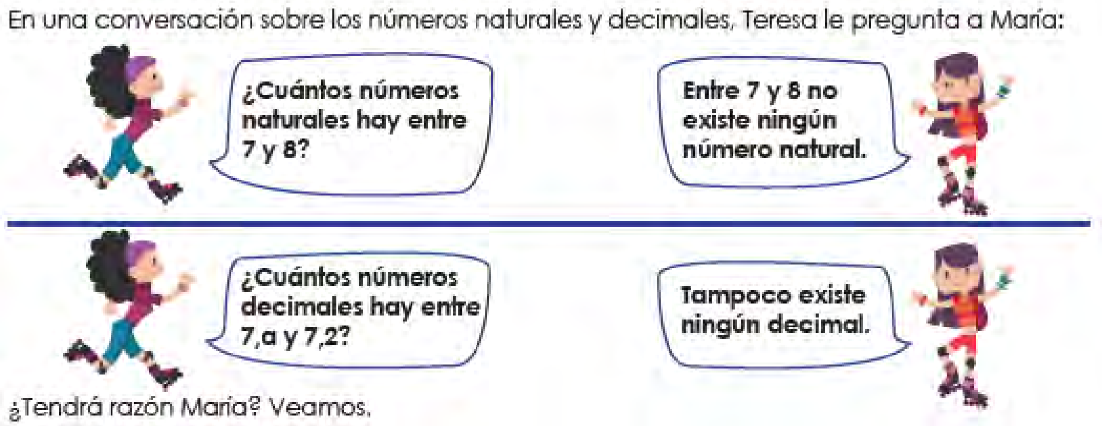
El lenguaje es natural, numérico, esquemático e intervienen símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos. Se realizan operaciones aritméticas sobre números naturales específicos, se apoya de un gráfico que guía las operaciones a realizar. No incluye característica algebraica. Debido a ello se le asigna un nivel 0.

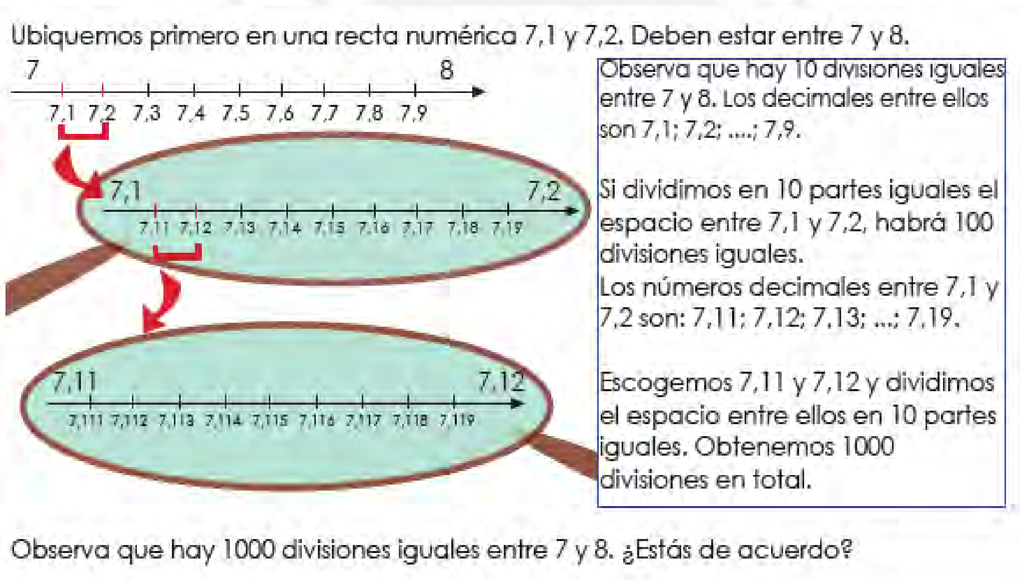
Tarea 5

En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. La situación problema del tipo densidad y orden. En la Tabla 20 se realiza la configuración epistémica y a la solución de la tarea se le adjudica un nivel de algebrización.

Tabla 20. *Configuración epistémica, tarea 5 del texto: Matemática 6*

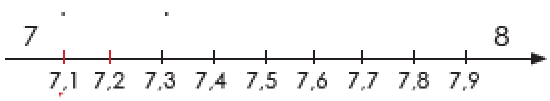
Situación problema





Lenguaje

- **Verbal:** Cuántos números naturales hay entre, no existe ningún número natural, cuantos números decimales hay entre, ubiquemos en la recta numérica.
- **Simbólico :**7; 8; 7,1; 7,2
- **Gráfico:**



Definiciones
Axioma de orden, densidad de los números decimales.
Procedimientos
• Ubica en una recta numérica los números 7 y 8. • Realiza 10 divisiones iguales entre 7 y 8. • En cada división coloca los números $7{,}1$; $7{,}2 \cdots$, hasta $7{,}9$. • Repite el proceso ahora realizando 10 divisiones entre $7{,}1\ y\ 7{,}2$. Obteniendo $7{,}11$; $7{,}12 \ldots$; hasta $7{,}19$. • Nuevamente repite el proceso ahora realizando 10 divisiones entre $7{,}11$ y $7{,}12$. Concluye que entre dos números decimales hay infinitos decimales.
Propiedades
Relación de orden de números naturales y decimales.
Argumentos
El argumento utilizado es empírico, parte de la observación realizada entre 7 y 8.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 70)

Nivel de algebrización 1

Utiliza la relación de orden entre números racionales, generaliza la división de partes entre dos números., debido a ello el nivel adjudicado es 1.

Tarea 6

En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. La situación problema del tipo densidad y orden. En la Tabla 21 se observa el análisis.

Tabla 21. *Configuración epistémica, problema 6 del texto: Matemática 6*

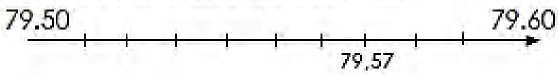
Situación problema

Fíjate en el detalle de los importes de la factura que se representa a continuación.

