PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

FENÓMENOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN PRESENTES EN UN TEXTO DE MATEMÁTICA DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

Gissela Cristina Gonzales Paucar

Dirigido por

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

San Miguel, 2017

Dedicatoria

A Dios, por su amor infinito y el regalo maravilloso que me dio por mamá, quien día a día se esforzó por darnos lo mejor; y así lograr nuestros sueños.

Agradecimiento

Agradezco a mi asesora, la profesora Cecilia Gaita, por su inmensa paciencia y orientación en la elaboración de la tesis; al profesor Francisco Ugarte; y la profesora Flor Carrillo, por las sugerencias dadas para la culminación de este trabajo. Agradezco también a la directora de escuela, la profesora Jesús Flores, por su enseñanza y sugerencia. Así como a mis profesores de formación en esta etapa de mi carrera.

A mi amado esposo Edwin, por su amor y apoyo incondicional, y a mis amigos, Galia, Marco, Bernardo, Ronal R. e Iván Pedro S., por estar siempre conmigo.

Resumen

En nuestro trabajo, se realizó una investigación que describe y analiza un texto de sexto grado de educación primaria, el cual es distribuido de forma gratuita por el Ministerio de Educación del Perú. Nuestro interés en particular es saber cómo se presenta el tema de fracciones desarrollado en el texto desde la teoría de la EMR y analizar cómo se abordan los fenómenos que se le asocian tales como parte todo, medida, razón, cociente y operador. Cabe señalar que la teoría de la EMR tiene su propia metodología, que es la fenomenología. Inicialmente, consideraremos como parte del primer capítulo el motivo para realizar esta investigación acerca de la fracción, plantear el problema de investigación y plantear los objetivos. En el segundo capítulo, describimos la teoría que usaremos, que es la EMR. En el tercer capítulo, definimos los conceptos acerca de fracciones propuestos por dos investigaciones que consideramos las más adecuadas con respecto a la fracción. En el cuarto capítulo, se encontrarán descritos los criterios considerados para analizar el texto. Finalmente, en el quinto capítulo, se procederá a analizar el texto para así poder concluir, con respecto a nuestros objetivos y mostrar evidencia de la presencia de los fenómenos que se le asocian a la fracción como lo sugieren los investigadores y finalmente plantear algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

Palabras clave: fracción, Educación Matemática Realista, fenomenología.

Abstract

In this Project some research was conducted to describe and analyze a sixth grade textbook of primary school, which was distributed for free by the Ministry of Education of Peru. Our main interest is to know how the topic related to fractions is presented in that textbook taking the EMR theory into account, and also, to know how to present phenomena such as the whole part function, measurement, ratio, quotient and operator. It should be said that the EMR theory has its own methodology, which is called phenomenology. At the beginning, we consider part of the first chapter the reason to carry out this research. We also describe in detail the investigation conducted into fractions, the approach to the problem is shown and, aims are outlined. In the second chapter, we describe the theory we will use, which is EMR. In the third chapter, we define the concept of fractions proposed by two investigations and which we regard as the most suitable when it comes to fractions. In the fourth chapter, the criteria we use to analyze the textbook can be found. Finally, in the fifth chapter, the whole text is examined in order to reach conclusions regarding our aims and, this way, show evidence of the presence of phenomena associated with fractions as specialists suggest and, finally we make recommendations for future research.

Key words: fraction, Realistic Math Education, phenomenology.

Tabla

Índice de figura

ÍNDICE

Introducción

La fracción es un tema de vital importancia, pues lo encontramos en documentos oficiales como Perú (2015a). Además, los recientes cambios curriculares de la Educación Básica Regular en el año 2015, nos llevan a realizar este estudio, pues estos cambios se basan en la EMR, y que el alumno de sexto grado de educación primaria debe saber cómo se evidencia en el documento Perú (2015b) en el cual las metas de aprendizaje deben ser cumplidas por los estudiantes al concluir el tema.

Por otro lado, se sabe que los textos que el Estado distribuye de forma gratuita fueron impresos en el año 2014. Esto nos hizo pensar que los textos no estarían siendo de ayuda para cumplir las competencias que los documentos oficiales del Ministerio de Educación exigen; por esa razón. Se realizará este estudio en el que se evidencian si los elementos de la EMR forman parte del sustento teórico de dichos cambios propuesto en el año 2015. Desde esa perspectiva, se debe prestar especial atención a que las situaciones que se presentan en los textos correspondan a los fenómenos asociados a los distintos conceptos matemáticos que exige la malla curricular.

.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

Diversas investigaciones reportan las dificultades que aparecen cuando se enseña y aprende el tema de fracciones, como lo afirman los investigadores Quispe (2011), Castaño (2014), Ruiz (2013), Peña (2011), entre otros. Al respecto, la investigadora Matute (2010) encontró algunos factores que dificultan el aprendizaje de dicho concepto, tales como la falta de conocimiento del tema por parte de los profesores, la pobreza conceptual que existe en la práctica escolar y la falta de esquemas que permitan a los estudiantes otorgar distintos significados a las fracciones(p.10). Como consecuencia de estas dificultades, se produce una carencia del conocimiento y dominio del tema así como la rápida recurrencia al uso de calculadoras, hecho que sería positivo siempre que este recurso se empleara solo para comparar resultados; sin embargo, tal como mostró Ruiz (2013), los estudiantes que finalizan la primaria muestran diversos errores en toda representación e interpretación del concepto fracción, al no saber interpretar y dividir correctamente, y al acudir innecesariamente al uso de aparatos electrónicos con calculadoras para obtener resultados (p.60).

Por otro lado, en el 2008, los investigadores D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (Castaño, 2014) señalaron que en el tema de las fracciones se identifican obstáculos epistemológicos que se evidencian en diversos estudios (p.7). Aclaramos que el sentido que usa Brousseau 1998 (Castaño, 2014) con respecto al obstáculo epistemológico esta "relacionado con la naturaleza de los argumentos de la matemática" (p.33).

Por otro lado, el investigador Quispe (2011) da cuenta que el problema respecto a este tema ya se detectaba desde la tercera década del siglo XX. Él señala que en dicha época, en el Perú, existían indicios de dicha problemática y se evidenciaba la preocupación por la forma en la que los textos presentaban esta materia, al no emplearse adecuadamente la definición o debido a un uso inadecuado de la redacción al momento de elaborar los problemas sobre fracciones. Esto fue observado por Encinas (2009) en su obra *Un Ensayo de Escuela Nueva en el Perú*, en la cual afirma:

> ...clásica y artificial división de las operaciones de cálculo en enteros, quebrados y decimales; las tablas de sumar, restar, multiplicar y dividir; las definiciones redactadas en forma ininteligible, los ejemplos expuestos con ambigüedad, todas con una macabra procesión de números que los niños debían retener en la cabeza. (p.121).

Investigaciones, como la realizada por Gómez 2009 (Carrillo, 2012), considera importante analizar un textos, al argumenta que es un principal documento curricular utilizado por el profesor para enseñar matemáticas en el aula, al mismo tiempo, muchas veces suelen ser generadores potenciales de inconsistencias, ambigüedades, omisiones y otros conflictos a la hora de presentar los contenidos matemáticos (p.10); asimismo, Vargas 2001(Carrillo, 2012) "considera que los libros de texto no solo pueden facilitar sino también dificultar o, inclusive, impedir el aprendizaje escolar "(p.10); por último, Perera y Valdemoros 2007 (Flores, 2010) mencionan que las fracciones presenta dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje (p.3).

Por lo expuesto anteriormente, se ha considerado fundamental contar con un texto que presente claramente los conceptos y situaciones de acuerdo con la realidad de un niño de sexto grado de educación primaria. Además, se sabe que el texto que lo distribuye el estado de forma gratuita, debe tener lineamientos de la EMR, pues esta teoría, según el Ministerio de Educación (2015), lo ha considerado el más adecuada para la enseñanza y aprendizaje en el tema fracción.

1.1 Antecedentes

Charalambous y Pitta- Patazi (2005) señalan que, en 1976, Kieren fue el primero en proponer la definición de fracción y afirmar que en esta aparecen varios subconstructos (parte todo, medida, razón, cociente y operador). El autor sostiene que el subconstructo parte todo constituye la semilla de los demás, que son razón, operador, cociente y medida. En 1982, Behr, Lesh, Post y Silver desarrollaron las ideas de Kieren y propusieron un modelo teórico que enlazaba las diferentes interpretaciones de fracción sobre la base de las operaciones de fracción y la solución de problemas, como se muestra en la figura 1.

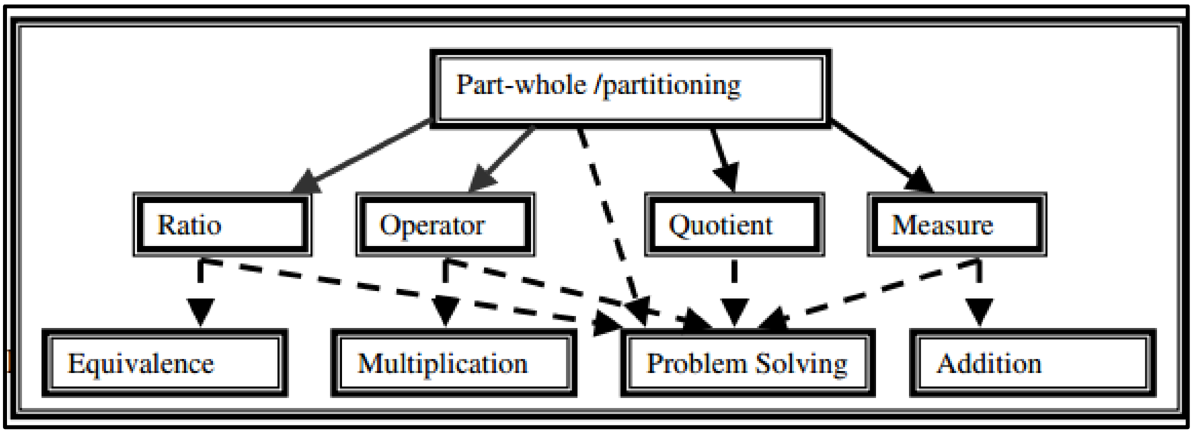


Figura 1. Representación gráfica de los fenómenos asociados con la fracción.

Fuente: Charalambous y Pitta-Patazzi (2005, p. 2)

En la figura 1, el subconstructo parte todo de los números racionales es considerado fundamental para el desarrollo del entendimiento de los otro cuatro subconstructos: el subconstructo razón, que permite entender la noción de equivalencia de las fracciones; el subconstructo operador, que ayuda al desarrollo del entendimiento de la multiplicación; el subconstructo medida, que apoya el desarrollo del entendimiento adición; y el subconstructo cociente, que es considerado como el requisito primordial para resolver problemas que tratan el tema de la fracción.

Para entender cómo se presentan cada uno de estos subconstructos, se han revisado los trabajos de Da Silva (2005) y Streefland (1991). La investigación de Da Silva (2005) detalla cada uno de los cinco subconstructos como detallaremos más adelante mediante ejemplos; además, anticipa las posibles dificultades que podrían presentarse al trabajar con figuras continuas irregulares (bordes irregulares), la presencia de estas figuras podría hacer pensar que hay algún error o no es posible hallar una solución cuando sí se puede determinar mediante la resolución por áreas de forma equitativa.

En el trabajo de Streefland (1991), aunque no se afirma explícitamente, se detalla el subconstructo parte todo. En este trabajo, mediante situaciones de la vida real, explica las cuatro operaciones elementales: la suma, la resta, la multiplicación y la división. Además, en dicho trabajo se observa que los subconstructos operador y cociente se encuentran presentes, aunque tampoco se mencionan explícitamente. Cabe añadir que los subconstructos razón y medida no se encuentran presentes. Así mismo, en esta investigación se aplica la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), en la que los alumnos aprenden la noción de fracción a partir de situaciones reales, es decir, a través de experiencias que tienen un sentido para ellos, por ejemplo, al realizar repartos de forma equitativa en situaciones cotidianas. Esta actividad genera, progresivamente, la exigencia de organizar los diferentes casos que se les presentan, y las diversas formas de resolver los problemas precisan la formalización matemática. Además, esta investigación explica cómo usar operaciones aritméticas que involucran sumas como $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, restas como $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, multiplicaciones como $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ y divisiones como $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$. Para resolver estas operaciones, se trabaja un ejemplo en el que usa una barra de chocolate que contiene seis divisiones iguales. Media barra contiene tres partes, y dos partes representan un tercio. Ahora bien, si decide combinar tres partes y dos partes, afirma que faltaría solo una parte o, dicho de otro modo, un sexto para completar la barra. El autor ha tomado para este ejemplo una barra con seis divisiones porque consideró el MCM de dos y de tres que es seis. Se debe recordar que el MCM es el menor múltiplo común para dos o más números. De este modo, presenta el tema de la fracción mediante una actividad cercana a los alumnos. Esta investigación nos proporcionará una referencia para el estudio del objeto matemático y el empleo del marco teórico (EMR).

Al revisar otras investigaciones relacionadas con el marco teórico de la EMR, consideramos los trabajos de Bressan, Zolkower y Gallego (2004), los cuales sustentamos cada uno de los principios de la EMR. Las investigaciones de Sepúlveda (2013) y Puig (2007) resultan pertinentes, pues tratan acerca del significado de fenómeno y sobre los tipos de fenómenos. Finalmente, de la investigación de Santamaría (2006) tomamos como referencia el análisis de texto que realizó en su investigación; mostrando la forma en la que se abordan los problemas sobre las fracciones en los textos para el nivel primario en Holanda. Los resultados de dicho análisis muestran que los textos emplean situaciones cotidianas de diversos contextos (reales, fantasiosos o matemáticos) y bajo diversos soportes (gráficos, pictóricos y verbales) con la finalidad de que la matemática surja como una matematización de la realidad. Para ello, elaboró una serie de preguntas construidas para los análisis de texto basados en los principios de actividad, realidad, niveles, reinvención guiada, interacción e interrelación o interconexión de la EMR. De esta investigación, consideraremos la secuencia y los criterios, según la línea de investigación de la EMR. Sintetizando lo expuesto anteriormente, resulta pertinente mencionar lo que la investigadora Santamaría (2006) afirma:

> … los textos pueden ayudar a muchos en la práctica docente y el quehacer matemático del alumno. Los textos así se constituyen en un puente entre la teoría curricular y la acción del docente, pero también en este caso entre la escuela y la realidad (p.135).

De otro lado, dado que la EMR asume que el objeto matemático se incorpora en nuestra experiencia real e ingresa nuevamente en nuestra mente a través de fenómenos o medios de organización en los que se crean nuevos conceptos, encontramos similitud entre éste término y el de concepción.

Así, a partir de la revisión realizada, se ha encontrado que tanto la noción de subconstructo, como las de concepción y fenómeno hacen referencia a los distintos significados que deben atribuirse a un concepto, de modo que la articulación de todos ellos contribuya a su comprensión. Por esa razón, cuando en este trabajo nos referimos a los fenómenos asociados a la noción fracción, se considerarán los subconstructos o concepciones parte todo, medida, razón, cociente y operador.

1.2 Justificación

Consideramos importante el aprendizaje del concepto de fracción, porque se encuentra presente dentro de los contenidos que se abordan durante la Educación Básica Regular, también aparece como parte de la descripción de las capacidades que deben ser desarrolladas por los estudiantes en ese nivel de estudio. Esto se puede verificar al revisar documentos oficiales tales como Perú (2015b) y Perú (2014), que son documentos que orientan la labor docente y describen los estándares del aprendizaje. Las fracciones se encuentran dentro de este último documento en la parte de estándares y matrices, en particular, en los apartados denominados “actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad”. El tema de fracciones, pues, resulta de particular interés para nuestra investigación, ya que se encuentra presente en el V ciclo de la Educación Básica Regular, que comprende el sexto grado de primaria (grado que analizaremos), en el cual los estudiantes deberán:

- Interpretar datos y relaciones no explícitas de situaciones que combinan una o más acciones de comparar e igualar dos cantidades de fracciones o porcentajes, y vincularlos con modelos aditivos y multiplicativos, así como determinar en qué otras situaciones son aplicables.
- Describir, en un lenguaje matemático, su comprensión del significado de la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes. El alumno deberá relacionar la idea matemática con gráficos y símbolos.

En Perú (2015b), también podemos percibir la presencia del tema enfocado desde la EMR:

- Actuar y pensar matemáticamente en situaciones de cantidad implica que los estudiantes realicen acciones orientadas a matematizar situaciones al plantear relaciones y expresarlas en modelos de solución aditivos y multiplicativos con fracciones.
- Interpreta datos y relaciones no explícitas de situaciones diversas referidas a una o varias acciones de comparar e igualar dos cantidades con números naturales, expresiones decimales, fraccionarias o porcentajes, y los relaciona con modelos aditivos (comparación e igualación) y multiplicativos.
- Describe, utilizando el lenguaje matemático, su comprensión sobre el significado de la equivalencia entre fracciones.

Por otro lado, otros investigadores señalan que las fracciones están presentes en nuestra vida cotidiana como lo mencionan Caza y Sharpley (1988), Quispe (2011), López (2012) y Walshaw 2007 (Lee, 2011), ellos afirman que las fracciones están presentes desde que somos niños: las utilizamos, por ejemplo, cuando vamos a comprar, cuando necesitamos saber el precio que pagamos por medio litro o medio kilogramo de un producto, para conocer los descuentos que se presentan en porcentajes y para determinar la relación entre la distancia y el tiempo.

Algunos estudiosos profundizan más en sus investigaciones en cuanto a los atributos de objetos que son representados por cantidades que existen en la naturaleza. Acotan que algunos necesitan ser representados bajo la forma de la fracción. Para sus estudios, dividen los objetos en continuos o discretos, como lo menciona Malet 2010 (López 2012). Este afirma que todo cuando es de carácter continuo es medible: la longitud, el área, el volumen, etc. es decir, cuando se puede medir una de sus dimensiones. En caso de que sea de carácter discreto, se puede contar, por ejemplo, la extracción de una cantidad de manzanas del total que hay en la refrigeradora, la extracción de alguna cantidad de panes que hay en una bolsa, etc.

