

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**  
**ESCUELA DE POSGRADO**



**PUCP**

**La Transnumeración: un estudio de la variación con profesores de  
matemática**

**Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas  
que presenta**

**Solangela Natividad López Huayhualla**

**Dirigida por**

**Dra. Katia Vigo Ingar**

**San Miguel, 2017**



**PUCP**



*A mi padre Jesús y mi madre Donatila, por enseñarme a perseverar y mirar la vida con entusiasmo aún en momentos difíciles.*

*A mi esposo, Luis, por su apoyo y comprensión en todo momento.*

*A mis hijos, Luis Ángel y Lorena Abigail, por ser quiénes con su presencia me animaron a seguir superándome.*

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por el regalo de la vida y la bendición de permitirme realizar esta hermosa y apasionante labor de enseñar.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por su ejemplo de dedicación y profesionalismo.

A mi asesora, Katia Vigo Ingar, por su amistad, paciencia y apoyo. Gracias a su orientación, así como su compromiso y dedicación, que me servirán de ejemplo, fue posible culminar esta investigación.

A las profesoras, Augusta Osorio Gonzales y Cileda de Queiroz e Silva Coutinho por motivarme a investigar en el campo de la estadística, así como sus correcciones y sugerencias para la culminar este trabajo.

A la profesora María José Ferreira da Silva, por sus correcciones y sugerencias para mejorar esta investigación.

A toda mi familia, en especial a mis padres y mi hermana Nelly, por apoyarme en los momentos que requería tiempo para cumplir esta meta.

A los profesores de la Educación Básica Regular, que formaron parte de esta investigación, quiénes gentilmente participaron y colaboraron con su valioso tiempo, reflexionando y compartiendo sus experiencias.

## RESUMEN

Debido a las dificultades identificadas en la enseñanza de la estadística respecto a la variación y sus medidas, la presente investigación aborda el trabajo con profesores de matemática, sobre los procesos de transnumeración, como parte del Pensamiento Estadístico, en el estudio de la variación en base a las nociones de la media y desviación estándar. Nuestro trabajo se orienta en los fundamentos teóricos de Wild y Pfannkuch (1999) y nos permitió responder a nuestra pregunta de investigación: *¿Cómo se presentan los procesos de transnumeración al desarrollar actividades sobre variación en profesores de matemática?*

Nuestra metodología de la investigación fue de tipo cualitativa, específicamente el estudio de caso. En la implementación de nuestras actividades participaron 14 profesores de matemática de la Educación Básica Regular (EBR) y se realizó en tres encuentros donde se trataron específicamente el gráfico de puntos, el estudio de la variación en uno y dos conjuntos de datos. De acuerdo a nuestros resultados, pudimos observar los procesos de transnumeración realizados por los profesores que los llevaron a comprender la variación y cómo el gráfico de puntos, mediante el software geogebra, les permitió movilizar diversas nociones estadísticas, más allá de realizar cálculos. Además de ello, pudimos constatar algunas concepciones y obstáculos de los profesores respecto a la enseñanza de la estadística.

**Palabras claves:** transnumeración, representación, variación, geogebra.

## ABSTRACT

Due to the difficulties identified in the teaching of statistics regarding variation and its measures, the present research deals with the work with teachers of mathematics, on the processes of transnumeration, as part of the Statistical Thinking, in the study of the variation in base to the notions of the mean and standard deviation. Our work is based on the theoretical foundations of Wild and Pfannkuch (1999) and allowed us to answer our research question: *How are transnumeration processes presented when developing activities on variation in mathematics teachers?*

Our research methodology was qualitative, specifically the case study. In the implementation of our activities, 14 teachers of mathematics of the Regular Basic Education (EBR) participated in three meetings, where the points chart was specifically treated, the study of variation in one and two data sets. According to our results, we were able to observe the processes of transnumeration carried out by the teachers that led them to understand the variation and how the point graph, through the software geogebra, allowed them to mobilize diverse statistical notions, beyond performing calculations. In addition, we were able to verify some conceptions and obstacles of teachers regarding the teaching of statistics.

**Key words:** transnumeration, representation, variation, geogebra.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la media aritmética .....	23
<b>Figura 2.</b> Gráficos convencionales representados en estadística .....	24
<b>Figura 3.</b> Algunos Contenidos de Estadística desarrollados en la formación de profesores ...	25
<b>Figura 4.</b> Ejemplo de diagrama de puntos para un conjunto de datos. ....	38
<b>Figura 5.</b> Ejemplo de diagrama de puntos de dos conjuntos de datos .....	39
<b>Figura 6.</b> Cálculo de la media en datos no agrupados .....	39
<b>Figura 7.</b> Ejemplo del cálculo de la media. ....	40
<b>Figura 8.</b> Ejemplo del cálculo de la media utilizando el diagrama de puntos. ....	40
<b>Figura 9.</b> Cálculo de la varianza de una muestra. ....	41
<b>Figura 10.</b> Definición de la desviación estándar de un conjunto de datos. ....	42
<b>Figura 11.</b> Cálculo de la varianza y su relación con la desviación .....	42
<b>Figura 12.</b> Manera en que la varianza muestral mide la variación mediante las desviaciones $x_i - x$ .....	42
<b>Figura 13.</b> Cálculo de la varianza muestral y de la desviación estándar muestral. ....	43
<b>Figura 14.</b> Definición de las medidas de tendencia central. ....	44
<b>Figura 15.</b> Ejemplo del cálculo de la media. ....	44
<b>Figura 16.</b> Ejemplo del cálculo de la media utilizando tabla frecuencias .....	45
<b>Figura 17.</b> Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la media. ....	46
<b>Figura 18.</b> Ejemplo de ejercicio sobre el concepto de dispersión. ....	46
<b>Figura 19.</b> Proceso de solución para identificar la menor dispersión de los datos. ....	47
<b>Figura 20.</b> Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la desviación estándar .....	47
<b>Figura 21.</b> Ejercicio de aplicación de relación entre la media y la desviación estándar. ....	48
<b>Figura 22.</b> Estándar de aprendizaje en el nivel 6 de la competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre. ....	49
<b>Figura 23.</b> Estándar de aprendizaje en el nivel 7 de la competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre .....	50
<b>Figura 24.</b> Representación esperada en base a las imágenes de las actividades que realizan las personas. ....	55
<b>Figura 25.</b> Representación construida por el Grupo 1 realizando el conteo de actividades. ....	55
<b>Figura 26.</b> Representación construida por el Grupo 1 mediante una tabla. ....	56
<b>Figura 27.</b> Representación construida por el Grupo 1 con las imágenes, sobre las actividades de las personas. ....	57

<b>Figura 28.</b> Representación construida por el Grupo 2 mediante un esquema. ....	58
<b>Figura 29.</b> Representación construida por el Grupo 2 con las imágenes, sobre las actividades de los personas.....	58
<b>Figura 30.</b> Representación esperada del gráfico de puntos sobre las actividades de las personas. ....	60
<b>Figura 31.</b> Representación construida por el Grupo 1 mediante barras. ....	61
<b>Figura 32.</b> Representación construida por el Grupo 1 mediante puntos.....	61
<b>Figura 33.</b> Representación construida por el Grupo 2 mediante puntos.....	62
<b>Figura 34.</b> Situación propuesta en la Actividad 02.....	65
<b>Figura 35.</b> Gráfico de puntos que se espera realicen los grupos sobre las estaturas de las estudiantes del 3° G. ....	66
<b>Figura 36.</b> Representación del gráfico de puntos y media realizada por el Grupo 2.....	68
<b>Figura 37.</b> Gráfico de puntos que se espera realicen los grupos mostrando los trazos en el valor de la media y mediana de las estaturas de las estudiantes del 3° G. ....	70
<b>Figura 38.</b> Representación construida de la media y mediana por el Grupo 1. ....	70
<b>Figura 39.</b> Representación construida de la media y mediana por el Grupo 2.....	71
<b>Figura 40.</b> Indicación del Grupo 1 en el gráfico de puntos sobre las tres estaturas más bajas del conjunto de datos. ....	73
<b>Figura 41.</b> Indicaciones de la mínima y máxima estatura reconocidas por el Grupo 2.....	74
<b>Figura 42.</b> Representación que se espera de los grupos sobre la media y mediana de las estaturas de las estudiantes del 3° G. ....	75
<b>Figura 43.</b> Modificaciones realizadas por Grupo 1 sobre las estaturas en la hoja de cálculo del Gráfico de Puntos. ....	75
<b>Figura 44.</b> Cambio de los valores de la media a partir de la modificación de los datos en la hoja de cálculo realizado por el Grupo 1. ....	76
<b>Figura 45.</b> Modificaciones realizadas por Grupo 2 sobre las estaturas en la hoja de cálculo del Gráfico de Puntos. ....	77
<b>Figura 46.</b> Situación propuesta en la actividad 03.....	80
<b>Figura 47.</b> Representación del gráfico de puntos sobre las notas de Pablo que esperamos que realicen los grupos. ....	81
<b>Figura 48.</b> Representación del gráfico de puntos sobre las notas de Raúl y Pablo que esperamos que realicen los grupos. ....	81

<b>Figura 49.</b> Representación visual de la media de las notas de Pablo que se espera que realicen los grupos.....	82
<b>Figura 50.</b> Representación visual de la media de las notas de Raúl que se espera que realicen los grupos.....	82
<b>Figura 51.</b> Representación visual de la media y la mediana de las notas de Pablo en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 1.....	83
<b>Figura 52.</b> Representación visual de la media y la mediana de las notas de Raúl en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 1.....	83
<b>Figura 53.</b> Ordenamiento de los datos realizado por el Grupo 1 para determinar la mediana.	84
<b>Figura 54.</b> Representación visual de la media y la mediana de las notas de Pablo en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 2.....	84
<b>Figura 55.</b> Representación visual de la media y la mediana de las notas de Raúl en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 2.....	85
<b>Figura 56.</b> Determinación de la media de las notas de Pablo y Raúl por el Grupo 2. ....	85
<b>Figura 57.</b> Ordenamiento de los datos realizado por el Grupo 2 para determinar la mediana.	85
<b>Figura 58.</b> Observación del Grupo 1 sobre las notas de Raúl excluyendo la nota más baja 13. ....	87
<b>Figura 59.</b> Respuesta del Grupo 2 en el ítem b.....	88
<b>Figura 60.</b> Comparación de los valores de la media y mediana de las notas de Pablo realizadas por el Grupo 2.....	89
<b>Figura 61.</b> Comparación de la media y mediana de las notas de Raúl realizadas por el Grupo 2. ....	89
<b>Figura 62.</b> Respuesta escrita por el Grupo 2 en el ítem c.....	91
<b>Figura 63.</b> Comparación de las desviaciones entre la menor nota y la media en las notas de Pablo y Raúl realizado por el Grupo 2 .....	91
<b>Figura 64.</b> Modificaciones realizadas por el Grupo 1 en las notas de Raúl. ....	92
<b>Figura 65.</b> Primera modificación realizada por el Grupo 2 en las notas de Raúl.....	93
<b>Figura 66.</b> Segunda modificación realizada por el Grupo 2 en las notas de Raúl.....	94



## LISTA DE TABLAS

**Tabla 1.** Resultado nacional de matemáticas en la ECE 2015 - Segundo de secundaria .....23

**Tabla 2.** Objetivos de las actividades del experimento..... 53



## ÍNDICE

<b>CONSIDERACIONES INICIALES</b> .....	11
<b>CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA</b> .....	13
1.1 Antecedentes.....	13
1.2 Justificación.....	20
1.3 Aspectos Teóricos .....	27
1.3.1 El Pensamiento Estadístico.....	27
1.3.2 La Trasnumeración .....	28
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación .....	31
1.5 Metodología de Investigación .....	31
1.5.1 Investigación Cualitativa .....	32
1.5.2 El Estudio de Caso.....	33
1.5.3 Procedimientos Metodológicos .....	35
<b>CAPITULO II: LA VARIACIÓN Y SU ANÁLISIS DIDÁCTICO</b> .....	37
2.1 La variación.....	37
2.1.1 El Gráfico de Punto .....	38
2.1.2 La media .....	39
2.1.3 La Varianza y Desviación Estándar.....	41
2.2 Análisis del libro de estadística .....	44
2.3 Análisis del Currículo Nacional de la Educación Básica .....	49
<b>CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS</b> .....	51
3.1 Escenario de la experimentación.....	51
3.2 Sujetos de investigación .....	51
3.3 Actividades de la experimentación.....	52
3.3.1 Criterios para la determinación de las actividades del experimento.....	52
3.3.2 Descripción y Análisis de las actividades.....	53
<b>CONSIDERACIONES FINALES</b> .....	97
<b>REFERENCIAS</b> .....	100
<b>ANEXOS</b> .....	103

## CONSIDERACIONES INICIALES

Cooper y Shore (2010) afirman que los profesores deben ser formados en la enseñanza de la estadística desde una perspectiva didáctica y sugieren que en el proceso de enseñanza se debe enfatizar la comprensión y percepción de qué es y de qué trata la variación. Por esto, la enseñanza de la estadística no debe limitarse a que el estudiante realice solamente la elaboración de tablas, su respectivo gráfico y el cálculo de medidas de resumen sin comprender la relación que hay entre estas representaciones de los conceptos estadísticos; sino que además de comprender la relación entre las diferentes nociones estadísticas, también debe percibir su relación con el contexto real, cercano y familiar a ellos.

Respecto a ello, debido a las dificultades identificadas en los estudiantes sobre la comprensión de las medidas de la variación y la interpretación de sus significados, decidimos investigar sobre ello, aunque en el desarrollo de nuestras actividades propuestas con los profesores surgió el trabajo con otros contenidos estadísticos, como la mediana.

En referencia a la enseñanza de la variación en la Educación Básica Regular, el establecimiento de los contenidos de estadística demanda que los profesores propicien el aprendizaje de la estadística considerando las capacidades cognitivas de los estudiantes y el diseño de actividades que propicien dicho aprendizaje. Sin embargo, algunos investigadores afirman que no todos los profesores tienen una formación didáctica en estadística, por lo que se termina enseñando estadística como un contenido más de matemática. (Batanero, 2000).

De este modo, nuestra investigación aborda el estudio de la variación con profesores de matemática basados en los procesos de transnumeración como parte del Pensamiento Estadístico. En este trabajo tratamos de aportar en el campo de la Didáctica de la Estadística y contribuir en la formación de profesores de matemática de la Educación Básica Regular (EBR) analizando dichos procesos que se presentan al desarrollar actividades sobre variación en base a las nociones de la media y la desviación estándar.

Como mencionamos, nuestra investigación está referida a la variación, por ello consideramos necesario la definición del término. Al respecto, Reading y Shaughnessy (2004) realizan la diferencia entre variabilidad y variación refiriendo que: “el término variabilidad se entenderá como la característica (variable) de la entidad que es observable, y el término variación significa la descripción o medición de esa característica” (citado en Makar y Confrey, p. 27). Sin embargo, en nuestra investigación no haremos distinción entre los términos.

Asimismo, nuestro objetivo de investigación, es analizar los procesos de transnumeración realizados por profesores de matemática al desarrollar una secuencia de actividades sobre variación. Por lo que, a lo largo de nuestra investigación, en el Capítulo 1 presentamos la problemática de la investigación, dentro del cual damos explicación de diversos estudios relacionados a nuestra investigación, la respectiva justificación, los aspectos teóricos que nos ayudará a comprender y formular nuestra pregunta de investigación, así como la metodología que nos orientará en el desarrollo de ello.

En el Capítulo 2, nos referimos a la variación y su respectivo análisis didáctico. Asimismo, en el Capítulo 3, explicamos el experimento propiamente y realizamos el análisis de los resultados. Luego presentamos las consideraciones finales, como producto de todos los procesos realizados en nuestra investigación.

Además de ello, cabe decir que la presente investigación forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación DIMAT de la Pontificia Universidad Católica del Perú y PEAMAT de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo – Brasil (PUC-SP) titulado: “Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEAMAT/DIMAT” y aprobado por la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).

## **CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA**

En este capítulo desarrollamos la problemática de nuestra investigación, abordando en los antecedentes, diferentes estudios relacionados con la enseñanza de la estadística que nos servirán para posicionar nuestro estudio entre las investigaciones ya realizadas dentro de esta línea. Posteriormente presentamos la justificación, los aspectos teóricos, la formulación de la pregunta, los objetivos de investigación y finalmente la metodología empleada en nuestro estudio.

### **1.1 Antecedentes**

En la presentación de las investigaciones revisadas, consideraremos el siguiente orden: la explicación de los objetivos generales de la investigación, el marco teórico empleado, la metodología, las dificultades identificadas que llevaron a realizar su investigación, algunos resultados, así como aportes y conclusiones, que son de interés para nuestro estudio.

El relación a ello, presentamos la investigación de Silva (2007), la cual comprueba la percepción de los profesores de matemática sobre la variación y la variabilidad en las etapas del ciclo investigativo del pensamiento estadístico, estableciendo previamente la diferencia entre los términos variabilidad y variación, basados en Reading y Shaughnessy (2004). El estudio se enmarca en los cinco niveles de razonamiento estadístico propuestos por Garfield (2002), los cuales, representan un modelo general del razonamiento estadístico.

La autora realiza su estudio con docentes debido a ciertas dificultades identificadas en los estudiantes, por ejemplo, la falta de entendimiento de los conceptos estadísticos para analizar los datos. En base a ello, la autora afirma que es necesario que el docente enseñe más que simplemente el cálculo de las medidas y la elaboración de gráficos; por el contrario el docente debe crear un ambiente en el cual se discuta el significado y aplicabilidad de las medidas y las representaciones estadísticas, relacionando principalmente esos conceptos. Así, la autora decide preparar a los docentes para lidiar con esas dificultades en los contenidos de estadística mediante una formación continua de profesores.

En relación a ello, el estudio de Silva se basa en la investigación – acción, formando parte nueve profesores de matemática de educación básica y dos estudiantes de matemática de la universidad de Sao Paulo, realizando dieciséis sesiones en su implementación. Inicialmente, Silva diagnosticó la ausencia de razonamiento sobre variación y efectivamente evidenció que durante la fase de sensibilización y planeación del ciclo investigativo del pensamiento estadístico, los docentes presentaron sólo el razonamiento de variabilidad.

En la implementación, Silva (2007) trabajó el razonamiento de variación en cuatro actividades propuestas: el análisis de una distribución de frecuencias simples, el análisis de representaciones de una variable continua, la interpretación de la media aritmética y la desviación estándar. En las actividades se promueven la discusión de los contenidos estadísticos de distribución de frecuencias con datos agrupados y no agrupados, sus representaciones gráficas, las medidas de tendencia central y dispersión. Estas actividades permitieron observar el razonamiento en cuatro de los siete aspectos del modelo epistemológico de Garfield y Ben – Zvi (2005), los cuales fueron: desarrollo de ideas intuitivas de variabilidad, descripción y representación de variabilidad, uso de variabilidad para realizar comparaciones y la consideración de variabilidad como parte del pensamiento estadístico.

Respecto a los resultados, la investigadora afirma que los profesores utilizan la investigación como metodología de enseñanza de la estadística, pero lo hacen de manera limitada, porque sólo trabajaban con la distribución de frecuencias y su respectiva representación gráfica, sin abordar el concepto de variación en su clase. Según la autora, esto se debe a que la variable utilizada era generalmente cualitativa, lo cual, no permitió utilizar las medidas de tendencia central y de dispersión en el análisis de los datos. Asimismo, se establece que en la implementación se observó que la utilización de una única variable no permitió realizar la comparación de grupos, dificultando el estímulo para comparar la variabilidad.

Silva presenta considerables aportes para la formulación de actividades desde una perspectiva didáctica de la estadística en la formación de docentes, abordando diferentes conceptos como la variación, la media, la desviación estándar y las representaciones gráficas, todo ello dentro del marco teórico del pensamiento estadístico y el razonamiento sobre la variación descrito anteriormente.

En esta misma línea de investigación, el trabajo de Novaes (2011) analiza las concepciones sobre los objetos de Estadística Descriptiva, tanto didácticas como de contenido, movilizadas por profesores de educación básica al organizar y realizar la gestión de las secuencias didácticas en estadística descriptiva. La investigación está enmarcada en los referentes de la Teoría de las concepciones y el modelo concepción, conocimiento y concepto (cKc) propuesto por Balacheff y Gaudin.

Se trata de una investigación cualitativa con el método estudio de caso, que le permite observar las actividades y procedimientos que realizan los profesores en su aula de clases. El

estudio se realiza con dos profesores de enseñanza básica, siendo uno de ellos del sector público y otro del sector privado, ambos pertenecientes al grupo Proceso de Enseñanza y Aprendizaje en Matemática (PEA – MAT) de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUC – SP).

Asimismo, la investigación de Novaes (2011) se estructura en cinco momentos: el primero abarca específicamente el proceso de enseñanza de Estadística y cuenta con la presencia de 17 profesores de educación básica durante un año de formación. En el segundo momento, se considera la parte didáctica, la preparación de actividades para estudiantes de la enseñanza fundamental, cuyas edades fluctúan entre los 7 y 14 años. En el tercer momento, se acompaña a un profesor en su aula de clase, para observar su actuación en ella, y finalmente en el cuarto momento, se destina a la formación en el uso de tecnologías para realizar la introducción de las primeras nociones relativas al Análisis Exploratorio de Datos.

De esta manera, en el análisis de los resultados se utilizó el modelo cK $\phi$  para identificar, describir y explicar las concepciones de los profesores, proporcionando bases teóricas que permitieron inferir, a partir de los datos recolectados, explicaciones cognitivas sobre las dificultades generadas al movilizar los conocimientos necesarios en el análisis exploratorio de datos que conducen a la comprensión del concepto de variabilidad.

Cabe decir, que entre los resultados de la investigación, se identificaron dieciséis concepciones, de las cuales tres se referían al conocimiento específico de estadística y trece al conocimiento didáctico. Entre ellas, se menciona el desconocimiento de la relación entre las medidas de tendencia central en distribuciones asimétricas, por la creencia de que esa relación entre las medidas sólo se cumple para las distribuciones simétricas. También se identificó la dificultad para discriminar cuándo es preferible utilizar algunas de las medidas en la representación de datos, y entender cuáles son los efectos de los valores atípicos sobre la media. Asimismo, la autora observa que es posible calcular la mediana, pero se descuida la interpretación de su significado y el análisis adecuado de los datos debido a la falta de situaciones contextualizadas en el proceso de enseñanza.

A partir de las interacciones y concepciones de los profesores, Novaes destaca importantes consideraciones en la construcción del concepto de variabilidad de los datos, por ejemplo, se establece que para ello se requiere el desarrollo crítico de los estudiantes mediante actividades contextualizadas elegidas con mucho criterio y cercanas a ellos, actividades que competen a los docentes y que comprende considerar el conocimiento didáctico de contenido y el

conocimiento de sus estudiantes, basándose en Shulman (2005). También señala la importancia de analizar los cuartiles, ya que permite a los estudiantes la visualización simultánea de posición y dispersión de datos. Además de ello, establece que la preparación del estudiante en realizar este tipo de tareas, también lo prepara para el análisis con otras medidas estadísticas, y que el desarrollo de estas habilidades puede contribuir a minimizar o superar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

Finalmente, Novaes (2011) muestra la importancia de una formación continua para profesores en la consideración de las concepciones didácticas y de contenido de los docentes en la enseñanza de la Estadística Descriptiva, las cuales son herramientas para la preparación de actividades en el análisis exploratorio de datos, considerando la variabilidad, las medidas de tendencia central y de dispersión, así como la influencia de los valores atípicos en el valor de la media.

Otra de las investigaciones revisadas es el de Freitas (2010), su estudio verifica el nivel de cultura estadística del profesor de la escuela básica e identifica la influencia del uso de un ambiente computacional en el desarrollo de los niveles de lectura gráfica y la alfabetización. El estudio es una investigación cualitativa, en el cual se utiliza el método de estudio de caso con dos profesoras de educación básica y se enmarca en la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesto por Duval (2003), Niveles de alfabetización Estadística de Shamos (1995) y los Niveles de Lectura y Comprensión Gráfica de Curcio (1994).

La autora fundamenta su estudio al concordar con otros investigadores sobre las dificultades que presentan los docentes en la enseñanza de la estadística; por ejemplo, explica que a pesar que los profesores reconocen la importancia y necesidad del análisis exploratorio de datos, ellos no lo realizan en sus clases y se restringen a las técnicas que enfatizan el uso de algoritmos, sólo el cálculo de medidas, sin importar el significado de los resultados obtenidos.

De esta manera, en la investigación se analizan las condiciones didácticas para el desarrollo de los niveles de alfabetización estadística, al trabajar con el software Fathom y los registros de representación semiótica de los objetos estadísticos. Además de ello, se estudian las consecuencias didácticas asociadas al uso del software en el conocimiento de contenido estadístico y didáctico de los profesores que laboran en la educación básica.

Respecto a los resultados, Freitas presenta que los profesores se encontraban entre los niveles de alfabetización funcional y científico, es decir se movilizaban adecuadamente los conocimientos estadísticos, pero no conseguían formalizar por no saber los términos



adecuados para expresar los conceptos estadísticos movilizados. Asimismo, afirma que es necesario establecer subniveles de la alfabetización estadística para caracterizar mejor el conocimiento de contenido estadístico que poseen los profesores. En los resultados también se evidencia que los docentes consideran necesario y ventajoso trabajar con el software, ya que permite trabajar simultáneamente con más de un registro de representación semiótica y favorece el desarrollo de la alfabetización estadística.

Como se ha explicado, Freitas (2010) realiza importantes aportes porque se basa en el trabajo con la alfabetización estadística, el uso de un software que resalta el trabajo de la interpretación de diferentes registros de representación semiótica, el análisis exploratorio de datos y la identificación de conocimientos didácticos y de contenido que deben considerar para formular actividades en una formación continua de profesores.

En esta misma línea de investigación el estudio de Sanoja y Ortiz (2013) caracteriza el Conocimiento Didáctico del Contenido estadístico del docente de primaria (CDC). Los investigadores, basados en los estudios de Shulman definen el (CDC), como la capacidad única que posee el docente para transformar el contenido y la didáctica que poseen, de manera que lo hagan suficientemente poderoso y adaptable a las diferentes capacidades y necesidades de los estudiantes. El estudio utiliza la metodología de tipo cualitativa y el diseño etnometodológico, centrándose en el análisis de los procesos y conocimientos que los docentes de primaria utilizan para enseñar Estadística.

En la implementación se utilizaron las técnicas de observación participante y entrevista conversacional. La observación participante se desarrolla en un “Taller de reflexión y discusión”; en el cual se exploran los componentes del (CDC) propuestos por Shulman (1987): los conocimientos de la enseñanza (estrategias, recursos y evaluación) y los conocimientos de la comprensión de los niños (actitud, dificultades y errores). También se aplicaron instrumentos de recolección de información: hojas de trabajo, cuaderno de notas, que permitió a los docentes reconstruir sus experiencias en su aula de clase cuando enseñaban el contenido de Estadística. La entrevista conversacional se realizó a través de diálogos abiertos e informales, antes y después de las sesiones del taller, y ello permitió obtener mayor información de los docentes sobre su accionar dentro del aula, así como el significado y razón que le otorgaban a cada una de sus acciones.

Los autores realizan la sistematización de la información obtenida mediante un proceso de categorización, en el cual se describe y compara cada categoría, buscando en ellos

características y propiedades que permitan identificar las dimensiones del (CDC): estrategias, recursos, evaluación, actitud, dificultad, errores y preparación académica; siendo ésta última una dimensión no contemplada en los supuestos a priori.

Además de ello, Sanoja y Ortiz (2013) logran mostrar que el docente de primaria no solamente requiere un conocimiento disciplinar de la estadística sino, también, una formación didáctica, para que en el proceso de enseñanza se logre fortalecer el pensamiento estadístico. Asimismo, los autores afirman que el docente emplea los libros de texto de matemática y el manual del docente como recursos para planificar la clase, pero que trae limitaciones en el proceso de enseñanza de la estadística, porque sus acciones en el aula representan un enfoque tradicional, cuyo objetivo de enseñanza es la transmisión de contenidos matemáticos y no enseñar a pensar estadísticamente.

