PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

IDENTIFICACIÓN DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN UN TEXTO UNIVERSITARIO EN RELACIÓN A LA FUNCIÓN CUADRÁTICA. UN ESTUDIO DESDE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

Edwin Manotupa Huachaca

Dirigido por

Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

San Miguel, 2016

Dedicatoria

A Dios por guiar mis pasos en este trabajo y darme fuerzas para seguir adelante.

A mis queridos padres Benedicta y Valentin quienes día a día se esforzaron por darme lo mejor y así lograr nuestros objetivos comunes.

A mi amada esposa Gissela Cristina, por su inmenso amor, comprensión y apoyo incondicional en todo momento.

A mi linda princesita Clara Cristina que cada día me ilumina y me motiva a ser el mejor.

Agradecimiento

Agradezco infinitamente a mi asesora, la doctora Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre por su excelente orientación en la elaboración de mi tesis.

A la doctora Katia Vigo Ingar y al profesor Miguel Gonzaga Ramírez, por las sugerencias dadas para la culminación de este trabajo.

Agradezco también a la directora de la escuela de Enseñanza de la Matemática la profesora Jesús Flores Salazar, por sus enseñanzas y sugerencias.

Resumen

Nuestro trabajo tiene como objetivo analizar los posibles conflictos semióticos cuando se desarrollan problemas de función cuadrática de un texto universitario. Los conflictos semióticos que aparecieron se analizaron teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Para la realización de este trabajo se usó un texto universitario y una actividad sobre función cuadrática planteada a estudiantes de primeros ciclos de universidad. Finalmente la metodología que se utilizó en el presente trabajo es el de análisis de contenido.

En el primer capítulo se describió los antecedentes, la justificación, los objetivos y la metodología que usamos en nuestro trabajo. En el segundo capítulo, se describió al objeto matemático función cuadrática tomando aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica tales como los registros de representación, lengua natural, algebraico y gráfico de coordenadas cartesianas. También se estudió los tratamientos y las conversiones que realizan entre representaciones para los registros de representación mencionados. En el tercer capítulo, se analizó un texto universitario y una actividad sobre función cuadrática. Del análisis se concluyó que el texto no permite que se hagan los tratamientos y las conversiones de forma espontánea, sino que los declara como parte de la pregunta. En el cuarto capítulo, se detalló y analizó los posibles conflictos semióticos al resolver problemas sobre la función cuadrática en un texto y una actividad. Finalmente, en el quinto capítulo, se procedió a detallar las conclusiones y recomendaciones acerca de nuestro trabajo. También se mencionó algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

Palabras clave: función cuadrática, Teoría de registros de Representación Semiótica, conflictos semióticos.

Abstract

Our work has as objective to analyze the possible semiotic conflicts when they develop problems of quadratic function of a university text. The semiotic conflicts that appeared were analyzed having as theoretical framework the Theory of Records of Semiotic Representation. For the accomplishment of this work a university text was used and an activity on quadratic function raised to students of first cycles of university. Finally the methodology that was used in the present work is the one of content analysis.

The first chapter described the background, justification, objectives and methodology that we use in our work. In the second chapter, the mathematical object quadratic function was described taking aspects of the Theory of Semiotic Representation Registers such as the registers of representation, natural language, algebraic and chart of cartesian coordinates. We also studied the treatments and the conversions that they perform between representations for the representation registers mentioned. In the third chapter, a university text and an activity on a quadratic function were analyzed. The analysis concluded that the text does not allow treatments and conversions to be made spontaneously, but rather declares them as part of the question. In the fourth chapter, it was detailed and analyzed the possible semiotic conflicts when solving problems on the quadratic function in a text and an activity. Finally, in the fifth chapter, we proceeded to detail the conclusions and recommendations about our work. Some recommendations for future research were also mentioned.

.**Key words:** quadratic function, Theory of Records of Semiotic Representation, semiotic conflicts.

Índice de tablas

Índice de figuras

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende analizar los conflictos semióticos que se presenta en relación a la función cuadrática de un texto universitario donde se plantean situaciones cotidianas sobre el tema en cuestión. Para ello se recurrirá a los principios teóricos propuestos por la Teoría de Registros de Representación Semiótica y los conflictos semióticos, los cuales nos permitirá describir y analizar los significados que se dan a las informaciones dadas por una expresión.

Para el análisis de los conflictos semióticos en un texto universitario se escogió la metodología de análisis de contenido por ser el que nos permite una mejor descripción de la información que se presenta en un texto y el que permite obtener diversas características del texto analizado por medio de un procedimiento metodológico.

Inicialmente se detallará el problema de investigación y se presentarán diversos estudios acerca del objeto matemático, el marco teórico y la metodología que usaremos en nuestro trabajo. A continuación, se mencionarán y analizarán las actividades cognitivas que se puede realizar con los registros de representación que usaremos en nuestro trabajo. También, se analizarán los ejemplos sobre función cuadrática propuestos en un texto universitario. Finalmente a partir de estas descripciones se identificarán los conflictos semióticos que se pueden presentar al resolver problemas sobre función cuadrática de un texto universitario.

El estudio de los conflictos semióticos que aparecen al resolver problemas sobre función cuadrática se hace necesario porque permite al investigador reconocer las diferentes respuestas que pueden dar los estudiantes y por lo tanto generar conflictos debido a que no son las respuestas que espera el investigador.

CAPITULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo mostraremos estudios realizados acerca de la función cuadrática que tienen como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Además, se detallarán otros estudios en donde se desarrolle el concepto de conflictos semióticos en los libros de texto y el uso de la metodología de análisis de contenido.

Por otro lado, justificaremos nuestro trabajo a partir de la importancia que tiene este tema para la comunidad científica y la pertinencia del estudio de la función cuadrática como un concepto necesario y que se usarán en cursos de estadística y economía posteriores y que es requerido por ciertas especialidades de Letras y Ciencias humanas que se mencionarán en el trabajo. El concepto de función cuadrática es importante en diversas áreas del conocimiento y en particular porque para nuestro trabajo nos permitirá usar varias representaciones de este objeto matemático y realizar un estudio de las transformaciones entre registros.

Finalmente, se presentará el problema y el objetivo de investigación que regirá nuestro trabajo. Asimismo, se detallará la metodología de análisis de contenido que usaremos justificando su elección y describiendo el procedimiento metodológico.

1.1 Antecedentes y justificación

En esta sección, presentamos trabajos de investigación que se relacionan con el tema "función cuadrática" y que se realizaron teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Duval (1988), Duval (1995) y Duval (2006). En dichas investigaciones el foco de atención fue identificar los problemas y conflictos que presentan los estudiantes de primeros años de universidad para la resolución de problemas sobre funciones y en particular sobre la función cuadrática.

En primer lugar, haremos referencia al trabajo de Guzmán (1998) quien señala que los distintos registros de representación semiótica deben interpretarse como medios de expresión y representación que se caracterizan por sus respectivos sistemas semióticos. Los sistemas semióticos están constituidos por signos, por ejemplo: trazos, símbolos, íconos, entre otros. El estudio de la autora tuvo como objetivo poner en evidencia la importancia que tienen los cambios de registros de representación semiótica para poder hacer y aprender matemática y que esto debe realizarse de manera natural por estudiantes de primeros ciclos de educación superior. Para lograr esto la autora plantea actividades sobre funciones en las que se debe hacer al menos un cambio de registro de representación semiótica.

En este sentido, Guzmán (1998) plantea que hay al menos dos características de la actividad cognitiva implicada en las estrategias matemáticas. Por un lado se recurre a varios registros de representación semiótica; y por otro lado, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción. En esta línea, se generan dos interrogantes importantes: ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él?

Guzmán (1998) menciona que el cambio de registros no es objeto de enseñanza. A pesar de esto, se debe enfrentar a los estudiantes a situaciones problemas de cambio de registro que estén propuestos en los textos, porque la evidencia empírica muestra que los estudiantes logran así un aprendizaje efectivo, es decir, cognitivamente logran un mejor aprendizaje.

También el estudio de la autora nos permitió reconocer que al resolver los problemas sobre funciones propuestos en los textos se prefiere el uso de un solo registro de representación semiótica, cómo por ejemplo, dar la regla de correspondencia de la función y determinar el dominio y rango de forma algebraica a partir de ésta. En este tipo de problemas era evidente la utilización de otro registro de representación semiótica distinto al algebraico, como por ejemplo el simbólico pero los estudiantes tenían dificultad para coordinar los distintos registros de representación semiótica. En esta parte reconocemos la importancia de tener ejemplos en los cuáles se hace necesario el cambio de representación a otro sistema semiótico de representación. Al respecto, el estudio de Guzmán (1998) concluye que un cambio de un registro de representación semiótico a otro permitiría una mejor explicación del concepto que se estudia y así favorecer un aprendizaje que incentive la comprensión y adquisición de nociones conceptuales nuevas.

Finalmente, Guzmán (1998) recomienda que el registro lenguaje natural tendría que aparecer más veces en una clase de matemática, así: “[...] el lenguaje natural tendría que tener una mayor presencia en las clases de matemáticas, tanto de parte del profesor como de los alumnos, para lo cual debería estar garantizado el espacio para que los alumnos puedan expresarse.” (Guzmán, 1998, p.21)

Sin embargo, la autora señala que muchas veces los docentes prefieren las escrituras simbólicas porque consideran que ello le da un rigor matemático pensando que así se hace más y mejor matemática. En este contexto surge la pregunta: “¿De qué sirve el rigor matemático sin la comprensión del significado de los objetos involucrados?” (Guzmán, 1998, p. 21). La pregunta anterior queda como tema de investigación para otros estudios que se planteen en la misma línea.

Siguiendo lo anterior, Gaspar De Alba (2012) manifiesta que las últimas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, en relación a los registros de representación semiótica, muestran que el aprendizaje de las matemáticas se consigue de forma más efectiva cuando se incorporan actividades en la enseñanza, que permitan el uso y la conexión de diferentes representaciones. Un enunciado verbal (oral o escrito), una expresión algebraica, un registro tabular y una representación gráfica son representaciones que pertenecen a sistemas semióticos diferentes y que interactúan entre ellas por medio de las transformaciones de registros de representación semiótica y que generan cognitivamente un mejor aprendizaje. En este sentido, el estudio de la investigadora también menciona que las transformaciones semióticas son los tratamientos y las conversiones; de esta manera, el estudiante conecta los diferentes registros de representación y favorece su aprendizaje.

La investigadora propone situaciones matemáticas acerca de la función cuadrática a estudiantes de bachillerato escolar, que tiene edades entre 15 a 17 años, para cuya solución se exige que estos realicen transformaciones de representaciones en diferentes registros. Además, propone actividades para que los estudiantes determinen nuevos elementos de la función cuadrática como intervalos de crecimiento, puntos máximo y mínimo, entre otros.

El estudio de Gaspar de Alba (2012) concluye en que es importante este tipo de actividades (problemas sobre la función cuadrática) donde el estudiante deba relacionar dos o más registros de representación semiótica para que así éste participe de su propio aprendizaje y pueda mediar en la de sus pares teniendo al docente como un facilitador.

El estudio de Guzmán (1998) se relaciona con el de Gaspar De Alba (2012) porque Guzmán (1998) plantea el uso del cambio de registros de representación semiótica como una manera de orientar un tipo de aprendizaje y enseñanza que facilite la comprensión y adquisición de conceptos por medio del cambio de registros de representación semiótica, idea que Gaspar De Alba (2012) desarrolla al proponer actividades que permitan que los estudiantes cambien de un registro a otro y además obtengan nuevos elementos del objeto matemático a estudiar.

De otro lado en el estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) se presentan propuestas didácticas para la enseñanza de función cuadrática teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. El objetivo de este estudio es la identificación de problemas en los estudiantes para la articulación de los registros algebraico y gráfico. El estudio se realizó con estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Para lograr lo mencionado en los objetivos se presentó a los alumnos diferentes registros de partida (gráfico) y ellos tenían que obtener una respuesta en un registro de llegada (algebraico). Los registros de llegada que debían ser obtenidos tienen las siguientes representaciones algebraicas:

- Forma general: $f(x) = ax^2+bx+c;\ a \neq 0$.
- Forma de completar cuadrados: $f(x) = a(x-h)^2+k;\ a \neq 0$.
- Forma con intersecciones en el eje x: $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2);\ a \neq 0$.

Estas representaciones algebraicas son obtenidas por tratamientos en el mismo registro algebraico. Por medio de estas representaciones los estudiantes deben reconocer el vértice del gráfico de la función cuadrática $(h;\ k)$; el valor del coeficiente principal para identificar la concavidad, valor de a; las intersecciones con los ejes coordenados, valores de r_1 y r_2; entre otros.

Los resultados revelaron que, en lo que se refiere a las funciones cuadráticas, aproximadamente, un 48% de los estudiantes no logró establecer una adecuada articulación entre las distintas formas de representación de una función cuadrática.

Las mayores dificultades o conflictos ocurrieron cuando los alumnos tuvieron como registro de entrada el gráfico por lo que no reconocieron fácilmente los elementos que presentaba la función cuadrática en esta representación, como por ejemplo la intersección de la función cuadrática con el eje y que según el estudio se reconoce por medio del valor del término independiente de la regla de correspondencia de la representación algebraica de la función.

En el trabajo de Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) se representa a la función cuadrática en su forma algebraica, porque en ésta representación se puede reconocer el vértice de la representación gráfica, los puntos de intersección de la representación gráfica con los ejes coordenados, la concavidad que tiene la representación gráfica, entre otros. Adicionalmente, los estudiantes reconocen los valores máximos y mínimos y el dominio y rango de la función.

De esta manera los estudios de Gaspar De Alba (2012) y Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) refuerzan la necesidad de trabajar con el registro algebraico para mostrar elementos diferentes que tiene la función cuadrática respecto de otras funciones polinómicas, como la existencia de un valor máximo o mínimo absoluto.

Finalmente, el estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) deja como tema abierto en la Educación Matemática la posibilidad de implementar las transformaciones entre registros de representación semiótica como una capacidad que puedan desarrollar los estudiantes, incorporando más de estos procedimientos en el trabajo de aula.

En la misma línea, Luna (1997) presentó modelos matemáticos para estudiantes de primer ciclo de universidad, permitiendo analizar situaciones reales y así obtener y registrar los efectos que se generan cuando los alumnos resuelven estas situaciones. Para lograr este propósito presentó a la función cuadrática en su forma general y la asoció con conceptos de la física, modelando la variable independiente como el tiempo (variable x) y la variable dependiente como la posición (variable y). La idea fundamental de la propuesta fue vincular la parte teórica con la práctica en el contexto de la física en particular de las leyes de movimiento de la física.

Los estudios de Luna (1997) y Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) se relacionan porque ambos plantean el uso del cambio de registros como una fuente para desarrollar problemas que tengan como objeto matemático a la función cuadrática. En el caso de Luna (1997) lo desarrolla a partir de modelos matemáticos en el contexto de la física. Por otro lado, Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013) desarrolla los problemas sobre funciones cuadráticas presentados en su estudio, partiendo del registro lengua natural que se usa para describir el enunciado y teniendo al registro gráfico o algebraico como registros de llegada.

Por otra parte, en el trabajo realizado por Sicha (2011) se logra categorizar los problemas sobre funciones cuadráticas tomando como referencia el paso del registro lengua natural al registro algebraico.

También, el autor presenta una lista de errores que cometen los alumnos cuando resuelven situaciones acerca de la función cuadrática. Los errores se presentaron en tres grupos:

- En relación a los problemas, cuando éste requiere interpretar el texto de la lengua natural al lenguaje algebraico.
- En relación a técnicas algebraicas y uso de algoritmos.
- En relación a notaciones inadecuadas, errores de transcripción y al efectuar incorrectamente las operaciones.

El trabajo de Sicha (2011) también se caracteriza por lo siguiente:

- El uso de algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, utilizado para la descripción de los problemas cuando se hace un cambio de registro. Al respecto, nuestro estudio abordará las transformaciones entre registros, tratamientos y conversiones entre distintos registros de representación semiótica.
- El nivel en el que se realizará el estudio, en el caso del investigador su trabajo se desarrolló con estudiantes de primer ciclo de universidad de las especialidades de Letras y ciencias humanas.

Finalmente, el autor de la investigación deja sugerencias para complementar su estudio, al respecto tenemos como tema abierto estudiar los problemas desde el momento en que se hace uso de las funciones.

El trabajo de Gonzales (2011) aborda los problemas de comprensión de la función cuadrática, como un saber matemático desde la realización de las transformaciones entre registros de representación semiótica. Para este estudio usa las actividades cognitivas fundamentales descritas por Duval (1999) como: la representación, los tratamientos y las conversiones. El objetivo de su estudio es la descripción y el análisis de las transformaciones semióticas realizada por los estudiantes de primer ciclo de universidad, usando el registro algebraico, registro gráfico y registro lengua natural.

También, en el estudio de Gonzales (2011) el análisis de los registros de representación mencionados en el párrafo anterior le permitió a la autora descubrir y sintetizar los tipos de errores recurrentes de cada estudiante cuando se realizó el estudio de los instrumentos aplicados a los estudiantes.

El estudio tiene por conclusión que cuando el estudiante reconoce y diferencia las representaciones semióticas de los signos de la función cuadrática, tales como: las constantes y las variables; y además puede evaluar con éxito los datos en la representación algebraica, por ejemplo: el vértice, se diferencia el contenido de la representación y el objeto matemático representado.

En la línea del análisis de los textos cuando se proponen problemas sobre función cuadrática, Campos (2014) manifiesta que un texto como objeto de estudio para una investigación en la enseñanza de la matemática sugiere adoptar una postura frente a dicho texto. En este sentido, se puede reconocer a un texto como un auxiliar informativo y cuestionar el contenido de los diferentes temas abordados por cada uno.

El autor, manifiesta que hacer una revisión de los aspectos metodológicos para resolver problemas acerca de un objeto de enseñanza en los textos es una tarea necesaria sin importar el nivel en que el estudiante se encuentre. En esta línea el objetivo de estudio que plantea el estudio de Campos (2014) es investigar acerca de los aspectos metodológicos con los que se hace el desarrollo del concepto función cuadrática al resolver problemas en los textos.

Para el desarrollo del estudio, el autor utiliza como metodología el análisis de contenido. Esta metodología fue aplicada en el estudio del investigador de acuerdo a los siguientes pasos: determinación del objeto de análisis, determinación del sistema de codificación y categorización de los textos por medio de indicadores y comprobación de la fiabilidad del sistema de codificación y categorización.

En la determinación del sistema de codificación el autor planteó una asignación coherente de las unidades de análisis (los textos) a un registro de ellos. Para la determinación del sistema de categorías, se tuvo como referente al objeto matemático función cuadrática, que le sirvió al autor para el análisis de los conflictos que se generan al resolver problemas sobre función cuadrática. Para la construcción del sistema de categorías previamente el autor propone indicadores de dos tipos, conceptuales y metodológicos.

Campos (2014) concluye que los problemas sobre función cuadrática propuestos en los textos están diseñados para que se resuelvan operando expresiones algebraicas, resolviendo ecuaciones de segundo grado o problemas que proponen el desarrollo de habilidades matemáticas muy específicas, tales como la factorización o el método de completar cuadrados.

En relación a investigaciones sobre conflictos semióticos Espinoza, Rodríguez, Jorge, Mata y Caputo (2013) manifiestan que se entiende por conflicto semiótico a cualquier disparidad entre los significados que se pueden dar a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y que resulta ser la razón de los problemas en el aprendizaje de dicha expresión. También, Mayen, Díaz y Batanero (2009), denominan conflictos semióticos a las diferentes interpretaciones de las expresiones matemáticas que realizan los estudiantes, es decir los significados que no concuerdan con los correctos a nivel institucional.

En esta parte es importante resaltar que cuando se hace representaciones distintas de un mismo objeto de estudio por dos sujetos distintos y siendo estas representaciones distintas a la que se espera a nivel institucional, se genera un conflicto semiótico. En los estudios presentados sobre la función cuadrática, en los antecedentes de nuestro trabajo, se reconoce la necesidad de representación. Cuando se representa a la función cuadrática usando el registro algebraico y se muestra a la función cuadrática en cualquiera de las siguientes formas: $f(x) = a(x-h)^2+k$ o $f(x) = a(x+h)^2+k$ o $f(x) = a(x-h)^2-k$ o $f(x) = a(x+h)^2-k$, se debe reconocer que de acuerdo a la representación algebraica que se tenga, el vértice de la representación gráfica de la función cuadrática en el registro de pares ordenados, es: *(h; k)* o *(-h; k)* o *(h; -k)* o *(-h; -k),* respectivamente. Según las investigaciones mostradas se espera que reconozcan la representación del vértice como *(h; k)*, pero al representarse de otras maneras distintas a la esperada se genera un conflicto semiótico.

Justificación de la investigación

De las diversas investigaciones sobre función cuadrática presentadas en la sección previa, se concluye que existen conflictos en la comprensión de dichos objeto matemático. Estos conflictos pueden interpretarse en términos de conflictos semióticos.

Por otro lado, la evidencia de la pertinencia de este tema se refleja en la descripción de la siguiente lista de potenciales conflictos que se generan al resolver problemas sobre función cuadrática y que se detallaron en los antecedentes.

En primer lugar, cuando se resuelve un problema de función cuadrática propuesto en las actividades de los textos no se realiza un cambio de registro cuando esta conversión es necesaria. Por consiguiente, se generan conflictos porque los estudiantes dan respuestas diferentes a las que realmente se espera que puedan proporcionar. Esto fue mencionado y detallado en el estudio de Guzmán (1998) que hemos citado.

En segundo lugar, cuando se desea obtener los valores óptimos en un problema sobre función cuadrática propuesto en las actividades de los textos y resolverlo en el registro algebraico se hace necesario realizar tratamientos para representar a la función cuadrática en otras representaciones. La obtención de los valores óptimos en un ejemplo propuesto en las actividades de los textos se hace más sencilla si se representa a la función cuadrática en su forma de completar cuadrados $f(x) = a(x - h)^2 + k$ según se mencionó en el estudio de Díaz et al. (2013). Sin embargo, se quiere trabajar únicamente en la representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$, generándose conflictos porque no logran reconocer correctamente los valores óptimos. Solo se reemplazan valores de x en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, y de esta manera se quiere reconocer un máximo o un mínimo, como se mencionó en el estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdova (2013).

En relación a la pertinencia del estudio de la función cuadrática por parte de estudiantes universitarios de las especialidades de Letras y Ciencias humanas de la Pontificia Universidad católica del Perú, se encuentra que este es relevante para cursos de estadística y economía que posteriormente llevarán los estudiantes diferente al nivel para el cual está planteado el libro que sirve de guía para nuestro estudio.

El texto "Matemática para no matemáticos" está dirigido a estudiantes que seguirán especialidades de Letras y Ciencias Humanas y que tienen un nivel de primeros ciclos de universidad.

La siguiente tabla, muestra las facultades y especialidades de las carreras de Letras y Ciencias Humanas, que llevarán los cursos Estadística (EST103) y Economía (ECO103) de Estudios Generales Letras.