En el Perú, el profesor Encinas 1928 (Quispe, 2011) propuso cómo abordar el tema de fracción. Él decía que la enseñanza debe producirse a partir de los conocimientos que el niño posee como producto de su experiencia en la vida diaria. Recomendó que, para enseñar a sumar, no se debe recurrir a una forma abstracta y aislada de la realidad de la vida cotidiana del niño. Asimismo, afirmó que la resolución de problemas debe ser graduada convenientemente y que se debe buscar que el niño discipline su inteligencia, con la finalidad de que la enseñanza de la matemática sea más útil, amena, y, sobre todo, comprensiva. Notamos que estas ideas son similares a lo que propone Freudenthal (Bressan, 2004) en el aprendizaje de la matemática en el contexto de la vida real, estas ideas se observan también en los cambios en el currículo de la educación peruana como podemos observar en Perú (2015b):

> ..esta visión de la práctica matemática escolar no está motivada solamente por la importancia de su utilidad, sino principalmente por reconocerla como una actividad humana; lo que implica que hacer matemática como proceso es más importante que la matemática como un producto terminado. La educación matemática realista (EMR) fue fundada por el profesor alemán Hans Freudenthal (1905- 1990). (p.12)

También se encuentra evidencia de la influencia de la EMR en los Mapas de progreso (2014), en los cuales se emplean términos como, por ejemplo, "matematiza situaciones" (p.2). Asimismo, se hace uso de este término en el DCN (p.4).

Cabe señalar que en el artículo de Bressan, Zolkower, Gallego (2004) se señala que la EMR, originada en Holanda, las publicaciones sobre este tema han tenido fuerte influencia en las matemáticas en las escuelas holandesas de educación primaria en los años 80. Como consecuencia de este hecho, todos los currículos de Holanda fueron cambiado, por currículos fundamentados en la filosofía EMR. Se han revisado algunos resultados de evaluaciones Pisa y encontramos que, en el 2012, como se menciona en la publicación de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2012), se considera que Holanda se encuentra entre los diez mejores países en cuanto a rendimiento de los alumnos en matemática.

Cabe añadir, la investigación de Gravemeijer y Teruel (2000) al señalar que en la EMR hay evidencia de estudios nacionales de evaluación que muestran en los últimos años de la escuela primaria, los estudiantes holandeses que trabajan con textos modernos poseen, en general, mayor éxito que los alumnos que trabajan con textos tradicionales; además, a excepción de los temas de algoritmos escritos y mediciones como lo señala Bokhove en 1996, a quien le parece razonable atribuir este éxito a la innovación educativa estratégica, introducida en el currículo de las escuelas holandesas (p.9).

1.3 El problema de investigación

Según estudios revisados sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, hemos encontrado coincidencia entre diversos investigadores respecto a ciertas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de este tema. Una de las razones identificadas para explicar esta situación es que, en el material didáctico que se emplea, no se considera la fenomenología de la fracción más idónea para resolver problemas que involucran operaciones de fracción: adición sustracción, multiplicación y división.

Así, nos proponemos estudiar, desde la perspectiva de la EMR, fenómenos asociados con la fracción, que se encuentran presentes en un texto de matemática de sexto grado de educación primaria distribuido por el MINEDU a los alumnos del sexto grado de educación primaria de los colegios públicos peruanos, con la intención de responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué fenómenos asociados con las operaciones con fracciones están presentes en un libro de sexto grado de primaria y qué características tienen las situaciones que aparecen en dicho texto?

Objetivo

Describir y analizar, desde la perspectiva de la EMR, los fenómenos asociados a las fracciones y a las operaciones con fracciones que se encuentran presentes en un texto de matemática de sexto grado de educación primaria del MINEDU.

Objetivos específicos

- Articular los diferentes trabajos realizados sobre fracción y sus operaciones: concepción, sub constructo, fenómeno.
- Definir criterios que permitan identificar las diferentes situaciones presentes en el texto, asociadas a los fenómenos de fracción y sus operaciones.
- Analizar la relación entre las situaciones que involucran los fenómenos asociados a la fracción que aparecen en el texto y los fenómenos que aparecen en las investigaciones sobre fracción.

1.4 Método y procedimientos

El presente trabajo será de tipo cualitativo, porque daremos prioridad al análisis del texto. Para Schoenfeld (2000), existen ciertos estándares para juzgar las teorías, los modelos y los resultados, los cuales muestran algunos criterios que pueden ser usados para evaluar la teoría y los modelos. Para nuestro estudio, usaremos el poder descriptivo, pues esta postura se basa en captar todo lo que se cuenta de manera que parezca fiel al fenómeno que se detalla, describiendo así a la fracción y la EMR, y el poder explicativo; puesto que proporciona explicaciones acerca de cómo funcionan las cosas. En nuestro caso, se darán explicaciones de cómo y por qué funcionan cada uno de los fenómenos asociados a la fracción.

Por otro lado, la EMR tiene su propia metodología que es la fenomenología. Según Sepúlveda (2013), el término fenomenología proviene de:

> …sentido dado por Husserl, Hegel o Heidegger (filósofos). El *noúmeno* es lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y fenómeno proviene también del griego *phainomeno* que significa "lo que aparece". Los fenómenos son las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo del *noúmeno* es el que se califica de real." (p.4).
>
> Desde el punto de vista del análisis fenomenológico, … la fenomenología es el método de análisis de los contenidos matemáticos y análisis fenomenológicos del concepto u objeto matemático que corresponde a la descripción del objeto matemático (p.5).

Existen varios tipos de fenomenología (Puig, 1997), estos son:

Fenomenología o fenomenología pura: intervienen los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto cuyo análisis se realiza. Además, se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado actual, en el momento actual y considerando su uso actual.

Según Gravemeijer y Teruel (2000), se podría imaginar que a la matemática formal le correspondió constituir un proceso de generalización y formalización de procedimientos de resolución de problemas en situaciones específicas y conceptos sobre una variedad de situaciones. El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problemáticas, a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Para encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, podemos basarnos en la comprensión de cómo fueron creados.

Fenomenología didáctica: intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza.

Fenomenología genética: los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices.

Fenomenología histórica: se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos.

Considerando cada tipo de fenomenología definida previamente, elegiremos y utilizaremos para nuestro trabajo la fenomenología pura, puesto que analizaremos la definición de fracción y los fenómenos que aparecen en un texto.

Además, tomaremos en cuenta la fenomenología didáctica porque se trabajarán con los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos.

A continuación, se presentan los pasos a seguir en este trabajo:

Paso 1) Definimos criterios para analizar el texto. Para ello, se tomó como referencia la investigación que elaboró Santamaría (2006), quien realizó el análisis de seis textos holandeses, cuyo foco central fue saber cómo estaban siendo elaborados los textos, teniendo en cuenta la teoría de la EMR para saber si utilizaban las mismas situaciones de un capitulo a otro, etc. Adicionalmente, tomamos como referencia, para la elaboración de criterios, los principios de la teoría de la EMR.

Paso 2) Analizamos el texto seleccionado. Para realizar el análisis de texto, nos basamos en los criterios que se han construido siguiendo el modelo de Santamaría (2006). También utilizamos los criterios de la teoría de la EMR.

Paso 3) Presentamos los resultados. En este punto, describimos los resultados obtenidos al analizar el libro didáctico.

Paso 4) Damos recomendaciones para que el texto se corresponda con un enfoque basado en la EMR.

CAPITULO II: LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

En este trabajo, se asumieron los supuestos de la Educación Matemática Realista, desarrollada inicialmente por Freudenthal, según los artículos de Bressan, Zolkower y Gallego (2004); y Bressan y Gallego (2011). En estos trabajos, se señala que la EMR surgió en la década de los 60, y nos describen los principios en los que se basa esta propuesta como se detalla a continuación:

2.1 Principios de la educación matemática realista

1) **Principio de actividad.** La matemática es pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y pueden aprender mejor aplicándola. Se trata de posibilitar el acceso a los conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución.

2) **Principio de realidad.** El término *realidad* en la EMR proviene de la palabra holandesa *zich realiseren*, que significa "imaginable"; porque el alumno puede extraer conceptos abstractos a partir de la realidad, de allí el término de realista.

   La matemática surge como matematización u organización de la realidad, que incluye más que el mundo perceptible por los sentidos; por ello, el aprendizaje matemático debe originarse no solo sobre la base del mundo real o existente, sino también respecto de lo realizable, imaginable o razonable. Los contextos en la EMR, al ser significativos para el aprendiz, se constituyen en puntos de partida abiertos para la actividad matemática en su sentido más amplio. Además, promueven el uso del sentido común y de las estrategias informales al usarse, en profundidad, en un contexto realista o no dependiendo de la experiencia previa de los alumnos y de su capacidad para imaginar o visualizar.

3) **Principio de reinvención**. La matemática no es otra cosa que una forma de sentido común, sólo que más organizada. Según este principio, para aprender a utilizar dicho sentido, este debe ser sistematizado y organizado. La educación matemática proporciona a los alumnos la oportunidad de ser guiada por el maestro en reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos) (p.6).

4) **Principio de niveles.** Freudenthal completa el proceso de reinvención con lo que Treffers en 1987 (Bressan et al, 2004) denominó matematización progresiva. Los alumnos deben

comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para, luego, evolucionar hacia el análisis de su propia actividad matemática.

Este proceso de matematización fue elaborado por Treffers de 1978 a 1987 y retomado por Freudenthal en 1991 bajo dos formas:

- Matematización horizontal: consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva. En otro documento, también se señala que Treffers (Guillen, 2004) describe a la matematización horizontal como aquella "donde interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo" (p.115).

- Matematización vertical: se produce dentro de la matemática misma e implica el uso de estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización; todo ello con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

Durante este proceso de matematización progresiva, la EMR supone que los alumnos pasarán por distintos niveles de comprensión, los que estarán caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas.

Los niveles por los que pasan los alumnos, según Gravemeijer y Teruel (2000), son: situacional, referencial, generalización y formalización. Estos se encuentran ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva; y no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada. A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno de ellos.

Nivel situacional: es el conocimiento de la situación y las estrategias que son utilizadas en el contexto de la situación misma (generalmente, con recursos de fuera de la escuela).

Nivel referencial: en este nivel aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

Nivel general: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización. Esto implica conectar varias situaciones, reconociendo características similares que permitan que se clasifiquen dentro de un determinado tipo de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto.

Nivel formal: Se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

5) **Principio de interacción:** en la EMR, el aprendizaje de la matemática está considerado como una actividad social, en la cual se discuten las interpretaciones de la situación problema, y en la que se mantiene la clase general junta como una unidad de organización o se considera el trabajo cooperativo para grupos heterogéneos.

6) **Principio de interconexión (estructuración):** la resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige tratar temas que no se pueden separar uno del otro, y supone la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual le otorga una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo distintos modelos y lenguajes; con ello, se consigue una alta coherencia a través del currículo de temas que no se pueden desligar.

2.2 La educación matemática realista y la fenomenología

A continuación, se presentan algunas ideas adicionales consideradas en la EMR.

Para Freudenthal, es importante propiciar una matemática para todos. Argumenta que, si bien no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, es importante que los alumnos aprendan a abordar la matemática y posean criterios para afrontar los problemas que se presentan en situaciones de la vida cotidiana. Se trata de posibilitar el desarrollo de conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones (Bressan y Gallego, 2011). También Van den Heuvel (2003) menciona que en la EMR los estudiantes deben aprender matemática desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos"(p.1)

Para Freudenthal en 1968 (Van den Heuvel, 2003) la EMR se entiende por matematizar "… las matemáticas no eran el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas y buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma"(p.11). En ese sentido, matematizar es un proceso que involucra reconocer características esenciales en situaciones problema, es decir, reconocer procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos; descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos; ejemplificar ideas generales.

Para Van den Heuvel (2003), el adjetivo *realista* concuerda con la forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, como ya dijimos hay que considerar que este término también puede dar lugar a confusión, en otras palabras, el término realista se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problemas que puedan imaginar, estas no necesariamente están restringidas a situaciones de la vida real, sino también al mundo de fantasía como los cuentos de hadas, e, incluso, el mundo formal de las matemáticas, los cuales son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean reales en la mente de los estudiantes.

También en el artículo de Gravemeijer y Teruel (2000) se encuentran algunos términos de la EMR como se describe a continuación:

Fenomenologías de los objetos matemáticos: se afirma que para la adquisición de los conceptos, es necesaria la incorporación de los conceptos a través de materiales concretos. Por ello, en 1983, Freudenthal propone situaciones que deben ser seleccionadas de tal modo que pueden ser organizadas por los objetos matemáticos que se supone que un alumno puede construir. El objetivo es considerar cómo el "objeto pensado" (*nooumenon*) describe y analiza el fenómeno. Plantea que, si la matemática, se concibe como una forma práctica para resolver problemas, sería razonable esperar encontrar los problemas que den relevancia a esos procesos en las aplicaciones actuales

Matemática formal: se torna en un proceso de generalización y formalización de conceptos y procedimientos de resolución de problemas en situaciones específicas sobre una variedad de situaciones.

El objetivo de una investigación fenomenológica es encontrar situaciones-problema de las cuales se puedan generalizar condiciones de abordaje y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Encontrar fenómenos que puedan ser matematizados nos permite comprender cómo fueron creados.

Por otro lado, en el artículo de Puig (1997) encontramos conceptos referidos al significado de la fenomenología:

Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos: son los fenómenos de este mundo que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la propia actividad matemática; también, las acciones que realizamos sobre ellos en tanto se encuentran en el primer término de un par que son los fenómenos y medios de organización.

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática: consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto significa que ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos.

Así también en el artículo de Sepúlveda (2013), se afirma que los conceptos matemáticos no están fuera del campo de la experiencia ni están en mundos diferentes al mundo de los fenómenos que organizan. Así el fenómeno es el objeto de nuestra experiencia matemática.

Hacer fenomenología: es describir cada una de esas series o pares, de esta manera se puede observar que la actividad matemática no permanece en el nivel inferior (fenómeno, medio de organización). El proceso de creación de los objetos matemáticos es un proceso por medio del cual los medios de organización se convierten en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos. Así, los objetos matemáticos se incorporan a nuestra experiencia y entran como fenómenos en una nueva relación (fenómenos, medios de organización) en la que se crean nuevos conceptos matemáticos. Este proceso continúa reiterativamente. Por ejemplo, en el tema fracciones, cuando queremos repartir un terreno entre cinco personas y queremos saber qué es necesario parte del total del terreno le corresponde a dos de ellos. Para resolver este problema es necesario saber, cuáles son las operaciones básicas que se requiere usar y que fenómenos están asociados a la fracción (parte todo, medida, cociente, razón y operador).

CAPITULO III: FENOMENOLOGÍA DE LA FRACCIÓN

Según lo mencionado en el capítulo II de nuestro trabajo, presentamos la investigación de Streefland (1991) por la forma en que aborda la fracción, desde la teoría de la EMR y también, presentamos la investigación de Da Silva (2005) quien reviso el tema asociados a los fenómenos de la fracción. Dejamos en claro que en este trabajo usáremos el término de fenómeno; aunque otros investigadores como la investigadora Da Silva (2005) usa el término concepción y Kieren en 1976(Pitta- Patazi, 2005) la denomino subconstructo.

La razón por la que usamos el término fenómenos es porque pensamos que es el más indicado con respecto a la teoría que usamos. Para justificar el uso de este término nos basamos en Freudenthal en 1983 (castro, 2015) quien dice:

> ..los conceptos y estructuras matemáticas están vinculados con fenómenos y contextos específicos. Nuestra componente "contextos y modos de uso" se refiere a aquellos fenómenos, situaciones o modos de uso que dan sentido al concepto matemático. Los conceptos adquieren significado desde tales fenómenos o cuestiones que provienen del mundo físico, social y cultural (p. 74).

Es por esta razón que usaremos el término fenómeno ya que este le da sentido a los conceptos matemáticos.

3.1 Fenómenos asociados a la fracción

Como ya se mencionó los aportes que nos dará el trabajo de Da Silva (2005), pasamos a definir cada uno de los fenómenos como parte todo, razón, medida, cociente y operador. La investigadora, aclara que considerará la fracción asociada sólo a representaciones de números racionales.

3.1.1 Fenómeno parte todo

Se inicia con la fenomenología parte todo, porque, las primeras tareas utilizadas en la enseñanza de los números fraccionarios, sugieren la movilización de ésta fenomenología y también porque están presentes en la mayoría de las discusiones con respecto a las otras fenomenologías.

El fenómeno parte todo, emerge de la acción de dividir una cantidad continua (longitud, área, volumen etc.) en partes iguales, o de separar en una cantidad discreta (conjunto de objetos) una cantidad de elementos iguales. La representación simbólica de este fenómeno es: $\frac{a}{b}$, la misma que representa a los elementos discretos que se dividen en partes iguales.

En la figura 2, se pueden observar ejemplos en los que la fracción se asocia a cantidades continuas y discretas; además, se muestra su representación gráfica y numérica. La cantidad continua se basa en un rectángulo que se divide en dos partes iguales y está representada por $\frac{1}{2}$. La cantidad discreta toma como referencia seis bolitas, dos de las cuales son de color celeste y representan a la tercera parte del total, el cual está representado por $\frac{1}{3}$.

El sujeto debe de utilizar la concepción parte todo, al relacionar uno o más registros escritos, una o más figuras dividida de cierta manera y viceversa, crear relación pertinente como el ejemplo las presenta en la figura 2.

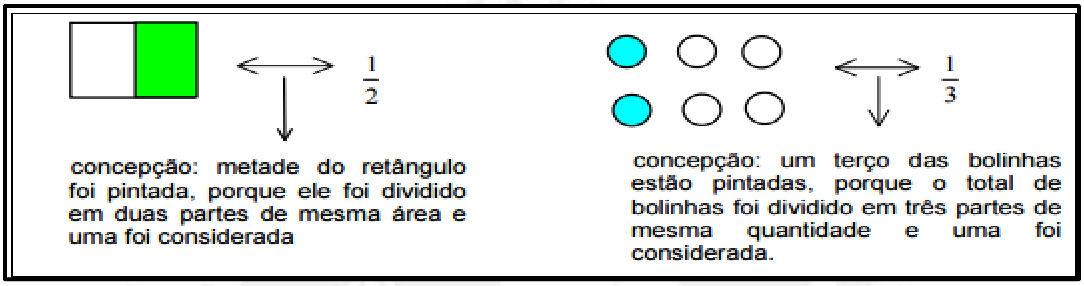


Figura 2. Ejemplos de parte todo con cantidades continuas y discretas

Fuente: Da Silva (2005, p. 106)

La representación $\frac{a}{b}$, describe una partición, en la que el número b indica la cantidad de partes iguales en el que un número entero fue dividido: a esto se le llama denominador. A su vez los denominadores son llamados medios, tercios, cuartos, etc. El número a es llamado numerador y representa la cantidad de partes en las que está siendo considerada la partición. La cantidad a no puede exceder al número b, por ello, obliga al número fraccionario $\frac{a}{b}$ a ser como máximo uno.