Compara el subtotal del mes y el total. ¿Qué observas?
Ahora, verifica si se ha redondeado el número decimal 79,57 hasta las décimas, obteniendo como resultado 79,60

DETALLE DE LOS IMPORTES FACTURADOS		
Descripcion	Precio Unitario	Importe
Cargo Fin		2.08
Mant. y Reposición de Conexión		0.79
COnsumo de Energía	0.3004	58.28
Alumbrado Público		4.59
I.G.V.		12.49
Aporte Ley N. 28749	0.0069	1.34
SUBTOTAL DEL MES		79.57
Redondeo		0.03
TOTAL LUZ DEL SUR		79.60

Apóyate en la recta numérica para entender cómo se puede aproximar y redondear el número decimal 79,57 hasta las décimas:



Fíjate que 79,57 está más cerca de 79,60 que de 79,50. Por esta razón, 79,57 se ha redondeado a 79,60.
79,57 se ha redondeado a las centésimas. Sin embargo, 79,60 es igual a 79,6 y 79,57 es igual a 79,6 redondeando a las décimas.

Lenguaje

- **Verbal:** verifica si se ha redondeado el número decimal, compara el subtotal y total.
- **Simbólico :** 79,57 ; 79,60 ; 79,50; 79,57
- **Icónico:**

- **Grafico**

Definiciones

Relación de orden del sistema numérico $(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$.

Procedimientos
• Apoyado en la recta numérica, ubica 79,50 y 79,60, para ello realiza 10 divisiones iguales. • Como 79,57 está más cerca de 79,60 que de 79,50, por ello 79,57 se ha redondeado a 79,60. • Además como 79,60 es igual a 79,6 y 79,57 es igual a 79,6 redondeando a las décimas.
Propiedades
Aproximación de los números decimales.
Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte de la aproximación de los números decimales.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 75)

Nivel de algebrización 1

Utiliza la relación de orden entre números racionales, generaliza la aproximación de números en decimas centésimas; a esta tarea se le adjudica el nivel de acuerdo a las características encontradas.

Tarea 7

En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. La situación problema del tipo producto. El análisis se observa en la Tabla 22.

Tabla 22. *Configuración epistémica, tarea 7 del texto: Matemática 6*

Situación problema

¿Cuánto mide el ancho de un jardin rectangular cuya área es 38,4m^2, si su largo mide 12m?
¿Qué estrategia puedes utilizar para hallar la respuesta? Aplicala a tu cuaderno.
Mario halló la solución de este modo.
Área del rectángulo = l×a

38,4=l × a
l = 38,4 ÷ 4

DU d
38,4 | 12
-36 | 3,2
24 | U d
-24
00

Respuesta:
El ancho del jardín rectangular mide 3,2 m

Lenguaje

- **Verbal:** cuanto mide el ancho de un jardín, su largo mide.
- **Simbólico :** $38{,}4; m^2; 12; m; \times; =; a; l$
- **Icónico:**

Definiciones

Operaciones fundamentales con el conjunto de los decimales.

Procedimientos

- Plantea la ecuación de la forma $ax = b$
- Hace uso del algoritmo de la división.

Propiedades
Multiplicación y división de los números decimales.
Argumentos
El argumento utilizado es deductivo, parte del algoritmo de los números naturales, empleándolo con los números decimales.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 79)

Nivel de algebrización 2

La solución de la tarea se caracteriza porque se verifica la noción de incógnita, el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax = C$, uso de una simbología literal y de la transposición de términos. Debido a ello adjudicación el nivel 2 de algebrización.

Tarea 8

En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. La situación problema es del tipo contexto de la medida. En la Tabla 23 realizamos el análisis.

Tabla 23. *Configuración epistémica, tarea 8 del texto: Matemática 6*

Situación problema

El equipo de gimnasia de la clase de José está formado por 9 niños, ellos disponen de 4,6m de cinta para elaborar distintivos iguales para todos. ¿ Cuánto recibe de cinta cada niño?

-José encontró la respuesta mediante una división así:

U d
4,6 | 9

Multiplico por 10 el dividendo y el divisor.

U d
46 | 90
   | 0
   | U

Como 46 es menor que 90, la primera cifra del cociente es 0.

U dc
460 | 9
450 | 0,51
0100 | Udc
90
010

Luego colocó la coma del número decimal. Escribió 0 centésimas en el dividendo, porque 46 décimas = 460 centésimas, y luego continuó la división como si fuesen números naturales.

Aplica la propiedad de la división: En una división, el cociente no varía si se multiplican l dividendo y el divisor por el mismo número.

Respuesta: Cada niño recibió 0,51m

Lenguaje
• **Verbal:** elaborar distintivos iguales, está formado por nueve niños, cuanto recibe cada niño. • **Simbólico literal :** $9; 4{,}6; m; 9; 90; U; d; c$
Definiciones
Operaciones fundamentales del sistema numérico$(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$.
Procedimientos
Uso del algoritmo de la división del sistema $(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$.
Propiedades
En una división el cociente no varía si se multiplica al dividendo y divisor por un mismo valor.
Argumentos
El argumento utilizado es empírico, parte de las observaciones.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 79)

Nivel de algebrización 1

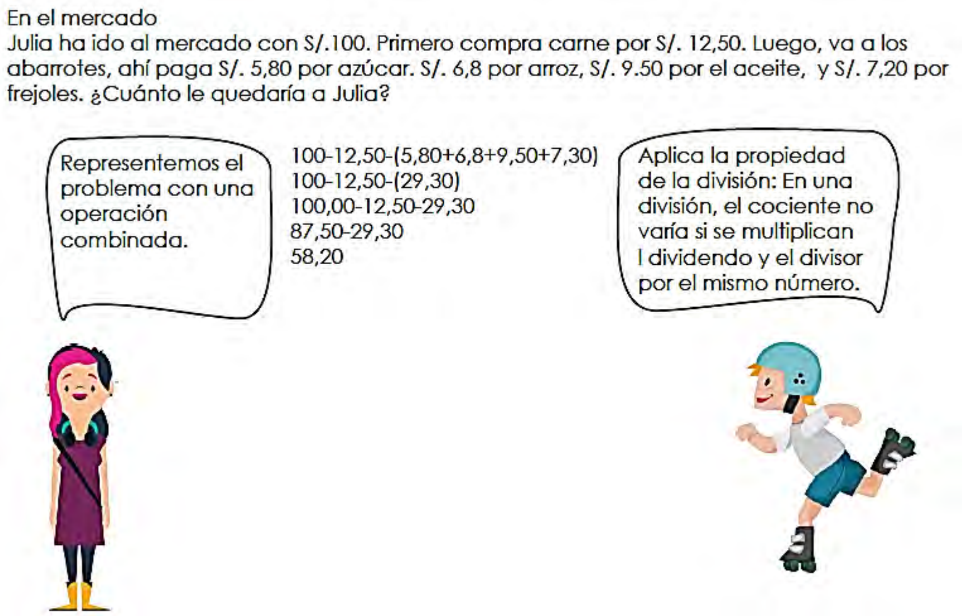
Utiliza propiedades de la división de $\mathbb{N}$, generalizada a los números decimales; realiza equivalencias, razón por la cual adjudicamos el nivel 1.

