PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Conocimiento didáctico matemático que deben manifestar profesores de secundaria en relación a tareas sobre ecuaciones.

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

DIANA TEODORA PASAPERA CHUQUIRUNA

Dirigida por

DRA. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2017

DEDICATORIA

A DIOS, por no dejarme caer, dándome fortaleza y sabiduría para seguir con el cumplimiento de este objetivo.

A mis queridos padres, por ser mi soporte y enseñarme con su ejemplo y por medio de valores asumir cada reto emprendido.

A mi esposo, por su paciencia y palabras de apoyo en los momentos de tensión, y también por su amor incondicional.

AGRADECIMIENTO

A la DRA. CECILIA GAITA, por su infinita paciencia y dedicación en la preparación de este proyecto, acompañándome y aconsejándome con sabiduría en cada asesoría. Gracias mi estimada profesora por ser mi guía y mi constante apoyo en el desarrollo de esta tesis.

A cada uno de mis profesores de la maestría, por sus valiosas enseñanzas y por motivarnos a seguir con entusiasmo a desarrollarnos en este camino de la Educación Matemática.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo identificar el conocimiento didáctico matemático que debe manifestar un profesor en la secundaria para reconocer la complejidad o la progresión de características algebraicas en tareas sobre ecuaciones que se presentan en textos escolares. Para ello, señalaremos cuáles son los conocimientos matemáticos referidos a cada objeto primario asociado a las ecuaciones de primer y segundo grado que emergen de las prácticas matemáticas, en una propuesta para el significado institucional de referencia de las ecuaciones.

A partir de dicha propuesta y de las consignas que se describen para la faceta epistémica y ecológica del Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático propuesto por Godino (2009), hemos llegado a determinar que un profesor debe ser capaz de identificar los conocimientos que se requieren para abordar un contenido, así como los lenguajes, conceptos, tipos de situaciones, diferentes procedimientos y propiedades que se ponen en juego para el estudio de las ecuaciones. También las conexiones de las ecuaciones de primer y segundo grado con temas y tópicos más avanzados según el currículo nacional.

Además, debe identificar los conocimientos que marquen la evolución del razonamiento algebraico elemental, tales como el reconocimiento de los procesos algebraicos de generalización, unitarización, simbolización que son rasgos característicos de los niveles de algebrización (0, 1, 2 y 3) que se definen desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) para que genere o modifique tareas en mejora de su práctica profesional.

Finalmente, en nuestras consideraciones finales, destacamos que con la identificación de estos conocimientos y el insumo del significado institucional de referencia será posible dar cuentas en futuras investigaciones de las ausencias, presencias, debilidades y fortalezas de nuestro diseño curricular; así como de implementar una propuesta para formación de profesores.

Palabras clave: Conocimientos matemáticos, ecuaciones, razonamiento algebraico elemental, profesores, enfoque ontosemiótico, educación secundaria.

ABSTRACT

The present research aims to identify the mathematical didactic knowledge that must be demonstrated by a teacher in the secondary to recognize the complexity or progression of algebraic characteristics in tasks on equations that are presented in school texts. To do this, we will point out the mathematical knowledge related to each primary object associated to the first and second degree equations that emerge from the mathematical practices, in a proposal for the institutional meaning of reference of the equations.

Based on this proposal and the slogans that are described for the epistemic and ecological facet of the Mathematical Didactic Knowledge Model proposed by Godino (2009), we have come to determine that a teacher must be able to identify the knowledge required to approach A content, as well as the languages, concepts, types of situations, different procedures and properties that are put into play for the study of the equations. Also the connections of the first and second degree equations with topics and more advanced topics according to the national curriculum.

In addition, it must identify the knowledge that marks the evolution of elementary algebraic reasoning, such as the recognition of the algebraic processes of generalization, unitarization, symbolization that are characteristic features of algebrization levels (0, 1, 2 and 3) that are defined from the ontosemiotic approach of cognition and mathematical instruction (EOS) to generate or modify tasks in improving their professional practice.

Finally, in our final considerations, we emphasize that with the identification of this knowledge and the input of the institutional meaning of reference, it will be possible to account for future investigations of the absences, presences, weaknesses and strengths of our curricular design; As well as to implement a proposal for teacher training.

Key words: Mathematical knowledge, equations, elementary algebraic reasoning, teachers, ontosemiotic approach, secondary education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INDICE

INTRODUCCION

El presente estudio surge como una continuación de las investigaciones que se han venido desarrollando en educación matemática para abordar la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar y que han utilizado algunas herramientas del marco teórico: enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) para realizar la descripción de los rasgos característicos del álgebra.

Con la ayuda de dicha teoría y de los resultados obtenidos de las investigaciones previas; tales como son: los cuatro niveles de razonamiento algebraico elemental que se desarrolló para la educación primaria , y el Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (MCDM) de Godino en la faceta epistémica y ecológica; pretendemos realizar la identificación del conocimiento didáctico matemático que debe manifestar un profesor para la evolución del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones de primer y segundo grado.

Pues, es importante promover actividades que favorezcan la evolución y consolidación del razonamiento algebraico elemental, teniendo en cuenta a los procesos algebraicos de generalización, unitarización y simbolización, que le permita al profesor reconocer dichos procesos algebraicos que están asociados a los niveles en las soluciones de los estudiantes al resolver una tarea o también para diseñar sus sesiones de clase; seleccionando o modificando actividades de los textos escolares que distribuye el estado Peruano en los colegios nacionales.

Para ello, hemos estructurado nuestro trabajo de investigación en cinco capítulos, tal como detallaremos a continuación.

En el primer capítulo, presentamos estudios que organizó Kieran (2006) para atender la dificultad de la transición de la aritmética al álgebra; y también investigaciones desde el enfoque ontosemiótico, cuya preocupación era identificar que rasgos poseía el razonamiento algebraico elemental.

También la importancia de nuestro trabajo se centra principalmente en que en el plan de estudios de la carrera de educación secundaria, no se encuentran evidencias de que se contemplen espacios para el desarrollo de los conocimientos didácticos del profesor para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Así como se ha encontrado investigaciones que resaltan las dificultades de los docentes para remediar las dificultades de aprendizaje por parte de los estudiantes y señalan que es fundamental disponer de un conocimiento matemático didáctico adecuado; necesidades por las cuales nos hemos formulado la pregunta y objetivos de la investigación.

En el segundo capítulo, presentamos algunos de los elementos del marco teórico que utilizaremos para el desarrollo de nuestra investigación, incluyendo a los niveles del razonamiento algebraico elemental que consideramos son parte del conocimiento especializado de la faceta epistémica del Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático de Godino.

En el tercer capítulo presentamos los textos e investigaciones revisadas para la construcción del significado institucional de referencia de las ecuaciones, teniendo en consideración a los objetos primarios asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado.

En el capítulo cuatro y cinco, y teniendo como base al insumo obtenido en el tercer capítulo: significado institucional de referencia, realizamos la identificación del conocimiento didáctico matemático que debe poseer el profesor en relación a las ecuaciones para la faceta epistémica y ecológica. Así también, la identificación del conocimiento didáctico matemático del profesor para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones, para las que definimos las características de los niveles del razonamiento algebraico elemental para las ecuaciones de primer y segundo grado.

Finalmente; presentamos en las consideraciones finales las conclusiones como parte del cierre del trabajo de investigación, realzando la importancia del marco teórico y realizando recomendaciones para futuras investigaciones en Educación Matemática.

CAPITULO I: LA PROBLEMATICA

En este capítulo se presenta la problemática de nuestro trabajo de investigación, organizada a través de los antecedentes en donde se muestran trabajos previos realizados a lo largo de los últimos 35 años que resaltan la dificultad en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, evidenciándose que este sigue siendo un tema de interés para muchos trabajos de investigación con implicancia en la formación de profesores. De igual forma, se hace una revisión de investigaciones que señalan que la identificación del conocimiento didáctico matemático que debe tener los profesores, es un tema en la agenda de los investigadores en Educación Matemática.

Así también presentamos argumentos que sustentan la pertinencia de un estudio que contribuya con la formación continua de profesores de educación secundaria, orientado a identificar el conocimiento didáctico matemático que debe tener un profesor para desarrollar progresivamente el razonamiento algebraico elemental en sus estudiantes a partir del tratamiento de las ecuaciones. Así mismo, formulamos la pregunta de investigación y los objetivos que nos proponemos cumplir en este trabajo, teniendo en consideración el método de investigación "análisis de contenido" que guiará nuestro trabajo por medio de los procedimientos metodológico que más adelante describiremos.

1.1 Antecedentes

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra han sido centro de atención de muchas investigaciones. En los diversos trabajos realizados por grupos de investigadores se explícita dicha problemática, la que ha ido evolucionando con el tiempo.

Así, Kieran (2006) en su manual de investigación sobre la psicología de la educación matemática organiza trabajos de grupos que surgieron entre los años 1977 y 2006, manifestando que en las primeras investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, el foco de atención fueron las dificultades que presentaban los estudiantes al transitar de la aritmética al álgebra, con variables, incógnitas, ecuaciones, resolución de ecuaciones y problemas de álgebra. Debido a que, en álgebra los signos y símbolos (letras) debían ser interpretados de manera diferente de las formas en que fueron interpretados en aritmética, creando brechas en su aprendizaje para los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra escolar. Por ejemplo, el signo igual con sus múltiples significados, se extiende más allá de ser visto como "la señal de hacer algo"; así también el uso de las letras que designan área (A), longitud (L), entre otras, que necesitan ser conceptualizadas y asimiladas por los estudiantes en álgebra para que puedan describir apropiadamente las diferencias entre las incógnitas, las variables y los parámetros.

Luego, a mediados de los años 1980, un segundo grupo de investigadores se interesó por el estudio de la generalización como rasgo fundamental del álgebra en las representaciones múltiples de las ecuaciones y funciones, valorando la utilización de nuevas herramientas de aprendizaje tecnológico para las representaciones gráficas. En particular, en el caso de las funciones, estas permitirían a los estudiantes conectar la gráfica de una función con su representación geométrica. Mientras que, a mediados de los años 90, posteriores investigaciones se centraron en el desarrollo del pensamiento algebraico con un enfoque en el profesor de álgebra y en su práctica (Kieran, 2006).

De otro lado, considerando que los docentes en ejercicio deben propiciar el razonamiento algebraico de sus estudiantes, se requiere que reconozcan rasgos del pensamiento en los aprendizajes presentes en la actividad matemática del álgebra escolar (Aké, 2013). En los trabajos realizados desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), diversas investigaciones (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) han caracterizado la naturaleza y el desarrollo del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles educativos hasta el inicio de la educación secundaria.

Para ello, se establecieron vínculos con determinados objetos y procesos que intervienen en las prácticas consideradas algebraicas, teniendo en cuenta que el razonamiento algebraico "debe contemplar no sólo *los contextos de uso* (aritmética, medida, geometría o análisis de datos) y la actividad matemática asociada, sino también el "grado" de algebrización" (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012, p. 286). Dichos grados de algebrización para jerarquizar los procesos que realizan los estudiantes en las soluciones de las tareas.

Así, la primera preocupación fue identificar cuáles eran las características del razonamiento algebraico, destacando la relación que existe entre este y el proceso de generalización. Para esto, se ha recurrido a la noción de configuración que brinda el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y se han propuesto algunos tipos de configuraciones asociadas a las prácticas algebraicas, como son la configuración intensional, configuración relacional, configuración operacional, configuración relacional-operacional, configuración funcional, configuración estructural.

A través de estas configuraciones, los autores mencionados se apoyan de la dualidad extensivo-intensivo para tratar de explicitar los rasgos característicos del álgebra en situaciones que exigen generalización (uso de variables, fórmulas, parámetros), indeterminación (uso de incógnitas, ecuaciones y nociones relacionadas) y relaciones (binarias o de otro tipo), en función del reconocimiento de objetos intensivos en estos tres tipos de situaciones por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma a dicho objeto intensivo (Godino et al, 2012).

Asimismo, los autores consideran necesario hacer la distinción entre las situaciones de generalización e indeterminación. En el caso de situaciones de generalización, se refiere a la generación de intensivos como un todo unitario (es decir, a generalizar a partir de casos particulares); mientras que en las situaciones de indeterminación a la tarea de encontrar un elemento en particular, a partir del objeto intensivo dado.

Debemos aclarar que en nuestro estudio no usaremos estas configuraciones, sino los resultados obtenidos por los autores que las desarrollaron en su investigación para identificar los rasgos algebraicos asociados a las situaciones problema de generalización e indeterminación. Estos rasgos son de particularización, generalización, unitarización y simbolización, los cuales servirán de base para nuestro trabajo.

De otro lado; en la investigación desarrollado por Castro (2011), se señala que los maestros en formación conciben al razonamiento algebraico como la actividad que consiste en "encontrar valores desconocidos cualitativos o cuantitativos; lo asocian también con el concepto de "incógnita", simbolizar relaciones numéricas y resolver problemas verbales", reemplazar letras por números y encontrar "valores faltantes". (p. 257). Según esto, se identifica que los docentes no reconocen los rasgos propios de la actividad algebraica en función al reconocimiento de los criterios básicos de generalización, unitarización, formalización y ostensión, transformación descritos en el trabajo de Godino et al (2014) para definir los niveles de algebrización; por lo que, podemos suponer que tampoco reconocen diferentes niveles del razonamiento algebraico elemental.

En el trabajo de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) se presentó ya un modelo comprensivo sobre el álgebra para la educación primaria, en el que se definen a estos niveles de algebrización (0, 1, 2 y 3) que tienen implicancia en la formación de profesores, con el objetivo de facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan la consolidación y el surgimiento del razonamiento algebraico. La identificación de dichos niveles le permitirá diseñar e implementar actividades, teniendo en cuenta que "el nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza" (Godino et al, 2014, p.206); por consiguiente, es conveniente que los docentes se familiaricen con estos niveles de algebrización presentes en la actividad matemática, para que amplíen su visión y reconozcan rasgos de las prácticas matemáticas de sus estudiantes y así puedan transformar las tareas matemáticas hacia el logro de niveles progresivos de algebrización (Godino et al, 2014).

Asimismo, los autores consideran como indispensable la capacitación de docentes para que puedan identificar niveles de algebrización de la actividad matemática, pues sólo así estos podrán promover el desarrollo del razonamiento algebraico a lo largo de los cuatro niveles que se definieron para la educación primaria. Para el caso del nivel educativo en el que se sitúa nuestro estudio los niveles 1, 2 y 3 continuarán manifestándose; en particular el desarrollo del nivel 3, será el objetivo central para los primeros años de educación secundaria (Godino et al, 2015).

En ese sentido, para establecer una conexión entre el álgebra en primaria y secundaria y avanzar en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, es necesario definir niveles más avanzados que permitan analizar la actividad matemática de educación secundaria, pues la caracterización del álgebra es un problema que no está completamente resuelto. Por ello, Godino et al (2015) articulan y extienden los niveles de algebrización utilizados en la educación primaria, definiendo tres niveles de mayor jerarquía, que permitirán describir paulatinamente herramientas para resolver problemas con un mayor grado de generalización y simbolización.

Según explica Godino et al (2015) el cuarto nivel de algebrización corresponde al uso de parámetros y coeficientes variables para expresar familias de ecuaciones y funciones. El quinto nivel de algebrización corresponde al tratamiento de parámetros conjuntamente con otras variables y que ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones y funciones). Y el sexto nivel de algebrización hace referencia a objetos y procesos de mayor generalidad que los que se trabajan en el quinto nivel con temas que se inician en bachillerato como la introducción de algunas estructuras algebraicas (como de espacio vectorial, o la del grupo) y el estudio del álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación y composición).

Sin embargo, pese a que se han propuesto tres niveles adicionales (4, 5 y 6) para la evolución del álgebra escolar en la escuela secundaria y el bachillerato, estos aun necesitan ser validados, ya que en estos últimos niveles ya no se hace referencia a los procesos de generalización, unitarización, simbolización y materialización como sí se hizo en los niveles anteriores. Más bien, se describen en términos del uso de parámetros y su tratamiento para delimitar a estos niveles de mayor algebrización, los cuales están vinculados a la presencia de familias de ecuaciones y funciones, definiendo al nivel 4 como el primer encuentro con el parámetro, al nivel 5 con la realización de tratamientos conjuntos con el parámetro y al nivel 6 con el estudio de estructuras algebraicas como la de grupos o espacio vectorial.

En consecuencia, no emplearemos estos tres niveles adicionales sino los cuatros primeros niveles que presentó Godino et al (2012) en nuestra investigación. Debido a que los estudiantes siguen desarrollando en la educación secundaria los niveles 0,1,2 y 3 sobre todo en los primeros años y estos siguen manifestándose en las tareas que involucran ecuaciones de primer y segundo grado, por lo que es conveniente los profesores vinculen los conocimientos de la educación primaria con los nuevos conocimientos de álgebra que se introducen en la educación secundaria, preparando actividades que les permita paulatinamente a sus estudiantes avanzar en el aprendizaje del nuevo conocimiento.

Desde otro punto de vista, el de la Teoría Antropológica de la Didáctica de la Matemática, el problema del álgebra escolar, no se centra en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental; se centra en la actividad matemática que se hace en una institución, teniendo en consideración los fenómenos de la "trasposición didáctica" para convertir el saber matemático en un saber matemático para ser enseñado (Bolea, 2002).

Así, la autora manifiesta en su trabajo de investigación la necesidad de un modelo del álgebra escolar, que se centra en los procesos de algebrización de organizaciones matemáticas escolares, con el propósito de describir el "problema del álgebra escolar" en términos de organizaciones matemáticas y didácticas. En un primer modelo para el álgebra escolar se asocia al de una aritmética generalizada, la cual, según la interpretación de García (2007), radica en el origen de "los fenómenos identificados en las instituciones escolares en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra (…) Puesto que toda actividad matemática, a partir de cierto nivel, no puede ser concebida sin la plena operatividad del instrumento algebraico" (p.47). Así, según dicho investigador, el instrumento algebraico originará la transformación de las diversas organizaciones matemáticas que se aprenden en la Educación Secundaria.

El trabajo anterior toma en cuenta la investigación de Bolea (2002) en donde se proponen cuatro indicadores que permitirán analizar el grado de algebrización de una organización matemática, estos son:

- Manipulación de la estructura global de los problemas.
- Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico.
- Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos.
- Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.