En la figura 3, mostramos cada tipo del fenómeno parte todo en el que se proponen tareas en las que se debe señalar qué parte de las figuras sombreadas representan una fracción.

1ª Tipo de la fracción parte todo: representar la fracción que le corresponde a cada figura sombreada

A continuación, se presenta nueve tareas en la que la investigadora da algunas sugerencias para resolverlas.

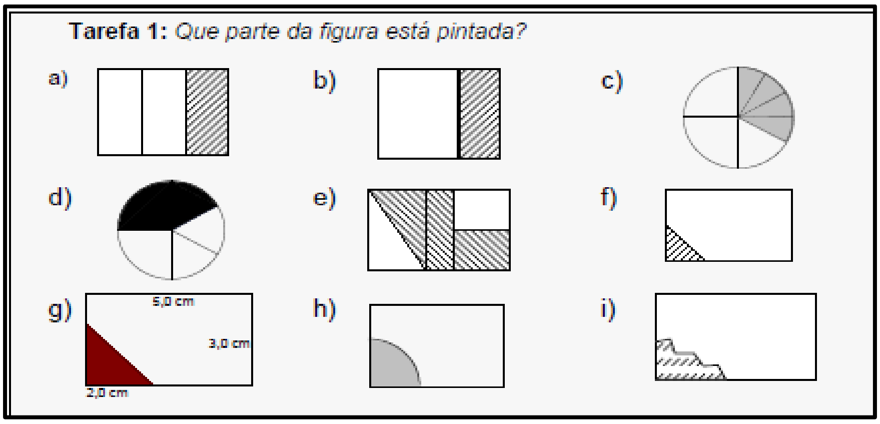


Figura 3. Conteo de figuras en figuras continúas.

Fuente: Da Silva (2005, p.108)

La figura 3 ítem a) representa la dupla que contiene a dos partes, porque se debe contar el total de partes en el que un objeto fue dividido y contar la parte que se ha sombreado. Para esta figura, la representación será $\frac{1}{3}$. A este proceso se le denomina la técnica del doble conteo.

La figura 3 ítem b) supone que hay tres partes iguales, así la parte sombreada representa $\frac{1}{3}$.

En esta figura 3 ítem c), no se ha realizado una división en partes iguales; para eso sería necesario identificar la equivalencia de la parte sombreada y la no sombreada mediante áreas. Considerando esta situación, se concluye que se ha dividido en doce partes y se ha sombreado $\frac{4}{12}$, que es lo mismo que $\frac{1}{3}$. Dicho de otro modo, aunque no se menciona explícitamente, se puede deducir que las cuatro tajadas sombreadas se consideran como una unidad.

Para la figura 3 ítem d), la técnica es un poco más compleja, puesto que el área pintada está constituida por cuartos y sextos. A esta técnica se le asociará la suma de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

Para la figura 3 ítem e), es necesario precisar que, tanto para el triángulo como para el rectángulo el área sea la misma. Si se realizan los cálculos pertinentes, se llega a la conclusión de que el área sombreada representa $\frac{3}{5}$.

En figura 3 ítem f), es necesario dividir en partes iguales los catetos del triángulo rectángulo, en el cual se han encontrado 12 divisiones; por tanto, el área sombreada representa $\frac{1}{12}$.

Para la figura 3 ítem g), la tarea consiste en realizar las mismas operaciones que se hicieron para la anterior, lo que proporciona como resultado $\frac{4}{30}$, para la región sombrada.

Para desarrollar la figura 3 ítem h), es necesario buscar soluciones adecuadas como el área u otras soluciones, para representar la relación parte todo.

Para la figura 3 ítem i), es necesario diseñar mallas cuadriculares, pensamos que elaborar refiere a hacer mallar cuadriculares es tener figuras de triangulo, cuadriláteros entre otras figuras geométricas con la finalidad de hallar el área.

Así, para determinar las fracciones asociadas en las regiones de la figura 3 ítems a), b), c) y d), se moviliza el fenómeno parte todo para cantidades continuas, y se usa para el conteo la técnica del doble conteo. Sin embargo, en las regiones de la figura 3 ítems b), c) y d), el conteo no es directo porque, por tarea, en la región b) se podría contar 1 de 2; y en la región de la figura 3 ítem c) se puede contar 4 de 7, lo que representa una dificultad para el alumno. Por otro lado, en la región de la figura 3 ítem e) se tiene que hacer el conteo buscando la reconstitución de un entero usando un modelo para comparar a este con la figura dada.
En la figura 3 ítems f), g), h) e i) se tiene que buscar reconstruir de forma adecuada para una repartición equitativa con la misma cantidad de la parte sombreada, para así convertirla en un entero y poder representar en una fracción la parte sombreada que le corresponde.

2° Tipo de la fracción parte todo: Identificar un número fraccionario que se debe mostrar en una figura

En la figura 4, se muestran figuras que representan a un entero, la tarea que se les asigna es de pintar la mitad, como se muestra a continuación.

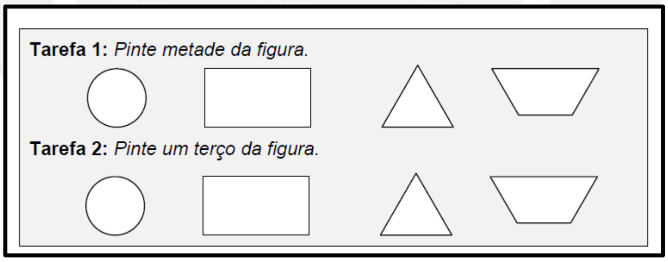


Figura 4. Figuras que se deben dividir en partes iguales.

Fuente: Da Silva (2005, p.112)

El fenómeno parte todo es el que moviliza a este tipo de tarea; permitiendo así la manipulación de un lenguaje verbal a un lenguaje natural, a un lenguaje de registro $\frac{a}{b}$ y un desenvolvimiento técnico, que consiste en dividir la figura que la representa en b partes, luego pintar a partes, esto puede variar según la complejidad. La división de una figura en dos partes de la misma área, puede ser obtenida de manera directa por un único trazo.

3° Tipo de la fracción parte todo: componer un entero y determinar la fracción asociada

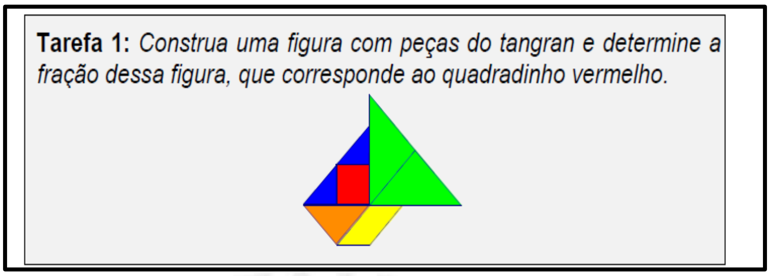


Figura 5. Representación de pieza de un rompecabezas chino**.**

Fuente: Da Silva (2005, p.115)

En este tipo de tarea, es posible crear una figura en base a piezas del tangram, como podemos percibir en la tarea 1, y se le asocia al número que representa la parte pintada de color rojo, pues a partir del ejemplo del cuadrado de la base del tangram, es posible percibir la relación que hay entre las áreas de las piezas, considerando un triángulo menor como la pieza de referencia.

En el caso de la figura 5, la técnica consiste en relacionar la pieza azul, de menor área, con las otras piezas, a fin de concluir que la figura puede ser descompuesta en 16 partes, equivalentes en áreas. A partir de ahí se puede asociar la parte roja de la figura como por ejemplo, un número $\frac{2}{16}$ ò $\frac{1}{8}$.

En la tarea 2, la situación que muestra, se ilustran por el dibujo de doce círculos, conforme a la figura 7, como la parte que le corresponde a cada niño, que el color pintado se le asocia la cantidad de bolitas de un mismo color se le asocia con un valor de fracción, siendo este su representación simbólica, como se muestra a continuación:

Tarefa 2: *Pedro tem 3 bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas. Que parte das bolinhas cada um tem?*

Figura 6. Representación de la fracción

Fuente: Da Silva (2005, p.115)

En este caso, un conjunto de bolitas no posee partes de la misma cantidad porque estas no resultan de la división de un entero, sino un agrupamiento de tres partes con cantidades diferentes de bolitas para la construcción de un entero. Cada bolita representa, entonces, $\frac{1}{12}$ del total y la técnica consiste en agrupar las partes, e identificarlas para contar las cantidades del total de bolitas para repartir a todos los niños; por ello, se representa con un número fraccionario.

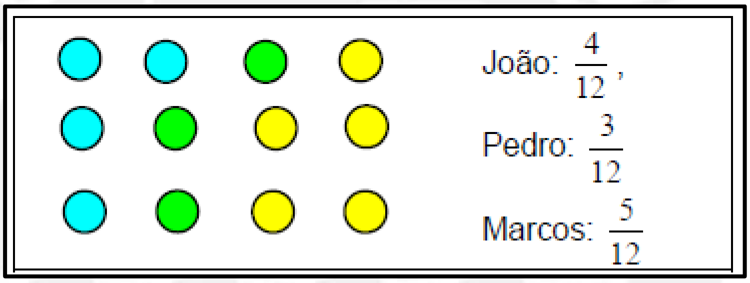


Figura 7. Fenómeno parte todo, caso discreto 3° tipo(a).

Fuente: Da Silva (2005, p.115)

4° Tipo de la fracción parte todo: reconstrucción de entero

De la tarea 2 de cuarto tipo, aquí es necesario utilizar la reversibilidad para resolver esta tarea. Se tienen dos grupos de 1/7 de bolitas equivalen a 12 bolitas, uno de esos grupos equivalen a 6 bolitas y, por lo tanto el entero está formado por 42 bolitas, que corresponden a siete grupos de seis: 7×6 , a diferencia de situación similar con cantidades continuas como se muestra en la figura 8.

Tarefa 2: *Se 2/7 das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?*

Figura 8. Tarea para construir un valor entero

Fuente: Da Silva (2005, p.116)

3.1.2 Fenómeno medida

La medida se asocia con la longitud y tiene la finalidad de percibir los números naturales como resultado de las medidas y así encontrar un nuevo número, cuantificando adecuadamente las longitudes.

Las tareas asociadas al concepto de medida de longitud permiten manipular tres tipos de objetos visuales: la recta numérica o una fracción $\frac{1}{b}$ que representa una subunidad o una fracción $\frac{a}{b}$ que representa el resultado de la medición realizada.

La división de la unidad escogida permite relacionar el fenómeno medida con el de parte todo para posibilitar la división. En la recta numérica, el esquema del fenómeno medida, necesita determinar un punto de partida para la medición. Este puede ser cero o un punto cualquiera.

La fracción $\frac{a}{b}$ permite obtener la longitud de una subunidad $\frac{1}{b}$. El uso de una regla milimetrada para medir nos permite convertir una cantidad discreta en una continua, porque exige como técnica el uso de las nociones de centímetro y milímetro sin dar a conocer sus orígenes como submúltiplo del metro. A continuación, se mostrarán algunas tareas que requieren recurrir al fenómeno medida.

1° Tipo de la fracción medida: Determinar la medida de longitud de un objeto

Este tipo de tarea que piden determinar la medida de la longitud de un objeto, exige la medición de la longitud y puede ser desarrollada, por ejemplo, con tiras de papel, regla milimetrada u otros instrumentos. Esto servirá para comparar la longitud con la que está siendo medido. Esta comparación permitirá la constatación de la necesidad de la división de la unidad escogida para posibilitar la cuantificación de la longitud en juego.

Para resolver este tipo de tarea es ideal resolver utilizando tiras de papel para facilitar la división de la unidad. Es relevante utilizar unidades de medida diferente, para que un alumno pueda percibir la cantidad de la longitud depende de la unidad que se escoge, esto es un número que representa el rango de medida en la que va variar, de acuerdo con la unidad.

2° Tipo de la fracción medida: Determina la medida de un segmento que se divide en partes iguales

En la tarea 1, se representa una unidad dividida en partes iguales y un punto de origen que determina la longitud a ser medida. La tarea consiste en encontrar la longitud de la dupla que contienen las partes, considerando que una unidad puede ser dividida en cinco partes de la misma longitud y que, desde el punto de origen hasta el punto X, existen tres de esas partes. Se concluye de esta manera que la medida solicitada es $\frac{3}{5}$ de la unidad, como se muestra en la figura 9. El fenómeno medida en la tarea de este tipo está asociado directamente al fenómeno parte todo parte todo.

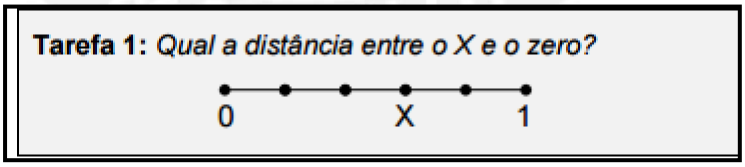


Figura 9. Repartición de una unidad en cinco partes iguales de un segmento.

Fuente: Da Silva (2005, p.119)

La tarea 2, como se muestra a continuación, puede desarrollarse también a partir de la dupla que contiene a dos partes. Se puede percibir que, en un objeto, la unidad fue dividida en ocho partes congruentes y que, entre el punto X y el punto Y, existen tres de esas partes asociadas a la longitud de medida de $\frac{3}{8}$ como se muestra en la figura 10.

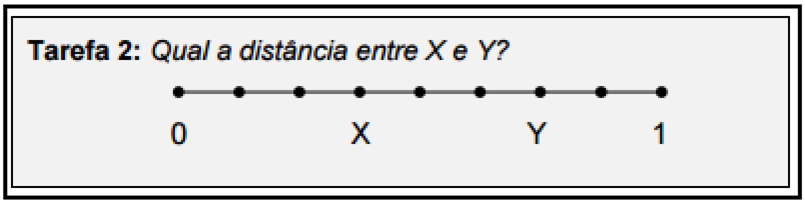


Figura 10. Representación de la fracción de la distancia de X a Y.

Fuente: Da Silva (2005, p.119)

En este tipo de tareas, la variación de un objeto a ser medido en una representación de un esquema permitirá al sujeto movilizar la fenomenología medida de longitudes en tareas más complejas como las que representan esquemas mayores que la unidad, tanto en la forma mixta como impropia; además, permitirá la suma de los números fraccionarios, como se verifica en la figura 11.

En la figura 11, se puede observar que la distancia de 0 a X puede ser representada por $1\frac{3}{5}$; este número es localizado entre 1 y 2, porque, a diferencia de la tarea anterior, este esquema permitirá ordenar la fracción que ayudará más tarde a conceptualizar el conjunto de los números racionales.

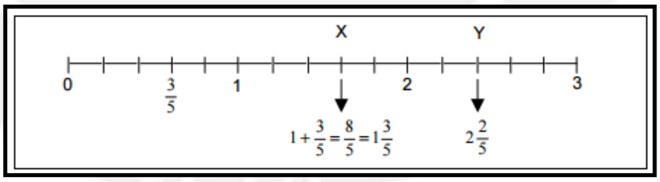


Figura 11. Representación ordenada para la suma de una unidad y la fracción.

Fuente: Da Silva (2005, p.120)

3° Tipo de la fracción medida: determinar la medida de un segmento, no dividido, en partes iguales

En este caso, es necesario dividir convenientemente un entero en partes de la misma medida que posibilitara utilizar una dupla que contenga para encontrar la medida de 0 a X ò de X a Y. como muestra en la figura 12.

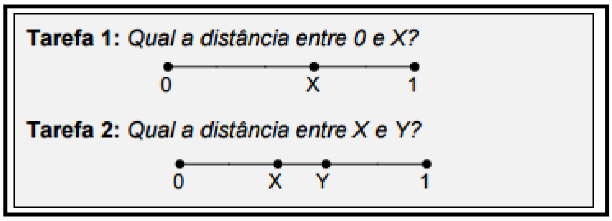


Figura 12. División de los segmentos en partes desiguales

Fuente: Da Silva (2005, p.120)

4° Tipo de la fracción medida: reconstrucción de la unidad

En esta tarea el segmento representa dos tercios, entonces la unidad original fue dividida en tres partes de la misma longitud y estas se representan como dos veces un tercio. Como se muestra en la figura 13.

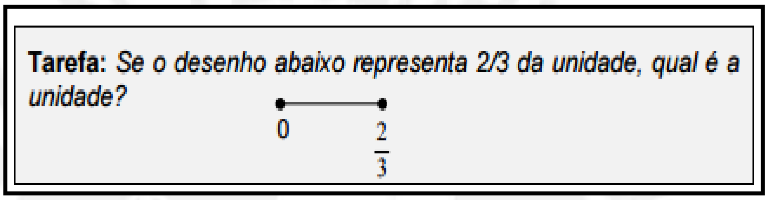


Figura 13. Representación de 2/3 en un segmento.

Fuente: Da Silva (2005, p.120)

Para restaurar la unidad original es necesario dividir el segmento dado en tres partes de la misma medida para identificar $\frac{1}{3}$ y elaborar una nueva figura con tres de esas partes, como se muestra en la figura 14.

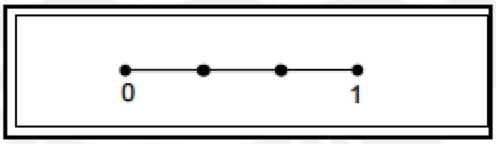


Figura 14. División de una unidad del segmento en tres partes iguales.

Fuente: Da Silva (2005, p.121)

Se sabe que estos tipos de tarea se le asocia al fenómeno medida, constituyendo un ambiente ideal para los números fraccionarios mayores que uno, para presentar la notación mixta de los números y la adición de dos fracciones del mismo denominador.