Tarea 9

En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. La situación problema es del tipo proporcionalidad. El análisis que comprende la configuración epistémica y la elección de un nivel de algebrización a la solución de la tarea está dada en la Tabla 24.

Tabla 24. *Configuración epistémica, tarea 9 del texto: Matemática 6*

Situación problema



Lenguaje

- **Verbal:** Julia ha ido al mercado con cien soles, compra carne por doce soles cincuenta, paga cinco soles ochenta céntimos por azúcar, cuanto le quedaría a julia.
- **Simbólico literal:** $100; 12{,}50; 5{,}80; 6{,}8; 9{,}59; 7{,}20; +; -; (\ )$.

Definiciones

Operaciones fundamentales del sistema numérico $(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$.

Procedimientos

- Opera la adición que está dentro del paréntesis.
- Opera la adición y sustracción de números decimales.

Propiedades

Adición y sustracción de números decimales.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de las operaciones de los números naturales, decimales hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 80)

Nivel de algebrización 0

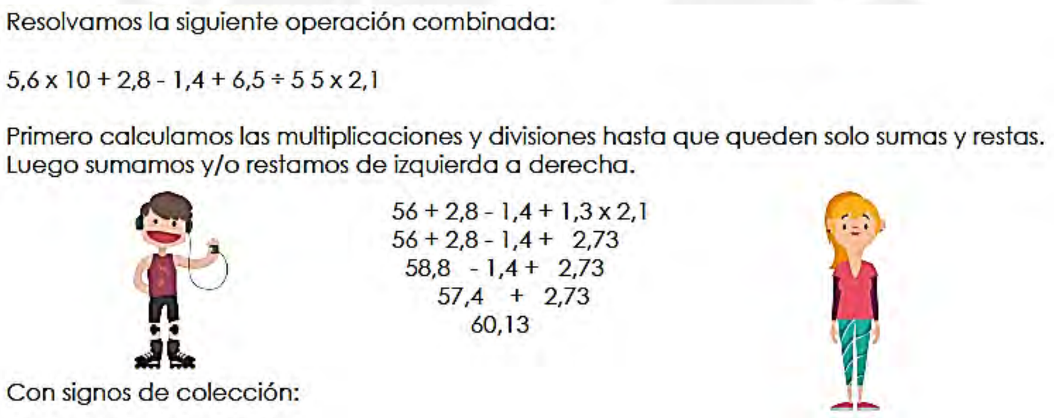
Le adjudicamos el nivel 0, esto debido a que el resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números específicos, no incluye ninguna característica algebraica tales como variables, incógnitas.

Tarea 10

La situación problema es del tipo proporcionalidad. En esta tarea nos encontramos ante un problema intramatemático. El análisis se presenta en la Tabla 25.

Tabla 25. *Configuración epistémica, tarea 10 del texto: Matemática 6*

Situación problema


Resolvamos la siguiente operación combinada:

5,6 x 10 + 2,8 - 1,4 + 6,5 ÷ 5 5 x 2,1

Primero calculamos las multiplicaciones y divisiones hasta que queden solo sumas y restas. Luego sumamos y/o restamos de izquierda a derecha.

56 + 2,8 - 1,4 + 1,3 x 2,1
56 + 2,8 - 1,4 + 2,73
58,8 - 1,4 + 2,73
57,4 + 2,73
60,13

Con signos de colección:

{1,5 + (9,8 - 0,1 x 0,3) - 2,4} + [8,4 x 2,1 - 1,5 ÷ 5]
{1,5 + (9,8 - 0,03) - 2,4} + [17,64 - 0,03]
{1,5 + 9,77 - 2,4} + 17,34
8,87 + 17,34
26,21

Eliminamos los signos de colección de adentro hacia fuera, calculando las operaciones. Luego resolvemos como en el caso anterior,

¿De qué otra forma hubieras planteado la operación combinada?

Lenguaje

- **Verbal:** Resolvamos la siguiente operación combinada.
- **Simbólico :**5,6; 10; 2,8; 1,4; 6,5; 5; 2.1;×;÷; +−; [ ]; { }

Definiciones

Operaciones fundamentales del sistema numérico$(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$

Procedimientos

Determina una heurística:

- Calcula la multiplicación y división hasta que queden solo sumas y restas.
- Sumamos y restamos de izquierda a derecha.
- Eliminamos los signos de colección de adentro hacia fuera
- Operamos los últimos dos números.

Propiedades

Asociativa, conmutativa, distributiva, descomposición de sumandos.

Argumentos

El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: (Perú, 2012c, p. 80)

Nivel de algebrización 0

En este nivel intervienen símbolos que refieren a un valor desconocido, manipulando los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice la relación de los casos particulares. El resultado se obtiene al realizar operaciones aritméticas sobre números específicos, naturales y decimales, no se observa el uso de propiedades del sistema numérico $(\mathbb{Q}_0^+, +, \times, \leq)$. Debido a ello es el nivel adjudicado.

Con las veinte tareas analizadas e identificando los diferentes significados con respecto a las tareas estructurales presentes de los libros de texto del V ciclo, se presenta la configuración epistémica conformada por la articulación de los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que se movilizan al resolver problemas las diferentes situaciones, con un lenguaje particular que contenga los diferentes significados encontrados. En la Tabla 26 mostramos el análisis.