Facultades	Especialidades	Especialidades que llevan Estadística y Economía de Estudios Generales Letras	
		Estadística	Economía
Ciencias Sociales	Antropología	Si	
	Ciencia Política y Gobierno	Si	Si
	Sociología	Si	
Ciencias y Artes de la Comunicación	Comunicación Audiovisual		
	Comunicación para el Desarrollo		
	Periodismo		
	Publicidad		
Derecho	Derecho		
Letras y Ciencias Humanas	Arqueología		
	Ciencias de la Información		Si
	Filosofía		
	Geografía y Medio Ambiente		
	Historia		
	Humanidades		
	Lingüística y Literatura		
	Psicología	Si	

Tabla 1: Especialidades de Letras y Ciencias Humanas que llevarán cursos de estadística y economía

La tabla 1 muestra las dieciséis especialidades de Letras y Ciencias Humanas que ofrece la Pontificia Universidad Católica del Perú y que llevan los cursos de Estadística (EST103) y Economía (ECO103) de Estudios Generales Letras, notándose que hay especialidades que no llevarán estos cursos.

En el curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras se tiene como texto guía el libro "Matemática para no matemáticos". Al revisar el programa analítico de este curso y la forma de abordar el tema por parte del texto no hay una justificación explícita de porque se debe desarrollar el tema función cuadrática en este nivel educativo. Por lo que al analizar las diversas especialidades de Letras y Ciencias humanas hemos encontrado argumentos a favor de su inclusión. Estos argumentos tienen que ver con la necesidad de representación de diversos objetos matemáticos que se plantean en situaciones cotidianas que se presentan en los libros de las diversas especialidades de Letras y Ciencias humanas y que serán detallados. En nuestro trabajo mostraremos las descripciones de situaciones que requieren ser representadas mediante una función cuadrática y que debe permitir resolver un problema de optimización.

A continuación mostraremos algunos temas concretos de diversas especialidades de Letras y Ciencias humanas en los que los estudiantes requerirán de la noción de función cuadrática.

En la tabla 2 se indica la especialidad, curso, capítulo y tema en los cuáles se emplea la función cuadrática como un contenido necesario para desarrollar problemas específicos en las diversas especialidades.

Especialidad	Curso	Capítulo	Tema
Ciencias políticas	Estadística para el análisis político POL-278	Construcción de modelos	Modelado de relaciones curvilíneas
Psicología	Estadística 1 EST-102	Función probabilidad	Función de distribución acumulativa
Geografía y Medio Ambiente	Técnicas de cuantificación en geografía GEO-202	Técnicas de medición de fenómenos hidrográficos	Medición con medidor de corrientes
Publicidad	Gestión empresarial (CCO-241)	Instrumentos de mercadotecnia	Función utilidad

Tabla 2: Especialidad, curso, capítulo y tema que usa aspectos de la función cuadrática

La información mostrada en la tabla 2 se logró en base a una búsqueda bibliográfica y una revisión de los programas analíticos de diversas especialidades de Letras y Ciencias humanas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Una vez consultado el programa analítico de los cursos mencionados en la tabla 2 se procedió a revisar la bibliografía de consulta por tema que está planteado para cada capítulo del curso seleccionado. Después se buscó los libros detallados en dicha bibliografía a través del catálogo en línea de la biblioteca de la Pontificia Universidad Católica del Perú y se obtuvieron los libros que trataban acerca de problemas que requieren a la función cuadrática como un conocimiento necesario. A continuación presentaremos algunos ejemplos donde se muestra evidencia del uso de la función cuadrática en problemas de algunas de las especialidades mencionadas.

En el plan de estudios de la especialidad de Ciencias Políticas se encuentra el curso Estadística para el análisis político (POL 278) como curso obligatorio. En dicho curso se mencionan y desarrollan diversos modelos que relacionan una variable dependiente con una o más variables independientes. En este sentido un objetivo que es planteado en este capítulo es reconocer la construcción de un modelo funcional que relacione a las variables x e y.

Dentro de los modelos considerados en el texto se ha identificado el que corresponde a la expresión cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$. Según se señala en el texto de Anderson, Sweeney y Williams (2004), los valores de las constantes reales *a, b, c* son estimadas por medio de las ecuaciones que se obtienen por el método de los mínimos cuadrados.

A continuación en las figuras 1 y 2 mostramos un ejemplo propuesto y comentado como un caso de regresión lineal simple y regresión lineal múltiple. Este caso está propuesto por Anderson, Sweeney y Williams (2004).

> Para modelar la relación entre peso corporal y y cantidad de metionina x adicionada al alimento para aves de corral, los investigadores de Monsanto emplearon el análisis de regresión. Al principio se obtuvo la siguiente ecuación de regresión lineal estimada.
>
> $$\hat{y} = 0.21 + 0.42x$$
>
> Esta ecuación estimada de regresión resultó estadísticamente significativa; sin embargo, de acuerdo con el análisis de residuales una relación curvilínea parecía ser un modelo más adecuado para la relación entre peso corporal y metionina.

Figura 1: Descripción del caso Monsanto. Uso de la regresión lineal.
Fuente: Anderson, 2004, p. 669

En la figura 1 se muestra la expresión lineal que modela la relación entre el peso corporal del ave $\hat{y}$ (variable dependiente) y la cantidad de metionina x (variable independiente) adicionada al alimento para aves de corral.

La expresión matemática $\hat{y} = 0{,}21 + 0{,}42\,x$ relaciona a las variables x e $\hat{y}$ con los valores constantes 0,21 y 0,42. Las constantes fueron halladas con el método de mínimos cuadrados que usa la regresión lineal.

Cabe señalar que este problema no corresponde propiamente a uno de función lineal, pues los datos originales no tienen este tipo de relación, lo que se propone es que dada una serie de puntos de la forma $(x;\ \hat{y}\ )$, se busca ajustar por el método de mínimos cuadrados estos puntos, logrando una línea de tendencia que corresponde a la relación dada entre los puntos.

Para el ejemplo mostrado en la figura 1 se asocia una expresión lineal que relaciona a dos variables x e $\hat{y}$ por medio de la expresión: $\hat{y} = a + bx$.

Podemos establecer una equivalencia que se da entre la expresión lineal y la función lineal por lo que se puede hacer una correspondencia entre dos puntos y ajustar a la representación gráfica de una línea recta todos los puntos dados.

Con otras investigaciones realizadas por Monsanto se demostró que, aunque pequeñas cantidades de metionina tienden a aumentar el peso corporal, en determinado momento éste se nivelaba y, aun con más cantidad de metionina, se producían beneficios pequeños o nulos. De hecho, cuando la cantidad de metionina aumentaba sobre los requisitos dietéticos, el peso corporal tendía a declinar. Para modelar la relación curvilínea entre el peso corporal y la metionina se usó la siguiente ecuación de regresión múltiple estimada:

$$\hat{y} = -1.89 + 1.32x - 0.506x^2$$

El empleo de los resultados de la regresión permitió a Monsanto determinar el nivel óptimo de la metionina que se emplea en sus productos alimenticios avícolas.

¿Cómo se estimó la relación curvilínea cuadrática de regresión múltiple, entre el peso corporal y la metionina?

Figura 2: Descripción del caso Monsanto. Uso de la regresión múltiple.
Fuente: Anderson, 2004, p. 669

Finalmente, en la figura 2 se muestra la relación entre la cantidad de metionina adicionada para el alimento de las aves (x) y el peso corporal de las aves ($\hat{y}$). La expresión cuadrática siguiente: $\hat{y} = a + bx + cx^2$, según la solución propuesta, es la más adecuada para aproximar la relación entre el peso corporal $\hat{y}$ y la cantidad de metionina x, porque conforme se acerque al vértice de la gráfica de la regla de correspondencia propuesta en la figura 3 se estabilizará el peso corporal. Además para valores mayores al requerimiento nutrimental que se da en el vértice de la parábola (cantidad óptima), el peso corporal disminuye y tiende a un valor constante para cada valor de x.

Para la aproximación entre x e $\hat{y}$ se usa una relación cuadrática $y = a + bx + cx^2$, en donde a, b, c son constantes reales que deben estimarse con las ecuaciones que se obtienen por el método de mínimos cuadrados que describe el mejor ajuste.

La solución plantea hallar los valores de las constantes numéricas *a, b, c* a partir de las siguientes ecuaciones, siendo *x* la cantidad de metionina adicionada en el alimento de las aves e *Y* es el peso corporal de las aves.

$$\sum_{i=1}^{n} Y = an + c \sum_{i=1}^{n} x^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 Y = a\ c \sum_{i=1}^{n} x^2 c \sum_{i=1}^{n} x^4$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} xY}{\sum_{i=1}^{n} x^2}$$

Los datos del peso corporal de las aves de corral ($\hat{y}$) y la correspondiente cantidad de metionina que se usa en la alimentación de las aves (x), nos permiten hallar los siguientes valores: $\sum_{i=1}^{n} Y$; $\sum_{i=1}^{n} x^2$; $\sum_{i=1}^{n} x^2 Y$; $\sum_{i=1}^{n} x^4$; $\sum_{i=1}^{n} xY$ y n.

Una vez resuelta las ecuaciones mencionadas anteriormente se estiman las constantes reales *a, b, c*, con los valores a = - 1,89, b = 1,32 y c = -0,506 y se obtiene la función cuadrática: $\hat{y} = -1{,}89 + 1{,}32x - 0{,}506x^2$.

En la figura 3 se muestra la representación gráfica de la expresión cuadrática propuesta en la figura 2, que indica el mejor ajuste para los valores de peso corporal y cantidad de metionina.

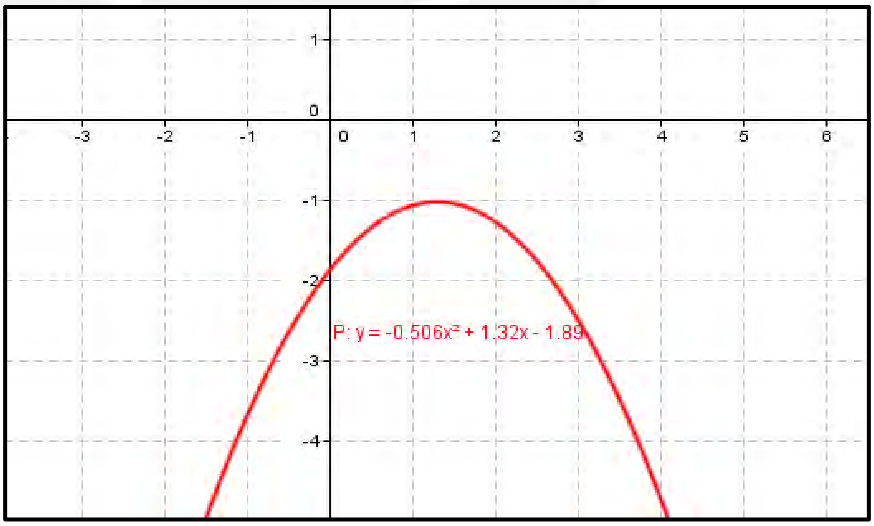


Figura 3: Representación gráfica de la expresión cuadrática propuesta en la figura 2.

Si bien el ejemplo presentado en la figura 2 no es propiamente de función cuadrática, pues corresponde a representaciones curvilíneas ajustadas por el método de los mínimos cuadrados, existe una relación con la función cuadrática pues la expresión que se obtiene es del tipo $f(x) = a + bx + cx^2$.

A partir de lo anterior, se tiene que, como los ejemplos propuestos en el libro de Anderson, Sweeney y Williams (2004) para estudiantes de la especialidad de Ciencias Políticas se exige que las expresiones que relacionen los valores de dos variables que provienen de contextos diferentes se modelen por medio de una expresión algebraica cuadrática.

Para el trabajo con regresión en Ciencias Políticas es importante conocer los siguientes aspectos de la función cuadrática:

- La variable dependiente e independiente en el planteamiento de una función cuadrática.
- Los valores de los coeficientes de la función cuadrática son valores reales.
- La regla de correspondencia de la función cuadrática es $f(x) = a + bx + cx^2$.

También en la especialidad de Psicología se desarrolla como parte de su plan de estudios el curso Estadística 1 (EST 102) y en este curso solo para estudiantes de Psicología trabajan el tema función de distribución acumulativa que usa aspectos de la función cuadrática, tales como la gráfica de la función, planteamiento de la regla de correspondencia para una función cuadrática y el cálculo de los valores de las imágenes de la variable estadística para diversos números.

A continuación, mostramos un ejemplo propuesto en la figura 4 sobre el uso de la función cuadrática en estadística.

EJEMPLO 6.13

La utilidad neta diaria en miles de dólares de las ventas de cueros para zapato de la empresa "CURTISA" es una variable aleatoria X, cuya función de densidad está definida por la gráfica que sigue:

a) Determine el valor de la constante c y defina la función de densidad de X.

b) Defina y grafique la función de distribución acumulativa $F(x)$ de X. Aplicando esta función calcule el porcentaje de días que la utilidad está entre 1250 y 2500 dólares.

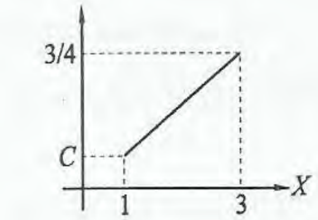


Figura 4: Ejemplo planteado sobre el tema función de distribución acumulativa
Fuente: Córdova, 2009, pp. 214 y 215

El ejemplo que se muestra en la figura 4 ha sido extraído del texto de Córdova (2009) y corresponde a un problema contextualizado sobre la función de distribución acumulativa donde se describe una situación para una empresa de venta de cueros de zapatos. En el enunciado del problema se describe las características de la variable aleatoria y se la relaciona con un gráfico que muestra su función densidad.

En la parte b) del enunciado del problema descrito en la figura 4 se debe hallar una nueva función llamada función distribución acumulativa. Por otro lado, la función densidad y la función distribución acumulativa, se vincularán a través de las operaciones que propone el tema función probabilidad de la estadística.

Desde el punto de vista estadístico, la función densidad representa a una función que no tiene puntos por debajo del eje de las abscisas y que el área total por debajo de la curva que es representado por su regla de correspondencia es uno. También que la probabilidad es igual al área debajo de la curva que representa la función densidad.

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua *X* que proviene de una función de densidad es el área acumulada hasta un valor *x* de la variable aleatoria *X*.

SOLUCIÓN

a) Si el área que encierra la figura con el eje X es igual a uno, entonces, $c = 1/4$

La función de densidad de X es descrita por: $y = f(x)$ que se obtiene de la ecuación de la recta "punto pendiente": $y - 1/4 = m(x-1)$, donde, $m = (3/4 - 1/4)/(3-1)$. Luego,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}, & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Figura 5: Solución pregunta 6.13 parte a) del libro "Estadística descriptiva e inferencial"
Fuente: Córdova, 2009, p. 215

En la solución propuesta en la figura 5 cuando se usa la ecuación de recta punto pendiente $y - \frac{1}{4} = m(x - 1)$, se hace referencia a cinco términos, estos son: la variable independiente *x*, la variable dependiente *y*, la abscisa de un punto de paso de la recta, la ordenada de un punto de paso de la recta y la pendiente de la recta.

Los cálculos algebraicos permiten obtener la expresión.

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x - 1).$$

Luego: $y - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$.

Finalmente: $y = \frac{x}{4}$

El resultado final mostrado indica la regla de correspondencia de la función densidad.

b) La función de distribución acumulativa de X se define de la siguiente manera:

$F(x) = 0$, si $x < 1$ y $F(x) = 1$, si $x \geq 3$.

Si $1 \leq x < 3$, $F(x) = \int_1^x \frac{t}{4} dt = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}$.

Entonces,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{8}, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Figura 6 : Solución pregunta 6.13 parte b) del libro "Estadística descriptiva e inferencial"
Fuente: Córdova, 2009, p. 215

En la figura.6 se muestra la solución de la parte b) del ejemplo 6.13. En la solución de este ejemplo se tiene una regla de correspondencia para cada dominio que se plantea. Dos de los casos son: $F(x) = 0; x < 1$ y $F(x) = 1; x \geq 3$, representándose por medio de una función por tramos, que se escribe $F(x) = 0$, *si* $x < 1$ y $F(x) = 1$, si $x \geq 3$.

Por otro lado, también se plantea $F(x) = \frac{x^2-1}{8}$; $1 \leq x < 3$, pero para este caso se usó un operador para el cálculo de la expresión algebraica, tal como: $F(x) = \int_1^x \frac{t}{4} dt$ y se obtuvo $F(x) = \frac{x^2-1}{8}$. Finalmente, se plantea la función distribución acumulativa.

En este sentido en la resolución de la parte b) de este ejemplo, los alumnos deben entender porque se escribe $F(x) = 0$, si $x < 1$ y $F(x) = 1$, si $x \geq 3$ y para lograrlo requieren conocer el concepto de función de distribución acumulativa.

La gráfica de esta función de distribución acumulativa es la figura 6-8.

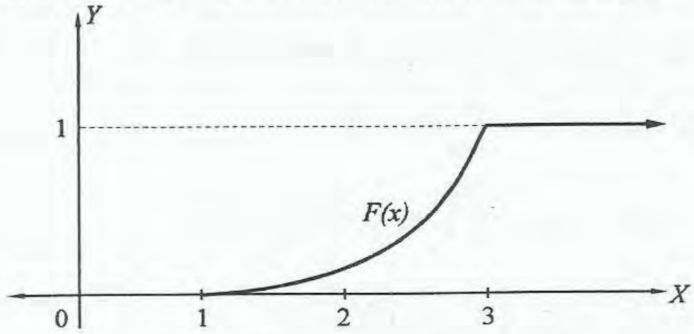


Figura 6.8 *Gráfica de* $F(x)=(x^2-1)/8$

Por otro lado, el porcentaje de días que la utilidad está entre 1250 y 2500 dólares es:

$$P[1.25 \leq X \leq 2.5] = F(2.5) - F(1.5) = 0.58594$$

Figura 7: Continuación de la solución pregunta 6.13 parte c) del libro "Estadística descriptiva e inferencial"
Fuente: Córdova, 2009, p. 215

En la figura 7 se muestra la representación gráfica de la función distribución acumulativa de x que se indicó en la figura 6.

Para el trabajo con la función distribución acumulativa en Psicología es importante conocer los siguientes aspectos de la función cuadrática:

- La representación gráfica de la regla de correspondencia de una función cuadrática.
- La ubicación de pares ordenados que son puntos de paso de la función en el plano cartesiano.
- La regla de correspondencia de la función cuadrática es $f(x) = a + bx + cx^2$.

Por otro lado, en la especialidad de Geografía y Medio Ambiente propone en el plan de estudio el curso Técnicas de cuantificación en geografía (GEO 202) como curso obligatorio. En el desarrollo de este curso se plantea el capítulo de técnicas de medición de fenómenos hidrográficos y uno de los temas que se desarrolla es la medición de la corriente de un caudal.

En el desarrollo del tema mencionado se usan aspectos de la función cuadrática como: la representación gráfica de la función cuadrática y la ubicación de puntos de paso de la gráfica de la función en un plano.

En el libro Hidrología para ingenieros de Linsley, Kohler y Paulhus (1967) se plantea un ejemplo acerca del tema propuesto, como se muestra en la figura 8.

Para la aplicación práctica del método hay que dividir la corriente en secciones verticales (Fig. 4-8). Ninguna sección deberá comprender más del 10 por 100 del caudal total; normalmente se divide en 20 ó 30 secciones verticales. La velocidad varía, aproximadamente, siguiendo una parábola (Fig. 4-9) desde cero en el fondo del cauce, hasta un máximo en la superficie o próximo a ella. Basándose en muchas mediciones, la variación en la mayoría de los cauces es tal, que la media de velocidades a una profundidad de 0,2 y 0,8 de la total, a partir de la superficie, es igual a la velocidad media en la misma vertical.

En la Fig. 4-10 se representa un impreso de recopilación de datos para mediciones de corrientes.

Velocidad en pies por segundo	Fracciones de la profundidad total
0	0
2	0.18
4	0.5

Fig. 4-10. Velocidades de una corriente para distintos valores de profundidad total

Represente gráficamente la función que relaciona a las fracciones de profundidad total y a la velocidad de la corriente del caudal.

Figura 8: Ejemplo propuesto del libro "Hidrología para ingenieros"
Fuente: Linsley, 1967, p. 75

En la figura 8 se explica cómo se mide la velocidad de la corriente de un caudal de agua por medio de secciones para luego obtener las velocidades de la corriente del caudal de agua para distintos valores de profundidad. La tabla que se muestra en la figura 8 destaca tres valores de velocidades de la corriente del caudal de agua en pies por segundo respecto a la fracción de la profundidad total.

Los conocimientos matemáticos que se movilizan se basan en reconocer la correspondencia de una variable respecto a otra en el marco de un problema contextualizado.

También se debe establecer relación entre la representación de pares ordenados y la representación gráfica de los mismos.

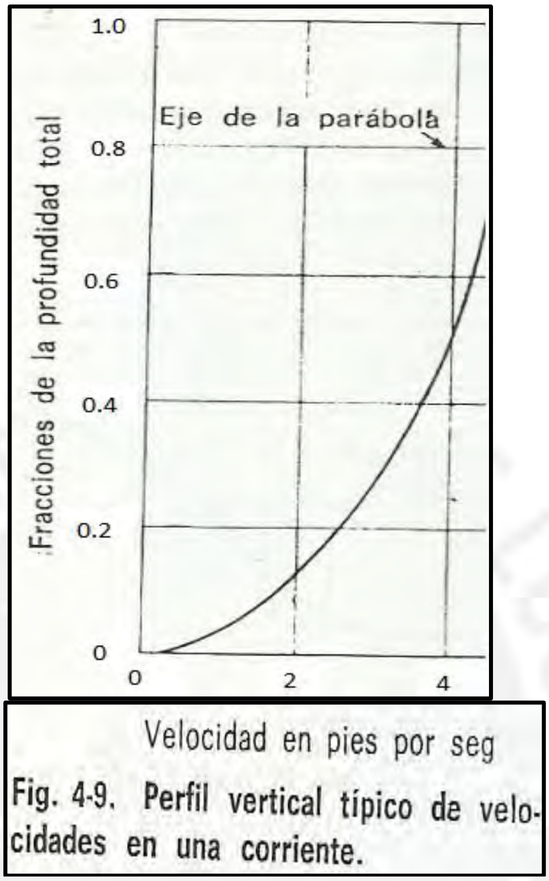


Figura 9: Gráfica de la función cuadrática solución del ejercicio propuesto del libro "Hidrología para ingenieros"
Fuente: Linsley, 1967, p. 75

En la figura 9 se muestra la solución del ejercicio propuesto y se observa los puntos de paso mencionado en la figura 8.

La solución presentada en el texto de Linsley, Kohler y Paulhus (1967) indica que la representación gráfica se hace por medio de una función polinomial y que se escoge la cuadrática porque en la tabla de la figura 8 se muestran tres puntos de paso. Luego, usando la relación: $y = ax^2 + bx + c$ y reemplazando los valores de la tabla se resuelve un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se llega a la regla de correspondencia cuya representación gráfica (solución del ejemplo) se muestra en la figura 9.

Para la solución de este ejercicio se debe saber lo siguiente:

- Como se ubican puntos de paso de la gráfica de una función de segundo grado en el plano cartesiano.
- Representar la gráfica de una función cuadrática en el plano cartesiano.