También permite la introducción de equivalencia entre fracciones, basados en el reconocimiento de que la misma parte pueda recibir nombres diferentes en función de nuevas divisiones de la unidad o familiarización con tales conocimientos, si estos ya fueron trabajados anteriormente.

3.1.3 Fenómeno cociente

Las tareas que movilizan el fenómeno cociente para las fracciones numéricas se encuentran, generalmente, asociadas a la medida $\frac{a}{b}$, que representa el resultado de la distribución entre a y b: a es distribuido en b partes, es decir, a fue dividido en b partes iguales. El fenómeno cociente se diferencia en cuanto a los tipos de tareas asociadas anteriormente, porque el valor de a puede ser menor, mayor o igual a b y porque a y b pueden representar objetos diferentes como, por ejemplo, niños y chocolates.

La operación división constituye la técnica que, por lo general, permite abordarlas tareas del fenómeno cociente al realizar la distribución de a en b partes iguales, y se asocian a las fracciones $\frac{a}{b}$ o a la operación aritmética $a \div b$. En un contexto de cantidades discretas, la técnica es la división de los números naturales. En caso de contextos continuos, la técnica puede ser un plan de acción que puede llevar a la división más compleja, dependiendo de la distribución solicitada.

Se analizan las cantidades continuas y discretas de dos maneras, con los siguientes aspectos de la división:

- Partición: cuando la cantidad de datos son números enteros y el número de piezas en la que se puede dividir esa cantidad también, se solicita el valor de cada parte.
- Por cotas: cuando la cantidad de datos son números enteros y se solicita el valor de cada parte y una cantidad de partes posibles.

1° Tipo de la fracción cociente: Distribuir equitativamente X objetos en un número de Y partes.

Tarea 1: Dividir cinco pizzas entre cuatro personas

En la tarea 1, se requiere dividir cantidades continuas considerando su aspecto de partición. La cantidad, al ser distribuida, será mayor que el número de partes en el que se ha dividido cada pizza como muestra la situación en la figura 15.

Tarefa 1: *Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas.*

Figura 15. Tarea de dividir cinco pizzas entre cuatro personas.

Fuente: Da Silva (2005, p.122)

Para resolver ésta tarea, contamos con dos técnicas, ambas relacionadas con el fenómeno parte todo. En la primera, se divide la pizza en cuatro partes iguales, las que se repartirán a cada persona, destinadas cinco de esas partes, por lo que cada una de ellas recibirá 5/4 de pizza.

La división de cada pizza en cuatro partes iguales llevaría al sujeto a considerar 20 ÷ 5, sea una cantidad discreta o continua. Este proceso se puede realizar con los números naturales. En el segundo caso, se decide distribuir una pizza para cada persona, y la pizza que sobra se divide en cuatro partes iguales que se reparten entre las cuatro personas. Por tanto, se concluye que a cada persona le corresponde $1\frac{1}{4}$ de pizza. Los dos procedimientos pueden ser representados como se muestra en la figura 16.

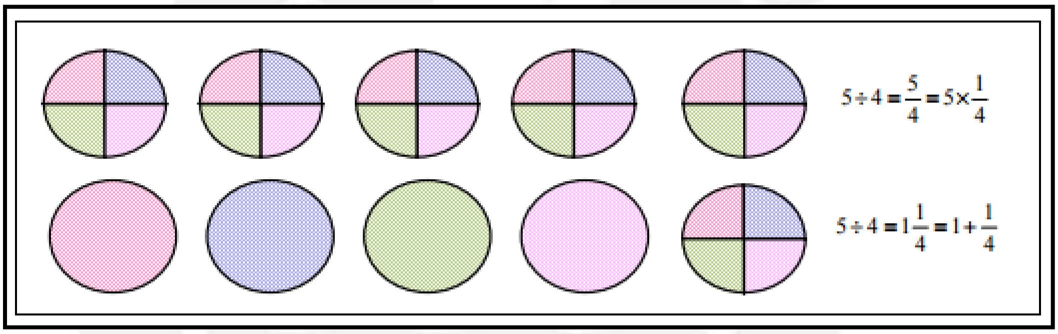


Figura 16. Fenómeno cociente tipo (a).

Fuente: Da Silva (2005, p.122)

Tomamos nota que dicha distribución se refiere, naturalmente, a la representación 5 ÷ 4 y esto a su vez a la representación $\frac{5}{4} = 5 \text{ x } \frac{1}{4}$ o $1\ \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ posibilitando la comprensión de $a \div b = \frac{a}{b}$ en forma de fracción y cociente.

Tarea 2: Distribución de barras de chocolate entre tres individuos

En la tarea 2, trata de cinco niños y tres barras de chocolate; la pregunta es cuanto le correspondería a cada niño, como se observa en la figura 17.

Tarefa 2: *Quanto chocolate cada criança irá receber se distribuirmos igualmente três barras de chocolate entre cinco crianças.*

Figura 17. Fenómeno cociente tipo (a)

Fuente: Da Silva (2005, p.122)

En la tarea 2, se trabaja con cantidades continuas, ya que la cantidad tiene que ser distribuida en partes iguales o menores que el número de piezas y mantener el aspecto partitivo de la división. Es una técnica que se muestra, como en la tarea propuesta, cuando se divide dos o tres chocolates en cinco partes iguales. La respuesta al problema planteado es que cada niño recibirá 3/5 de chocolate o tres parte de 1/5 de chocolate. Una forma de representar tal procedimiento se muestra en la figura 18.

En este caso puede ocurrir que no se recurra a los números naturales, al considerar que $15 \div 5 = 3$. Es necesario considerar la diferencia entre dividir un entero o una unidad en cinco partes iguales, y, de estas, considerar tres partes (fenómeno parte todo) respecto de la situación de dividir tres enteros en cinco partes iguales (fenómeno cociente) aunque los dos casos pueden ser representados por 3/5 como en la siguiente figura 18.

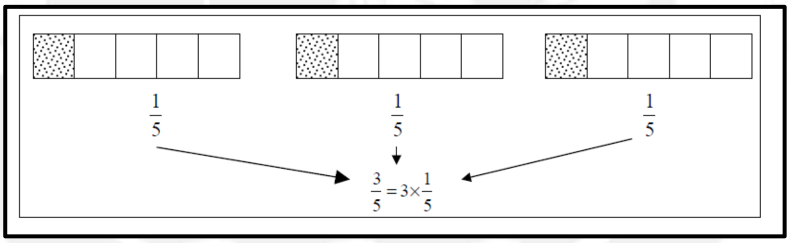


Figura 18. Fenómeno cociente. Caso de cantidades continúas tipo (b).

Fuente: Da Silva (2005, p.123)

Tarea 3: Distribución de doce elementos entre tres

En la tarea 3, trata de tres niños y cinco bolitas, la pregunta es cuántas bolitas recibirá cada niño, como se muestra en la figura 19.

Tarefa 3: *Quantas bolinhas cada menino receberá se distribuirmos igualmente doze bolinhas entre três meninos.*

Figura 19. Tarea de la distribución doce bolitas entre tres niños

Fuente: Da Silva (2005, p.123)

Esta tarea se refiere a la división en su aspecto partitivo para cantidades discretas y resuelto en el conjunto de los números naturales, y como tal, la elección de la cantidad a ser dividida puede llevarnos a una división con un resto. Por lo tanto, la representación $12 \div 3$ puede relacionarse con el fenómeno operador y permitir la comprensión de que $12 \div 3 = \frac{1}{3}$ x $12 = 4$, porque un tercio de doce bolas es igual a 4, operación que, a su vez, se relaciona con el fenómeno parte todo porque un entero (doce bolas) fue dividido en tres grupos de cuatro bolas cada uno.

2° Tipo de la fracción cociente: Distribuir X objetos en partes iguales de acuerdo con una cantidad dada.

En la tarea 1, muestra una situación en donde les piden hallar la cantidad niño que hay, sabiendo que hay tres chocolates y además sabiendo que cada niño debe recibir $\frac{3}{5}$, como se muestra en la figura 20.

Tarefa 1: *Quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos três chocolates, igualmente, de tal forma que cada uma receba 3/5?*

Figura 20. Tarea de la cantidad de niños que debe haber si se tiene tres chocolates y cada niño debe recibir tres quintos.

Fuente: Da Silva (2005, p.123)

En esta tarea 1, la técnica consiste en determinar cuántas veces 3/5 de chocolates son necesarios para completar 3 chocolates, y, con estas condiciones, hacer que cinco niños reciban equitativamente todos los chocolates. Este caso se representa en la siguiente figura 21. La representación proporcionada por esta técnica combina la división de un entero por un número fraccionario: $3 \div \frac{3}{5} = 5$, sin necesidad de explicar técnicas operatorias especiales para tal división. Las variaciones de esta tarea y la elección de los diferentes niveles encaminan a respuestas inmediatas en situaciones futuras.

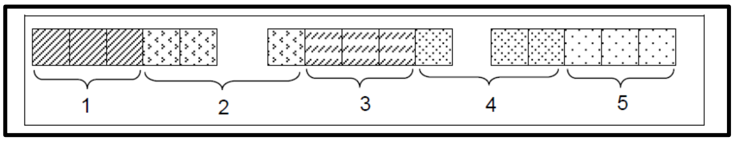


Figura 21. Fenómeno cociente. Caso de cantidades continúas tipo 2(a)

Fuente: Da Silva (2005, p.124)

Ahora bien, la elección de la división de cantidades enteras puede necesitar de una técnica más compleja, por ejemplo, si alteramos la cantidad de chocolates a 4, percibimos que la misma técnica al dividir $\frac{3}{5}$ no permite lograr la distribución requerida, pues 6 niños recibirían una parte determinada, pero sobrarían 2/5 de un chocolate, como podemos ver en la figura 22, como se muestra a continuación.

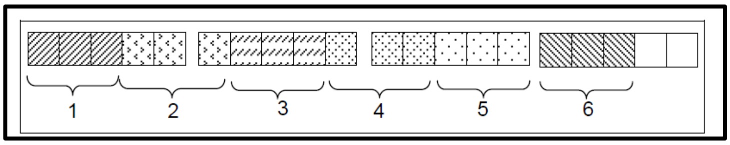


Figura 22. Fenómeno cociente. Caso de cantidades continúas Tipo 2(b).

Fuente: Da Silva (2005, p.124)

En la tarea 2, les pide de cuantas bolitas recibe cada niño si se tiene 15 bolitas y 15 niños, como se muestra en la figura 23.

Tarefa 2: *Quantas bolinhas cada criança recebe se distribuirmos 105 bolinhas de tal forma que cada criança receba 15?*

Figura 23. Tarea asociada al fenómeno cociente

Fuente: Da Silva (2005, p.124)

Tratar con cotas de cantidades discretas es un problema que puede ser resuelto en el campo de los números naturales y requiere del uso de la división. En este caso, la técnica consiste en dividir el número que representa la cantidad de bolas por el número de bolas que corresponde a cada cota, obteniendo $105 \div 15 = 7$.

Como en la anterior vez, el fenómeno parte todo conduce a la comprensión de que un entero (105 bolas) fue dividido en 7 partes de 15 bolas cada una y se relaciona con el fenómeno operador al permitir percibir que $\frac{1}{15} \times 105 = 7 = 105 \div 15$.

3.1.4 Fenómeno razón

La tarea asociada con el fenómeno de razón para fracciones, generalmente, nos permite asociar las nociones de partición con las anteriores, más la idea de comparación de medida entre dos cantidades.

En ese sentido, la representación de $\frac{a}{b}$ o $a \div b$, utilizada para estos casos, siempre se asocia con el fenómeno de cociente. Esta representación se entiende como un índice comparativo si es necesario transmitir la idea de un número.

Así, la representación de la fracción $\frac{2}{3}$ se asocia con el fenómeno razón y no permite la lectura "dos tercios" o "dos a tres". Se entiende como razón " x es a y " y este hecho nos encamina hacia la equivalencia de razones para dar lugar al razonamiento proporcional que, a su vez, exige una representación: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La proporcionalidad es un concepto que contempla la equivalencia de las fracciones numéricas y se caracteriza por ser una herramienta poderosa para la resolución de problemas. La descripción que se presenta al inicio de forma explícita o implícita, determinará la relación en particular de a y b, en la que cualquier cambio en a provocará un cambio en b.

Las tareas que se asocian con el fenómeno razón pueden comparar cantidades de la misma naturaleza o no. Por otro lado, en contextos continuos o discretos, pueden estar asociadas con situaciones de tipo todo todo, cuando se comparan cantidades de dos enteros; parte parte, cuando se comparan las cantidades de dos partes de dos enteros o partes de dos enteros; o de parte todo.

1° Tipo de la fracción razón: determinar una razón

Tarea 1: Determinar la proporción de aumento o reducción entre dos figuras como muestra en la figura 24.

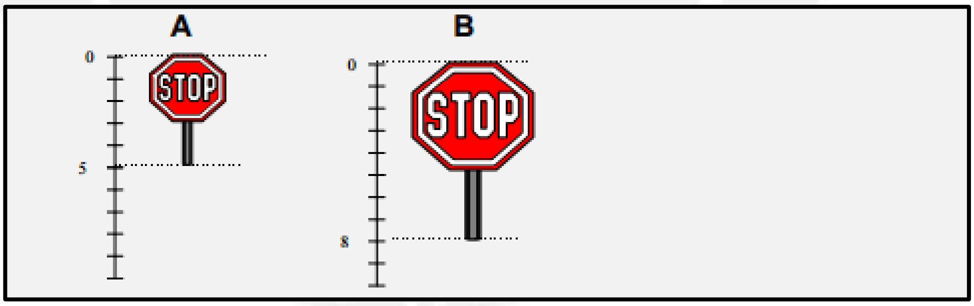


Figura 24. Figuras A y B para hallar una razón

Fuente: Da Silva (2005, p.125)

En la figura 24 se muestra la comparación de dos letreros que son contrastados con una unidad de medida. La figura A tiene cinco partes y la figura B ocho partes, de esta manera se puede considerar una ampliación desde la figura A hacia la figura B, en la que la razón es $\frac{5}{8}$.

Además, se está usando una situación del tipo todo - todo porque se comparan dos valores enteros para reconocerla.

En la tarea 2, piden hallar a que escala fue hecha el video de un objeto, para ello dan como dato le dato la medida de la imagen del video y la realidad, como se muestra en la figura 25.

Tarefa 2: *A miniatura de um objeto tem 12 cm de comprimento. Se na realidade esse objeto tem 60 cm de comprimento, qual foi a escala utilizada?*

Figura 25. La miniatura de un objeto

Fuente: Da Silva (2005, p.126)

En la tarea 4, pide determinar la razón que hay entre tazas de harina y azúcar, como se muestra en la figura 26.

Tarefa 4: *Determinar a razão entre açúcar e farinha numa receita de bolo que utiliza duas xícaras de açúcar para três de farinha.*

Figura 26. Razón que hay entre el azúcar y la harina

Fuente: Da Silva (2005, p.126)

Como se puede analizar en esta tarea 4, se trata de cantidades continuas de la misma naturaleza, caracterizando una situación de tipo parte todo, la comparación efectuada de esos tipos de tareas, nos permite movilizar los números fraccionarios " dos tercios" en el fenómeno cociente, pues la división 2 de 3 no tiene sentido. Por lo tanto es razonable proporcionar en aumentar o reducir la harina.

En la tarea 5, les muestra una situación que se prepara refresco para el que se tiene 3 tazas de jugo para 12 tazas de agua. Se solicita hallar la razón que hay entre el jugo y el agua, como muestra en la figura 27.

Tarefa 5: *Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco para 12 copos de água, qual a razão de suco para água?*

Figura 27. Razón entre el sobre de refresco y vasos de agua

Fuente: Da Silva (2005, p.126)

En esta tarea, existe una situación parte con cantidades continuas de la misma naturaleza, porque las tazas de jugo y de agua son parte de un total del líquido contenido. Con esta tarea, también aparece el número fraccionario $\frac{1}{4}$ como parte todo, pues puede afirmarse que un cuarto de jarra de refresco es de jugo.

En la tarea 10, se pide determinar la razón que hay entre la cantidad de triángulos y círculos, como se muestra en la figura 28.

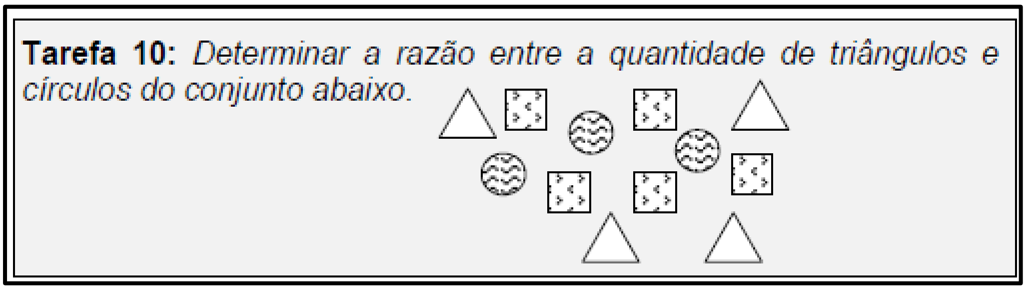


Figura 28. Razón entre triángulos y círculo

Fuente: Da Silva (2005, p.128)

En esta tarea 10, se puede notar que están presentes conjuntos de objetos diferentes, y se pide la razón de tipo parte - parte, que se resuelve sobre la base de la movilización de conocimientos de geometría para identificar figuras como: triangulo, cuadrado y círculo, para eso procedemos al conteo de figuras y a determinar la razón de $\frac{4}{3}$, entendemos que existe una razón de "4 triángulos para 3 círculos".

En la tarea 11, se muestra una situación en la que se pregunta la razón que hay entre la cantidad de niños y niñas de una clase que posee 15 niños y 25 niñas, como se muestra en la figura 29.

Tarefa 11: *Qual a razão entre a quantidade de meninos e meninas de uma classe que possui 15 meninos e 25 meninas?*

Figura 29. Razón entre el sobre de refresco y vasos de agua

Fuente: Da Silva (2005, p.129)

La tarea 11 determina implícitamente un orden, pues un número que representa la cantidad de niños deberá ser el numerador y el número que representa la cantidad de niñas será el denominador.