Tabla 26. *Configuración epistémica de las tareas estructurales de los libros de texto del V ciclo*

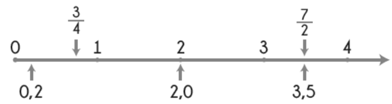
Situaciones problemas	***Respecto a*** $\mathbb{N}$ • Cambio • Igualación • Producto de medidas • Conjetura y validación • Proporcionalidad simple ***Respecto a*** $\mathbb{F}^{+}$ *y* $\mathbb{D}^{+}$ • Proporcionalidad • Densidad y orden • Producto • Contexto de la medida
	Verbal. Expresión numérica, adición, sustracción, multiplicación, división, signos de agrupación, leemos y escribimos números, ordenamos de mayor a menor, valor posicional de cada cifra, propiedades de las operaciones, conmutativa, asociativa, distributiva, factores, sumandos, determinen mentalmente cada producto, exploren con calculadora, descomposición según el valor posicional, ¿qué parte del cilindro está lleno de agua?, fracciones equivalentes, numerador, denominador, partir y repartir una cantidad en partes iguales, representa como número mixto aproximación y redondeo de números decimales, décimas, centésimas, recta numérica, conversión de unidades de medida.

Lenguaje

Gráfico

Esquemas

La recta numérica



Icónico

Simbólico literal

$+; -; \times; \div; \rightarrow, <, >;$ $2{,}5 + 3{,}6 = 6{,}1;$ $? \div \frac{1}{2} = 8;$ $\frac{2}{3} \times ? = 2;$ $a + b = c; a \div b = c;$ $a = \frac{b}{2}, a \times b =, \frac{1}{3} = 0{,}333\cdots$

Definiciones

- *Orden entre fracciones y decimales*
- *Adición, sustracción, multiplicación y división*
- *Clases de equivalencia*

Procedimientos

Determinación de una heurística

Reglas generales que consiguen convertir la tarea en un contexto sencillo.

- *Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.*
- *Usos básicos de la calculadora con decimales y fracciones.*
- *Diversidad de representaciones de un mismo número.*
- *Cálculo mental.*

Algoritmos para las operaciones

- *Algoritmo para la adición y sustracción.*
- *Algoritmo para la multiplicación y división.*
- *Algoritmo para la obtener la fracción generatriz en base 10.*

Propiedades

Argumentos	**Deductivo**	*A partir de regularidades numéricas.*
	Inductivo	*A partir de casos particulares encontrados empíricamente.*

Discusión del análisis de los libros de texto del V ciclo

En este capítulo hemos identificado los significados pretendido y referencial de las tareas estructurales presentes en los libros oficiales del V ciclo, que corresponde a los grados de quinto y sexto grado de educación primaria del Perú, con la finalidad de hacer un contraste entre dichos significados.

En primer lugar, solo hemos identificado que los problemas presentados en los libros de texto hacen uso de los significados respecto a $\mathbb{N}$ de cambio, igualación, producto de medidas, conjetura y validación, y de la proporcionalidad simple; mientras que para $\mathbb{F}^{+}$y $\mathbb{D}^{+}$ identificamos proporcionalidad, densidad y orden, producto y contexto de la medida. En caso de conjetura y validación la solución de la única tarea estuvo asociada a un nivel 0 de algebrización.

En segundo lugar, no se han podido identificar en $\mathbb{N}$ situaciones de comparación, combinación, y en el caso de $\mathbb{F}^{+}$y $\mathbb{D}^{+}$, situaciones de conjeturas y validación. Es decir, para estas últimas tareas que exijan un cierto nivel de exploración, ensayos y la elaboración de relaciones que promueva producir y validar una nueva propiedad. En tercer lugar, tampoco se ha identificado el uso de bases distintas a la decimal, hubiera sido bueno ver operaciones realizadas en otras bases y que el estudiante pueda validar la utilización del sistema decimal. Además podemos indicar que el lenguaje verbal de manera general es coherente, adaptado al grado y edad de los estudiantes, en el caso del gráfico encontramos que hay una relación con lo que se pretende mostrar; e igualmente el uso de iconos solo resultan ser decorativos, no aportan solución alguna mientras que los esquemas si propician la ayuda respectiva en busca de la solución acertada.

De las 10 tareas solo a la solución de una de ellas se le adjudicó un nivel 2 de algebrización en el caso de 6to grado; y para el caso de 5to grado niveles 1 y 0.

Finalmente, la Tabla 27 muestra los significados de las tareas estructurales del V ciclo que componen el significado de referencia y el pretendido.

Tabla 27. *Tareas estructurales del V ciclo que componen el significado de referencia y el pretendido*

	Significados de referencia	***Significados pretendidos***
Tareas estructurales V ciclo	Respecto a $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$	Respecto a $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$
	Adición y Sustracción	Adición y Sustracción
	• Comparación	• -------------
	• Cambio	• Cambio
	• Igualación	• Igualación
	• Combinación	• ----------------
	• Conjeturas y validación	• -----------------
	Multiplicación y División	Multiplicación y División
	• Proporcionalidad simple	• Proporcionalidad simple
	• El producto de medidas	• El producto de medidas
	• Comparación	• Comparación
	• Conjeturas y Validación	• Conjeturas y Validación
	Respecto a $(\mathbb{F}^+, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{D}^+, +, \times, \leq)$	Respecto a $(\mathbb{F}^+, +, \times, \leq)$, $(\mathbb{D}^+, +, \times, \leq)$
	• Proporcionalidad	• Proporcionalidad
	• Contexto de la medida	• Contexto de la medida
	• Densidad y orden	• Densidad y orden
	• Como producto	• Como producto
	• Conjeturas y validación	• --------------------------

Esta tabla muestra un paralelo de la presencia de los significados de las tareas estructurales del V ciclo que se han identificado tanto en el estudio del significado de referencia, como el del identificado en los libros de texto de 5to y 6to grado de educación primaria.

El significado pretendido solo incluye la conjetura y validación con respecto a las operaciones y propiedades en $\mathbb{F}^{+}$ **y** $\mathbb{D}^{+}$, siendo este significado un gran aporte que contribuye a tareas que puedan propiciar el razonamiento algebraico elemental, debido a las características que posee el tipo de situación en mención.