A partir de ello, se definen grados o (niveles de algebrización) de la siguiente manera:

- Primer nivel de algebrización. La modelización del lenguaje técnico
- Segundo nivel de algebrización: La reducción a la función lineal
- Tercer nivel de algebrización: La modelización funcional general.(Bolea, 2002)

Es necesario aclarar que estos niveles de algebrización otorgan mayor o menor grado de algebrización a las organizaciones matemáticas, mientras que los niveles del razonamiento algebraico elemental propuestos por el enfoque ontosemiótico, se asignan a la actividad matemática desarrollada por un estudiante entorno a los objetos y procesos propios de este campo. Por lo que, el término "nivel" que adoptaremos en nuestro trabajo será empleado en el sentido que se ha descrito desde el EOS, para la identificación de los rasgos algebraicos en las soluciones de las tareas que se presentan en los textos escolares, en el caso de tareas sobre ecuaciones. Pues nos enfocaremos en la caracterización de los objetos algebraicos abordados en la secundaria (primero, segundo y tercer año) en relación a las ecuaciones lineales y cuadráticas.

Para finalizar, desde el EOS, en el Modelo del Conocimiento Matemático de Godino (2009), se pone de manifiesto la importancia de identificar a los conocimientos didácticos matemáticos que debe poseer un profesor para la enseñanza del álgebra escolar respecto a un determinado contenido. Así, en la investigación de Sosa, Flores-Medrano, Carrillo (2015) se identificaron algunos de estos conocimientos didácticos del profesor en relación al álgebra lineal para la faceta cognitiva que le permita avanzar en el aprendizaje del álgebra, considerando que esta forma parte del conocimiento especializado del profesor.

En dicho trabajo se presentan indicadores de conocimiento didáctico considerados como parte del conocimiento necesario que debe tener el profesor, los cuales se basan en las categorías que se presentan en la figura 1. Estos son: lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido, errores y dificultades asociadas al aprendizaje y teorías personales sobre formas de aprendizaje. Dichos indicadores corresponden a la faceta cognitiva.

Debemos señalar que las siglas KFLM que aparecen en la descripción de los indicadores se refieren al "Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas" que es parte del Conocimiento Didáctico del Contenido y que la investigación se hizo a partir del desarrollo del estudio de un caso con dos profesoras de bachillerato en un contexto matemático centrado en el álgebra lineal como contenido matemático.

Categoría	Indicador
a) Lenguaje y procesos con los que los estudiantes interactúan con el contenido	*KFLM1.* Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático –mezcla del lenguaje común con el matemático–).
	KFLM2. Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución.
	KFLM3. Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente.
b) Errores y dificultades asociadas al aprendizaje	*KFLM4.* Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
	KFLM5. Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior (por ejemplo con un tema pasado de la misma unidad o bloque temático).
	KFLM6. Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas.
	KFLM7. Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido.
	KFLM8. Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando.
	KFLM9. Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas.
c) Teorías personales sobre formas de aprendizaje	*KFLM10.* Conocer los contenidos matemáticos previos de los que se puede valer para fomentar el aprendizaje de un tema nuevo entre sus estudiantes.

Figura 1: Categorías e indicadores obtenidos para el KFLM
Fuente: Sosa, Flores-Medrano, Carrillo (2015, p.185)

Esta investigación que se desarrolló con estudiantes de bachillerato de Ciencias Sociales es importante para nuestro estudio porque nos dará pautas para reconocer cual es el conocimiento didáctico matemático que debe tener un profesor en el contenido de las ecuaciones de primer y segundo grado en la institución de la secundaria, tomando como ejemplo a las categorías e indicadores que describieron los autores para la faceta cognitiva. Puesto que, nos interesa realizar la identificación de los conocimientos didácticos matemáticos que corresponderán a la faceta epistémica y a la faceta ecológica en relación a las ecuaciones.

Por lo que, en este estudio nos proponemos elaborar una lista de conocimientos didácticos matemáticos para las ecuaciones de primer y segundo grado, a partir de la revisión de textos escolares e investigaciones pertinentes. Con ello se pretende contribuir con la comunidad matemática de investigadores que en estudios posteriores desarrollen investigaciones para profesores en formación, brindándoles herramientas que permita a sus estudiantes avanzar paulatinamente en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

1.2 Justificación del estudio

Investigaciones previas (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi ,2012; Godino et al, 2014; Godino et al, 2015) muestran que la identificación de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar debe ser parte de la formación de docentes, pues les permite desarrollar el sentido algebraico y clarificar las dificultades de algunos conflictos en el aprendizaje del álgebra escolar. En ese sentido, en este trabajo nos preocuparemos por identificar de manera explícita los conocimientos didácticos matemáticos necesarios en tareas estructurales sobre ecuaciones, para la formación de docentes de educación secundaria. Para ello se considerarán los niveles 0, 1, 2, 3 de algebrización para describir el razonamiento algebraico elemental que se espera desarrollen los estudiantes de secundaria. Eso implica adaptar dichos niveles a las exigencias que se propongan en el Currículo Nacional.

La incorporación en la formación docente del reconocimiento de estos niveles de algebrización a la actividad matemática que realizan los estudiantes al resolver los problemas contribuirá al desarrollo de competencias didáctico matemáticas; en particular, permitirá promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes. Esto se corresponde con lo señalado en Aké (2013) en donde declara que "el desarrollo del razonamiento algebraico y de las competencias matemáticas de los alumnos dependerá de manera esencial de la formación de sus respectivos maestros" (p.71). Teniendo en cuenta que, para el desarrollo de las competencias matemáticas del estudiante en secundaria se requiere "construir progresivamente el pensamiento abstracto (…). Producto de este tipo de pensamiento, es capaz de intuir, elaborar hipótesis, (…); así también desarrollar su capacidad de reconocer y establecer reglas generales y sus restricciones a partir de razonamientos lógicos" (Perú, 2016, p.139).

En relación a las competencias didáctico matemáticas que debe adquirir el docente, estas se asocian al diseño de procesos de estudio matemático en contextos de enseñanza, así como a los conocimientos didácticos que son necesarios de identificar para la enseñanza y aprendizaje de contenidos. Tales como la implementación de configuraciones de objetos primarios usando recursos lingüísticos y medios apropiados, valoración de la idoneidad didáctica en sus distintas dimensiones(epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica), y trayectorias didácticas que contemplen la presentación de consignas, exploración personal, trabajo cooperativo, entre otros, para que el profesor desarrolle una conducta positiva hacia la enseñanza de las matemáticas y valore su papel formativo en la educación como utilitario (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Al respecto, debemos destacar que los docentes son los principales protagonistas y que desde una buena práctica pueden transformar la educación contribuyendo a una educación de calidad, pues son los encargados de elaborar materiales pertinentes que al implementarlos en una sesión de clases pueden favorecer paulatinamente el aprendizaje de los estudiantes. Con esa finalidad, se requiere que los maestros identifiquen rasgos algebraicos en las soluciones de sus estudiantes para que, en base a ello, tomen decisiones sobre las próximas acciones que deben realizar para la enseñanza del álgebra escolar.

Esto implica que los profesores deben ser competentes en la elaboración o modificación de tareas, en particular tareas sobre ecuaciones; reconociendo de qué manera se puede incrementar su complejidad para que dichas tareas demanden un mayor nivel del razonamiento algebraico elemental, pues "la selección y adaptación de tareas es un proceso clave de los procesos de estudio matemático". (Godino, 2013, p. 12). Sin embargo, lo mencionado anteriormente no requiere que los docentes posean conocimientos sobre el marco teórico del EOS, ya que su actividad es profesional y no de investigación.

En el contexto educativo peruano se considera, como parte de las competencias matemáticas que involucran el desarrollo del razonamiento algebraico las competencias asociadas a la resolución de problemas de cantidad y de cambio.

La descripción de cada una de estas competencias se presenta a continuación:

- En la COMPETENCIA RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD: se espera que el estudiante logre inducir propiedades a partir de casos particulares, resuelva problemas que demanden comprender y construir los conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades (Perú, 2016).
  En dicha competencia podemos notar uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental cuando se realiza casos particulares de una situación, que permita inducir propiedades de los conjuntos numéricos. Este rasgo consiste en "su manera de abordar los procesos de generalización matemática" (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012, p. 489) al pasar de determinados objetos a tipos de tales objetos que representan de manera general la estructura de una expresión matemática, como por ejemplo el de una propiedad de los números reales.
- En la COMPETENCIA RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO: se espera que el estudiante logre plantear ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas, caracterizando equivalencias y comprobando propiedades y nuevas relaciones. (Perú, 2016).
  En dicha competencia podemos notar la presencia de otro de los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental en los cuales fueron definidos los tres primeros niveles de algebrización, el cual se refiere al proceso de simbolización.

Para poder propiciar el desarrollo de las competencias señaladas en los párrafos anteriores, el profesor de matemática de educación primaria y secundaria debe tener conocimiento especializado, en particular a lo que se refiere al razonamiento algebraico elemental, de modo que pueda reconocer los objetos y significados que intervienen en la actividad matemática, en particular la algebraica, que se manifiestan al resolver problemas (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

De otro lado, debido a que en “algunos casos, se ha identificado la presencia de docentes formadores con poca preparación pedagógica y deficiencias en el manejo del sustento teórico, lo que debilita la orientación y acompañamiento en las áreas a su cargo” (Perú; 2010; p. 13), el Diseño Curricular Básico Nacional para la carrera de Educación Secundaria Matemática considera para los contenidos asociados a la etapa de la formación especializada que se contemplan en la sumilla de los cursos de la figura 2, se desarrollen en tres de los seis semestres académicos que corresponden a dicha etapa los cursos de álgebra I, II y III para que los estudiantes adquieran competencias necesarias en el dominio de dichos contenidos que deberán presentar a lo largo de su práctica profesional.

ÁLGEBRA I - SEMESTRE V	ÁLGEBRA II - SEMESTRE VI	ÁLGEBRA III - SEMESTRE VII
Permite el desarrollo del pensamiento lógico matemático mediante las capacidades de razonamiento intuitivo y deductivo, destrezas de investigación y el uso del lenguaje simbólico aplicadas a la comprensión de relaciones matemáticas, al empleo del método de razonamiento y sus aplicaciones a la matematización de situaciones diversas.	Permite el desarrollo del pensamiento lógico matemático mediante las capacidades de razonamiento intuitivo y deductivo, análisis, profundización y .axiomatización de las estructuras algebraicas fundamentales posibilitando la transferencia a la resolución de nuevas situaciones problemáticas del entorno haciendo uso de estrategias y procedimientos pertinentes.	Permite el desarrollo del pensamiento lógico matemático mediante las capacidades de razonamiento intuitivo y deductivo, abstracción, axiomatización y utilización de nociones matemáticas para facilitar la comprensión de la estructura del contenido, el ejercicio y aprehensión de estrategias y procedimientos posibilitando la transferencia a la resolución de nuevas situaciones problemáticas del entorno de manera reflexiva, crítica y creativa.
• Ecuaciones de 1er grado. • Ecuaciones cuadráticas. Gráfica y solución. • Ecuaciones con valor absoluto- • Ecuaciones irracionales. • Ecuaciones de orden superior- • Sistema de ecuaciones lineales. Resolución y aplicaciones. • Inecuaciones de 1er. y 2do. Grado. • Inecuaciones con valor absoluto. • Inecuaciones irracionales. • Inecuaciones de orden superior. • Sistema de inecuaciones. Resolución y aplicaciones. • Número complejos. • Operaciones con números complejos.	• Estructuras algebraicas. • Definición de operación binaria. Grupo. Anillo. Cuerpo. • Construcción y estructura de los números reales. • Números naturales. Propiedades. • Construcción de los números enteros. • Construcción de los números racionales. • Leyes de composición Interna . • Leyes de composición externa. • Isomorfismos y Homomorfismos.	• Álgebra de matrices Matrices especiales y particionales. Operaciones con matrices. Determinantes. Propiedades. Solución matricial de sistemas lineales. Inversas de matrices no cuadradas. • Álgebra Vectorial Estructura de Espacio Vectorial sobre R. Dimensión de un cuerpo vectorial. Sub espacio vectorial. Propiedades. Dependencia e independencia lineal. Base de un espacio vectorial. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ortogonalidad.

Figura 2: Diseño Curricular Básico Nacional de Matemática - Formación Especializada.
Fuente: Perú (2010, p.57)

En esta etapa de la formación especializada se enfatizan los procesos de abstracción y generalización, a través del pensamiento creativo, crítico y complejo que favorece la profundización del conocimiento de las áreas propias de la especialidad de Matemática. También debemos mencionar que los docentes en formación inicial desarrollan en cuatro semestres académicos contenidos asociados a la etapa de la formación general, con la finalidad de que fomenten estrategias para el aprendizaje y enseñanza de los contenidos matemáticos, abordando los conocimientos con diversas actividades.

Sin embargo, luego de la revisión del plan de la Carrera de Educación Secundaria especialidad Matemática, se puede concluir que el conocimiento especializado que hemos venido describiendo desde el EOS no se contempla en ninguna de las etapas, ni en la formación general ni en la especializada. Pues no se han encontrado espacios para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático del profesor que permita la evolución del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones.

Debemos aclarar que en el caso particular, del álgebra, entendemos que el conocimiento especializado se refiere a la identificación de la tipología de los seis objetos primarios en relación a un contenido matemático. Mientras que la formación especializada al dominio de los conocimientos matemáticos, para que los docentes tengan un conocimiento más avanzado de los contenidos de matemática que va más allá de lo que enseñará en un salón de clases.

Por lo anterior, se hace necesario que la formación inicial de los docentes contemple el conocimiento didáctico matemático que debe poseer un profesor para propiciar el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de los estudiantes, en relación a tareas sobre ecuaciones. Pues, investigaciones como la de Solera (2015) señalan que disponer de un conocimiento didáctico matemático adecuado le permitiría a los docentes tomar acciones para enriquecer y hacer adaptaciones al diseño curricular, con el único fin de aumentar la idoneidad del diseño en cuestión.

En esa línea, es fundamental explicitar cuáles deben ser el conocimiento didáctico matemático que debe poseer el profesor en relación a diversos temas. En particular, dado que no hemos identificado investigaciones para la faceta epistémica que describan el conocimiento didáctico matemático que debe tener un profesor para realizar la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer y segundo grado en secundaria, sería relevante elaborar una lista del conocimiento didáctico matemático que deben ser parte de la formación inicial de docentes de secundaria.

Es así que nuestro trabajo pretender ser soporte de futuras investigaciones de la comunidad matemática en una propuesta de formación de profesores, ya que la identificación de estos conocimientos le podría servir de guía para la formulación de actividades en relación a las ecuaciones.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

De lo anterior, se hace evidente la necesidad de brindar herramientas que sean útiles para los formadores de profesores o para quienes ofrezcan cursos de desarrollo profesional para profesores activos los cuales deben promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental a lo largo de la escuela secundaria, en particular de tareas sobre ecuaciones, siguiendo los principios del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático.

Atendiendo esa necesidad, nos formulamos la siguiente pregunta:

- ¿Qué conocimiento didáctico-matemático debe manifestar un profesor en la secundaria para promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en relación a tareas sobre ecuaciones?

En ese sentido, el objetivo general de nuestra investigación es:

- Identificar el conocimiento didáctico matemático que debe manifestar un profesor en la secundaria para reconocer la complejidad o la progresión de características algebraicas en tareas sobre ecuaciones de textos escolares.

Y los objetivos específicos que se desprenden son los siguientes:

- Construir el significado de referencia de las ecuaciones en base a las investigaciones en didáctica de las matemáticas así como de los libros escolares, para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer y segundo grado en los tres primeros años de secundaria.
- Identificar el conocimiento didáctico matemático que deben manifestar los profesores en relación a las ecuaciones, a partir del significado de referencia construido.
- Identificar el conocimiento didáctico que deben manifestar los profesores en relación a las ecuaciones para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, por medio del reconocimiento de los niveles de algebrización.

Para cumplir con los objetivos propuestos nos apoyaremos de un método y procedimientos metodológicos que emplearemos en el desarrollo de la investigación.

1.4 Método de Investigación

1.4.1 Paradigma Cualitativo

Nuestro trabajo está referido al estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, analizando en qué medida las tareas sobre ecuaciones propuestas en los tres primeros textos escolares de la secundaria permiten el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Teniendo en cuenta que, los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza dependen de "la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psicopedagógicos, sociales y culturales" (Godino, 2010, p.5), tales como "saber a aprender" y "saber a enseñar", y que la investigación cualitativa se caracteriza por realizar la descripción de un fenómeno estudiado (Taylor y Bodgan, 1987) nuestro trabajo se enmarcará en dicho paradigma.

Por otro lado, Garnica (2011) señala que el adjetivo "cualitativo" sería apropiado para estudios que reconozcan las siguientes concepciones:

> 1) la naturaleza transitoria de los resultados; 2) la imposibilidad de una hipótesis a priori que postule que el estudio está diseñado para aceptar o rechazar; 3) la no neutralidad del investigador, quien, en el proceso interpretativo, hace uso de las perspectivas y de los filtros que son resultado de sus propias experiencias, y de las cuales no se puede desprender; 4) que la comprensión del asunto se construye no como resultado del estudio, sino en el transcurso del mismo, durante el cual esta misma comprensión, así como los medios para llegar a ella, se puede re-configurar, y 5) la imposibilidad de establecer reglas, a modo de procedimientos sistemáticos, previos, estáticos y generales (p. 73)

Respecto a lo que señala el investigador, debemos mencionar que dichas concepciones en nuestro estudio no son vistas como reglas ni procedimientos, sino como características que están presentes en los trabajos cualitativos como el que presentamos al abordar una problemática enfocada en identificar "los conocimientos didácticos matemáticos" que propicien el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, contemplando a los contenidos algebraicos que demanda el Currículo Nacional para el primer, segundo y tercer año de educación secundaria y el escenario en el que se desarrolla las prácticas matemáticas, que incluye a estudiantes y profesores. Del mismo modo, debemos indicar que no pretendemos buscar evidencias que prueben hipótesis, pues hemos partido de la formulación de una cuestión que nos preocupa como investigadores en el contexto de la educación matemática y de ser necesario en el proceso de elaboración se irá reestructurando el trabajo con el fin de cumplir con los objetivos de nuestro estudio.

En relación a lo mencionado, enunciaremos a continuación al método de investigación que se empleará en este trabajo; pues la búsqueda de un método que sea consistente con las propuestas investigativas del estudio, permitirán evaluar los resultados y publicar los hallazgos así como los obstáculos que resultan de la investigación, con el propósito de evidenciarlos y superarlos (Garnica, 2011).

1.4.2 Análisis de Contenido

Considerando que en un trabajo de investigación es necesario desarrollar un método que permita alcanzar los objetivos propuestos del estudio, en nuestro trabajo, adoptaremos el método del "análisis de contenido", dado que pretendemos construir el significado de referencia de las ecuaciones para la identificación del conocimiento didáctico matemático que debe poseer el profesor en cuanto al análisis de las tareas que están presentes en los textos escolares, correspondientes a los tres primeros años de secundaria; discerniendo entre aquellas tareas de dichos textos que son apropiadas o que se pueden modificar para el desarrollo del razonamiento algebraico de sus estudiantes.