Así, la razón buscada será de $\frac{15}{25}$ y, en seguida, utilizamos la técnica de simplificación. Esto permitirá encontrar una fracción irreductible de $\frac{3}{5}$ y comprender que para cada tres niños de clase hay cinco niñas. La elección de otros datos numéricos para esta tarea permitirá mostrar la equivalencia entre razones, al considerar, por ejemplo, 18 niños y 30 niñas.

2° Tipo de la fracción razón: determinar un valor desconocido

En la tarea 1, se debe encontrar la relación que hay entre la distancia y el tiempo, como se muestra en la situación de la figura 30.

> **Tarefa 1:** *Se um carro percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos, quanto demorará para percorrer um trajeto de 9 km?*

Figura 30. En esta situación deberá hallar el tiempo

Fuente: Da Silva (2005, p.131)

La tarea se caracteriza por presentar tres datos y pedir que se halle un cuarto dato. No pide realmente la movilización del fenómeno cociente, ni el de razón, puesto que se puede resolverse directamente con la relación de proporcionalidad y la percepción de que, para recorrer el triple de la distancia, se tendrá que utilizar el triple del tiempo. Esta técnica se notará más claramente con la representación del esquema, que se aprecia en la figura 31, en el que se evita el uso algebraico que es común en esta técnica. Al recibir el nombre de regla de tres, se puede también realizar por alguna otra solución del algebra.

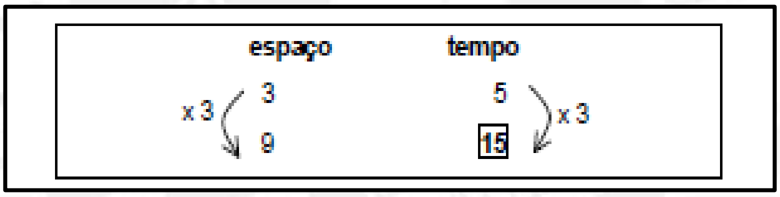


Figura 31. Fenómeno razón para un caso continuo, cantidades de naturaleza diferente

Fuente: Da Silva (2005, p.131)

Además, creemos que una de los elementos que evita la representación algebraica la constituye la siguiente formulación:

$$\frac{3}{5} = \frac{3k}{5k} = \frac{9}{15} = \frac{3\times 3}{5\times 3}.$$

3° Tipo de la fracción razón: comparar razones

En esta tarea, te piden la comparación de dos números fraccionarios, como lo muestra en la figura 32.

Tarefa: *Um carro A percorre um trajeto de 3 km em 5 minutos. Um carro B percorre um trajeto de 4 km em 6 minutos. Qual carro tem maior velocidade?*

Figura 32. Fenómeno razón: caso continuo reducción de un cuadrado

Fuente: Da Silva (2005, p.132)

En esta tarea, se emplean cantidades continuas de naturaleza diferente, y se utiliza el fenómeno razón para determinar la velocidad de ambos automóviles. Las velocidades de los automóviles A y B son $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{6}$ respectivamente. Para reconocer que automóvil tiene mayor velocidad se deben comparar dos razones, calculando razones equivalentes a las obtenidas, pero con el mismo denominador.

3.1.5 Fenómeno operador

La tarea que se solicita al movilizar el fenómeno operador de la fracción $\frac{a}{b}$ se manipula como "algo que actúa sobre una cantidad" y la modifica para producir una nueva cantidad. Este proceso puede ser entendido como la acción de un operador fraccionario que modifica un estado inicial y produce un estado final.

Para llevar a cabo estas tareas, la fracción $\frac{a}{b}$ es eficazmente manipulada como número y facilita la comprensión de la operación multiplicación entre fracciones.

1° Tipo de la fracción operador: transformar una cantidad por la acción de un operador fracción

En la Tarea 1, piden la construcción de un cuadrado más pequeño, como lo muestra en la figura 33.

Tarefa 1: *Construir um quadrado cujo lado tenha 2/3 da medida do lado do quadrado dado.*

Figura 33. Construcción de un nuevo cuadrado de las dos tercias partes del cuadrado original

Fuente: Da Silva (2005, p.134)

En esta actividad está presente el operador fracción de una cantidad continua: la medida de uno de los lados de un cuadrado es 9. La técnica para realizar esta actividad parte del dato de que el lado de un cuadrado es 9 y debe ser transformado por el operador $\frac{2}{3}$, con lo cual se tendrá en un nuevo cuadrado cuyo lado tendrá $\frac{2}{3}$ de 9.

En la figura 34, se muestra el uso del fenómeno operador para el caso de áreas, es decir, un caso continuo.

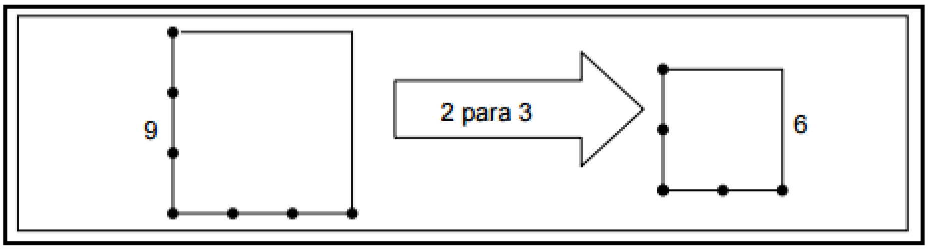


Figura 34. Fenómeno operador: caso continuo reducción de un cuadrado

Fuente: Da Silva (2005, p.134)

Para realizar esta operación, tomamos como referencia la noción parte todo, de tal manera que se pueda dividir el lado del cuadrado en tres partes de la misma medida. Cabe añadir que se deben considerar dos de esas partes para obtener la medida 6 del lado del nuevo cuadrado. Así, existen dos posibilidades para construir un nuevo cuadrado: utilizar la función de medida de dos lados consecutivos o construir un nuevo cuadrado basado en la medida del cuadrado anterior sobre la base de la medida encontrada, como podemos ver en la figura 34.

Esta técnica encamina la percepción de un orden operatorio que caracteriza movilizar la concepción operador, en que realiza primero la división de 9 entre 3, posteriormente se multiplica el resultado del cociente por tres, tres por 2 obteniendo la medida buscada de 6. La acción de operar la fracción de la figura que puede ser relacionada a estados iniciales y finales, como lo esquematiza en la figura 35.

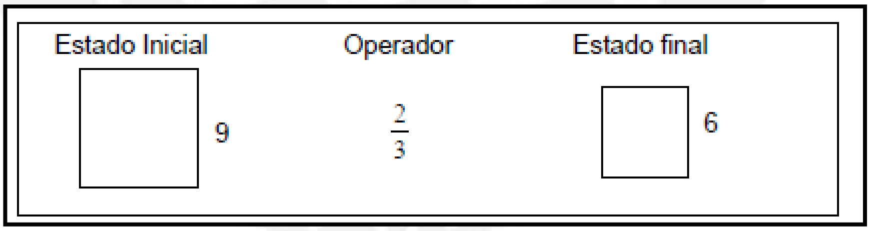


Figura 35. Fenómeno operador: Caso continua

Fuente: Da Silva (2005, p.135).

Otra forma es asociar el fenómeno razón que se presenta, la tarea al hacer corresponder para tres unidades de figura inicial dos unidades de la figura final. De esta manera, se utiliza el pensamiento proporcional o equivalencia de razones, representada por: $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.

Las tareas que movilizan al fenómeno operador usan cantidades continuas y deben basarse en el conocimiento de que el operador $\frac{a}{b}$ genera una reducción cuando a < b y una ampliación cuando a > b.

Además, por analogía y por conocimiento de los números naturales, la multiplicación de fracciones puede ser abordada por expresiones del tipo “dos veces cinco” y puede ser representada como 2x5, de modo tal que la expresión “dos veces un quinto” sería representada bajo la forma $2 \times \frac{1}{5}$ con la ayuda de los otros fenómenos, como parte todo o medida puede ser entendida como $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

2° Tipo de la fracción operador: transformar cantidades por la acción de dos operadores fraccionarios

En la tarea 1, les piden que determine la mitad de un quinto del segmento dado, como se muestra en la figura 36.

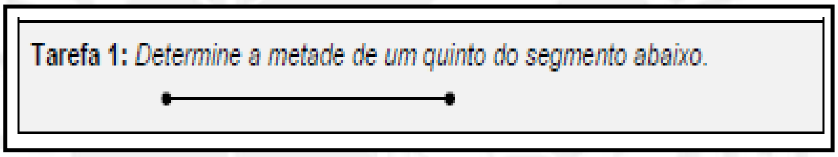


Figura 36. Determinación de una medida a partir de un segmento

Fuente: Da Silva (2005, p.126)

En este caso la acción de un operador fraccionario se utiliza con el fenómeno parte todo de las fracciones. Para resolver la tarea 1, es necesario asociar el fenómeno parte todo a la medida, para así dividir un segmento en cinco partes iguales. Al seguir dividiendo, una de esas partes es dos y se puede concluir que la parte pintada corresponde a $\frac{1}{10}$. Para solucionar este problema, se lo puede asociar con la operación de la multiplicación, registrada por $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

En la tarea 3, les pide pintar una parte de la fracción que esta sombreada, como muestra en la figura 37.

Tarefa 3: *Pinte 1/6 da seção pintada do disco, que fração do disco você pintou?*

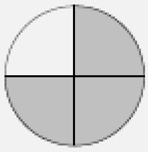


Figura 37. Disco cuya sexta parte será pintado

Fuente: Da Silva (2005, p.136)

En este caso se usa el fenómeno parte todo para dividir la parte del disco que está pintada en seis partes y, de esta manera, cada parte que fue pintada representará 1/8 de disco. Esto se representa con la operación $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$.

3° Tipo de la fracción operador: determinar el operador que realiza una cierta transformación

En esta tarea, trata de una receta que le dan, donde la persona tiene una taza de leche, pero le piden 3, como lo muestra en la figura 38.

Tarefa: *Tenho 1 copo de leite, mas minha receita pede 3. Por quanto devo reduzir os outros ingredientes da receita para poder usar 1 copo em vez de 3 de leite?*

Figura 38. Situación de recomendación médica.

Fuente: Da Silva (2005, p.137)

Usando cantidades continuas, la tarea solicita movilizar la técnica que consiste en comparar las cantidades a recibir, ya que, si tenemos una copa y la receta requiere de tres, los otros ingredientes deben ser reducidos usando el operador 1/3.

4° Tipo de la fracción operador: comparar operadores

La tarea puede consistir en dejar celdas de la tabla en blanco para ser llenadas por los alumnos. En la figura 39, se usa el fenómeno operador, específicamente la equivalencia entre operadores para, así, reconocer infinitos tipos de operadores que producen el mismo resultado final al aplicársele a un mismo valor inicial.

Estado Inicial	Operador	Estado Final
12	$\frac{2}{3}$	8
12	$\frac{4}{6}$	8
12	$\frac{8}{12}$	8

Figura 39. Cuadro de operadores equivalentes

Fuente: Da Silva (2005, p. 138)

5° Tipo de la fracción operador: comparar estados iniciales y finales

La tarea descrita en la figura 40, muestra el concepto de equivalencia cuando se aplica un operador a valores iniciales diferentes, y se produce una transformación y resultados finales también diferentes.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\frac{2}{3}$	8
15	$\frac{2}{3}$	10
24	$\frac{2}{3}$	16

Figura 40. Cuadro de equivalencia de estados

Fuente: Da Silva (2005, p. 139)

En el cuadro se muestra que el operador $\frac{2}{3}$ actúa sobre los valores iniciales: 12, 15 y 24, y produce valores finales: 8, 10 y 16 respectivamente, lo que nos permite comprobar el valor de la equivalencia:

$\frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$, como ocurre con el operador $\frac{2}{3}$.

6° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que sea el inverso de otro

Existe un operador llamado operador inverso respecto de otro que realiza la acción de obtener un número y luego volver al valor inicial como se muestra en la figura 41.

Operador inverso.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/Inicial	Operador	Estado Final
12	2/3	8	3/2	12

Figura 41. Operador inverso.

Fuente: Da Silva (2005, p. 139)

En la figura 41, se muestra la acción del operador 2/3 sobre el valor inicial 12 y se obtiene 8. Después, al valor 8 se le aplica el operador inverso 3/2 y se obtiene el valor 12.

Se puede generalizar enunciado que un operador $\frac{a}{b}$ provoca un determinado efecto a un valor inicial; mientras que el operador $\frac{b}{a}$, aplicado a este estado final, permite el retorno al valor inicial.

7° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que no modifica el valor inicial

Los valores iniciales y finales no cambian si se usan los operadores fraccionarios 2/2, 3/3, etc., porque estos valores son equivalentes al valor 1 que es el elemento neutro de la multiplicación.

8° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que sustituya a varios operadores

Se pueden elaborar tareas en los que, al usar el fenómeno operador se pueda reemplazar dos operadores y se obtenga el mismo valor final a partir de un valor inicial. En la figura 42, se muestra la composición de dos operadores que permitirán obtener un valor final.

Estado Inicial	Operador	Estado Final/Inicial	Operador	Estado Final/Inicial
54	2/3	36	1/2	18

Figura 42. Composición de operadores.

Fuente: Da Silva (2005, p. 140)

En la figura 42, se muestra la composición de operadores que se relaciona con la multiplicación de fracciones, es decir, en vez de tener dos operadores $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$, estos se pueden reemplazar por el operador $\frac{1}{3}$ que tiene el mismo efecto que los otros dos.

3.2 La fracción aplicada a la educación matemática realista

Iniciaremos esta sección con la descripción del trabajo de Streefland (1991), además relacionaremos este trabajo con los estudios dados inicialmente por Kieren en 1976, quien inicialmente relacionó las operaciones elementales suma, multiplicación y división con los fenómenos de la fracción, aunque Streefland (1991) presenta el tema por medio del uso de cálculos con las cuatro operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división), como se muestra a continuación:

- Sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
- Restar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$
- Multiplicar $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$
- Dividir $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$

Para solucionar estas operaciones, toma como referencia una barra de chocolate que tiene seis divisiones. La primera operación que se debe realizar es la suma de fracciones $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, de modo que se requiere sumar fracciones con denominadores diferentes. Este problema fue resuelto recurriendo al fenómeno fracción parte todo, y se representó una barra de chocolate dividida en seis partes iguales, aunque el autor no lo menciona explícitamente, se evidencia que utilizó el MCM (máximo común múltiplo) con los denominadores de la fracciones para obtener la cantidad que se requería partir a fin de que esta pueda proporcionar las particiones exactas para representar cada una de las fracciones, con esto explica que, para un medio, tomará la mitad de la barra de chocolate, y, para un tercio, tomará la tercera parte de la barra de chocolate. Aunque en el artículo no muestran la representación gráfica empleada para resolver el problema, se puede deducir la representación de la fracción mediante una gráfica como se muestra en la figura 43.

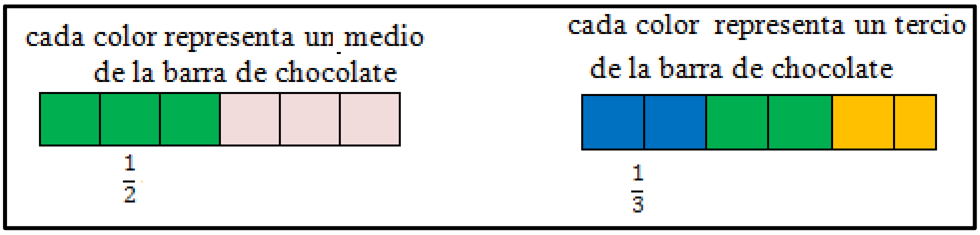


Figura 43. Representaciones gráficas de las divisiones de una barra de chocolate en $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente.

Para realizar la operación suma, según Streefland (1991), $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, se coge una barra de chocolate que contiene seis partes iguales, media barra es igual a tres partes y dos partes son iguales a un tercio. Si, se combina o se cuenta cada cuadrado sombreado (dos partes y tres partes), esto sería $\frac{5}{6}$, dicho de otro modo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Podemos deducir la representación de la fracción mediante una gráfica, tal como se muestra en la figura 44.

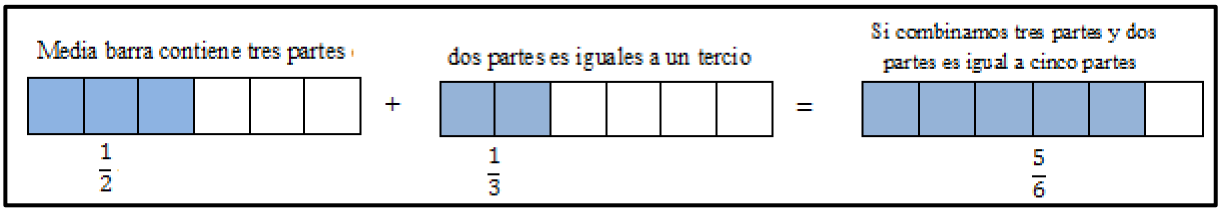


Figura 44. Operación suma que está asociado al fenómeno medida en la fracción

Para realizar la operación resta $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, la diferencia entre un medio y un tercio de una barra puede ser determinada comparando tres partes con dos partes, lo que conduce a $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, tal como se muestra en la figura 45.

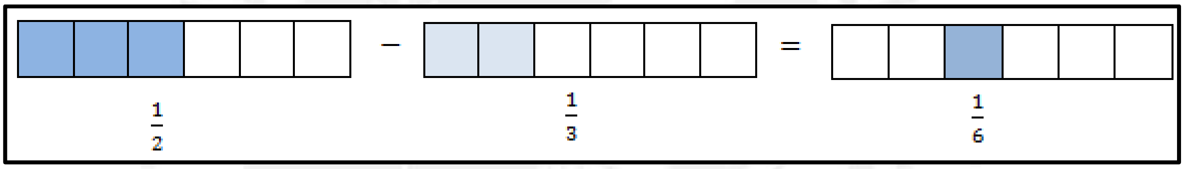


Figura 45. Operación resta en la fracción

Para la multiplicación $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, la partición se realiza en etapas. De las dos partes que representan un tercio de una barra, se debe sacar un medio de una de las partes, lo que significa que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, tal como se muestra en la figura 46.