En el siguiente capítulo proponemos cinco tareas que permitirán el estudio de las tareas estructurales en el V ciclo de la EBR, debido a no encontrar tareas que puedan propiciar el RAE.

CAPITULO 4. PROPUESTA DE TAREAS ESTRUCTURALES

En este capítulo, se proponen tareas en base a la situación problema conjeturas validación, con la cual los estudiantes puedan explorar y ensayar para luego elaborar relaciones que permitan reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones. Las cuales propicien un nivel ya consolidado de algebrización (Nivel 3). Al desarrollar situaciones de conjetura validación, nos permitirá reconocer, aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, reconocer patrones, usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones. Debido a ello presentamos las siguientes cuatro tareas.

TAREA 1

Antes de la formulación de la pregunta que los estudiantes deberán abordar, se dialoga en clase con respecto a que sucede si a la fracción $\frac{19}{5}$ se suma un número natural al numerador y se resta el mismo al denominador, ¿qué sucede? ¿Pruebe con otros números naturales? ¿Será cierto que $\frac{19+n}{5-n}$ siempre es número natural?

Comentarios:

Con esta tarea, podemos poner en evidencia si una propiedad puede cumplirse para muchos números, sin ser verdadera para todos.

El estudiante podría proceder de la siguiente manera:

$\frac{19+1}{5-1} = \frac{20}{4} = 5$ es un número natural

$\frac{19+2}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$ es un número natural

$\frac{19+3}{5-3} = \frac{22}{2} = 11$ es un número natural

Y después de este tercer intento podrá decir que efectivamente $\frac{19+n}{5+n}$ da como respuesta un número natural. Por otro lado, qué sucedería si el número fuera 5, entonces obtendría

$\frac{19+5}{5-5}=\frac{24}{0}$, imposible de resolver en $\mathbb{N}$ y el resto de conjuntos. Ahora bien que sucede si el número es mayor a 6, obtenemos:

$\frac{19+6}{5-6}=\frac{25}{-1}=-25$, el resultado ya no es un número natural. Esto quiere decir que solo $\frac{19+n}{5+n}$ serán naturales cuando $n=1;2;3;4$ valores particulares y no para todos.

TAREA 2

En el recuadro se observa que cada rectángulo tiene área siempre igual a 11

Base	Altura	Área
7	---------	11
$^7/_2$	---------	11
$^7/_3$	---------	11
----------		11
⋮	⋮	

¿Cuál es el valor de la altura del rectángulo número 45 de la serie?

Comentario:

Para el caso del primer rectángulo obtenemos $7\times$ **valor numérico de la altura** $=11$, para poder calcular dicho valor no vamos utilizar la transposición de términos sino alguna regla que nos permita calcular el valor de la altura.

El alumno entiende el patrón que siguen las bases $7;\frac{7}{2};\frac{7}{3};\frac{7}{4};\cdots$, luego comprende la equivalencia de $\frac{7}{1}=7$, así puede generalizar e indicar $\frac{7}{1};\frac{7}{2};\frac{7}{3};\frac{7}{4};\cdots\frac{7}{n}$ donde n es la ubicación del rectángulo n en la serie. A continuación observa la siguiente regularidad:

$\frac{7}{1}\times\frac{1}{7}=1$; $\frac{7}{2}\times\frac{2}{7}=1$; $\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}=1$ (El inverso multiplicativo)

De acuerdo a lo observado decide calcular el área de la siguiente manera:

$R1\colon (1)\times 11=\left(\frac{7}{1}\times\frac{1}{7}\right)\times 11=11=\frac{7}{1}\times\left(\frac{1}{7}\times 11\right)$

$R2$: $(1) \times 11 = \left(\frac{7}{2} \times \frac{2}{7}\right) \times 11 = 11 = \frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{7} \times 11\right)$

$R3$: $(1) \times 11 = \left(\frac{7}{3} \times \frac{3}{7}\right) \times 11 = \frac{7}{3} \times \left(\frac{3}{7} \times 11\right)$, con lo cual

$R45$: $(1) \times 11 = \left(\frac{7}{45} \times \frac{45}{7}\right) \times 11 = 11 = \frac{7}{45} \times \left(\frac{45}{7} \times 11\right)$.

El uso de las propiedades asociativas, elemento neutro de la multiplicación y el inverso aditivo están presentes en la construcción de la solución de la tarea. Finalmente el multiplicador que es la altura pedida es $\frac{45}{7} \times 11$. Además puede generalizar e indicar que la altura del rectángulo número n de la serie es: $A(n) = \frac{n}{7} \times 11$

TAREA 3

Observe las siguientes operaciones:

$7 + 9$

$15 + 17$

$21 + 23$

$105 + 107$

$1575 + 1577$

¿Observa alguna regularidad? De ser así, elabore una conjetura y justifique

Comentario:

El estudiante, ante la observación podría indicar que la suma es siempre un número par, por otro lado también manifestaría que los sumandos son siempre números impares, y podría conjeturar que la suma de dos números impares siempre es un número par, lo cual es correcto.

Otro grupo de estudiantes podría realizar las siguientes descomposiciones:

$7 + 9 = 9 + 7 = (8 + 1) + (8 - 1) = 2(8)$

$15 + 17 = 17 + 15 = (16 + 1) + (16 - 1) = 2(16)$

$21 + 23 = 23 + 21 = (22 + 1) + (22 - 1) = 2(22)$, con lo cual se percata que es el doble del número par comprendido entre ellos.

$105 + 107 = 2(106)$

$1575 + 1577 = 2(1576)$

Luego puede decir si tiene $2377 + 2379 = 2(2376)$, con lo cual podría validar en cierta manera la afirmación del primer estudiante y utilizar dicho argumento para el cálculo mental.

Un tercer estudiante podría indicar utilizar para manifestar

$$7 + 9 = 2(8) = 2(2 \times 4) = 4 \times (4)$$

$$15 + 17 = 2(16) = 2(2 \times 8) = 4 \times (8)$$

$$21 + 23 = 2(22) = 2(2 \times 11) = 4 \times (11)$$

$$1575 + 1577 = 2(1576) = 2(2 \times 788) = 4 \times (788)$$

Con esto indicarían que la suma de dos números impares siempre es el resultado de 4 por un numero ya sea par o impar es decir múltiplo de 4.