Según López (2002), el análisis de contenido "no reside solo en la descripción de los contenidos, sino en los que estos, una vez tratados, podrían enseñarnos relativos a "otras cosas" (p.175). Este mismo autor, manifiesta que este método es muy empírico, dependiente del tipo de interpretación que se persiga y del tipo del discurso en el que se centre. Asimismo, señala que para este método no hay plantillas que ya estén listas y confeccionadas para ser usadas, pues dependerá del tema y de los objetivos que se persigan en el estudio.

Por ello, el autor manifiesta que la primera tarea de toda investigación que utiliza al análisis de contenido como método, será decidir que se ha de observar y registrar; esto es la identificación de la unidad de análisis y las categorías de análisis para delimitar su definición y su identificación para el análisis. Para ello, nos ayudaremos de la "tipología de los objetos primarios" que se emplean desde el EOS para realizar el análisis de los objetos primarios que surgen e intervienen en la resolución de una tarea; en particular, para el análisis de las tareas sobre ecuaciones que revisaremos de los textos escolares, con el fin de movilizar dichos objetos y significados.

Esto es, para la identificación del conocimiento especializado que debe poseer un docente para la enseñanza del álgebra escolar, teniendo en cuenta el conocimiento común que debe ser enseñado en dichos textos escolares para los tres primeros años de educación secundaria, en relación a la forma en que se introducen las ecuaciones.

A partir de lo expuesto, los procedimientos que seguiremos en el desarrollo de nuestra investigación que relacionen a los elementos del método con el problema y los objetivos que nos hemos planteado son:

1. Realizar la selección de los textos didácticos y de investigaciones en didáctica de la matemática que abordan al contenido de las ecuaciones de primer y segundo grado.
2. Realizar la revisión en los textos didácticos y en las investigaciones seleccionadas, las unidades o capítulos en donde se definen y emplean las ecuaciones de primer y segundo grado para resolver una tarea.

3. Realizar la identificación de los tipos de objetos que intervienen en la enseñanza del contenido de las ecuaciones de primer y segundo grado. Ello implicar reconocer a los elementos lingüísticos, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos para la construcción del significado institucional de referencia de las ecuaciones en educación secundaria.
4. Elaborar el significado de referencia de las ecuaciones, teniendo en cuenta la naturaleza de los objetos matemáticos según el EOS.
5. Presentar tareas sobre ecuaciones que estudian un mismo fenómeno y que requieran un mayor nivel de razonamiento algebraico elemental, en términos de las entidades primarias y los procesos que se definen desde el EOS.
6. Presentar una lista del conocimiento didáctico matemático que deben manifestar los profesores para la enseñanza de las ecuaciones en la secundaria. Así como una lista del conocimiento didáctico matemático para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, ejemplificando la potencialidad de tareas sobre ecuaciones que aparecen en los textos escolares de educación secundaria. (Debemos mencionar, que el término de "potencialidad" lo entendemos como el reconocimiento de las características algebraicas: generalización, unitarización, simbolización y materialización que se presentan en la solución de dichas tareas).

CAPITULO II: ASPECTOS TEORICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACION

En función a lo que hemos mencionado en el capítulo anterior, así como en los antecedentes y justificación de nuestro trabajo, para cumplir con los objetivos propuestos se hace necesario apoyarnos en algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Dicho enfoque permitirá afrontar la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar en la secundaria, así como discriminar los rasgos del razonamiento algebraico elemental en las soluciones de las tareas respecto de un determinado contenido.

2.1 ELEMENTOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIOTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCION MATEMATICA CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACION

En nuestro estudio, pretendemos identificar el conocimiento didáctico matemático que deben manifestar los docentes para la enseñanza del álgebra escolar, que les permita propiciar el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de sus estudiantes en relación a las tareas sobre ecuaciones que se presentan en los libros que distribuye el Estado Peruano. Para ello se tendrá en cuenta que "la organización y gestión de las trayectorias didácticas por parte del profesor le demanda el desarrollo de competencias de análisis de los objetos matemáticos y procesos que se ponen en juego en la solución de los problemas matemáticos". (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012, p. 4).

Usaremos algunas componentes del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática EOS, el cual es un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que se enfoca en la actividad matemática de una situación-problema y que concede un papel fundamental al lenguaje y da significado a los objetos matemáticos intervinientes en los procesos de comunicación e interpretación, con el propósito de analizar en conjunto al pensamiento matemático, así como los ostensivos que lo acompañan, factores y situaciones que condicionan su desempeño. (Godino, Batanero y Font, 2009).

Según el EOS, es el investigador quién reconocerá en el desarrollo de las prácticas matemáticas, los objetos y procesos que emergen de las soluciones de los problemas. En consecuencia, empezaremos por definir algunos términos que serán utilizados en nuestro estudio y que desde este enfoque tienen una determinada interpretación.

Práctica Matemática: "Es toda situación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla, o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, citado en Aké, 2013, p. 85)

Tarea Matemática: De forma general, es la actividad que compromete al profesor y al estudiante, incluyendo cómo modificar la tarea, para dar sentido a las formas en la que el profesor guía y orienta la atención del estudiante para que aprenda o reflexione de la experiencia en la que se inicia al realizar la actividad. (Watson y Mason, 2007, citado en Godino, 2013).

Cabe señalar que en los textos escolares que serán considerados para construir el significado de referencia y los documentos curriculares peruanos, lo que se identificará como "tarea" coincidirá con la descripción previa ya que las tareas que se presentan en los libros están orientados a fomentar la relación activa entre profesor y alumno en el desarrollo de las actividades que se proponen respecto de un tema en particular, con la finalidad de alcanzar los aprendizajes esperados en cada ciclo, formulando preguntas en el diseño de sus sesiones sobre las situaciones matemáticas que trabajan en el curso como parte de su proceso formativo.

Objeto Matemático: "Es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas" (Godino, Batanero, Font, 2007, citado en Aké, 2013, p. 85).

Configuraciones: Se describen como las redes de objetos emergentes e intervinientes de los sistemas de las prácticas (operativas, discursivas y normativas) y las relaciones que se forman entre las mismas. (Aké, 2013).

Significado pretendido: en un proceso de estudio es el sistema de prácticas incluidas en la planificación de dicho proceso (Godino, Batanero y Font, 2009).

Significado Referencial: "sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.5).

En relación al significado pretendido y referencial que hemos mencionado, son parte de las relaciones dialécticas que se dan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde "la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje,…, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.6). Tal como se muestra en la figura 3.

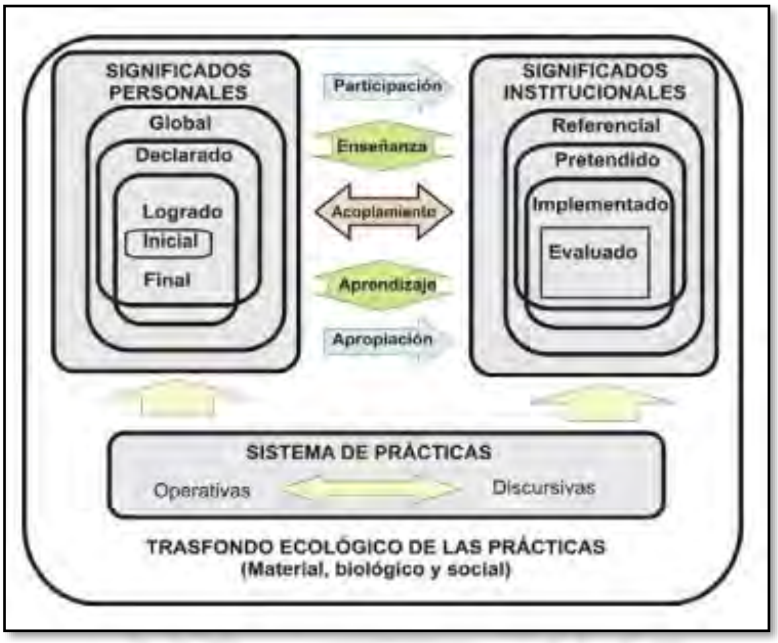


Figura 3: Tipos de significados institucionales y personales
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 6)

En la figura 3, se presenta un esquema en el que se muestran los distintos significados personales e institucionales. En particular el significado referencial es el ideal de la institución en la que se desarrolla un determinado proceso de instrucción y a partir del cual se deriva el significado pretendido que puede reconocerse parcialmente al analizar los documentos y textos oficiales.

Luego, está el significado implementado que corresponde al que se lleva a la práctica en la enseñanza de un contenido matemático y finalmente el significado evaluado que se describe en las sesiones y unidades de aprendizaje para recoger los aprendizajes logrados por los estudiantes. En consideración a lo que hemos señalado, en nuestro estudio nos preocuparemos por elaborar la construcción del significado de referencia de las ecuaciones por medio del análisis de los textos didácticos e investigaciones que evaluaremos para cumplir con dicho fin.

La identificación del significado de referencia permitirá también identificar al conocimiento didáctico matemático que deberían manifestar los docentes para promover la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en particular, en tareas sobre ecuaciones. Para ello, desde el marco teórico del EOS nos apoyaremos en la descripción de los procesos matemáticos que intervienen en la solución de una tarea o ejercicio que se dan en las prácticas matemáticas, con el objetivo de realizar la configuración de los objetos primarios.

Así; según Godino, Batanero y Font (2009) en el EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que se relacionan entre sí, formando configuraciones, estos son:

- Elementos Lingüísticos: términos , expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual)
- Situaciones – problemas: aplicaciones extra matemáticas e intramatemáticas, tareas, ejercicios.
- Conceptos – definiciones: introducido mediante descripciones.
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para justificar las proposiciones y procedimientos (razonamiento inductivo, razonamiento deductivo, ensayo y error)

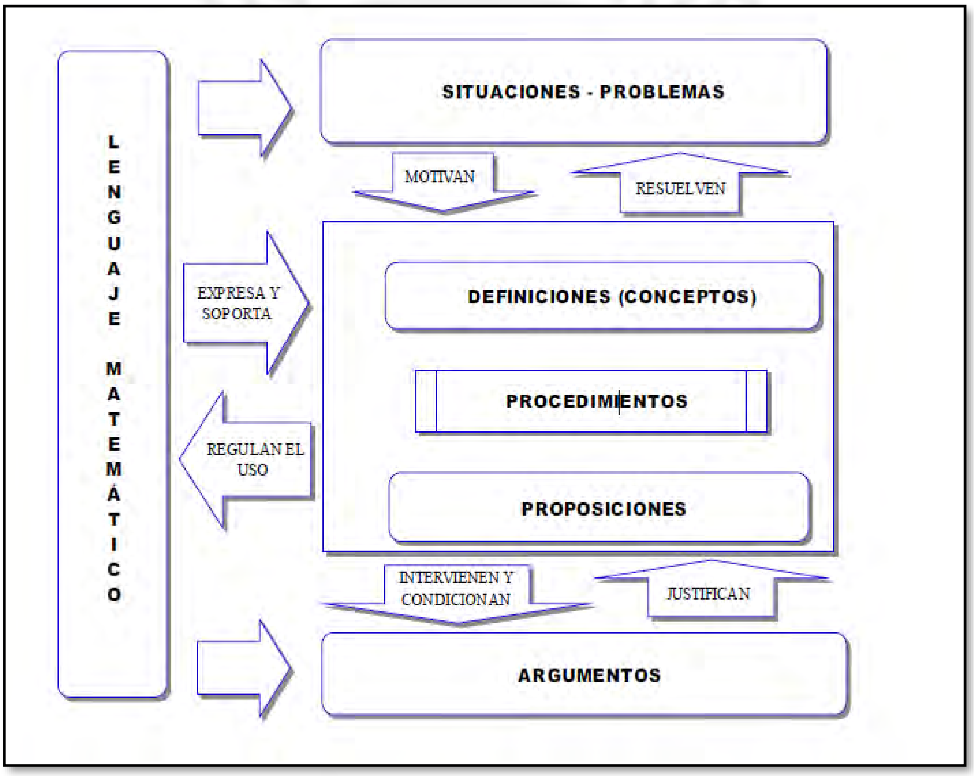


Figura 4: Configuración de objetos primarios
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 7)

Dichas configuraciones serán de utilidad para la construcción del significado institucional de referencia de las ecuaciones y para realizar el análisis de las tareas que se seleccionarán de los libros que distribuye el Estado Peruano con la finalidad de promover el razonamiento algebraico elemental, conforme a los niveles esperados que se deben alcanzar al final del primer, segundo y tercer año de secundaria.

Asimismo, además de la identificación de los objetos primarios, se deben reconocer los procesos que forman parte de la práctica matemática asociada a tareas sobre ecuaciones. Es en el desarrollo de dichas prácticas matemáticas en donde se definen las principales dualidades: personal-institucional, ostensiva-no ostensiva, unitario-sistemático, extensivo-intensivo, expresión-contenido.

Y es en dichas dualidades en donde surgen los procesos cognitivos (epistémicos) de: institucionalización – personalización; materialización /concreción – idealización/ abstracción; análisis/descomposición – síntesis/reificación; generalización – particularización; expresión/representación – significación.

En particular en nuestro trabajo, contemplaremos la dualidad extensivo - intensivo ya que diversas investigaciones señalan que está asociada a los procesos de generalización y particularización procesos fundamentales para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Así como también lo son los procesos de materialización y simbolización (representación).

A continuación realizaremos una descripción para los procesos de generalización, particularización, materialización y simbolización que son los que ayudan al desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Generalización; generaliza tipo de objetos que involucra casos particulares en un concepto global como el de la distancia en R^n.

Particularización; ejemplifica casos particulares de un resultado general como el de una propiedad o fórmula, así tenemos el concepto de distancia en los números reales.

Materialización; a partir de la descripción verbal realiza la representación geométrica.

Simbolización; a partir de la representación verbal realiza la representación simbólica usando variables.

2.2 MODELO DEL CONOCIMIENTO DIDACTICO-MATEMATICO (MCDM)

En Godino (2009) se presenta un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas basado en el EOS, que considera las diferentes facetas o dimensiones implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, como los que se abordarán en este estudio, para tareas sobre estructuras(ecuaciones, equivalencias y propiedades). El autor manifiesta que el objetivo central del estudio de la didáctica son los procesos de enseñanza y aprendizaje realizados en un contexto institucional y social, que involucran a un "contenido", estudiantes, docente, y medios tecnológicos. Las facetas consideradas en el MCDM son las siguientes:

- Epistémica; se refiere a los conocimientos matemáticos que serán parte del proceso de estudio.
- Cognitiva; se refiere a los conocimientos personales de los estudiantes.
- Afectiva; se refiere a los estados emotivos, como las actitudes, creencias, valores y emociones.
- Mediacional; se refiere a los recursos tecnológicos y el tiempo que se asigna a los distintos momentos del proceso de estudio.
- Interaccional; se refiere a la interacción que se da en los procesos de estudio entre el docente y los estudiantes.
- Ecológica; se refiere a las relaciones con el entorno social, político, económico que condiciona al proceso de estudio.

Dicho autor declara que para su modelo considera como claves las facetas epistémica y cognitiva, porque la actividad humana adquiere significado por medio de la acción de los individuos frente a situaciones-problemas. También, señala que concede importancia a las demás facetas (afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) ya que estas condicionan a la enseñanza y los aprendizajes.

Así, en la figura 5 se presenta dicho modelo, el cual tuvo en cuenta para su construcción las categorías del conocimiento común y del conocimiento avanzado del modelo de Ball (2000), pero en el EOS ya no se habla de ellos por separado, todos forman parte del CDM.

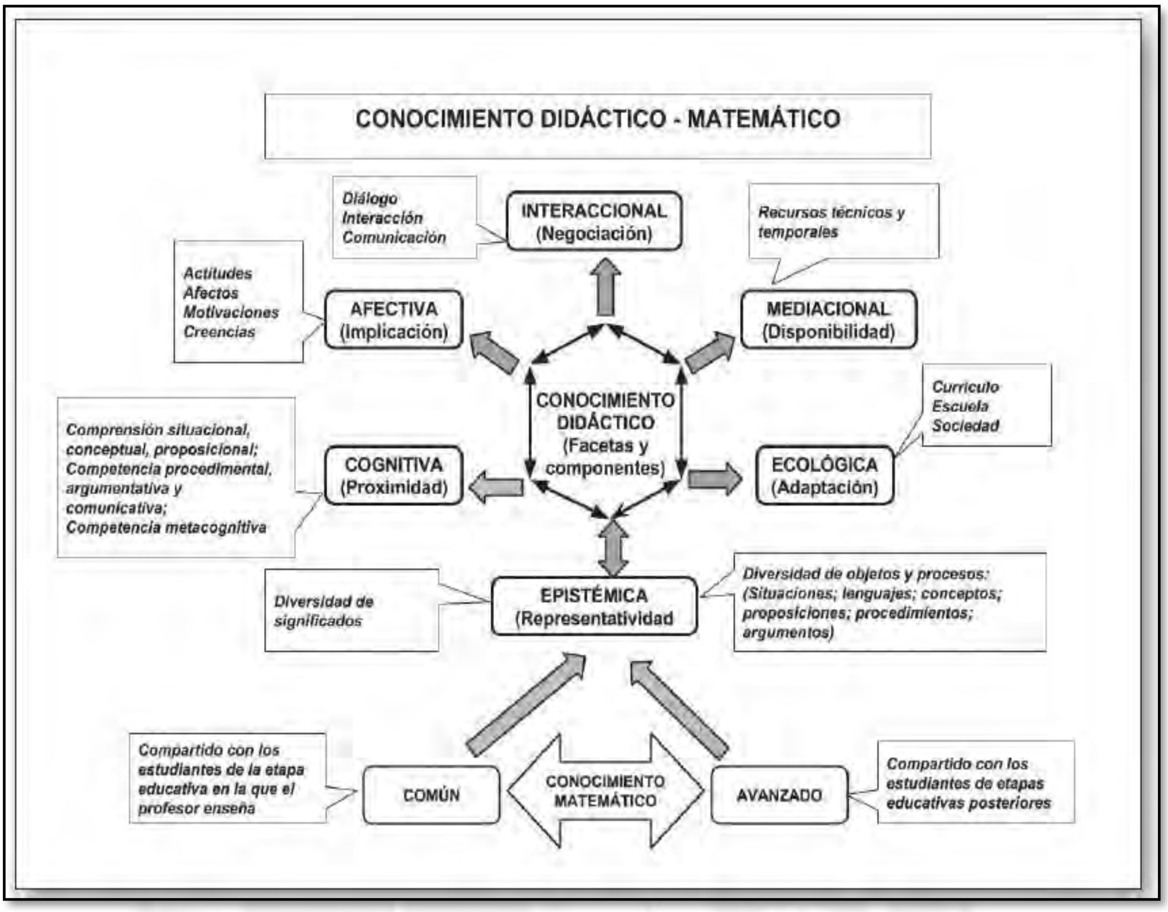


Figura 5: Facetas y componentes del conocimiento didáctico-matemático (CDM)
Fuente: Godino et al (2015, p. 131)

Dicho modelo integra el análisis de la actividad docente en el análisis didáctico, desde las diferentes dimensiones cognitivo-afectiva, epistémico-ecológica e interaccional-medacional. Teniendo en cuenta a los estudiantes y su implicación en el aprendizaje, así como a las estrategias que emplea el docente en la negociación de los significados y a los contenidos pretendidos para construir el significado referencial, establecido por el currículo (Godino et al, 2015).