Entre otra de sus observaciones se menciona que el docente considera que la parte afectiva del estudiante influye en su aprendizaje ya que a partir de ello se pueden identificar cuáles son los contextos de aprendizaje significativos al estudiante. Por ello, también se reconoce que la aplicación del método por proyectos vendría a ser un método de aprendizaje de agrado, motivador y enriquecedor para el niño, ya que genera una actitud positiva hacia al aprendizaje de la estadística. Los autores también afirman que los docentes muestran un profundo conocimiento sobre los errores y dificultades de los estudiantes, ante los cuales buscan estrategias de enseñanza para evitar, corregir o modificarlos; sin embargo, no se aprovechan estos errores o dificultades como oportunidades para enseñar.

Como hemos explicado, consideramos que los resultados mencionados en la investigación de Sanoja y Ortiz son relevantes, ya que la caracterización del (CDC) de estadística del docente orienta la formulación de un programa de formación de profesores en la enseñanza de la estadística, considerando cuán importante es el conocimiento del contenido de estadística y el conocimiento didáctico del contenido de ello, así como los escenarios para la innovación en el proceso de enseñanza, y fomentar el desarrollo del pensamiento estadístico.

Coutinho, Almouloud y Silva (2012) realizan el proyecto de investigación Proceso de Enseñanza y Aprendizaje en el desarrollo del Razonamiento Estadístico y Probabilístico (PEA- ESTAT) y como parte del proyecto identifican la percepción de la variabilidad de los profesores de los grados finales de la escuela primaria y secundaria cuando utilizan un ambiente computacional en el trabajo con gráficos estadísticos a partir de la articulación de las nociones de transnumeración y los registros de representación semiótica. En el estudio se

utiliza la metodología investigación-acción y se enmarca en las nociones de Transnumeración de Wild y Pfannkuch (1999), Pfannkuch (2008) y los Registros de Representación Semiótica de Duval (2003).

El estudio de Coutinho, Almouloud y Silva (2012) se realiza en base a dificultades expuestas en otras investigaciones referidas a la práctica docente en la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, se presenta la poca disposición de los docentes al enseñar estadística debido a que poseen pocos o escasos conocimientos didácticos para crear situaciones de aprendizaje y desarrollar una cultura estadística en los estudiantes. También se explica que la falta de concordancia entre lo que presentan los libros y otros recursos de los sistemas escolares, representan una dificultad, porque la mayoría de las actividades están basadas en el cálculo matemático y la lectura de gráficos, afirmando que ello no favorece el desarrollo del pensamiento estadístico y tampoco una cultura estadística en los estudiantes.

En el proceso de implementación los autores trabajaron con 5 profesores de matemáticas de los grados finales de la escuela primaria y secundaria, el cual comprende la construcción de un tutorial del uso del software Geogebra para el desarrollo del pensamiento estadístico, a partir de la movilización de más de un registro de representación semiótica. La investigación se realizó en varias fases y comprendió la organización de equipos de investigación, el diagnóstico y colección de datos, formulación de las actividades, entre otros.

En la fase que comprende la interacción con los docentes se identificaron dificultades en el proceso de enseñanza, lo cual de forma conjunta permitió idear posibles soluciones. En esta fase, se discutieron las ventajas didácticas que posee el software, por ejemplo se estableció que con el uso del geogebra se logra comprender los conocimientos de estadística y desarrollar conocimientos didácticos, por su naturaleza dinámica que permite la comprensión de la variación de los datos mediante el análisis de diferentes registros de representación semiótica en forma simultánea. Además de ello, se comprobó que otros cuadros estadísticos como el gráfico de columnas y el diagrama de cajas eran más simples para su construcción y manipulación.

Como hemos visto, Coutinho, Almouloud y Silva resaltan el papel fundamental del profesor en el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes y la necesidad de realizar investigaciones referentes a la formación de profesores. Asimismo, se realizan aportes en el trabajo con el Geogebra para la percepción de la variación mediante la construcción de

diferentes registros de representación, así como la concepción didáctica y de contenido de profesores en la enseñanza de la estadística.

En base a lo anterior, consideramos que las investigaciones revisadas y presentadas en nuestros antecedentes nos dan aportes para establecer nuestro foco de investigación, es decir, la formulación de nuestra pregunta de investigación, así como justificar y definir las bases teóricas que nos permitirán responder y realizar el análisis propio de los resultados. Asimismo, explicaremos en las próximas líneas los referentes tomados de cada investigación para nuestro estudio, presentando los criterios elegidos en la formulación de nuestras actividades que forman parte de la experimentación.

## **1.2 Justificación**

En relación a ello, presentamos la justificación de nuestra investigación basados en los estudios que forman parte de nuestros antecedentes, así como otros documentos formales de diferentes instituciones como el Ministerio de Educación (MINEDU) y el Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (IPNM) relacionadas con la enseñanza de la estadística en Perú.

Según Batanero y Díaz (2011), en la sociedad actual, el ciudadano se desenvuelve en un constante devenir de cambios, como consecuencia de los avances de la ciencia y la tecnología. Ante este desarrollo, la estadística juega un papel importante porque proporciona herramientas metodológicas para que el ciudadano analice la variabilidad, determine y comprenda la relación que se da entre variables y que a partir de ello sea capaz de diseñar experimentos que le permita mejorar sus predicciones y la toma de decisiones en cualquier situación que se encuentre.

Así también, Batanero y Díaz, Sanoja y Ortiz (2013) sostienen que en esta sociedad en constante cambio, el ciudadano se encuentra con muchas fuentes de información. Por ejemplo, en los diarios y las noticias se presentan diversas situaciones en tablas y gráficos estadísticos, los cuales presentan información sobre economía, deportes, educación, y otros, que requieren que el ciudadano tenga la capacidad para su lectura, análisis, interpretación y síntesis de dicha información.

Al respecto, Holmes y su equipo en el proyecto School Council Project ya desde los años 80, (citados en Batanero y Díaz), justifican que la estadística es un componente importante, presente y necesario en todos los niveles educativos, que debe ser desarrollado por las siguientes razones: (1) la estadística es una parte de la educación necesaria para toda persona

adulta, ya que requieren ser capaces de leer e interpretar tablas y gráficos estadísticos que frecuentemente se presentan en los medios de información; (2) es necesaria para continuar estudios posteriores, debido a que en varias profesiones se requieren tener conocimientos básicos de estadística; (3) el estudio de la estadística fomenta el desarrollo personal, porque promueve un razonamiento crítico frente al análisis de la información que pueda ser objetiva; (4) aporta herramientas para comprender mejor otras áreas del currículo, tanto de la educación básica como posterior, en la cual frecuentemente se presentan elementos estadísticos, tales como tablas, gráficos y conceptos estadísticos.

Como hemos visto, la enseñanza de la estadística es justificada por diversas razones, una de ellas por su relevante papel en el desarrollo integral de los estudiantes, ya que les permite desarrollar sus capacidades que le darán herramientas necesarias para hacer frente a las demandas de la sociedad actual. De esta manera, los profesores de las escuelas básicas tienen un papel importante en el desarrollo de su práctica de enseñanza de la estadística. Sin embargo, es en su enseñanza donde se ha identificado varias dificultades, por lo que no tendría sentido referirnos sobre la importancia que tiene aprender estadística si su implementación se termina enseñando como un contenido más de matemática, ya que no todos los profesores poseen una formación didáctica.

Al respecto, Ortiz (2011) afirma que: “En los últimos años, los investigadores y educadores estadísticos (Garfield y Ben- Zvi, 2008a) han propugnado por un cambio en la enseñanza de la estadística que permita transitar de una enseñanza basada en el aprendizaje de fórmulas, técnicas y procedimientos hacia una que propicie el desarrollo de la competencia, el razonamiento y/o el pensamiento estadístico.” (p.57). Asimismo, otros autores consideran importante y necesario la práctica de una enseñanza que lleve a los estudiantes a comprender cuál es la razón de estudiar estadística, cuál es el papel de la variación y su relación con el estudio de la estadística; en otras palabras, que los docentes y estudiantes sepan que la razón de estudiar estadística, es porque existe variación. (Wild y Pfannkuch; Makar y Confrey, 2005).

Por ejemplo, si surge la pregunta ¿cuánto miden los peruanos?, a lo mejor algunos recuerdan su estatura y mencionan 1.60m, pero quizás otra persona diría: “1.65m porque es mi estatura”, y posiblemente no estaríamos de acuerdo en establecer una sola respuesta en base sólo a “nuestra estatura”. Ante esto, surgiría la necesidad de preguntar por más estaturas, es decir, obtener más datos correspondientes sólo a una muestra, ya que no es posible preguntar a todos los peruanos; y una vez que tengamos más datos, surge la necesidad de procesarlos,

representarlos con un valor y establecer conclusiones sobre la estatura de un peruano, es decir, estaríamos haciendo un análisis estadístico. Ante esto, podríamos decir que debido a las diversas estaturas, es decir, a la variabilidad, surge la necesidad de los datos, y porque tenemos datos, es decir, diferentes estaturas, existe variabilidad. Por ello, volvemos a insistir que los docentes deben entender que la razón de estudiar estadística es porque existe variabilidad, lo cual, también debemos hacer comprender a nuestros estudiantes y formar parte en el estudio de la estadística.

Por otro lado, diversos estudios también afirman que los docentes deben ser capaces de desarrollar el pensamiento estadístico por ser un componente esencial en su aprendizaje. Existen varias dificultades en la enseñanza de la estadística, referidas al docente y al estudiante, entre las cuales se reconoce la necesidad que tiene el docente no sólo de los conocimientos disciplinares, sino también de una formación didáctica. (Silva, 2007; Novaes, 2011; Sanoja y Ortiz, 2013). Asimismo, Freitas (2010) afirma que los docentes utilizan la investigación como metodología de enseñanza de la estadística, pero sólo trabajaban con la distribución de frecuencias y su respectiva representación gráfica, sin abordar el concepto de variación en clase, lo cual limita un trabajo que podría enfocarse en el análisis exploratorio de datos y el desarrollo del pensamiento estadístico.

Asimismo, Novaes identificó en los docentes el desconocimiento de la relación entre media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, por la creencia de considerar que sólo se cumple para las distribuciones simétricas. También identificó la dificultad que presentaban los docentes para discriminar cuándo es mejor utilizar la media, mediana o moda en la representación de datos, así como para entender cuáles son los efectos de los valores atípicos sobre la media, atribuyendo que esto se debe a la falta de contextos en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido.

En Perú, en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2016a) encontramos los desempeños a lograr en la competencia – Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre – correspondientes a la educación básica secundaria. En el documento se establece que los estudiantes del nivel de secundaria deben ser capaces de recopilar, organizar y representar datos, así como calcular e interpretar el significado de las medidas de tendencia central, de dispersión y posición. También se considera que los estudiantes deben interpretar información de diversas fuentes, mediante diferentes representaciones de los datos estadísticos. A partir de ello, se espera que los estudiantes puedan plantear afirmaciones y conclusiones, así como

analizar un conjunto de datos correspondientes a una población dentro de un contexto determinado.

Es interesante y alentador observar que en la organización curricular (DCN, 2016a) se espera lograr de manera progresiva, contextualizada y completa que los estudiantes desarrollen a lo largo de la educación secundaria competencias en base a los contenidos de estadística. Es claro que se busca mejorar la calidad educativa e incrementar el aprendizaje de los estudiantes en el Perú, ya que los resultados obtenidos en la prueba de Evaluación Censal (ECE) aplicada a los estudiantes del segundo de secundaria en el 2015, no fueron tan alentadores.

Esta evaluación, cuyo instrumento ha sido diseñado y construido en base a los principios de validez, confiabilidad y diseño universal de evaluación, está orientada a identificar e informar en qué medida los estudiantes del segundo de secundaria están logrando los aprendizajes mínimos y fundamentales que se espera que desarrollen en base al currículo oficial. Sin embargo, los resultados demostraron que sólo el 9,5% de estudiantes se encuentra en un nivel de logro satisfactorio, el 12,7% se encuentra en proceso y el 77,8% se encuentra en un nivel de logro correspondiente a previo al inicio y en inicio. (Ver tabla 1)

**Tabla 1.** Resultado nacional de matemáticas en la ECE 2015 - Segundo de secundaria.

Año	Evaluación	Grado	Competencias	Previo al Inicio	En Inicio	En Proceso	Satisfactorio
2015	ECE 2015	SEGUNDO	MATEMÁTICA	37,6 %	40,2 %	12,7 %	9,5 %

Fuente: MINEDU. (2016b).

En consecuencia, surge la pregunta: ¿cuál es el motivo por el cual los resultados nacionales en la prueba de Evaluación Censal de Estudiantes (ECE - 2015) de segundo de secundaria la mayoría de estudiantes no se encuentra en el nivel de logro deseado satisfactorio? En referencia a la pregunta, presentamos como ejemplo el siguiente ejercicio propuesto en el libro de los estudiantes: (Ver figura 1)

**4.** La asistencia de pacientes a la clínica Carrión en pediatría por día fue:

Lunes: 25, martes: 30, miércoles: 32, jueves:  $x$ , viernes: 27, sábado: 20 y domingo: 19.

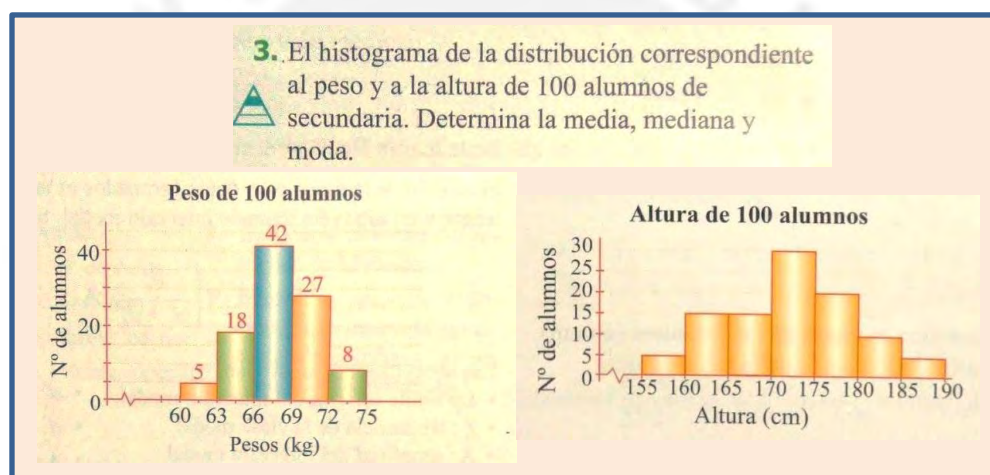
Además, se sabe que el promedio de pacientes fue 26. ¿Cuántos pacientes recibió el jueves?

**Figura 1.** Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la media aritmética

Fuente: Matemática 2°, 2012, p. 229

Como vemos en la figura 1 y considerando nuestra experiencia en la labor docente, hemos observado que en la mayoría de los casos las actividades propuestas por los docentes en el desarrollo de las clases no están enfocadas a lograr los desempeños establecidos actualmente en el DCN. Asimismo, se observa la falta de concordancia con lo que diversas investigaciones han propuesto para la enseñanza de la estadística. En la implementación del DCN, se observa el desarrollo de contenidos enfocado en el uso de técnicas y procedimientos algorítmicos para determinar las medidas de tendencia central, dejando de lado el significado de esa medida y la interpretación de los resultados según el contexto.

A continuación en la figura 2, se observa un ejemplo con el cual en la mayoría de los casos se enseña a construir representaciones convencionales y se desaprovechan las oportunidades de explorar, analizar y comprender la variación de los datos utilizando otras representaciones.



**Figura 2.** Gráficos convencionales representados en estadística  
**Fuente:** Matemática 3º, 2012, p. 226

En referencia a ello, hay diversas investigaciones en estadística, en las cuales, se establece que el gráfico de puntos, una forma de representar un conjunto de datos, puede llevar al estudiante a desarrollar nociones estadísticas sin la necesidad de fórmulas, ni procesos complejos y desalentadores, según lo afirman Batanero, Estepa y Godino (1991) y Chick (2004); por lo que debería ser parte del currículo en la formación docente.

Sanoja y Ortiz (2013) en sus estudios referidos al Conocimiento Didáctico del Contenido Estadístico del docente establecen la necesidad de poseer el conocimiento del contenido estadístico, pero también el conocimiento didáctico del contenido estadístico. Los docentes necesitan una formación didáctica que permita estudiar, organizar y adaptar esos contenidos estadísticos de acuerdo a los intereses y capacidades de los estudiantes. Por esta razón,



recurrimos a la revisión de uno de los sílabos de estadística de la formación docente del Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (IPNM), en el cual al revisar encontramos el estudio de varios contenidos estadísticos, cuyo desarrollo era establecido desde un punto de vista de la investigación, es decir, para aplicarlo en el procesamiento de datos dentro su investigación de pregrado, más no es establecido desde una perspectiva didáctica de la estadística para poner en las aulas. (Ver figura 3)

<p>Unidad II</p> <p><b>ESTADÍGRAFOS DE TENDENCIA CENTRAL, POSICIÓN Y DESVIACIÓN.</b> (Del 21 de setiembre al 16 de octubre)</p>	<p>□ Interpreta datos univariados de variables cuantitativas para llegar a conclusiones válidas de la información estadística obtenida, considerando el uso de estadígrafos y software.</p>	<p>□ Medidas de tendencia central. - Media, mediana, moda.</p> <p>□ Medidas de Posición - Cuartiles, <b>Deciles</b>, Percentiles.</p> <p>□ Medidas de dispersión. - Rango, varianza, desviación estándar, coeficientes de variación.</p>	<p>□ Cálculo e interpretación de estadígrafos de tendencia central usando software estadístico.</p> <p>□ Cálculo e interpretación de estadígrafos de posición y dispersión usando software estadístico.</p>
---	---	--	---

**Figura 3.** Algunos Contenidos de Estadística desarrollados en la formación de profesores  
Fuente: IPNM, 2015, p.2

Estos contenidos estadísticos presentados en la figura 3, se dictan en el VIII ciclo de la carrera docente, lo cual demuestra que los estudiantes de la carrera no llevan preparación alguna referida a la didáctica de la estadística.

Algunos estudios como el de Novaes (2011), Coutinho, Almouloud y Silva (2012), realizan importantes aportes sobre las consideraciones en la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, se establece que es necesario, pensar y desarrollar actividades contextualizadas elegidas con mucho criterio y cercanas a los estudiantes, algo referido al trabajo con proyectos. También se hace referencia al trabajo con las medidas de tendencia central y dispersión porque permite la visualización simultánea de posición y dispersión de los datos, llevando al análisis de la variación de los datos utilizando más de una representación, por ejemplo: tablas, gráficos, medidas, entre otros.

Respecto a ello, el estudio de Coutinho, Almouloud y Silva hacen referencia en base a sus resultados obtenidos, que el trabajo con múltiples representaciones utilizando el software Geogebra, permitió el desarrollo del pensamiento estadístico de los docentes, a partir de la movilización de más de una representación de un conjunto de datos. Algunas investigaciones, como la de Freitas (2010), afirman que la naturaleza dinámica del software permite el análisis de los gráficos estadísticos a partir de la variación de los datos de forma simultánea con más de un diagrama representado por una misma base de datos, logrando la profundización e

interpretación de los conocimientos de contenidos y didácticos. Además, se establece que el uso del software facilita que los docentes se den cuenta que es necesario y ventajoso trabajar simultáneamente con más de un registro de representación para el desarrollo del pensamiento estadístico.

Hasta aquí, en referencia a lo anterior, hemos mencionado diferentes procesos y conceptos importantes en la enseñanza de la estadística. Por ejemplo hemos establecido la importancia y la necesidad del desarrollo de los contenidos estadísticos, porque proporcionan al ciudadano herramientas metodológicas para mejorar su capacidad de realizar predicciones y tomar decisiones, así como la capacidad para la lectura, análisis, interpretación y síntesis de cualquier tipo de información. Sin embargo, recalamos que para ello es necesaria la implementación de actividades en las cuales se realice la exploración de datos dentro de una situación contextualizada, la producción, el cambio y la comprensión de las diferentes medidas y expresiones de un conjunto de datos.

Y justamente en referencia a ello, Wild y Pfannkuch (1999) dentro del pensamiento estadístico establecen un tipo de pensamiento, el cual se relaciona para lograr lo que actualmente demanda la enseñanza de la estadística, este tipo de pensamiento es denominado transnumeración. En particular, la transnumeración es definida por los autores como el proceso de “cambiar de representación para generar comprensión” (p.6), lo cual, involucra procesos de transnumeración que tienen lugar tanto al presentar resultados, como también en el proceso de la exploración o análisis de datos. Este aporte teórico para nosotros es de suma importancia, ya que resalta las diferentes formas de representar un conjunto de datos en el proceso de análisis de los mismos, generando mayor comprensión de los datos, en la medida que se va construyendo una nueva representación o realizando algún cambio en los datos. Cabe decir que, dentro de nuestro marco teórico, estas formas de representar están referidas las tablas, los gráficos, las medidas de resumen; por ejemplo las medidas de tendencia central, de posición, de dispersión, entre otros.

Entonces considerando esta importancia de las representaciones de un conjunto de datos por la oportunidad de provocar una mejor comprensión de éstos, también establecemos la utilización del geogebra, ya que es un software libre, dinámico, que posee ventajas cognitivas y permite trabajar de forma simultánea con varias representaciones de una misma base de datos y entre varios conjuntos de datos, además da lugar a explorar y generar comprensión de diversas nociones estadísticas (Batanero y Díaz, 2004; Coutinho, Almouloud y Silva, 2012).

Es por estas razones que nuestra investigación aborda el estudio de la variación con profesores de matemática basados en los procesos de transnumeración. Para ello, consideramos explicar en seguida los aspectos teóricos, tratando de asegurar la posterior comprensión de nuestra pregunta y objetivos de investigación.

### 1.3 Aspectos Teóricos

#### 1.3.1 El Pensamiento Estadístico

Wild y Pfannkuch (1999) en su estudio establecen la importancia de la investigación estadística porque sirve para ampliar el conocimiento del contexto, por ejemplo, en el campo de la medicina, la producción, la economía, entre otros; basándose en datos para tomar decisiones. Los autores afirman que:

“La investigación estadística se usa para expandir el cuerpo del conocimiento en “contexto”. Por lo tanto, el objetivo fundamental de la investigación estadística es el *aprendizaje* en la esfera del *contexto*.” (Wild y Pfannkuch, p.4)

De esta manera, en el campo educativo, podríamos decir que la enseñanza de estadística va más allá de enseñar a recolectar datos, construir tablas con sus respectivos gráficos, calcular las medidas de tendencia central o dispersión, sin realizar la reflexión de lo que significan dichas medidas, ni considerar simultáneamente el contexto y los datos o la información obtenida después de procesarlos. Por ello, basados en los autores consideramos que tanto los conocimientos como el conocimiento del contexto en el análisis estadístico son importantes. Así tenemos:

“...en la etapa de análisis se sugieren preguntas por el contexto del conocimiento en las que es necesario consultar los datos – lo cual temporalmente nos arroja a la esfera estadística – después de lo cual las características vistas en los datos nos impulsan de regreso a la esfera del contexto a contestar las preguntas *¿Qué está pasando?* y *¿Qué significa esto?*” (Wild y Pfannkuch, p.8)

En relación a ello, Wild y Pfannkuch consideran que para enseñar a los estudiantes a pensar estadísticamente no es suficiente basarse en la experiencia, es necesario contar con una base teórica que de sentido a la experiencia, por lo que los autores establecen que:

“La piedra angular de la enseñanza en cualquier área es el desarrollo de una estructura teórica con la cual darle sentido a la experiencia, para aprender de ella y transferir perspicacia, penetración y discernimiento a otros...se debe hacer una enorme cantidad de pensamiento estadístico antes aun de alcanzar esta etapa en el planeo entre la información contenida en los datos y el conocimiento del contexto a través de todo el proceso estadístico. (p.12)

En referencia a ello, es que los investigadores presentan un modelo en el cual identifican y organizan los tipos de pensamiento estadístico durante la indagación basada en los datos, los cuales son: el reconocimiento de la necesidad de los datos, la transnumeración, la variación, el razonamiento con modelos y el conocimiento del contexto.

Al respecto, según Wild y Pfannkuch (1999), se entiende que el tipo de pensamiento estadístico reconocimiento de la necesidad de los datos, se refiere a darse cuenta que la experiencia personal no es suficiente para realizar generalizaciones sobre el contexto y/o tomar decisiones, es considerado como un impulso estadístico en el inicio de la investigación estadística.

En seguida, la transnumeración es referida como la formación y el cambio de representaciones para mejorar la comprensión, el cual es nuestro foco de investigación y explicaremos con mayor detalle en las siguientes líneas. Respecto a la variación, Wild y Pfannkuch explican que es un tipo de pensamiento estadístico relacionado con el aprendizaje y la toma de decisiones en un contexto de incertidumbre.

Asimismo, el razonamiento con modelos estadísticos, está relacionado con el uso de modelos para pensar en ciertos aspectos de la investigación en forma genérica. Por último, la integración del conocimiento del contexto, conocimiento estadístico y síntesis, hace referencia a que las materias primas con que trabaja el pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información de los datos.

Como se ha explicado, enseñar a pensar estadísticamente a nuestros estudiantes, implica el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento. De esta manera, en nuestra investigación buscamos el desarrollo del pensamiento estadístico, basándonos específicamente en algunos procesos de transnumeración, en el estudio de la variación. A continuación, presentamos y explicamos la transnumeración, basados en los estudios de Wild y Pfannkuch, y Chick, Pfannkuch y Watson (2005).

### **1.3.2 La Trasnumeración**

En los últimos años, investigadores y educadores consideran que es necesario un cambio en la enseñanza de la estadística, una enseñanza basada en el razonamiento estadístico y el análisis de los datos orientada al desarrollo del pensamiento estadístico (Ortiz, 2011). Una enseñanza que lleve inicial y principalmente al estudiante a comprender cuál es el sentido de estudiar estadística, así como comprender que la variación es la razón de ser de su estudio (Wild y Pfannkuch; Makar y Confrey, 2005).

Wild y Pfannkuch (1999), afirman que: “El aprendizaje es mucho más que recolectar información, involucra la síntesis de nuevas ideas e información con ideas existentes e información en una comprensión mejorada.” (p.4). En referencia a ello, resaltamos dos enunciados que consideramos importantes, el primero, que el aprendizaje de la estadística involucra la recolección de datos, pero además de ello, también trata de “la síntesis de nuevas ideas” y la “información con ideas mejoradas”, los cuales son ideas centrales de la transnumeración.

En relación a ello, los autores también mencionan que la transnumeración está definida como “un proceso dinámico para cambiar representaciones que engendren comprensión” (p.6). De esta manera, este proceso dinámico comprende las acciones de capturar, crear, definir y realizar el cambio de medidas y representaciones, con el fin de buscar el significado y aprender acerca de los fenómenos observados. Además, cada nueva forma de representar los datos de una situación real ayudarían a conducir a nuevas comprensiones de ese sistema real, así como a la construcción de otras representaciones.

Chick, Pfannkuch y Watson (2005), señalan que si consideramos una situación real que buscamos entender, y un sistema, es decir una representación de la base de datos sobre esa situación real, el pensamiento transnumerativo ocurre por medio de:

- (1) Captar medidas del mundo real, asegurando que la información sea correcta y recogida utilizando medidas que permitan un análisis significativo.
- (2) Reorganizar y calcular con datos, tomando resultados del conjunto de datos y buscando el mensaje que encierra.
- (3) Comunicar los datos mediante alguna representación, comunicar el mensaje encontrado de una forma que sea convincente. Ello puede ser mediante un gráfico o un conjunto de valores, de manera que transmita el mensaje que encierra el conjunto de datos de forma satisfactoria.