Esta idea la podemos probar indicando que un número impar se rige bajo la siguiente regla: $S(n) = 2n + 1$ siendo n un número natural, la suma de dos impares consecutivos es dada por $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4(n + 1) = \dot{4}$.

TAREA 4

Por inicio de clases, un determinado colegio realiza un torneo interescolar de pádel (uno contra uno) debido a ello se inscribieron cierta cantidad de estudiantes. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada estudiante juega una vez con cada uno de los estudiantes inscriptos?

Comentario

La tarea exige, en un principio, poner a funcionar un razonamiento inductivo, quiere decir ir de lo particular a lo general, ello genera la elaboración de una conjetura.

Si solo se inscribe un estudiante no habría partido, pues se necesitan de dos para empezar el torneo. Por el contrario, si se inscriben dos estudiantes habrá un solo partido, veamos.

Cantidad de estudiantes	Número de juego	

$1 = \{a\}$	0	0
$2 = \{a; b\}$	ab	1
$3 = \{a; b; c\}$	$ab + ac + bc$	$2 + 1$
$4 = \{a; b; c; d\}$	$ab + ac + ad + bc + bd + cd$	$3 + 2 + 1$
$5 = \{a; b; c; d; e\}$	$ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$	$4 + 3 + 2 + 1$

Ahora el estudiante se percata de lo siguiente:

Con 6 estudiantes el número de partidos está dado por $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, llegando a la conjetura que si hay n estudiantes el número de partidos está dado por:

$N = (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1$ y utilizando la propiedad conmutativa y asociativa establecemos que $N = 1 + 2 + 3 + \cdots (n - 1)$, ahora bien para hacer la suma el profesor no deberá indicar fórmula alguna, el estudiante tiene que obtenerla .

De casos particulares:

$N = 1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) + (2 + 3) = 2 \times 5 = \frac{4}{2} \times 5$

$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = 3 \times 7 = \frac{6}{2} \times 7$

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 = (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) = 4 \times 9 = \frac{8}{2} \times \mathbf{9}$$

Para el caso de los 10 primeros números, un grupo de estudiantes indicaran que es $\frac{10}{2} \times 11$. Con lo cual pueden indicar: $N = 1 + 2 + 3 + \cdots (n - 1) = \frac{(n-1)}{2} \times n$

Para asegurarse que esté correcta la conjetura, se valida usando cantidad de términos impares. Realizamos ahora la configuración epistémica de las cuatro tareas y asociamos a la solución de las mismas un nivel de algebrización. En la tabla 28 muestra tal análisis.

Tabla 28. *Configuración epistémica de las cuatro propuestas de tareas estructurales para el V ciclo*

Situaciones problemas	Tarea 1: Conjetura y validación Tarea 2: Contexto de medida Tarea 3: Conjetura y validación Tarea 4: Conjetura y validación

Lenguaje

Verbal Expresión numérica, adición, sustracción, multiplicación, división, signos de agrupación, propiedades de las operaciones, conmutativa, asociativa, distributiva, fracciones equivalentes, numerador, denominador, conjetura, cardinal de un conjunto, inverso multiplicativo, elemento neutro.

Esquemas

Cantidad de estudiantes	Numero de juego	
$1 = \{a\}$	0	0
$2 = \{a; b\}$	ab	1
$3 = \{a; b; c\}$	$ab + ac + bc$	$2 + 1$
$4 = \{a; b; c; d\}$	$ab + ac + ad + bc + bd + cd$	$3 + 2 + 1$
$5 = \{a; b; c; d; e\}$	$ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$	$4 + 3 + 2 + 1$

Simbólico literal

$+;\ -;\ \times;\ \div;\rightarrow, n \times (n+1);\quad 2{,}5 \pm 3{,}6 = 6{,}1;\quad ?\div \frac{1}{2} = 8;\ \frac{2}{3} \times ? = 2;\quad a \pm b = c; a \div b = c;\ a = \frac{b}{2}, a \times b =, \frac{1}{3} = 0{,}333\cdots \left(\frac{45}{7} \times 11\right)$

Definiciones

- *Orden entre fracciones, decimales y naturales.*
- *Adición, sustracción, multiplicación y división.*
- *Clases de equivalencia.*

Procedimientos

Determinación de una heurística

Reglas generales que consiguen convertir la tarea en un contexto sencillo.

- *Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.*
- *Diversidad de representaciones de un mismo número.*
- *Descomposición del número.*

Algoritmos para las operaciones

- *Algoritmo para la adición y sustracción.*
- *Algoritmo para la multiplicación y división.*
- *Algoritmo para la obtener la fracción generatriz en base 10.*

Propiedades

- ***Asociativa***

		• ***Conmutativa*** • ***Inverso multiplicativo***
Argumentos	**Deductivo**	*A partir de regularidades numéricas.*
	Inductivo	*A partir de casos particulares encontrados empíricamente.* *Formalización del término general encontrado empíricamente.*

NIVEL CONSOLIDADO DE ALGEBRIZACIÓN (NIVEL 3)

En esta etapa Godino et al. (2014) consideran un nivel ya consolidado de algebrización, y lo describen de la siguiente manera:

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. (p.13)

La solución de las cuatro tareas se caracteriza por la noción de generalización. En primer lugar, se nota el funcionamiento de las propiedades, no aparece explícitamente el caso de la ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$, pero se formula patrones, se verifican propiedades y se formulan la ecuaciones. Debido a las características mencionadas se le adjudica un nivel 3 de algebrización.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro interés inicial surge de la problemática de los errores que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones en el nivel secundaria. Basándonos en los estudios de Castellanos y Obando (2009) los cuales manifiestan que estos factores radican en la interpretación incorrecta del lenguaje, las propiedades, definiciones y errores al operar algebraicamente. Es por ello que para afrontar esta situación nos propusimos identificar la configuración epistémica e identificar los niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria, debido a que en los textos escolares se estructuran adecuadamente las experiencias de los docentes y resultados de diferentes investigaciones.