Luego, con el fin de cumplir con la identificación de los conocimientos didácticos matemáticos de los profesores en relación a las tareas sobre ecuaciones para el desarrollo del razonamiento algebraico, nos apoyaremos del trabajo de Aké (2013), en el cual se realiza la interpretación del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de Godino (2009), para la faceta epistémica y ecológica como se muestra en cada una de las figuras 6 y 7 respectivamente.

Faceta epistémica	CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO	*Conocimiento común*: Faculta al profesor para resolver la tarea matemática. *Conocimiento especializado*: Faculta al profesor para elaborar la configuración de objetos y procesos (tipos de problemas, lenguajes/representaciones, procedimientos, conceptos/propiedades y argumentos) puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea. *Conocimiento avanzado*: Faculta al profesor para identificar posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Figura 6: Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del profesor.
Fuente: Aké (2013, p. 91)

En la faceta epistémica el docente debe reconocer de manera explícita los objetos, procesos y significados matemáticos puestos en juego en las prácticas algebraicas, que relacionen al conocimiento del contenido (común, especializado y avanzado) para la resolución de una tarea sobre estructuras.

Faceta ecológica	*Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares*	Faculta al profesor para: • Identificar los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de las tarea (orientaciones curriculares) • Explicar las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma (conexiones intra-disciplinares) • Explicar las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma (conexiones interdisciplinares)

Figura 7: Faceta ecológica del conocimiento didáctico-matemático del profesor.
Fuente: Aké (2013, p. 92)

En particular, en la faceta ecológica el docente debe tener en cuenta a los documentos oficiales en los que se sustenta la Educación en el Perú, con el fin de que las competencias matemáticas del estudiante se vinculen con sus competencias relacionadas a otras áreas, para que les permita “la comprensión y el análisis de otras variables que intervienen cuando se resuelven problemas” (Perú, 2016, p.139) para el logro de los aprendizajes.

2.3 RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

Teniendo en consideración que en este trabajo nos centraremos en explicitar el conocimiento didáctico matemático en la Faceta Epistémica y en la Faceta Ecológica del MCDM propuesto por Godino (2009) en relación a las ecuaciones y al desarrollo del razonamiento algebraico elemental y que los niveles de algebrización deben formar parte del conocimiento especializado pues permitirán reconocer rasgos algebraicos en las soluciones de las tareas de los estudiantes.

Del trabajo de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) adoptaremos la caracterización de los niveles de algebrización (0, 1, 2 y 3) que tendrá implicancia en la formación de profesores. La caracterización de cada nivel se presenta de la siguiente manera:

Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico); los estudiantes desarrollan un razonamiento propiamente aritmético, sin llegar a generalizar casos particulares, expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.

Nivel 1 de algebrización (nivel incipiente de algebrización); los estudiantes en sus respuestas llegan a una generalidad de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Y también aplicando propiedades de los conjuntos numéricos y la igualdad como equivalencia.

Nivel 2 de algebrización (nivel intermedio de algebrización); los estudiantes operan con indeterminadas o variables en tareas estructurales de la forma $(Ax \pm B = C)$, expresadas con lenguaje simbólico-literal.

Nivel 3 de algebrización (nivel consolidado de algebrización); se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y los estudiantes operan con ellos realizando tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $(Ax \pm B = Cx \pm D)$.

Hay que hacer notar que los niveles 0, 1 y 2 no son algebraicos en el sentido estricto, pues en el nivel 0 no se generaliza con variables y los niveles 1 y 2 están enmarcados en la transición de la aritmética (nivel primario) al álgebra (nivel secundario). Se denominan niveles protoalgebraicos y se asocian a las soluciones que representan particularización (extensivo)-generalización (intensivo) de los objetos y procesos involucrados, simbolizando tanto las situaciones de generalización como las de indeterminación.

En el siguiente capítulo haremos una revisión de textos e investigaciones que abordan el tema de ecuaciones para la construcción del significado institucional de referencia.

CAPITULO III: CONSTRUCCION DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA ASOCIADO A LAS ECUACIONES EN LA EDUCACION SECUNDARIA PERUANA.

En este capítulo, realizamos la construcción del significado institucional de referencia de las ecuaciones en la secundaria, específicamente para las ecuaciones de primer y segundo grado. Para ello, se han revisado investigaciones en didáctica de las matemáticas, libros oficiales de matemáticas que distribuye el Ministerio de Educación en el Perú, así como otros textos escolares que abordan dicho contenido y un libro de Matemática superior, con el propósito de observar en cada una de estas fuentes los conocimientos matemáticos que están presentes e identificar aquellos que estén ausentes pero que deben formar parte del conocimiento matemático que debe tener un profesor de educación secundaria.

Los datos sobre los textos didácticos escolares para la secundaria que se han empleado en esta investigación para construir el significado de referencia, se presentan en la tabla 1.

Tabla 1: Textos didácticos empleados en la construcción del significado de referencia.

AUTOR	TÍTULO	CIUDAD	EDITORIAL	AÑO
Perú	Matemática 1 secundaria	Lima	Norma	2016
Perú	Matemática 2 secundaria	Lima	Norma	2012
Perú	Matemática 3 secundaria	Lima	Santillana	2016
Caro, Raquel	Matemática 2do ESO. Álgebra	España	Textos Marea Verde	2016
Hernández, Raquel	Matemáticas orientadas a enseñanza aplicadas 3° A ESO.	España	Textos Marea Verde	2016
Leithold, Louis	Matemáticas previas al cálculo.	México	Oxford	1998

Los tres primeros textos escolares son los libros oficiales que se distribuyen en todos los colegios nacionales del Perú, los cuáles han sido elaborados según los lineamentos curriculares del área de matemática.

Los dos últimos textos didácticos para la secundaria han sido tomados del grupo de textos de Marea Verde, elaborados por profesores de experiencia en la enseñanza pública, adaptados a las características de los estudiantes por cada nivel y al currículo de la comunidad autónoma de Madrid. La elección de estos libros, es porque tiene la ventaja de ser un material curricular gratuito para la comunidad de matemática, que nos permitirá tener un sentido más amplio de los conocimientos sobre ecuaciones, además tanto para el primer, segundo y tercer año de secundaria el tema de las ecuaciones lineales y cuadráticas son contenidos de cada uno de estos libros, temas que también son contemplados en los tres primeros años de secundaria en Perú, por lo que consideramos serán de utilidad para la elaboración del significado institucional de referencia de las ecuaciones conjuntamente con los textos del Estado Peruano.

Respecto al libro de Leithold, creemos es importante porque es un libro de consulta (accesible en la web y bibliotecas de los centros de estudio) que utilizan profesores de pregrado en los primeros ciclos de la universidad; siendo un referente para los estudiantes que se incorporan a la vida universitaria, con contenidos que se conectan a los conocimientos que desarrollan en la educación secundaria.

Asimismo debemos aclarar sobre la forma en que hemos analizado los textos didácticos, indicando que no se han abordado todos los contenidos de estos textos, sino que en la revisión de cada una de las fuentes se ha buscado de manera explícita el término "ecuación" y sus representaciones y de manera implícita las tareas en diversos temas del texto tales como funciones, proporcionalidad, sucesiones entre otros en el que se requería plantear y resolver una ecuación. También, debemos señalar que en la sección 3.3 del capítulo tres presentamos de manera organizada en una propuesta de significado de referencia la descripción de los objetos asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado.

Por ello, a continuación, se presentarán, estructurados en dos apartados: uno para las ecuaciones de primer grado y el otro para las ecuaciones de segundo grado, los seis objetos primarios que se emplean desde el EOS: los elementos lingüísticos, las situaciones, las definiciones, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos para describir el significado asociado a cada tópico. Dado que, el objeto primario "elementos lingüísticos" aparecerá al ejemplificar los demás objetos primarios ligados a las ecuaciones no se lo describirá aislándolo de los demás elementos.

3.1 OBJETOS ASOCIADOS A LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En esta sección, se identificarán cuáles son los objetos primarios asociados a las ecuaciones de primer grado que emergerán en las prácticas matemáticas. Con estos elementos, construiremos el significado de referencia que hemos hallado en textos escolares e investigaciones.

- **DEFINICIONES**

En relación a las descripciones implícitas y explícitas, asociadas a las ecuaciones se ha encontrado lo siguiente:

En el libro de Leithold (1998, p.66), se presenta la siguiente definición para una ecuación lineal con una incógnita: “Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación de la forma $ax + b = 0$, done a y b son números reales y $a \neq 0$.”

Podemos notar que la definición de una ecuación lineal se presenta en un lenguaje algebraico, en este caso es una expresión polinómica en una variable de grado 1 igualada a cero. Implícitamente la ecuación plantea como problema la búsqueda de raíces del polinomio lineal.

De otro lado, en el texto de Caro (2016) para hacer la presentación de las ecuaciones de primer grado, se define de manera general a una ecuación algebraica y la ecuación de primer grado será en caso particular, la cual se ilustra con un ejemplo. Es decir, no están desarrollando la definición de una ecuación lineal, solo la están ejemplificando. Sin embargo, previamente se presentan definiciones para el valor numérico de una expresión algebraica, equivalencias y simplificación de expresiones algebraicas, polinomios: suma y producto. Luego, se define la ecuación en términos de una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Figura 8: Definición de ecuación.
Fuente: Caro (2016 p. 195)

La expresión “las unimos con el signo igual” se refiere a “las relacionamos a través de la relación de igualdad” y como parte del lenguaje de las ecuaciones también definen en la figura 8 a los “miembros de una ecuación” y a las “incógnitas”.

Así también, en el mismo texto se define como una solución de una ecuación al número que al reemplazarse en la ecuación, hace que los dos términos de la ecuación valgan lo mismo. Según esto, algunas de las ecuaciones tendrán única solución y otras diversas soluciones, pero si el número que se reemplaza no cumple la igualdad entre los dos términos, algunas de las ecuaciones no tendrá solución.

Finalmente, se asumen definiciones previas para dar la definición de ecuaciones de primer grado. Por ejemplo: expresión algebraica.

- **SITUACIONES**

Para el estudio de las ecuaciones de primer grado se proponen las siguientes situaciones, las cuales las hemos agrupado en función a los procedimientos y propiedades que se siguen para dar solución al problema y también en función a los contextos matemáticos y extramatemáticos que están vinculados a dichas ecuaciones lineales. Así tenemos:

<u>Situaciones en contextos matemáticos en el que se plantea resolver problemas con conexiones a la aritmética.</u>

En el texto de Caro (2016) para la aplicación de las ecuaciones lineales, se presentan problemas en contextos matemáticos numéricos, tal como se detallan en la figura siguiente:

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

Figura 9: Problemas numéricos sobre ecuaciones.
Fuente: Caro (2016, p. 201)

<u>Situaciones en contextos matemáticos en el que se plantea resolver problemas con conexiones a la geometría.</u>

En el texto de Caro (2016) para la aplicación de las ecuaciones lineales, presentan problemas en contextos matemáticos de geometría, tal como se detallan en la figura siguiente

23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

Figura 10: Problemas geométricos sobre ecuaciones.
Fuente: Caro (2016, p. 202)

Asimismo en la investigación de Solera (2015) para realizar la evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del simbolismo algebraico y ecuaciones de primer grado, realizan previamente una investigación sobre los conocimientos matemáticos-didácticos apropiados para la enseñanza del tópico que abordarán en otros estudios, con el fin de mejorar la idoneidad en el proceso de enseñanza que implementarán y también para el diseño de las unidades y sesiones que presentaran a los estudiantes de un primer curso de secundaria. Así, para nuestro trabajo, mostraremos algunos de estos ejemplos que han propuesto en sus actividades para el desarrollo de su investigación, dado que para la formulación de los ejercicios y problemas tuvieron en consideración a estos conocimientos matemáticos en relación a las ecuaciones de primer grado.

Así por ejemplo para tener una visión global de los estudiantes sobre sus conocimientos sobre ecuaciones, aplicaron una prueba inicial (figura 11) que involucra diversos problemas para determinar una expresión o un valor desconocido en contextos matemáticos.

1.- El padre de Claudia tiene 37 años. Esta edad es 4 años más que el triple de la edad de Claudia. Calcula la edad de Claudia.

2.- Trata de escribir una expresión matemática con las siguientes instrucciones. A un número cualquiera se le multiplica por 4, se le resta 6, después se divide por 2 y finalmente se le suma el triple de ese mismo número cualquiera.

3.- Completa el número que falta en el hueco describiendo qué operaciones o razonamientos has hecho para calcularlo.

$7 \bullet 4 - \square = 12$; $\frac{7}{12} = \frac{\square}{15}$; $9(2 + \square) = 27$; $12 + 3(7 - \square) = 7 - 2 + \square$

4.- Si K tomara el valor de 5 y $P = 7\left(\frac{K}{4} - 8\right) + 3K - 1$ ¿cuánto valdría P? y si $T = 4K - 2$ ¿Cuánto tiene que valer K para que T sea 38'4?

5.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a $x + 6 = 2x - 3$.

Figura 11: Prueba inicial.
Fuente: Solera (2015, p. 45)

De igual forma para cerrar con la implementación de la experiencia de la enseñanza aplicaron una prueba final (figura 12) después de las sesiones previstas que desarrollaron, la cual involucra expresiones algebraicas, equivalencia de ecuaciones, igualdad e identidad de expresiones, finalizando con la resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones, que es el contenido que debería ser asimilado por los estudiantes, luego de dominar plenamente a los contenidos iniciales. Contenidos que un profesor debe identificar e instituir en el proceso de enseñanza que realice en su práctica profesional.

1.- Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) El triple de un número más la mitad del mismo.

b) Un número menos diez es igual al triple de dicho número.

2.- Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios y señala en ellos su grado, su coeficiente y su parte literal.

a) $4xy^3$ b) $3z - 4x^2$ c) $x(a+b)^3$ d) $\frac{x}{4}ab$

3.- Calcula el valor numérico de la siguiente expresión para x = 3.

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5$$

4.- Escribe dos monomios semejantes a $4x^2z$.

5.- Razona si las siguientes igualdades son identidades o no.

a) $x - 1 + 4x + 3 = 2 + 5x$ b) $x + 2 - 4x = 5x - 2$

6.- Justifica cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación $4x - 8 = 6(x-2)$

a) $x = 5$ b) $x = 2'4$ c) $x = 2$ d) $x = -1$

7.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a la del ejercicio anterior.

8.- Completa la siguiente tabla:

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3 - 7y = 12$				
$18 = 6t$				
$\frac{d}{7} - 14 = 0$				

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 1 = x + 3$ b) $9(2x-1) - 3(5x-3) = 18$

c) $5(2x+3) = 3(3x+6)$ d) $12 = \frac{3x}{10} + 2$

10.- En un instituto se han colocado varios bancos dispuestos uno detrás de otro. Si se colocan 10 alumnos en cada banco, quedan sin sitio 11 alumnos y si se colocan 11 alumnos en cada banco, quedan 7 plazas disponibles. ¿Cuántos alumnos hay?

Figura 12: Prueba final.
Fuente: Solera (2015, p. 46)

Finalmente en el texto de segundo de secundaria Perú (2016), se asocia el contenido de las ecuaciones lineales con los contenidos de función lineal y proporcionalidad directa e inversa. Pues en las situaciones que ejemplifican para su resolución los estudiantes deben plantear y resolver ecuaciones lineales. Así por ejemplo:

Para la Función lineal:

Ejemplo 1(p.53)

1. Dada la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x$. Donde x = número de alfajores y $f(x)$ = costo en nuevos soles. Complete la representación tabular:

x	8		24	
$f(x)$		8		15

Para la proporcionalidad:

Ejemplo 6(p.59)

7. Si 20 obreros hacen una obra en 18 días, ¿cuántos obreros serán necesarios para realizarla en 230 días?

Resolución:

Nro. de obreros	Nro. de días
20	18
x	30

Considerando que si se disminuye a la mitad el número de obreros, entonces el número de días se incrementa al doble. Esto indica que las magnitudes son inversamente proporcionales.

$20.18 = x.30 \rightarrow x = \frac{20.18}{30} \rightarrow x = 12$ → Serán necesarios 12 obreros.

- **PROCEDIMIENTOS**

Para resolver a una ecuación de primer grado se presentan los siguientes procedimientos:

➢ En el libro de Leithold (1998,p.67), para realizar la solución de una ecuación lineal de la forma
$5x - 2x - 11 = 2 + x - 8$, se siguen los siguientes pasos.

En primer lugar reducen términos semejantes en cada lado de la ecuación:

$$3x - 11 = x - 6$$

Después agregan a ambos miembros de la ecuación $-x$ y 11.

$$3x - 11 - x + 11 = x - 6 - x + 11$$

Por las propiedades cancelativa y del elemento neutro de la adición, obtienen.

$$3x - x = 11 - 6$$

Luego, reduciendo términos semejante en la última expresión equivalente, obtienen.

$$2x = 5$$

Finalmente realizan trasposición de términos, para determinar el valor de la incógnita.

$$x = \frac{5}{2}$$

Por lo que indican que el conjunto solución de la ecuación lineal es: $\left\{\frac{5}{2}\right\}$. También señalan que se verifica la solución reemplazando en la ecuación original.

Del proceso que se exhibe, podemos destacar que para resolver la ecuación usan propiedades de los números reales y expresiones algebraicas para convertir ecuaciones equivalentes y aplicar trasposición de términos hasta determinar el valor desconocido de la incógnita. Es decir cada uno de los pasos que se muestran son los procedimientos que requerimos conocer en la resolución de una ecuación lineal sin la presencia de denominadores numéricos; ya que si la ecuación lineal presentará denominadores se recomienda primero eliminarlos y luego seguir con las pautas que se detallan en el proceso anteriormente descrito.