Finalmente, en la especialidad de Publicidad se tiene como parte de su plan de estudios el curso Gestión empresarial (CCO 241). El curso está en el plan de estudios de la especialidad de Publicidad como curso obligatorio de sexto ciclo. Los alumnos de esta especialidad desarrollan temas de mercadotecnia aplicada y emplean instrumentos tales como: función costo, función venta y función utilidad.

A continuación mostramos un ejemplo propuesto y resuelto de Kotler (1973). La figura 10 muestra el ejemplo propuesto en donde se pide la ecuación de la utilidad en función del precio, la gráfica de la función utilidad y el valor del precio que maximizará las utilidades corrientes.

Hallar el mejor precio

Un fabricante de grabadoras de alta calidad está preparándose para fijar un precio a un nuevo modelo que lanzará al mercado. Los ejecutivos de mercadotecnia son consultados para que estimen las probables ventas semanales a diferentes niveles de precios y se halla la siguiente ecuación, llamada ecuación de la demanda, para dar una respuesta satisfactoria a sus estimaciones:

$$Q = 1000 - 4P \tag{2-41}$$

Los contadores de costos estiman que los costos totales probables se expresarán, para un nivel de ventas determinado, por la ecuación del costo:

$$C = 6000 + 50Q \tag{2-42}$$

Estas dos ecuaciones proporcionan toda la información necesaria para hallar el precio que maximizará las utilidades corrientes.

Figura 10: Problema propuesto en el libro Mercadotecnia aplicada
Fuente: Kotler, 1973, p. 49

La figura 10 muestra el enunciado de un problema que nos permite hallar el mejor precio para las ventas semanales de un nuevo producto que se introducirá en el mercado.

La ecuación de la demanda $Q = 1000 - 4P$ relaciona al precio (P) en dólares de un artículo y la cantidad de unidades de grabadoras vendidas (Q), esta expresión matemática se plantea como una relación entre P y Q en donde indistintamente se puede relacionar Q como función de P o la magnitud P como función de Q.

La ecuación de costo total $C = 6000 + 50Q$ relaciona el costo total en dólares (C) y la cantidad de unidades de grabadoras producidas. Matemáticamente la expresión del costo es una relación lineal entre C y Q, pero en el contexto nos indica que para cero grabadoras producidas hay un costo de 6000 dólares y que por cada unidad adicional producida el costo total aumenta en 50 dólares.

La solución de este ejemplo propuesto se muestra en las figuras 11 y 12 y en éstas se hace uso de una representación algebraica y gráfica de la función utilidad.

Estas dos ecuaciones proporcionan toda la información necesaria para hallar el precio que maximizará las utilidades corrientes. La ecuación de utilidad es

$$Z = PQ - C \tag{2-43}$$

y mediante substituciones, se obtiene

$$Z = PQ - (6\,000 + 50Q)$$
$$Z = P(1\,000 - 4P) - 6\,000 - 50\,(1\,000 - 4P)$$
$$Z = 1\,000P - 4P^2 - 6\,000 - 50\,000 + 200P$$

Figura 11: Ejemplo resuelto de función utilidad
Fuente: Kotler, 2000, p. 49

En la figura 11 se muestra la relación matemática que permite hallar la utilidad total por la fabricación y venta de grabadoras de alta calidad en dólares.

El ejemplo pide obtener el precio que maximizará la utilidad para esto se obtiene la expresión matemática de utilidad Z en dólares como función del precio P en dólares. Para lograr esto se reemplaza en la ecuación 2-43 mostrada en la figura 11 las relaciones para Q y C y se obtiene una función cuadrática.

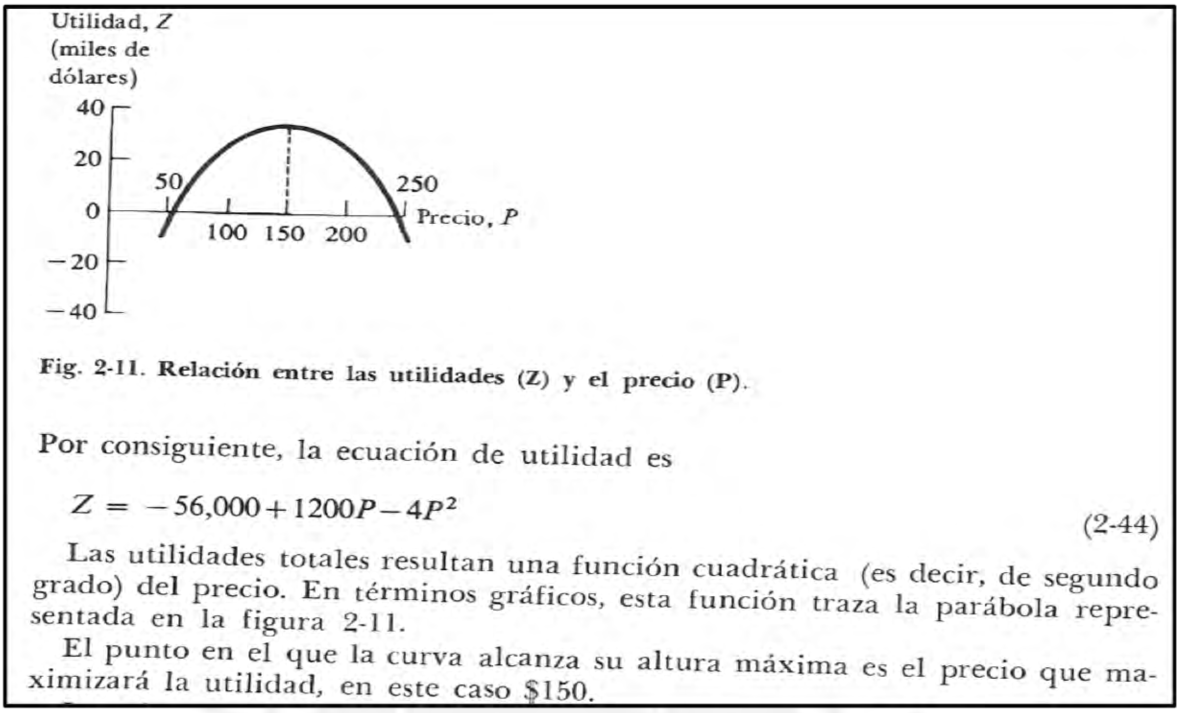


Fig. 2-11. Relación entre las utilidades (Z) y el precio (P).

Por consiguiente, la ecuación de utilidad es

$$Z = -56{,}000 + 1200P - 4P^2 \qquad (2\text{-}44)$$

Las utilidades totales resultan una función cuadrática (es decir, de segundo grado) del precio. En términos gráficos, esta función traza la parábola representada en la figura 2-11.

El punto en el que la curva alcanza su altura máxima es el precio que maximizará la utilidad, en este caso $150.

Figura 12: Ejemplo resuelto de función utilidad
Fuente: Kotler, 2000, p. 50

En la figura 12 se muestra la solución del ejemplo propuesto en la figura 10. A partir de la función de la utilidad $Z = -56000 + 1200P - 4P^2$ se realiza la gráfica de su regla de correspondencia y se reconoce el punto que maximizará las utilidades, en este caso para P igual a 150 dólares.

En síntesis, se reconoce que de la revisión realizada hasta el momento la función cuadrática resulta ser un tema pertinente en las especialidades de Letras y Ciencias Humanas, tales como: Ciencias Políticas, Psicología, Geografía y Medio Ambiente y Publicidad.

También, de la revisión de los textos se concluye que la función cuadrática está presente en el desarrollo de temas de estadística que se plantean en diversas especialidades de Letras y ciencias humanas. Además, en los temas de cuantificación en Geografía y Medio Ambiente y en los temas de optimización en Mercadotecnia. La función cuadrática se utiliza destacando algunas de las descripciones verbales que la definen, tales como: la identificación del vértice de la parábola, las intersecciones con los ejes coordenados, la concavidad, entre otros.

La representación de la función cuadrática en los libros de texto revisados se hace principalmente en su forma algebraica: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; a, b$ y $c \in \mathbf{R}$. Adicionalmente, en los libros de texto mencionados en la presente justificación presentan las variables que se usan en la representación algebraica, como: x y $f(x)$. A estas variables se les denomina variable independiente y variable dependiente, respectivamente. La relación entre las variables es de correspondencia es decir se reemplaza un valor que se asigna a la variable x para obtener el respectivo valor de la variable $f(x)$.

Por otro lado, en el trabajo con mínimos cuadrados la relación cuadrática ya se conoce y lo que se desea es ajustar una serie de puntos que no necesariamente pertenecen a la expresión cuadrática a su respectiva relación. Para lograr esto se deben hallar los valores de a, b y c de la expresión: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; a, b$ y $c \in R$.

Finalmente, de la revisión de los libros de texto, se ha encontrado que la representación gráfica en el plano cartesiano se realiza para visualizar el valor máximo o mínimo de la representación de la función cuadrática. La representación gráfica de la función cuadrática es una curva denominada parábola. Para visualizar que la concavidad es hacia arriba o hacia abajo siempre se recurre a la representación gráfica de la función cuadrática. Además en la representación gráfica se reconoce la intersección con los ejes coordenados que sirve para mostrar puntos de paso que indiquen la correspondencia entre valores de las variables descritas en los ejes coordenados.

En resumen, los estudiantes que llevan los cursos mencionados en la tabla 2 tienen que conocer aspectos importantes del trabajo con la función cuadrática como:

- Los cambios de representación al representar a la expresión algebraica de la función cuadrática en su representación gráfica.

- También interpretar los valores que se obtienen como coordenadas del vértice.

- Presentar los valores óptimos para maximizar o minimizar.

Por medio de la revisión de textos didácticos de cursos de las especialidades de Letras y Ciencias humanas de Estudios Generales Letras se reconoce que los estudiantes deben resolver problemas sobre función cuadrática, como un conocimiento necesario en temas que desarrollan diversas especialidades como por ejemplo en temas de estadística, técnicas de cuantificación, optimización, conceptos de economía y mercadotecnia.

1.2 El problema de investigación

El problema de investigación que se plantea es identificar los posibles conflictos semióticos que se presentan cuando se interpreta y resuelve problemas de un texto que involucran las funciones cuadráticas.

De acuerdo a la situación descrita proponemos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los potenciales conflictos semióticos que se presentan cuando se resuelven problemas sobre función cuadrática planteados en un texto?

A partir de esta pregunta se desprenden los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo General

Analizar los posibles conflictos semióticos cuando se desarrollan problemas de función cuadrática de un texto universitario.

Objetivos específicos

- Reconocer la información que brinda cada representación de la función cuadrática.
- Determinar las transformaciones entre registros que demandan las tareas sobre función cuadrática propuestos en un texto universitario.
- Identificar los potenciales conflictos que podrían presentarse al resolver los problemas presentados en un texto universitario.

1.3 Metodología de investigación

La presente investigación se posiciona en el paradigma de investigación cualitativa, la cual, según Martínez (2006), tiene dos centros fundamentales de actividad: recoger la información necesaria y suficiente para alcanzar los objetivos de la investigación y estructurar la información lógica y coherentemente.

Según Hernández, Fernández y Baptista (2006) la investigación cualitativa en el área de la educación matemática se caracteriza por lo siguiente:

- Se fundamenta en procesos inductivos, primero se explora y describe, y después se generan perspectivas generales.
- Se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico.
- No hay manipulación, ni estimulación con respecto a la realidad.
- Se fundamenta en una perspectiva interpretativa. En este punto es que se debe usar el marco teórico del estudio.
- No pretende generalizar de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias.

La investigación cualitativa requiere un enfoque inicial exploratorio, con énfasis en la observación participativa y en lograr entrevistas con informadores claves.

En esta línea, el análisis de contenido cumple las condiciones mencionadas por Hernández, Fernández y Baptista (2006) para una investigación cualitativa en educación matemática porque pretende conocer una entidad bien definida como los textos. Nuestro estudio, centrará en la identificación y análisis de los posibles conflictos que tendrán los estudiantes, cuando aborden problemas de un texto sobre función cuadrática. En este contexto, se buscará identificar los conflictos que presenten los estudiantes y explicar su origen, teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

1.3.1 Análisis de contenido y justificación de su elección

El interés de nuestro trabajo es el de describir y analizar los conflictos semióticos presentes en actividades que son planteadas en un texto y que involucran a las funciones cuadráticas.

Debido a que analizaremos el contenido de un texto respecto del tema función cuadrática, en nuestro estudio usaremos el método de análisis de contenido.

Según López (2002) esta metodología analiza y estudia las ideas expresadas en un texto, siendo el significado de los temas lo que se evalúa. Además, el autor del estudio afirma que el análisis de contenido se sitúa en el ámbito de la investigación descriptiva y pretende reconocer los fenómenos extrayéndolos de un contenido dado a través de un proceso que se caracteriza por la elección de una unidad de análisis y el planteamiento de indicadores.

También, López (2002) manifiesta que cuando se usa la metodología de análisis de contenido se debe dejar de lado totalmente la subjetividad. En este sentido, para realizar un análisis de contenido se debe entender el concepto como lo pensó el emisor y como lo interpreta el receptor.

Por otro lado, Piñuel (2002) afirma que el análisis de contenido es el resultado del entendimiento que se haga de un texto primitivo (o conjunto de ellos) sobre el que se ha operado una transformación por la interpretación que se le da al texto de acuerdo a unas reglas de procedimiento y análisis confiables y válidas. Asimismo, según Piñuel (2002) y Maz (2009) el análisis de contenido presenta los siguientes pasos:

- Selección de la unidad de análisis.
- Selección de las categorías o conjunto de indicadores.

- Fundamentación de las categorías o indicadores.

La metodología de análisis de contenido, que usaremos en nuestra investigación, tiene carácter cualitativo puesto que el objetivo es estudiar a las funciones cuadráticas en relación a los significados que presentan a partir de un texto.

Selección de la unidad de análisis los conforman el texto universitario "Matemática para no matemáticos" de Advíncula, Barrantes, Gaita, Henostroza, Jabo y Luna (2009) y una actividad tomada a los estudiantes del curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras. De esta unidad de análisis seleccionaremos todas las posibles representaciones que se harán de la función cuadrática cuando se resuelve un problema.

Selección de las categorías o conjunto de indicadores, se plantearán dos indicadores para evaluar los conflictos generados al resolver problemas de función cuadrática.

1. Se realiza un tratamiento para la solución de la tarea requerida en la resolución de un problema.

2. Se realiza una conversión para la solución de la tarea requerida en la resolución de un problema.

Fundamentación de la categoría o indicadores

Con la fundamentación se debe lograr la objetividad del análisis que se realizará.

1. En relación al indicador 1, se analizarán los problemas resueltos y propuestos en los que se requiere trabajar en un mismo registro de representación semiótica para que esta manera se represente de forma diferente en el mismo registro de representación semiótica y de esta manera dar solución al problema.

2. En relación al indicador 2, se analizarán los problemas resueltos y propuestos en los que se requiere cambiar a un registro de representación semiótica diferente al inicial para resolver un problema.

1.3.2 Procedimientos metodológicos

Al realizar el análisis del texto que servirá para nuestro análisis reconocemos que se producirán conflictos semióticos cuando se resuelven problemas sobre función cuadrática.

Para cumplir con el primer objetivo específico de nuestra investigación se debe reconocer la información que brinda cada representación de la función cuadrática. En este sentido, planteamos el siguiente procedimiento metodológico para alcanzar este objetivo específico.

- Describir las diversas formas de representación que tiene cada variable en un problema.

En el segundo objetivo específico de nuestra investigación se debe determinar las transformaciones entre registros que demandan las tareas sobre función cuadrática propuestos en un libro universitario. En este sentido, planteamos el siguiente procedimiento metodológico para alcanzar este objetivo específico.

- Representar a una variable en un registro.
- Realizar un tratamiento para alguna variable ya representada.
- Realizar una conversión para alguna variable ya representada.

En el tercer objetivo específico de nuestra investigación se debe identificar los potenciales conflictos que podrían presentarse al resolver los problemas presentados en un texto universitario. En este sentido, planteamos el siguiente procedimiento metodológico para alcanzar este objetivo específico.

- Identificar la representación inicial propuesta en el texto teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica.
- Identificar qué significado se le da a cada representación teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica.
- Mencionar los conflictos semióticos ante las diferencias presentadas entre las posibles soluciones y la solución maestra.

En este capítulo se presentaron los antecedentes que muestran que al resolver problemas sobre función cuadrática se generan conflictos semióticos siendo una de las principales causas el empleo de un solo registro. Además, se reconoció la pertinencia de nuestro estudio pues la función cuadrática es un tema necesario para el desarrollo de cursos de estadística y economía que estudiantes de especialidades de Letras y ciencias humanas tendrán que llevar posteriormente. Finalmente, se presentó el problema y el objetivo de investigación los cuales se refieren a analizar los posibles conflictos semióticos cuando se desarrollan problemas de función cuadrática de un texto. Asimismo, se señaló que la metodología que se usará para este trabajo se basa en el análisis de contenido, siendo la unidad de análisis un texto universitario. También se definieron los indicadores que servirán para evaluar los posibles conflictos que se generan al resolver problemas de función cuadrática en un texto. Estos indicadores se relacionan con los tratamientos y las conversiones entre registros cuando se resuelven problemas. Además, se presentó los procedimientos metodológicos que nos servirán para cumplir cada uno de los objetivos específicos de nuestro trabajo.

CAPITULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Según Duval (2006) no es posible estudiar los fenómenos relacionados al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. En la misma línea, Duval (1999) afirma que el conocimiento conceptual es el invariante de múltiples representaciones semióticas y para que este se dé, es necesario que el alumno sea capaz de interactuar entre diferentes registros de representación y delimite esas representaciones semióticas como expresiones constituidas por el empleo de signos (lenguaje, escritura, álgebra, gráficas, tablas, entre otros).

En este capítulo se presentarán aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica que nos servirán para nuestro estudio acerca de la función cuadrática.

En la línea de las informaciones que brinda cada representación de la función cuadrática, se mencionará las actividades cognitivas que caracterizan a una representación semiótica y se las relacionará con el objeto matemático función cuadrática. Se precisarán los registros de representación semiótica que se usarán en nuestro trabajo. Finalmente, se describirán las transformaciones entre diferentes representaciones semióticas en un mismo registro o cuando se transforma de un registro a otro.

Finalmente, se mencionará el concepto de conflicto semiótico y se lo relacionará con la Teoría de registros de Representación Semiótica.

2.1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para el estudio de la función cuadrática

Afirmaremos que los objetos matemáticos son inaccesibles a los sentidos por lo que deben ser representados, para esto se emplean sistemas de lenguaje que bajo ciertas condiciones se llaman registros.

Según Duval (1995) los registros de representación semiótica se definen por medio de las tres actividades cognitivas que se pueden realizar con los sistemas de representación semiótica

1) La primera actividad cognitiva que se realiza con una representación semiótica es la formación de una representación semiótica identificable. Al respecto, Duval (1995) manifiesta que formar una representación semiótica es seleccionar un conjunto de caracteres o de signos dentro de un sistema semiótico de acuerdo con las características que sirven para representar en cada registro. Como por ejemplo, al representar a una función cuadrática por la expresión $f(x) = 2x^2$ en el registro algebraico se seleccionó a las variables y el coeficiente que son las unidades constitutivas que conforman esta representación y que se encuentran dentro de un mismo sistema semiótico.

2) La segunda actividad cognitiva que se realiza con una representación semiótica es el tratamiento. El tratamiento es una transformación interna en un mismo registro. Según Duval (1995) el tratamiento permite responder una pregunta usando solo representaciones semióticas en lengua natural. También, permite solucionar un problema algebraicamente o satisfacer una necesidad gráfica usando el registro algebraico y gráfico respectivamente. Como por ejemplo, al representar a una función cuadrática por la expresión $f(x) = 4x^2 + 8x$ y luego al representarla en su forma canónica por $f(x) = 4(x+1)^2 - 4$, se realizaron los siguientes tratamientos en el registro algebraico:

Tratamiento 1, se representa a la expresión $f(x) = 4x^2 + 8x$ como el producto de dos factores, tales como: 4 y $(x^2 + 2x)$ obteniéndose la expresión $f(x) = 4(x^2 + 2x)$.

Tratamiento 2, se agrega y quita un valor a uno de los factores $x^2 + 2x + 1 - 1$ y se obtiene la expresión $f(x) = 4\ (x^2 + 2x + 1 - 1)$.

Tratamiento 3, se multiplica y se obtiene dos factores 4 y $(x^2 + 2x + 1)$ y dos sumandos $4(x^2 + 2x + 1)$ y -4 representándose la expresión por $f(x) = 4(x^2 + 2x + 1) - 4$.

Tratamiento 4, la expresión final sería $f(x) = 4(x + 1)^2 – 4$.

3) La tercera actividad cognitiva que se realiza es la transformación semiótica de la conversión. La conversión es la transformación de una representación dada en un registro en otra representación de otro registro conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. Según Duval (1995) cuando se convierte un contenido lingüístico (lengua natural) a una representación gráfica (registro gráfico) se hace una ilustración y se realiza una conversión. También cuando se representa un gráfico (registro gráfico) a través de un texto (lengua natural) se hace una descripción y por lo tanto se realiza una conversión. Finalmente, cuando se representa un conjunto de ecuaciones (registro algebraico) en un gráfico (registro gráfico) se hace una ilustración y por ende una conversión.

La conversión requiere poner en correspondencia dos tipos de representaciones, la inicial y la final. La correspondencia se establece entre las unidades constitutivas que conforman cada registro semiótico. Como por ejemplo, la representación canónica de una función cuadrática es $f(x) = (x – 1)^2 + 2$. A partir de esta expresión reconocemos las coordenadas del par ordenado (1; 2) cuya representación es un punto en el registro gráfico de coordenadas cartesianas. Este par ordenado representa el vértice de la representación gráfica de la función cuadrática. Por otro lado, el valor del coeficiente del término cuadrático de la expresión vale 1 y con esta información se puede reconocer que la representación gráfica de la función cuadrática es cóncava hacia arriba.

En la figura 13, mostramos la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x – 1)^2 + 2$.

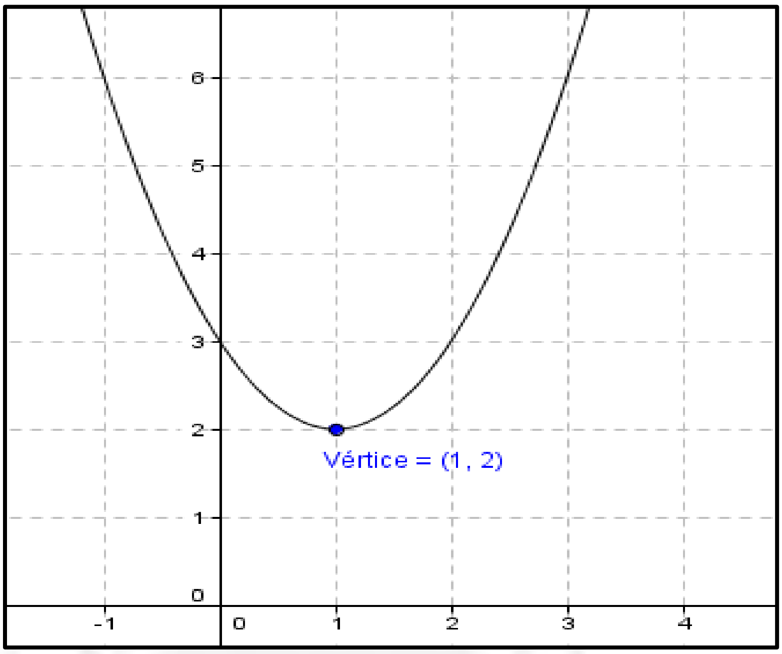


Figura 13: Representación gráfica de la función $f(x) = (x\text{-}1)^2 + 2$

En la representación gráfica de la función $f(x) = (x\text{-}1)^2 + 2$ se reconoce el punto vértice y cuya representación en el registro de pares ordenados es (1; 2). También se muestra que la gráfica es cóncava hacia arriba.