En referencia a ello, Chick, Pfannkuch y Watson, afirman que la transnumeración entra en juego en el segundo paso, es decir al reorganizar y calcular con datos, buscando que los datos revelen lo que realmente dice todo el conjunto de datos. Para los autores, este tipo de pensamiento implica la organización y el resumen de los datos, trata de reconocer que muchas representaciones son necesarias para la comprensión de una situación real y la detección de nueva información en los datos.

De esta manera, Chick, Pfannkuch y Watson (2005), afirman que en esa búsqueda de información dentro de los datos se pueden llevar a cabo muchos procesos de transnumeración, entendiendo que el producto de ello es una forma de representar algo de ese conjunto de datos. Por ejemplo, los autores explican que estos procesos podrían incluir ordenar los datos, hacer un recuento de los datos, realizar tabla de datos o tabla de frecuencias simples, trazar gráficos de dispersión, calcular los coeficientes de correlación, determinar valores de las medidas de los datos, medidas de dispersión, centralización o de posición, es decir, comprimir los datos originales mediante un valor único, así como agrupar datos y crear nuevas variables o nuevas categorías, valores que representen elementos significativos de todo el conjunto de datos, del sistema real. Asimismo, estas representaciones se pueden generar al final para explicar los resultados de haber analizado los datos, esto es mediante una tabla u otra organización visual, como también se puede generar al realizar el análisis o exploración de los datos, por ejemplo al utilizar medidas que representen todo el conjunto de datos.

Los investigadores explican que la capacidad para llevar a cabo la transnumeración se verá limitado por las herramientas estadísticas que cada uno posea, es decir mientras más herramientas se tenga al alcance, se podrá aplicar más técnicas en la búsqueda de información de los datos. Por ejemplo, si el estudiante posee conocimientos de cómo construir una tabla, calcular y comprender las medidas de tendencia central, las medidas de variación, un gráfico de puntos, calcular las medidas de posición, entre otros, tendrá mayor capacidad para realizar más procesos de transnumeración.

Entonces, aunque no se sabe de antemano qué herramientas estadísticas serán más útiles en el análisis de los datos, el uso de estas herramientas o técnicas transnumerativas podrá ser guiado por la pregunta que se desea responder y el tipo de datos que se tiene. Por esta razón, es importante la pregunta que se plantee en una situación problema, porque a partir de ella se considerará qué herramientas estadísticas serán necesarias para explorar el conjunto de datos, entender la información que encierra y responder finalmente a la pregunta planteada.

De esta manera, hemos explicado por qué es importante y necesario el estudio de la estadística, lo que conlleva al desarrollo del Pensamiento Estadístico en nuestros estudiantes. Sin embargo el Pensamiento Estadístico está conformado por otras partes importantes, entre ellos, la Transnumeración, que implica procesos necesarios en el análisis de datos, cambio de representaciones que permiten comprender a los estudiantes la variación de los datos, que son procedimientos requeridos necesariamente al estudiar la estadística, y que justamente se debe hacer porque existe variación, de lo contrario no sería necesario estudiar estadística.

Ante esto, consideramos que se requiere que los docentes implementen actividades elegidas con mucho criterio que inviten a los estudiantes a realizar el análisis de datos, utilizando diferentes representaciones, es decir, que transnumerem; llevándolos a dos cosas: comprender los diferentes conceptos estadísticos y analizar comprendiendo cada vez mejor un conjunto de datos. Por ello, destacamos los siguientes puntos importantes en nuestra investigación, el primero, la esencia principal de por qué el estudio de la estadística, ésto es, la variación; y segundo, las herramientas necesarias para estudiarla, la transnumeración. De esta manera, creemos que habiendo relacionado los diferentes conceptos estadísticos podemos hacer referencia y establecer nuestra pregunta de investigación, así como nuestros objetivos que guiarán a responderla.

#### **1.4 Pregunta y objetivos de la investigación**

Basados en una revisión de la literatura sobre los procesos de transnumeración, las diferentes investigaciones realizadas y documentos formales de diferentes instituciones relacionadas al estudio de la estadística, proponemos nuestra pregunta de investigación:

**¿Cómo se presentan los procesos de transnumeración al desarrollar actividades sobre variación en profesores de matemática?**

Para responder a nuestra pregunta planteamos como objetivo general:

##### **Objetivo General**

Analizar los procesos de transnumeración realizados por profesores de matemática al desarrollar una secuencia de actividades sobre variación.

##### **Objetivos Específicos**

- Identificar en las acciones de los profesores de matemática los procesos de transnumeración al desarrollar una secuencia de actividades sobre variación.
- Relacionar los procesos de transnumeración realizados por profesores de matemática con la noción de variación por medio de la secuencia de actividades.

#### **1.5 Metodología de Investigación**

En este capítulo presentamos la metodología de nuestra investigación, la cual responde a una investigación cualitativa, específicamente el estudio de caso. Asimismo, justificamos su pertinencia y relevancia para nuestro estudio, explicando los procedimientos metodológicos adoptados en la investigación.

### 1.5.1 Investigación Cualitativa

La investigación que realizamos busca responder cómo se presentan los procesos de transnumeración en profesores de matemática al desarrollar actividades sobre la variación, en base al análisis de la noción de la media y desviación estándar. Nuestra investigación se basa en los resultados, pero también en el proceso de comprender cómo se presentan los procesos de transnumeración al estudiar la variación. El problema de investigación está basado en un proceso inductivo, que parte de proposiciones a partir de nuestro marco teórico, no está basado en hipótesis determinadas a priori. Por ello, de acuerdo con Taylor y Bogdan (1987) nuestra investigación se trata de un estudio cualitativo.

Para Bogdan y Biklen (1994), un estudio basado en una metodología cualitativa tiene las siguientes características:

- i) La investigación cualitativa tiene el entorno natural como fuente directa de los datos, y el investigador como instrumento principal. Esto comprende la interacción del investigador con los sujetos de investigación en la escena donde se dan los hechos.
- ii) La investigación cualitativa es descriptiva. Se basa en recoger los datos mediante diversos instrumentos, tales como cuestionarios, registros de observación, grabación de videos o audios.
- iii) Los estudios cualitativos están más interesados por el proceso que simplemente por los resultados o productos. El interés del investigador es estudiar el problema desde la comprensión de las interacciones y manifestaciones dadas en la escena de la investigación.
- iv) Las investigaciones cualitativas tienden a analizar los datos de forma inductiva. No se recogen los datos o pruebas que confirmen o refuten hipótesis definidas previamente. La investigación utiliza un marco teórico que guiará la recolección y análisis de datos.
- v) El significado es de vital importancia en el enfoque cualitativo. El investigador busca la interpretación de los datos recogidos considerando tal información desde el punto de vista del informante.

En relación al ítem i) y ii) en nuestra investigación los datos serán recogidos directamente de la escena de interacción con los profesores, utilizando fichas de observación y equipos de grabación de audio y video. Para ello, se cuenta con la participación de observadores, así como del investigador, quien también participará como formador.

Como se explicó anteriormente, reconocemos que lo que buscamos es comprender cómo se presentan los procesos de transnumeración en profesores de matemática al desarrollar



actividades sobre variación. Por ello, más que en el producto estamos interesados en comprender el proceso de estos resultados, guiados por el marco teórico referente al proceso de transnumeración como parte del Pensamiento Estadístico. A partir de lo descrito, atendemos a los criterios iii) y iv).

Respecto al ítem v) nuestra investigación se apoya en socializar para verificar y comprender los significados producidos por los profesores que forman parte del estudio, ya que es necesario conocer, contrastar y/o complementar acciones o declaraciones de los profesores al realizar las actividades.

Por lo señalado anteriormente, justificamos que nuestra investigación es cualitativa.

### **1.5.2 El Estudio de Caso**

Considerando que nuestro estudio es una investigación cualitativa en educación matemática, es necesario considerar un método que nos oriente de manera sistemática para lograr nuestros objetivos de investigación, por ello establecemos trabajar con el método estudio de caso, cuya elección fundamentamos a continuación.

Según Ponte (2006), un estudio de caso es una investigación empírica y está basada en gran parte en el trabajo de campo o el análisis de documentos. Además, permite estudiar una determinada entidad en su contexto real, es decir, permite registrar y estudiar la conducta de las personas involucradas en el fenómeno de estudio. En relación a ello, nuestra investigación se desarrolla con un grupo de profesores de matemática, cuyo foco de atención es responder cómo se presentan los procesos de transnumeración en sus acciones al desarrollar actividades secuenciadas sobre variación.

En un estudio de caso, los datos pueden ser obtenidos mediante diversas fuentes, tales como documentos, registros de observación, entrevistas, archivos, grabaciones, entre otros. De esta manera, en nuestra investigación emplearemos fichas de observaciones en cada actividad (ver anexo), fichas de respuestas, fotografías, audios y videos.

Para el estudio de caso, Yin (2005) señala cinco componentes importantes, que en seguida las relacionamos con nuestra investigación:

1. Las cuestiones de estudio. Relacionadas con nuestra pregunta de investigación formulada previamente: ¿Cómo se presentan los procesos de transnumeración al desarrollar actividades sobre variación en profesores de matemática?

2. Las proposiciones de estudio. Nos guiamos por nuestro marco teórico, específicamente, la transnumeración, y así responder cómo se presentan dichos procesos en las acciones de los profesores, al estudiar la variación.
3. Las unidades de análisis. En nuestra investigación las unidades de análisis son las acciones de los profesores correspondientes a los procesos de transnumeración en el estudio de la variación. Y las sub unidades de análisis, las acciones de los profesores seleccionados del total de profesores participantes.
4. La lógica que une los datos y las proposiciones.
5. Los criterios para interpretar los hallazgos.

Respecto al ítem 4 y 5, en nuestra investigación realizaremos el análisis de los datos recogidos para contrastarlos con las proposiciones hechas sobre la transnumeración y contrastaremos los resultados con la misma teoría.

Así también, según Ponte (2006) el estudio de caso puede tener los siguientes propósitos: (i) exploratorio, porque sirve para obtener información sobre el hecho de interés; (ii) descriptivo, ya que describe el hecho tal cual; y (iii) analítico, porque busca discutir su objetivo para desarrollar una nueva teoría o confrontarla. En nuestra investigación, tratamos de responder cómo se presentan los procesos de transnumeración en el desarrollo de las actividades sobre variación, es decir, queremos explorar y describir cómo los profesores perciben o comprenden la variación en el análisis de datos. En relación a ello, nuestro caso se caracteriza como descriptivo, además por tratar la implementación de actividades sobre variación, tiene carácter exploratorio.

Ponte afirma que un estudio de caso es conducido por una orientación teórica para dar soporte a la formulación de nuestra pregunta de investigación, así como para seleccionar los instrumentos que nos permitirán obtener los datos y tener una guía en el análisis e interpretación de los resultados obtenidos.

En nuestro estudio, la transnumeración tiene un papel fundamental, en primer lugar porque nos orientó en la formulación de nuestras actividades, específicamente los ítems de cada actividad, en segundo lugar nos orientó en los datos que debíamos observar y registrar, y en tercer lugar porque nos guió en el análisis e interpretación de los resultados obtenidos para responder a nuestra pregunta de investigación.

Según Ponte, el estudio de caso es cuestionado porque no tiene el carácter de generalizar un resultado, por el contrario el estudio de caso trata sobre el estudio de un caso particular, ya

que se interesa en conocer lo que sucede en esa situación en particular. El objetivo de un estudio de caso, es crear las condiciones necesarias para comprender el caso en particular y producir más conocimiento sobre ello. Más aún, como se explicó, un estudio de caso, cuestiona el objeto de estudio, realizando la comparación de ello con investigaciones que ya se han realizado, o con la teoría establecida, también puede generar nuevas teorías o preguntas que generen nuevas investigaciones.

Al respecto, nuestra investigación no pretende generalizar los resultados, pero sí esperamos que puedan servir a los profesores en su reflexión sobre la enseñanza de la estadística en las aulas, y que además pueda servir para el inicio de otras investigaciones relacionadas a la enseñanza de la estadística considerando nuestro marco teórico, la transnumeración.

Ponte (2006), afirma que en la evaluación de un estudio de caso se considera el criterio de validez, que en su mayoría es un criterio aplicado para cualquier investigación cualitativa. La validez está relacionada con la precisión de los resultados, presentando como criterios, la validez conceptual, la validez interna y la validez externa. En referencia a ello, el autor establece que la validez conceptual se refiere a la caracterización de los conceptos y criterios que han de trabajarse en la investigación y que servirán para identificar en los resultados, los datos que son útiles para la investigación. La validez interna, si los resultados obtenidos realmente representan los hechos que se dieron en la experiencia. Por último la validez externa, se refiere al grado en que las representaciones obtenidas se pueden comparar con otros casos.

En referencia a lo anterior, en el análisis e interpretación de nuestros resultados nos enfocaremos en validar que los resultados descritos realmente revelen las acciones que llevaron a cabo los profesores de matemática, específicamente el cómo se presentó la transnumeración en el estudio de la variación.

Por lo descrito anteriormente, ratificamos que el método de estudio en nuestra investigación es el estudio de caso.

### **1.5.3 Procedimientos Metodológicos**

Para llevar a cabo nuestra investigación organizamos el trabajo de acuerdo al objetivo general de nuestro estudio. En base a ello, consideramos que al desarrollar las actividades sobre variación, el profesor realizará diferentes procesos de transnumeración, tales como producir diferentes representaciones y realizar cambios en ellas. Acciones, que consideramos llevarán a los profesores a responder a la pregunta central de cada actividad, y a comprender la

variación, realizando la movilización de diversas nociones estadísticas, entre ellas la media y la desviación estándar.

De esta manera, con el fin de recolectar los datos y evidenciar los procesos de transnumeración realizados por los profesores de matemática, abordamos lo estudiado por Wild y Pfannkuch (1999), y Chick, Pfannkuch y Watson (2005), lo cual nos permitirá tener las condiciones necesarias para lograr nuestros objetivos de investigación y responder nuestra pregunta de investigación, así como realizar el análisis propio de los resultados. Asimismo, en el análisis de los resultados buscamos analizar los procesos de transnumeración realizados por los profesores, para relacionarlos con su noción de variación y responder cómo se presenta la transnumeración en el estudio de la variación.

Nuestra investigación, se desarrolla con 14 profesores quiénes formaron 7 parejas en total, denominándolos como grupos. Sin embargo, para el análisis de las acciones de los profesores, nos enfocamos sólo en dos grupos, los cuáles conformaron nuestras sub unidades de análisis, ya que el trabajo en grupo permite interactuar entre los miembros y desarrollar la actividad generando más ideas y participación entre ellos al realizar las actividades.

Respecto a lo que consideramos para la recolección de datos, hemos realizado lo siguiente:

- a) **Implementamos 3 actividades**, que permitan explicar cómo se presentan los procesos de transnumeración en las acciones de los profesores al estudiar la variación. Asimismo, las actividades son un producto personal, cuya formulación se realizó en base a la experiencia docente, así también, considerando las bases teóricas y lo declarado en los antecedentes revisados, respecto a los problemas y recomendaciones que establecen.
- b) **Realizamos una observación no participativa**, el observador se limitó a observar y registrar las acciones de los profesores que signifiquen un aporte de interés para nuestra investigación, mediante las fichas de observación para cada una de las tres actividades.
- c) **Utilizamos recursos para el registro de datos**, se utilizaron cámaras filmadoras, cámaras fotográficas, grabador de audios y grabador de pantallas.
- d) **Utilizamos recursos para el desarrollo de las actividades**, se utilizaron laptops, papelotes, plumones, pizarra, diapositivas, hojas e imágenes.

## CAPITULO II: LA VARIACIÓN Y SU ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este capítulo presentaremos la noción de variación y las nociones de las medidas en torno a las cuales realizaremos su estudio, es decir, la media y la desviación estándar. Asimismo, presentaremos el gráfico de puntos que nos servirá de apoyo para su respectivo análisis, además realizaremos el análisis didáctico de las actividades propuestas para su enseñanza, en los libros de estadística otorgados por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) y el análisis didáctico a partir de lo establecido en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

### 2.1 La variación

Diversos autores se han referido a la noción de variación, estableciendo diferentes formas de considerarla. Al respecto, Makar y Confrey (2005) afirman que: “A menudo (la variación) se considera como una medida de la cantidad que los datos se desvían de una medida del centro, como el intervalo intercuartílico o la desviación estándar.” (p.28). Sin embargo, los autores señalan que la variación debe ser entendida más que sólo como una medida, ya que también es necesario entenderla considerando su utilidad para comprender un conjunto de datos dentro de un contexto dado.

Por otro lado, Reading y Shaughnessy (2004) realizan la diferencia entre variabilidad y variación refiriendo que: “el término variabilidad se entenderá como la característica (variable) de la entidad que es observable, y el término variación significa la descripción o medición de esa característica.” (citado en Makar y Confrey, p. 27). Sin embargo, otros autores no establecen diferencia alguna entre ambos términos, por ejemplo Garfield y Ben – Zvi (2008) establecen que dentro de la Comunidad de Educación Estadística, no se ha realizado distinción entre variabilidad y variación. Por lo que, en nuestra investigación estaremos refiriéndonos a ambos términos sin distinción.

De este modo, Makar y Confrey señalan que comprender el concepto de variación está relacionado con la comprensión de la distribución, por lo que en el proceso de análisis de datos, es necesario comprender y ver al conjunto de datos como un todo, en el cual, cualquier representación que se construya de ello adopte un significado relacionado y con sentido respecto al conjunto de datos, dentro del contexto, y no asumirlo como algo aislado y sin sentido.

Así, Cooper y Shore (citados en Coutinho, Almouloud y Silva, 2012, p.250) sugieren que los estudiantes necesitan experimentar situaciones en las que más allá de comparar qué grupo de datos presenta mayor variación que otro, comprendan y perciban de qué trata la variación,

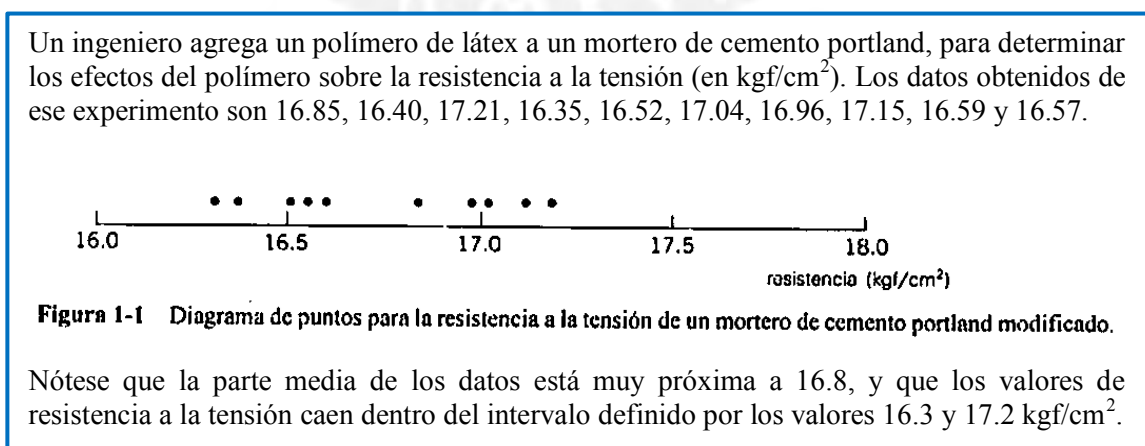
realizando comparaciones visuales de la medida de la variación, desarrollando su capacidad de interpretación de la información que podría encerrar un determinado gráfico en particular y saber qué significa que un conjunto presente mayor variación que otro.

De esta manera, reconocemos la importancia en la enseñanza de la estadística y dentro de ello, la comprensión del concepto de variación. Sin embargo, desde nuestra experiencia en las aulas podemos afirmar que en la mayoría de casos la enseñanza de la estadística sigue un rumbo diferente al que se ha explicado, ya que en las actividades implementadas por los docentes en las aulas muestran un enfoque centrado en la construcción de tablas, su respectivo gráfico y el cálculo de las medidas tendencia central, de dispersión y posición, como conceptos separados, sin sentido, ni relación alguna entre ellos, no se analiza el significado de las medidas ni la interpretación y relación entre los resultados de las medidas ni entre las representaciones que se construyen a partir de los datos.

Considerando que nuestra investigación trata sobre el estudio de la variación, nos orientaremos en el análisis de la nociones de la media y la desviación estándar, en base a las definiciones de Montgomery (2009), Véliz (2011) y Pérez, Caso, Río y López (2012), ya que en su libro presentan la rigurosidad matemática en sus definiciones y también hacen uso de herramientas didácticas en sus ejemplos y explicaciones.

### 2.1.1 El Gráfico de Punto

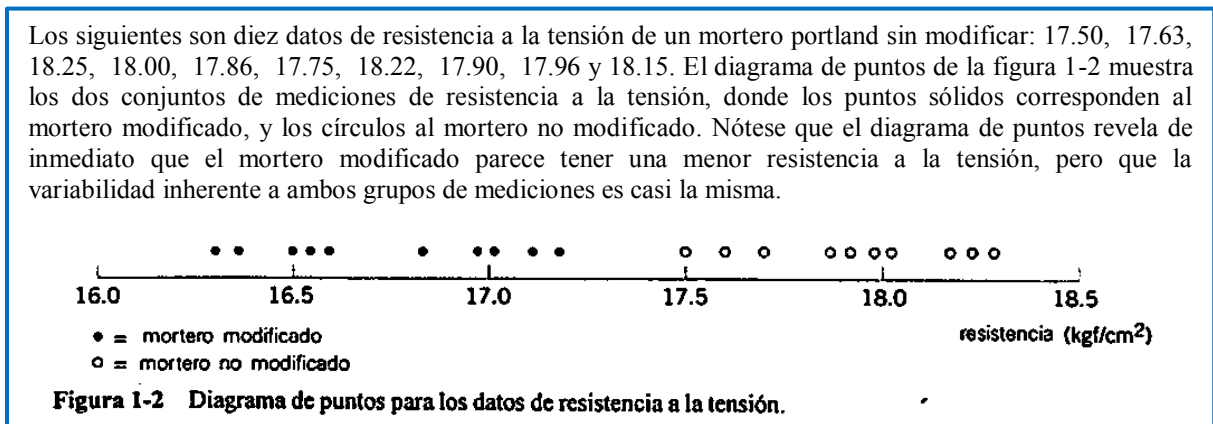
Según Montgomery: “El diagrama de puntos es una gráfica muy útil para visualizar un conjunto pequeño de datos: por ejemplo unas 20 observaciones. La gráfica permite ver con rapidez y facilidad la **ubicación** o **tendencia central** de los datos, así como su **dispersión** o **variabilidad**.” (p.5), ejemplificando su definición con la siguiente situación: (Ver figura 4)



**Figura 4.** Ejemplo de diagrama de puntos para un conjunto de datos.

**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 4

A partir del ejemplo en la figura 4, Montgomery (2009), afirma que los gráficos de puntos son útiles al comparar dos o más conjuntos de datos, y a partir de ello puede proporcionarnos información sobre características poco usuales de los datos porque permite el análisis de su distribución. Observemos el ejemplo en la figura 5:



**Figura 5.** Ejemplo de diagrama de puntos de dos conjuntos de datos  
**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 5

En este sentido, Batanero y Díaz (2004) establecen que el gráfico de puntos ofrece una mejor visualización del carácter numérico de la variable, la moda, la dispersión y la forma de la distribución de los datos, así como también permite ver rápidamente la tendencia y variación de los datos.

### 2.1.2 La media

Según Véliz (2011), la media: "... es un número que representa a cada uno de los valores del conjunto. Esto sucederá en la medida en que la distribución sea simétrica y tenga poca dispersión." (p.51).

Montgomery (2009) establece que: "La medida más común de localización o centro de un grupo de datos es el promedio aritmético ordinario o media." (p.16). En este sentido, respecto al cálculo de la media, en la figura 6, Véliz establece la siguiente definición:

Si  $x_1, \dots, x_n$  es un grupo de datos que corresponden a una muestra de una población, **la media aritmética** o simplemente la **media** de estos valores es el número

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Figura 6.** Cálculo de la media en datos no agrupados  
**Fuente:** Véliz, 2011, p. 51

Véliz y Montgomery coinciden en la definición del cálculo de la media, ambos autores establecen la media como el cociente de la suma de los datos observados entre el número total de datos. Después de la definición, Montgomery utiliza el siguiente ejemplo de aplicación para calcular la media: (Ver figura 7)

La media muestral de la resistencia a la tensión de las 10 observaciones recopiladas sobre el mortero de cemento portland modificado de la sección 1-2.1 es

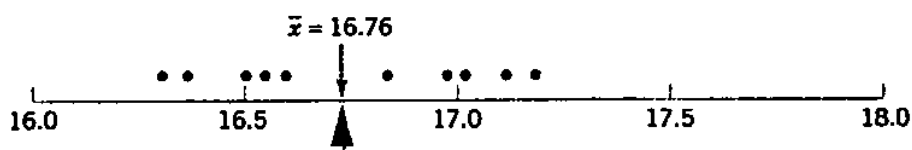
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{10} = \frac{16.85 + 16.40 + \dots + 16.57}{10} \\ &= \frac{167.64}{10} = 16.764 \text{ kgf/cm}^2\end{aligned}$$

**Figura 7.** Ejemplo del cálculo de la media.

**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 16

En ejemplo de la figura 7, Montgomery clarifica la definición de la media, presentando la sumatoria como parte del algoritmo que lleva a su respectivo cálculo. El autor también utiliza en sus ejemplos el gráfico de puntos para representar la media: (Ver figura 8)

La figura 1-11, que es un diagrama de puntos para los datos de resistencia a la tensión, ilustra la interpretación física de la media muestral como medida de localización. Nótese que la media muestral,  $\bar{x} = 16.764$ , puede considerarse como un “punto de equilibrio”. Esto es, si cada observación representa, por ejemplo, una libra de masa colocada en ese punto sobre el eje x, entonces un punto de apoyo localizado exactamente en  $\bar{x}$  equilibrará todo el sistema de pesos.



**Figura 1-11** La media muestral como punto de equilibrio de un sistema de pesos.

**Figura 8.** Ejemplo del cálculo de la media utilizando el diagrama de puntos.

**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 17

A partir de este ejemplo, en la figura 8, Montgomery (2009), señala que no siempre la media indicará que la mayor parte de las observaciones se concentre alrededor de ella, ya que si se considera a las observaciones como masas unitarias, la media viene a ser como el punto que equilibra todo el conjunto de datos, lo cual dependerá de la simetría de su distribución y la dispersión. En este ejemplo el autor complementa su explicación con la utilización del gráfico de puntos que permite tener una mejor observación de la distribución de los datos y entender



cuán sensible es la media con los valores del conjunto de datos, así como su relación con la variación.

Como se ha visto esta medida de posición central, es un número que representa a un conjunto de datos, por ello consideramos que es necesario analizar su representatividad. De esta manera, consideramos que ello lo realizaremos mediante las medidas de dispersión: varianza y desviación estándar.