Por otro lado, se valora la pertenencia de algunos aspectos del marco teórico Enfoque Ontosemiotico (EOS) empleados en el desarrollo de nuestro trabajo de investigación tales como el reconocimiento de los seis objetos primarios y la articulación entre ellos (configuración epistémica). Esto nos ha permitido realizar la construcción del significado de referencia de las tareas estructurales. Además, ha permitido identificar y describir los diferentes significados. Asimismo, el modelo del razonamiento algebraico elemental (RAE) desde la perspectiva del EOS, permite otorgar niveles de algebrización atribuido a las soluciones de las tareas que aborda el tema de operaciones y propiedades de los números naturales, fraccionarios y decimales, resaltando el carácter algebraico. También, debemos señalar que para la construcción del significado de referencia de los sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{F}^{+}$ y $\mathbb{Q}_0^{+}$, el método bibliográfico ha sido adecuado para la selección de unidades de análisis en los textos del V ciclo seleccionados. Este nos ha permitido identificar no solo a las operaciones y propiedades de los sistemas numéricos en mención que se desarrollan en cada una de estos libros de texto, sino también las veinte tareas que se resuelven haciendo uso de operaciones y propiedades.

Los cuatro objetivos específicos de nuestra investigación se lograron concretar por medio del análisis epistémico, es decir, el uso de la configuración epistémica como herramienta de análisis y los niveles de algebrización asociados a la solución de las tareas:

Identificar los significados institucionales pretendido y referencial de las tareas estructurales presentes en el V ciclo de educación primaria.

En la sección 3.1 realizamos un estudio de las tareas estructurales con el uso de libros didácticos como es el caso de Estructuras numéricas y su didáctica para maestros de Cid, Godino y Batanero (2003), matemáticos como el Análisis Real de Lages (1997) e investigaciones como las de Castro, Rico y Castro "Estructuras aritméticas elementales y su modelización", entre otros. Luego de identificar los diferentes significados se sintetizó en dos configuraciones epistémicas en las cuales se presenta la identificación del significado institucional de referencia. A su vez, en la sección 3.2 logramos encontrar en los textos matemáticos oficiales del V ciclo (5to y 6to EBR) como son el de Matemática 5 y Matemática 6, además de documentos oficiales como es el caso del Currículo 2016 del Perú, el significado pretendido. Para esto se identificó cómo se presenta nuestro objeto de estudio en los documentos, y con respecto a los libros se realizaron configuraciones epistémicas y la adjudicación de un nivel de algebrización a 10 tareas del libro de Matemática 5 y 10 del de Matemática 6, tras ello se identificó el significado institucional pretendido haciendo uso de la configuración epistémica. Tras la identificación de ambos significados y la contrastación de los mismos, se obtuvo como resultado la ausencia de situaciones problemas como son: la comparación, combinación, conjeturas y validación, siendo esta última con respecto a las tareas estructurales asociadas a las fracciones y decimales. Cabe señalar que la ausencia de esta situación conlleva a que el estudiante no produzca y valide diferentes propiedades.

Analizar las configuraciones epistémicas de las tareas estructurales seleccionadas de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria.

En la sección 3.2, luego de una selección de las tareas estructurales en los libros oficiales ya mencionados, la cual consistió en identificarlas en las unidades de los libros y verificar que reunieran las características de aplicación de las propiedades y operaciones de las estructuras numéricas de los números naturales, fracciones y decimales positivos, además de adjudicar un nivel de algebrización a la solución de las tareas obteniendo así veinte configuraciones epistémicas, esto debido a que realizaron a veinte tareas que reúnen las características ya mencionadas; se realiza un análisis de dichas configuraciones cuyo principal hallazgo fue la ausencia de significados, tal es el caso de la combinación, la cual se caracteriza por tener situaciones problemas donde se hace referencia a la relación que existe entre una colección y dos subcolecciones disjuntas de la misma. Por otro lado, en una sola tarea se adjudicó un nivel de algebrización; esto debido a la característica de ser una ecuación de la forma $ax + b = c$ y entender la división como operación inversa de la multiplicación.

Contrastar las características de los niveles de algebrización con las soluciones de las tareas estructurales mostradas en los textos de matemática oficiales del V ciclo.

Teniendo en cuenta la caracterización que presentan los diferentes niveles de algebrización, se analizaron las soluciones empleadas en las veinte tareas estructurales. Tras esta contrastación en el libro de matemática 5 el máximo nivel alcanzo fue el 1, es decir, una solución donde se emplean las propiedades tales como la asociativa, conmutativa, distributiva es el caso de la tarea 1, la cual consistía en resolver operaciones haciendo uso del cálculo mental, para tal fin las operaciones y propiedades fueron de gran utilidad; mientras que en el caso del libro Matemática 6 el mayor grado alcanzado fue el 2, en este caso la tarea presenta una situación problema que corresponde al producto de medidas, es así que para el cálculo de área al cual se restringe la situación se desarrolló empleando el uso de una ecuación de primer grado y la movilización de propiedades.

Al lograr los objetivos específicos de investigación podemos afirmar que se logró concretar el objetivo general de investigación:

Realizar un análisis epistémico de las tareas estructurales e identificar los niveles de algebrización de las soluciones de las tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo, teniendo en cuenta si estos promueven el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Al lograr el objetivo general de investigación podemos responder la pregunta de investigación:

¿Cuáles son las configuraciones epistémicas asociada a las tareas estructurales y en qué nivel de algebrización se encuentran las soluciones de las tareas estructurales presentes en los textos oficiales de matemática del V ciclo de educación primaria?

Identificamos las diferentes configuraciones epistémicas con situaciones problemas de cambio, igualación, proporcionalidad simple, producto de medidas y conjetura validación en lo que respecta a las tareas estructurales asociadas a los números naturales. En lo que respecta a las tareas asociadas a las fracciones y números decimales encontramos proporcionalidad, contexto de la medida, densidad orden, producto y conjetura validación. Tras el análisis de las tareas presentes en los libros de texto, se encontró que predomina el lenguaje verbal y simbólico, se enfatiza en el uso de propiedades y operaciones fundamentales de los números naturales, fraccionarios positivas y decimales. Además, se consideran situaciones en su gran mayoría extramatemáticas, esto es, situaciones relacionadas con el mundo real, aunque no se establecen conexiones con otras áreas de conocimiento; esto ocurre pese a que el currículo nacional en la educación primaria establece que las áreas deben propiciar la integración de diversos campos del conocimiento, acorde con las etapas del desarrollo del estudiante. Por otro lado, podemos resaltar que los argumentos empleados corresponden al método deductivo y empírico. En términos generales y tras el análisis, se nota la ausencia de situaciones problemas como la de conjetura validación, lo que podría constituir un gran aporte para la generación de tareas estructurales que propicien el razonamiento matemático, en particular el razonamiento algebraico elemental, debido a las características que posee el tipo de situación como es la de producir y validar una nueva propiedad.