Asimismo el autor indica para las ecuaciones lineales la solución gráfica de la ecuación lineal (X), la cual se puede interpretar a partir de la asociación de las ecuaciones lineales con las funciones lineales. Es decir para las funciones lineales de la forma $f(x) = ax + b, a \neq 0$, cuyo intercepto con el eje X (eje de las abscisas) es la solución de la ecuación lineal $ax + b = 0, a \neq 0$.

Para mostrar la solución de la ecuación lineal

$$ax + b = 0$$

en una gráfica se define y igual al lado izquierdo, y se dibuja la gráfica de esa ecuación.

La gráfica es una línea recta que cruza al eje x en el punto cuya abscisa es $x = -\frac{b}{a}$, la solución de la ecuación. El número $-\frac{b}{a}$ es denominado la **intercepción x** de la recta.**

Figura 13: Solución gráfica de una ecuación lineal.
Fuente: Leithold (1998, p. 67)

- **PROPIEDADES**

Se tiene los siguientes enunciados sobre el estudio de ecuaciones de primer grado:

- En el libro de Leithold (1998, p.66), a partir de la definición que señala para una ecuación lineal y las operaciones que realiza para determinar su solución, demuestra el siguiente teorema:

$$La\ ecuación\ lineal\ ax + b = 0\ (donde\ a \neq 0) tiene\ exactamente\ una\ solución, -\frac{b}{a}.$$

En la demostración que realiza el auto; con el fin de resolver la ecuación $ax + b = 0$ para x , resta b de ambos lados y después divide ambos lados de la ecuación entre a, lo cual puede realizar porque $a \neq 0$. Así tiene las siguientes ecuaciones equivalentes.

$$ax + b = 0$$
$$ax + b - b = 0 - b$$
$$ax = -b$$
$$\frac{ax}{a} = -\frac{b}{a}$$

De la demostración que se evidencia, en relación a la resolución de una ecuación lineal, se observa que han utilizado propiedades de los números reales como las: Inverso aditivo de un número real, inverso multiplicativo de un número real, elemento neutro de la adición.

Así también, en dicho proceso para obtener las ecuaciones equivalentes han tenido en consideración las siguientes propiedades.

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Figura 14: Propiedades de las ecuaciones.
Fuente: Caro (2016, p. 196)

- **ARGUMENTOS**

Para las proposiciones y procedimientos se han usado las siguientes justificaciones.

- En el libro de Leithold (1998), para demostrar que la solución de una ecuación lineal de la forma $ax + b = 0\ (donde\ a \neq 0)$, es $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$, que se muestra en la figura 15, se realizan razonamientos deductivos para determinar su única solución.
- A partir de las situaciones que se han ejemplificado en el apartado de las situaciones, debemos señalar que los estudiantes para la resolución de los ejercicios y problemas que se han formulado, los podrían evaluar en algunos de los casos haciendo uso de números que satisfagan las condiciones de ejercicio o problema sin llegar a plantear ecuaciones, sino buscando valores apropiados. En ese caso, estaría haciendo un razonamiento inductivo: cálculo numérico, ensayo y error.

3.2 OBJETOS ASOCIADOS A LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

En esta sección, se identificarán cuáles son los objetos primarios asociados a las ecuaciones de segundo grado que emergerán en las prácticas matemáticas. Con estas, construiremos el significado de referencia que hemos hallado en textos escolares e investigaciones.

- **DEFINICIONES**

Para el estudio de la ecuación de segundo grado se presentan las siguientes concepciones:

- En el libro de Leithold (1998), se define a una ecuación polinomial de segundo grado o ecuación cuadrática en la variable x, como una ecuación que puede expresarse como: $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a, b\ y\ c$ son números reales constantes y $a \neq 0$.
- Y en el trabajo de investigación de Posadas (2013) para realizar la evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en tercero de secundaria, realizan previamente un análisis de los contenidos relacionados con este tema, para cuyo estudio, la autora refiere se requiere de conocimientos iniciales como son: operaciones con fracciones, raíces exactas, operaciones con polinomios, identidades notables, descomposición en factores y teorema de Pitágoras, pues señala que el estudio de las ecuaciones cuadráticas involucra resolver problemas numéricos y geométricos(calcular áreas, perímetros o aplicación del teorema de Pitágoras para calcular el lado de un triángulo rectángulo).
- Luego, en el texto de Hernández (2016), en el capítulo 5 para 3ero ESO se desarrollan los contenidos sobre ecuaciones cuadráticas en el siguiente orden:
  - Concepto de ecuación de segundo grado.
  - Resolución de ecuaciones de segundo grado completa.
  - Número de soluciones de una ecuación de segundo grado completa.
  - Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.
  - Suma y producto de raíces.
  - Resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado.

Así, la autora empieza por definir a las ecuaciones de segundo grado completa como se muestra en la figura 15:

1.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Figura 15: Ecuación de segundo grado completa.
Fuente: Hernández (2016, p. 122)

A partir del discriminante señala la cantidad de soluciones que tienen una ecuación de segundo grado, fijándose en el signo de éste número. Seguidamente, define a las ecuaciones de segundo grado incompletas como se muestra en la figura16:

1.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Figura 16: Ecuación de segundo grado incompleta.
Fuente: Hernández (2016, p. 124)

Para la cual, se describen dos casos:

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Figura 17: Resolución de ecuación de segundo grado incompleta.
Fuente: Hernández (2016, p. 124)

- También en el texto didáctico de segundo de secundaria Matemática 3 Perú (2016), se presenta de forma similar al de la autora Hernández (2016) las definiciones de ecuación cuadrática completa e incompleta. Pero, en este texto, se evidencia que para la existencia de la raíz cuadrada en el conjunto de los números reales, la cantidad sub-radical debe ser no negativa, tal como se muestran en las figuras 18 y 19 respectivamente.

> Para resolver una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$, se despeja la incógnita y se extrae la raíz cuadrada a ambos miembros:
>
> $$ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ siempre que } -\frac{c}{a} \geq 0.$$

Figura 18: Resolución de ecuación cuadrática incompleta.
Fuente: Perú (2016, p.88)

> Por fórmula general
>
> Una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver aplicando la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$.

Figura 19: Uso de la fórmula general.
Fuente: Perú (2016, p.89)

- **SITUACIONES**

Para el estudio de la ecuación de segundo grado se proponen las siguientes situaciones, las cuales se organizan en problemas en contextos matemáticos y problemas en contextos extramatemáticos, tales como los siguientes ejemplos que a continuación presentamos.

Problemas en contextos matemáticos:

- Se tiene a los problemas en los que se realiza la evaluación de una tarea determinada por fórmula general. Así por ejemplo: en el que se determina el conjunto solución de una ecuación cuadrática

  Podemos poner en evidencia este tipo de problemas en la investigación de Posadas (2013) en la que se realizó una prueba de evaluación formativa, como se muestra en la figura 20, con el fin de comprobar si los estudiantes estaban comprendiendo el tema de las ecuaciones cuadráticas, al hallar su solución por fórmula general.

Sabiendo que las ecuaciones de segundo grado son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y las soluciones son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-x^2 + 3x = 7 - x$
b) $12x^2 - 3x = 0$
c) $4x^2 - 16 = 0$
d) $\frac{2}{5}x^2 = 0$
e) $\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2 + 3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$

Figura 20: Prueba de evaluación formativa.
Fuente: Posadas (2013, p. 14)

- También problemas en los que se aplica propiedades en las tareas que involucran las propiedades de suma y producto de las ecuaciones cuadráticas y tareas que se asocian a la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática, tal como se ejemplifica en el texto de tercero de secundaria (Perú, 2016).

CÓMO HACER

Determina el valor de m para que la suma de las raíces de la ecuación $(m-2)x^2 + 4x + 3 = 0$ sea $-3/4$.

Identificamos los coeficientes: $a = m - 2$, $b = 4$ y $c = 3$

La suma de las raíces es $-3/4$. Reemplazamos:

$S = -\frac{b}{a}$ → $-\frac{3}{4} = -\frac{4}{m-2}$ → $-3m + 6 = -16$ → $-3m = -22$ → $m = \frac{22}{3}$

El valor de m es $22/3$.

Figura 21: Ejemplo de ecuación cuadrática-Suma de raíces.
Fuente: Perú (2016, p. 91)

CÓMO HACER

Si las raíces de la ecuación $kx^2 - 3kx + 9 = 0$ son iguales, determina la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Para que la ecuación tenga dos raíces iguales, el discriminante debe ser igual a 0 y $k \neq 0$.

$b^2 - 4ac = 0$

$(-3k)^2 - 4(k)(9) = 0$ $\quad 9k^2 - 36k = 0$ $\quad 9k(k-4) = 0$ $\quad k = 4$

Formamos la ecuación reemplazando $k = 4$:

$kx^2 - 3kx + 9 = 0$ $\quad 4x^2 - 12x + 9 = 0$

Figura 22: Ejemplo de Ecuación Cuadrática-Discriminante.
Fuente: Perú (2016, p. 92)

- Problemas en contextos matemáticos relacionados con la aritmética y la geometría.

Problemas de modelación que involucran conceptos geométricos.

Por ejemplo en el tópico de Leithold (1998) se formula a los estudiantes modelos matemáticos como el de la figura 23.

► **EJEMPLO 4** ***Encontrar una ecuación cuadrática como modelo matemático de un problema, cuya solución se determinará en una graficadora, así como algebraicamente***

Un parque posee un jardín de flores de 50 m de largo y 30 m de ancho, y un andador de ancho constante a su alrededor cuya área es de 600 m^2. Calcule el ancho del andador haciendo lo siguiente: **(a)** determine una ecuación como modelo matemático de la situación; **(b)** estime la solución de la ecuación en una graficadora, y **(c)** resuelva la ecuación algebraicamente. **(d)** Escriba la conclusión.

Figura 23: Modelo matemático-Ecuación Cuadrática.
Fuente: Leithold (1998, p. 95)

De igual forma en los textos didácticos y la investigación que se han revisado, también se proponen problemas geométricos. Así tenemos:

En el texto de Hernández (2016): “Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área” (p.133).

En la investigación de Posadas (2013), para la aplicación de las cuadráticas plantean los siguientes problemas.

3. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2. halla los catetos de este triángulo.

   Nota: si un cateto mide x cm, el otro medirá (18-x) cm.

4. La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Figura 24: Problemas de aplicación con ecuaciones cuadráticas.
Fuente: Posadas (2013, p. 13)

Problemas de modelación aritméticos (numéricos).

Para este caso, se presentan problemas aritméticos como los que se ejemplifican en el texto de Hernández (2016) en el que se tiene las siguientes situaciones para las actividades que proponen a los estudiantes.

15. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

16. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

17. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

18. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

Figura 25: Actividades propuestas.
Fuente: Hernández (2016, p. 133)

Problemas en contextos extramatemáticos:

- Se tiene por ejemplo a los problemas de modelación que involucran el proceso de generalización y materialización. Así:

Para la aplicación de las ecuaciones cuadráticas, en el trabajo de Radford y Guerette (1996, citado en Posadas, 2013) describen una secuencia de tareas en un contexto geométrico que relaciona cuadrados y rectángulos. Así, los autores en sus actividades propuestas solicitan a los estudiantes que resuelvan el problema de la figura 26.

Problema 1
¿Cuáles deben ser las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 20 y cuya área es 96 unidades cuadradas?

Figura 26: Problema 1 de aplicación con ecuaciones cuadráticas.
Fuente: Posadas (2013, p. 32)

En este problema 1, los autores con ayuda de grandes figuras de cartón, explican el procedimiento que los llevará a encontrar la respuesta al problema (figura 27), para luego dar otros problemas similares en los que deberán expresar los lados del rectángulo en números naturales; en números enteros e incluso en números fraccionarios, para que después pasen a escribir en términos generales.

Después, el profesor, con ayuda de grandes figuras de cartón, explica el proceso para resolver el problema: se toma un cuadrado cuyo lado es 10, entonces su área es 100 (Fig. 11). Luego, hay que cortar 4 unidades cuadradas del cuadrado de lado 10 (Fig. 12) para obtener una figura cuya área es 96. Esto se puede conseguir (que es la idea clave de la resolución) mediante la reducción de un pequeño cuadrado de lado 2 (Fig. 12). Con el fin de obtener un rectángulo, cortamos el rectángulo por la línea de puntos que se muestra en la figura 13 y lo colocamos verticalmente a la derecha (Fig. 14). Así, los lados buscados miden 12 unidades y 8 unidades.

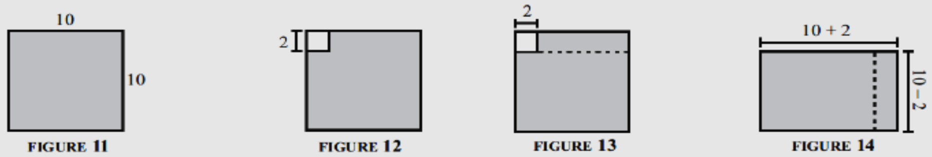


Figura 27: Solución al Problema 1.
Fuente: Posadas (2013, p. 32)

- **PROCEDIMIENTOS**

Para resolver a una ecuación de segundo grado se presentan los siguientes métodos:

➢ En el libro de Leithold (1998), se considera como método para dar solución a una ecuación cuadrática en la forma estándar al “Teorema del factor cero”, para lo cual el lado izquierdo puede ser factorizado (método de factorización).
Asimismo, presenta casos particulares de la forma estándar de la ecuación cuadrática e indica los métodos de resolución. Así tenemos:

Método gráfico; “la gráfica de la ecuación obtenida haciendo y igual al lado izquierdo de la ecuación cuadrática en forma estándar es una parábola. Los interceptos x de la parábola son las soluciones de la ecuación cuadrática”. (Leithold, 1998, p. 75). En necesario indicar que esto ocurre para cuando se integra a las ecuaciones con las funciones.

Método de la Raíz Cuadrada;

En base en lo que se describe en el libro de Leithold (1998, p. 76) este método sirve para dar solución a ecuaciones de la forma $x^2 = d$.

Esto es, que no hay términos de primer grado. Por lo que la siguiente es una ecuación equivalente a la anterior.

$$x^2 - d = 0$$

Y al factorizar al lado izquierdo obtiene:

$$\left(x - \sqrt{d}\right)\left(x + \sqrt{d}\right) = 0$$

Luego, considera a cada uno de los factores igual a cero y resuelve las ecuaciones.

$$\left(x - \sqrt{d}\right) = 0 \qquad\qquad \left(x + \sqrt{d}\right) = 0$$

$$x = \sqrt{d} \qquad\qquad x = -\sqrt{d}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación $x^2 = d$ es $\left\{\sqrt{d}; -\sqrt{d}\right\}$. Indica que se puede abreviar el conjunto solución como $\left\{\pm\sqrt{d}\right\}$. Es decir:

$$x^2 = d \text{ si y solo si } x = \pm\sqrt{d}$$

Donde $x = \pm\sqrt{d}$ se refiere a las dos ecuaciones $x = \sqrt{d}$ y $x = -\sqrt{d}$. Por lo que señala finalmente: es factible resolver la ecuación extrayendo la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación y escribiendo el símbolo $\pm$ para indicar las dos raíces.

Método de la Completación de Cuadrados; el autor indica este método para ecuaciones cuadráticas que carecen del término independiente y son de la forma: $x^2 + kx = 0$. Y sigue el siguiente procedimiento: suma a ambos lados de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de x para obtener el cuadrado de un binomio; tal como se muestra en el libro de Leithold (1998, p. 78) que a continuación detallaremos.

El autor señala que para completar el cuadrado de $x^2 + kx$, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; es decir $\left(\frac{k}{2}\right)^2$.

Luego, señala que esta regla para completar el cuadrado, se aplica solamente a una expresión cuadrática dela forma $x^2 + kx$, donde el coeficiente del término de segundo grado es 1. Además cuando $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ se suma a $x^2 + kx$, se obtiene el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$$

Si k es igual a $2a$, esta fórmula se transforma en :

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

Al finalizar extrae la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación, escribiendo $\pm$ para indicar las dos raíces y opera para dar el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

Método de la fórmula cuadrática; para resolver una ecuación cuadrática por fórmula cuadrática general, la ecuación debe estar dada en su forma estándar. Tal como se muestra en la figura 28:

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Figura 28: Método de fórmula cuadrática.
Fuente: Leithold (1998, p. 80)

Asimismo, el autor indica en su tópico que el número $b^2 - 4ac = 0$ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática y que este discriminante proporciona la siguiente información sobre la naturaleza de las raíces de la ecuación.

1. $b^2 - 4ac = 0$: las raíces son reales e iguales, una raíz doble
2. $b^2 - 4ac > 0$: las raíces son reales y diferentes
3. $b^2 - 4ac < 0$: las raíces son imaginarias y diferentes; una es el complejo conjugado de la otra.

Figura 29: Clasificación de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
Fuente: Leithold (1998, p. 82)

- En el texto de Hernández (2016) para hacer la resolución de un problema de modelación, la autora establece las acciones a seguir para la resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado (figura 30)

3.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Figura 30: Resolución de problemas de ecuaciones cuadráticas.
Fuente: Hernández (2016, p. 133)

- **PROPOSICIONES**

Se tiene los siguientes enunciados sobre el estudio de ecuaciones de segundo grado:

- En el libro de Leithold (1998, p.74), propone al Teorema del factor cero como método para dar solución a una ecuación de segundo grado.
  Teorema del factor cero: Si r y $s$son números complejos, entonces $rs = 0$ si y solo si $r = 0\ o\ s = 0$.

  Asimismo para los métodos de completación de cuadrados y fórmula cuadrática general se contemplan a los siguientes teoremas:

  - $x^2 = d \quad si\ y\ solo\ si\ x = \pm\sqrt{d}$
  - Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Y en relación a la naturaleza del número de soluciones de una ecuación cuadrática, el texto didáctico de tercero de secundaria Perú (2016) resalta la valoración del discriminante para discriminar entre la cantidad y existencia de las raíces de la ecuación cuadrática en el conjunto de los números reales:

En la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se presenta la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$, donde el radicando $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante y se simboliza por Δ. Una ecuación cuadrática tiene dos soluciones (o raíces); sin embargo, si las soluciones son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola solución. Otras veces, la ecuación puede no tener solución en $\mathbb{R}$.

Para hallar el número de soluciones de una ecuación cuadrática, es suficiente con evaluar el discriminante.

$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
La ecuación tiene dos raíces distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	La ecuación tiene una sola raíz (dos raíces iguales). $x = \frac{-b}{2a}$	No existe raíz cuadrada de un número negativo. La ecuación no tiene raíces reales.