### 2.1.3 La Varianza y Desviación Estándar

Pérez, Caso, Río y López. (2012) en sus definiciones sobre las medidas de dispersión explican el significado que tienen en un conjunto de datos, y el objetivo de estas medidas. Así tenemos que para los autores: “Las medidas de dispersión tratan de sintetizar en un único número la separación entre los distintos valores de una variable, es decir, su objetivo es cuantificar la variabilidad de un conjunto de datos.” (Pérez, et. al., p. 44)

Por otro lado, Véliz (2011) afirma que: “Las medidas de dispersión indican la variación de los datos alrededor de una medida de tendencia central. Permiten verificar si determinadas medidas de tendencia central son significativas o no, es decir, si son confiables o no.” (Véliz, p. 58)

Al respecto, en ambos casos se establece que una medida de dispersión muy importante en el análisis de datos es la varianza, la cual, indica cómo están dispersos los datos respecto a su media. De esta manera, Véliz en la figura 9, define la varianza de la siguiente forma:

Esta medida explica gran parte de la información contenida en los datos. Si  $x_1, \dots, x_n$  es un conjunto de  $n$  datos correspondientes a una muestra de una población, cuya media es  $\bar{x}$ , entonces su **varianza** se denota con  $s^2$  y se define como el número no negativo.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

**Figura 9.** Cálculo de la varianza de una muestra.

**Fuente:** Véliz, 2011, p. 58

Sin embargo, Véliz y Pérez et. al. señalan que el valor de la varianza no corresponde a la misma escala de los datos, ya que considera el cuadrado de las desviaciones y no las desviaciones mismas. Por ello, establecen la necesidad de introducir otra medida que esté expresada en las mismas unidades que la variable, la cual es la desviación estándar, tal como se muestra a continuación en la figura 10, según Pérez et. al.:

**Definición 3.6.** Llamamos *desviación típica* o *desviación estándar*, que denotamos por  $S_X$ , a la raíz cuadrada de la varianza tomada con signo positivo:

$$S_X = +\sqrt{S_X^2} \quad (3.1.5)$$

**Figura 10.** Definición de la desviación estándar de un conjunto de datos.

**Fuente:** Pérez et. al., 2012, p. 48

Por otro lado, Montgomery (2009), en su definición sobre la varianza incluye la desviación estándar: (Ver figura 11)

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una muestra de  $n$  observaciones, entonces la **varianza muestral** es

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (1-5)$$

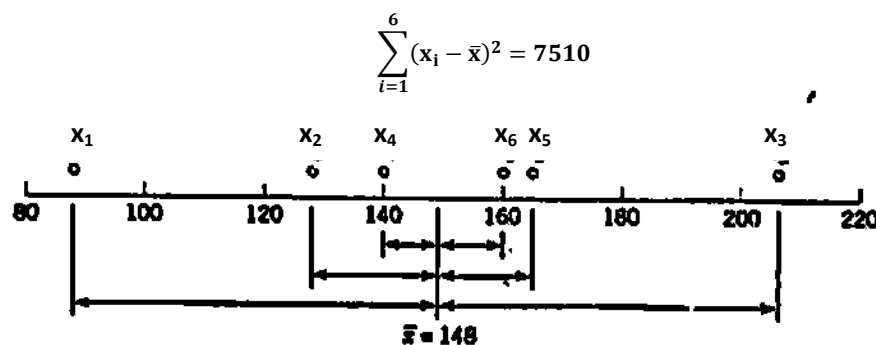
La **desviación estándar muestral**,  $s$  es la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral.

**Figura 11.** Cálculo de la varianza y su relación con la desviación.

**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 25

Mediante un ejemplo, Montgomery señala e interpreta cómo la varianza muestral mide la variación, tal como se muestra a continuación en la figura 12:

La tabla 1-3 muestra las cantidades necesarias para calcular la varianza muestral y la desviación estándar muestral de la muestra 2 de resistencia a la tensión de la aleación de aluminio-litio. La gráfica de los datos aparece en la figura 1-15. El numerador de  $s^2$  es



**Figura 12.** Manera en que la varianza muestral mide la variación mediante las desviaciones  $x_i - \bar{x}$ .

**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 25

En el ejemplo de la figura 12 Montgomery realiza la explicación de la varianza utilizando como recurso el gráfico de puntos. Así en la siguiente figura 13, se establece un ejemplo con los datos de la figura anterior para realizar el cálculo de la varianza y la desviación estándar muestral a partir de la tabla de frecuencias:

$i$	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	90	-58	3364
2	128	-20	400
3	205	57	3249
4	140	-8	64
5	165	17	289
6	160	12	144
$\sum_{i=1}^6 x_i = 888$		$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 7510$
$\bar{x} = \frac{888}{6} = 148$			
de modo que la varianza muestral es			
$s^2 = \frac{7510}{6 - 1} = \frac{7510}{5} = 1502 \text{ (psi)}^2$			
mientras que la desviación estándar muestral está dada por			
$s = \sqrt{1502} = 38.8 \text{ psi}$			

**Figura 13.** Cálculo de la varianza muestral y de la desviación estándar muestral.  
**Fuente:** Montgomery, 2009, p. 26

En el ejemplo de la figura 13 se observan las operaciones necesarias para el cálculo de la varianza y la desviación estándar, utilizando un lenguaje numérico y algebraico, el cual consideramos que ayuda a comprender los procedimientos realizados en el análisis de la variación.

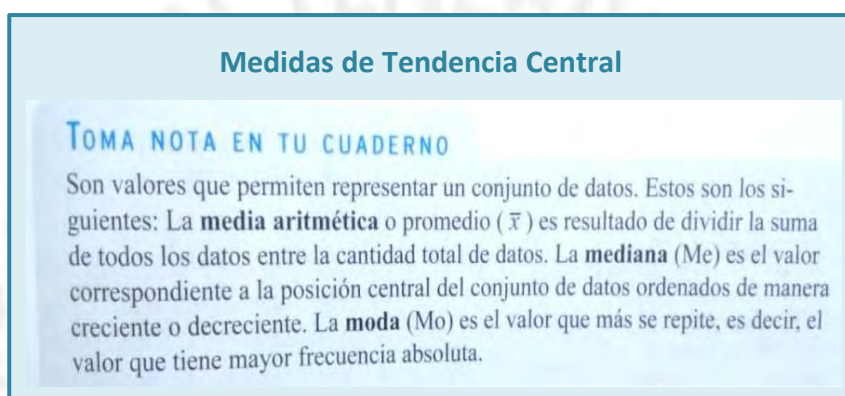
En base a lo anterior, consideramos que la forma cómo los autores explican los diferentes conceptos estadísticos, utilizando el gráfico de puntos, se lleva a cabo el análisis y comprensión de la variación, logrando comprender mejor el significado de cada medida estadística. Esto es, reflexionando sobre los procedimientos que llevan a calcular el valor de cada una, con una orientación más razonada, en base a diferentes representaciones de un conjunto de datos.

Se observa una transnumeración de forma razonada y con sentido, totalmente opuesto a realizar procesos algorítmicos que lleven al resultado numérico sin comprender lo que significa dentro de un contexto determinado. Como lo afirma Wild y Pfannkuch (1999), al construir y utilizar diferentes registros de representación se mejora la comprensión de lo que trata la variación y la razón de estudiarla, así como sus medidas que permiten estudiarla y por ende el significado de cada una de ellas.

## 2.2 Análisis del libro de estadística

Para tener referencia de los libros utilizados por los docentes de las escuelas estatales de secundaria, sobre el desarrollo de la variación y los procesos de transnumeración, realizamos un estudio de los textos de 2° y 3°, correspondientes a estudiantes cuyas edades varían entre los 13 a 15 años respectivamente, ya que en estos libros se establece la enseñanza de la estadística.

En uno de los libros analizados observamos la definición de las medidas de tendencia central, la cual hace referencia a la media como un valor numérico producto de realizar cálculos, es decir, la media es definida como el resultado de sumar todos los datos y dividirlo entre el número total de ellos. (Ver figura 14)



**Figura 14.** Definición de las medidas de tendencia central.

**Fuente:** Matemática 2°, 2012, p. 227

Asimismo, previa a la definición mostrada en la figura 14, no se observa alguna actividad que permita al estudiante deducir y entender el significado de la media. Sin embargo, en los ejemplos posteriores a la definición sí encontramos ejercicios resueltos sobre la media aritmética. (Ver figura 15)

**EJEMPLO 6**

El número de libros vendidos por una librería durante 10 días es 8; 12; 10; 8; 10; 15; 9; 8; 12 y 13. **Calcula** la media, mediana y moda de los datos.

**Resolución**

- Cálculo de la media:  $\bar{x} = \frac{8 + 12 + 10 + 8 + 10 + 15 + 9 + 8 + 12 + 13}{10} = 10,5$
- Ordenamos los datos en forma creciente: 8; 8; 8; 9; 10; 10; 12; 12; 13; 15  
Como la cantidad de datos es un número par, entonces:  $Me = \frac{10 + 10}{2} = 10$
- El dato con mayor frecuencia es 8. Luego,  $M_o = 8$ .

**Figura 15.** Ejemplo del cálculo de la media.

**Fuente:** Matemática 2°, 2012, p. 228

Como se observa en la figura 15, los ejercicios utilizan un contexto familiar para el estudiante, aunque la solución representa sólo la aplicación de la definición dada previamente. Asimismo, el resultado no es interpretado en torno al contexto dado, es decir, preguntarse ¿qué significa que la media de los libros vendidos sea 10,5?, ¿es preciso redondear el resultado por tratarse de libros?, pues necesitamos un valor entero positivo, ¿podrá obtenerse un resultado que no se encuentre entre los valores de los libros vendidos?, ¿por qué?. En el libro se presentan varios ejemplos de ejercicios, que pueden ser resueltos con la definición dada, es decir, los procedimientos necesarios para resolver los ejercicios son los mismos en cada uno de ellos, la suma total de los datos y la división entre el número total de datos.

Entre otras actividades que observamos en el libro de 2° de secundaria, son los ejemplos resueltos de problemas contextualizados presentados a continuación en la figura 17, cuyos datos se presentan en una tabla de frecuencias, la cual es una forma de representar los datos. Se observa que el ejemplo exige un procedimiento más para el estudiante, en el cual se deben multiplicar los valores de la variable por la frecuencia respectiva y posteriormente aplicar los procesos algorítmicos que se establecen en la definición dada inicialmente sobre la media de un conjunto de datos. (Ver figura 16)

**EJEMPLO 7**

Un grupo de 25 estudiantes participa en la campaña “El vidrio no es basura, recíclalo”, y elabora una tabla con el registro de la cantidad de botellas recolectadas por cada uno de ellos.

**Determina** la media, la mediana y la moda de la cantidad de botellas recolectadas.

Nro. de botellas	f
1	9
2	5
3	6
4	3
5	2
Total	25

**Resolución**

Se observa que son datos sin agrupar y con diferente frecuencia (ponderación).

- Cálculo de la media :

$$\bar{x} = \frac{1(9) + 2(5) + 3(6) + 4(3) + 5(2)}{25} = 2,36 \approx 2 \text{ botellas}$$

**Figura 16.** Ejemplo del cálculo de la media utilizando tabla de frecuencias  
**Fuente:** Matemática 2°, 2012, p. 228

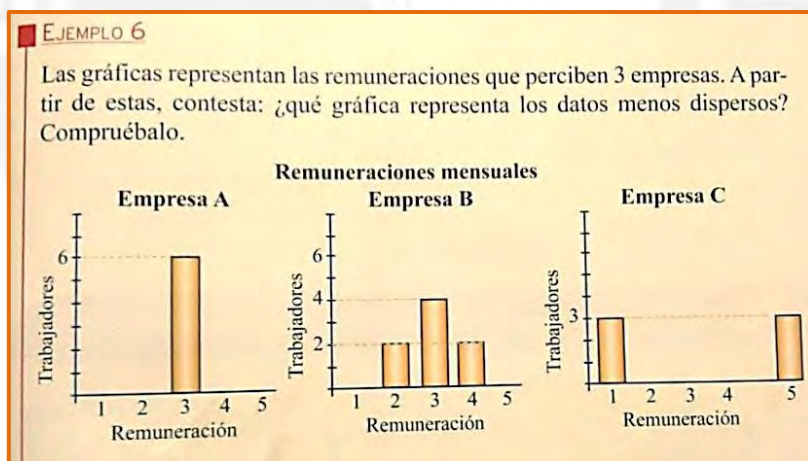
En el ejemplo de la figura 16, observamos que el resultado de la media no es interpretado de acuerdo al contexto, se da el redondeo del resultado pero no hay mayor análisis, el desarrollo se limita al cálculo del valor de la media. Por otro lado, en el libro también observamos que se presentan problemas y ejercicios propuestos para ser resueltos por los estudiantes. Si bien es cierto, todos ellos requieren el mismo procedimiento descrito para calcular la media, en el siguiente ejemplo de la figura 17, el problema ya no demanda calcular la media, ahora el

estudiante debe calcular uno de los datos. Observamos que el proceso de solución, llevará al estudiante a la obtención de una ecuación, una solución que no ha sido presentada como ejemplo previamente en el libro.

**4.** La asistencia de pacientes a la clínica Carrión en pediatría por día fue:  
 Lunes: 25, martes: 30, miércoles: 32, jueves:  $x$ , viernes: 27, sábado: 20 y domingo: 19.  
 Además, se sabe que el promedio de pacientes fue 26. ¿Cuántos pacientes recibió el jueves?

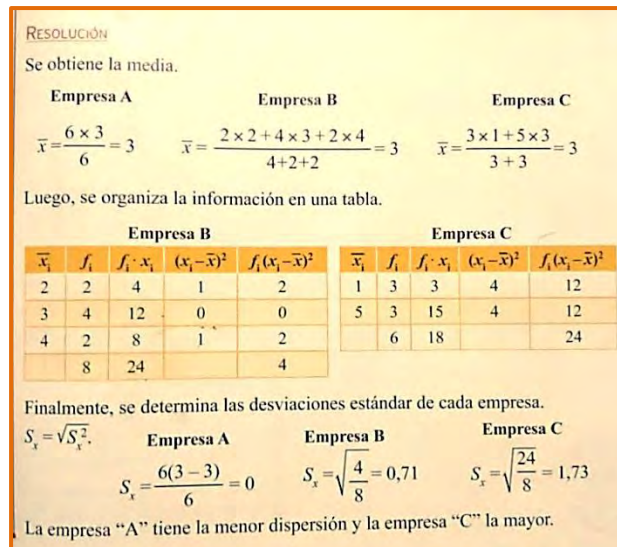
**Figura 17.** Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la media.  
**Fuente:** Matemática 2°, 2012, p. 229

Respecto a la desviación estándar observamos su referencia en el libro de 3° de secundaria. El concepto es abordado como parte del proceso de solución de un problema presentado en la figura 18, en el cual se pide identificar a partir de dos gráficas, aquella que tenga menor dispersión, es decir, menor variación. Sin embargo, no se observa previamente alguna definición, ni ejemplos que ayuden a comprender al estudiante su significado y/o cálculo.



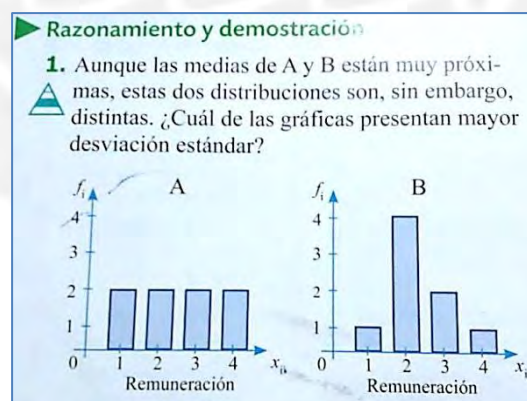
**Figura 18.** Ejemplo de ejercicio sobre el concepto de dispersión.  
**Fuente:** Matemática 3°, 2012, p. 225

En la solución del ejemplo de la figura 18, se realizan varios procedimientos, los cuales mostramos en la figura 19 y observamos que para resolver la situación, primero se calcula la media de las remuneraciones en cada empresa, se multiplican los valores de la variable con la frecuencia correspondiente, se realizan los cálculos referentes a la varianza y se representan en una tabla. También se determina la desviación estándar en cada caso y finalmente se identifica qué empresa tiene los datos menos dispersos, es decir dónde hay menor variación.



**Figura 19.** Proceso de solución para identificar la menor dispersión de los datos.  
**Fuente:** Matemática 3°, 2012, p. 225

Sin embargo, en el ejemplo de la figura 19 no se observa explicación sobre cuándo los datos son más o menos dispersos, ni qué significa mayor o menor dispersión, así como la relación entre los conceptos de varianza, desviación estándar y dispersión, por lo que la noción de variación de los datos no es desarrollada. Por otro lado, en la figura 20, observamos que en uno de los problemas aplicativos sobre desviación estándar, se utilizan representaciones de gráfico de barras, a partir de los cuales se debe identificar cuál de ellos tiene mayor desviación estándar.



**Figura 20.** Ejemplo de ejercicio aplicativo para el cálculo de la desviación estándar  
**Fuente:** Matemática 3°, 2012, p. 226

Así en el ejemplo de la figura 20, observamos que es un problema cuya solución no tiene parecido a la solución de algún problema resuelto previamente como ejemplo y/o guía para el estudiante. El problema demanda realizar procedimientos de cálculos y comparación de resultados, es decir, calcular la desviación estándar, comparar cuál es mayor y enunciar. Sin

embargo, no pide explicar qué significa que una distribución de datos tenga mayor desviación estándar que otra.

Continuando con el análisis, en el siguiente ejemplo del libro de 3° de secundaria, mostrado en la figura 21, se presenta un problema propuesto para el estudiante, que involucra los conocimientos sobre la relación entre la media y desviación estándar. El problema presenta los valores de ambas medidas de dispersión en una tabla. Previamente no hay alguna evidencia sobre la explicación de la relación entre la media aritmética y la desviación estándar, ni algún ejemplo parecido.

**6.** Una misma prueba de matemática se aplicó a los alumnos de dos aulas y se obtuvieron resultados cuyos datos estadísticos son:

	Aula 1	Aula 2
X	15,3	15,4
S	0,7	0,4

Frank, estudiante del Aula 1, obtuvo 16,7 y Marcelo, del Aula 2, obtuvo 16,6. ¿A cuál de los alumnos le fue mejor en la prueba, en relación con su aula?

**Figura 21.** Ejercicio de aplicación de relación entre la media y la desviación estándar.

**Fuente:** Matemática 3°, 2012, p. 227

A partir del análisis de los libros mencionados, en base a las definiciones adoptadas en nuestra investigación, sobre los procesos de transnumeración y el estudio de la variación, afirmamos lo siguiente:

- El tipo de problemas y ejercicios en los textos presentan enunciados claros y diversos, pero los problemas y ejercicios de aplicación propuestos para el estudiante no guardan relación con los que han sido resueltos previamente como ejemplos.
- Las definiciones dadas sobre los conceptos estadísticos ofrecen poca riqueza y oportunidad para la comprensión del estudiante sobre las nociones de los conceptos estadísticos, ya que se centran sólo en el registro de lengua natural, pudiendo aprovecharse otro tipo de representaciones.
- Las definiciones de algunos objetos estadísticos no están dadas, sin embargo se proponen problemas que requieren su conocimiento previamente.
- Son frecuentes los ejercicios y problemas cuya solución implica el cálculo y aplicación de fórmulas, y no presentan mayor demanda cognitiva.



- Las representaciones utilizadas en las definiciones, ejercicios y problemas son la tabla de frecuencias y el gráfico de barras y no favorecen su aprendizaje de forma simultánea o articulada como se establece en el proceso de transnumeración.
- Finalmente las explicaciones, las definiciones, los ejercicios y problemas en los libros analizados no favorecen las condiciones necesarias para el desarrollo del pensamiento estadístico.

### 2.3 Análisis del Currículo Nacional de la Educación Básica

El documento considerado para el presente análisis es el Currículo Nacional de la Educación Básica aprobado en mayo del 2016, pero que aún no se ha implementado. Nos hemos centrado en la Competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre, específicamente en el nivel 6 correspondiente a los grados de 1°, 2° y 3° de secundaria, y el nivel 7 correspondiente a los grados de 4° y 5° de secundaria.

De esta manera, en lo que corresponde al estándar de aprendizaje del nivel 6, se establece que el estudiante al culminar el 3° de secundaria debe ser capaz de recolectar y realizar diferentes representaciones como la organización de datos, construcción de tablas y gráficos estadísticos, así como comprender y usar el significado de las medidas de tendencia central con el fin de interpretar y comparar la información que brindan las diferentes representaciones de un conjunto de datos para realizar conclusiones. (Ver figura 22)

Nivel	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población.
6	Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.

**Figura 22.** Estándar de aprendizaje en el nivel 6 de la competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre.

**Fuente:** MINEDU, 2016c, p. 79

Como se observa en la figura 22, en el estándar correspondiente al nivel 6 se establece realizar procesos de transnumeración, ya que se menciona utilizar y producir diferentes representaciones como organizar los datos, elaborar tablas, gráficos estadísticos, utilizar y comprender el significado de las medidas de tendencia central, con el fin de que los estudiantes capten la información que brinda el conjunto de datos y sea capaz de elaborar conclusiones a partir de todos esos procesos que según la teoría corresponden a los procesos de transnumeración que llevan a comprender la situación que se está analizando.

En la siguiente figura 23, presentamos el estándar que corresponde al nivel 7 de la educación secundaria, en el cual además de lo que se establece en el nivel anterior, el estudiante al culminar el 5° de secundaria debe determinar y comprender las medidas de dispersión, en este caso la desviación estándar, lo cual significa que el profesor debe asegurar que los estudiantes comprendan la variación de los datos.

Nivel  7	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables a estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa. <b>Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar, y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada a su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; basado en esto contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población.</b> Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.
----------------	---

**Figura 23.** Estándar de aprendizaje en el nivel 7 de la competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre

**Fuente:** MINEDU, 2016c, p. 79

Sin embargo, en base a las investigaciones explicadas y desde nuestra experiencia, podemos afirmar que el docente considera que la enseñanza de la estadística es entrenar al estudiante para hacer encuestas, sin generar la necesidad de recolectar datos; hacer su respectiva tabla, sin dejarlos crear otras formas de organizar sus datos; hacer los gráficos respectivos, sin explorar, ni encontrar e interpretar la información que éstos pueden brindar sobre la situación problema analizada; calcular medidas estadísticas, limitándolos solo a los procedimientos algorítmicos; por último mostrar que la estadística se relaciona sólo con tablas, gráficos y cálculos de las medidas, sin mayor interpretación y sentido de lo que la estadística realmente puede desarrollar en los estudiantes como futuros ciudadanos.

Por esta razón, consideramos que para implementar debidamente y desarrollar las capacidades establecidas en lo que corresponde a esta competencia es necesario que el docente cambie esa forma de concebir y enseñar la estadística, desarrollando su conocimiento didáctico y proponiendo nuevas formas de enseñar, distintas a las estrategias y tipos de tareas que se establecen en los libros analizados que corresponden a los recursos ofrecidos por el MINEDU.

## **CAPÍTULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS**

En esta parte del capítulo presentamos el escenario dónde se llevará a cabo el experimento, los sujetos que conforman parte de la investigación y la descripción de las actividades que conforman el experimento, así como los criterios que se utilizaron para determinar las actividades y finalmente el análisis de los resultados.

### **3.1 Escenario de la experimentación**

La experimentación de nuestra investigación se desarrolló en el Auditorio de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en la ciudad de Lima. El desarrollo de las actividades se llevó cabo en tres encuentros en el horario de la mañana durante los días sábados.

### **3.2 Sujetos de investigación**

Nuestra investigación se llevó cabo con 14 profesores de matemática de educación secundaria quienes participaron de forma voluntaria, firmando el Protocolo de Consentimiento Informado para Participantes (ver anexo). El grupo estuvo conformado por 4 mujeres y 10 varones, quienes disponían de tiempo sólo los días sábados ya que de lunes a viernes se encontraban laborando en sus instituciones educativas. Además, de acuerdo al syllabus revisado (ver anexo), correspondiente a pregrado, sabemos que los docentes han llevado el curso de estadística y nos permite afirmar que tienen nociones del contenido específico de estadística descriptiva que se requieren para realizar las actividades de la experimentación.

Los docentes trabajaron en parejas, logrando establecerse siete grupos en total, donde cada grupo trabajó en una laptop. Asimismo, de los siete grupos se analizaron los trabajos de dos de ellos, a quienes llamaremos en adelante Grupo 1 y Grupo 2. Cabe decir, que estos dos grupos fueron elegidos por participar en todas las actividades programadas y haber desarrollado todos los ítems establecidos en cada una.

El Grupo 1 estaba conformado por dos profesores varones, cuyas edades eran 52 y 46 años, con un tiempo de servicio enseñando matemáticas, de veinte cinco y seis años respectivamente. El Grupo 2 estaba conformado por dos profesores, un varón y una mujer, cuyas edades eran 50 y 49 años, con un tiempo de servicio enseñando matemáticas, de veinticinco años cada uno, de quienes el profesor tenía conocimientos del geogebra. Todos los profesores eran graduados como licenciados en Matemática, y se dedican a enseñar sólo a estudiantes de educación secundaria, cuyas edades fluctúan entre los 12 y 16 años.

### **3.3 Actividades de la experimentación**

A continuación presentamos los criterios para la determinación de las actividades del experimento, la descripción y el análisis de acuerdo a nuestro marco teórico, la trasnumeración, y las nociones de la variación.

#### **3.3.1 Criterios para la determinación de las actividades del experimento**

Las características de las actividades que proponemos están basadas en la solución a los problemas en la enseñanza de la estadística en la educación básica señalados en nuestros antecedentes.

Respecto a los problemas detectados en las investigaciones de Silva (2007), Freitas (2010), Novaes (2011), Coutinho, Almouloud y Silva (2012) y Sanoja y Ortiz (2013), identificamos tres problemas que pretendemos atender con la formulación e implementación de nuestras actividades en nuestra investigación y los explicamos a continuación:

En primer lugar Silva, establece que se requiere realizar actividades que permitan percibir y comprender la variación, ya que las actividades basadas en el trabajo con una variable cualitativa no permite un análisis más profundo de los datos, como analizar un grupo o dos grupos de datos, que implique un mayor razonamiento estadístico y logre el desarrollo del pensamiento estadístico. En este sentido, proponemos realizar actividades con variables cualitativas y cuantitativas, así como el análisis de un grupo de datos y entre dos grupos de datos, que lleve a comprender la variación de los datos, mediante las nociones de la media y la desviación estándar.

En segundo lugar, Freitas; Coutinho, Almouloud y Silva señalan que el docente sólo basa sus actividades en la construcción de tablas de frecuencia con su respectiva gráfica y el cálculo de medidas, lo cual, no permite al estudiante explorar, crear, construir otras formas de representación con una libre organización y/o categorización en el proceso de analizar los datos. Al respecto, establecemos implementar actividades que promuevan el análisis de datos mediante diferentes representaciones para estudiar la variación.

Por último, Novaes; Sanoja y Ortiz señalan que el docente necesita no solo el conocimiento disciplinar de la estadística, sino también una formación didáctica del contenido estadístico para diseñar e implementar en su clase actividades contextualizadas y cercanas a los estudiantes que permitan el estudio de la variación.

Por ello, decidimos realizar en una formación de profesores que les permita movilizar la noción de variación y promover iniciativas para mejorar su conocimiento didáctico que les permita innovar en su práctica docente.

### 3.3.2 Descripción y Análisis de las actividades

Como se explicó, en nuestra investigación, hemos propuesto tres actividades propias, cuya formulación fue un producto personal, en base a nuestra experiencia docente, así como en base a nuestro marco teórico y los aportes de los antecedentes presentados, ello, respecto a sus resultados y recomendaciones que establecen.

De la misma forma, nuestras actividades propuestas están orientadas al cumplimiento de nuestros objetivos de investigación, habiéndose considerado para ello, promover e identificar en las acciones de los profesores la forma cómo se presentan dichos procesos de transnumeración en el estudio de la variación, enfocados en el análisis de las nociones de la media y la desviación estándar. Además, cabe decir que el objetivo de cada actividad es un precedente necesario para el logro del objetivo de la siguiente actividad.

De esta manera, en la siguiente tabla 2 realizamos la presentación de los objetivos de cada una de las tres actividades:

**Tabla 2.** Objetivos de las actividades del experimento.

Actividad	Objetivo
Actividad 1	Construir diferentes representaciones de un conjunto de datos. Construir y comprender la representación gráfica de puntos de un conjunto de datos.
Actividad 2	Analizar la variación de un conjunto de datos mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos utilizando el geogebra.
Actividad 3	Analizar la variación de dos conjuntos de datos mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos utilizando el geogebra.