En la figura 14, Duval (2006) muestra mediante un ejemplo las transformaciones de una representación a otra. Así, la conversión y el tratamiento son los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.

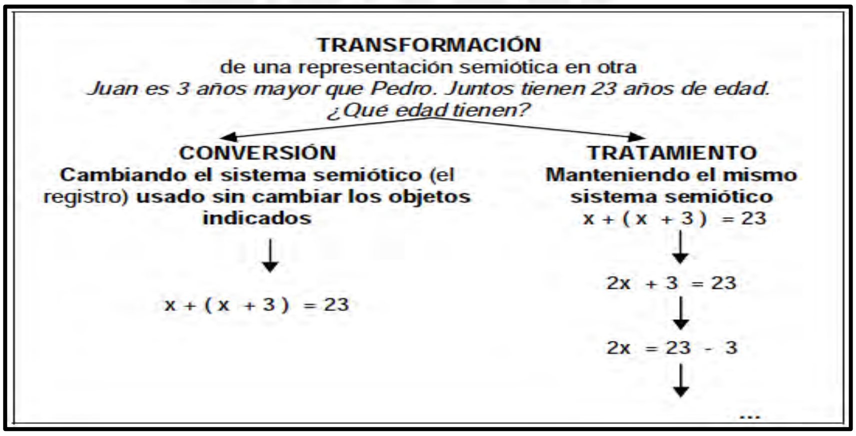


Figura 14: Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento
Fuente: Duval, 2006, p. 146

En el ejemplo mostrado en la figura 14 hay una conversión cuando se pasa de la lengua natural, así: "Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años" al registro algebraico, así: "$x + (x +3)$". Por otro lado, en el tratamiento hay una secuencia de varias transformaciones, manteniendo el mismo sistema semiótico que en este caso es el algebraico. Así, los tratamientos son los siguientes:

Tratamiento 1, se representa a las edades de las personas por medio de la variable x y $(x+3)$ y se relaciona a estas variables mediante una ecuación tal que la suma de las dos variables se le asigna el valor numérico 23, representándose la expresión descrita de la siguiente manera: $x + (x+3) = 23$. En el mismo registro algebraico se realiza un tratamiento para representar a la expresión anterior como la suma de dos sumandos $(2x)$ y 3 y también se le asigna el valor numérico 23.

Tratamiento 2, se representa la expresión anterior como una ecuación como una sola expresión algebraica, es decir (2x), en el primer miembro de la ecuación al cuál se le asina el valor numérico 23 – 3 en el segundo miembro de la ecuación.

Afirmaremos que la conversión y el tratamiento están relacionados en el mismo proceso matemático de resolución de un problema. Por otro lado, en la conversión las letras dentro de las ecuaciones representan números determinar en su resolución.

A partir de los conceptos desarrollados respecto a los registros de representación semiótica, Duval (2006) reconoce que una estrategia matemática debe combinar tratamientos y conversiones, siendo muy importante la diferenciación funcional de registros de representación.

Algunos registros de representación semiótica empleados en matemática son los siguientes:

Registro lengua natural

En la lengua natural se usa una descripción lingüística para la construcción de este registro. También, se realizan procesos cognitivos en ésta descripción lingüística que permite la determinación de una representación identificable, es decir una representación en lengua natural se relaciona con la descripción que se pueda hacer de la variable que se declara en el texto de un problema.

El registro lengua natural tiene una propiedad genética sobre los otros registros, es decir, para la reproducción de expresiones lingüísticas complejas apoyada en la gramática y que permite describir frases complejas sintácticamente.

Según Duval (1995) el registro lengua natural tiene variaciones en la formación de su representación semiótica identificable si proviene de los siguientes dos tipos de unidades: expresiones referenciales y proposiciones. Además, menciona que se trata de describirlas excluyendo el empleo de pronombres.

Se puede describir a la función cuadrática en lenguaje natural. A partir de esto se puede realizar una descripción tal como: "su gráfica se abre hacia arriba" y esto nos debe permitir la forma del trazo de la curva que nos sirve para representar a la función.

En la tabla 3, por ejemplo, se muestran algunas descripciones en lengua natural que se utilizan para la representación de una función cuadrática.

Descripción en lengua natural
La gráfica de la función cuadrática es cóncava hacia arriba
La gráfica de la función cuadrática es cóncava hacia abajo
Hay una intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con el eje Y
Hay dos intersecciones de la representación gráfica de la función cuadrática con el eje X
Hay solo una intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con el eje X
No hay intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con el eje X
La función cuadrática posee un valor mínimo
La función cuadrática posee un valor máximo

Tabla 3: Algunas descripciones lingüísticas en lengua natural usadas para la representación de una función cuadrática

En la tabla 3 se mostró que solo las expresiones lingüísticas son usadas en la descripción de una función cuadrática en lengua natural. Según Duval (2005) esto se debe a que las variaciones léxicas o sintácticas posibles en el registro son pertinentes cognitivamente para lograr una representación identificable.

Por otro lado, afirmaremos que la conversión de lengua natural a otro registro provee al estudiante de una mejor retroalimentación de la información y por lo tanto es una transformación muy necesaria. En este sentido, se puede reconocer que cuando se hace una conversión de la representación de un registro en lengua natural a otro registro se logra en el estudiante un aprendizaje cognitivamente adecuado, porque el estudiante tiene que interpretar las descripciones dadas en lengua natural.

A continuación, mostraremos en la tabla 4, la representación de una función cuadrática en el registro lengua natural e indicaremos su respectiva representación en el registro algebraico.

Lengua natural	Registro algebraico
La expresión que representa a la función cuadrática tiene coeficiente principal 2 y la representación gráfica de la función cuadrática intersecta al eje de las abscisas en un solo punto cuya abscisa es 3.	$f(x) = 2(x\text{-}3)^2$.

Tabla 4: Ejemplo de conversión de la representación de una función cuadrática del registro lengua natural al registro algebraico

En la tabla 4 se representó a una función cuadrática en lengua natural y en el registro algebraico. En lengua natural se hace una descripción de la intersección de la representación gráfica con el eje de las abscisas y esto nos permite reconocer que el vértice de la representación gráfica es representado por el par ordenado *(3; 0)*. De esta manera, a partir de la representación canónica de la función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el valor de h es 3 y el valor de k es 0. También, el valor del coeficiente principal es 2 por lo tanto el valor de a es 2.

Registro algebraico

En el registro algebraico se da la formación de una representación semióticamente identificable. En esta línea, Duval (1988) menciona que en una expresión algebraica aparecen elementos constitutivos como: las variables x y $f(x)$, signos relacionales, símbolos de operación o signo, símbolos de variable y símbolos de exponente, coeficiente y constante. Donde cada signo o símbolo tiene una significación por sí misma.

En la tabla 5 se muestra los elementos constitutivos en el registro algebraico para la representación de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

Elementos constitutivos	Significado
Variables *x, f(x)*	La variable f(x) representa a la variable dependiente de una función.
Signo =	Relaciona la variable dependiente e independiente de la función.
Símbolo +	Hay una operación de adición entre los términos de la representación algebraica que representa a la función.
Coeficientes	Son los números que pertenecen al conjunto de los números reales que se asignan a los coeficientes.

Tabla 5 : Elementos constitutivos en el registro algebraico usados para la representación de la función cuadrática

A partir de la tabla 5 se puede reconocer a los elementos constitutivos que conforman la regla de correspondencia o ley de correspondencia de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Por otro lado, cuando representamos una función cuadrática en el registro algebraico como: $f(x)= ax^2 + bx + c$; y usando tratamientos en el mismo registro se expresa como: $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, se reconocen los mismos elementos constitutivos declarados en la tabla 5.

Las informaciones que nos dan estas dos representaciones son distintas. En el caso de $f(x)= ax^2 + bx + c$, reconocemos el valor de *a* que puede ser un número positivo o negativo y que nos indica si la función posee un máximo o un mínimo, respectivamente. Además, también reconocemos el número c cuyo valor nos indica en que punto el eje de las ordenadas es cortada por la gráfica de la función cuadrática.

Por otro lado, $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ nos permite reconocer cual es el valor máximo o mínimo de la función. Cuando $a > 0$, la función cuadrática posee un valor mínimo que es $\frac{4ac-b^2}{4a}$. Además, cuando $a < 0$, la función cuadrática posee un valor máximo cuyo valor es $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

A continuación presentaremos un ejemplo de una conversión:

Representación de la función cuadrática en el registro algebraico.

$f(x) = x^2 - 4x + 7, x \in R$

Representación de la función cuadrática en el registro gráfico de coordenadas cartesianas.

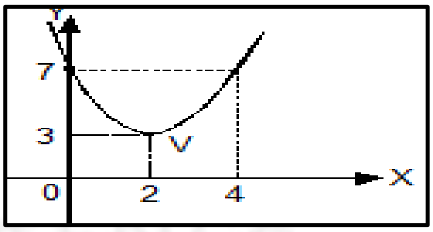


Figura 15 : Representación en el registro gráfico de $f(x) = x^2 -4x + 7, x \in R$

En la figura 15, se muestra la representación en el registro gráfico de una función cuadrática, además se muestra el punto que representa al vértice de la función cuadrática y el punto que representa a la intersección de la representación gráfica con el eje *Y*.

Registro gráfico en coordenadas cartesianas

Según Duval (1988) se requiere unidades de base representativas para representar a las figuras en el registro gráfico, tales como: el trazo (línea recta o línea curva) y el contorno (abierto o cerrado). Para el cao de la función cuadrática es necesario utilizar un trazo curvo y un contorno abierto.

Por otro lado, según Duval (1988) son necesarios los siguientes tratamientos en un registro gráfico:

- La identificación de puntos en el plano cartesiano que permitirán realizar el trazo.
- La interpolación o extrapolación de puntos en el plano cartesiano.

Para el caso de la función cuadrática los puntos que se identifican son las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice de la parábola.y cuando estos se encuentran representados en el plano cartesiano se puede realizar el trazo de la función cuadrática.

La conversión de la representación del registro algebraico hacia el registro gráfico se plantea teniendo en cuenta como registro de partida a dos tipos de representaciones, tales como:

- $f(x)=ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b y c $\in R$
- $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, $a \neq 0$, a, b y c $\in R$

La representación de la función cuadrática que tiene como regla de correspondencia $f(x)=ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b y c $\in R$ en el registro gráfico se representa por medio de un trazo curvo y abierto y que intersecta al eje de las ordenadas en la ordenada *c*.

Además, en el registro gráfico se observa lo siguiente:

- Si $c > 0$, entonces el punto de intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con los ejes coordenados se ubicará en el semieje positivo de las ordenadas.
- Si $c = 0$, entonces el punto de intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con los ejes coordenados se ubicará en el origen de coordenadas.
- Si $c < 0$, entonces el punto de intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con los ejes coordenados se ubicará en el semieje negativo de las ordenadas.

La representación en el registro gráfico de la función *f* es una parábola que corta al eje de las ordenadas en *c*, y que puede ser representado de dos formas dependiendo del valor de *a* según se muestra en la figura 16.

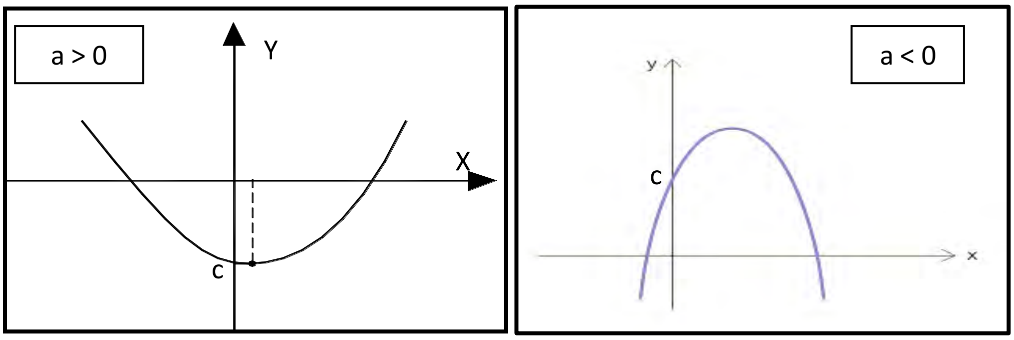


Figura 16: Dos representaciones gráficas de la función cuadrática $f(x)=ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ $a,\ b$ y c Є R

Por otro lado, la representación gráfica de la regla de correspondencia: $f(x) = a(x - \frac{.b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, tiene como vértice el par ordenado $(\frac{.b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a})$ y es de trazo curvo y abierto. También se reconoce que la representación gráfica de la función cuadrática es simétrica respecto a la recta x = $\frac{-b}{2a}$. Además, si a > 0, entonces se tiene un trazo ascendente para $x \in [\frac{-b}{2a}; \infty[$ y otro trazo descendente para $x \in]-\infty; \frac{-b}{2a}]$. Finalmente, se reconocerá que el valor mínimo de la función es $\frac{4ac-b^2}{4a}$ .En la figura 17, se muestra la representación gráfica de la función *f(x).*

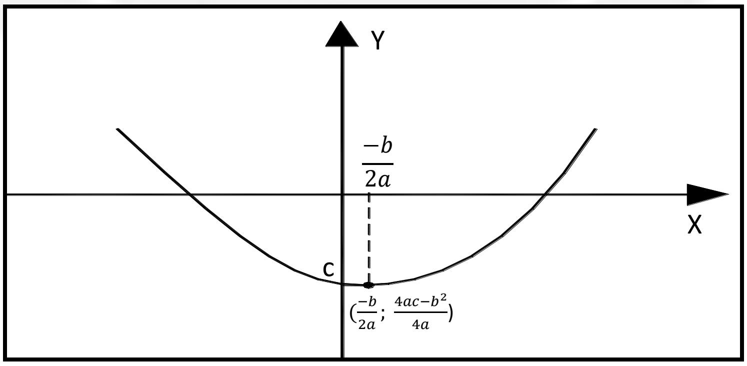


Figura 17: Representación en el registro gráfico de una función $f(x) = a(x - \frac{.b}{2a})2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ con $a > 0$.

En el gráfico mostrado en la figura 17 se reconoce la representación del vértice como un punto y el valor mínimo de la función *f* a $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Además, representación gráfica de la regla de correspondencia: $f(x) = a(x - \frac{.b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, tiene las mismas características. Pero, si $a < 0$, entonces se tiene un trazo ascendente para $x \in]-\infty; \frac{-b}{2a}]$ y otro trazo descendente para $x \in [\frac{-b}{2a}; \infty[$. Finalmente, se reconocerá que el valor máximo de la función es $\frac{4ac-b^2}{4a}$ .En la figura 18, se muestra la representación gráfica de la función *f(x).*

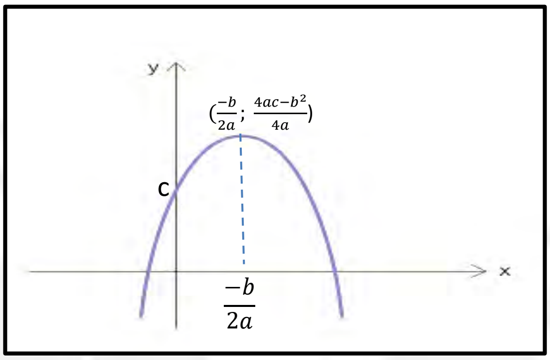


Figura 18: Representación en el registro gráfico de una función $f(x) = a(x - \frac{.b}{2a})2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ con $a < 0$.

En el gráfico mostrado en la figura 18 se reconoce la representación del vértice como un punto y el valor máximo de la función *f* a $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

A continuación mostraremos diversas representaciones de la función cuadrática en el registro algebraico los cuales son obtenidas por medio de tratamientos de las representaciones de la función cuadrática en el registro algebraico:

- $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in R.$
- $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}, a \neq 0.$
- $f(x) = a(x - r)\ (x - s), a \neq 0.$

En la tabla 6 se muestra tres representaciones algebraicas de la función cuadrática y las distintas informaciones que nos dan cada una de ellas, tales como: la concavidad de la representación gráfica, la intersección con los ejes coordenados del plano cartesiano, el vértice de la representación gráfica, la simetría de la representación gráfica, entre otras.

Representaciones de la función cuadrática en el registro algebraico	Informaciones que proporciona cada representación gráfica
$f(x) = ax^2 + bx + c$	El valor de *a* nos da información de la concavidad de la representación gráfica de la función cuadrática. • Si $a > 0$, la representación gráfica es cóncava hacia arriba. • Si $a < 0$, la representación gráfica es cóncava hacia abajo. El valor de *b* nos da información del signo de la abscisa del vértice. • Si $b > 0$ y $a > 0$, la abscisa del vértice es negativa. • Si $b = 0$, la abscisa del vértice es cero. • Si $b < 0$ y a > 0 la abscisa del vértice es positiva. El valor de *c* nos da información del punto de intersección de la ´representación gráfica con el eje Y del plano cartesiano. • Si $c > 0$, el punto de intersección es $(0;\ c)$ y está en el semieje positivo del eje Y. • Si $c = 0$, el punto de intersección es $(0;\ 0)$ y está en el origen de coordenadas del plano cartesiano. • Si $c < 0$, el punto de intersección es $(0;\ c)$ y está en el semieje negativo del eje Y.
$f(x) = a(x - h)^2 + k$	El valor de a nos da información de la concavidad de la representación gráfica de la función cuadrática. • Si $a > 0$, la representación gráfica es cóncava hacia arriba. • Si $a < 0$, la representación gráfica es cóncava hacia abajo. El par ordenado que representa al vértice de la representación gráfica de la función cuadrática es $(h;\ k)$. La función cuadrática posee un valor óptimo. • Si $a > 0$, la función cuadrática posee un mínimo para $x = h$ y el valor mínimo es *k*. • Si $a < 0$, la función cuadrática posee un máximo para $x = h$ y el valor máximo es *k*. La representación gráfica de la función cuadrática es simétrica respecto a la recta $x = h$.
$f(x) = a(x - r)(x - s)$	El valor de a nos da información de la concavidad de la representación gráfica de la función cuadrática. • Si $a > 0$, la representación gráfica es cóncava hacia arriba. • Si $a < 0$, la representación gráfica es cóncava hacia abajo. Los valores x = r y x = s nos da información de los puntos de intersección de la representación gráfica con el eje X. • Si $x = r$, un punto de intersección de la representación gráfica con el eje X es $(r;\ 0)$. • Si $x = s$, un punto de intersección de la representación gráfica con el

	eje X es *(s; 0)*. La abscisa del vértice de la representación gráfica es $h = \frac{r+s}{2}$. La representación gráfica de la función cuadrática es simétrica respecto a la recta $x = \frac{r+s}{2}$.

Tabla 6: Tres representaciones algebraicas de la función cuadrática y las distintas informaciones que brindan.

En la tabla 6 se muestra que las tres representaciones de la función cuadrática en el registro algebraico mencionadas nos dan la información de la concavidad de la gráfica de la función cuadrática en el registro gráfico. Por otro lado, se puede obtener la información de los puntos de intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con los ejes coordenados del plano cartesiano. Así en la representación $f(x) = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0$ se reconoce que el punto de intersección entre la representación gráfica de la función cuadrática y el eje Y es *(0; c)*. Para poder determinar los puntos de intersección del eje X con la representación gráfica de la función cuadrática, se realiza un tratamiento para representar a la función cuadrática $(x)=ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ como: $f(x) = a(x - r)(x - s),\ a \neq 0$. De esta manera, se reconoce que los puntos de intersección son: (r; 0) y (s; 0).

2.2 Conflictos semióticos

Según Mayen, Díaz y Batanero (2009) los símbolos (significantes) se relacionan a entidades conceptuales (significados). Esta relación tiene mucha importancia para facilitar la enseñanza, pero también pueden causar conflictos o dificultades en los estudiantes.

En esta línea Godino, Batanero y Font (2007) menciona el concepto de función semiótica, como una correspondencia entre conjuntos que tiene las siguientes tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial), considerado como el signo.
- Un plano de contenido (objeto final), considerado como el significado del signo.

- Un criterio, es decir un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

Con este concepto de función semiótica se reconoce el carácter relacional de la actividad matemática, pues un objeto matemático puede jugar el papel de expresión o contenido en una función semiótica. Cuando se resuelve un problema en matemática hay una diversidad de funciones semióticas que nos permite reconocer y dar una explicación a las dificultades y conflictos que tiene los estudiantes.

Según Gudiño, Batanero y Font (2007), se denomina conflicto semiótico a las diferentes interpretaciones de expresiones matemáticas que realizan los estudiantes y que no concuerdan con las que un profesor pretende. Los conflictos semióticos producen equivocaciones en los estudiantes que no son debidos a la falta de conocimiento sino a haber relacionado inadecuadamente los planos de expresión y contenido de una función semiótica.

El concepto de función semiótica que se propuso nos permite dar una interpretación del conocimiento de un objeto X por parte de un sujeto Y (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que Y puede establecer, en unas circunstancias fijadas.

Según Godino J. (2002) cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

El concepto de representación y función semiótica que usaremos en nuestro trabajo permite la relación entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. Así, con la noción de función semiótica se generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objeto matemático.

En términos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, cuando la función semiótica hace referencia al plano de expresión se estaría refiriendo a la representación semiótica que se hace de una variable. Por otro lado, el plano de contenido se refiere al significado que se le atribuye a dicha representación.

Según lo explicado anteriormente eso incluye las diferentes informaciones que se pueden extraer de la representación y está relacionado directamente con el tipo de representación según el registro usado.

En este capítulo se desarrollaron los elementos teóricos que utilizaremos en nuestro estudio propuestos por la Teoría de Registros de Representación Semiótica y en donde se toma a la función cuadrática como objeto matemático. Como parte de esta descripción se mencionó las actividades cognitivas y se desarrolló ejemplos para la función cuadrática al respecto.

La información presentada en este capítulo permitirá hacer un análisis de los posibles conflictos semióticos que pueden presentarse durante la actividad matemática y que están relacionados con las diferentes respuestas que se dan entre los planos de expresión y contenido.

CAPITULO III ANÁLISIS DE UN TEXTO EMPLEANDO LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

De acuerdo a la Teoría de Registros de Representación Semiótica las transformaciones entre representaciones son: el tratamiento y la conversión. En este capítulo se reconocerán las transformaciones entre representaciones que demandan las tareas sobre función cuadrática que se proponen en un texto universitario.

El texto universitario que se va analizar es “Matemática para no matemáticos” escrito por Advíncula et al. (2009) y que se usa como texto principal de consulta en el curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras.