Figura 31: Número de soluciones de la ecuación cuadrática.
Fuente: Perú (2016, p.90)

➢ También con respecto a las ecuaciones de segundo grado, se presentas ejercicios resueltos y propuestos en el texto de Hernández (2016) que se evalúan a partir de las propiedades de la suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado. Así tenemos:

1.5. Suma y producto de raíces

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$

por lo que el coeficiente c es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente b, es decir, $-b$.

$$x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.$$

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Figura 32: Suma y producto de raíces.
Fuente: Hernández (2016, p. 126)

- **ARGUMENTOS**

Para las proposiciones y procedimientos se han usado las siguientes justificaciones.

➢ Para el caso de la fórmula cuadrática general; Leithold (1998) realiza la demostración por el método de completar cuadrados. Es importante mencionar que este método permite resolver cualquier ecuación cuadrática, pero antes deberá completar con coeficiente cero al término que le falte, ya sea el término lineal o el término independiente.

Entonces, considerando la ecuación cuadrática general de la forma estándar:

$ax^2 + bx + c = 0$, el autor señala que esta ecuación se resuelve para x en términos de a, b y c completando el cuadrado. Para ello, primero divide ambos lados de la ecuación por a ($a \neq 0$); y luego agrega $-\frac{c}{a}$ a ambos lados para obtener $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Y suma a ambos lados, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Finalmente, señala que estos dos valores de x son las soluciones de la ecuación:

$$ax^2+bx+c=0.$$

- De igual forma en el texto didáctico de tercero de secundaria Perú (2016) se realiza la demostración de las propiedades de suma y producto de raíces de una ecuación cuadrática, a partir de la fórmula general.

Suma de las raíces (S)

Si se suman las raíces de una ecuación cuadrática, se obtiene:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a} \qquad S=-\frac{b}{a}$$

Producto de las raíces (P)

Si se multiplican las raíces de una ecuación cuadrática, se obtiene:

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \qquad P=\frac{c}{a}$$

Figura 33: Suma y producto de raíces.
Fuente: Perú (2016, p.91)

Debemos observar que para ambas demostraciones emplean las propiedades de los números reales y también de las expresiones algebraicas.

3.3 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LAS ECUACIONES EN LA EDUCACION SECUNDARIA

A partir de las revisiones que hemos realizado, en esta sección haremos una propuesta para el significado de referencia asociado a las ecuaciones, que debe considerarse en la educación secundaria. Para ello se señalarán los conocimientos matemáticos referidos a cada objeto primario.

- En relación a los elementos lingüísticos

Tabla 2: Lenguajes asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado.

Elementos linguísticos	Ejemplo
Verbal: términos y expresiones • Expresiones relativas al signo igual: “es igual a”, “la razón es ”, “es equivalente a ”, “como una”, “se obtiene”, “es”, “da”, “incógnita”, “solución”, “recibe”, “tiene”, “excede en”, “nos queda”,etc	➢ ¿Qué número multiplicado por 3 **es** 40 unidades **menor que** su cuadrado? En este caso podemos notar que existe una relación de igualdad entre el número desconocido que es multiplicado por 3 con el cuadrado del número disminuido en 40. Es decir por medio de las expresiones **es** y **menor que** son las que permiten realizar dicha interpretación y plantear la ecuación que representa la expresión verbal: $3x = x^2 - 40$.
• Expresiones relativas a la proporcionalidad que conllevan a ecuaciones de primer grado. “proporcionalidad aritmética” “proporcionalidad geométrica” “proporcionalidad directa” “proporcionalidad inversa”	Por ejemplo para la proporción geométrica: ➢ En la fiesta de fin de año 2015-1 del colegio BALDOR asistieron 1800 alumnos, donde asistieron 5 hombres por cada 4 mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron a la fiesta? De donde se plantea la ecuación: $$\frac{5}{4} = \frac{1800 - x}{x}$$ Que se puede transformar en una ecuación lineal por medio de ecuaciones equivalentes.

• Expresiones relativas a los polinomios: "La ecuación como resultado de hallar los ceros de un polinomio",	➢ En la notación de los polinomios: $P(x) = x^2 - 3x + 2$, al hallar los ceros del polinomio $0 = x^2 - 3x + 2$
"Los interceptos con los ejes coordenados de la gráfica de una función"	➢ En la regla de correspondencia de una función lineal afín $f(x) = x + 4$, asociado al intercepto de la gráfica de la función con el eje horizontal: $x + 4 = 0$ y al intercepto de la gráfica de la función con el eje vertical: $f(x) = 0 + 4$.
Simbólico literal(alfanumérico)	
• Expresiones relativas a las ecuaciones: "$=$", "x", "x^2", "$3x - 8$", "$\frac{1}{x}$", "$Ax + B = C$" "$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	➢ Resuelva la siguiente ecuación: $a(x+b) = \frac{a}{2} + 2(a - bx)$, donde a y b son constantes.
• Expresiones relativas a la proporcionalidad: "$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$", "$a - b = c - d$", "$x = \frac{a \times b}{c}$"	➢ Si la razón entre dos números a y b es como 9 es a 5, ¿significa que a es 9 y b es 5?
• Expresiones relativas a los polinomios: "$p(x)$","$p(x)q(x)$","$a.p(x) = q(x)$"	➢ En la definición de una propiedad : Teoría de exponentes: $x^m . x^n = x^{m+n}$. Así, en el texto de 2do se secundaria, se presenta: Escribe el número que completa la igualdad: $(3y^2).(3y^7) = 9y^{\square}$

Polinomio de grado enésimo: “$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$”. Ecuación polinomial de grado enésimo: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 = 0$ Casos particulares: $ax^2 + bx + c = 0, ax + b = 0$	En la operación de polinomios. Así, en el caso de la división de polinomios se cumple que: $D(x) = d(x).q(x) + r(x)$.

- En relación a las situaciones

En función al análisis realizado para las ecuaciones de primer grado y segundo grado al inicio de este capítulo, hemos separado a las situaciones que involucran a dichas ecuaciones en dos grupos: situaciones que se presentan en contextos matemáticos y situaciones que se presentan en contextos extramatemáticos con conexiones y sin conexiones a otros temas y áreas, tal como se especifica a continuación:

Tabla 3: Situaciones asociadas a las ecuaciones de primer y segundo grado

Situaciones	Ejemplo
Problemas en contextos matemáticos	
Problemas en contextos matemáticos en el que se determina el conjunto solución de una ecuación lineal o cuadrática.	➢ Encuentre el conjunto solución de la ecuación $14x = -21$
Problemas en contextos matemáticos en el que se aplica las propiedades de suma y producto de raíces de una ecuación cuadrática.	➢ Calcula la suma y el producto de las raíces de la ecuación $x^2 - 12x - 14 = 0$
Problemas en contextos matemáticos en el que se determina el valor de una incógnita, a partir de la cantidad de soluciones de una ecuación lineal o cuadrática.	➢ Si las raíces de la ecuación $kx^2 - 3kx + 9 = 0$ son iguales, determina la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Problemas en contextos matemáticos que requieren conexiones al campo de las funciones para hallar elementos del dominio, rango o interceptos de su gráfica con el eje de las abscisas (Eje X)	➢ Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$. Determine los valores de la pre-imagen de la función para $f(x) = -\frac{11}{5}$ y el punto en el que la gráfica de f corta al eje x.
Problemas en contextos matemáticos que involucran expresiones algebraicas con conexiones a la aritmética. Es decir, problemas que vinculan un número finito de operaciones aritméticas con una cantidad desconocida, así como la presencia de las ecuaciones en las sucesiones aritméticas y geométricas.	➢ El padre de Claudia tiene 37 años. Esta edad es 4 años más que el triple de la edad de Claudia. Calcule la edad de Claudia.
Problemas en contextos matemáticos que involucran expresiones algebraicas con conexiones a la geometría para hallar dimensiones de determinadas figuras geométricas.	➢ La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en dos cm, el área del nuevo rectángulo sería 60 cm^2 . ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?
Problemas en contextos extramatemáticos Problemas en contextos extramatemáticos de modelización que involucran proporcionalidad directa o inversa para su solución, los mismos que representan dependencia funcional entre variables.	➢ Durante las vacaciones, 8 estudiantes decidieron pintar un mural de 30 metros para su comunidad. Ellos pintaron a razón de 6 horas por día y se demoraron 9 días en terminarlo. ¿Cuántos días hubiera demorado si asistían los 10 estudiantes inscritos, trabajando a razón de 8 horas por día y pintaban un mural de 50 metros.

Problemas en contextos extramatemáticos de modelización con conexiones a otras áreas, como aquellas que involucran términos económicos tales como gastos (costos) e ingresos.	➢ "Casa Bella" dedicada al alquiler de departamentos dispone de 65 departamentos de estreno. Se ha estimado que si se cobra un alquiler Semanal de \$ 500 por departamento, los 65 departamentos se ocuparían. Pero por cada \$ 10 de aumento en el alquiler, se dejaría de alquilar una unidad cada semana. a) Determinar la expresión que represente el Ingreso generado por los departamentos alquilados semanalmente, si se realizan "x" incrementos. b) Determinar cuántos departamentos como mínimo se deben alquilar semanalmente, si se quiere obtener un ingreso de \$ 32 500.
Problemas en contextos extramatemáticos de modelización que involucran los procesos de generalización, materialización, unitarización y simbolización.	➢ ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo cuyo semiperímetro es 20 y cuya área es 96 unidades cuadradas? El objetivo de este tipo de problema es que los estudiantes reinventen la fórmula que resuelve el problema de manera general e introduzca variables.

- En relación a las definiciones

En función al análisis realizado en los textos didácticos e investigaciones hemos identificado las definiciones que se asumen como previas para el tratamiento de las ecuaciones lineales y cuadráticas, y las definiciones que están presentes para el estudio del contenido.

Tabla 4: Definiciones asociadas a las ecuaciones de primer y segundo grado

Definiciones	Ejemplo
Números reales. Operaciones básicas	• El conjunto de los números reales se denota por R y tiene los siguientes subconjuntos numéricos: Números naturales (N), Números enteros (Z), Números racionales (Q), Números irracionales (I).
Polinomios y operaciones con polinomios.	• Un polinomio es una expresión algebraica en la que los exponentes de las variables son números enteros positivos o el cero.
Productos notables, factorización: factor común, identidades, divisores binómicos (regla de ruffini)	• Los productos notables son un grupo de multiplicaciones algebraicas muy frecuentes que se han identificado como fórmulas, y que nos permiten escribir directamente el resultado por simple inspección, sin verificar la multiplicación. Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización.
Teoría de ecuaciones • Ecuación algebraica:	• Una ecuación algebraica es una igualdad de dos expresiones algebraicas. Estas expresiones son llamadas miembros o lados de la ecuación, la cual puede ser entendida como una proposición abierta. Es decir puede asumir el valor de verdad de V (verdadero) o F (falso) según el valor que asuma la incógnita/s.

• Solución de una ecuación:	• Un número real es solución de la ecuación, si al ser sustituido por la variable en la ecuación hace verdadera la afirmación de la igualdad. También se le suele llamar raíz de la ecuación.
• Conjunto solución de una ecuación.	• El conjunto solución de una ecuación está formada por todas las soluciones de dicha ecuación.
• Clasificación de ecuaciones: Por el número de incógnitas Por el número de términos Por el grado de la incógnita	
• Ecuación de primer grado en una variable.	• Una ecuación de primer grado es toda expresión de la forma: $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Pueden ser también de la forma: $\begin{cases} ax = b \\ x + a = b \\ ax + c = b \end{cases}$
• Ecuaciones equivalentes de primer grado.	• Dos o más ecuaciones de primer grado son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones(o raíces)
• Ecuación de segundo grado en una variable.	• Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Pueden ser también de la forma: $\begin{cases} ax^2 + bx = 0 \\ ax^2 + c = 0 \\ ax^2 + bx + c = d \end{cases}$

• Ecuaciones equivalentes de segundo grado. Ecuación polinomiales en una variable. • Definición: La igualdad $P(x) = 0$; donde $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a tres, se denomina ecuación polinómica de grado superior.	• Dos o más ecuaciones de segundo grado son equivalentes si tienen las mismas soluciones Sea $n \in N$, decimos que $P(x)$ es un polinomio de grado n si es de la forma: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ son números reales llamados coeficientes con $a_n \neq 0$ es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente.

- En relación a los procedimientos

Para la identificación de los procesos matemáticos que involucran resolver un problema o tareas sobre ecuaciones de primer y segundo grado se han identificado los siguientes procedimientos.

Tabla 5: Procedimientos asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado

Procedimientos	Ejemplo
Dar valores específicos a la variable de una determinada ecuación y calcular si verifica la igualdad.	• En el caso de las ecuaciones cuadráticas: al resolver $x^2 = 4$. Los estudiantes asignan valores a la variable que satisfaga la igualdad antes de hacer la resolución por factorización.
Identificación de un método de solución según el tipo de ecuación.	• Resolución de ecuaciones de primer grado por trasposición de términos y simplificación. • Resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización: identidades, completar cuadrados y fórmula general Ejemplo de Resolución por fórmula general: Forma general de la ecuación cuadrática:

	$ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ El término Δ es conocido como "discriminante" y está definido por: $\Delta = b^2 - 4ac$ 1° caso: Si $\Delta > 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, son: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ 2° caso: Si $\Delta = 0$, hay una única solución de la cuadrática. 3° caso: Si $\Delta < 0$, no hay solución real
Traducir datos del lenguaje natural al algebraico en el caso de aplicaciones de ecuaciones.	• Una cantidad y su séptimo sumados juntos resultan 19. ¿Cuál es la cantidad? La cantidad es la manera de nombrar a lo desconocido: la incógnita "x" Así se traduce el enunciado: $x + \frac{1}{7}x = 19$ En este caso para su traducción y resolución se debe seguir los siguientes pasos: - Se debe asignar primero una incógnita a una de las magnitudes desconocidas. - En segundo lugar, se establece una ecuación que involucre dicha incógnita y las cantidades numéricas. - Finalmente, dependiendo del grado de la ecuación se resuelve por los métodos de solución que se desarrollan para las ecuaciones lineales y cuadráticas.

- En relación a las propiedades

De la revisión realizada en los textos didácticos en donde se han presentado soluciones a algunas tareas sobre ecuaciones, se han identificado de manera implícita las siguientes propiedades para ir de un paso al otro.

Tabla 6: Propiedades asociadas a las ecuaciones de primer y segundo grado

Propiedades	Proposiciones
Propiedades de la potenciación y radicación.	• Potenciación con exponentes enteros La potenciación en $\mathbb{Q}$ se define así: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} \frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\ldots\ldots, si\ n > 0 \\ 1, si\ n = 0, con\ a \neq 0 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}, si\ n < 0, con\ a \neq 0 \end{cases}$ Donde $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ Propiedades de la potenciación: • $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^n . \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ • $\left\{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m\right\}^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{n.m.p}$ Radicación exacta La raíz enésima de un número racional es un número que, elevado al exponente "n", da como resultados el número racional dado. Se representa: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x \leftrightarrow x^n = \frac{a}{b}$, donde $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}\ y\ n \geq 2$ Propiedades de la radicación: • $\sqrt[n]{\frac{a}{b}.\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ • $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[n.m.p]{\frac{a}{b}}$

	• $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^m$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)^m$ Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación: $x^2 - 3 = 6$ Se suma 3 a ambos miembros de la ecuación para despejar el término variable $x^2 - 3 + 3 = 6 + 3$ Se reduce términos semejantes $x^2 = 9$ Se aplica la definición de la radicación $x = 3 \ o \ x = -3$
Propiedades de las expresiones algebraicas: Propiedad conmutativa, propiedad asociativa y propiedad distributiva.	• Propiedad distributiva: La multiplicación de un término algebraico por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho término por cada uno de los sumandos. $x(y + z) = x.y + x.z.$ Observación: La propiedad distributiva se emplea en sentido contrario para justificar la factorización de polinomios: $x.y + x.z = x(y + z)$
Propiedades de las magnitudes directamente e inversamente proporcionales.	• Propiedad fundamental. Para todo $a, b, c \ y \ d$ no nulos, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es equivalente a $ad = bc$

Propiedades de las igualdades.	Consecuencia importante: Existe un número real k tal que $a = kc, b = kd$. Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación $$\frac{x}{3} = \frac{x-1}{2}$$ Por la propiedad fundamental: $$2x = 3(x-1)$$ $$2x = 3x - 3$$ $$x = 3$$ • Si a los dos miembros de una igualdad se le suma o resta un mismo número, la igualdad se mantiene. Si $a = b$, entonces $\begin{cases} a + c = b + c \\ a - c = b - c \end{cases}$ Si a los dos miembros de una igualdad se los multiplica o divide por un número diferente de cero, la igualdad se mantiene. Si $a = b$, entonces $\begin{cases} a \times c = b \times c \\ a \div c = b \div c \ (c \neq 0) \end{cases}$ Ejemplo: Resuelva la siguiente ecuación. $$x - 4 = 7$$ $$x + -4 = 7$$ Se suma 4 en ambos miembros usando la propiedad de suma para la igualdad $$x + -4 + 4 = 7 + 4$$ $$x + 0 = 11$$ $$x = 11$$
Propiedades de las ecuaciones cuadráticas. Sea la ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$, y de raíces x_1 y x_2. Entonces: Suma de raíces: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	• Reconstruye la ecuación cuadrática conociendo la suma y el producto.

<table>
<tr>
<td>
Producto de raíces: $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Teoremas:

Una ecuación de la forma $P(x) = 0$ donde P es un polinomio de grado n, tiene a lo más n raíces diferentes en R.
Sean $p(x); q(x)$ polinomios en R:
$p(x). q(x) = 0$ si y solo si $p(x) = 0$ o $q(x) = 0$.
Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$, tal que $ax^2 + bx + c = 0$ y
$\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación
$ax^2 + bx + c = 0$
no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\emptyset$
</td>
<td>
<table>
<tr><th>Suma(S)</th><th>Producto(P)</th><th>Ecuación ($x^2 - Sx + P = 0$)</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>-6</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>-3</td><td></td></tr>
</table>

Determina la ecuación cuadrática cuyo término independiente es 35 y una de sus raíces es -5.
Resolver la ecuación.
$(x + 2)(x - 5)(3x - 4) = 0,$

La ecuación dada está expresada en el producto de factores primos, así cada factor se iguala a cero.
$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$
$3x - 4 = 0 \rightarrow x = 4/3$
Luego:
$C.S = \{-2; \frac{4}{3}; 5\}$

Además: en el conjunto solución hay tres soluciones; verificándose que si el polinomio es de grado 3 entonces tendrá a lo más tres soluciones.

Determine el número de raíces de las siguientes ecuaciones:
$x^2 - 10x + 25 = 0$
$x^2 + 2x + 2 = 0$
$x^2 - 22x + 40 = 0$

</td>
</tr>
</table>

2. Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución , la cual viene dada por $\frac{-b}{2a}$ Es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$. 3. Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones, las cuales vienen dadas por $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, Es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.	