REFERENCIAS

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* España: Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Aké, L., Castro, W., & Godino, J. (2015). Niveles del Razonamiento Algebraico elemental en la actividad matemática de maestros en formación: Análisis de unatarea estructural. *Acta latinoamericana de matemática educativa, 28(1).*, 447-458. Obtenido de Acta latinoamericana de matemática educativa, 28(1).

Bruno, A., Martinón, A., & Velázquez, F. (2001). Algunas dificultades en los problemas aditivos. *SUMA*, 83-94.

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los libros de Texto de Matemática en el proceso de la enseñanza: Un análisis de casos comparados.* Tegucigalpa, Honduras: (Tesis de Maestría).Universidad Pedagógico Nacional Francisco Morazán.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* . Portsmouth, NH: Heinemann.

Castellanos, M., & Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento algebraico.* Obtenido de 10° Encuentro colombiano de matemática educativa: http://funes.uniandes.edu.co/710/1/errores.pdf

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructura Aritméticas elementales y su modernización* . Bogotá, D.C.: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* España: (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Cid, E., Godino, J., & Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos. En J. Godino, *Matemáticas para maestros* (págs. 5-143). Granada, España: Proyecto Edumat-Maestros.

Esposito, F. (2012). *La estructura multiplicativa análisis disciplinar y didáctico. Una propuesta pedagógica para los niños del grado segundo de la institución educativa veinte de julio de la ciudad de Acacias (Meta) [Tesis de maestría].* Obtenido de Universidad Nacional de Colombia: http://www.bdigital.unal.edu.co/8531/1/1186706.2012.pdf

Font, T., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática 20.*

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. . *Educación Matemática, agosto,*, 95-128.

GCBA. (2006). *Matemática números racionales* . Buenos Aires : Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Gil, A. c. (2002). *Como Elaborar Projectos de Pesquisa.* Sao Paulo: Atlas.

Godino, J. (2004). *Matemáticas para maestros.* Granada España: Proyecto Edumat-Maestros.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. . *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3)*, 237-284.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. Probabilidad Condicionada: . *Revista de didáctica de la Estadística, (2)*, 1-15.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3)*, 325-35.

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T. F., . . . Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. . *Enseñanza de las Ciencias, 33.1,* , 127 - 150.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En Á. C. A. Estepa, *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 285-294). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32(1)*, 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Obtenido de Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38* , 25-48.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, Rio Claro (SP), 26 (42*, 483-511.

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 26 (1)*, 39-88.

Godino, J., Neto, T., M, W., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica.* Obtenido de Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO): http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

González, S. (2005). *Equivalencias.* Obtenido de http://bit.ly/2mEUDXp

Hefez, A. (1997). *Curso de Álgebra Volumen 1.* Lima, Perú: Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines - IMCA.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución [Tesis de maestría].* Obtenido de

Universidad Nacional de Colombia: http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

Kaput, J. (2002). *Instructional contexts that support students' transition from arithmetic to algebraic reasoning: Elements of tasks and culture.* Las Vegas, NV,: Paper presented at the NCTM Annual Conference Research Pre-session. April 19-21,.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. . *Sense Publishers. Rotterdam*, 11-49.

Konic, P. M. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales.* Perú: Universidad de Granada. Obtenido de Granada: Universidad de Granada.

Lages, E. (1997). *Análisis real, volumen 1.* Lima, Perú: Colección Textos del IMCA.

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media.* Lima Perú: Colección la enseñanza de las Matemáticas del IMCA.

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media.* Lima, Perú: Colección la enseñanza de las Matemáticas del IMCA.

Martínez, J. (2014). *Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización.* Medellín, Colombia: Tesis de maestría. Universidad de Medellín.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología, 9(1)*, 123-146.

Oliveira, A. S. (2015). *Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o quinto ano do ensino fundamental.* Obtenido de Tesis de doctorado en Educación Matemática. PUC-SP. : https://sapientia.pucsp.br/handle/h

Peña, P. (2011). *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar.* Santiago de Chile: Trabajo de grado para optar el título de Magister en Ciencias en Matemáticas. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Instituto Politécnico Nacional. .

Perú. (2012a). *Unidad de Medición de la Calidad. PISA 2012.* Obtenido de Primeros resultados. Informe Nacional del Perú: http://umc.minedu.gob.pe/wpcontent/uploads/2013/12/reporte_pisa_2012.pdf

Perú. (2012b). *Libro de texto Matemática 5.* Lima, Perú: Editorial Nocedal.

Perú. (2012c). *Libro de texto Matemática 6.* Lima, Perú: Editorial Nocedal.

Perú. (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje matemática: números y operaciones*. Obtenido de https://www.sineace.gob.pe/wp-content/uploads/2014/10/MapasProgreso_Matematica_NumerosOperaciones.pdf

Perú. (2015). *Rutas del aprendizaje Versión 2015 ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas?* Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-primaria-matematica-iv.pdf

Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Obtenido de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis. Versión conmemorativa 20º aniversario.

Rincón, P. P. (2011). *Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar.* Santiago de Chile.

Soares, N. C. (2012). *As operações com números naturais e alunos em dificultades do 8º ano do Ensino Fundamental.* . Obtenido de Tesis de maestría en Educación Matemática. PUCSP: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10951

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico su uso en la formación de profesores.* España: En M. Camacho (Presidencia), Investigación en Educación Congreso llevado a cabo en Tenerife, España. Obtenido de En M. Camacho (Presidencia), Investigación en Educación.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos.* . Barcelona: Deusto.

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15(2)*, 122-137.