Para el análisis del texto se usará la metodología de análisis de contenido detallado en el capítulo 1 y para validar el objetivo específico 2 que hace referencia a este capítulo.

También, se complementará el análisis del texto con el estudio de una actividad tomada a los estudiantes que llevan el curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras, siguiendo la metodología ya indicada.

Finalmente, nuestro estudio se valorará en términos de aquellas representaciones que se deberían priorizar según la justificación que se presentó en el capítulo 1 del presente estudio.

3.1 Análisis de la forma en que se presenta el tema función cuadrática en un texto

El libro “Matemática para no matemáticos” escrito por Advíncula et al. (2009) presenta los cuatro capítulos siguientes: números y operaciones, cambio y relaciones, análisis de datos e incertidumbre. Estos capítulos desarrollan ejemplos resueltos y propuestos y conceptos teóricos acerca de diversos temas que forman parte de cada capítulo.

Por ejemplo en el capítulo Cambio y relaciones se desarrollan como sub capítulos los siguientes temas: noción de función, función constante y función lineal, función lineal por tramos, función cuadrática, función exponencial y análisis de gráficas.

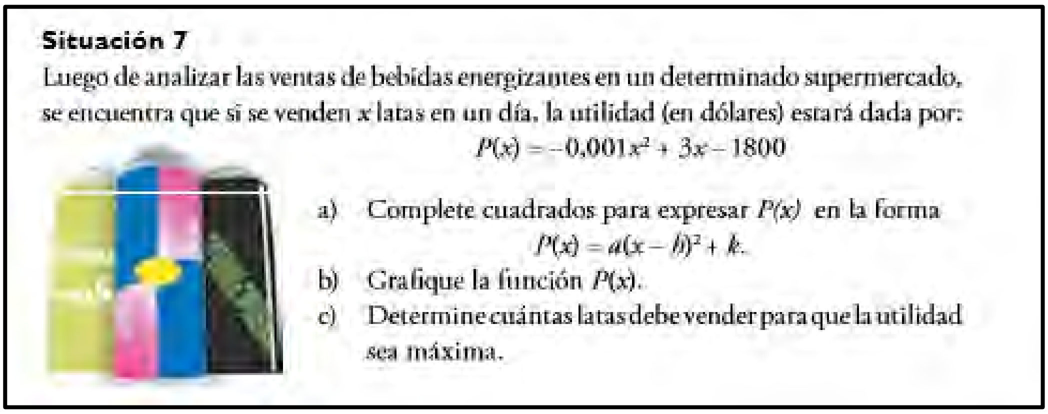
Los temas planteados en cada subcapítulo se abordan de la siguiente manera:

- Se describe una situación inicial (ejemplo) que motive al estudiante a interesarse en el tema.
- Se plantea un ejemplo propuesto acerca del tema y que los alumnos deben desarrollar en clase de manera individual y/o grupal.
- Se presenta un ejemplo resuelto y que el profesor resuelve en clase.
- Se muestran los conceptos acerca del tema.
- Finalmente, se presentan ejemplos propuestos para desarrollarse algunos de ellos en clase y otros para que los desarrollen de manera independiente en otros momentos.

La función cuadrática es un subcapítulo del capítulo Cambio y Relaciones y es trabajada de la siguiente manera:

1. Se propone y resuelve ejemplos de situaciones sobre función cuadrática que permitan obtener valores óptimos.
2. Se plantea el concepto de función cuadrática y se propone la pregunta ¿cómo graficar una función cuadrática?
3. Finalmente, se propone trece problemas diversos de situaciones sobre función cuadrática para practicar.

En el texto, el tema función cuadrática presenta como primer ejemplo el mostrado en la figura 19, bajo el subtítulo Situación 7.



Situación 7

Luego de analizar las ventas de bebidas energizantes en un determinado supermercado, se encuentra que si se venden x latas en un día, la utilidad (en dólares) estará dada por:

$$P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$$

a) Complete cuadrados para expresar $P(x)$ en la forma $P(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafique la función $P(x)$.

c) Determine cuántas latas debe vender para que la utilidad sea máxima.

Figura 19: Situación 7 sobre función cuadrática propuesta en el libro Matemática para no matemáticos
Fuente: Advíncula, 2009, p. 66

La figura 19 muestra una situación para optimizar. En este caso, obtener la utilidad máxima.

Se representa la función utilidad por medio de la siguiente regla de correspondencia representada en el registro algebraico: $P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$. También, se describen las variables que aparecen en la situación presentada en la figura 19 a través de su descripción en el registro lengua natural. La variable independiente es descrita en lengua natural como la cantidad de latas de bebidas energizantes vendidas en un día y la variable dependiente es descrita en lengua natural como la utilidad obtenida en dólares por la venta de bebidas energizantes. También, se representan las variables en el registro algebraico, así tenemos: la variable independiente es x y la variable dependiente es $P(x)$.

La representación de la función utilidad como $P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$, nos da información sobre los valores de los coeficientes de los términos de la expresión cuadrática. En este sentido, el valor del coeficiente principal de la expresión cuadrática que representa a la función vale -0,001 y al ser negativo nos permite reconocer que en la representación gráfica la parábola es cóncava hacia abajo. También, la regla de correspondencia que se le asigna a $P(x)$ nos da información que cuando se venden cero latas de bebidas energizantes en un día la utilidad será de -1800 dólares, es decir, se tendrá una pérdida de 1800 dólares.

Como se muestra en la figura 19, se pide completar cuadrados en la parte a). De esta manera, se pide explícitamente realizar tratamientos en el registro algebraico para poder representar la función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

A continuación se presenta la solución del ejemplo planteado en la figura 19, parte a) y también se indican tres tratamientos posibles en el registro algebraico.

x = cantidad de latas de bebidas energizantes vendidas.

$P(x)$ = utilidad obtenida en dólares por la venta de bebidas energizantes

Tratamiento 1: aplicando propiedad distributiva y agregando y quitando un número.

$P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$

$P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ → se usa la propiedad distributiva para extraer el factor $-0{,}001$

$P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2) - 1800$ → se agrega y quita el valor 1500^2

Por lo tanto, $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$

Explicación del tratamiento 1

Se realiza un tratamiento en el registro algebraico para llevar la expresión inicial a la forma $P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ en este caso se tiene los tratamientos siguientes: multiplicación representada por $-0{,}001\ (x^2 - 3000x)$, aquí hay dos factores $-0{,}001$ y $(x^2 - 3000x)$. Además, diferencia representada por $-0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ donde sus elementos son $-0{,}001\ (x^2 - 3000x)$ y 1800.

Luego se realiza el tratamiento para llevar a la expresión $P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ a la forma $P(x) = -0{,}001(x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2) - 1800$. Para realizar este tratamiento se debe aumentar y quitar el valor 1500^2 y transformar la expresión $x^2 - 3000x$ a $x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2$, es decir se tendrían cuatro sumandos.

Finalmente, se realiza un tratamiento para llevar la expresión $P(x) = - 0{,}001\ (x^2 – 3000x + 1500^2 – 1500^2) – 1800$ *a la forma* $P(x) = -0{,}001(x – 1500)^2+450$. Para realizar este tratamiento se necesita expresar la suma de tres expresiones algebraicas x^2; $-3000x$; 1500^2 en la potencia de una suma, tal como la siguiente expresión: $(x – 1500)^2$.

Obteniéndose la representación $P(x) = -0{,}001(x – 1500)^2 + 450$.

Tratamiento 2: usando expresiones algebraicas equivalentes

La forma canónica de la función cuadrática es una expresión representada de la siguiente manera

$Q(x) = a(x – h)^2 + k$

$Q(x) = ax^2- 2ahx + ah^2+k$,

donde $a \neq 0$.

Según Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000), un polinomio es una expresión formal del tipo

$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+ a_1X + a_0$,

donde $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)$ es una lista ordenada de números reales y X es un símbolo llamada indeterminada.

Por otro lado, Lima, Pinto, Wagner y Morgado (2000) también relaciona a un polinomio con una función polinomial, mencionando que a cada polinomio $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+ a_1X + a_0$ se le hace corresponder la función polinomial $\bar{p} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $\bar{p}\ (\text{x}) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+ a_1x + a_0$, para todo x $\in \mathcal{R}$. Así la correspondencia entre polinomio y función polinomial se da porque a polinomios distintos le corresponde funciones polinomiales distintas, por lo tanto se trata de una correspondencia biunívoca. Esta correspondencia se puede extender para las funciones cuadráticas y los polinomios de segundo grado.

Retomando el tratamiento 2, por polinomios idénticos:

$Q(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$

$P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$

Los polinomios *P* y *Q* son idénticos si, y solamente si, tienen los mismos coeficientes.

Se concluye que $a = -0{,}001$

$-2ah = 3$, entonces $h = 1500$

$ah^2 + k = -1800$, entonces $k = 450$

Por lo tanto, $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$.

Tratamiento 3: calculando los valores de *a, h* y *k*, como, $h = \frac{-b}{2a}$; $k = P(h)$

De la representación $Q(x) = a(x - h)^2 + k$, se puede representar como: $P(x) = ax^2 + bx + c$

Hallamos los valores de *a, h, k*.

Si se tiene $P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$, entonces $a = -0{,}001$; $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-0{,}001)} = 1500$;

$k = P(h) = - 0{,}001(1500)^2 + 3\,(1500) - 1800 = 450$

Por lo tanto, $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$.

b) En el ejemplo mostrado en la figura 19, se pide graficar la función utilidad representada por *P(x)*. En este caso, los estudiantes deberían de reconocer los elementos necesarios de una representación algebraica y que les permita hacer una representación gráfica.

En la figura 20 se muestra la gráfica de la función representada por $P(x) = -0{,}001x^2+3x-1800$

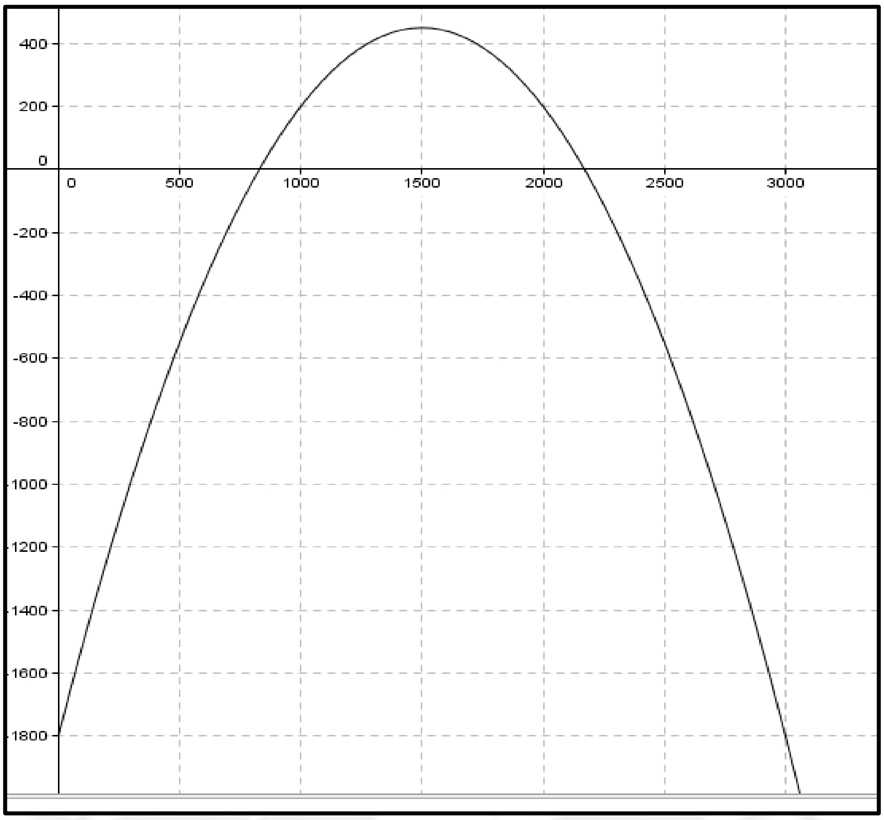


Figura 20 : Solución de la parte b) de la situación 7 propuesta en el libro "Matemática para no matemáticos"

En la pregunta parte a) de la situación 7 se realizó un tratamiento para la expresión planteada y se transformó la regla de correspondencia por medio de tratamientos en el registro algebraico de la función representada por $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2+450.$ Luego, se reconocerá el vértice de la parábola de abscisa 1500 y ordenada 450 y se representará en el registro de pares ordenados con una representación semiótica identificable representado por un par ordenado. Cuando se menciona el vértice de la parábola se relacionará el par ordenado con un punto que se ubicará en el plano cartesiano y cuyas componentes son números que indicarán una ubicación de cada una de ellas en los respectivos ejes coordenados. Al representar el par ordenado (1500; 450) por un punto en el registro gráfico de los ejes coordenados. En la figura 21 se muestra el punto A cuya representación en el registro gráfico de los ejes coordenados es un punto.

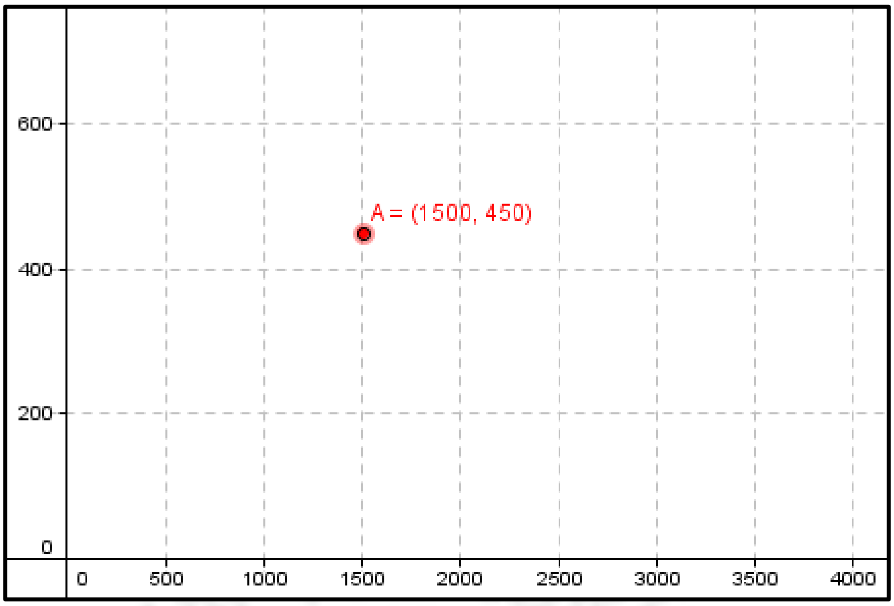


Figura 21: Representación gráfica del par ordenado que representa al vértice de la parábola.

A continuación, se traza la gráfica de la función representada por $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2+450$. Para trazar la gráfica de la función se identifica a partir de la expresión de la función en el registro algebraico el valor de –1800 que luego al ser representado como par ordenado y asignándole el punto B*(0; -1800)* permite reconocer la intersección de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas.

En la figura 22 se muestra el punto B cuya representación en el registro gráfico de los ejes coordenados es un punto.

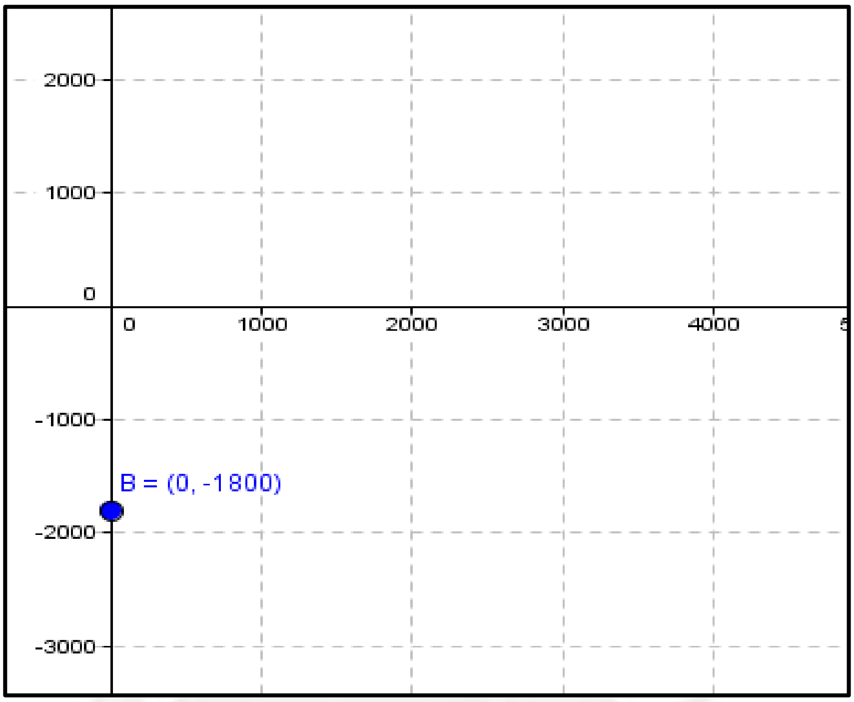


Figura 22 : Representación gráfica del par ordenado que representa al punto B.

Se realiza dos conversiones. En primer lugar, para mostrar una serie de puntos entre los puntos A y B; por ejemplo, de acuerdo a la figura 23 los puntos que se interpolan entre A y B son G, H e I. En el caso del punto I sería la intersección de la gráfica con el eje X. En segundo lugar, se realiza una conversión para realizar el trazo entre los puntos A y B, realizándose un trazo curvo y abierto cuya unidad constitutiva es una línea abierta. En la figura 23 se muestra la serie de puntos entre los puntos A y B y el trazo curvo entre dichos puntos.

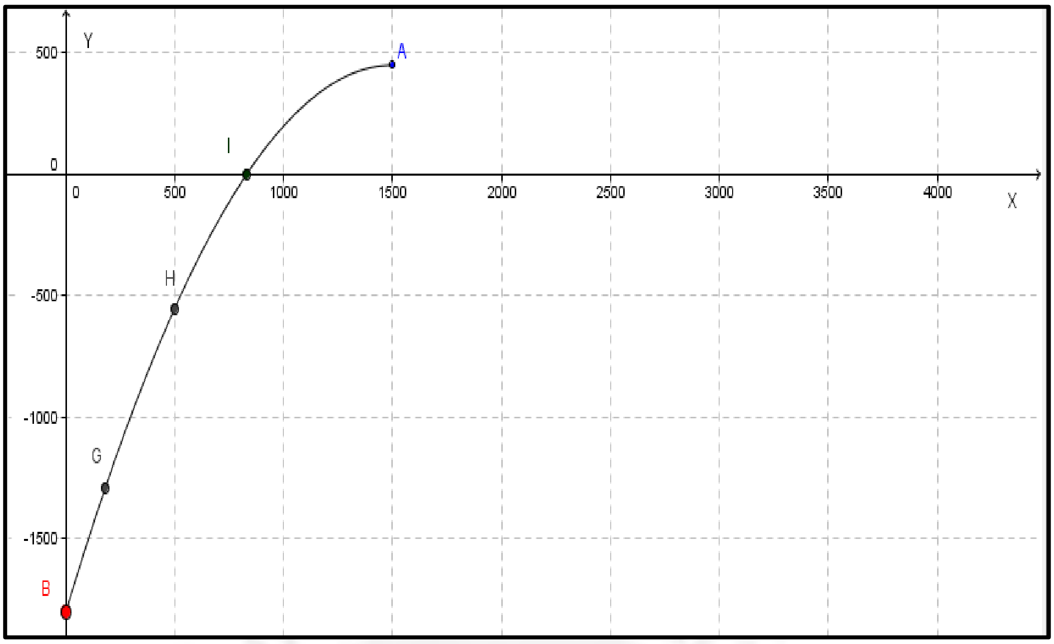


Figura 23: Puntos G, H e I entre A y B y trazo curvo que los une

Finalmente, se realiza una conversión para hacer un nuevo trazo curvo simétrico respecto al primer trazo. En la figura 24 se muestra el trazo simétrico que representa el tramo de la parábola para valores de abscisas mayores o iguales que 1500.

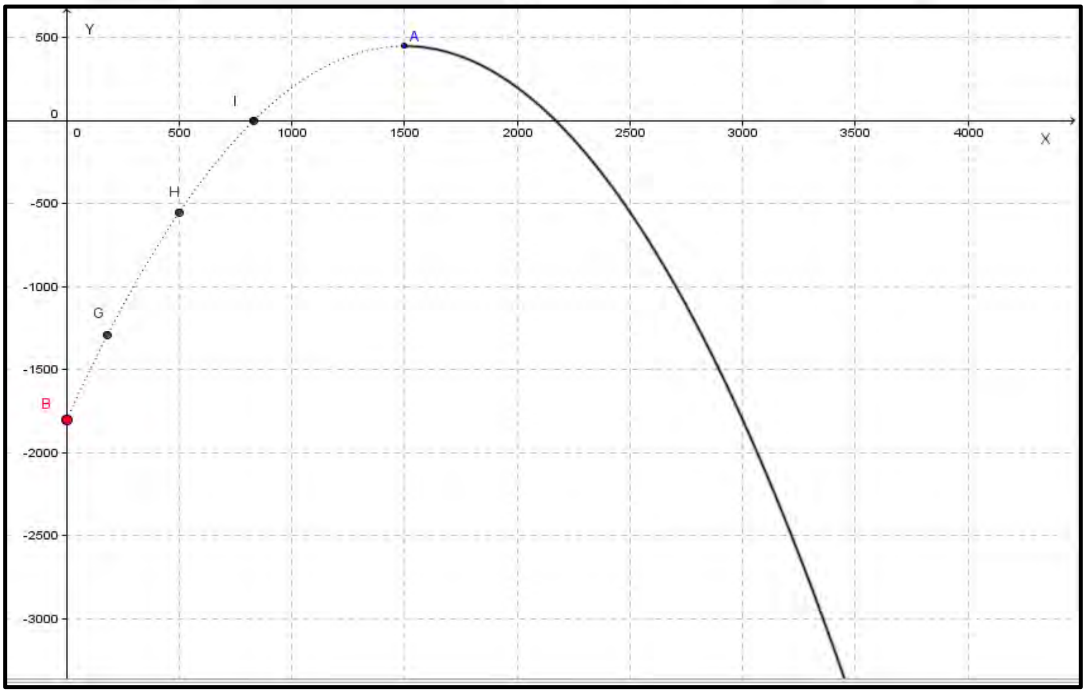


Figura 24: Tramo simétrico de la parábola para valores mayores que 1500

El estudiante debe reconocer el par ordenado (1500; 450) y ubicarlo en el plano cartesiano. De esta manera, tienen que hacer una conversión para pasar del registro de pares ordenados a su representación en el registro gráfico de coordenadas cartesianas. La transformación mencionada es necesaria para que este punto represente al vértice de la parábola.