- En relación a los argumentos.

Tabla 7: Argumentos asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado

Argumentos	Ejemplo
Razonamiento Deductivo Consiste en utilizar resultados o hechos generales como fórmulas establecidas para casos particulares como el desarrollo de una ecuación.	• Cada vez que se parte de un resultado general para llegar a una conclusión o respuesta, estamos usando un razonamiento deductivo. Así tenemos el siguiente procedimiento para resolver una ecuación con coeficientes racionales. Resuelva: $\frac{2x+1}{6} - \frac{4-x}{15} = \frac{x-9}{10}$ ➢ Primero elimine los denominadores de ambos miembros multiplicando la ecuación por el MCM de los denominadores.

	$$30\left(\frac{2x+1}{6}\right)-30\left(\frac{4-x}{15}\right)=30\left(\frac{x-9}{10}\right)$$ ➢ Luego, efectúe operaciones y reduzca términos semejantes. $$5(2x+1)-2(4-x)=3(x-9)$$ $$9x=-24\rightarrow x=-\frac{8}{3}$$ ➢ Finalmente, verifique la solución y escriba el conjunto solución. $$\frac{2\left(-\frac{8}{3}\right)+1}{6}-\frac{4-\left(-\frac{8}{3}\right)}{15}=\frac{\left(-\frac{8}{3}\right)-9}{10}$$ $$C.S=\{-\frac{8}{3}\}$$
Método de falsa suposición. Tal como su nombre lo indica, se parte de una suposición falsa con la que se llega fácilmente a un error, que le permite obtener el valor correcto de la incógnita en el desarrollo de una ecuación.	• En el sentido de dar valores apropiadamente escogidos para la incógnita, los cuales se van reemplazando en la ecuación obteniéndose un valor numérico. Estos valores que se asignan nos van aproximando a la solución de la ecuación. Así, se podría resolver la siguiente ecuación $x+\frac{1}{7}x=19$. Se inicia, suponiendo que $x=7,$ entonces $x+\frac{1}{7}x=8$. Después se multiplica 8 por $\frac{19}{8}$ para obtener 19 , donde $\frac{19}{8}$ se multiplica por 7 para obtener el valor correcto de x , llegando a la solución $$x=7\left(\frac{19}{8}\right)\dashrightarrow x=\frac{133}{8}$$
Razonamiento inductivo Consiste en partir de casos particulares para llegar a una conclusión o respuesta.	• Por ejemplo para encontrar el valor de la incógnita en la siguiente sucesión: $2;9;16;23;30;x$

Tal como cuando se realiza una inducción empírica por cálculos numéricos, en donde se evalúa para los casos previos que le permita determinar la regla que está en juego.	Se evaluará con los números previos de la sucesión para hallar el valor de la incógnita x. Así: $2+7=9$ $9+7=16$ $16+7=23$ $23+7=30$ $30+7=37$ Por lo que el valor numérico de $x\ es\ 37$.
Método de ensayo y error. Consiste en ir dando valores a la variable hasta que se verifique la igualdad. Es un método intuitivo pero poco eficiente.	• Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x=18$ Le damos valores a x empezando por valores pequeños e incrementando su valor, según nos falte para cumplir la igualdad. Si $x=1, entonces\ 3*1\neq 18$ $3\neq 18$ Vemos que nos falta para que se cumpla la igualdad, por lo que incrementaremos el valor de x Si $x=5, entonces\ 3*5\neq 18$ $15\neq 18$ Vemos que nos falta poco para que se cumpla la igualdad, por lo que incrementaremos el valor de x Si $x=10, entonces\ 3*10\neq 18$ $30\neq 18$ Vemos que nos passamos, tenemos que tomar valores más pequenos para la incógnita, entre 5 y 10.

La construcción del significado de referencia que hemos presentado para las ecuaciones de primer y segundo grado en la educación secundaria, nos servirá de insumo para realizar la identificación de conocimientos didácticos matemáticos en los dos capítulos siguientes. Pues, se describen los objetos primários que están asociados a las ecuaciones; como por ejemplo aquellas situaciones intramatemáticas y extramatemáticas que permiten avanzar progresivamente en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Por ello, la importancia de los elementos del marco teórico utilizados en nuestro trabajo.

CAPITULO IV: CONOCIMIENTO DIDACTICO MATEMATICO QUE DEBE MANIFESTAR EL PROFESOR EN RELACION A LAS ECUACIONES.

Para la identificación del conocimiento Didáctico Matemático que debe poseer el profesor en relación a las ecuaciones, en el trabajo de Godino (2009) se presentan unas consignas correspondientes a la faceta epistémica que están asociadas al conocimiento del contenido (común, especializado y avanzado) que habíamos descrito en nuestro marco teórico para la interpretación del Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático de Godino (2009), realizado por Aké (2013) respecto a la faceta epistémica.

Faceta epistémica	Consigna
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Figura 34: Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)
Fuente: Godino (2009, p. 25)

Dichas consignas nos van a permitir realizar la descripción del conocimiento didáctico matemático que debe manifestar el profesor para la enseñanza de las ecuaciones lineales y cuadráticas en la educación secundaria, al igual que el análisis realizado en el capítulo anterior para la construcción del significado de referencia.

4.1 EN RELACION AL CONOCIMIENTO COMUN

El profesor debe ser capaz de identificar los conocimientos que se requieren para resolver una tarea sobre ecuaciones, tales como: Operaciones básicas entre los números reales, expresiones algebraicas, operaciones con polinomios, propiedades de los números reales y de la expresiones algebraicas, productos notables, factorización, teoría de ecuaciones, solución de una ecuación, métodos de solución de una ecuación.

4.2 EN RELACION AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO

El profesor debe ser capaz de reconocer la tipología de los seis objetos matemáticos primarios en relación al contenido de las ecuaciones o en particular en el desarrollo de una tarea sobre ecuaciones en educación secundaria. Es decir, tendrá que identificar cuál es el lenguaje, la definición, las situaciones, procedimientos, propiedades y argumentos que están vinculados a la enseñanza de este contenido. Eso implica que en la tabla 8 de manera concreta estableceremos los indicadores del conocimiento especializado que debe manifestar el profesor; y cuyas especificaciones surgen a partir de los objetos primarios encontrados en la descripción de los textos, investigaciones y de manera sintetizada en el significado de referencia de las ecuaciones.

Tabla 8: Indicadores del conocimiento didáctico matemático especializado en relación a las ecuaciones.

INDICADORES	ESPECIFICACIONES
Identifica los lenguajes que se utilizan para representar las ecuaciones de primer y segundo grado.	- Identifica el lenguaje verbal que se utiliza para hacer la representación de una ecuación en términos y expresiones relacionadas al signo igual, así como a los polinomios, sucesiones y proporcionalidad. - Identifica el lenguaje simbólico literal que emplea números y letras para la representación de una ecuación.
Identifica los conceptos que se ponen en juego para el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado.	- Identifica los conceptos previos que se requieren para abordar el contenido de las ecuaciones. - Reconoce las diferentes representaciones (verbal o simbólica) que se emplean para

	definir a una ecuación de primer o segundo grado, así como los conocimientos presentes para dar solución a las ecuaciones: ecuaciones equivalentes, el conjunto solución de una ecuación.
Identifica los tipos de situaciones que involucran resolver ecuaciones de primer y segundo grado.	- Reconoce problemas en contextos matemáticos sin conexiones a otros campos, en el que se trabajen ejercicios descontextualizados. - Reconoce problemas en contextos matemáticos que requieren conexiones con otros campos, como el de las funciones, el de la aritmética, el de la geometría, en el que se movilicen a otros objetos matemáticos. - Reconoce problemas en contextos extrramatemáticos que requieren conexiones con otras áreas, como el de la física, economía. - Reconoce problemas que para abordar su solución siguen una determinada estructura e involucran a las mismas propiedades. Por ejemplo procesos de generalización o particularización.
Identifica los diferentes procedimientos que se emplean para la resolución de una tarea sobre ecuaciones.	- Reconoce los procedimientos intuitivos que se emplean para la solución de una ecuación - Reconoce los métodos formales que se emplean para resolver una ecuación de primer o segundo grado, en función a la forma algebraica en que se presente.
Identifica las propiedades que se ponen en juego en la resolución de una tarea sobre ecuaciones.	- Reconoce las propiedades o teoremas que están inmersas de manera implícita en la solución de un problema o ejercicio. Es

	decir, distinguir qué propiedades se han usado para ir de un paso al otro.
Identifica los argumentos que justifican las resoluciones que realizan los estudiantes en relación a las ecuaciones.	- Discrimina en las resoluciones de los problemas si se está usando razonamiento deductivo o inductivo. - Explica en qué consiste cada uno de estos razonamientos.

4.3 EN RELACION AL CONOCIMIENTO AVANZADO (AMPLIADO)

- El profesor debe ser capaz de identificar en las soluciones de tareas sobre ecuaciones que se resuelven por tanteo numérico, inducción numérica o propiedades, qué conocimientos matemáticos justifican o generalizan dichos procesos de solución.
- El profesor debe ser capaz de identificar en otros campos que movilizan a otros objetos matemáticos las ecuaciones de primer y segundo grado que están presentes en los problemas de modelización, como es el caso del campo de la geometría al trabajar con figuras en el plano cartesiano: triángulos, rectángulo, cuadrados, etc.
- El profesor debe ser capaz de establecer la conexión del tema de las ecuaciones lineales y cuadráticas con temas más avanzados, en los que se hace necesario plantear o resolver ecuaciones que contengan incógnitas para dar solución a un problema. Así tenemos: Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

  Debemos mencionar que los ejemplos que a continuación desarrollamos son parte del conocimiento avanzado y no del especializado, porque en este tipo de tareas el profesor conecta los conocimientos matemáticos necesarios del contenido común para resolver ecuaciones de primer y segundo grado que le permitirán resolver tareas en temas más avanzados que se estudian en grados superiores al que en este trabajo estamos abordando.

  Así, en el caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, si se opera de forma algebraica, por los métodos de reducción, sustitución o igualación, se deberá llegar a una ecuación lineal que permitirá dar solución al problema.

  Por ejemplo:

  Resuelva: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$

De cada ecuación, despejamos x: $x = \frac{13-2y}{3}$; $x = \frac{9+3y}{5}$

Luego, las igualamos: $\frac{13-2y}{3} = \frac{9+3y}{5}$

$$65 - 10y = 27 + 9y \rightarrow 38 = 19y$$

Con lo cual: $y = 2$. Y reemplazando en una de las ecuaciones, obtenemos: $x = 3$.
Por lo tanto: $C.S = \{(3;2)\}$

Y en el caso de los sistemas de ecuaciones no lineales con dos variables, en particular, para determinar el conjunto solución de: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ y^2 + x = -1 \end{cases}$ se deberá llegar a una ecuación cuadrática.

Utilizamos el método de sustitución y de la primera ecuación despejamos x: $x = 1 - 3y$
Luego, lo reemplazamos en la segunda ecuación: $y^2 + (1 - 3y) = -1 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

$$(y-1)(y-2) = 0 \rightarrow y = 1 \vee y = 2$$

Como sabemos, que las soluciones de los sistemas de ecuaciones con dos variables son de la forma $(x;y)$, debemos hallar el valor de x, para cada uno de los valores encontrados de y.

$$x = 1 - 3y: \; y = 1 \rightarrow x = -2$$
$$y = 2 \rightarrow x = -5$$

Por lo tanto: $C.S = \{(-5;2), (-2;1)\}$

También, debemos aclarar que los conocimientos que hemos descrito corresponden a la faceta epistémica; ahora presentaremos el conocimiento didáctico matemático que debe poseer el profesor asociados a la faceta ecológica en relación a las ecuaciones, teniendo en consideración las consignas (figura 40) correspondientes a dicha faceta que están asociadas al conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares que habíamos descrito en nuestro marco teórico para la interpretación del Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático de Godino (2009), realizado por Aké (2013) respecto a la faceta ecológica.

Faceta ecológica	**Consigna**
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Figura 35: Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares
Fuente: Godino (2009, p. 27)

Para ello, de igual forma que en la faceta epistémica nos guiaremos del significado de referencia de las ecuaciones y del Diseño Curricular Peruano.

Estos conocimientos didácticos matemáticos que corresponden a la faceta ecológica son:

- El profesor debe ser capaz de identificar cuáles son los temas estudiados previamente en el Currículo Nacional, que se relacionan con la noción de ecuaciones.
- El profesor debe ser capaz de explicitar las conexiones con otros temas de estudio en matemática, como el de la funciones, sucesiones para movilizar al objeto algebraico de las ecuaciones mediante el planteamiento de problemas.
- El profesor debe ser capaz de explicar las conexiones de las ecuaciones con otros campos del programa de estudio, como el de la física, en el que se movilice a dicho objeto algebraico como parte de la situación que se plantee.

Debemos mencionar que los tres ítems que hemos presentado están en función del Currículo Nacional 2016, que es con el que trabajamos para nuestro estudio. Sin embargo creemos que es importante considerar en futuras investigaciones a todos los documentos oficiales del Perú, debido a que permitiría tener mayores alcances sobre todo en las fortalezas y deficiencias de estos documentos en contraste con el significado institucional de referencia que elaboramos para las ecuaciones.

Dado que en nuestro marco teórico hemos considerado además necesario que el profesor reconozca los niveles de algebrización, lo que también está contemplado en el conocimiento especializado del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático para la faceta epistémica, en el siguiente capítulo se hará una descripción detallada de cuáles deben ser los conocimientos que debe tener un profesor para propiciar el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

CAPITULO V: CONOCIMIENTO DIDACTICO MATEMATICO DEL PROFESOR PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN RELACION A LAS ECUACIONES.

Teniendo en cuenta, que desde el EOS, se considera para la variable contenido didáctico en la faceta epistémica no solo al reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, generalización, modelización), sino también al reconocimiento de niveles de algebrización" (Godino et al, 2015). En este capítulo trataremos de identificar cuáles son esos conocimientos Didácticos Matemáticos que el profesor debe poseer para promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental a lo largo de la escuela secundaria, en relación a las ecuaciones.

Dichos conocimientos, se deberán complementar con los que ya hemos descrito en el capítulo anterior respecto al reconocimiento de los objetos algebraicos, para que el profesor alcance su práctica matemática ideal.

Pues se hace evidente que la identificación de los seis objetos primarios, le permitirán realizar la organización didáctica de un contenido, o en particular, de las soluciones que desarrollan sus estudiantes para una tarea propuesta, y de esa forma tome acciones que fortalezcan las deficiencias que observa al ejecutar dicho análisis. Por ejemplo, reconociendo tareas que para su resolución utilizan propiedades de los números reales o agrupando situaciones que involucre resolver problemas sobre triángulos rectángulos.

Para el reconocimiento de los procesos algebraicos y niveles de algebrización nos enfocaremos en los dos siguientes aspectos:

- En primer lugar, el profesor tiene que reconocer qué tareas demandan de los procesos algebraicos de generalización, unitarización y simbolización que se definen desde el EOS para promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Para ello debe empezar reconociendo que tipo de tareas se pueden resolver usando aritmética, aritmética o ecuaciones o exclusivamente ecuaciones**.** Así por ejemplo:

  <u>Tareas que se resuelven usando aritmética.</u>

  A la edad que tiene María se le multiplica por 5, y a este resultado se le agrega 3. Si al dividir esta última suma entre 2 se obtiene 19. ¿Cuál es la edad de María?

En este caso, para su resolución se puede partir de la cantidad final la cual se conoce que es de 19. Y luego realizar operaciones inversas sucesivas. Es decir a 19 se le multiplica por 2, y a ese resultado se le resta 3 y finalmente se divide entre 5 para obtener la edad de María.

Edad de María $= [(19 \times 2) - 3] \div 5 = 7$

Podemos indicar que este problema no es apropiado para una clase de ecuaciones, en la cual el logro de la sesión es que los estudiantes aprendan a resolver ecuaciones introduciendo la incógnita x, pues podrían optar por resolver el problema aritméticamente, que representa para ellos un camino más sencillo, dado que son conocimientos con los que están familiarizados desde la primaria.

Tareas que se resuelven con aritmética o ecuaciones.

En la progresión aritmética siguiente, calcula el lugar que ocupa el último término escrito.

$4;\ \ 6;\ \ 8; \dots\dots..; 30$

Solución.

$6 - 4 = 2$

$8 - 6 = 2$

.
.
.

Es aritmética con $r = 2$

Una vez que determina la razón aritmética, reemplaza en la fórmula general que le permitirá encontrar al último término de la sucesión.

$$4;\ \ 6;\ \ 8; \dots\dots..; 30$$

$$a_1;\ \ a_2;\ \ a_3; \dots\dots..; a_n$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$$

Y resuelve de manera algebraica la ecuación.

$$30 = 4 + (n-1).2$$

$$30 = 4 + 2n - 2$$

$$30 = 2n + 2$$

$$28 = 2n$$

$$14 = n$$

Respuesta: El lugar que ocupa el 30 es el 14.

Podemos observar que para este tipo de tareas, el alumno realiza cálculos aritméticos, para encontrar una determinada constante (razón aritmética) y así reemplazar en la fórmula del término general de una progresión aritmética. Por lo que en base al contexto el profesor debe identificar las tareas que son adecuadas al contenido que involucra resolver ecuaciones. (Para este ejemplo, se encuentra asociado el proceso de particularización).

<u>Tareas que se resuelven con ecuaciones.</u>
En la investigación de Posadas (2013, p.13) plantean el siguiente problema: "*Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2. Halle los catetos de este triángulo*"

En este caso para su resolución, se les sugiere que si un cateto mide x cm, el otro medirá $18 - x$ cm. Esto es, porque para su resolución será necesario trabajar con ecuaciones cuadráticas, obligando a los estudiantes a adquirir este conocimiento pues es el camino que los guiará a dar solución al problema. Por lo que tendrán que aprender ecuaciones de segundo grado y sus métodos de resolución, avanzando así en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Debido a que, el estudiante en su solución tendrá que representar de manera simbólica literal el área, obteniendo una ecuación de segundo grado. En este ejemplo, se encuentran asociados el proceso de simbolización y materialización.

- En segundo lugar, el profesor tiene que reconocer en las soluciones que brindan sus estudiantes como respuesta a una tarea los rasgos algebraicos que hay en dicha solución (generalización, simbolización, etc.) para tomar decisiones de cómo hacerlo progresar en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental**.** Así por ejemplo:

En la investigación de Godino et al (2015) se explicita un ejemplo en relación a las ecuaciones para la comprensión de los tres niveles de algebrización descritos por Godino et al (2014), en el que se enfatiza a las características esenciales de estos niveles y a los objetos extensivos e intensivos que intervienen en cada una de las soluciones propuestas.