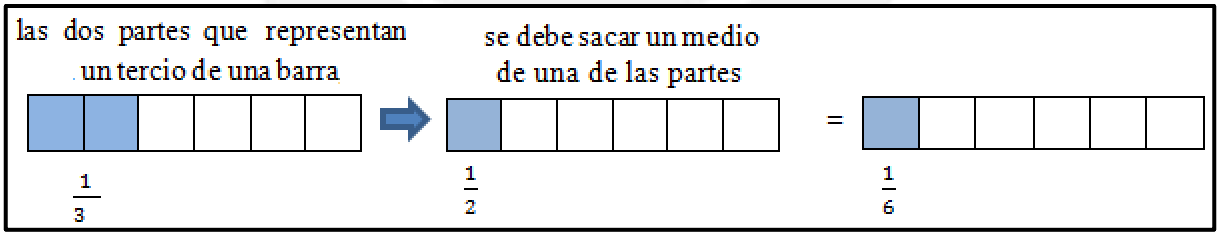


Figura 46. Operación multiplicación que está asociado al fenómeno operador de la fracción

Para la división, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$, se puede deducir el resultado de la comparación de tres partes con las dos partes. Esto muestra que el último cuadrado pintado de color azul entra una vez y media en el primero. Por lo tanto:

$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, tal como se muestra en la figura 47.

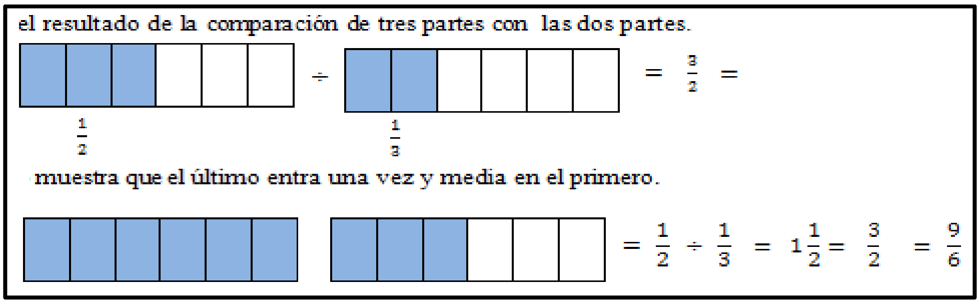


Figura 47. Operación división que está asociado al fenómeno cociente de la fracción

En esta actividad aparecen los fenómenos parte todo, medida, operador y cociente según se señala en el artículo de Charalambous y Pitta-Patazzi (2005), los que argumentaron que en 1982, Behr, Lesh, Post y Silver mostraron un diagrama que asociaba las operaciones elementales tales como la suma, vinculada con el fenómeno medida; la multiplicación, asociada con el fenómeno operador; y la división, asociada con el fenómeno cociente. Si al resolverse, se llega al resultado en su forma equivalente, se asocia al fenómeno razón, como por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, como muestra en la figura 48.

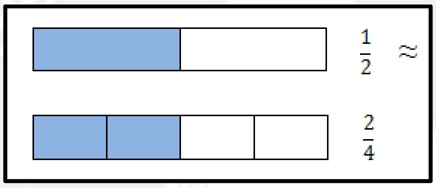


Figura 48. Equivalencia de una fracción que está asociada al fenómeno razón en la fracción

Por lo tanto, para realizar esta actividad, el investigador usó para todas las operaciones elementales el fenómeno parte todo.

Otro ejemplo que describe Streefland (1991) es una situación de la vida cotidiana: en un restaurante donde tiene que repartir a cuatro niño, tres pizzas de forma equitativa, notamos que en esta situación según la teoría de la EMR, está presente el principio de actividad.

Observamos en la figura 49 en el ítem 1, un circulo que representa a la pizza y esta, a su vez, es dividida en cuatro partes iguales; la figura sombreada de color negro representa un cuarto de cada pizza, pues el investigador reparte un cuarto de cada pizza a cada niño de uno en uno, lo mismo hará con las demás pizzas, pues como se puede observar el investigador representa cada tajada como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ lo que es lo mismo representar 3 x $\frac{1}{4}$ ò $\frac{3}{4}$. Nos podemos percatar, aunque no lo menciona explícitamente, de que está presente el fenómeno medida pues está relacionado con la suma y el fenómeno operador por estar relacionado a la multiplicación. En el ítem 2, primero dos y luego uno, el investigador hace notar otra forma de repartir las pizzas: repartirá media pizza a cada niño y de la pizza entera que sobra les repartirá un cuarto a cada uno. Como en el ítem uno nos percatamos, aunque no lo menciona explícitamente, de que está presente el fenómeno medida, pues está relacionado con la suma y el fenómeno operador por estar relacionado a la multiplicación como se muestra a continuación.

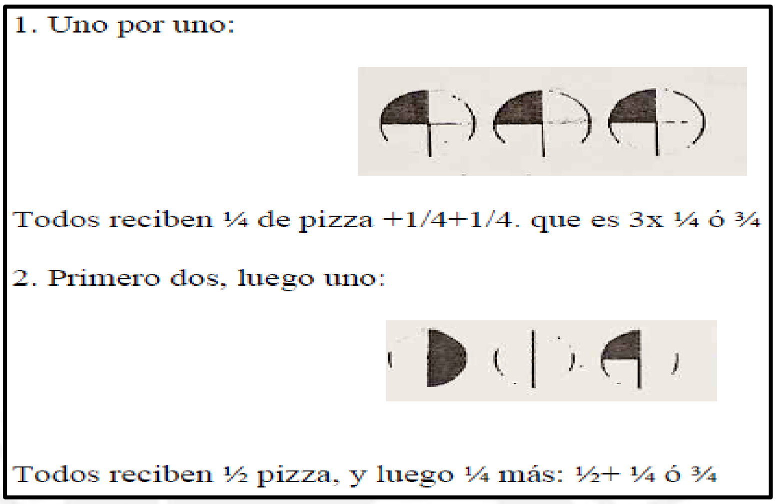


Figura 49. Expresiones equivalentes de suma y multiplicación

Fuente: Streefland (1991, p.2)

En la figura 50, a cada pizza se le quita un cuarto. Esta operación se podría realizar para la repartición a dos chicos. Para los otros dos chicos, una pizza entera se parte en dos y a cada uno se le agrega un cuarto. En este caso, aunque no lo dice explícitamente, encontramos el fenómeno medida al momento de sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ como se muestra a continuación.

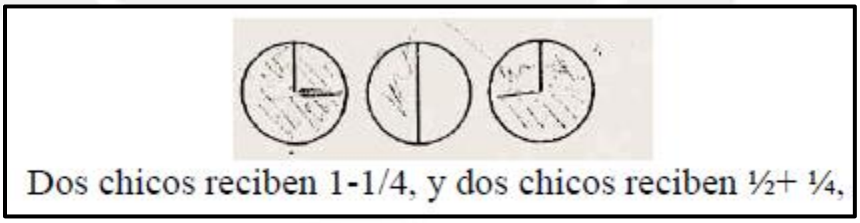


Figura 50. Expresiones equivalentes de restar y sumar

Fuente: Streefland (1991, p.2)

CAPÍTULO IV: CONSTRUCCIÓN DE CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DEL TEXTO

A continuación, se procederá a definir los criterios que permitirán analizar el texto desde la perspectiva de la EMR.

En primer lugar, se considerarán los principios de la EMR declarados en Bressan, Zolkower y Gallego (2004). Estos son: principio de actividad, realidad, reinvención, nivel, iteración e interconexión. Estos principios se complementarán con el trabajo de Van den Heuvel (2000), en el que se explica, de modo resumido, cada uno de estos ellos. Posteriormente, se considerará el trabajo de Santamaría (2006), en el cual se analizaron seis textos holandeses con la intención de describir las características que poseen estos textos de tercer y cuarto grado de educación primaria, diseñados con el lineamiento de la EMR. Este trabajo resulta esencial para nuestra investigación puesto que la investigadora se basó en preguntas con lineamiento de la teoría de la EMR como: ¿qué contextos y situaciones aparecen con mayor frecuencia en los libros de texto?, ¿hay algún contexto o situaciones que aparecen con mayor prominencia?, ¿los contextos pertenecen al mundo real o fantasioso de los niños?, ¿son los mismos ricos y significativos en tanto que despiertan su interés y promueven el trabajo con ellos?, entre otras.

En nuestra investigación, siguiendo las ideas de Santamaría (2006), construiremos las preguntas según nuestras necesidades para cumplir con nuestros objetivos, pues este debe de estar involucrado con la teoría de la EMR y el objeto matemático, el cual está constituido por los fenómenos asociados a las fracciones en un texto de sexto grado de primaria. Los trabajos de Da Silva (2005) y Streefland (1991) definen los fenómenos asociados a la fracción, convirtiéndose en la principal referencia para analizar el texto didáctico seleccionado.

Para la definición de los criterios, de los seis principios existentes en la EMR se considerarán solo cuatro de ellos, puesto que los otros dos principios (actividad y reinvención) se trabajan con alumnos.

Criterios definidos en base a los principios de la EMR para analizar el texto de sexto grado de educación primaria que es distribuido gratuitamente por el Ministerio de educación del Perú.

Tabla 1.Principios de la EMR

PRINCIPIOS	CRITERIOS ASOCIADOS A LOS PRINCIPIOS	INDICADORES
REALIDAD Se conecta al mundo real o existente o imaginable.	1. En el texto, se consideran situaciones realistas, en las que el alumno encuentra sentido a los procedimientos que realiza. Esto implica la aplicación a situaciones para las que la noción de fracción es necesaria. .	1.a. Aparecen enunciados de situaciones asociadas a fenómenos de parte todo, medida, cociente, razón y operador. 1.b. La solución que propone el texto recurre al fenómeno más adecuado para la situación presentada. En particular, para la multiplicación se recurre a situaciones asociadas al fenómeno de operador. Para la división se requiere el fenómeno cociente.
INTERACCIÓN La matemática se considera como una actividad social.	2. En el texto, se presentan actividades que deben abordarse en grupo.	2.a. En el texto, se presentan tareas que requieren de trabajo grupal.
INTERCONEXIÓN (estructuración) Los distintos temas se conectan unos con otros.	3. En el texto se identifican otros conceptos matemáticos que se relacionan con la noción de fracción.	3.a. Están presentes situaciones que requieren emplear la resta. 3.b. Están presentes situaciones que requieren ordenar datos, lo que implica considerar la noción de relación de orden.

		3.c. Están presentes situaciones que requieren emplear la división, multiplicación, adición y resta y, en general, operaciones combinadas de fracciones. 3.d. Están presentes situaciones que requieren emplear la noción de sucesión. 3.e. Están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas. Están presentes situaciones que requieren expresar representaciones decimales como fracción.
NIVEL Se debe comenzar a matematizar un contenido o tema de la realidad para, luego, cambiar a analizar su propia actividad matemática. **Matematización horizontal**: consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático. **Matematización vertical**: dentro de la matemática misma, conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba y rigorización.	4. En el texto se contemplan actividades que permiten el tránsito entre los distintos niveles de matematización vertical.	4. a. El texto presenta tareas que exigen convertir un problema contextual en un problema matemático. 4. b. En el texto, se recurre al empleo de modelos, esquemas, descripciones para situaciones similares, pero siempre referidas a una situación particular. 4. c. En el texto, se presentan espacios en los que se reflexiona sobre los aspectos en común de diferentes situaciones con intención de generalizar. 4. d. En el texto, no se propicia el

En el proceso de matematización progresiva la EMR admite pasar por distintos niveles de comprensión **Nivel situacional**: el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma. **Nivel referencial:** es este aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular. **Nivel general:** se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización **Nivel formal:** se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.		empleo de notaciones formales para el tema de estudio.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL TEXTO

A continuación, se procederá a realizar el análisis del texto del MINEDU, considerando los criterios construidos en la tabla 1 y las definiciones de los fenómenos asociados a la fracción, descritas en Da Silva (2005) y Streefland (1993). Comenzamos a analizar las fracciones desde la teoría de la EMR.

Criterio 1: Consideración de fenómenos como los desencadenantes de la actividad matemática sobre fracciones

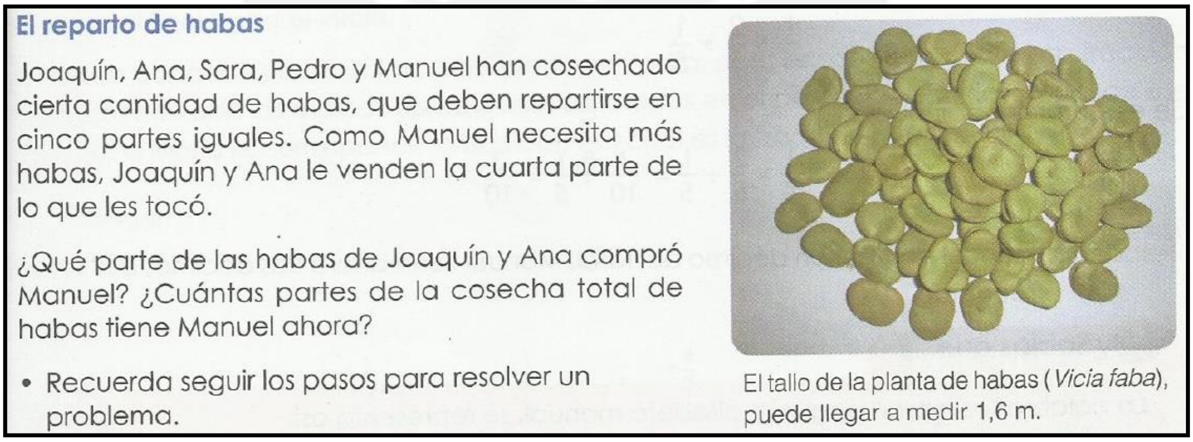
Principio de realidad

1.a. Aparecen enunciados de situaciones asociadas a fenómenos de parte todo, medida, cociente, razón y operador.

Revisando el texto, se han encontrado evidencias de situaciones de la vida cotidiana (en el campo, en la ciudad o en el colegio), tales como el reparto de habas, el reparto de una torta, la cosecha de papa, la repartición de un terreno, la venta de popelina y los ahorros de Alfredo, entre otros.

Situación 1

En esta situación, se presenta una faena en el campo, donde cinco personas han cosechado habas, quieren repartirse las habas de forma equitativa y finalmente uno de ellos necesita más habas. Por ello, dos personas deciden venderle la cuarta parte de la que les ha correspondido como se muestra en la figura 51.


El reparto de habas

Joaquín, Ana, Sara, Pedro y Manuel han cosechado cierta cantidad de habas, que deben repartirse en cinco partes iguales. Como Manuel necesita más habas, Joaquín y Ana le venden la cuarta parte de lo que les tocó.

¿Qué parte de las habas de Joaquín y Ana compró Manuel? ¿Cuántas partes de la cosecha total de habas tiene Manuel ahora?

- Recuerda seguir los pasos para resolver un problema.

El tallo de la planta de habas (*Vicia faba*), puede llegar a medir 1,6 m.

Figura 51. Situación del reparto de habas

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.51)

En la situación mostrada en la figura 51, se plantea repartir una cantidad de habas entre Joaquín, Ana, Sara Pedro y Manuel, y se requiere representar la parte que le corresponde a cada uno de ellos. Esta situación se asemeja a la tarea 1a) del 1° tipo del fenómeno cociente, pues se tendrá que distribuir la cosecha de habas en cinco partes iguales, como se observa en la figura 52.

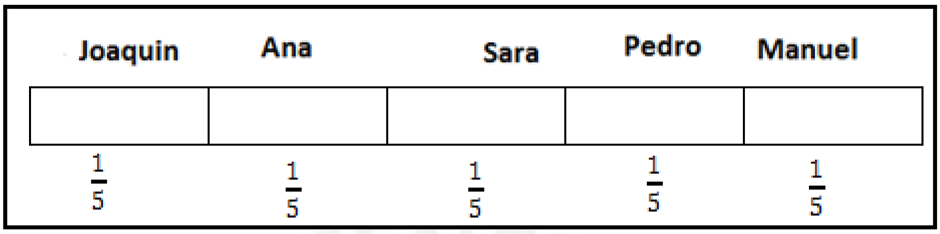


Figura 52. Reparto de las habas.

En la figura 53, se expresa de forma literal la representación de lo que recibe cada uno, como se muestra a continuación.

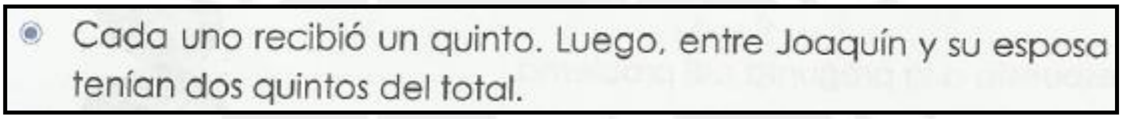

Cada uno recibió un quinto. Luego, entre Joaquín y su esposa tenían dos quintos del total.

Figura 53. Reparto de las habas

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 53, el texto menciona directamente la cantidad que le corresponde al juntar las partes que les toca del total de la cosecha de habas a Joaquín y Ana. Se piensa que debió sumarse $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$, como lo muestra la tarea1 del ítem d) de 1° tipo, dentro del fenómeno parte todo.

En la figura 54, se indica el planteamiento para multiplicar dos fracciones.


Si vendieron la cuarta parte, vendieron un cuarto de dos quintos del total.

Figura 54. Reparto de las habas

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.52)

Y, en la figura 55, se expresa matemáticamente, asemejándose así a la tarea 1 de 2° tipo del fenómeno operador. Para ello, sugiere en el ejemplo asociar el fenómeno parte todo y la división. Así, la representación $\frac{2}{5}$ del total que les corresponde a Joaquín y Ana, pero al venderla a Manuel, solo le vendieron la cuarta parte de lo que les tocó y, al expresarlo como en la figura 55, este se asemeja a la tarea 3 de 2° tipo dentro del fenómeno operador. Para resolver este, lo asocia con el fenómeno parte todo siguiendo los pasos. Se pintaría $\frac{2}{5}$; en seguida, se divide en cuatro partes la parte que se ha sombreado Así, esto le correspondería a $\frac{1}{10}$.

Manuel compró: $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

Figura 55. Reparto de las habas

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 56, se muestra la expresión matemática de la cantidad que le corresponde a Manuel y la cantidad que compra.