En seguida, se realiza varios tratamientos en el registro gráfico como se detalló, pero es aquí donde como investigador se pueden encontrar conflictos semióticos porque los trazos que los estudiantes realicen son diversos porque no reconocen que en el ejemplo se definió previamente a la variable independiente x como la cantidad de latas de bebidas energizantes vendidas en un día y esta variable es cuantitativa discreta. Es decir la solución se muestra con un trazo curvo y abierto, esto no debería de ser así porque al ser la variable x cuantitativa discreta solo debe asignarse valores enteros a dicha variable, lo que permite obtener puntos que pueden ubicarse en el plano de coordenadas cartesianas, pero que no representa gráficamente con un trazo continuo. Pero, lo que se espera es que los estudiantes representen a la gráfica de la función cuadrática con un trazo continuo, por lo que este ejemplo tendría que tener como variable independiente x a una cuantitativa continua.

c) En la situación presentada en la figura 19, para la parte c) se les pide determinar un óptimo. En consecuencia, se tiene que interpretar que valores de las representaciones gráficas o algebraicas, hechas previamente son necesarios para dar esta respuesta.

La información que se puede encontrar de la representación algebraica de la función cuadrática como: $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$ porque el valor de x que hace máximo a la función es $x = 1500$ y esto permite obtener el valor de la utilidad máxima que es 450 dólares.

Mediante tratamientos en el registro algebraico se transforma la expresión $P(x) = -0{,}001x^2 + 3x - 1800$ a la forma $P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ en este caso se tiene los tratamientos siguientes: multiplicación representada por $-0{,}001\ (x^2 - 3000x)$, aquí hay dos factores $-0{,}001$ y $(x^2 - 3000x)$ y diferencia representada por $-0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ donde sus elementos son $-0{,}001\ (x^2 - 3000x)$ y 1800.

Luego se realiza un tratamiento para llevar a la expresión $P(x) = -0{,}001\ (x^2 - 3000x) - 1800$ a la forma $P(x) = -0{,}001(x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2) - 1800$. Se debe aumentar y quitar el valor 1500^2 y transformar la expresión $x^2 - 3000x$ *a* $x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2$, es decir se tendrían cuatro sumandos.

Finalmente, se realiza un tratamiento para llevar la expresión $P(x) = -\ 0{,}001\ (x^2 - 3000x + 1500^2 - 1500^2) - 1800$ *a la forma* $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$. Para realizar este tratamiento se necesita representar la suma de tres expresiones algebraicas x^2; $-3000x$; 1500^2 en la potencia de una suma, tal como la siguiente expresión: $(x - 1500)^2$. Obteniéndose la representación $P(x) = -0{,}001(x - 1500)^2 + 450$.

El valor de x que hace que la ganancia sea máxima es 1500 latas de bebidas energizantes al día.

A continuación, el libro plantea y resuelve un problema presentado como situación 8. El ejemplo es mostrado en la figura 25

Situación 8

Aurelio y Graciela son amigos desde la infancia. Aurelio piensa construir un establo con un piso circular y un cerco de madera que lo rodee. Graciela va a visitar a Aurelio a su casa de campo y aprovecha para ayudarlo a decidir sobre la propuesta que mejor le conviene para construir su establo.

Aurelio tiene dos propuestas de constructoras para levantar su establo, las cuales le ofrecen los mismos materiales y acabados. La primera cobra $ 30 por metro cuadrado por la construcción de piso, $ 25 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de $ 250 por gastos administrativos. La segunda constructora cobra $ 28 por metro cuadrado por el piso, $ 30 por metro lineal del cerco, más una tasa fija de $ 650 por gastos administrativos.

Graciela quiere determinar cuál de las dos constructoras le conviene a Aurelio para levantar su establo de vacas de la forma más económica posible, siguiendo los siguientes pasos.

Figura 25 : Un ejemplo de función cuadrática propuesto del libro Matemática para no matemáticos
Fuente: Advíncula, 2009, p. 67

En el ejemplo propuesto en la figura 25 describe una situación en donde se debe optimizar un valor. En el enunciado se reconocen los datos descritos en lengua natural. Los enunciados son los siguientes:

- Cobra $ 30 por metro cuadrado por la construcción de un piso circular.
- Cobra $ 25 por metro lineal del cerco que limita el piso circular.
- Cobra una tasa fija de $ 250 por pagos administrativos.

Y también los siguientes:

- Cobra $ 28 por metro cuadrado por la construcción de un piso circular.
- Cobra $ 30 por metro lineal del cerco que limita el piso circular.
- Cobra una tasa fija de $ 650 por pagos administrativos.

Con estos datos se debe proceder a completar el siguiente cuadro, tal como lo muestra la figura 26.

	Costo por m^2 de piso (dólares)	Costo por m del cerco circular (dólares)	Costo fijo por gastos administrativos (dólares)
Primera constructora	30	25	250
Segunda constructora	28	30	650

Figura 26: Cuadro con datos de la situación 8 resuelta

Fuente: Advíncula, 2009, p. 68

En la figura 26 se muestran los datos de la situación 8 en un cuadro donde se hace la diferencia entre los datos para cada una de las dos opciones.

Cuando se enuncia que la primera constructora cobra treinta dólares por metro cuadrado por la construcción de un piso circular, no se menciona cuantos metros cuadrados de piso se necesita construir. También cuando se enuncia que la primera constructora cobra veinticinco dólares por metro de lineal del cerco que limita el piso circular, tampoco se menciona cuantos metros de cerco se necesita utilizar. En ambos casos la falta de una expresión que relacione al costo por unidad de metro cuadrado de piso y el costo por unidad de metro de cerco hace necesario utilizar la expresión para el área y la expresión para la longitud de circunferencia, respectivamente. Estos datos no son proporcionados por el ejemplo y son parte de los conocimientos previos de los alumnos.

Se considera, el área del establo con piso circular de radio igual a r como πr^2.

Por otro lado, la longitud de circunferencia de radio igual a r que representa al contorno que limita el establo es $2\pi r$.

El valor del radio es representado por la variable r que viene a ser una representación semióticamente identificable.

Para cada radio que se asigna a cada tipo de establo hay valores de áreas y longitudes de circunferencia y que permite obtener un valor de costo total para cada compañía. Se establece una congruencia entre el registro de entrada representado en el registro de pares ordenados porque para cada valor de r el valor del costo total en dólares aumenta. Por otro lado en el registro de llegada al ubicar cada para ordenado en el plano cartesiano se reconoce la tendencia creciente de las representaciones gráficas para cada una de las compañías. También, al trazarse las curvas que representan a cada compañía en el mismo sistema de coordenadas se observa que una de las curvas crece más rápidamente que la otra.

En la figura 27, se muestra los valores de los costos totales de ambas compañías.

Longitud del radio (metros)	Costo total (dólares)	
	Primera compañía	Segunda compañía
6	4 585,394	4 947,695
8	7 538,489	7 787,692
10	11 245,565	11 331,406
12	15 706,623	15 578,836
14	20 921,662	20 529,982
16	26 890,683	26 184,844
18	33 613,686	32 543,422
20	41 090,670	39 605,716

Figura 27: Cuadro con los costos totales para cada compañía de la situación 8
Fuente: Advíncula, 2009, p. 69

Con los valores obtenidos para este cuadro no se puede observar el valor del radio r que haga posible que se pueda contratar indistintamente con cualquiera de las compañías. Por esta circunstancia es necesario hacer una representación gráfica en donde se pueda mostrar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares los costos totales de ambas compañías.

Hay una necesidad de hacer una conversión y pasar del registro de pares ordenados al registro gráfico en coordenadas cartesianas.

En la figura 28 se muestra el esbozo de las gráficas de los costos totales para ambas compañías en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

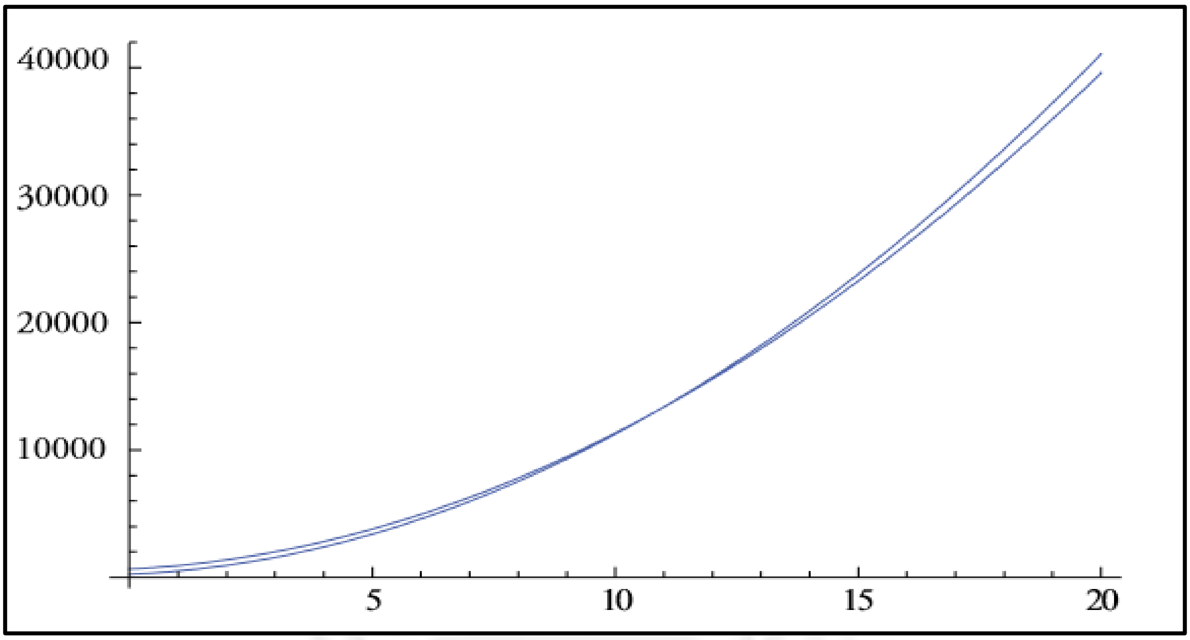


Figura 28: Cuadro con los costos totales para cada compañía de la situación 8
Fuente: Advíncula, 2009, p. 69

De acuerdo a las gráficas presentadas en la figura 28 si hay un valor del radio r que hace que sea indistinto contratar con alguna de las compañías. Dicho valor se encuentra entre 10 m y 15 m.

En el ejemplo se debe mencionar si hay algún valor del radio r, por ejemplo r_0, y se reconoce que si existe ese valor aunque no hay que hallarlo. Dicho valor r_0 se puede representar por un número que es un valor identificable en el registro numérico de los números reales.

A partir de las representaciones gráficas de los costos totales en dólares para las compañías, se puede dar la información sobre cuál de las compañías le conviene. Para esto se necesita determinar los valores del radio r de cada establo y de esta manera se plantean dos casos, así:

- Para $r < r_0$, le conviene la compañía 1.
- Para $r > r_0$, le conviene la compañía 2.

Se debe transformar del registro gráfico en coordenadas cartesianas al registro lengua natural para hacer la descripción verbal de los valores óptimos para cada compañía.

En el texto mencionan una definición de la función cuadrática que según Advíncula et al. (2009) es la siguiente:

¿Qué es una función cuadrática?

Una función cuadrática es una correspondencia de variable real y de valor real definida por:

$$f : R \rightarrow R$$
$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Figura 29: Definición de función cuadrática según el libro Matemática para no matemáticos
Fuente: Advíncula, 2009, p. 73

En la figura 29 se muestra la definición de función cuadrática según Advíncula et al. (2009), así en su representación algebraica se asigna a la variable dependiente $f(x)$ una regla de correspondencia $ax^2 + bx + c$, representando de esta manera la función cuadrática en el registro algebraico. La asignación de la variable dependiente f(x) a la expresión $ax^2 + bx + c$ se realiza por medio del signo igual. De esta manera se utilizan las siguientes representaciones semióticamente identificables para la función cuadrática, tales como: las variables, los coeficientes, el signo igual y el sigo más de operación aritmética Además, la representación algebraica, de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene la condición que los coeficientes a, b y c son números reales y el número real $a \neq 0$, para que el término que contiene a la variable elevado al exponente 2 no se elimine, en todos estos casos, usándose el registro numérico de los números reales.

Finalmente en el registro lengua natural se describe a la función cuadrática como una correspondencia de variable real y valor real o en el registro simbólico como $f: R \rightarrow R$.

También en el libro se hace la siguiente pregunta: “¿Cómo graficar una función cuadrática?”

En la figura 30 se muestra un concepto que se debe tomar en cuenta para graficar una función cuadrática.

> **¿Cómo graficar una función cuadrática?**
>
> La gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual se puede «abrir» hacia arriba o hacia abajo; esto dependerá del signo de la constante *a*. Así, si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Una vez identificada la dirección de la abertura, interesará identificar las coordenadas del vértice de la parábola para proceder a graficarla.

Figura 30: Descripción del valor de a en una función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$
Fuente: Advíncula, 2009, p. 71

Se describe en lengua natural como se abre la representación gráfica de la función cuadrática.

- Si $a > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.

Al mencionar estas descripciones no se hace referencia a la concavidad de la parábola, porque es un concepto que el alumno no entiende.

Se menciona que se abre hacia arriba para que el traslado del registro lengua natural al registro gráfico de coordenadas cartesianas sea espontáneo, porque se trata de representaciones congruentes entre el registro de partida (lengua natural) y el de llegada (gráfico en coordenadas cartesianas).

En la figura 31 se muestra otro concepto que se debe tomar en cuenta para graficar una función cuadrática.

Sea $V = (h, k)$ el vértice de la parábola asociada a la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para identificar el vértice $V = (h, k)$ se seguirá el siguiente procedimiento:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

Como se puede observar, se ha completado cuadrados para expresar f en la forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

donde: $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$.

.

Figura 31: Forma de hallar el vértice de la parábola para graficar una función cuadrática
Fuente: Advíncula, 2009, p. 71

Para hallar las coordenadas del vértice de la parábola se realizan los siguientes tratamientos en el registro algebraico como se muestra en la figura 31.

La expresión $f(x)=ax^2+bx+c$, que tiene tres sumandos se transforma a $f(x) = a(x^2+\frac{b}{a}x) + c$ es decir a una representación con un producto y una suma, realizándose un tratamiento para pasar de una expresión algebraica que tiene operaciones de suma a otra que tiene un producto y una suma. Después se realizan otros tratamientos para representar a la función como $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - a\,(\frac{b}{2a})^2 + c$.

Por otro lado, se menciona que la función cuadrática tiene una forma canónica que es la siguiente:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

donde $h = \frac{-b}{2a}$, $k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$.

Cuando la función cuadrática se representa en su forma canónica surge el conflicto para interpretar la abscisa del vértice porque en la función $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - a\ (\frac{b}{2a})^2 + c$, la abscisa es $\frac{-b}{2a}$ y los estudiantes lo pueden tomar como $\frac{b}{2a}$ porque no interpretan que representa la abscisa del vértice para obtener el valor óptimo de la función. Para interpretar correctamente hay que recordar que la abscisa del vértice es el valor de x que hace máxima o mínima a la función. Por este motivo es que $x+\frac{b}{2a}$ o x – h tienen que hacerse cero para encontrar el máximo o mínimo de la función. De esta manera es que se puede hacer la asignación siguiente: $h = \frac{-b}{2a}$.

En la figura 32 se indica la descripción en lengua natural del valor de x que permite optimizar a la función, es decir, obtener el valor máximo o mínimo de la función.

Nótese que debemos tomar en cuenta los dos casos siguientes:

- si $a > 0$, la función toma valor mínimo cuando $x = h$.
- si $a < 0$, la función toma valor máximo cuando $x = h$.

Figura 32: Valor máximo y mínimo para graficar una función cuadrática
Fuente: Advíncula, 2009, p. 71

En esta parte, se necesita hacer una conversión y pasar del registro lengua natural al registro gráfico o algebraico para reconocer el valor máximo o mínimo de la función.

En ambos casos el valor máximo o mínimo de la función es el valor de k = $-a\ (\frac{b}{2a})^2 + c$.

El valor óptimo de la función se presenta en el texto como un número real. Por otro lado, en el texto no se representa a la función en el registro gráfico, y esto impide que se reconozca el mínimo y el máximo.

En la tabla 8 se muestra la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 - a\ (\frac{b}{2a})^2 + c$, donde para un valor de $a \neq 0$, se tiene un valor máximo o mínimo para $x = \frac{-b}{2a}$.

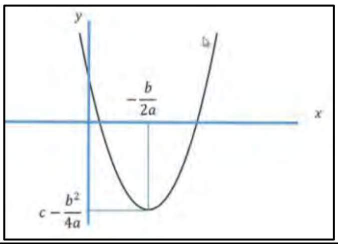
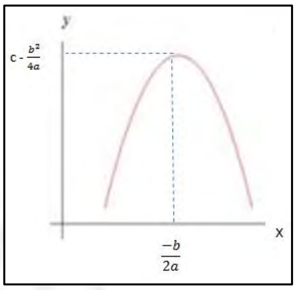
Valor mínimo de la función *f*	*a > 0* 
Valor máximo de la función *f*	a < 0 

Tabla 7 : Representación gráfica. Valor máximo y mínimo de una función

Finalmente, se plantea un problema y resuelve un problema para graficar una función. En la figura 33 se muestra el texto del ejemplo en el que se pide graficar señalando las coordenadas del vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

> Por ejemplo:
> Grafique la función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 5$, y señale las coordenadas de su vértice, de los puntos de corte con los ejes de coordenadas, y su dominio y rango.

Figura 33: Ejemplo propuesto para graficar una función cuadrática
Fuente: Advíncula, 2009, p. 72

En el ejemplo mostrado en la figura 34 se pide graficar, pero no solo se debe mostrar el trazo de la curva sino también las coordenadas del vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados, es decir, se debe representar en el gráfico a cuatro puntos, donde cada uno es una representación gráfica de un par ordenado.

A continuación se muestra la solución del ejemplo propuesto indicado en la figura 33. En la figura 34 se muestra el vértice y los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

Solución propuesta

En primer lugar, se identifican los coeficientes $a = 1$; $b = 6$; $c = 5$. De acuerdo con esto, como a > 0, la parábola se abre hacia arriba.

A continuación se identifica el vértice. Para ello es necesario completar cuadrados reescribiendo la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 5 \\ &= (x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2) - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5 \\ &= (x + 3)^2 - 9 + 5 \\ &= (x + 3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el vértice es $V = (h; k) = (-3; -4)$.

Se calculan los puntos de intersección con los ejes coordenados:

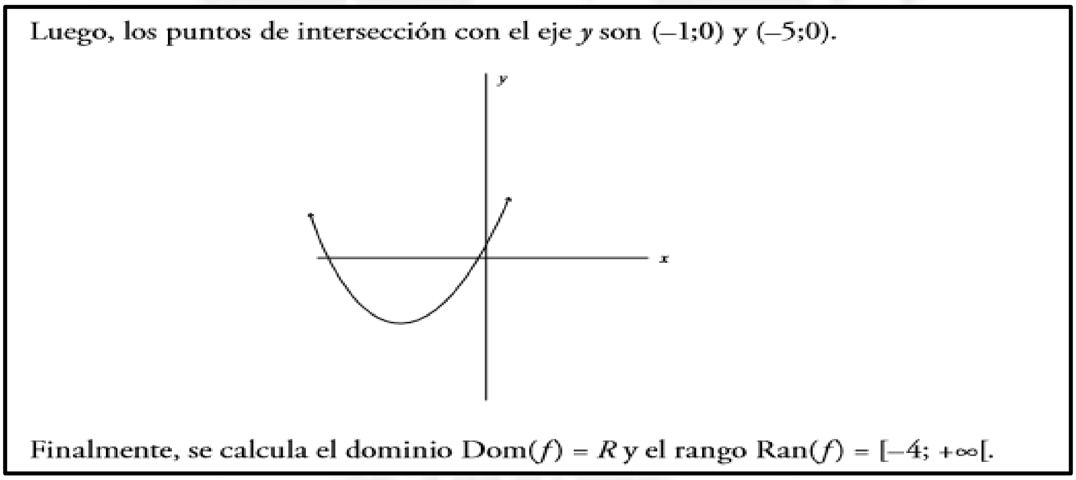
- Si la gráfica de f corta el eje y, entonces ese punto de intersección debe tener abscisa igual a cero:
  $x = 0$, $f(0) = 5$. Luego, el punto de intersección con el eje x es (0; 5).
- Si la gráfica de f corta el eje x, entonces ese punto de intersección debe tener ordenada igual a cero:
  $y = 0$, $f(x) = 0$.
  Esto ocurrirá cuando $(x + 3)^2 - 4 = 0$
  $(x + 3)^2 = 4$
  $x + 3 = 2$ ó $x + 3 = -2$
  $x = -1$ ó $x = -5$

Figura 34: Solución del ejemplo propuesto en la figura 34. Coordenadas del vértice y puntos de corte con los ejes coordenados
Fuente: Advíncula, 2009, p. 72

En la solución presentada en la figura 34 se determina el vértice representando a la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$ en otra representación algebraica usando tratamientos y obteniendo $f(x) = (x+3)^2 - 4$. De esta manera se sigue los procedimientos que indica el libro en la figura 35 y se concluye que el vértice es el par ordenado (-3, -4)

Por otro lado, se muestran los puntos de corte de la representación gráfica con los ejes coordenados, para ello se hacen los cálculos en el registro algebraico. Para la intersección con el eje de las ordenadas se hace x = 0 en la representación algebraica $f(x) = (x+3)^2 - 4$ y se obtiene f(0) = 5. Finalmente en el registro de pares ordenados se muestra la respuesta (0; 5). También, para la intersección con el eje de las abscisas se hace f(x) = 0 y en la representación f(x) = $(x+3)^2 - 4$, se obtiene x = -1 o x = -5, de esta manera se reconoce dos puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas. Se debe mostrar dos pares ordenados que son las respuestas de los puntos de corte con el eje de las abscisas, (-1; 0) y (-5; 0). En la solución propuesta por el libro no se menciona la cantidad de puntos de intersección por lo que recién después de los cálculos podría precisarse si hay uno, dos o tres puntos de intersección dependiendo de la cantidad de puntos de corte con el eje de las abscisas.

En la figura 35 se muestra la gráfica de la función y el dominio y el rango de la función. Para la gráfica se tuvo en cuenta los pares ordenados hallados en la solución, pero que mediante una conversión son representados en puntos que se pueden ubicar en el plano de coordenadas cartesianas.


Luego, los puntos de intersección con el eje *y* son (–1;0) y (–5;0).

Finalmente, se calcula el dominio Dom(*f*) = *R* y el rango Ran(*f*) = [–4; +∞[.

Figura 35: Solución del ejemplo propuesto en la figura 34. Gráfica de la función y dominio y rango
Fuente: Advíncula, 2009, p. 73

En la figura 35 no se muestran los puntos de corte con los ejes coordenados ni el vértice de la parábola como parte de la representación gráfica de la función lo cual complica representar a la función en el registro gráfico de coordenadas cartesianas y también reconocer cuál es el dominio y rango de la función.

La respuesta del dominio y rango de la función se debe dar en registro simbólico y representar ambas respuestas en intervalos en el conjunto de los números reales.

3.2 Análisis de una actividad diseñada sobre función cuadrática

Como complemento al análisis del texto que se detalló en el punto anterior, también se aplicó una actividad a los estudiantes del curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

La actividad fue tomada en una sesión de clases posterior al desarrollo del tema función cuadrática que explicó el profesor del curso.