Por lo que en nuestro trabajo vamos a describir las características de los niveles de algebrización que están presentes en las soluciones de tareas sobre ecuaciones, teniendo como base el ejemplo antes mencionado. Así tenemos en la tabla 9.

Tabla 9: Características de los niveles del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones de primer y segundo grado.

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
0	Opera con números particulares de manera aritmética. Resuelve ecuaciones planteadas con espacios en blanco. Determinar el valor de la variable aislada en uno de los miembros de la ecuación. Por ejemplo: Determinar el valor numérico de $E = 5 - 2 \times 4 + 2^2$ Proceso algebraico: particularización.
1	Opera con números particulares, aplicando propiedades y relaciones de las operaciones numéricas que le permita identificar regularidades. Resuelve problemas de ecuaciones planteadas verbalmente por medio de operaciones inversas. (no plantea ecuaciones utilizando simbología algebraica) Proceso algebraico: generalización.
2	Resuelve ecuaciones en donde interviene simbología algebraica, haciendo uso de las propiedades numéricas. No se opera con las variables. Proceso algebraico: Simbolización.
3	Resuelve ecuaciones en donde interviene simbología algebraica, haciendo uso de las propiedades numéricas y de las propiedades de las expresiones algebraicas. Se opera con las variables. Proceso algebraico: Simbolización.

Con la guía de estos indicadores que hemos desarrollado para los niveles del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones; realizaremos la descripción de algunas tareas seleccionadas de textos escolares del Perú de nivel secundario para ejemplificar la potencialidad de dichas tareas por medio del reconocimiento de las características algebraicas de generalización, particularización y simbolización, que permita a los profesores identificar en la solución de una tarea a estos cuatro niveles de algebrización.

Debemos aclarar que de ser necesario se agregarán unos ítem previos a la consigna de la tarea para que se ponga en evidencia a los niveles de algebrización que esperamos estén presentes en las tareas sobre ecuaciones para la evolución del razonamiento algebraico elemental.

TAREA 1

En el texto didáctico de Matemática 1 de secundaria (Perú, 2016, p. 85), se tiene la siguiente situación problema:

¿Qué número al restarle 3 da como resultado $\frac{5}{8}$?

En el texto se presenta la siguiente solución:

Llamemos x al número que buscamos.

- $x - 3 = \frac{5}{8}$ $\quad$ $x - 3 + 3 = \frac{5}{8} + 3$ $\quad$ $x = 3\frac{5}{8}$

El número que al restarle 3 da como resultado $\frac{5}{8}$ es $3\frac{5}{8} = \frac{29}{8}$

Comprobemos que la solución es correcta.

$$\frac{29}{8} - 3 = \frac{5}{8}$$

$$\frac{29}{8} - \frac{24}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$$

Consideramos que para plantear simbólicamente lo que está escrito literalmente, los estudiantes tienen que entender el orden entre el número desconocido y las otras dos cantidades numéricas que intervienen, lo que hace que de manera implícita identifiquen a través de casos particulares la regularidad que les llevará a plantear el enunciado del problema. Es decir está presente en dicha solución el nivel 1 de algebrización. Luego:

Si en la solución de la tarea 1 un estudiante que tiene dominio en el tema de las fracciones reescribe al 3 como $\frac{24}{8}$, reemplazará un número que satisfaga la diferencia en el numerador de las fracciones, para que la igualdad entre las fracciones homogéneas se cumpla; es decir solo hará uso de números particulares: objetos intensivos.

Sin embargo, si tiene dificultades para plantear dicho razonamiento, deberá operar entre los números de un extremo de la ecuación al otro, pero no operará con la variable. Para ello, empleará propiedades de los números reales (nivel 2 de algebrización).

En estos procesos mencionados no se ha operado con la variable por lo que sugerimos modificar la tarea de tal manera que se admitan en la solución de la tarea los cuatro niveles de algebrización.

Problema de la tarea 1 adaptado.

Determine un número que al restarle 3 dé como resultado: a. Cinco. b. Cinco octavos. c. Cinco octavos del número.

En base a la adaptación realizada, consideramos que si un profesor plantea esta forma de presentación de la tarea a sus estudiantes obligará aquellos que buscan dar solución de manera aritmética a un problema, a buscar otro camino, sobre todo en el inciso (c) que le permita determinar el número desconocido y así empiece en el desarrollo de su razonamiento algebraico elemental.

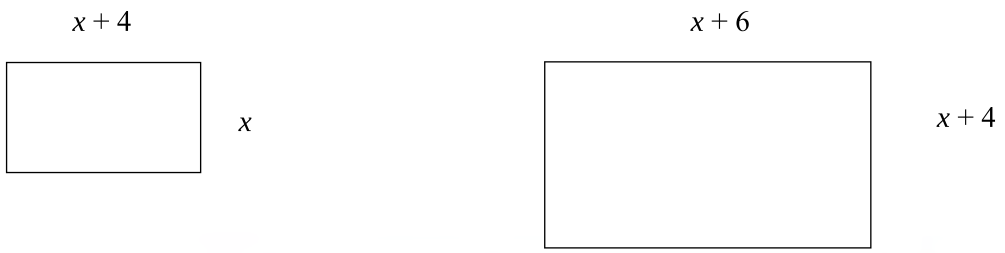
TAREA 2

En el texto didáctico de Matemática 3 de secundaria (Perú, 2016, p. 89), se tiene la siguiente situación problema:

Se sabe que el largo de un terreno rectangular es 4 metros mayor que el ancho. Además, si el ancho aumenta en 4 metros y el largo en dos metros, el área se duplica. Calcula el área original del terreno ()

Para este problema, en el texto se presenta la siguiente solución:

- Representamos gráficamente y expresamos las dos áreas:



$x(x + 4)$ representa el área original.

$(x + 6)(x + 4)$ representa el área nueva.

- El área nueva es el doble del área original:

  $(x + 4)(x + 6) = 2.x(x + 6)$

  $x^2 + 10x + 24 = 2x^2 + 8x$

  Reducimos términos semejantes e igualamos a cero.

  $x^2 - 2x^2 + 10x - 8x + 24 = 0$

  $-x^2 + 2x + 24 = 0$

  Multiplicamos todos los términos por -1 para obtener una ecuación equivalente con x^2 positivo. Luego, factorizamos.

  $x^2 - 2x - 24 = 0$

  $(x - 6)(x + 4) = 0$

  $x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 6$

  $x + 4 = 0 \rightarrow x_2 = -4$

Por lo tanto: $x_1 = 6 \vee x_2 = -4$

Como se trata de longitudes solo consideramos al valor positivo 6.

- Calculamos el área original: $6.(6 + 4) = 6.10 = 60$

El área original del terreno es de 60 metros cuadrados.

En función a la resolución que se muestra para el problema, consideramos que el profesor reconocerá en las respuestas de los estudiantes los rasgos característicos de los cuatro niveles de algebrización descritos en la tabla 2 para las ecuaciones.

Así tenemos:

Nivel 0 de algebrización: aparece cuando opera con números particulares al reemplazar el valor obtenido para x en la expresión área original, realizando operaciones entre dos números para determinar el área.

Nivel 1 de algebrización: está implícito al inicio de la resolución, pues para determinar la expresión área original $x(x + 4)$, es necesario un razonamiento que involucra evalúe casos particulares que le lleven a encontrar uma regularidad para escribir la expresión área original; y luego la expresión área nueva.

Nivel 2 de algebrización: aparece después de hacer la factorización de la expresión cuadrática, para determinar los posibles valores de la variable, opera con ecuaciones de la forma $x + A = B$ (no realiza operaciones con la variable).

Nivel 3 de algrebrización: aparece cuando plantean la relación entre el área nueva y el área original que se expresa en el problema, operando con la variable.

Por lo expuesto, este problema es apropiado para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, sin embargo será más sencillo de evaluar, si es que se le agregan algunas preguntas previas que orienten a la solución del problema original.

Problema de la tarea 2 adaptado:

El largo de un terreno rectangular es 4 metros mayor que el ancho. Si se sabe que el área del terreno se duplica cuando el ancho aumenta en 4 metros y el largo en dos metros. Determine:

a. La expresión algebraica que representa al área original del terreno.
b. La expresión algebraica que representa al área nueva del terreno.
c. La relación entre el área nueva y el área original. Represente simbólicamente.
d. El área original del terreno.

A partir de las características de los niveles de razonamiento algebraico elemental que hemos establecido para las ecuaciones de primer y segundo grado, y las tareas que hemos presentado teniendo en consideración a los procesos algebraicos de generalización, unitarización y simbolización que el profesor debe reconocer en las soluciones planteadas por estudiantes al resolver problemas que están asociados a las ecuaciones de primer y segundo grado; establecemos los siguientes criterios con sus respectivos indicadores en la siguiente tabla.

Tabla 10: Criterios e indicadores del conocimiento didáctico matemática que debe manifestar un profesor para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

CRITERIOS	INDICADORES
Identifica tareas en los textos escolares que marquen la evolución del razonamiento algebraico elemental.	- Identifica que tareas no demandan de ningún rasgo algebraico en su solución. - Identificar que tareas contemplan los rasgos característicos de los niveles de algebrización en su solución.

Genera actividades para que los estudiantes reconozcan que ecuaciones de diferente solución, pero de la misma estructura, tienen un procedimiento de solución común.	- Identifica el modelo algebraico detrás de las ecuaciones para casos particulares. Así por ejemplo en el caso de : Ecuaciones lineales de la forma: $\begin{cases}2x+3=5x\\7x-3=2x\end{cases}$ corresponden al modelo $Ax+B=C$x. Ecuaciones cuadráticas de la forma : $\begin{cases}x^2-4=0\\3x^2=27\end{cases}$ corresponde al modelo $Ax^2+C=0$, para cuya solución se despeja el término independiente y el coeficiente que acompaña al término cuadrático pasa a dividir, para luego extrae la raíz cuadrada. Es decir: $x=\pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$, además de reconocer que para que la solución exista en los números reales $-\frac{C}{A}\geq 0$.
Modifica una tarea que corresponde al modelo $Ax+B=C$ en otra de la forma $Ax+B=C$x	- Reconoce el tratamiento que aplicaría a dicho objeto : $Ax+B=C$ para transformar la tarea a la estructura de la forma $Ax+B=Cx$ y se opere con la variable para su solución.
Genera actividades que le permita a los estudiantes identificar la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación cuadrática: $Ax^2+Bx+C=0$.	- Identifica qué relación deben cumplir los coeficientes de una ecuación cuadrática para que tenga solución en los números reales. Es decir: Identifica que una ecuación cuadrática que tiene dos soluciones reales cumple que $B^2>4AC$

	Identificar que una ecuación cuadrática que tiene una única solución real cumple $B^2 = 4AC$, (AC es siempre positivo) - Identifica qué relación deben cumplir los coeficientes de una ecuación cuadrática para que no tenga solución en los números reales. Es decir: Identifica que una ecuación cuadrática que no tiene solución real cumple que $B^2 < 4AC$

En base a lo que hemos presentado; podemos señalar que es fundamental incorporar estos conocimientos en la formación de los profesores para la realización de una buena práctica en la enseñanza de las ecuaciones en la secundaria, pues según Godino et al(2015) “el análisis didáctico focalizado en los objetos y procesos propios del pensamiento algebraico puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre las cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática” (p.129).

CONSIDERACIONES FINALES.

En el desarrollo de nuestro trabajo se ha evidenciado, a través de las descripciones que hemos realizado en función a los objetos que se asocian a las ecuaciones y los procesos algebraicos que se demandan en los tipos de soluciones que desarrollen los estudiantes como respuesta a una tarea; que la identificación del conocimiento didáctico matemático que deben manifestar los profesores no ha sido una tarea sencilla de abordar, pues se pone de manifiesto la complejidad del conocimiento didáctico matemático requerido para la enseñanza de las ecuaciones de primer y segundo grado en educación secundaria. Este va más allá de conocer cómo resolver ecuaciones para enseñarlas, dado que la solución de las ecuaciones corresponde tan solo al nivel inicial del "conocimiento común del contenido".

En ese sentido, se hace necesario la identificación de estos conocimientos en relación al contenido de las ecuaciones que permita al docente alcanzar su práctica ideal, ya que hay investigaciones que caracterizan al conocimiento didáctico matemático como importante en el ámbito de la formación de profesores.

Así, entre las conclusiones sobre qué conocimiento didáctico matemático debe manifestar el profesor y que nos habíamos propuesto identificar en los objetivos de esta investigación para el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico elemental en relación a las ecuaciones, se destacan los siguientes:

- Identifica los conocimientos que se requieren para la solución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica los lenguajes que se usan para hacer las representaciones de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los conceptos que se ponen en juego para el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los tipos de situaciones que involucran resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Identifica los diferentes procedimientos que se emplean para la resolución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica las propiedades que se ponen en juego en la resolución de una tarea sobre ecuaciones.
- Identifica qué conocimientos matemáticos justifican o generalizan los procesos de solución de tareas sobre ecuaciones de primer y segundo grado que se resuelven por tanteo numérico, inducción numérica o propiedades.
- Identifica en otros campos que movilizan a otros objetos matemáticos las ecuaciones de primer y segundo grado que están presentes en los problemas de modelización.

- Establece y explícita la conexión del tema de las ecuaciones lineales y cuadráticas con temas más avanzados de estudio en matemática.
- Identifica cuáles son los temas estudiados previamente en el Currículo Nacional, que se relacionan con la noción de ecuaciones.
- Reconoce en las soluciones que brindan sus estudiantes como respuesta a una tarea los rasgos algebraicos que hay en dicha solución (generalización, simbolización, etc.) .
- Identifica tareas en los textos escolares que marquen la evolución del razonamiento algebraico elemental.
- Genera actividades para que los estudiantes reconozcan que ecuaciones de diferente solución, pero de la misma estructura siguen un mismo procedimiento para determinar su solución.
- Modifica una tarea que corresponde al modelo $Ax + B = C$ en otra de la forma $Ax + B = Cx$
- Genera actividades que le permita a los estudiantes identificar la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación cuadrática: $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Con la identificación de estos conocimientos se confirma la riqueza del marco teórico elegido: EOS y el MODELO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO que propone Godino (2009). Dado que los elementos de dicho marco teórico como en el caso de los objetos primarios nos han permitido realizar la construcción del significado de referencia de las ecuaciones. Así también las consignas que se describen en la faceta epistémica y ecológica que son parte del MCDM, pues han sido de ayuda para la redacción de cada uno de los conocimientos anteriormente descritos, permitiéndonos distinguir entre los conocimientos que corresponden al conocimiento común, especializado y avanzado del contenido; así como los conocimientos correspondientes al diseño curricular nacional en la faceta ecológica.

Además, debemos señalar que para la propuesta del significado de referencia de las ecuaciones en la secundaria, el método de "análisis de contenido" ha sido pertinente para la observación de dicho contenido en los textos didácticos seleccionados. Ya que nos ha permitido identificar no solo a las ecuaciones de primer y segundo grado que se desarrollan en cada una de estas fuentes sino también en diversos temas a las tareas que se resuelven por ecuaciones.

De otro lado, consideramos que se debe resaltar la importancia de que los profesores reconozcan el tipo de tareas a presentar y modificar en función a las características algebraicas que se describen desde el EOS para los niveles de algebrización; las cuales se requiere aparezcan en las soluciones de dichas tareas, con el fin de que estás admitan soluciones de diferentes niveles de algebrización que permita promover el desarrollo del razonamiento algebraico elemental en la escuela secundaria.

De lo anteriormente expuesto, creemos que este trabajo tiene significancia tanto para una propuesta de formación de profesores como de desarrollo profesional, siendo útil para quienes estén interesados en la realización de cursos o talleres para profesores en formación inicial y continua respecto al contenido de las ecuaciones o para futuros investigadores que continúen en la identificación del conocimiento didáctico matemático en relación a otros contenidos o para llevar a cabo la propuesta y aplicación de la misma en formación de profesores.

Puesto que, el insumo del significado de referencia institucional de las ecuaciones que hemos presentado en nuestro estudio y la identificación del conocimiento didáctico matemático en función a dicho contenido, servirá para realizar el contraste con el significado pretendido de las ecuaciones que están presenten en los textos escolares y los documentos curriculares peruanos, dándoles como resultado las ausencias, presencias, debilidades y fortalezas de nuestro diseño curricular; en consecuencia permitirá diseñar actividades que promuevan el razonamiento algebraico elemental para una enseñanza de calidad en bienestar de los estudiantes del país.

Referencias

Aké, T. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Artigue, Michèle; Douady, Régine; Moreno, Luis; Gómez, Pedro (Eds.). (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: una empresa docente

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Caro, R. (2016). *Matemáticas 2° de ESO*. Capítulo 9: *Álgebra*. Recuperado de: http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/ESO.htm

García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización: Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 71-90). Jaén: SEIEM

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Universidad de Granada, Universidad de Barcelona. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granda. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Godino, J. D., Rivas, M. Castro, W. y Konic, P. (2012).Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática,* 7 (2), 1-21.

Godino, J.D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M.R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema,* Rio Claro (SP), 26 (42), 483-511.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 285-294). Jaén: SEIEM.

Godino, J.D. (2013) Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y*

Combinatoria (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articuluación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, 127 - 150.

Hernández, R. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 3° A ESO*. Capítulo 5. *Ecuaciones y sistemas*. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/ESO.htm

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching algebra. En A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* pp. 11-49.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación,* 4, pp. 167-179

Leithold, L. (1998). *Matemáticas previas al cálculo*. México D.F. México: Editorial Oxford

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 2.* Segundo de Secundaria *Ministerio de Educación.* Lima. www.minedu.gob.pe

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Matemática 1.* Segundo de Secundaria *Ministerio de Educación.* Lima. www.minedu.gob.pe

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Matemática 3.* Tercero de Secundaria *Ministerio de Educación.* Lima. www.minedu.gob.pe

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2010). *Diseño Curricular Básico Nacional de Matemática*. Lima. Recuperado de http://siges-pedagogicos.pe/institutos/diseno-curricular-basico-nacional-de-matematica/

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria*. (Tesis de Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada

Taylor, S. & Bogdan, R. (1987*). Introducción a los métodos cualitativos*. Barcelona: Paidós. Recuperado de:http://mastor.cl/blog/wpcontent/uploads/2011/12/Introduccion-a-metodos-cualitativos-deinvestigaci%C3%B3n-Taylor-y-Bogdan.-344-pags-pdf.pdf

Solera, M. (2015). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del simbolismo algebraico y las ecuaciones primer grado*. Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/Tesis_master/TFM_MSolera.pdf

Sosa, L., Flores-Medrano, E., Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, pp. 173-189.