Por lo que para la presentación y análisis de las actividades consideraremos el siguiente orden:

- Presentación del objetivo de la actividad.
- Descripción de la actividad.
- Presentación y descripción de cada ítem de la actividad.
- Presentación de las respuestas esperadas en cada ítem.
- Análisis de los resultados de cada ítem.
- Formalización de cada actividad mediante la socialización.

Además de ello, cabe decir que las respuestas esperadas en cada ítem han sido formuladas en base a los siguientes criterios:

- **Las nociones estadísticas desarrolladas por los profesores en su formación docente.** Las nociones de las medidas de tendencia central y variación.
- **El currículo implementado en la formación docente.** El desarrollo de los tipos de gráficos estadísticos para el análisis de datos.
- **Las definiciones que comprende nuestro marco teórico, la transnumeración.** Los procesos que forman parte de la transnumeración, según Wild y Pfannkuch (1999).
- **Los aportes de nuestros antecedentes.** Los problemas identificados y las recomendaciones dadas en las investigaciones.

### Actividad 01

En la Actividad 01 (ver anexo) se contó con la participación de 7 grupos. La actividad consta de 2 ítems, el primer ítem tiene el objetivo de construir diferentes representaciones de un conjunto de datos y el segundo ítem tiene el objetivo de construir y comprender específicamente el gráfico de puntos de un conjunto de datos, lo cual será necesario para estudiar la variación en la actividad 2 y actividad 3. En esta actividad hemos propuesto un grupo de datos expresados en imágenes sobre diversas actividades que realizan personas de diferentes edades (ver anexo).

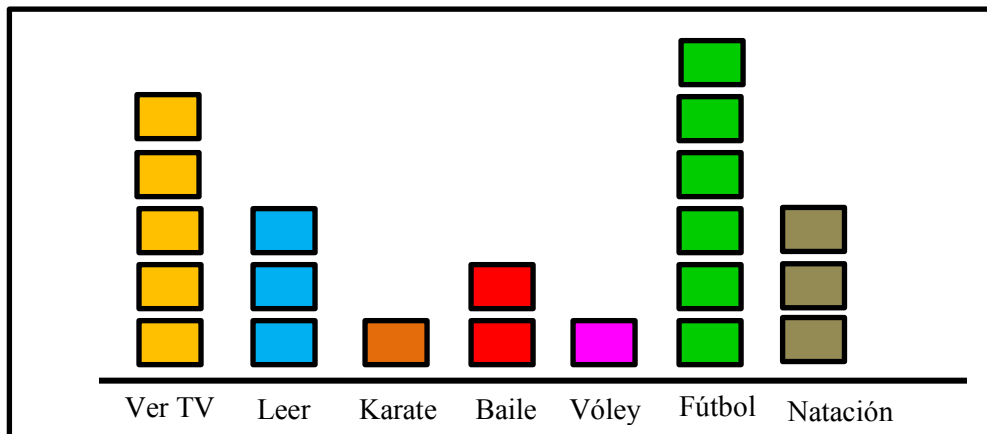
### Análisis del ítem a

**a) Realice una representación sobre las actividades de las personas utilizando las figuras, ¿qué información identifica a partir de esta representación?**

Para el desarrollo de este ítem, cada grupo recibe papelotes, plumones y 21 imágenes sobre las actividades que realizan las personas. Se solicita a los grupos que realicen una representación de los datos e identifiquen la información que encuentran a partir de dicha representación construida.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem a):**

- **Que los grupos establezcan columnas con las imágenes que presentan una actividad en común.** Los grupos realizan el conteo de las imágenes, organizándolas de acuerdo a la actividad que realizan las personas, tal como se presenta a continuación en la figura 24.



**Figura 24.** Representación esperada en base a las imágenes de las actividades que realizan las personas.

- **Que los grupos reconozcan el dato que más se repite así como mencionar que cada imagen, es decir cada dato, representa a una persona.** Los grupos reconocen que en este caso la moda es una medida que se puede apreciar mejor por tratarse de una variable cualitativa.

Los grupos presentan sus representaciones en la pizarra y explican los criterios que han tenido para organizarlo y construirlo, también realizan una comparación entre las representaciones.

### Resultados en el ítem a) – Actividad 1 – Grupo 1

El Grupo 1 antes de realizar la representación con las imágenes, realizó otros procedimientos diferentes a los esperados. Revisaron las actividades que realizaban las personas e hicieron el conteo de personas que realizan una actividad en común, tal como se muestra en la figura 25:

Natación	3	✓
Fútbol	5	✓
Voley	2	✓
Karate	1	✓
baile	2	✓
Television	5	✓
lectura	3	✓
Total		$n = 20$

**Figura 25.** Representación construida por el Grupo 1 realizando el conteo de actividades.

Este procedimiento permitió al grupo obtener información sobre qué actividades eran las que realizaban las personas y por lo tanto la variable estadística que podrían elegir para la representación de los datos. Como se observa, estas acciones corresponden a lo determinado por Wild y Pfannkuch (1999) respecto a la reorganización de los datos, por ejemplo, el conteo que llevó a determinar la variable y las categorías que corresponden a los procesos de transnumeración. A partir de esta información el Grupo 1 realizó la siguiente representación mostrada en la figura 26:

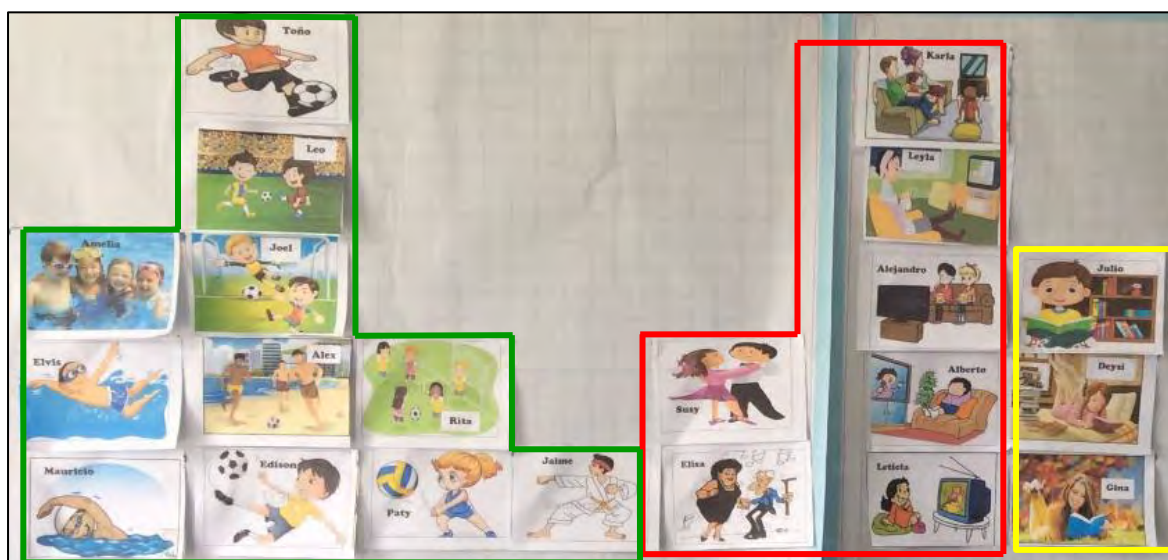
	Niños	Adultos	Total
Lectura	2	1	3
Deportes	10	1	11
Ver TV.	4	1	5
Ir al Baile	1	1	2
Total	17	4	21

**Figura 26.** Representación construida por el Grupo 1 mediante una tabla.

Como se observa en la figura 26, el Grupo 1 construyó una tabla en la cual organizó los datos presentados en las imágenes considerando la separación entre niños y adultos. Vemos que esta organización dio mayor información al grupo, información sobre cuántos niños y adultos realizaban cada actividad.

Además de ello, consideramos que la representación de los datos mediante la tabla ayudó al Grupo 1 a determinar y explicar la variable que habían presentado, por ello al realizar su representación con las imágenes se tenía una idea de lo que presentarían y la información que brindaba su representación. De esta manera, también observamos que el Grupo 1 en su representación construida creó las categorías de deporte, recreación y lectura, tal como se muestra en la siguiente figura 27:





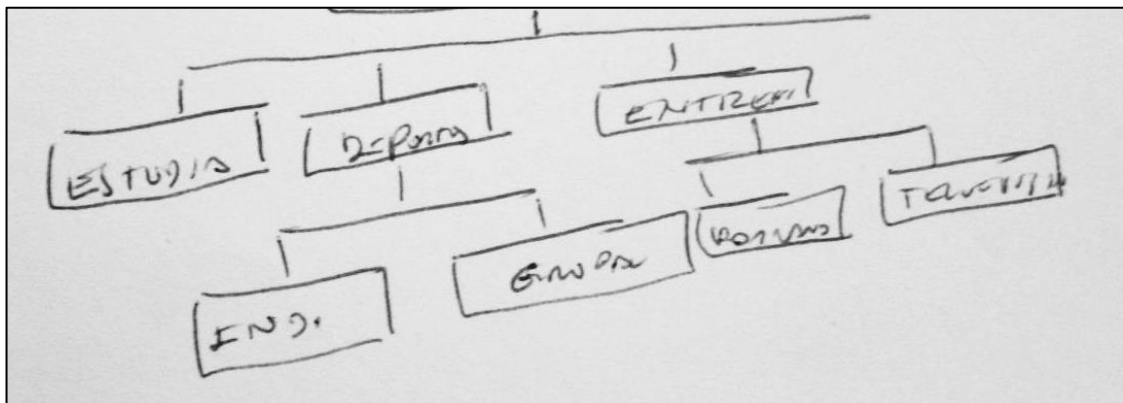
**Figura 27.** Representación construida por el Grupo 1 con las imágenes, sobre las actividades de las personas.

El Grupo 1 mencionó la frecuencia de cada actividad, pero no indicó qué actividad era realizada con mayor frecuencia. Consideramos que ello se debe a la preocupación de los grupos por determinar una variable y realizar una representación que consideraban adecuada. En la explicación sobre la información de la representación identificaron que cada imagen en las columnas representaba a una cantidad, en este caso una persona.

En referencia a ello, el Grupo 1 explicó que esta representación construida permitía saber qué actividades realizaban específicamente los niños y adultos, así como saber cuántos de ellos realizaban cada actividad. Esto confirma lo que establece Wild y Pfannkuch (1999), que los procesos de transnumeración permiten una mayor comprensión cada vez que se reorganizan los datos, eligiendo categorías, es decir, se realizan diferentes representaciones. Como se hemos mostrado en las figuras, el Grupo 1 realizó diferentes procesos que llevaron a comprender quiénes eran parte de la muestra, qué actividades realizaban y cuántos realizaban cada actividad.

### **Resultados en el ítem a) – Actividad 1 – Grupo 2**

El Grupo 2 antes de realizar la representación con las imágenes realizó otros procedimientos para saber qué actividades realizaban las personas y con qué criterio organizar las actividades. Por ejemplo, el grupo separó aquellas imágenes que presentaban la misma actividad y las contaron realizando un esquema, como se presenta en la figura 28:



**Figura 28.** Representación construida por el Grupo 2 mediante un esquema.

Como se observa en la figura 28, el Grupo 2 realizó una organización estableciendo como categorías el estudio, el deporte y el entretenimiento. Luego reorganizaron los datos y establecieron los deportes como actividad individual y grupal; respecto a la actividad entretenimiento, la reorganizaron como actividad de diversión y descanso. De esa manera, el Grupo 2 realizó la siguiente representación, como se muestra en la figura 29:



**Figura 29.** Representación construida por el Grupo 2 con las imágenes, sobre las actividades de las personas.

En la figura 29 se observa que el grupo organizó los datos según el número de participantes en cada actividad, a diferencia del grupo anterior, empezando desde la parte superior hacia la parte inferior; y presentó como categorías: el estudio, el deporte individual, el deporte grupal, la diversión y el descanso. Asimismo, esta representación permitió saber qué actividades realizaban y la frecuencia. Aunque el grupo no mencionó que se trataba de una variable

cualitativa y tampoco indicó qué actividad era realizada con más frecuencia, sí reconoció que cada imagen representaba una persona respecto a la actividad que realizaba.

A partir de esto, podemos decir que estas acciones del Grupo 2 corresponden a los procesos de transnumeración que en este caso realizaron para comprender la información que brindaban los datos, más aún la forma cómo las organizaron llevó al grupo a tener mayor información sobre las actividades que realizaban las personas, tal como lo afirma Wild y Pfannkuch (1999).

### **Consolidación de la Actividad 1 – Ítem a**

Al terminar de realizar el Ítem a) la profesora investigadora, consolidó los aportes y las diferentes representaciones que realizaron los grupos. Se reconoció que hay diferentes formas de representar un conjunto de datos y que la forma cómo la organizamos, así como las variables y/o categorías que utilizemos dependerá de qué es lo que queremos investigar, de esta manera cada forma de representación brindará una información más detallada del conjunto de datos, según la profundización del estudio.

### **Análisis del ítem b**

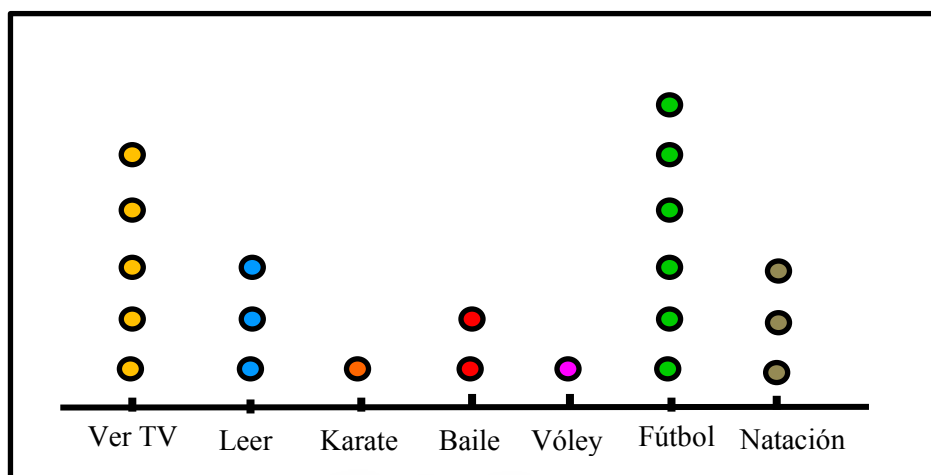
**b) Ahora realice una representación en la cual se reemplacen las figuras por puntos, ¿qué características observa en este gráfico? Escriba algunas líneas.**

En este ítem pretendemos que los grupos representen los datos mediante el gráfico de puntos y que identifiquen alguna información que observan a partir de esta representación construida.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem b):**

- **Que los grupos reconozcan que el gráfico de puntos permite una visión individual de los datos, pero también una visión general de ellos.** Los grupos asocian a cada punto como el representante de cada persona y observan cómo están distribuidas todas las personas según las actividades que realizan.

En la figura 30 presentamos la representación del gráfico de puntos que esperamos que realicen los grupos:



**Figura 30.** Representación esperada del gráfico de puntos sobre las actividades de las personas.

- **Que los grupos reconozcan que el gráfico de puntos permite identificar y comprender la moda.** Los grupos identifican que la mayor frecuencia se representa dónde hay más puntos, relacionándolo con la moda, ya que es una variable cualitativa.
- **Que los grupos identifiquen los elementos del gráfico de puntos.** Los grupos establecen que horizontalmente se deben presentar las actividades y que de forma vertical la frecuencia de personas que realiza cada actividad con puntos.

Luego, los grupos presentan sus representaciones en la pizarra y explican cada representación, realizando la comparación entre las diferentes construcciones realizadas por cada grupo. Finalmente se realiza la consolidación, en la cual los grupos reconocen las características del gráfico de puntos, además de los elementos que se deben considerar para su construcción, y establecemos que el gráfico de puntos también se puede construir con el software geogebra.

### **Resultados en el Ítem b) – Actividad 1 – Grupo 1**

Como se observa, en este ítem, el Grupo 1 reorganizó los datos y construyó una representación diferente a lo esperado inicialmente. En la representación del grupo observamos que la variable establecida fue “actividad” y las categorías consideradas fueron natación, fútbol, vóley, karate, baile, televisión y lectura. Asimismo, el Grupo 1 denotó, en su representación, cada punto extremo de las barras los siguientes pares ordenados: (N,3), (F,4), (V,2), (K,1), (T,5) y (L,3); y trazaron el eje vertical y horizontal, tal como se muestra a continuación en la figura 31:

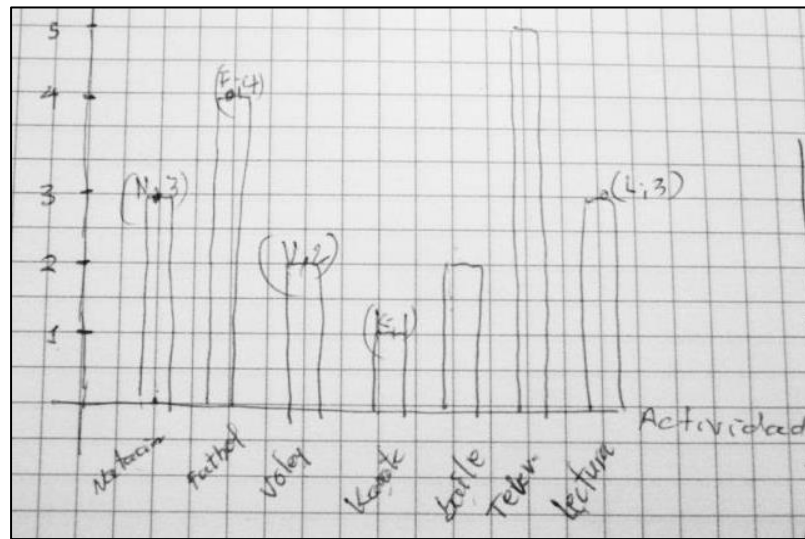


Figura 31. Representación construida por el Grupo 1 mediante barras.

Al observar que la representación que estaban realizando no se acercaba a lo que habíamos solicitado, recomendamos volver a revisar las indicaciones del ítem b) por lo que el grupo reconsideró sus procedimientos y realizó la siguiente representación mostrada en la figura 32:

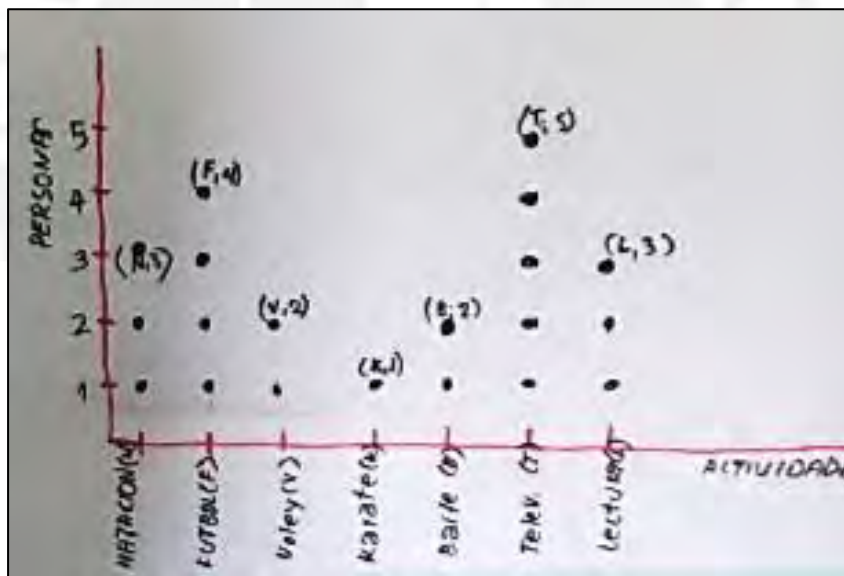


Figura 32. Representación construida por el Grupo 1 mediante puntos.

De esta manera el Grupo 1 explicó que la línea horizontal indicaba las actividades que realizaban las personas y la línea vertical indicaba cuántas personas realizaban cada actividad. Respecto a los pares ordenados indicaron que cada par ordenado, por ejemplo (N,3) significaba que natación practicaban 3 personas y (N, 2) significaría que natación practicaban 2 personas, y así sucesivamente para (N,0), (N,1), considerando lo mismo para las otras actividades. Creemos que la presentación de los pares ordenados se debe a que el grupo

consideró el gráfico de puntos con un gráfico que debe ser construido en el plano cartesiano, es decir, una representación matemática, más allá de realizar una representación estadística. Además de ello, esta representación era de esperarse ya que en el currículo de la formación de docentes, no se establece el estudio de este tipo de representación de datos.

El Grupo 1 reconoció que cada punto representaba a una persona y que el gráfico de puntos permitía ver rápidamente en forma conjunta todos los datos con los que se está trabajando, así como analizar la información de un modo rápido y ordenado. Además de ello, el grupo mencionó que la forma de trabajar con los datos dependerá de la pregunta que se quiera responder, es decir, de lo que quisiéramos saber; ello determinaría cuántas categorías establecer, así como la forma de organizar y explorar los datos.

En este ítem se observó que el Grupo 1, al reorganizar los datos obtuvo mayor información acerca de las actividades que practicaban las personas, esta representación fue diferente a la de otros grupos porque determinó otras categorías diferentes, y permitió informarse y comprender aún más sobre el conjunto de datos, en el sentido de Wild y Pfannkuch (1999).

### Resultados en el ítem b) – Actividad 1 – Grupo 2

En el ítem b) el Grupo 2 reemplazó puntos en lugar de las imágenes pero sólo la intersección de las líneas punteadas trazadas vertical y horizontalmente. En la representación se observa que trazaron el eje horizontal con las actividades que realizaban las personas y el eje vertical con la cantidad de personas que realiza cada actividad. (Ver figura 33)

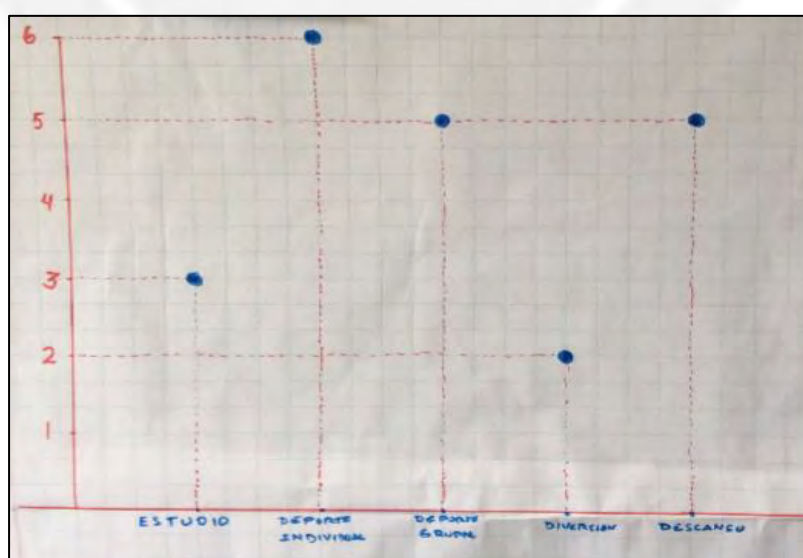


Figura 33. Representación construida por el Grupo 2 mediante puntos.

El Grupo 2 estableció la variable estadística “actividades”, así como las categorías: estudio, deporte individual, deporte grupal, diversión y descanso. También se observa que el grupo relacionó la variable con la frecuencia absoluta de cada categoría denotando con un solo punto al final de la línea vertical punteada. Creemos que el grupo representó con un punto, porque consideró la relación entre la categoría y su respectiva frecuencia, relacionando el gráfico de puntos con una función en el plano cartesiano.

Por esta razón, creemos que el Grupo 2 no mencionó que cada punto era la representación de una cantidad, en este caso de una persona respecto a la actividad que realizaba porque sólo reemplazó con un punto en el extremo, y la misma razón para no reconocer que el gráfico de puntos permitiría observar la distribución total de los datos, ya que esos cinco puntos no ayudaron a observar el total de datos que eran 21. (Ver figura 33)

Después de observar las representaciones construidas por cada grupo, el Grupo 2 comentó que el gráfico de puntos era una representación que los estudiantes ya conocían, y que los estudiantes de 4° y 5° de primaria llegaban a 1° de secundaria con esos conocimientos, inclusive hasta el gráfico de barras; y que los estudiantes de 4° de secundaria requerían que se les enseñe algo más complejo, con mayor nivel. Creemos que este comentario refleja la creencia de los profesores acerca de que el objetivo principal de hacer un gráfico es sólo su construcción, y no como una herramienta para analizar los datos (Silva, 2007; Coutinho, Almouloud y Silva, 2012)

Al respecto, Wild y Pfannkuch (1999) establecen que la transnumeración está basada en el cambio de representaciones y que ello permite el análisis de los datos con mayor profundidad para acceder y comprender mejor la información que abarca esa representación de la realidad, pero ese cambio de representación debe ser un proceso reflexivo de saber por qué será necesario cambiar de representación, en qué ayudará ese cambio de representación; lo cual mejorará la capacidad para transnumerar y conduciría al desarrollo del pensamiento estadístico.

### **Consolidación de la Actividad 1 – Ítem b**

Se realizó la consolidación sobre el gráfico de puntos, sus elementos, su construcción y la información que se puede obtener a partir de este gráfico, enfatizando que no está relacionado al plano cartesiano, ni a una función. Asimismo, se estableció que el gráfico de puntos se podía construir en el software geogebra.

### **Análisis de las acciones**

Las acciones del Grupo1 y Grupo 2 muestran que realizaron lo que se esperaba. Como se explicó, en el primer ítem, los grupos construyeron diferentes representaciones después de realizar un proceso de organizar y reorganizar los datos presentados mediante las imágenes. Cada grupo construyó una diferente representación, un pictograma diferente; cada representación presentaba una información que se complementaba con la otra representación, permitiendo la comprensión de lo que revelaba el conjunto de datos, en el sentido de Wild y Pfannkuch (1999). A partir de los resultados, podemos afirmar que dejar que los grupos organicen y analicen los datos libremente, promovió el surgimiento de una transnumeración muy natural, sin forzar la construcción de gráficos establecidos o ya conocidos.

Respecto, al segundo ítem, en el cual lo más óptimo hubiese sido que los grupos construyan de forma espontánea y comprendan el gráfico de puntos a partir del pictograma, tuvimos que plantear nuestro ítem de forma explícita, “reemplazar las imágenes por puntos”, ya que el gráfico de puntos no forma parte del currículo de la formación docente, por lo que no podíamos asegurar que todos los ellos tenían el conocimiento de este tipo de gráfico, y por ende surgiera espontáneamente.

En el desarrollo de la actividad, percibimos algunas concepciones de los profesores, que influyeron en sus respuestas, acerca de lo que entendían en relación a un gráfico estadístico y un gráfico matemático en el plano cartesiano. Los grupos asociaban un gráfico estadístico a una función, estableciendo puntos que significaban pares ordenados. Por ello, tuvimos que intervenir al final de la actividad, realizando la consolidación sobre lo que era el gráfico de puntos y valorar la información que se podía obtener de un conjunto de datos mediante esta representación.

La construcción del gráfico de puntos permitió a los grupos entender otra forma de representar un conjunto de datos, así como entender que representar gráficamente ese conjunto de datos no es el fin en el estudio de la estadística, sino que es una herramienta que sirve para el análisis de los datos, una forma de obtener mayor información. Efectivamente, en las escuelas promovemos la construcción de gráficos estadísticos, sin reflexionar por qué es necesario hacerlo, en otras palabras, enseñamos a transnumerar, pero no dejamos que los estudiantes realicen una transnumeración natural y reflexiva, en el cual, ellos sean conscientes de por qué pasar de una representación a otra.

Ante esto, podemos reconocer que se lograron los objetivos propuestos en la Actividad 1.



## Actividad 02

La Actividad 2 (ver anexo) se realizó con 6 grupos. Esta actividad está conformada por 6 ítems y tiene el objetivo de analizar la variación de un conjunto de datos mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos utilizando el geogebra. En esta actividad se propuso utilizar sólo un conjunto de datos, de manera que los docentes perciban la variación de los datos, a partir de la observación de su distribución en el gráfico de puntos, la movilización de las nociones de la media y la desviación estándar, así como la representatividad de la media y su sensibilidad respecto a los valores extremos.