Los estudiantes a los que se les evaluó con la actividad son de las especialidades de Antropología (cinco estudiantes), Ciencias Políticas y de Gobierno (cinco estudiantes), Geografía y Medio Ambiente (un estudiante) y Sociología (seis estudiantes). En esta parte es importante anotar que se les evaluó al final de una sesión donde no tuvieron una prueba final, por lo que solo los diecisiete alumnos mencionados participaron de la actividad.

La actividad que se diseñó se enmarca en el objetivo general planteado por nuestro estudio, para lo cual se presenta una actividad que plantea a los estudiantes un problema de una situación de optimización del precio de un producto.

A continuación se muestra la actividad diseñada sobre función cuadrática y diversas situaciones que se plantean.

Confección de prendas de temporada

El fenómeno del Niño se presentó en el Perú en el año 1997 generando cambios bruscos en el clima que normalmente se tenía en varias zonas del país. La industria textil es una de las que sufrió mayores problemas debido a que se acortó el periodo de invierno y los productos destinados para esta época no se pudieron vender adecuadamente.

Andy es un comerciante del emporio textil de Gamarra que no entiende porque sus ventas disminuyeron notablemente y decide evaluar esta situación. Así las ventas de Andy se miden en cantidad de kilogramos vendidos por día y se relacionan con el precio de venta promedio por kilogramo vendido, manteniendo una tendencia como se muestra en la tabla. Por ejemplo: el 1 de abril vende 3000 kilogramos de productos, siendo el precio de venta promedio por kilogramo vendido de 25 soles. La siguiente tabla muestra los datos recolectados por Andy.

Día	Cantidad de kilogramos vendidos por día (x)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (y)	Ingreso total por día en soles (I)
1 de abril	3000	25	
2 de abril	2950	26	
3 de abril	2900	27	
4 de abril	2850	28	
...			
10 de abril	2550	34	

Responde:

a) Reconoce que magnitudes te permitirá obtener el ingreso total por día en soles. Calcula el ingreso total por día en soles para los días y datos mostrados en la tabla.

b) Sea x la cantidad de kilogramos vendidos por día y sea y el precio de venta promedio por kilogramo vendido ¿Explica qué tipo de relación puedes reconocer entre los valores de x e y?

c) De acuerdo a la parte b), si deseas plantear el valor de y en términos de x, ¿qué expresión matemática podrías mostrar?

d) ¿Explica como harías para obtener una expresión matemática para el ingreso total por día en soles (I) que tiene la forma $I = ax^2 + bx + c$? ¿Cuál es dicha expresión?

e) Una vez obtenida la expresión matemática propuesta en la parte d), ¿qué significado le darías a los valores de a, b y c obtenidos en el ítem d)? Explica con tus propias palabras.

f) Representa algebraicamente la expresión matemática del ingreso total por día de la forma: $I = a(x - h)^2 + k$.

g) Andy desea obtener el valor del mayor ingreso total por día en soles. ¿Explica cómo obtendría este valor? ¿Cuál es el valor del mayor ingreso posible en soles?

h) Selecciona correctamente los ejes de un plano cartesiano. Mediante un esbozo del gráfico indica el valor del mayor ingreso posible.

Figura 36: Actividad diseñada para el estudio, encabezado y preguntas

A continuación describiremos las posibles transformaciones entre registros para cada una de las preguntas de la actividad propuesta en la figura 36.

Análisis de la pregunta a

La pregunta a) de la actividad plantea que el estudiante reconozca las variables que ya se presentaron en el enunciado inicial y en la tabla del encabezado inicial. A los estudiantes se les pide en la pregunta a) que mencionen las variables como magnitudes para que identifiquen adicionalmente la unidad de medida de las dos variables. La variable x, cantidad de kilogramos vendidos por día está descrita en el registro lengua natural y su unidad de medida es kilogramos. La variable y, precio de venta promedio por kilogramo vendido también está descrita en lengua natural. En ambos casos se describen las variables en lengua natural y también se le representa a cada variable (x e y) de forma simbólica. De esta manera, se puede representar cada variable en el registro algebraico, haciendo la conversión del registro lengua natural al registro algebraico. Por lo tanto, la pregunta a) de la actividad describe la variable x es la cantidad de kilogramos vendidos por día y la variable y es el precio de venta promedio.

Análisis de la pregunta b

La pregunta b) de la actividad plantea que el estudiante explique la relación entre los valores de x e y. En esta parte es importante los valores que se le asignó a cada una de las variables y así poder reconocer que mientras una magnitud aumenta la otra disminuye. De esta manera surge la necesidad de establecer una relación matemática entre ambas magnitudes.

Las informaciones que se piden en la pregunta b) de la actividad no ameritan que se realicen transformaciones entre registros, porque solo se pide una descripción.

Análisis de la pregunta c

La pregunta c) de la actividad plantea que los estudiantes reconozcan y planteen una expresión matemática entre las variables *x* e *y*. Se reconoce que esta expresión puede representarse algebraicamente mediante una relación $y = f(x)$. También, puede representarse en pares ordenados porque para un valor de *x* le corresponde un valor de *y*.

Para presentar la expresión entre *x* e *y* se debe hacer la conversión de una descripción de la variables en el registro lengua natural y usando una relación lineal entre las variables a una representación en el registro algebraico o el registro de pares ordenados.

En la tabla 8 se muestran los pares ordenados que representan a la relación que existe entre las variables *x* e *y*.

Cantidad de kilogramos vendidos por día (*x*)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (*y*)	Pares ordenados
3000	25	(3000; 25)
2950	26	(2950; 26)
2900	27	(2900; 27)
2850	28	(2850; 28)

Tabla 8: Pares ordenados que representan las relaciones entre las variables x e y

A partir de la tabla 8, se reconoce que cuando la cantidad de kilogramos vendidos por día disminuye en 50 kilogramos el precio de venta promedio por kilogramo aumenta en \$1. De esta manera existe una relación lineal entre la cantidad de kilogramos vendidos por día y el precio de venta promedio por kilogramos vendido, porque cuando la variable *x* disminuye de forma constante a razón de 50 kilogramos la variable *y* aumenta también de manera constante a razón de \$1. Así por ejemplo, cuando x disminuye en dos veces 50 kilogramos el valor de y aumenta en dos veces \$1. Después de declarar las variables y reconocer que tienen una relación lineal, se plantea la representación algebraica entre las variables *x* e *y*.

$$y = mx + b.$$

Usando la relación anterior se plantea un sistema de ecuaciones como se muestra a continuación:

$$25 = 3000m + b$$

$$26 = 2950m + b$$

En esta parte cuando planteamos cada ecuación se realiza una asignación de cada variable (x o y) con un número que está representado en el registro numérico de los números reales. Además, al plantearse la expresión $25 = 3000m + b$ y $26 = 2950m + b$ se tienen dos representaciones en el registro algebraico que por tratamientos en el mismo registro algebraico nos permite determinar los valores de m = $\frac{-1}{50}$ y b = 85. Finalmente, se puede representar en el registro algebraico una expresión matemática que relaciona a las variables x e y tal como: $y = -\frac{1}{50}x + 85$.

Análisis de la pregunta d

La pregunta d) de la actividad plantea que los estudiantes describan la variable I, ingreso total por día en soles. La variable es mencionada en la tabla inicial del encabezado de la actividad *y* en el enunciado de la pregunta d). La variable I está descrita en el registro lengua natural y los estudiantes tendrían que tener la necesidad de una representación de ésta en el registro algebraico, porque se les plantea que reconozcan una expresión matemática. Se logra identificar que el ingreso se obtiene por el producto de dos magnitudes por lo que para lograr la expresión matemática previamente se debe describir a la variable I como el producto de la cantidad de kilogramos vendidos por día por el precio de venta promedio por kilogramos vendido y realizando una conversión al registro algebraico se logra obtener la expresión $I = x\,(\frac{-x}{50} + 85)$ que luego de realizar un tratamiento se llega a la expresión $I = \frac{-x^2}{50} + 85x$.

En esta pregunta solo se menciona una expresión matemática que represente al ingreso I y no se relaciona esto con la representación de una función $I(x)$, que de acuerdo a la representación de la variable dependiente debería mostrar en su representación simbólica a la variable independiente x.

Análisis de la pregunta e

La pregunta e) de la actividad les pide describir a los valores a, b y c de la expresión cuadrática $I = ax^2 + bx + c$. En este sentido se usa la característica discursiva que tiene el registro lengua natural. Adicionalmente, los valores de a, b y c son números que cuando se plantea la expresión cuadrática se representan en el registro numérico de los números reales.

Análisis de la pregunta f

En la pregunta f) de la actividad se debe realizar un tratamiento para pasar de la expresión del ingreso total por día en soles, $I = ax^2 + bx + c$ a la expresión $I = a(x-h)^2 + k$, algunos de los tratamientos que se podrían movilizar son:

Tratamiento 1, por el método de completar cuadrados.

$I = ax^2 + bx + c$

$I = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$I = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c$

$I = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$\therefore \quad I = a(x - h)^2 + k$

Tratamiento 2, por polinomios idénticos.

$I = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$

➔ $ax^2 + bx + c = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$

Igualamos por polinomios idénticos.

$a = a$

$b = -2ah \rightarrow h = -\frac{b}{2a}$

$c = ah^2 + k \rightarrow k = c - ah^2 = c - \frac{b^2}{4a}$

$\therefore \quad I = a(x - h)^2 + k$

Estos tratamientos se harían teniendo en cuenta que los estudiantes conocen temas como productos notables, factorización y resolución de ecuaciones.

Análisis de la pregunta h

En la pregunta h) de la actividad se pide realizar el esbozo de la gráfica de la función ingreso total por día en soles, para luego indicar el valor del mayor ingreso posible.

A partir de la expresión $I = a(x - h)^2 + k$, se reconoce algunos elementos de la gráfica de una función cuadrática. El valor de a indica la concavidad de la gráfica de la función y el par ordenado conformado por los valores h y k, es decir $(h; k)$, representa el vértice de la parábola que representa a la gráfica de la función cuadrática.

Así para la pregunta h) de la actividad el registro gráfico es el registro de llegada. Para realizar el esbozo de la gráfica, los estudiantes tienen que ubicar en el plano de coordenadas cartesianas, la coordenada del vértice de la parábola que es representado en el plano cartesiano por un punto. Además, reconocer que la concavidad de la parábola es hacia abajo. Así se tiene que para $I = a(x - h)^2 + k$, el valor de a < 0 y el vértice es $(h; k)$. También, cuando se hace $x = 0$, se determina la intersección de la representación gráfica de la función cuadrática con el eje Y.

Para $x = 0 \rightarrow I = \frac{-1}{50}(0 - 2125)^2 + 90312.5$

Así, $I = 0$.

Por lo tanto, el punto de intersección es *(0; 0)*.

Con estos datos hallados se puede realizar un esbozo de la representación gráfica de la función cuadrática en el registro gráfico de coordenadas cartesianas.

En la figura 37 se muestra un esbozo de la representación gráfica de la función cuadrática propuesto en la actividad que se muestra en la figura 36.

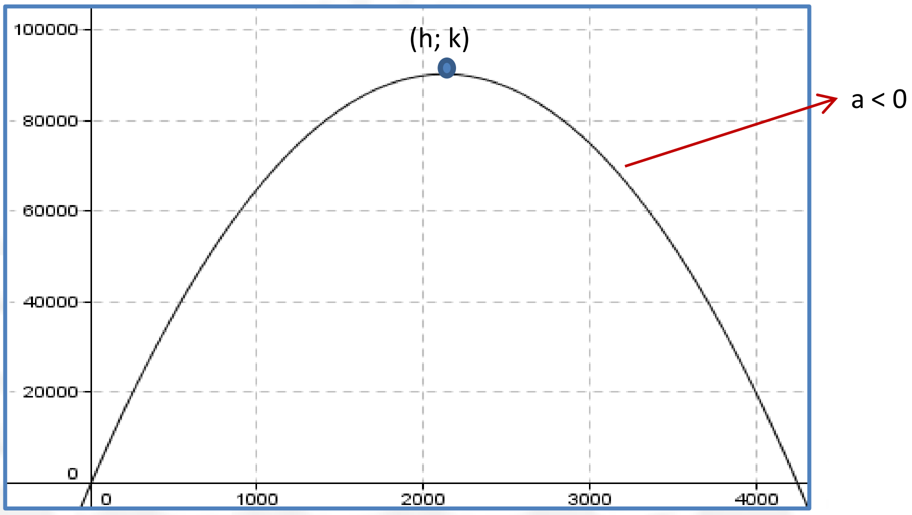


Figura 37: Esbozo de la representación gráfica de la expresión algebraica I = a(x – h)2 + k

En la figura 37 se representa el esbozo de una función cuadrática de vértice (h; k) y con concavidad hacia abajo. Por medio de esta representación se puede reconocer que ésta posee un máximo y esta se da para $x = h$ siendo el valor máximo k.

En este capítulo se analizó el texto “Matemática para no matemáticos” a partir de la Teoría de Registros de representación Semiótica teniendo en cuenta principalmente las transformaciones entre registros y la representación semiótica de las variables que propone cada situación planteada en el texto.

Al respecto se observó que cada situación propuesta en el desarrollo del tema función cuadrática sugiere explícitamente la conversión entre registros, principalmente del registro algebraico al gráfico y luego del registro gráfico al registro lengua natural.

En el texto se reconoce la importancia de poder cambiar de registros, para tener diversas representaciones de la función cuadrática y obtener de cada una de ellas la información necesaria para responder cada pregunta.

Para complementar el estudio del texto se procedió al análisis de una actividad que fue evaluada a alumnos del curso Matemática Básica de Estudios Generales Letras y en donde se propuso trabajar en los registros lengua natural, algebraico y gráfico que son los que usa el texto.

CAPITULO IV IDENTIFICACIÓN DE LOS POSIBLES CONFLICTOS SEMIÓTICOS ACERCA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN UN TEXTO UNIVERSITARIO

El desarrollo de este capítulo se enmarcara teniendo como base el objetivo específico 3 que propone la identificación de potenciales conflictos semióticos cuando se resuelven problemas de función cuadrática de un texto universitario y en una actividad propuesta como parte de un curso de primer ciclo de la universidad.

Este capítulo se desarrollará teniendo en cuenta las investigaciones anteriores mencionadas en los antecedentes, el análisis de la función cuadrática en el texto a partir de la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada en el capítulo 3 y la metodología de análisis de contenido que nos permitirá usar los indicadores y los procedimientos metodológicos detallados.

4.1 Identificación de los posibles conflictos semióticos de las respuestas de estudiantes a los problemas sobre función cuadrática en un texto

En el capítulo anterior se analizó el texto a partir de los conceptos que introdujo la Teoría de registros de Representación Semiótica, principalmente reconociendo las actividades cognitivas que todo registro de representación semiótica debe tener en cuenta y las transformaciones que se realizaron para la solución de los problemas planteados.

También se mencionó en el capítulo 2 el concepto de conflicto semiótico como las diferentes interpretaciones que realizan los estudiantes y que no concuerdan con las que la institución pretende. En este sentido relacionaremos a la expresión que se plantea en un problema con su representación y al contenido con el significado que se le atribuye.

En esta parte debe quedar claro que nuestro estudio es sobre potenciales conflictos semióticos atribuidos a la forma de tratar el tema función cuadrática en el texto universitario "Matemática para no matemáticos".

En primer lugar, para el ejemplo propuesto en la figura 25, no se menciona que hará la representación de los costos totales como una función cuadrática o de manera general como una función cualesquiera. Esto ocasiona que se escriba una expresión matemática representada en el registro algebraico.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación que se le da a la variable dependiente en el texto es C(r) como se muestra en la figura 38.

Las expresiones algebraicas correspondientes a los costos totales de la primera y segunda compañía,

$$C_1(r) = 30\pi r^2 + 25(2\pi r) + 250$$
$$y$$
$$C_2(r) = 28\pi r^2 + 30(2\pi r) + 650$$

Figura 38: Representación simbólica de los costos para el ejemplo propuesto en la figura 25

- El significado que se le da a cada expresión simbólica C(r) es de la función cuadrática que representa los costos totales de la primera y segunda compañía, descrito en la solución del problema.
- **El conflicto semiótico 1** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante no asocie la representación de una función cuadrática en el registro algebraico $C(r) = ar^2 + br + c$ con la representación $f(x) = ax^2 + bx + c$, pues no reconocen otras formas simbólicas de representar a la variable independiente y dependiente.

En la tabla 9, describimos una situación que ejemplifica el conflicto semiótico descrito

CASO: No se menciona que hará la representación de los costos totales como una función cuadrática.		
Identificar la representación inicial	Identificar los significados que le da a la representación	Mencionar los conflictos semióticos
Posible identificación del estudiante La variable que se utiliza es C que representa al costo total de cada compañía.	Posible identificación del estudiante El valor del radio r nos permite asignarle un valor a C. Los estudiantes interpretan esta asignación solo como pares ordenados.	La representación algebraica de la función cuadrática como $C(r)=ar^2+br+c$ es interpretado como una expresión que solo asigna valores como los mostrados en la figura 27. Los estudiantes no reconocen las representaciones de las variables independiente y de la variable dependiente.

Tabla 9: Situación que ejemplifica el conflicto semiótico 1 en el texto.

En segundo lugar, para el ejemplo propuesto en la figura 25, en la solución que presenta el libro se muestra un cuadro con los valores del radio y los valores del costo total en dólares mostrados en la figura 27 y estos son representados mediante un gráfico en el registro gráfico y mostrado en la figura 28. Esta transformación entre registros genera un conflicto en la medida que los estudiantes interpreten que a partir de una tabla de valores se puede representar a la función cuadrática en el registro gráfico. Se debe realizar una conversión pero los registros de partida y llegada deben ser los idóneos y esto no ocurre porque el registro de partida que se tiene es una tabla de valores que no es el correcto. La conversión debe ser del registro de pares ordenados al registro gráfico porque son los registros que se deben involucrar para realizar finalmente el gráfico.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación inicial que se le da a los pares ordenados son mostrados en una tabla de valores tal como se muestra en la figura 27.
- El significado que se le da a cada valor de la tabla es la representación de un punto en el plano cartesiano.
- **El conflicto semiótico 2** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante no asocie la representación de una función cuadrática en el registro de pares

ordenados con la representación de la función cuadrática en el registro gráfico. La tabla propuesta en la figura 27 no es suficiente para realizar a partir de ésta la representación de la función en el registro gráfico. De esta manera, se deben hacer dos conversiones si se tiene como registro de entrada al registro tabular.

Se debe hacer una primera conversión para transformar los valores del registro tabular al registro de pares ordenados y una segunda conversión para pasar del registro de pares ordenados al registro gráfico.

En la tabla 10, describimos una situación que ejemplifica el conflicto semiótico descrito

CASO : No se puede representar gráficamente una función cuadrática a partir de los datos de una tabla de valores		
Identificar la representación inicial	Identificar los significados que le da a la representación	Mencionar los conflictos semióticos
Posible identificación del estudiante Los datos que son representados en el gráfico proviene de una tabla de valores	Posible identificación del estudiante Los valores que se tienen en la tabla de valores son representados mediante puntos que son ubicados directamente en el plano cartesiano.	Cuando se asigna un punto en el plano cartesiano este proviene del registro de pares ordenados y no de los valores de una tabla por lo que se genera un conflicto semiótico porque no se hace la conversión correcta entre los registros implicados.

Tabla 10: Situación que ejemplifica el conflicto semiótico 2 en el texto.

En tercer lugar, para el ejemplo propuesto en la figura 33, a partir de determinar la coordenada del vértice de la función cuadrática se asume que la gráfica de la función será un trazo curvo y abierto. No se toma en cuenta los comentarios hechos en las figuras 22 y 23 donde se detalla que se debe tener como representaciones iniciales, puntos que deben ser ubicados en el plano cartesiano. En seguida, debe hacerse una interpolación para obtener otros puntos y después realizar el trazo del gráfico.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación del vértice de la parábola es un punto en el plano cartesiano y la identificación de la concavidad de la representación gráfica de la función cuadrática es para realizar un trazo curvo.
- El significado que se le da a la ubicación del vértice en el plano cartesiano y al reconocimiento de la concavidad se da en la medida que se hacen las conversiones necesarias para representar a la función cuadrática en el registro gráfico de coordenadas cartesianas.
- **El conflicto semiótico 3** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante asocie incorrectamente al vértice y la concavidad una representación gráfica que no sea pertinente, pues no reconocen que para representar una función cuadrática en el registro gráfico de coordenadas cartesianas se deben hacer una conversión para representar puntos en el plano cartesiano tales como: el vértice y los puntos de intersección con los ejes coordenados. De esta manera, se hacen tratamientos en el mismo registro gráfico de coordenadas cartesianas para realizar el trazo curvo y abierto que represente a la función cuadrática.

En la tabla 11, describimos una situación que ejemplifica el conflicto semiótico descrito

CASO : No se puede representar gráficamente solo a partir de ubicar el vértice y reconocer la concavidad		
Identificar la representación inicial	Identificar los significados que le da a la representación	Mencionar los conflictos semióticos
Posible identificación del estudiante Se ubica en el plano cartesiano el punto que representa al vértice y se reconoce que la representación gráfica en el registro gráfico es cóncava hacia arriba.	Posible identificación del estudiante Tomando tan solo al vértice como referencia se hace la representación gráfica de la función cuadrática.	Solo conociendo la ubicación del vértice en el plano cartesiano y el valor del coeficiente principal de la función cuadrática se hace la representación gráfica de la función cuadrática. Se debe hacer conversiones para representar el vértice en el registro gráfico y después tratamientos en el mismo registro gráfico para realizar el trazo de la función cuadrática.

Tabla 11: Situación que ejemplifica el conflicto semiótico 3 en el texto.

En cuarto lugar, para el ejemplo propuesto en la figura 33, queda la idea de que se debe representar a la función cuadrática en el registro gráfico para que a partir de esta se pueda determinar el dominio y rango de la función. Pero, debemos recordar que cuando se representa a la función cuadrática como: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y por ejemplo siendo el valor de $a > 0$, se puede reconocer que la parábola es cóncava hacia arriba. Esto permite identificar un mínimo que a su vez nos permitiría determinar el rango de la función en su forma simbólica como: Ran f = [k; ∞[.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación inicial de la función cuadrática está propuesta en el registro algebraico en su representación de completar cuadrados como $f(x)=a(x-h)^2 + k$.
- El significado que se le da a esta representación para poder determinar el dominio y rango de una función cuadrática es de realizar su representación gráfica.
- **El conflicto semiótico 4** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante se vea obligado a representar a la función cuadrática en su representación gráfica en el registro gráfico de coordenadas cartesianas pues considera necesario hacer esta representación para determinar el dominio y el rango de la función.

En la tabla 12, describimos una situación que ejemplifica el conflicto semiótico descrito

CASO: No se necesita hacer la representación gráfica de una función cuadrática para determinar el dominio y rango de la función.		
Identificar la representación inicial	Identificar los significados que le da a la representación	Mencionar los conflictos semióticos
Posible identificación del estudiante Se tiene la función cuadrática representada en el registro algebraico en su forma de completar cuadrados	Posible identificación del estudiante A partir de la representación algebraica se interpreta que se debe hacer una conversión y se tiene que representar a la función en el registro gráfico.	El conflicto sería que los estudiantes necesariamente hagan la representación gráfica para determinar el dominio y rango de la función. El profesor podría esperar que el alumno reconozca el rango de la función cuadrática solo a partir de la representación algebraica sin tener la necesidad de recurrir a la representación gráfica porque previamente identificó un punto máximo o mínimo de la función..