Manuel tiene al final:

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

Figura 56. Reparto de las habas

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 57, se muestra el proceso por seguir para saber el total que tendría Manuel y toma el resultado de la figura 55 sumando la cantidad que le tocó de la repartición de las habas, que fue $\frac{1}{5}$. Al sumar $\frac{1}{10} + \frac{1}{5}$, se asocia la tarea1 del ítem d) de 1° tipo l, sugiriendo que se debe llevar a una equivalencia. Dicho de otro modo, se debe homogeneizar para hacer la suma y el denominador para ambas fracciones será 10. Finalmente, sumamos la parte que le corresponde a Manuel más la parte que Manuel compra de Joaquín y Ana, que representamos $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$.

Se ejecutan los cálculos:

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

,

Figura 57. Reparto de las habas.

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.52)

Para efectuar la suma de fracciones en este caso, se recurre al mismo proceso que hace Streefland (1991) para sumar como lo muestra en la actividad que resuelve de la suma de dos fracciones (esto se puede verificar en la figura 44).

Por lo tanto, en este ejercicio, se ha podido percibir el fenómeno parte todo, cociente y operador. En cuanto a la teoría de la EMR, es una situación real que se produce en las faenas del campo.

Situación 2

Esta situación trata de un terreno que tiene la señora Franciscana en forma de un hexágono y que quiere repartir a sus cuatro hijos de forma equitativa. A su vez, uno de sus hijos quiere repartir su parte a sus tres hijos de forma equitativa, por lo que la pregunta consiste en qué parte le toca a cada uno de los tres nietos de la señora Francisca, como se muestra en la figura 58.

Francisca reparte equitativamente un terreno hexagonal entre sus cuatro hijos. Raúl, uno de ellos, quiere, a su vez, repartir su parte entre sus tres hijos.

¿Qué parte del terreno le toca a cada hijo de Raúl?

Figura 58. Situaciones del reparto de un terreno hexagonal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Representación gráfica de un hexágono que le corresponde a cada hijo de Francisca, como se muestra en la figura 59.

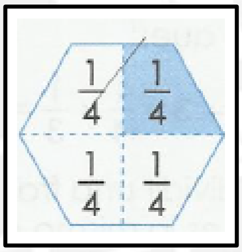


Figura 59. Reparto de un terreno hexagonal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Para el desarrollo del terreno hexagonal, cuando tiene que repartir entre sus cuatro hijos, la situación se asemeja a la tarea 1 del 1° tipo del fenómeno cociente que, a su vez, se relaciona con el parte todo, pues tendrá que distribuir un terreno en cuatro partes iguales, por lo que le tocará a cada hijo la cuarta parte.

En la figura 60, muestra su expresión literal de lo que le corresponde a cada hijo.

A cada hijo de Francisca le toca un cuarto del terreno.

Figura 60. Situaciones del reparto de un terreno hexagonal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.45)

En la figura 60, Raúl quiere repartir el terreno que les toca a sus hijos mencionando en el texto que hay que dividir un cuarto entre tres. Según la descripción, para dividir este tipo de tareas, que es de dividir dos fracciones, no se ha podido encontrar un caso similar en el texto descrito por Da Silva (2005) y Streefland (1991).

En la figura 61, se explica de forma literal de lo que se debe hacer después.

Para saber cuánto le toca a cada hijo de Raúl, hay que dividir un cuarto entre tres.

Figura 61. Situación del reparto de un terreno hexagonal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.45)

A continuación, muestra el proceso para su expresión matemática de dividir una fracción entre un valor entero como se muestra en la figura 62.

Si dividimos $\frac{1}{4}$ entre 3, se obtiene $\frac{1}{12}$ o $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$

Figura 62. Situación del reparto de un terreno hexagonal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Los fenómenos encontrados para este ejercicio son el fenómeno cociente y el fenómeno parte todo, aunque no se ha encontrado una tarea que se asemeje al dividir una fracción entre un número entero.

Situación 3

En la situación presentada en la figura 63, se puede notar la presencia de la desigualdad, puesto que se tiene que comparar la distancia recorrida por cada hermano desde su casa hasta el colegio.

Pedro, María y Luis son tres hermanos que viven en Tarapoto. Ellos van a la misma escuela. Lo hacen a pie y siguen el mismo camino.

Si Pedro ha recorrido $\frac{1}{2}$ del camino, María $\frac{1}{4}$ y Luis $\frac{2}{6}$, ¿cuál de los tres está más cerca de la escuela?

Figura 63. Distancia de casa al colegio.

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

Esta situación requiere la relación de orden para poder saber así cuál de los hermanos está más cerca de la escuela. En la solución del texto, como muestra en la figura 64, se evidencia la presencia del fenómeno razón, pues cuando lleva cada valor a su forma equivalente este se asocia a la tarea del 3° de este tipo de fenómeno razón. Asimismo, para hacer la comparación de estos dos números y saber quién está más cerca de la escuela, usaremos razones equivalentes. Dicho de otro modo, para llevar estas fracciones al mismo denominador y para ordenar el recorrido de cada uno de los hermanos se recurre al fenómeno medida como se da en la tarea 1 y 2 de 2° tipo, aunque no se muestra necesariamente dentro de un segmento, como se muestra a continuación.

Pedro dice que él está más cerca. Para confirmarlo, busca fracciones con un mismo denominador (MCM de 2, 4 y 6), equivalentes a las que conoce. Luego las compara:

Pedro $\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

María $\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ $\quad \frac{6}{12} > \frac{4}{12} > \frac{3}{12}$

Luis $\rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

Como $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, Pedro es quien más ha caminado y por lo tanto está más cerca de la escuela.

Figura 64. Solución de Pedro

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

.

Cabe añadir que el proceso que hace María en el texto, como en la figura 65. No aparece en ninguno de las investigaciones que tomamos como referencia para definir las fracciones; sin embargo, al representar el recorrido que cada uno hace hacia el colegio de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$ consideramos que es un proceso de comparación de una cantidad que tiene mayor área sombreada. Para su desarrollo, se considera el fenómeno cociente, pues se debe dividir cada representación del recorrido, como se hace en la tarea 1 de 1° tipo. Asimismo, para ordenar, se recurre al fenómeno medida como se observa en la tarea 1 y 2 de 2° tipo, como se muestra a continuación.

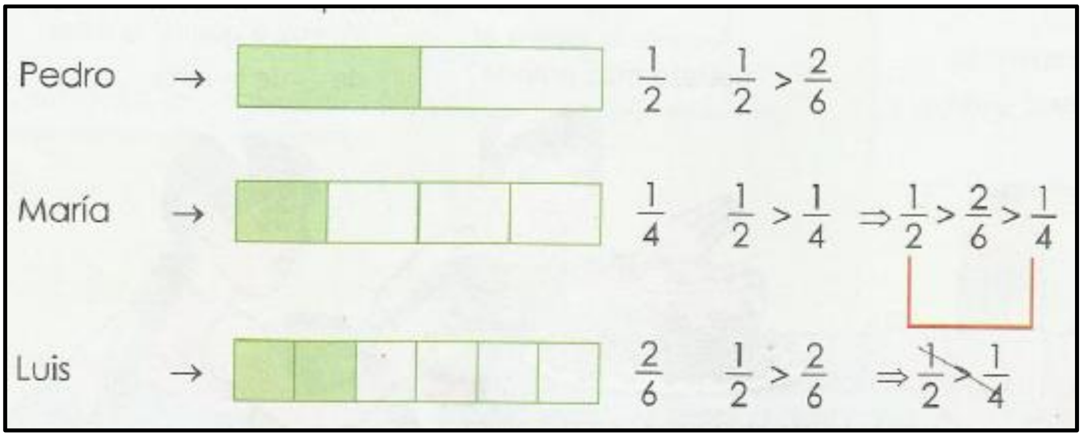
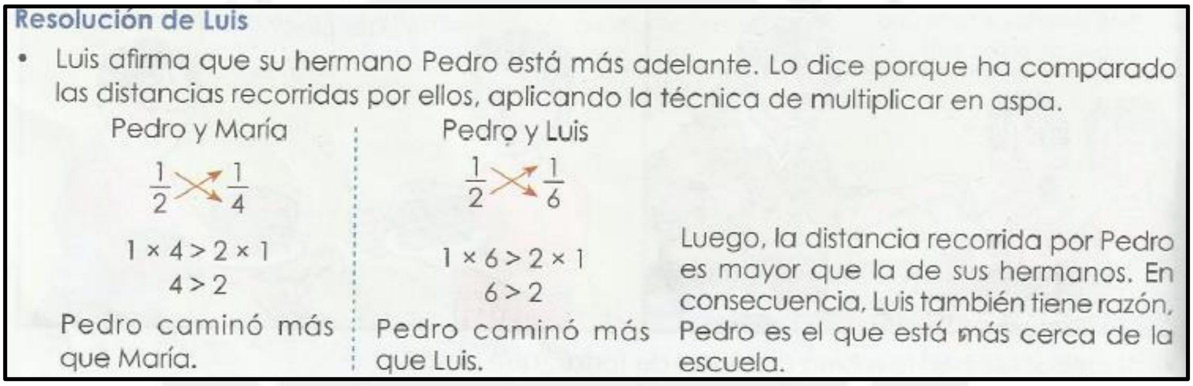


Figura 65. Solución de María

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

La solución que realiza Luis no se asemeja a ninguna de las que presentan los investigadores como se evidencia en la figura 66.



Resolución de Luis

- Luis afirma que su hermano Pedro está más adelante. Lo dice porque ha comparado las distancias recorridas por ellos, aplicando la técnica de multiplicar en aspa.

Pedro y María

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

$1 \times 4 > 2 \times 1$

$4 > 2$

Pedro caminó más que María.

Pedro y Luis

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

$1 \times 6 > 2 \times 1$

$6 > 2$

Pedro caminó más que Luis.

Luego, la distancia recorrida por Pedro es mayor que la de sus hermanos. En consecuencia, Luis también tiene razón. Pedro es el que está más cerca de la escuela.

Figura 66. Solución de Luis.

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

Podemos concluir que en esta situación se han encontrado los fenómenos razón, medida y parte todo

Situación 4

Esta situación trata del almacenamiento de tres sacos de la cosecha de papa; sin embargo, se llega a consumir la mitad de cada saco. Lo que se quiere saber es qué parte de la cosecha de papa se ha consumido, como se muestra en la figura 67.

MULTIPLICAMOS DOS FRACCIONES

Remigio guardó su cosecha de papa en tres sacos de la misma capacidad. Un mes después, ya había consumido la mitad de uno de los sacos. ¿Qué parte de la cosecha fue la que consumió?

Figura 67. Situación del almacenamiento de la cosecha de papa

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

Para multiplicar dos fracciones, el texto del libro analizado recurre a lo descrito por la tarea 3 de 2° tipo del fenómeno operador; además, menciona que este proceso se debe asociar al fenómeno parte todo, dividiéndose primero a entre $\frac{1}{3}$, como lo hace la tarea 1, de 1° tipo del fenómeno cociente, posteriormente sombrear $\frac{1}{3}$, para luego dividirla en dos partes, de manera que se pueda percibir $\frac{1}{6}$, como lo describe la tarea 3 de 2° tipo del fenómeno operador.

En el primer mes consumió la mitad de un tercio, lo que equivale a un sexto de la cosecha.
Simbólicamente: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$

Figura 68. Representación Literal y matemática de la solución de la situación

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 69, se expresa matemáticamente el proceso directo de la solución como se muestra a continuación.

Se puede expresar así: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Figura 69. Expresión matemática de la situación

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 70, se piensa representar la multiplicación de las fracciones en un hexágono, como se menciona a continuación.

Figura 70. Con miras hacia la representación gráfica

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 71, se puede observar como parte del procedimiento una gráfica que le permite darse una idea de la representación de sacos de papa; además, se puede percibir la representación de los tres sacos como la cantidad total de la cosecha de papa en hexágono, pero que, a simple vista, podría parecer un cubo. Este hexágono ha sido dividido en tres partes iguales, por lo que cada división representa un saco de papa, como se observa a continuación.

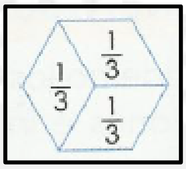


Figura 71. Cada división representa a un saco de papa

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 72, se muestra al hexágono, después de haberse dividido en tres partes: Cada una de estas se divide en dos, representando así cada uno de ellos como $\frac{1}{6}$, como se observa a continuación.

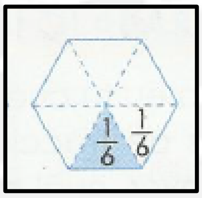


Figura 72. Representación del consumo de papa

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 73, se muestra con mayor claridad la representación de cada saco de papa y la división del consumo de cada papa, como se observa a continuación.

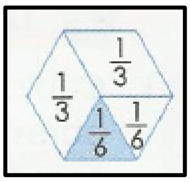


Figura 73. Representación de cada consumo de papa

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En esta situación notamos la presencia del fenómeno parte todo, operador y cociente. Aunque consideramos que la representación de cada saco de papa, que fue representado por el hexágono, consideramos que no es el más indicado para la situación y, en especial, para niños de alrededor de 11 años, porque para ellos se les haría difícil la repartición equitativa de cada saco.

1.b) La solución que propone el texto recurre al fenómeno más adecuado para la situación presentada.

Según lo analizado en el texto, cuando aborda el tema de multiplicación y división de fracciones, este recurre al mismo proceso que hace Da Silva (2005), mientras que Streefland (1991) recurre a fracciones homogéneas para recién operar.

Principio de interacción

2.a) En el texto, se presentan tareas que requieren del trabajo grupal.

El texto presenta tareas grupales del tipo algorítmicas, como se muestra en la figura 74, en la que el alumno tendrá que realizar las operaciones como se muestra a continuación.

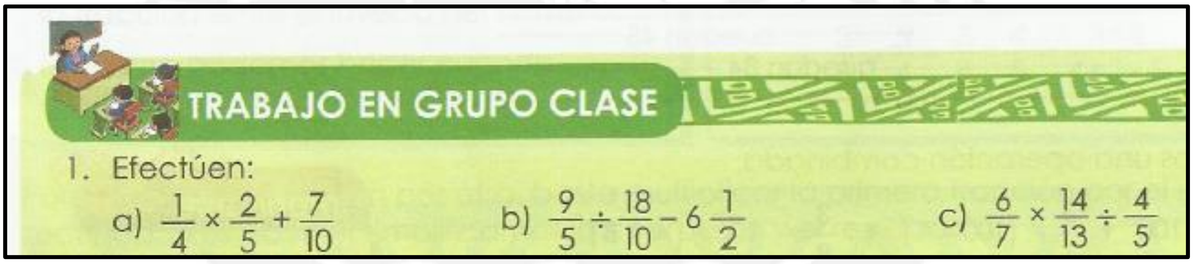


Figura 74. Trabajos grupales

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 48)

En la figura 74, se muestra un ejercicio de un trabajo grupal, aunque del tipo algorítmico en el cual no se requiere que los alumnos trabajen en grupos.

En la figura 75, se les da trabajos grupales que aparecen en situaciones cotidianas, como el pago que recibe el señor Héctor de dos tercios de saco de papa y este, a su vez, le regala los dos quintos a su mamá, como se muestra a continuación.

Por un trabajo que realizó, Héctor recibió dos tercios de un saco de 30 kg de papas. Él, a su vez, le regaló dos quintos de su parte a su mamá. ¿Qué fracción del saco de papas recibió su mamá? ¿Cuántos kilos de papa regaló Héctor a su mamá?

Figura 75. Trabajos grupales

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 55)

Ahora bien, en esta situación, sí se requiere trabajar en grupo, puesto que podría haber diferentes formas de interpretar su planteamiento y, en cuanto a la pregunta, podría entenderse de diferentes formas.

Principio de interconexión

3.a.) Están presentes situaciones que requieren emplear la resta.

En la figura 76, se muestran las operaciones combinadas, como suma, multiplicación, resta y división. Además, se indica las operaciones que primero se deben realizar para resolver, como se puede observar a continuación.

$$\frac{4}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\div\frac{5}{2}=\frac{4}{3}+\frac{3\times 2}{5\times 3}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$$

Figura 76. Operaciones combinadas. Indicaciones de los que se deberían de resolver primero

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

En la figura 77, se muestra el resultado que se hizo en la multiplicación y en la división, como se muestra a continuación.

$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}$$

Figura 77. Resultado de cada uno del proceso de la operación que realiza

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

En la figura 78, se muestra el resultado directo de la operación suma y multiplicación, como se muestra a continuación.

$$= \frac{49}{30}$$

Figura 78. Resultado final

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

Por lo tanto, en este ejercicio de las operaciones combinadas, la resta no la resuelve como lo sugiere Streefland (1991), y en la investigación de Da Silva (2005), no presenta ningún ejercicio para operar la resta en fracciones.

La figura 79 es una situación de la venta de popelina para hacer camisas. En una parte de la situación, se va a requerir restar como mostramos a continuación.

5 OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES

Felipe vende popelina para hacer camisas. De un fardo de 100 m, el primer día vende $\frac{4}{25}$ del total, el segundo día vende $\frac{3}{7}$ de lo que le quedó y el tercer día $\frac{3}{8}$ del resto. ¿Cuánto vendió en los tres días? ¿Cuántos metros de popelina le quedaron?

Figura 79. Situación de la venta de popelina

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 80, se muestra el planteamiento de la venta que hace cada día, aunque para el desarrollo a partir del segundo día, se debió restar lo que vendió con lo que tiene. Es decir, si tiene $100m - 16m = 84m$, lo mismo para el tercer día y al final en la parte de lo que dice "queda", se puede observar que tiene que usar la resta con los valores que tiene hasta ese momento con lo que se vendió. No obstante, en esta situación no se estaría empleando la resta para fracciones, como se puede verificar a continuación.

A	B	C	
1.° día	**2.° día**	**3.° día**	**Queda:**
$\frac{4}{25} \times 100 = 16$	$\frac{3}{7} \times 84 = 36$	$\frac{3}{8} \times 48 = 18$	$48 - 18 = 30$
Vende 16 m.	Vende 36 m.	Vende 18 m.	Quedan 30 m.

quedan 48

quedan 84

100 m

Figura 80. Planteamiento de la venta de popelina

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

Aunque la situación desarrollada de la figura 80 del texto es una de las soluciones, también se muestra otra solución, como veremos en el criterio 3c).