En esta actividad se presenta una situación relacionada a las estaturas de estudiantes mujeres de 3° de secundaria y el valor de la media del grupo como requisito para la participación en un desfile escolar (Ver figura 34).

En la I.E José Faustino Sánchez Carrión de Lurín los estudiantes se organizan para participar en el desfile escolar. Sin embargo, uno de los requisitos para que participen en el desfile es que las medidas de las estaturas de las estudiantes mujeres deben presentar en promedio 1.58 cm. Según las medidas de las estaturas de las estudiantes presentadas a continuación **¿considera que las estudiantes pueden participar en el desfile?**

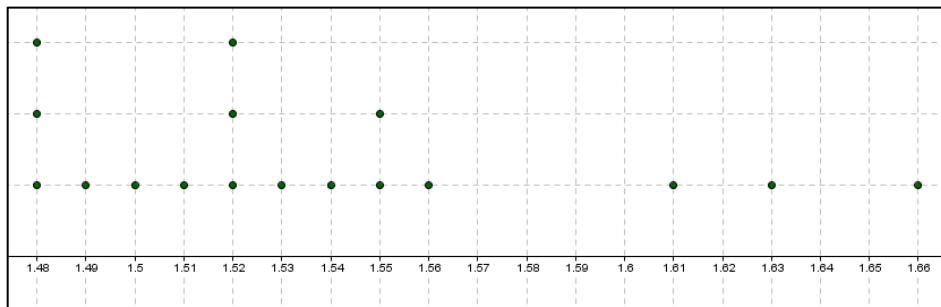
ESTUDIANTE	ESTATURA (cm)	ESTUDIANTE	ESTATURA (cm)
E1	1,50	E10	1,63
E2	1,52	E11	1,52
E3	1,48	E12	1,48
E4	1,55	E13	1,53
E5	1,61	E14	1,51
E6	1,66	E15	1,49
E7	1,48	E16	1,55
E8	1,54	E17	1,56
E9	1,52		

Figura 34. Situación propuesta en la Actividad 02.

Para su desarrollo solicitamos a los grupos que realicen el gráfico de puntos en el geogebra:

**Abra el geogebra y según las orientaciones en la guía del geogebra construya un gráfico de puntos sobre las estaturas de las estudiantes mujeres.**

El gráfico de puntos que esperamos que realicen los grupos en el geogebra es el siguiente:  
(Ver figura 35)



**Figura 35.** Gráfico de puntos que se espera realicen los grupos sobre las estaturas de las estudiantes del 3° G.

### Análisis del ítem a

**a) ¿Qué información de las estaturas de las estudiantes identifica a partir del gráfico de puntos?**

En este ítem esperamos que los grupos identifiquen la información en su representación construida, aquella información que consideren resaltante a partir de la representación del gráfico de puntos y tener una idea de la participación o no de los estudiantes en el desfile. Respecto a ello, Wild y Pfannkuch (1999) afirman que el proceso de transnumeración es un proceso dinámico de cambiar representaciones para generar comprensión. Esto es capturar o aprehender el significado de algún fenómeno o hecho observado mediante alguna representación, en este caso que los grupos identifiquen la información que consideran sobre las estaturas de las estudiantes mediante el gráfico de puntos.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem a):**

- **Que los grupos identifiquen la máxima y mínima estatura.** La mínima estatura (1.48 m) y la máxima estatura (1.66 m).
- **Que los grupos identifiquen que hay pocas estudiantes altas.** Estudiantes con 1.61m, 1.63 y 1.66m.
- **Que hay varias estudiantes de estatura baja.** Hay 14 estudiantes que miden menos de 1.58m.

### Resultados en el ítem a) – Actividad 2 – Grupo 1

En las respuestas del Grupo 1 se observa que realizaron lo que se esperaba. El grupo identificó la estatura mínima 1.48m y la estatura máxima 1.66m. También reconoció que tres estudiantes tenían una estatura mayor a la requerida y catorce estudiantes no tenían la estatura que se requería para participar en el desfile. De esta forma, las acciones del Grupo 1

mostraron haber identificado información sobre las estaturas de las estudiantes, mediante la aprehensión o captura de la información de las estaturas en el gráfico de puntos.

### **Resultados en el ítem a) – Actividad 2 – Grupo 2**

En las respuestas del Grupo 2 se muestra que el grupo identificó el rango de la distribución de los datos, así como la mínima y máxima estatura 1.48m y 1.66m respectivamente. Además de ello, el grupo reconoció la frecuencia de cada estatura. De esta manera, el grupo logró capturar información que consideró más resaltante sobre las estaturas de las estudiantes a partir de la representación del gráfico de puntos, que pudo de alguna forma permitir al grupo tener alguna posible respuesta a la pregunta planteada en la situación propuesta.

### **Análisis del ítem b**

**b) ¿Puede identificar alguna(s) medida(s) estadística(s) sobre las estaturas de las estudiantes a partir del gráfico de puntos? ¿cuáles?, ¿cuál es la información que brindan esas medidas estadísticas? Escriba algunas líneas.**

En este ítem esperamos que los grupos representen y/o resuman el conjunto de los datos mediante el valor de la media. Además de ello, esperamos que el grupo explique la información que brinda esta medida, recurriendo a su significado. Respecto a ello, Wild y Pfannkuch (1999), afirman que uno de los procesos de transnumeración es representar todo un conjunto de datos mediante alguna medida estadística.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem b):**

- **Que los grupos identifiquen el valor de la moda.** La estatura más frecuente en las estudiantes (1.48 m y 1.52 m).
- **Que los grupos identifiquen el valor de la media.** Identifican la media (1.54 m) siguiendo las indicaciones de la guía (utilizando los comandos) o realizando cálculos utilizando lápiz y papel.
- **Que los grupos identifiquen el valor de la mediana.** Realizando el conteo de los datos (1.52 m), al observar la distribución en el gráfico de puntos, la hoja de cálculo, utilizando el comando del geogebra u ordenando los datos de menor a mayor o viceversa.
- **Que los grupos expliquen el significado del valor de la mediana dentro del contexto.** Los grupos explican que la mediana significa que el 50% de las estudiantes miden más de 1.52 m y el otro 50% mide menos o igual que 1.52 m.

- **Que los grupos expliquen el significado del valor de la media dentro del contexto:** Los grupos explican que el valor de la media (1.54m) indica que las estudiantes miden 1.54m, ya que es una medida que representa a un conjunto de datos, en este caso a las medidas de todas las estudiantes del 3° G.
- **Que los grupos identifiquen los valores atípicos.** Considerando que hay estudiantes cuyas estaturas son muy bajas y ello puede influenciar en la media que se pide como requisito para participar en el desfile.

### Resultados en el ítem b) – Actividad 2 – Grupo 1

El Grupo 1 determinó el valor de la media y la mediana, pero al tratar de explicar el significado de la media lo hizo utilizando un sinónimo, ya que mencionó que la media (1.54m) es el promedio de estaturas. Respecto a la mediana sólo explicó que era la medida que estaba ubicada en el centro de los datos. El grupo no llegó a determinar el significado de los valores de la media y mediana considerando el contexto, pero sí reconoció que se trataba de un conjunto de datos bimodal: tres estudiantes de 1.48m y tres estudiantes de 1.52m de estatura.

### Resultados en el ítem b) – Actividad 2 – Grupo 2

Siguiendo las indicaciones de la guía el Grupo 2 determinó el valor de la media 1.54m y la mediana 1.53m, y explicó que el significado de la mediana es el valor que divide en dos partes a un conjunto de datos, pero no explicaron el significado de la media. Asimismo, el grupo estableció que se trataba de una distribución bimodal, ya que habían tres estudiantes de 1.48m y tres estudiantes de 1.52m. (Ver figura 36).

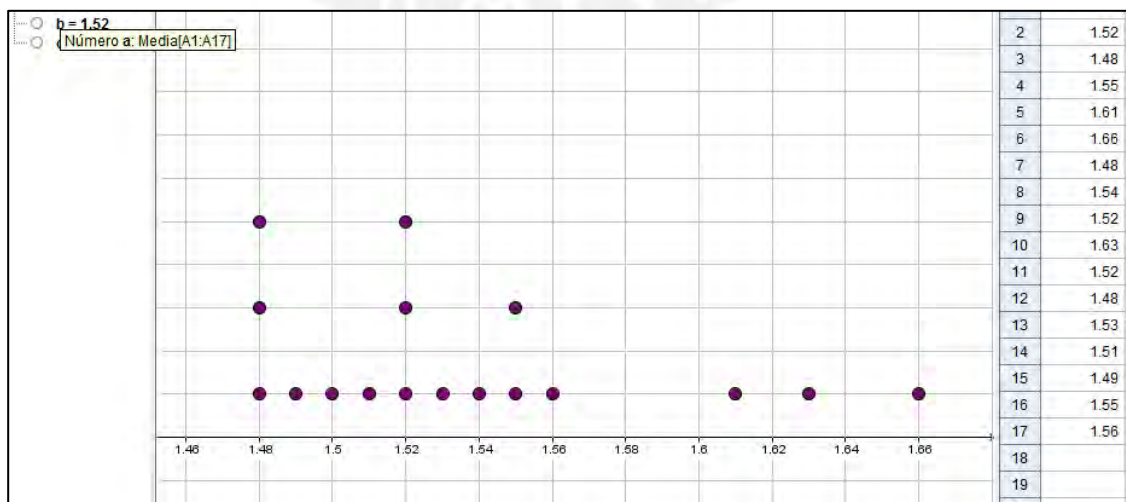


Figura 36. Representación del gráfico de puntos y media realizada por el Grupo 2.

### Análisis del ítem c

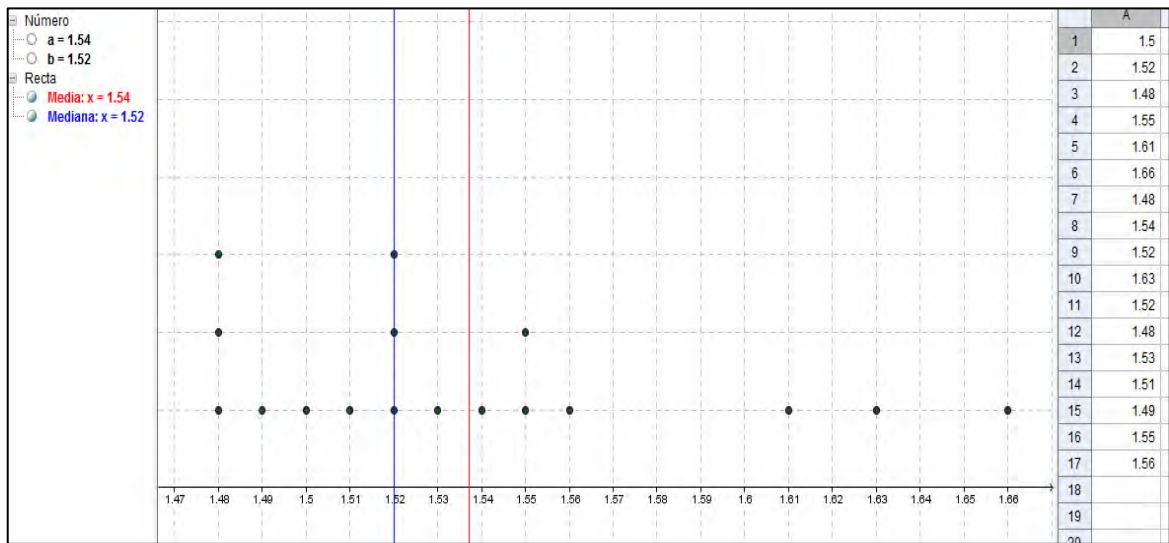
**c) ¿Considera que estas medidas se relacionan de alguna forma con la distribución de los datos (medida de las estaturas) en el gráfico de puntos? ¿cómo representaría esa(s) medida(s) en el gráfico de puntos?**

En este ítem esperamos que los grupos relacionen el gráfico de puntos (distribución de los datos) con alguna medida identificada, ésto como una herramienta estadística que significa una forma de representar a todo el conjunto de datos, es decir otra representación, así como una representación visual para indicar el valor de la media.

Al respecto, Chick, Pfannkuch y Watson (2005), afirman que la transnumeración implica reorganizar y calcular con datos, considerando que los datos revelen lo que realmente dice todo el conjunto de datos. Por esta razón, con el presente ítem buscamos que los grupos verifiquen si realmente la distribución de los puntos con la media 1.54m está acorde, es decir si todas las estaturas de las estudiantes realmente se acercan a ese valor de la media o identifiquen alguna información más en los datos.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem c):**

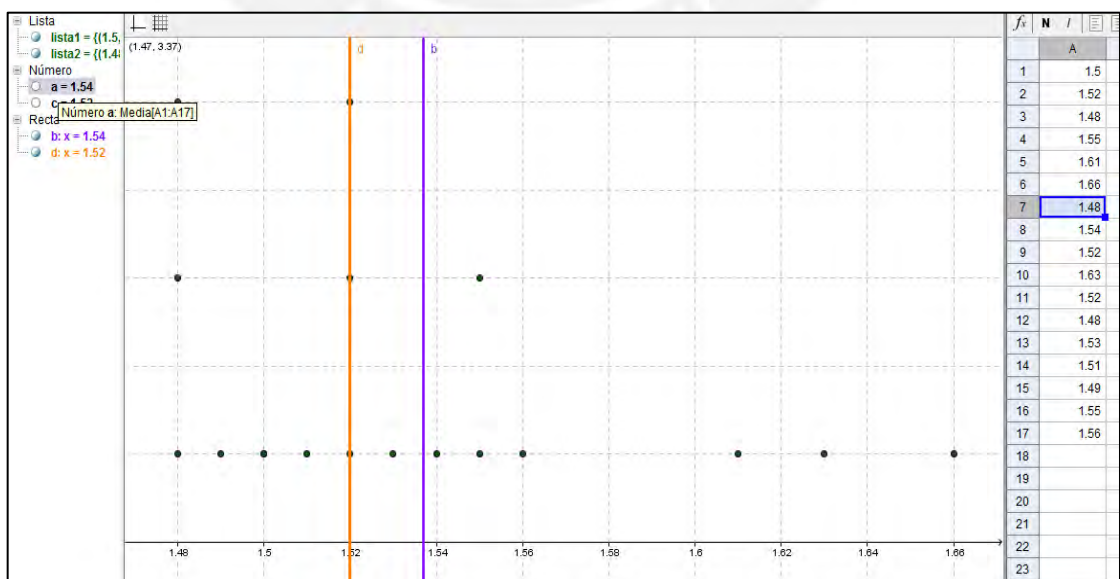
- **Que los grupos verifiquen la mediana como el valor que divide el conjunto de datos en dos partes con un mismo número de elementos.** Los grupos al contar los puntos verifican que la mitad de los puntos se encuentra a la derecha del valor de la mediana y la otra mitad de los puntos se encuentra a su izquierda.
- **Que los grupos verifiquen que el valor de la media es un valor alrededor del cual la mayoría de los puntos se acercan más.** Los grupos observan la distribución de los puntos en relación al valor de la media.
- **Que los grupos representen la media trazando una línea perpendicular a la línea horizontal.** Una línea perpendicular que pase por el punto 1.54 m en el eje horizontal, describiendo si esta medida es aquella ante la cual la mayoría de los datos se acercan.
- **Que los grupos representen la mediana trazando una línea perpendicular a la línea horizontal.** Una línea perpendicular que pase por 1.52 m corroborando el significado de la medida en el gráfico de puntos (ver figura 37).



**Figura 37.** Gráfico de puntos que se espera realicen los grupos mostrando los trazos en el valor de la media y mediana de las estaturas de las estudiantes del 3° G.

### Resultados en el Ítem c) – Actividad 2 – Grupo 1

Al observar los procedimientos e intervenciones del Grupo 1, percibimos que realizaban la comparación de los valores de la media y la mediana numéricamente, por lo que se le preguntó: ¿de qué otra forma podían representar “entre los puntos”, ya no numéricamente, los valores de la media y la mediana? De esta manera, el grupo explicó que respecto al valor de la mediana 1.52m, éste valor marcaba como un límite entre un lado derecho e izquierdo, preguntando “si era posible trazar una línea vertical en ese punto”. Por lo que asentamos en decir, que sí era posible hacerlo e indicamos los comandos que ayudarían al Grupo 1 a representar la media y la mediana de forma visual utilizando una línea perpendicular que pasaba por 1.5371 en la línea horizontal, así como la mediana en 1.52m. (Ver figura 38).



**Figura 38.** Representación construida de la media y mediana por el Grupo 1.

Sin embargo, el grupo reconoció que los datos, es decir las estaturas de las estudiantes, estaban distribuidos en el gráfico de puntos, pero no identificaron, ni explicaron la relación del valor de la media con la distribución de los datos en el gráfico de puntos. De esta manera las acciones del grupo muestran que representaron el conjunto de datos mediante el valor de la media y la mediana con una línea, pero no supo explicar cuál era la relación entre estas dos representaciones, demostrándolo en sus declaraciones durante el desarrollo de la actividad, tal como se muestra en la transcripción del siguiente audio:

**Grupo 1:** La mediana es la que divide en dos partes. El gráfico no ayudaría a entender la mediana, porque los datos no están ordenados. Contando esos puntos, ocho, ocho y el del centro?

**Otro grupo:** No está desordenado, ya está ordenado.

**Grupo 1:** Para la mediana hay que ordenar los datos, para hallar la media, hay que aplicar la fórmula, habría que sumar. No hay otra forma.

**Otro grupo:** En el gráfico de puntos ya está ordenado.

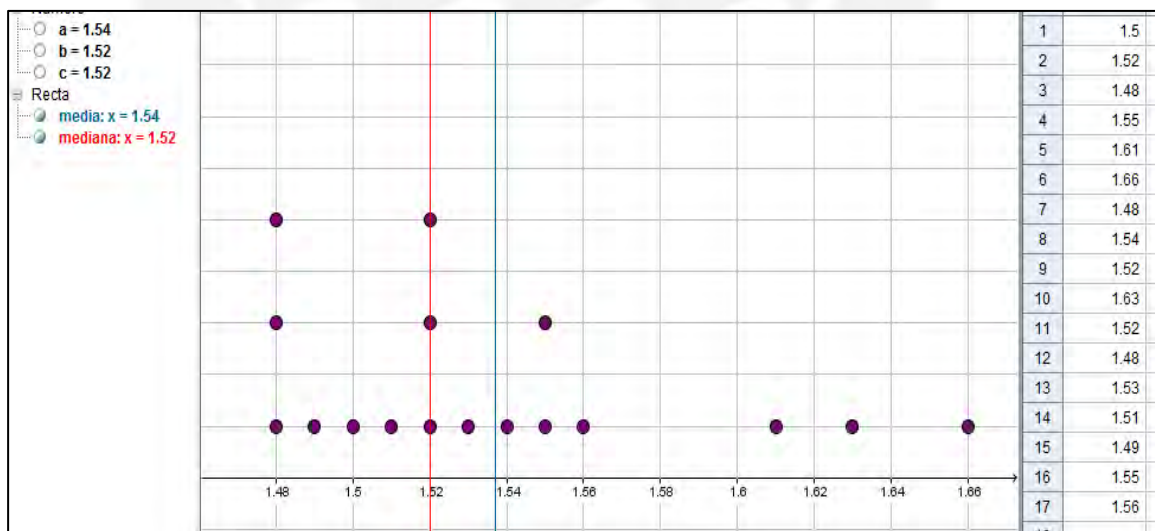
**Grupo 1:** Para la mediana primero se ordena y luego se cuenta.

**Otro grupo:** Yo cuento de ocho en ocho y el nueve es la mediana.

**Grupo 1:** ¿Cómo ordenaríamos en el geogebra de menor a mayor? Porque en Excel sí se puede ordenar.

### Resultados en el Ítem c) – Actividad 2 – Grupo 2

Entre las intervenciones del Grupo 2, éste consultó si podía utilizar otros comandos del geogebra, por lo que preguntamos ¿Qué querían realizar?. Entonces el Grupo mencionó que querían señalar cada valor de la media y mediana con una recta. De esta manera, el Grupo 2 representó el valor de la media y mediana con una línea vertical que pasaba por 1.537m en la línea horizontal. (Ver figura 39).



**Figura 39.** Representación construida de la media y mediana por el Grupo 2

El grupo 2 mencionó el valor de la media, pero no explicó el significado de la media dentro del contexto. Sin embargo, el grupo sí explicó que la mediana significaba que el 50% de las estudiantes tenía una estatura menor o igual a 1.52m y el otro 50% de estudiantes tenía una

estatura mayor de 1.52m. De esta manera las acciones del grupo 2 muestran que realizaron una representación visual de la media y la mediana, pero no explicaron de alguna forma si realmente la distribución de los puntos y la media 1.54m representaban lo mismo, es decir, no relacionaron esta medida con la distribución de los datos en el gráfico de puntos.

#### **Análisis del ítem d**

**d) Si se sabe que la media es un número que representa a cada uno de los valores de un conjunto de datos (las medidas de las estaturas) ¿considera que la media de las estaturas es representativa? Escriba algunas líneas.**

En este ítem esperamos que los grupos perciban la variación de los datos respecto al significado de la media de las estaturas de las estudiantes, mediante el análisis de la media y la distribución de los datos en el gráfico de puntos. De esta manera, los grupos realizarían el análisis con diferentes representaciones de las estaturas de las estudiantes para encontrar la información que estos datos revelan y responder a la pregunta central de la situación.

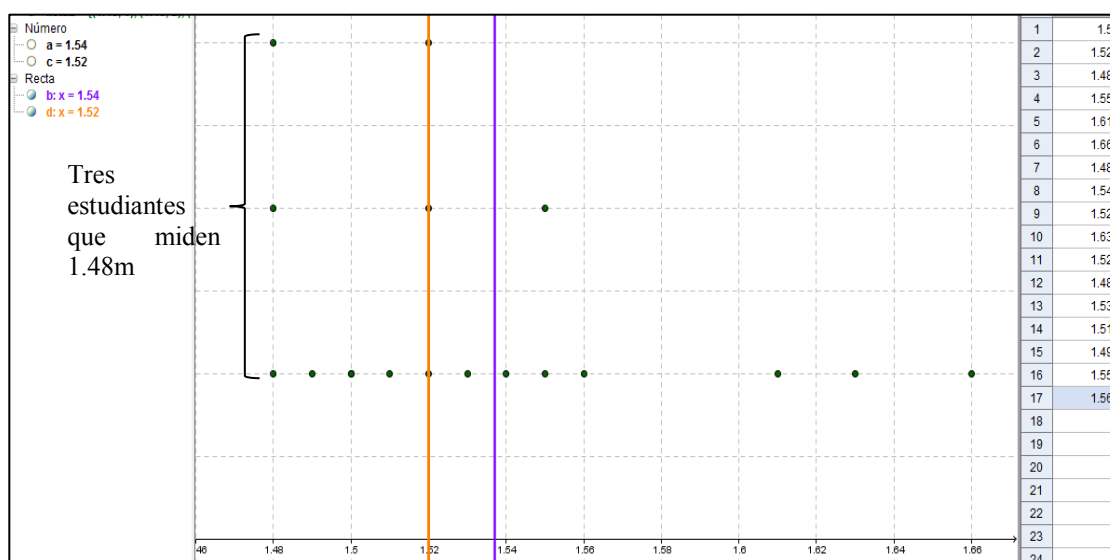
**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem d):**

- **Que los grupos comparen el valor de cada uno de los datos con el valor de la media.** Los grupos considerando la definición de la media, establecen si realmente el valor de la media, es decir la estatura 1.54 m es un buen representante de las demás estaturas.
- **Que los grupos relacionen la representatividad de la media con la distancia que hay entre los valores de cada uno de los datos y la media.** Los grupos observan que hay puntos alejados de la media teniendo como por ejemplo las estaturas 1.48m o 1.66m.
- **Que los grupos movilicen sus nociones sobre las medidas de variación.** Los grupos comparan esas distancias, es decir las desviaciones entre el valor de cada estatura y la media 1.54m, o por lo menos de las estaturas más resaltantes con el valor de la media.
- **Que los grupos reconozcan que la media 1.54m no es una estatura representativa de las estudiantes.** Los grupos comparando las representaciones de las estaturas es decir, el valor de la media y el gráfico de puntos confirmen y fundamenten que el valor de la media, no es un buen representante.
- **Que los grupos reconozcan la variación en los datos.** Los grupos explican que las estaturas muy altas o muy bajas, es decir los valores atípicos 1.61m, 1.63m y 1.66m no permiten afirmar que la media sea representativa, porque hay mucha variación.



### Resultados en el Ítem d) – Actividad 2 – Grupo 1

El Grupo 1 responde que se trata de una distribución no simétrica porque no coinciden la media, mediana y moda, y explica que sus valores son diferentes. A partir de ello, considera que la media no es la más representativa, ya que hay estaturas muy alejadas de la media que se requería para participar en el desfile. Ante esto, el grupo reconoce que hay mucha variación en el conjunto de datos y emplea el término dispersión para referirse a que las tres estaturas de 1.48m son las medidas que hacen que la media no sea representativa. (Ver figura 40)

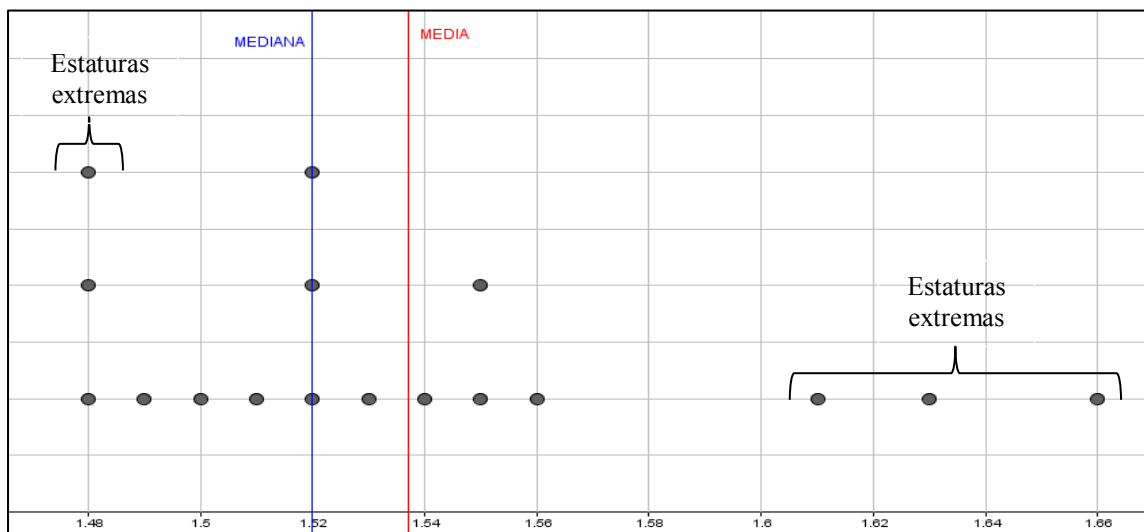


**Figura 40.** Indicación del Grupo 1 en el gráfico de puntos sobre las tres estaturas más bajas del conjunto de datos.

De esta manera, el Grupo 1 consideró tres representaciones del conjunto de datos de las estaturas, éstos son, el valor de la media, la línea que utilizó para indicar por dónde se ubicaba su respectivo valor y el gráfico de puntos que muestra cómo están distribuidas las medidas de las estaturas, lo cual, permitió al grupo percibir la variación de los datos y establecer que la media no es representativa porque había mucha dispersión.