Tabla 12: Situación que ejemplifica el conflicto semiótico 4 en el texto.

4.2 Identificación de los posibles conflictos semióticos de las respuestas de estudiantes a los problemas sobre función cuadrática en una actividad

Tomando en cuenta las descripciones realizadas de la actividad presentada en la figura 36, debemos reconocer que esta plantea un ejemplo de una situación que exige la representación de las variables y las transformaciones entre registros para lograr obtener un valor que optimice la función cuadrática.

En primer lugar, se menciona como variable independiente a x cantidad de kilogramos vendidos que según como está definida la variable es una variable cuantitativa discreta y esto ocasiona que no se note la característica de continuidad que debe tener la variable independiente x cantidad de kilogramos vendidos por día. De esta manera, cuando se represente la expresión algebraica del ingreso total por día en soles y se haga la conversión al registro gráfico de coordenadas cartesianas, se debería hacer un trazo con una serie de puntos ubicados en el plano cartesiano. Sin embargo, se asume equivocadamente continuidad en la representación gráfica.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación inicial de la variable que representa a la cantidad de kilogramos vendidos por día tiene una representación simbólica como variable x.
- El significado que se le da a esta representación es de una variable cuantitativa discreta de acuerdo a los valores que se muestran en la tabla de la figura 36.
- **El conflicto semiótico 1** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante no reconozca que la variable cantidad de kilogramos vendidos por día sea cuantitativa discreta pues considera que toda variable debe ser continua para que la representación gráfica denote continuidad.

En la tabla 13, describimos una situación que ejemplifica el conflicto semiótico descrito

CASO: No se realiza un trazo continuo en la representación gráfica de la función cuadrática cuando la variable independiente es cuantitativa discreta.		
Identificar la representación inicial	Identificar los significados que le da a la representación	Mencionar los conflictos semióticos
Posible identificación del estudiante Se tiene una tabla de datos, cuyos valores son ubicados por el estudiante en la representación gráfica de la función cuadrática.	Posible identificación del estudiante Con los valores ubicados en el plano cartesiano el estudiante considera que ya representó en el plano cartesiano los puntos de paso para hacer la representación gráfica de la función cuadrática	El conflicto sería que los estudiantes realicen un gráfico con una curva continua abierta y esto denote continuidad. Por ello se debe reconocer previamente el tipo de variable que se tiene para evitar una representación gráfica incorrecta.

Tabla 13: Situación que ejemplifica el conflicto semiótico 1 en la actividad.

En segundo lugar, la representación del precio de venta promedio por kilogramo vendido se hace por medio de la variable dependiente y, la cual no muestra la correspondencia que debe de haber entre las variables, para que se llame función. En este caso solo sería una relación porque su representación en el registro algebraico considera que debe de mostrarse correspondencia entre las variables independiente *y* dependiente. Igualmente ocurre cuando se le asigna a I como variable dependiente para el ingreso.

Siguiendo el procedimiento metodológico que se detalló para el análisis de los posibles conflictos semióticos se tiene lo siguiente:

- La representación simbólica de la variable que representa al precio de venta promedio por kilogramo vendido es y. Además, la representación simbólica de la variable que representa al ingreso total por día en soles es I.
- El significado que se le da a cada una de las representaciones es el de una variable que debería de relacionarse con la cantidad de kilogramos vendidos que es representada por la variable x.
- **El conflicto semiótico 2** que se tiene es el siguiente: Se espera que el estudiante relacione a las variables dependientes I que representa al ingreso total por día en soles e y que representa al precio de venta promedio por kilogramo vendido con la variable x cantidad de kilogramos vendidos por día de tal manera que el estudiante mencione que se tiene sendas funciones. Por un lado, I en función de x y por otro y en función de x. Estas correspondencias no representarían a funciones porque en la representación simbólica de las variables debe mostrarse para la dependiente su relación con la variable independiente. Por lo tanto, se deben representar a y como $f(x)$ y a I como $I(x)$.

CAPITULO V CONSIDERACIONES FINALES

1. Con relación a los antecedentes y la justificación, se tiene que el estudio de los conflictos semióticos de la función cuadrática no es un tema trivial por lo que todos los antecedentes siempre han mostrado conclusiones donde se mencionan dificultades o conflictos que se generan cuando se representan o se hace una transformación entre registros. Además, la justificación del tema a partir de la pertinencia de la función cuadrática como tema necesario para cursos posteriores de alumnos de las especialidades de Letras y Ciencias humanas demostró que se hace necesario la incorporación del tema en cursos iniciales para estos estudiantes.

2. Con relación a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, se tiene que previo a la representación de las variables en cada uno de los registros de representación semiótica debe hacerse una descripción en lengua natural de dicho elemento porque esto permite una descripción de la variable. Además, la conversión es una actividad fundamental al hacer matemática y para el caso de la función cuadrática puede ser representada en diversos registros de representación y esto permitir realizar la conversión a otra representación en otro registro de representación.

3. Con relación a la conexión entre los conflictos semióticos y la Teoría de Registros de Representación Semiótica, se tiene que al identificar los posibles conflictos que pueden presentarse durante la interacción entre la expresión atribuido a la representación y el contenido atribuido al significado se logró relacionar a los conflictos semióticos y a la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

4. Con relación a la metodología, se tiene que, la selección de la unidad de análisis e indicadores permitió describir y evaluar un libro a partir de la metodología de análisis de

contenido. De esta manera, reconocimos que en los ejemplos que se detallaron siempre se realiza una transformación entre representaciones en un registro dado.

5. Con relación al primer objetivo específico, se tiene que al reconocer que cada representación de la función cuadrática en los distintos registros de representación muestran informaciones que no necesariamente presenta todos los datos necesarios para la resolución de un problema. Además, las representaciones en distintos registros de representación complementan las informaciones que se obtienen de ellos. Finalmente, las transformaciones entre registros se hacen necesarias para poder mostrar toda la información necesaria que exige cada uno de los problemas.

6. Con relación al segundo objetivo específico, se tiene que el texto universitario analizado no propicia la transformación entre registros de una manera tal que el estudiante se vea en la necesidad de hacerlo, sino que lo hace impuesto por lo pedido en el problema. Además, el texto muestra soluciones incompletas en su resolución no detallando correctamente las representaciones que se hace de las variables.

7. Con relación al tercer objetivo específico, se tiene que se consideró a las soluciones realizadas por el texto como solución de los estudiantes porque se reconoció que al texto como unidad de análisis.

- En los ejemplo analizados se reconocieron los siguientes conflictos semióticos:

  a. No se menciona que hará la representación en su forma simbólica de la variable dependiente como una correspondencia con la variable independiente, es decir una representación *f (x)*.

  b. No se puede representar gráficamente a partir de los datos de una tabla de valores.

c. No se puede representar gráficamente, solo a partir de ubicar el vértice en el plano cartesiano y conocer el valor de a que nos da la información de la concavidad de la representación gráfica.

Recomendaciones para el texto

- Se sugiere implementar en una edición posterior situaciones en las que se necesite hacer el cambio de representación de un registro a otro, es decir una conversión. De tal forma que sea una necesidad para resolver un problema y no que sea impuesto como parte de resolver el problema. En los problemas propuestos del texto siempre se hacen conversiones pero porque el libro lo menciona textualmente.
- Se sugiere presentar y formalizar la representación de la función cuadrática en el registro algebraico, como: $f(x) = a(x - r)(x - s)$. esto nos permitirá obtener otras informaciones que no estuvieron claras en la solución de los problemas del texto.

Se deja como temas abiertos para futuras investigaciones los siguientes puntos:

- Realizar la identificación de la ocurrencia de las actividades cognitivas descritas en la teoría para otras funciones del tipo polinómicas tales como: la función lineal y la función cúbica.
- Identificar los conflictos semióticos para otro objeto matemático que pueda estar propuesto en el texto universitario que hemos usado. De esta manera se ampliaría el análisis de la relación entre la noción de conflicto semiótico y la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Referencias

Advíncula E., Barrantes J., Henostroza J., Jabo F., Luna M. y Gaita C. (2009). *Matemática para no matemáticos*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Anderson D., Sweeney D y Williams T. (2004). *Estadística para administración y economía.* México D.F., México: Thomson Editores S.A.

Campos, R. (2014). *Aspectos conceptuales y metodológicos del desarrollo del concepto función cuadrática en libros de texto escolar del grado 9°*. Tesis de Magister. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Recuperado de: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/4588/510712C198.pdf?sequence=1

Córdova, M. (2009). *Estadística descriptiva e inferencial.* Lima, Perú: MOSHERA S.R.L.

Díaz M., Haye E., Montenegro F. y Córdova L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *I Congreso de educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana, 2013*. Recuperado de: http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: La articulación entre dos registros. México: *Sección Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN.*

Duval, R. (1995). Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. *Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía*. Universidad del Valle, Colombia, 2004.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning. Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille*. Recuperado de http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME 9(1)*, 143-168. Recuperado de: http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf

Espinoza F., Rodríguez C., Jorge M., Mata L. y Caputo L (2013). Conflictos semióticos en prácticas algebraicas de ingresantes a la FACENA-UNNE en 2013. El caso de una ecuación de segundo grado en una variable. Investigación en Educación Matemática-Nivel Universitario. Universidad Nacional del Nordeste. Argentina. Recuperado de: http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/pdf/Eje%206_Inv%20EM/ponencia%203_Espinoza_rodriguez.pdf

Gaspar De Alba, A. (2012). La formación del concepto de parábola utilizando diferentes tipos de representación. Proyecto de Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Gónzales, G. (2011). *Tratamientos de la representación semiótica de la función cuadrática.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Manizales. Recuperado de: http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/860/1/informe%20final%20investigacion%20tratamiento%20de%20las%20representaciones%20semioticas%20de%20la%20funcion%20cuadratica.pdf

Godino J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2, 3)*: 237-284. Recuperado de: http://centroedumatematica.com/ciaem/articulos/universitario/experiencias/Un%20Enfoque%20Ontol%C3%B3gico%20y%20Semi%C3%B3tico%20de%20la%20Cognici%C3%B3n%20Matem%C3%A1tica.%202002*Godino,%20Juan%20D.*Godino,%20J.%20Un%20enfoque%20ontol%C3%B3gico%20y%20semi%C3%B3tico%20...%202002.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39, 127-135.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el Aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1)*, 5-21. Recuperado de: file:///C:/Users/edwin/Downloads/Dialnet-RegistrosDeRepresentacionElAprendizajeDeNocionesRe-2147917.pdf

Hernández R., Fernández C. y Baptista P. (2006). *Metodología de la investigación.* Ciudad de México, México: Interamericana Editores.

Kotler, P. (1973). *Mercadotecnia aplicada.* Ciudad de México, México: Interamericana.

Lima E., Pinto P., Wagner E. y Morgado A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*. Lima, Perú: IMCA.

Linsley, R., Kohler M. y Paulhus J. (1967). *Hidrología para ingenieros.* Madrid, España: Ediciones Del Castillo.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación, 4: 167-179.* Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/1912/b15150434.pdf

Luna, J. (1997). *La geometría Analítica a través de Modelos Físicos.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.

Martínez M. (2006). La investigación cualitativa: síntesis conceptual. Revista de investigación en psicología, 9 (1), 123-146

Mayén S., Díaz C. y Batanero C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Revista en Investigación de Educación estadística, 8(2): 74-93*. Recuperado de: http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ8(2)_Mayen.pdf

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. *Investigación en educación matemática XIII, 1: 5-20*. Recuperado de: http://www.seiem.es/docs/actas/13/SEIEMXIII-AlexanderMaz.pdf

Piñuel J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. Estudios de Sociolingüística 3(1): 1-42. Universidad Complutense de Madrid. España. Recuperado de: https://www.ucm.es/data/cont/docs/268-2013-07-29-Pinuel_Raigada_AnalisisContenido_2002_EstudiosSociolinguisticaUVigo.pdf

Sicha, A. (2011). *Estudio de la prácticas matemáticas asociadas al tratamiento de la función cuadrática en la formación de los estudiantes de las carreras de humanidades.* Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Anexos

Anexo 1: Actividad diseñada

ACTIVIDAD

Nombres y apellidos del estudiante……………………………………………………………

Fecha…………………………………………………………………………………….

Confección de prendas de temporada

El fenómeno del Niño se presentó en el Perú en el año 1997 generando cambios bruscos en el clima que normalmente se tenía en varias zonas del país. La industria textil es una de las que sufrió mayores problemas debido a que se acorto el período de invierno y los productos destinados para esta época no se pudieron vender adecuadamente.

Andy es un comerciante del emporio téxtil de Gamarra que no entiende porque sus ventas disminuyeron notablemente y decide evaluar esta situación. Así las ventas de Andy se miden en cantidad de kilogramos vendidos por día y se relacionan con el precio de venta promedio por kilogramo vendido, manteniendo una tendencia como se muestra en la tabla. Por ejemplo: el 1 de abril vende 3000 kilogramos de productos, siendo el precio de venta promedio por kilogramo vendido de 25 soles. La siguiente tabla muestra los datos recolectados por Andy:

Día	Cantidad de kilogramos vendidos por día (x)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (y)	Ingreso total por día en soles (I)
1 de abril	3000	25	
2 de abril	2950	26	
3 de abril	2900	27	
4 de abril	2850	28	
...			
10 de abril	2550	34	
...			

Continúa...

Responde:

a) Reconoce que magnitudes te permitirá obtener el ingreso total por día en soles. Calcula el ingreso total por día en soles para los días y datos mostrados en la tabla.

Día	Cantidad de kilogramos vendidos por día (x)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (y)	Ingreso total por día en soles (I)
1 de abril	3000	25	
2 de abril	2950	26	
3 de abril	2900	27	
4 de abril	2850	28	
...			
10 de abril	2550	34	
...			

b) Sea x la cantidad de kilogramos vendidos por día y sea y el precio de venta promedio por kilogramo vendido ¿Explica qué tipo de relación puedes reconocer entre los valores de x e y?

Continúa...

c) De acuerdo a la parte b), si deseas plantear el valor de y en término de x, ¿qué expresión matemática podrías mostrar?

d) ¿Explica cómo harías para obtener una expresión matemática para el ingreso total por día en soles (I) que tiene la forma $I = ax^2 + bx + c$? ¿Cuál es dicha expresión?

Continúa...

e) Una vez obtenida la expresión matemática propuesta en la parte d), ¿qué significado le darías a los valores de a, b y c obtenidos en el ítem d)? Explica con tus propias palabras.

f) Representa algebraicamente la expresión matemática del ingreso total por día de la forma: $I = a\,(x - h)^2 + k$.

Continúa...

g) Andy desea obtener el valor del mayor ingreso total por día en soles. ¿Explica cómo obtendría este valor?¿Cuál es el valor del mayor ingreso posible en soles?

h) Selecciona correctamente los ejes de un plano cartesiano. Mediante un esbozo del gráfico indica el valor del mayor ingreso posible.

Muchas gracias por su participación en esta evaluación.

Anexo 2: Solución maestra de la actividad diseñada

ACTIVIDAD

Nombres y apellidos del estudiante………………………………………………………

Fecha……………………………………………………………………………………….

Confección de prendas de temporada

El fenómeno del Niño se presentó en el Perú en el año 1997 generando cambios bruscos en el clima que normalmente se tenía en varias zonas del país. La industria textil es una de las que sufrió mayores problemas debido a que se acorto el período de invierno y los productos destinados para esta época no se pudieron vender adecuadamente.

Andy es un comerciante del emporio téxtil de Gamarra que no entiende porque sus ventas disminuyeron notablemente y decide evaluar esta situación. Así las ventas de Andy se miden en cantidad de kilogramos vendidos por día y se relacionan con el precio de venta promedio por kilogramo vendido, manteniendo una tendencia como se muestra en la tabla. Por ejemplo: el 1 de abril vende 3000 kilogramos de productos, siendo el precio de venta promedio por kilogramo vendido de 25 soles. La siguiente tabla muestra los datos recolectados por Andy:

Día	Cantidad de kilogramos vendidos por día (x)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (y)	Ingreso total por día en soles (I)
1 de abril	3000	25	
2 de abril	2950	26	
3 de abril	2900	27	
4 de abril	2850	28	
...			
10 de abril	2550	34	
...			

Continúa...

Responde:

a) Reconoce que magnitudes te permitirá obtener el ingreso total por día en soles. Calcula el ingreso total por día en soles para los días y datos mostrados en la tabla.

Las magnitudes son dos: la cantidad de kilogramos vendidos y el precio de venta promedio por kilogramo vendido en soles.

Día	Cantidad de kilogramos vendidos por día (x)	Precio de venta promedio por kilogramo vendido (y)	Ingreso total por día en soles (I)
1 de abril	3000	25	**75000**
2 de abril	2950	26	**76700**
3 de abril	2900	27	**78300**
4 de abril	2850	28	**79800**
...			
10 de abril	2550	34	**86700**
...			

b) Sea x la cantidad de kilogramos vendidos por día y sea y el precio de venta promedio por kilogramo vendido ¿Explica qué tipo de relación puedes reconocer entre los valores de x e y?

La relación entre los valores de x e y es de tipo lineal, es decir a medida que x disminuye en 50 kilogramos el valor de y aumenta en 1 sol.

Continúa...

c) De acuerdo a la parte b), si deseas plantear el valor de y en término de x, ¿qué expresión matemática podrías mostrar?

De acuerdo a la pregunta b) se reconoce una relación lineal, por lo que se puede plantear el valor de y en términos de x, por medio de una función lineal, así:

x	y
3000	25
2950	26

Para y = mx + b, se tiene:

25 = 3000m + b

26 = 2950m + b

➔ **m = -1/50, b = 85**

$\therefore\ y = -\frac{1}{50}x + 85$

d) ¿Explica cómo harías para obtener una expresión matemática para el ingreso total por día en soles (I) que tiene la forma $I = ax^2 + bx + c$? ¿Cuál es dicha expresión?

i) El valor de I que representa el ingreso total por día en soles se obtiene multiplicando los valores de x (cantidad de kilogramos vendidos por día) e y (precio de venta promedio por kilogramo vendido), es decir: I = xy

ii) Sea x la cantidad de kilogramo vendido por día e y el precio de venta promedio por kilogramo vendido, sabiendo que $y = \frac{-1}{50}x + 85$

El valor de I es: I = xy

$$I = x\left(\frac{-1}{50}x + 85\right)$$

$$I = \frac{-1}{50}x^2 + 85x$$

Continúa...

e) Una vez obtenida la expresión matemática propuesta en la parte d), ¿qué significado le darías a los valores de a, b y c obtenidos en el ítem d)? Explica con tus propias palabras.

Se tiene la expresión: $\mathbf{I = \frac{-1}{50} x^2 + 85x}$

Identificamos que: $\mathbf{a = \frac{-1}{50}}$ **; b = 85 y c = 0**

Valor de a $\mathbf{= \frac{-1}{50}}$ **es un número negativo y fraccionário, que la gráfica de la función cuadrática se abre hacia abajo (concavidad).**

Valor de b = 85 es un número positivo que representa el coeficiente del término lineal de la función cuadrática.

Valor de c = 0 indica la intersección del eje y con la gráfica de la función cuadrática.

f) Representa algebraicamente la expresión matemática del ingreso total por día de la forma: $I = a\,(x - h)^2 + k$.

De: $\mathbf{I = \frac{-1}{50} x^2 + 85x}$**, se completa cuadrados y se obtiene:**

$$\mathbf{I = \frac{-1}{50} (x^2 - 4250x + 2125^2 - 2125^2)}$$

$$\mathbf{I = \frac{-1}{50} (x - 2125)^2 + 90312.5}$$

Continúa...

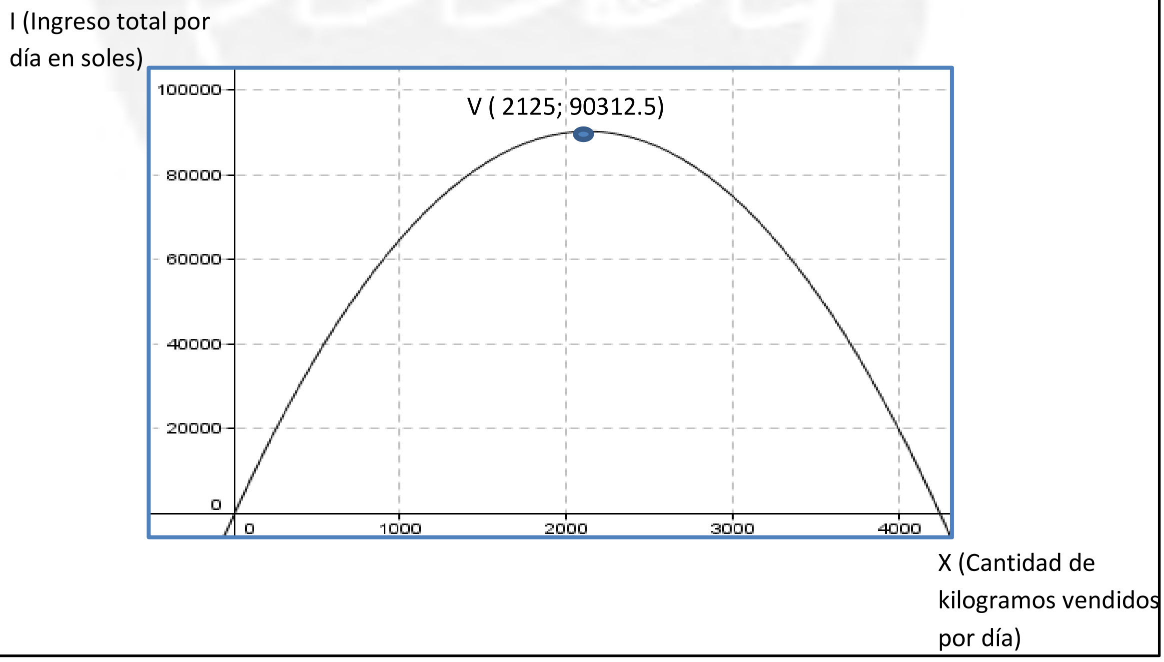
g) Andy desea obtener el valor del mayor ingreso total por día en soles. ¿Explica cómo obtendría este valor?¿Cuál es el valor del mayor ingreso posible en soles?

i) El valor del mayor ingreso total por día en soles se obtiene reconociendo que la gráfica de la función cuadrática que la representa es una parábola y tiene concavidad hacia abajo, por lo que en el vértice de la parábola se encuentra el punto máximo. De esta manera el valor del mayor ingreso total por día en soles es la ordenada del vértice.

ii) De: I = $\frac{-1}{50}$ (x – 2125)^2 + 90312.5, las coordenadas del vértice es (2125; 90312.5).

El mayor valor del ingresso total por día es: 90312.50 soles.

h) Selecciona correctamente los ejes de un plano cartesiano. Mediante un esbozo del gráfico indica el valor del mayor ingreso posible.



Muchas gracias por su participación en esta evaluación.