Por lo tanto, se ha encontrado la presencia de la resta en fracciones de las operaciones combinadas, pero no se encuentra ninguna situación que use la operación resta entre fracciones.

3.b). Están presentes situaciones que requieren ordenar datos, lo que implica considerar la noción de relación de orden.

Como se muestra en la situación presentada en la figura 63, se puede notar la presencia de la desigualdad, puesto que se tiene que comparar la distancia recorrida por cada hermano desde su casa hasta el colegio. En esta situación, se requiere la relación de orden para poder saber así cuál de los hermanos está más cerca de la escuela.

3.c). Están presentes situaciones que requieren emplear la división, multiplicación, adición y resta, y, en general, las operaciones combinadas.

La situación de la figura 79 muestra una situación acerca de la venta de popelina para hacer camisas. Requiere realizar operaciones combinadas con fracciones, como se plantea en la figura 81. Aquí se observa el planteamiento que se desarrolla en el libro y se muestra, para el segundo, el uso de variable como A, que representa lo que vendió el primer día y, para el tercer día, las variables A y B. La suma de ambos representa lo que se vendió el primer y segundo día, como se puede verificar a continuación.

$$\boxed{V = \frac{4}{25} \times 100 + \frac{3}{7} \times (100 - A) + \frac{3}{8} \times 100 - (A + B)}$$

Figura 81. Planteamiento de la venta de popelina con uso de variables

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 82, solo se resuelve la venta del primer día y esta la reemplaza la variable A del planteamiento del segundo día, como se verifica a continuación.

$$\boxed{V = 16 + \frac{3}{7} \times (100 - 16) + \frac{3}{8} \times 100 - (A + B)}$$

Figura 82. Desarrollo de la venta del primer día y el reemplazo la variable A

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 83, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se verifica a continuación.

$$V = 16 + 36 + \frac{3}{8} \times 100 - (16 + 36)$$

Figura 83. Desarrollo de la venta del segundo día y reemplazo de la variable A y B

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 84, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se verifica a continuación.

$$V = 16 + 36 + \frac{3}{8} \times 100 - 52 = 16 + 36 + \frac{3}{8} \times 48$$

Figura 84. Desarrollo de lo que vendió hasta el segundo día

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 85, solo se resuelve la venta del tercer día y, posteriormente, se suma la venta hasta el tercer día, como se constata a continuación.

$$V = 16 + 36 + 18 = 70$$

Figura 85. Desarrollo de la cantidad que se vendió, hasta el tercer día

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 86, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se observa a continuación.

Respuesta: Vendió 70 m y le quedan 30 m de tela.

Figura 86. Planteamiento de la venta de popelina

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

Por lo tanto, como se ha podido observar, se ha usado la multiplicación con las fracciones, aunque aparecen las operaciones suma y resta, pero no se realiza la operación puesto que se simplifica y estos se convierten en números naturales.

3.d). Están presentes situaciones que requieren emplear la noción de sucesión.

No se encuentran situaciones con respecto a las sucesiones, pero se menciona el proceso que se debe seguir, como se muestra en la figura 87 a continuación.

Comenzamos con tres, luego multiplicamos por un medio para sumar tres cuartos. ¿En qué fracción estaremos luego de cuatro pasos sucesivos? Podemos utilizar nuevamente el esquema para ver globalmente la situación.

Figura 87. Ejercicio de sucesiones presentadas como algoritmos

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 57)

La figura 89 muestra el desarrollo que se les pide que se haga, como darles el primer número; luego, multiplicarlo por una fracción; y, posteriormente, sumarle la fracción que les da. Este proceso se debe volver a hacer, de modo que sean cuatro pasos o, dicho de otro modo, volver a hacer todo el mismo proceso una vez más, como se muestra a continuación.

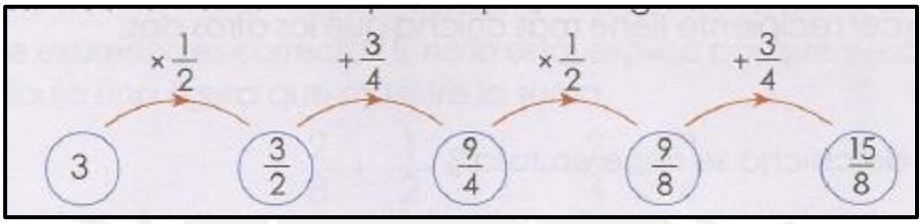


Figura 88. Ejercicio de sucesiones presentadas como algoritmos

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 57)

3.e). Están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas.
Están presentes situaciones que requieren expresar representaciones decimales como fracción.

Sí están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas como se muestra en la figura 63, que trata de la distancia que encuentran tres hermanos de su casa al colegio. Se ha mencionado que cada uno de ellos ha recorrido diferentes distancias, dadas en fracciones. Cada una de estas tiene diferente denominador, a lo que se suele llamar fracciones heterogéneas. Una situación similar también la encontramos en la situación del reparto de habas, como se muestra en la figura 53, entre otros.

No se han encontrado situaciones con decimales, que requieran representación en fracciones, pero sí se ha encontrado la necesidad de identificar el número decimal con opciones que representen a la fracción, como se muestra en la figura 89.

f) 0,03 se expresa como:	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{100}$

Figura 89. Escoger la representación de un decimal a una fracción

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 40)

En la figura 90, se les pide escoger cuál es el decimal de la fracción $\frac{8}{10}$, como se muestra a continuación.

g) $\frac{8}{10}$, como decimal, se escribe:	8,10	0,8	0,08

Figura 90. Escoger la representación de una fracción a un decimal

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 40)

Por lo tanto, en el texto analizado, no hay situaciones en que se requiera hacer uso de decimales, pero hay ejercicios en que se les pide que identifiquen su forma de fracción o de fracción a decimal.

Principio de Nivel

4.a). El texto presenta tareas que exigen convertir un problema contextual en un problema matemático.

En el texto se presentan problemas contextuales o situacionales, como se muestra en las figuras 51, 63, 67, 75, 79, 87, 91 entre otros, pues, según lo analizado, las situaciones presentadas en el texto son adecuadas. Son situaciones que un niño de sexto grado podría imaginarse en el contexto, a excepción de cuando se plantea una situación de un terreno hexagonal, pues no es una figura muy comentada en la vida cotidiana, ya que en primaria no llevan cursos de Geometría como lo hacen en el colegio.

4.b). En el texto, se recurre al empleo de modelos, esquemas, descripciones para situaciones similares, pero siempre referidas a una situación particular.

Si se recurre a modelos y esquemas porque se usan figuras geométricas, tales como rectángulos en la figura 65 y 80, y hexágonos, como se muestra en la figura 59, 71, 72 y 73 .Por medio de estas figuras geométricas, se explican las operaciones de multiplicación y división de fracciones.

La situación de la figura 71 y 73 de un hexágono que está dividido en tres partes iguales, representa cada uno, como un saco de papa, aunque a simple vista la representación parece un cubo.

4. c). En el texto, se presentan espacios en los que se reflexiona sobre los aspectos en común de diferentes situaciones con intención de generalizar.

Se han encontrado evidencias en el ejemplo de la figura 91, puesto que, en este ejercicio, se habla de diferentes situaciones desde el punto de la EMR, como pelotas y zapatillas, así tal cual se muestra en la siguiente situación.

> **Los ahorros de Alfredo**
> Alfredo gastó la mitad de sus ahorros en un par de zapatillas y un tercio de lo que le quedaba en una pelota de fútbol. Si aún le quedan S/. 80, ¿cuánto tenía ahorrado?

Figura 91. Los ahorros de Alfredo

Fuente: Montagnoli, et al. (2012, p. 54)

4.d). En el texto, no se propicia el empleo de notaciones formales para el tema de estudio.

En el texto, no se ha encontrado evidencia de formalización, es decir, no hay demostraciones que sustenten el tema de fracciones y los fenómenos asociados a ellos.

En general, según los niveles se ha podido percibir que el texto analizado, están presentes los niveles situacional, referencial, general y el nivel formal no logra desarrollar el texto. También en la investigación que hizo Da Silva (2005) no formaliza matemáticamente, puesto que en cada fenómeno asociada a la fracción, lo explica mediante tareas.

CONCLUSIONES

Con relación al primer objetivo específico, arribamos a las siguientes conclusiones:

En cuanto al marco teórico:

Con respecto a la investigación de Da Silva (2005),

- Se sugiere que debería haber más tareas que permitan identificar cada caso o generalizar cada fenómeno, de modo que se pueda hacer un análisis adecuado.
- Según las ideas iniciales dadas por Kieren en 1976, en asociar los fenómenos con las operaciones como suma, multiplicación y división, hemos encontrado el fenómeno medida según Kieren en 1976 lo asocia con la suma mientras que la tarea que resuelve la investigadora, lo relaciona con el fenómeno parte todo.

Con respecto a la investigación de Streefland (1991)

- Se sugiere relacionar cada fenómeno de las fracciones con las operaciones elementales.
- Se asume que usa el máximo común múltiplo, para resolver problemas que involucran las operaciones elementales en fracciones heterogéneas, pero, no detalla los procedimientos que va a llevar a cabo para resolverla.
- Respecto al desarrollo de la división, no es tan claro en su desarrollo.

Con respecto a la EMR

- Según las fuentes de esta teoría que fueron investigadas en nuestro trabajo, se ha tenido las ideas necesarias para analizar texto.

Por lo tanto, los trabajos revisados de las investigaciones nos han permitido relacionar el término fenomenología asociada a la fracción. Además, consideramos que asociar los fenómenos con las operaciones como lo propuso Kieren en 1976, no coincide con lo que está escrito en Da Silva (2005).

Con relación al segundo objetivo específico, arribamos a las siguientes conclusiones:

- Los criterios proporcionados en la tabla1 fueron elaborados sobre la base del trabajo de Santamaría (2013), permitiéndonos analizar el tratamiento que brinda el texto a las fracciones, desde la perspectiva de la EMR.

Con relación al tercer objetivo específico, se presentan las siguientes conclusiones:

- En el texto, se evidencia la presencia de todos los fenómenos de la fracción. Sin embargo, se requieren más tareas asociadas a cada caso, según los considerados en Da Silva (2005), además de organizar las actividades en torno a los fenómenos.
- En el texto, se evidencian situaciones de la vida cotidiana que se desarrollan en el campo, la ciudad o en el colegio, como se muestra en cada ejemplo analizado.
- Se ha encontrado que en el texto que analizamos, la suma de fracciones heterogéneas coincide con las sugerencias que proponen los investigadores Streefland (1991).
- El texto analizado, no muestra el uso de la resta como lo desarrolla Streefland (1991) de homogenizar primero para después resolverlo.
- En el texto analizado, la operación multiplicación coincide con lo propuesto por Da Silva (2005) y diferente como lo desarrolla Streefland (1991).
- En el texto analizado, para la división, el texto no necesariamente coincide con lo propuesto por Da Silva (2005), puesto que la investigadora da por tipo, pero, en un sentido particular, es decir presentando tareas como dividir una fracción entre un número natural y un número natural entre una fracción no se encuentra presente para este tipo.
- Según la relación de las operaciones suma, multiplicación y división que asocia a los fenómenos de fracción, según los estudios dados por Kieren en 1976, la suma está relacionado con el fenómeno medida, sin embargo en la investigación de Da Silva (2005) lo relaciona con el fenómeno parte todo.
- No se ha encontrado situaciones que aplique la operación resta entre fracciones.

Recomendaciones para el texto

- Se sugiere implementar situaciones en las que se empleen la resta de fracciones.
- Se sugiere presentar y formalizar la suma de fracciones.
- Se sugiere utilizar figuras que sean sencillas para poder realizar una repartición equitativa, no como se presenta con el hexágono y cubo que, solo funcionan bien para algunos casos particulares, pero resultan complejos al realizar ejercicios de repartición equitativa.

Se deja como temas abiertos para futuras investigaciones el identificar los siguientes fenómenos:

- Los fenómenos asociados a la noción de porcentaje y su relación con los de la fracción, así como un análisis de textos didácticos adaptando los criterios definidos en este trabajo.
- Identificar los fenómenos asociados a otros sistemas numéricos, tales como los números racionales.

REFERENCIAS

Bass J. (2013). *Fraction proficiency and thenumberline*. Tesis de maestría de la Universidad Louisiana State University. Recuperado de http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07022013-090004/unrestricted/bassthesisETD.pdf)

Bressan A. y Gallego M. (2011). La Educación Matemática Realista bases teóricas. *Grupo Patagónico en Didáctica de la matemática*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Bressan A y Yaksich A. (2001).La Enseñanza de las Fracciones en el Segundo Ciclo de la EGB.

Bressan A., Zolkower B. y Gallego M. (2004). I Parte: La educación matemática realista. *Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Carrillo M. (2012). *Análisis de la Organización Matemática Relacionada a las Concepciones de Fracción que se Presenta en el Texto Escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.* Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1547/CARRILLO_YALAN_MILAGROS_ORGANIZACION_MATEMATICA.pdf?sequence=1

Castaño N. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales Colombia. Recuperado de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/861/1/Tesis%20N%C3%A9stor%20Mario%20Casta%C3%B1o.pdf

Castro E.(2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*. (Tesis de doctorado, Universidad de Granada). Recuperado de file:///D:/Users/GIS/Downloads/Tesis_Elena%20Castro%20(2).pdf

Charalambous Y. y Pitta-Pantazi D. (2005). Revisiting a Theoretical Model on Fractions: Implications for Teaching and research. *Melbourne: PME, (2), pp. 233*- 240. Recuperado de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2CharalambousEtAl.pdf

Cid E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Departamento de Matemáticas Universidad de Zaragoza*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Da Silva M. (2005). *Investigando saberes de profesores do ensino fundamental com enfoque en números fraccionarios para a quinta serie*. Tesis de doctorado en Educación Matemática. PUC/SP São Paulo, Brasil.

De León H. y Fuenlabrada I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa v (1), pp. 268-282.* Recuperado de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/1998/76347_2.pdf

Educación. Provincia de Buenos Aires (2001). *Módulo 2 Serie Aportes al Proyecto Curricular Institucional*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/

Elguero C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario Sociocultural del trabajo*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/elguero_2009.pdf

Encinas J. (2009). *Un ensayo de la escuela nueva*. 2ª ed. Facultada de ciencias de la educación.

Flores R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela de secundaria*. (Tesis de maestría, Instituto politécnico Nacional México D.F). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Fredenthal H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mexico Cinvestav.*

Godino J. (2004). Didáctica de las Matemáticas para Maestros. [GAMI,]. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gravemeijer K. y Teruel J. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular (Trad. Saggesse N., Gallego F. y Bressan A.). *J. Currículo Studies.(32), Nº. 6, 777- 796.* Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/hansfreudenthal.pdf

Guillén G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática.16(3), 103-125. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf

H. Wu (2014). Teaching Fractions According to the Common Core Standards. Recuperado de https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf

López J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte todo*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf.

Luelmo M. (2004). Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle,(6), pp. 83-102*. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/342/34202206.pdf

Machado A. y Rico L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: Fenomenología y representaciones. Electronic Journal of Research in Educational Psychology. ISSN. 1696-2095. No 17, Vol 7 (1) 2009, pp: 537-554. Recuperado de http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/new/ContadorArticulo.php?298

Matute K. (2010). *Concepciones Matemáticas en los estudiantes de séptimo grado de la escuela normal mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones*. Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Recuperado de http://www.google.com.pe/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CCEQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.cervantesvirtual.com%2Fobra%2Fconcepciones-matematicas-en-los-estudiantes-de-septimo-grado-de-la-escuela-normal-mixta-pedro-nufio-acerca-de-las-fracciones-y-sus-diferentes-interpretaciones%2Fd62813ac-b3e1-11e1-b1fb-00163ebf5e63.pdf&ei=6DGPVdvRPImrgwSlhJ-oBA&usg=AFQjCNFjXYOCQjMT1MevSS82QacOSnE5yw&bvm=bv.96783405,d.eXY

Montagnoli I, Sullca E. y Val E. (2012). Matemática 6. Lima – Perú. El Nocedal S.A.C.

OCDE (2012). Resultados de PISA 2012 en Foco Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Peña P. (2011). *Significación del Algoritmo para Operar Aditivamente con Fracciones en un Contexto Escolar*. Tesis de maestría Instituto Politécnico Nacional centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México -DF.

Perera P. y Valdemoros M. (2008). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Cielo, Educación matemática 21(1).* Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100003

Perú (2014). Mapa de Progreso de la competencia actúa y Piensa Matemáticamente en Situaciones de Cantidad. Lima.

Perú (2015a). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.* Lima. Recuperado de http://lasrutasdelaprendizaje.blogspot.pe/2015/04/diseno-curricular-nacional-2015-dcn-2015.html

Perú (2015b). *Rutas de aprendizaje.* Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

Puig L. (1997). Análisis fenomenológico. *Barcelona: Horsori / ICE. ISB 84-85840-65-8*. (pp.61 – 94). Recuperado de http://www.uv.es/puigl/fd.pdf

Quispe (2011). *La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima- Perú. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf

Ruiz C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.* Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

Santamaría F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/

Schoenfeld A. (2000). Propósito y método de investigación en educación matemática. *Purposes methods of research in mathematics education. 47(6).*

Sepúlveda O. (2013). La fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, de Hans Freudenthal. *Congreso de Investigación y Pedagogía. N02 - ISSN 2256*. Recuperado de http://tics.uptc.edu.co/eventos/index.php/cong_inv_pedagogia/con_inv_pedag/paper/viewFile/297/295

Serrado A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81*. Recuperado de http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf

Streefland L. (1991). Las fracciones: un enfoque realista. *Grupo Patagónico de la Didáctica de la Matemática (Trad. Da Valle N.).* Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Valdemoros E. y Ruiz F. (2007). El caso de Luciana para el estudio de las fracciones en la escuela de adulto. *Latinoamericana de la Investigación Matemática Educativa11 (1): 127- 15*

Van den Heuvel, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.* Recuperado de http://dme.colorado.edu/fius/rme4proc.htm

Van den Heuvel, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: an Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Kluwer Academic Publishers*, 54, 9–35. Recuperado de http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2003_heuvel_panhuizen_model.pdf