### Resultados en el Ítem d) – Actividad 2 – Grupo 2

El Grupo 2 estableció que el valor de la media no era confiable, debido a la mínima y máxima estatura correspondiente a dos estudiantes: 1.48m y 1.66m respectivamente. El grupo observó que aquellas estaturas eran medidas que se encontraban muy alejadas del valor de la media correspondiente al conjunto de datos. De esta manera, en la siguiente figura 41, mostramos lo explicado anteriormente:



**Figura 41.** Indicaciones de la mínima y máxima estatura reconocidas por el Grupo 2

El grupo 2 explicó que estas estaturas hacían que la distribución de los datos sea más dispersa, estableciendo que la media era un valor afectado por los valores extremos. De esta manera las acciones de los grupos muestran que el grupo percibió la variación de los datos a partir de las diferentes representaciones de las estaturas de las estudiantes, del valor de la media, el gráfico de puntos y la línea vertical que pasaba por 1.54m en la línea horizontal.

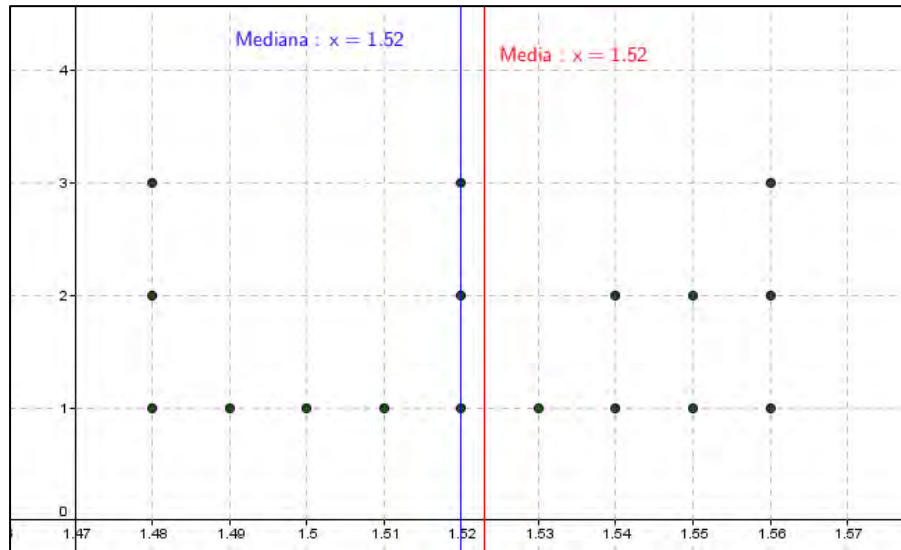
#### Análisis del ítem e

**e) Si quisiéramos que las estaturas de las estudiantes cumplan con el requisito establecido ¿cómo cree que deberían ser las medidas de las estaturas de las estudiantes? ¿Por qué?**

En este ítem esperamos que los grupos al percibir la variación de los datos por las estaturas muy altas o muy bajas, y apoyados en la representación del gráfico de puntos y el valor de la media, propongan realizar cambios en las medidas de las estaturas, considerando los cambios que van surgiendo en las representaciones conforme van variando los valores de las estaturas.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem e):**

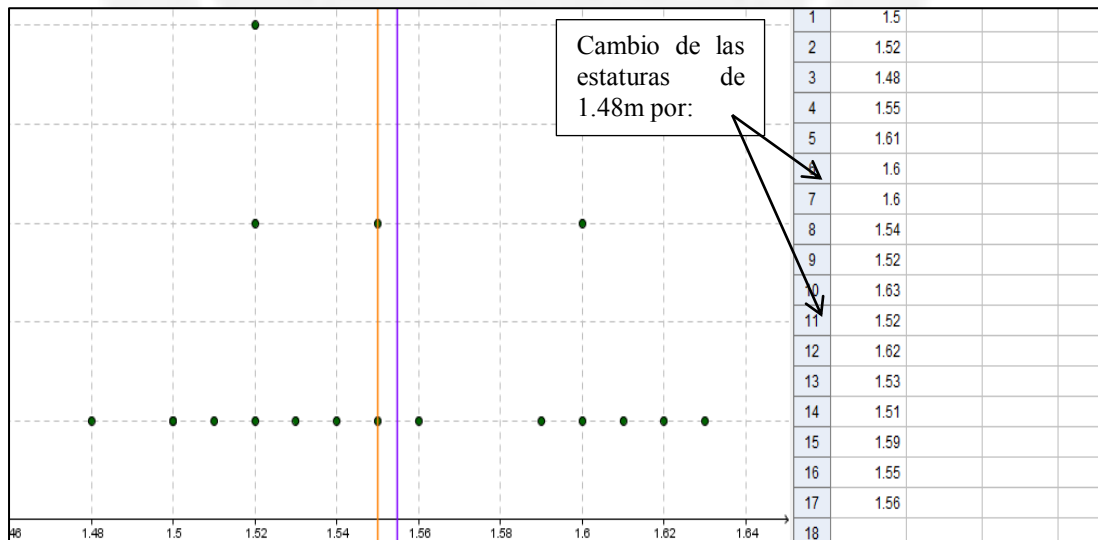
- **Que los grupos consideren que la distribución de los datos debe ser más homogénea.** Es decir que las medidas de las estaturas sean más cercanas a la media buscada 1.58, no tan alejadas como las estaturas 1.48m o 1.49m.
- **Que los grupos propongan y realicen cambios en las medidas de las estaturas.** Es decir cambiar la medida de las estaturas muy bajas por estaturas más cercanas a la media que es requisito para participar en el desfile 1.58m (Ver figura 42)



**Figura 42.** Representación que se espera de los grupos sobre la media y mediana de las estaturas de las estudiantes del 3° G.

### Resultados en el Ítem e) – Actividad 2 – Grupo 1

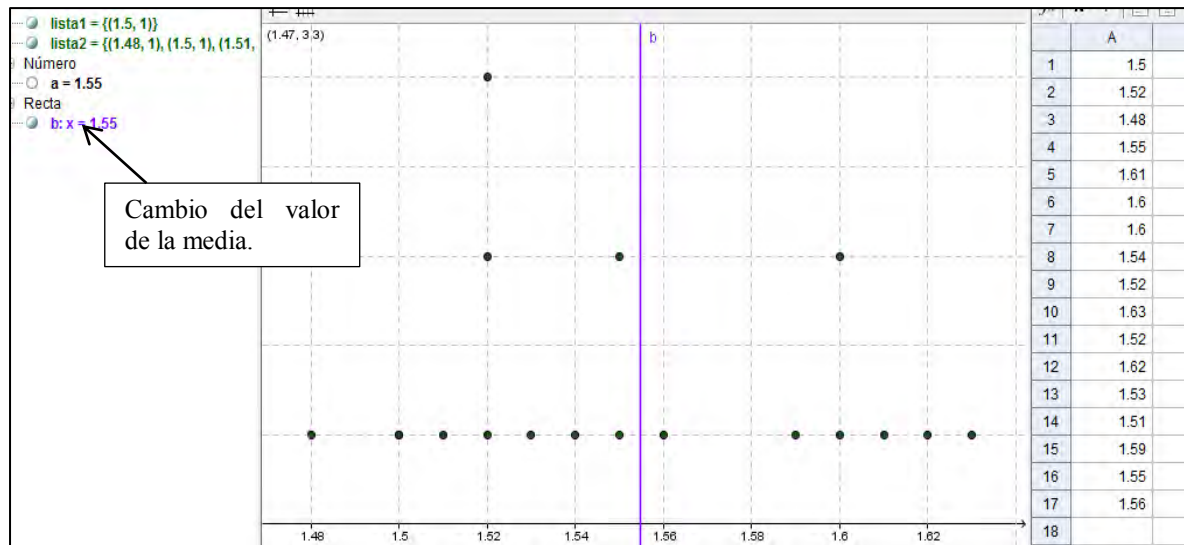
El Grupo 1 indicó que considerando el valor de la media 1.54m y la mediana 1.52m, las estudiantes que participen en el desfile debían tener una talla de 1.58m o más, por lo que el grupo propuso cambiar dos estaturas de 1.48m, cada una por la estatura de 1.6m y 1.62m. A continuación en la figura 43, mostramos los cambios realizados por los grupos, según como se indica:



**Figura 43.** Modificaciones realizadas por Grupo 1 sobre las estaturas en la hoja de cálculo del Gráfico de Puntos.

De esta manera el Grupo 1 estableció que sólo debían participar en el desfile aquellas estudiantes cuyas medidas de sus estaturas se aproximaban al valor de la media como

requisito 1.58m, obteniendo a partir de los cambios un nuevo valor de la media 1.55m. (Ver figura 44)



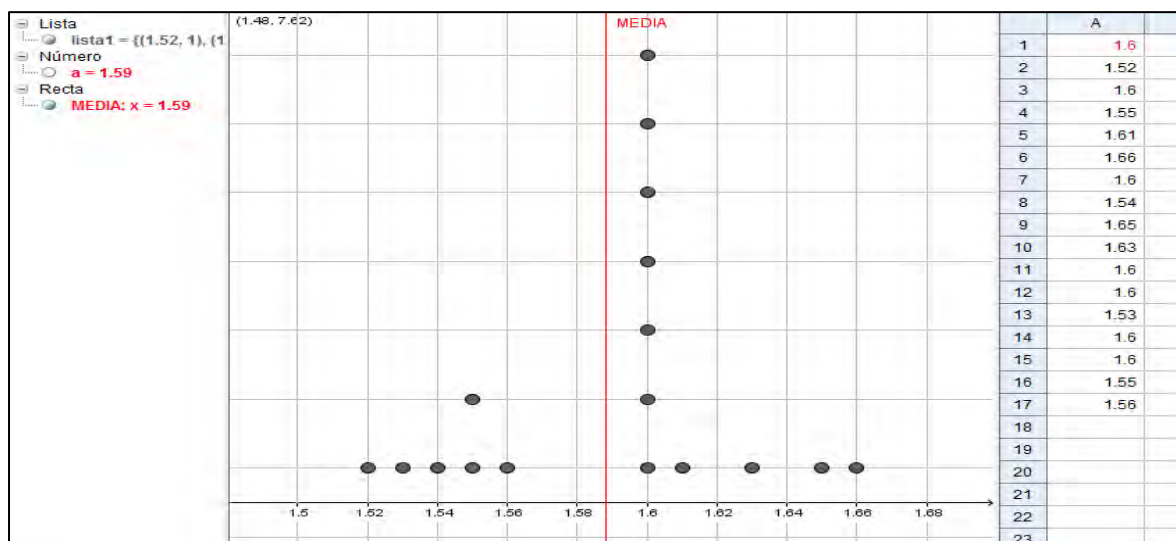
**Figura 44.** Cambio de los valores de la media a partir de la modificación de los datos en la hoja de cálculo realizado por el Grupo 1.

De esta manera el Grupo 1 indicó que era necesario realizar cambios entre los datos. Asimismo, por el carácter dinámico del software geogebra, el grupo realizó la comparación de forma simultánea cómo al realizar los cambios en las estaturas de las estudiantes también se iban generando cambios en el valor de la media.

A partir de ello, el Grupo 1 contando con un nuevo conjunto de datos, (ya que este conjunto no era el mismo que el anterior), relacionó tres representaciones que daban la misma información, éstos son, la tabla de datos, el gráfico de puntos y el valor de la media de las estaturas de las estudiantes. Así, el Grupo 1 demostró que analizar simultáneamente las diferentes representaciones del conjunto de datos, permitía tener mayor información del mismo conjunto.

### **Resultados en el Ítem e) – Actividad 2 – Grupo 2**

Según las respuestas del Grupo 2, observamos que el grupo consideró que los valores de la media 1.54m de las estaturas de las estudiantes comparadas con el valor de la media como requisito 1.58m determinaban que no era posible la participación de las estudiantes en el desfile. Por ello, el Grupo 2 propuso cambiar a 7 estudiantes de menor estatura, que se encuentran por debajo de la media, con estudiantes que midan 1.60m, para lograr una media 1.59m y así participar en el desfile, tal como se muestra en la siguiente figura 45:



**Figura 45.** Modificaciones realizadas por Grupo 2 sobre las estaturas en la hoja de cálculo del Gráfico de Puntos.

De esta manera el Grupo 2, realizó cambios y ante un nuevo conjunto de datos, comprendió la relación entre sus diferentes representaciones, por ejemplo la media, el gráfico de puntos y la tabla de datos, así como comprender la información que brindaban las representaciones construidas y analizadas.

#### Análisis del ítem f

**f) A partir de estos cambios, ¿qué observa en las medidas?**

En este ítem esperamos que los grupos identifiquen y analicen las diferentes representaciones que están utilizando del conjunto de datos, y que además expliquen esos cambios simultáneos al observar las diferentes representaciones en el geogebra cuando varían las medidas de las estaturas. Así como comprender a qué se refiere la variación de los datos y con qué nociones estadísticas se relaciona el estudio de la variación, mediante estas representaciones.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem f):**

- **Que los grupos se den cuenta que al variar el valor de alguno de los datos, se generan cambios en el valor de la media y por ello, en la información de todo el conjunto de datos.** Interpretan la nueva información que ahora brinda este nuevo conjunto de datos y sus respectivas representaciones.

### **Resultados en el ítem f) – Actividad 2 – Grupo 1**

El Grupo 1 explicó que cuando se cambian las medidas de las estaturas más bajas, la línea vertical que representaba a la media se mueve hacia la derecha, indicó que la media aumenta de valor, y se hace cada vez más próxima a la media requerida 1.58m. El grupo explicó que la media de un conjunto de datos informa sobre el comportamiento de los datos, pero es necesario ver cómo están distribuidos para saber si es o no representativa la media y reconocer que hay variación. De esta manera, el grupo utilizó diferentes representaciones, por ejemplo, la media y su respectivo gráfico de puntos, para responder a una pregunta de interés.

### **Resultados en el ítem f) – Actividad 2 – Grupo 2**

Las respuestas del Grupo 1 establecen que la media cambia a 1.59m conforme va variando la medida de los datos. Los valores de la media y la mediana, así como la ubicación de sus respectivas líneas verticales cambian y sus valores son más próximos. Las acciones del grupo muestran que necesitaron y utilizaron diferentes representaciones para responder a la pregunta de la situación propuesta así como lo afirman Chick, Pfannkuch y Watson.

### **Consolidación de la Actividad 2**

Se realizó la formalización de la actividad 2 debido a que los grupos consideraban inicialmente sólo el valor numérico de la media sin relacionar con su significado dentro del contexto. Los grupos se refirieron a las distancias entre cada valor de las estaturas con el valor de la media, lo que hizo necesario recordar que esa medida es la desviación estándar, la cual nos informa sobre la variación de los datos. Entonces, culminando la actividad nos centramos en definir la media y la desviación estándar y su relación como medidas de la variación de datos.

### **Análisis de las acciones**

A partir de los resultados obtenidos por el Grupo 1 y Grupo 2, podemos afirmar que se logró el objetivo propuesto de la Actividad 2. Los grupos reconocieron y analizaron la variación mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos, la media, la mediana, la moda, la tabla, las líneas visuales que indicaban la ubicación del valor de la media y la mediana en el gráfico de puntos; centrándonos en todo momento en el análisis de la variación respecto a las nociones de la media y la desviación estándar utilizando el gráfico de puntos.

Todo el proceso de desarrollo de la Actividad 2, fue una constante interacción con los grupos, se dio el intercambio de ideas, de concepciones acertadas y erradas en otros casos, que fuimos aclarando y corrigiendo, siendo dificultades que valieron la pena darse, porque dio lugar a la

reflexión de nuestra forma de entender y realizar la enseñanza de la estadística en nuestras aulas.

Las acciones de los grupos mostraron procesos de transnumeración, pero se observaron dificultades. Por ejemplo, los grupos resumieron el conjunto de las estaturas de las estudiantes mediante la media y la mediana, pero se presentó la dificultad de no poder explicar qué significaba este valor dentro del contexto de las estaturas de las estudiantes. Se evidenció que para los grupos estaba claro cuál era el valor de la media, pero no estaba claro, la relación de este valor con la representación del mismo conjunto de datos en el gráfico de puntos; se percibió que los grupos concebían ambas representaciones como dos objetos separados sin relación alguna entre ellos, aunque se trataban del mismo conjunto de datos.

Asimismo, el gráfico de puntos fue un recurso útil para que los grupos percibieran la variación, observando y comparando las distancias de cada valor de las estaturas con la media, lo cual permitió a los grupos movilizar diferentes nociones estadísticas, como por ejemplo, las nociones de la media, la desviación estándar, la mediana, el rango, la representatividad de la media y el contraste con la distribución de las estaturas en el gráfico de puntos, sin necesidad de recurrir a procesos algorítmicos para entender de qué tratan esas medidas estadísticas, y que es justamente lo que se necesita realizar en su enseñanza.

Por otro lado, se evidenció que cuando los grupos realizaron cambios en el valor de las estaturas más bajas, observaron que también ocurrían cambios en la media del conjunto de las estaturas, y llevó a los grupos a comprender esa relación entre las diferentes representaciones de un mismo conjunto de datos, por ejemplo en: la tabla de datos, donde realizaban los cambios de los valores de las estaturas; el gráfico de puntos, el cambio de la posición de un punto en toda la distribución; el valor de la media, que iba aumentando; y las líneas visuales, que iban cambiando de posición conforme cambiaban los datos de acuerdo al nuevo valor de la media. Esto llevó a los grupos a captar y comprender la información que mostraba cada representación construida del conjunto de datos, que no eran objetos separados, sino que cada representación tenía un significado y permitía acceder a más información del conjunto de datos, siendo cada vez más conscientes de por qué construir una representación o realizar cambios en ella.

Así, Chick, Pfannkuch y Watson (2005), afirman que la transnumeración trata de reconocer que muchas representaciones son necesarias para la comprensión de una situación real y la detección de nueva información en los datos. Por ello, transnumerar debe ser un proceso

reflexivo y consciente de por qué llevar a cabo el cambio de representaciones. De esta manera, se establece que en la medida que tengamos más herramientas estadísticas, es decir, que nuestros estudiantes sepan qué y por qué realizan ciertos procedimientos, serán capaces de realizar más procesos de transnumeración y por ende realizar el proceso de análisis de los datos, desarrollando de esta manera el Pensamiento Estadístico.

Ante esto, podemos afirmar que se cumplió el objetivo de la Actividad 2.

### Actividad 03

La Actividad 03 (ver anexo) se realizó con 6 grupos. Esta actividad está conformada por 4 ítems y tiene el objetivo de analizar la variación en dos conjuntos de datos mediante diferentes representaciones, como el gráfico de puntos utilizando el geogebra. En esta actividad se realizó el trabajo con dos conjuntos de datos para percibir y comparar la variación de ambos conjuntos mediante sus diferentes representaciones.

Esta actividad presenta una situación relacionada a las notas de dos estudiantes, y se trata de determinar quién de ellos debe obtener un reconocimiento por tener un esfuerzo constante mediante sus notas (ver figura 46).

Un profesor de matemática quiere reconocer el esfuerzo constante entre dos estudiantes del 4° de secundaria en el área de matemática, Pablo y Raúl. Considerando las notas obtenidas por los estudiantes en el transcurso de las clases, **¿quién de los dos estudiantes cree que tendrá el reconocimiento?**

NOTAS DE MATEMÁTICA	
NOTAS DE PABLO	NOTAS DE RAÚL
17	19.5
15.5	17
16	16
17.5	18.5
16.5	13
19.5	20
19	18
20	19
18	

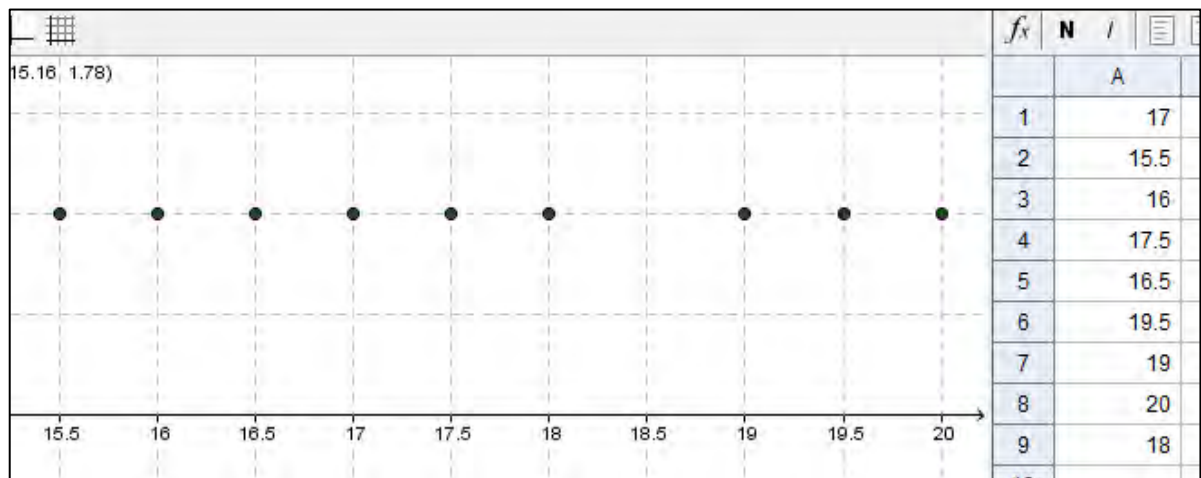
Figura 46. Situación propuesta en la actividad 03.

Para su desarrollo solicitamos a los grupos que realicen el gráfico de puntos en el geogebra:

**Según las orientaciones en la guía del geogebra construya un gráfico de puntos sobre las notas de Pablo y Raúl.**

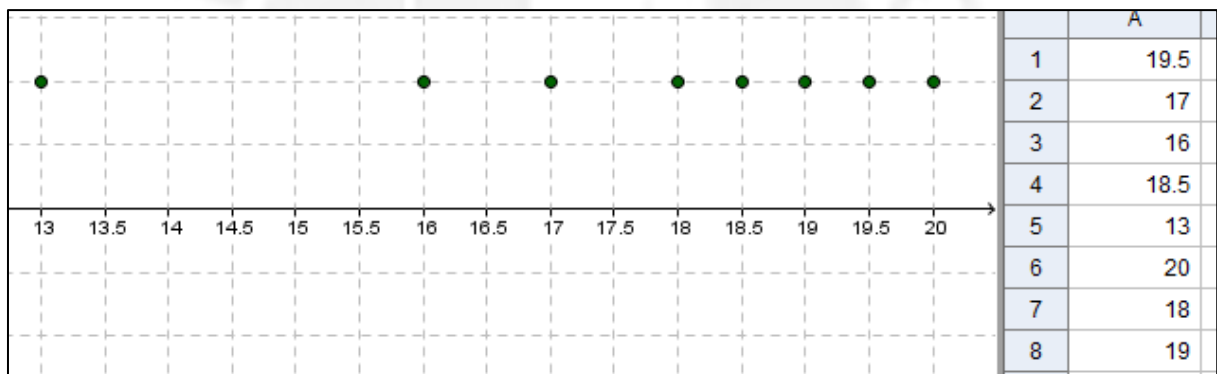


A continuación en la figura 47 mostramos el gráfico de puntos sobre las notas obtenidas por Pablo:



**Figura 47.** Representación del gráfico de puntos sobre las notas de Pablo que esperamos que realicen los grupos.

Respecto a las notas de Raúl mostramos su respectiva representación en el gráfico de puntos en la figura 48:



**Figura 48.** Representación del gráfico de puntos sobre las notas de Raúl y Pablo que esperamos que realicen los grupos.

### Análisis del ítem a

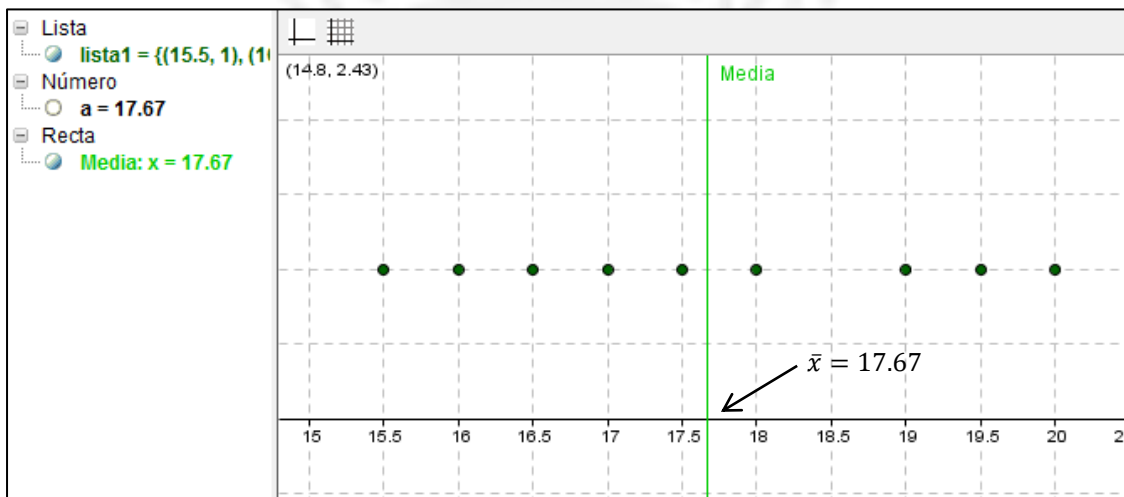
**a) ¿Qué medida(s) considera que permitirá(n) saber quién de los dos estudiantes demostró un esfuerzo constante? ¿por qué?**

En este ítem esperamos que los grupos realicen y relacionen las diferentes representaciones del conjunto de notas de cada estudiante, las cuales consideran que les brindará información del conjunto de datos.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem a):**

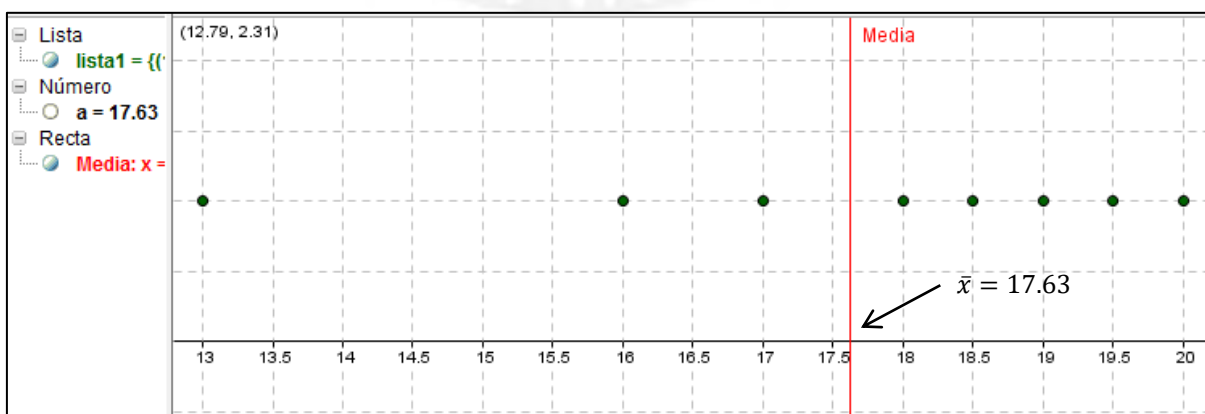
- **Que representen la media.** Calculan el valor de la media utilizando el comando del geogebra o lápiz y papel.
- **Que representen visualmente la media.** Los grupos trazan una línea vertical para representar cada medida en el gráfico de puntos.
- **Que expliquen el significado de la media.** Movilizan sus nociones sobre la media y explican que la media es un valor que representa a un conjunto de datos.
- **Que comparen los valores de la media en ambos grupos de notas.** Los grupos establecen que la diferencia entre ambas medias es muy pequeña.

A continuación en la figura 49, presentamos la representación visual de la media de las notas de Pablo en el gráfico de puntos:



**Figura 49.** Representación visual de la media de las notas de Pablo que se espera que realicen los grupos.

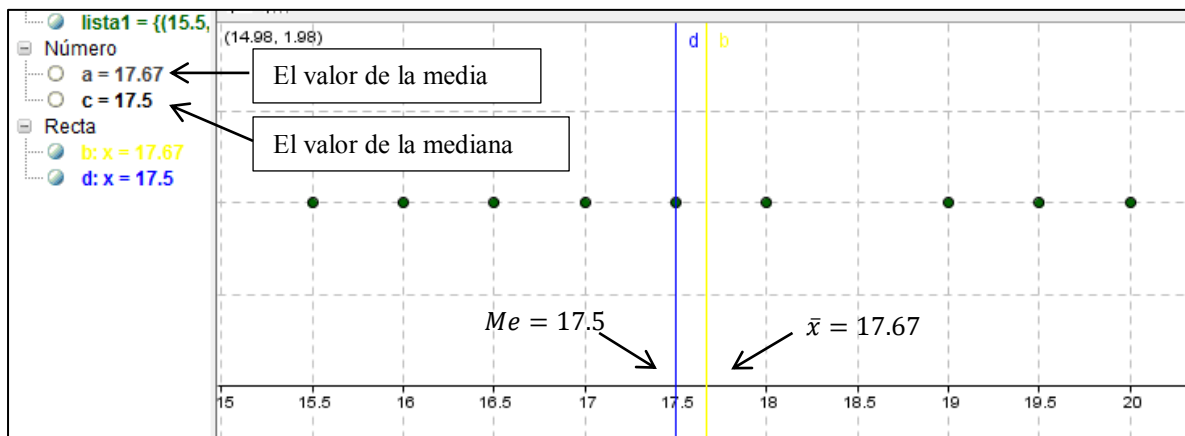
En la siguiente figura 50 presentamos la representación visual de la media de las notas de Raúl en el gráfico de puntos:



**Figura 50.** Representación visual de la media de las notas de Raúl que se espera que realicen los grupos.

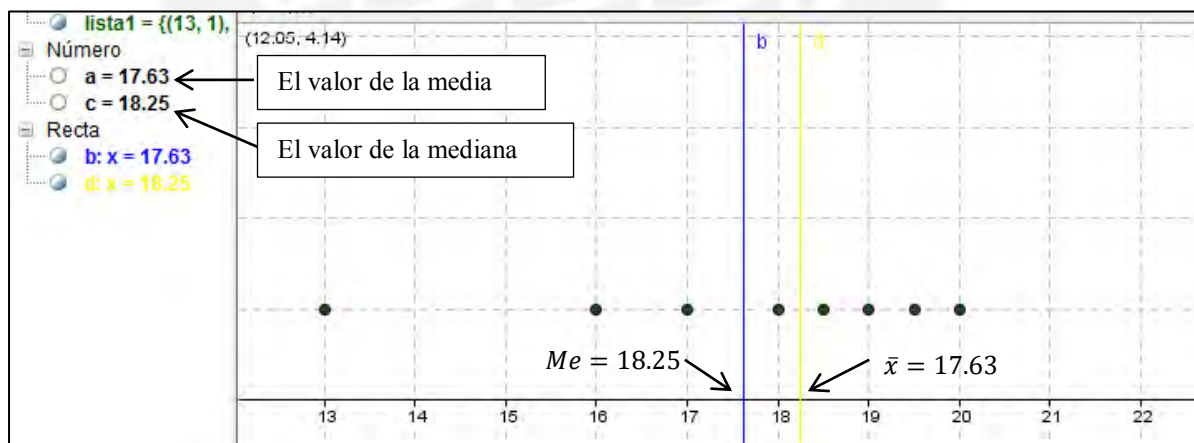
### Resultados en el ítem a) – Actividad 3 – Grupo 1

El Grupo 1 determinó el valor de la media y la mediana utilizando el comando del geogebra, también realizó la representación visual de ambas medidas con una línea vertical en el gráfico de puntos. En la figura 51, mostramos las representaciones realizadas del conjunto de notas de Pablo, esto es, el gráfico de puntos, la media, la mediana y la representación visual de las medidas con las líneas verticales:



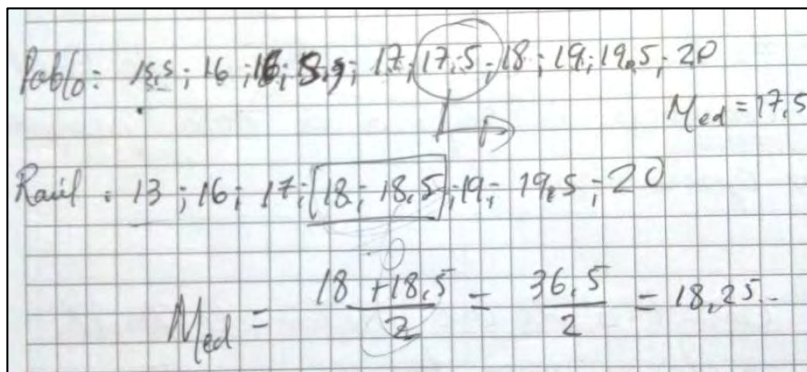
**Figura 51.** Representación visual de la media y la mediana de las notas de Pablo en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 1.

Así también en la figura 52, mostramos las representaciones realizadas por el Grupo 1, respecto a las notas de Raúl, esto es, la media, la mediana, el gráfico de puntos y su respectiva representación visual de las medidas con una línea vertical:



**Figura 52.** Representación visual de la media y la mediana de las notas de Raúl en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 1.

En el desarrollo de la actividad, el grupo verificó el valor de la mediana ordenando los datos de menor a mayor, ya que para el grupo el gráfico de puntos no presentaba los datos de forma ordenada. (Ver figura 53)



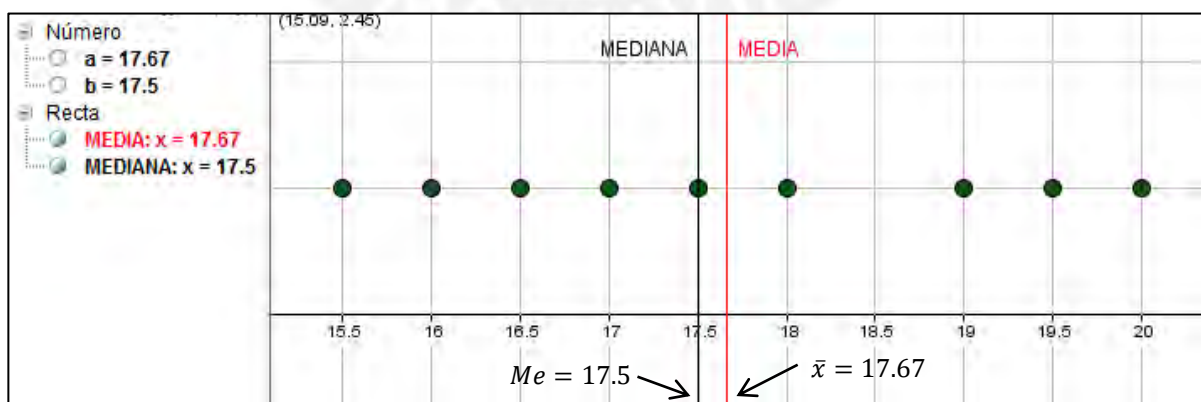
**Figura 53.** Ordenamiento de los datos realizado por el Grupo 1 para determinar la mediana.

El grupo comparó los valores de la media en las notas de Pablo y Raúl, y advirtió que las medidas eran próximas, por ello recurrieron a determinar el valor de la mediana. Inicialmente en este ítem el grupo no hizo referencia acerca del significado de cada medida, ni explicó por qué consideró necesario determinar las medidas indicadas. Consideramos que ello se debe a que la comparación entre las representaciones de la media se realizó teniendo en cuenta sólo los valores numéricos.

De esta manera, el Grupo 1 orientado por la pregunta inicial, realizó diferentes representaciones del conjunto de datos. Se observa que a partir del gráfico de puntos, relacionó el valor de la media y la mediana, así como su respectiva representación visual de las medidas con una línea vertical en el gráfico de puntos.

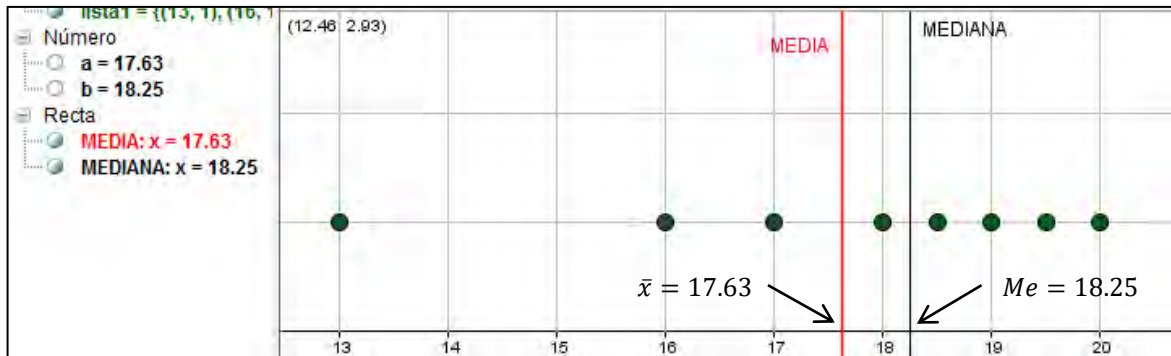
### Resultados en el ítem a) – Actividad 3 – Grupo 2

En sus respuestas el Grupo 2 determinó los valores de la media y la mediana de las notas de Pablo y las representaron visualmente con una línea vertical como se muestra en la figura 54:



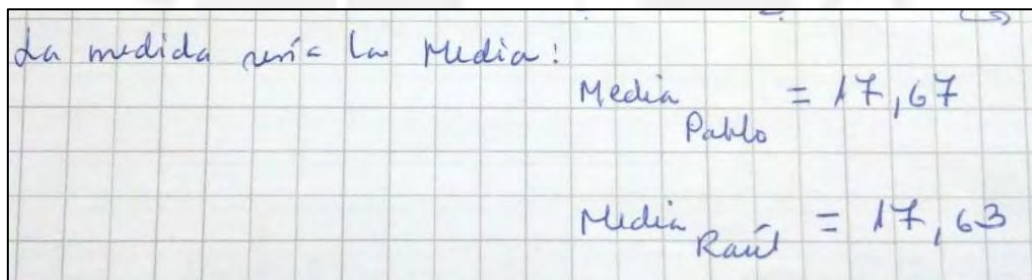
**Figura 54.** Representación visual de la media y la mediana de las notas de Pablo en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 2

Respecto a las notas de Raúl, en la figura 55, mostramos los valores de la media y la mediana determinada con los comandos del geogebra, así como la representación visual de ambas medidas en el gráfico de puntos sobre las notas de Raúl:



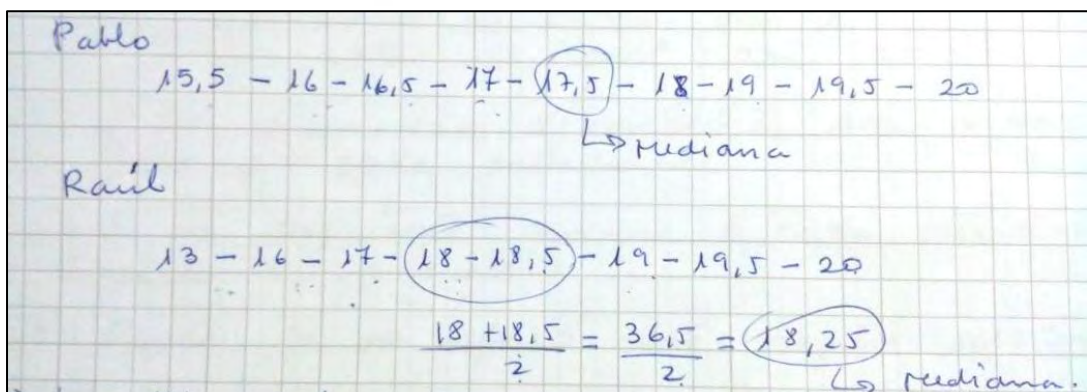
**Figura 55.** Representación visual de la media y la mediana de las notas de Raúl en el gráfico de puntos realizado por el Grupo 2.

Asimismo, en sus respuestas el grupo no explicó por qué sería necesario determinar el valor de las medidas, tampoco hubo referencia al significado de esas medidas o a su utilidad según la información que brindarían. (Ver figura 56)



**Figura 56.** Determinación de la media de las notas de Pablo y Raúl por el Grupo 2.

A partir de los valores determinados de la media de las notas de ambos estudiantes, el grupo comparó sus valores y relacionó con la distribución en el gráfico de puntos. Al observar que los valores de la media eran muy cercanos, el grupo decidió determinar la mediana con el comando del geogebra, pero también de forma manual, tal como se muestra en la figura 57:



**Figura 57.** Ordenamiento de los datos realizado por el Grupo 2 para determinar la mediana.

De esta manera, el Grupo 2 realizó diferentes representaciones del conjunto de notas de cada estudiante. En primer lugar, a partir del gráfico de puntos el grupo resumió los datos mediante los valores de la media y la mediana, luego también realizó la representación visual de las medidas con la línea vertical. Sin embargo, no explicó por qué esas medidas permitirían saber quién de los dos estudiantes tendría el reconocimiento, es decir qué información brindarían las medidas en base a su significado. Creemos, que el grupo no explicó el por qué de la elección de esas medidas, porque en un primer momento faltó relacionar las diferentes representaciones para saber qué información brindarían la media y la mediana.

### **Análisis del ítem b**

**b) ¿Qué información identifica a partir de esa(s) medida(s)? ¿considera que esa información es suficiente para saber quién de los dos estudiantes demostró un esfuerzo constante? ¿por qué?**

En este ítem esperamos que los grupos capten la información a partir de las representaciones construidas de las notas de Pablo y Raúl, que perciban la variación de los datos en cada grupo de notas observando las desviaciones y a partir de ello sientan la necesidad de construir otra representación que permita tener mayor información.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem b):**

- **Que establezcan que la información que brinda la media no es suficiente.** Explican que por ello se debe observar la variación en las notas de cada estudiante.
- **Que expliquen el significado de las medias de cada grupo de notas.** Explican que las notas de Pablo se representan por 17.67 y las notas de Raúl se representan por 17.63
- **Que consideren la dispersión de los datos.** Describen las distancias entre los valores de cada nota y la media en el gráfico de puntos de cada grupo de notas.
- **Que determinen en qué grupo de notas hay más variación.** Comparan los diferentes registros de las notas de los estudiantes.

### **Resultados en el ítem b) – Actividad 3 – Grupo 1**

En el proceso de análisis, el Grupo 1 se cuestionó por el número de notas que tenía cada estudiante, ya que Pablo tenía nueve notas y Raúl tenía ocho notas, por lo que el grupo consideró que la media de Raúl era afectada porque tenía menos notas de Pablo, entonces era

Raúl quien debía ganar. Sin embargo, el grupo logró darse cuenta que a pesar del número de datos, la suma de estos se dividiría con el número de datos correspondiente a cada grupo de notas, reconociendo que al comparar el valor de la media de cada grupo de notas, este valor no dependía del número de datos que tenía cada conjunto.

A continuación, el grupo comparó nuevamente los valores de las medias contrastando con el gráfico de puntos, observando que eran muy cercanas, por lo que determinó que: “en la media gana Pablo”. Entonces, al comparar las medianas, surgió la discusión sobre qué significaba la mediana, como a continuación se presenta:

**Investigadora:** ¿Están anotando las respuestas?

**Grupo 1:** Estamos graficando las medidas de tendencia central.

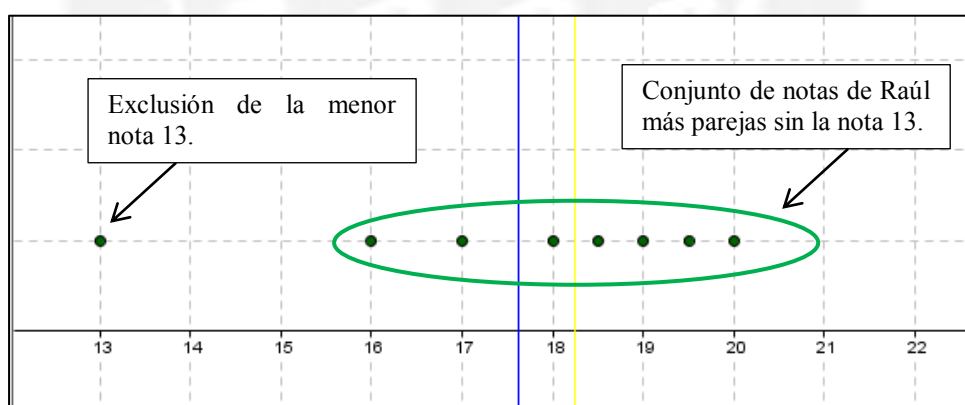
Pero aquí hay una confusión, hay que analizar la mediana.

La mediana quiere decir que la mitad de las notas están de 18 para arriba (refiriéndose a las notas de Raúl)

Pablo tiene la mediana más baja. El 50% de sus notas es de 17.5 para arriba y el 50% de notas es de 17.5 para abajo.

Raúl es el que gana porque la mitad de sus notas es de 18 para arriba. En la media gana Pablo y en la mediana gana Raúl.

De esta manera el grupo comparó los valores de las medias y determinó que quién debía tener el reconocimiento era Raúl. Además de ello, el grupo consideró que las notas de Raúl, aparte del 13 eran más parejas, es decir más cercanas en comparación con las notas de Pablo, considerando sólo 7 notas, tal como se muestra a continuación en la figura 58:



**Figura 58.** Observación del Grupo 1 sobre las notas de Raúl excluyendo la nota más baja 13.

En el desarrollo de este ítem el grupo discutió lo que significaba la media y la mediana. De esta manera para uno de los integrantes, la medida que prevalecía era la mediana, argumentando que: “el que es mejor y te centraliza es la mediana, la media es la sumatoria de los datos”. A partir de ello, podemos inferir que el grupo no tenía claro el conocimiento

disciplinar de lo que es la media, así como la información que brindaba esta medida respecto al conjunto de datos.

Así también, en las respuestas y discusiones del grupo se observa que se percibió la variación, al afirmar lo siguiente:

No hace parejo el 13 (las notas de Raúl). Las notas de Pablo son más parejas respecto a la media... la separación respecto a la media es la desviación.

Entonces el grupo sacó sus conclusiones explicando que en las notas de Raúl, la nota 13 influyó en el valor de la media, haciendo que sea menor que la media de las notas de Pablo. Por lo cual, creemos que el grupo realizó sus conclusiones sin considerar la nota 13, y realizó la comparación de las notas considerando los valores numéricos de la media y la mediana, dejando de lado el análisis entre las diferentes representaciones.

### Resultados en el ítem b) – Actividad 3 – Grupo 2

El Grupo 2 consideró que la media no era una medida suficiente para responder la pregunta, llevándolos a observar la mediana (ver figura 59). El grupo realizó una comparación entre la media y la mediana, tanto de sus valores numéricos como de sus representaciones visuales con las líneas verticales en el gráfico de puntos. Asimismo, consideró la distribución de los datos en el gráfico de puntos para determinar que en las notas de Raúl se observa más dispersión debido a la nota 13, lo cual demuestra que el grupo percibió la variación de las notas de cada estudiante.

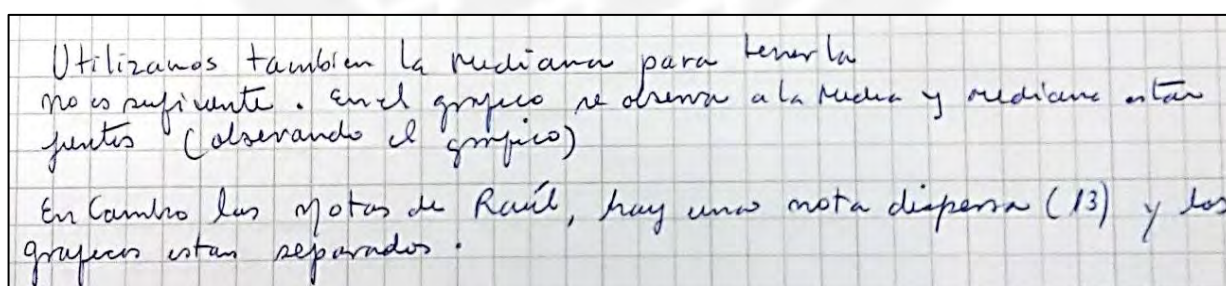
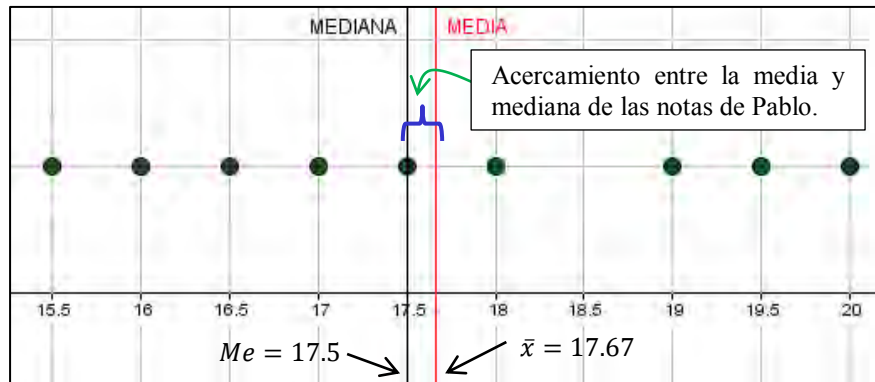


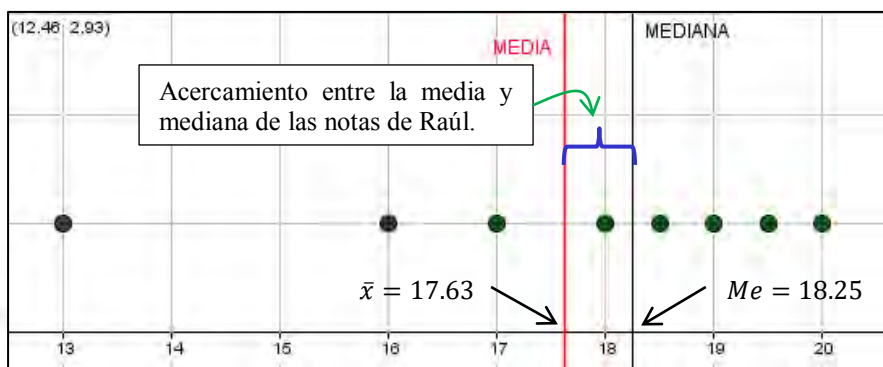
Figura 59. Respuesta del Grupo 2 en el ítem b.

En las respuestas del Grupo 2 observamos que al comparar los valores de la media, el grupo determinó que éstos eran valores muy cercanos, haciendo una comparación entre las representaciones, es decir entre el gráfico de puntos y el valor de la media, además de ir observando el acercamiento de las líneas visuales de cada media y mediana, en el caso de las notas de Pablo (ver figura 60) y las notas de Raúl (ver figura 61).





**Figura 60.** Comparación de los valores de la media y mediana de las notas de Pablo realizadas por el Grupo 2.



**Figura 61.** Comparación de la media y mediana de las notas de Raúl realizadas por el Grupo 2.

Esto llevó al grupo a observar mejor cómo estaban distribuidas las notas de cada estudiante, comentando a partir del gráfico de puntos lo siguiente:

- Raúl tiene una nota baja.
- Pablo tiene mayores notas.
- Su menor nota es 15.5 y acá (las notas de Raúl) su menor nota es 13.
- Pablo se esforzó más.
- Pablo tiene nueve notas y su menor nota es 15.5
- Raúl tiene 13
- Ha sido constante acá no? Acá hay dispersión (en las notas de Raúl)
- En las notas de Raúl la mediana es 18.25 en las de Pablo la mediana es 17.5
- ¿Quién se esforzó más? Pablo. Y es más, las medidas de tendencia central están casi juntas, en cambio en las medidas de tendencia central de Raúl están más dispersas.
- Claro, Pablo tiene media 17.67 y mediana 17.5 y Raúl tiene media 17.63 y mediana 18.5. Por eso es que está más alejado
- (Observan el acercamiento entre las medidas en el gráfico de puntos)
- ¿Cuál es la nota de Raúl? Ya ves? Ajá
- Raúl está más disperso. En cambio acá, las dos están casi juntas.
- (Observan el gráfico de puntos y los valores de las medidas)
- ¿Qué medida (consideramos), la media?
- La mediana
- La mediana?
- Porque el otro es promedio no más.
- Y la mediana cómo?
- ¿Cuánto salió la mediana de Raúl? Mira si nosotros vemos la media de Pablo 17.5 la mediana salió 18.25, si consideramos la mediana vemos que gana Raúl. Pero observando las notas, vemos que Raúl tiene la nota 13. Acá se descuidó. Y vemos que él (Pablo) ha sido más parejo
- Entonces la mediana no nos da algo real.

De esta manera, podemos afirmar que el Grupo 2 a partir del análisis de las diferentes representaciones, demostró que la información que le brindaba la media y la mediana no eran suficientes como valores numéricos, por ello recurrieron al análisis en conjunto con el gráfico de puntos, así el grupo percibió y comparó la variación de los datos en cada grupo de notas.

### Análisis del ítem c

**c) ¿Quién de los dos estudiantes considera que demostró un esfuerzo constante en sus notas? Explique con qué criterio analizó las notas y decidió su respuesta.**

En este ítem esperamos que los grupos a partir del análisis de las diferentes representaciones del conjunto de notas respondan a la pregunta central de la actividad y expliquen como criterio de análisis la variación de los datos en cada conjunto de notas.

**A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem c):**

- **Que establezcan que Pablo debe tener el reconocimiento según sus notas.** Comparan la variación en cada grupo de notas de los estudiantes mediante las diferentes representaciones realizadas.
- **Que consideren como criterio la variación.** Observan la distribución de los datos en el gráfico de puntos y establecen qué grupo de notas presenta mayor dispersión o desviación.

### Resultados en el ítem c) – Actividad 3 – Grupo 1

El Grupo 1 determinó que Raúl era el que debía obtener el reconocimiento, basándose en la media. Para el Grupo 1 el hecho de que el valor de la mediana de las notas de Raúl ( $Me_{Raúl} = 18.25$ ) sea mayor que la mediana de las notas de Pablo ( $Me_{Pablo} = 17.5$ ) era suficiente para determinar que ganaba Raúl, basándose en la siguiente explicación:

#### Grupo 1:

En la media gana Pablo. En la mediana gana Raúl, porque la mitad de sus notas son mayores que 18.

Creemos que esta respuesta se debe a que tenía un conocimiento erróneo de la información que brinda la media y la mediana. Si bien es cierto percibieron la variación, pero hicieron de lado la nota 13, valor que hacía a las notas de Raúl más dispersas y sólo se centraron en las otras siete notas y compararon la mediana de ambos grupos de notas.

### Resultados en el ítem c) – Actividad 3 – Grupo 2

El Grupo 2 estableció que Pablo era quien mostró un esfuerzo más parejo explicando que a pesar de que Pablo tuvo nueve notas, la menor fue 15,5 y que Raúl a pesar de tener ocho notas, la mínima fue 13. (Ver figura 62)

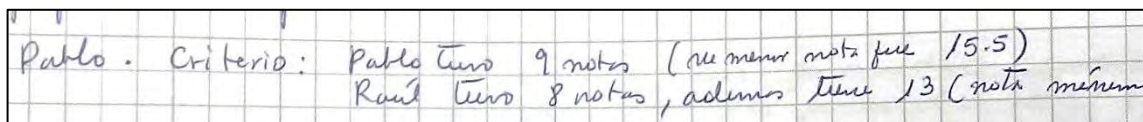


Figura 62. Respuesta escrita por el Grupo 2 en el ítem c

Además de ello, en sus respuestas observamos que el grupo sí consideró las desviaciones entre las notas. Por ejemplo, observando el gráfico de puntos, mencionó que las distancias entre las notas de Raúl con la media, eran mayores que las distancias entre las notas de Pablo respecto a su media, como se muestra en la figura 63:

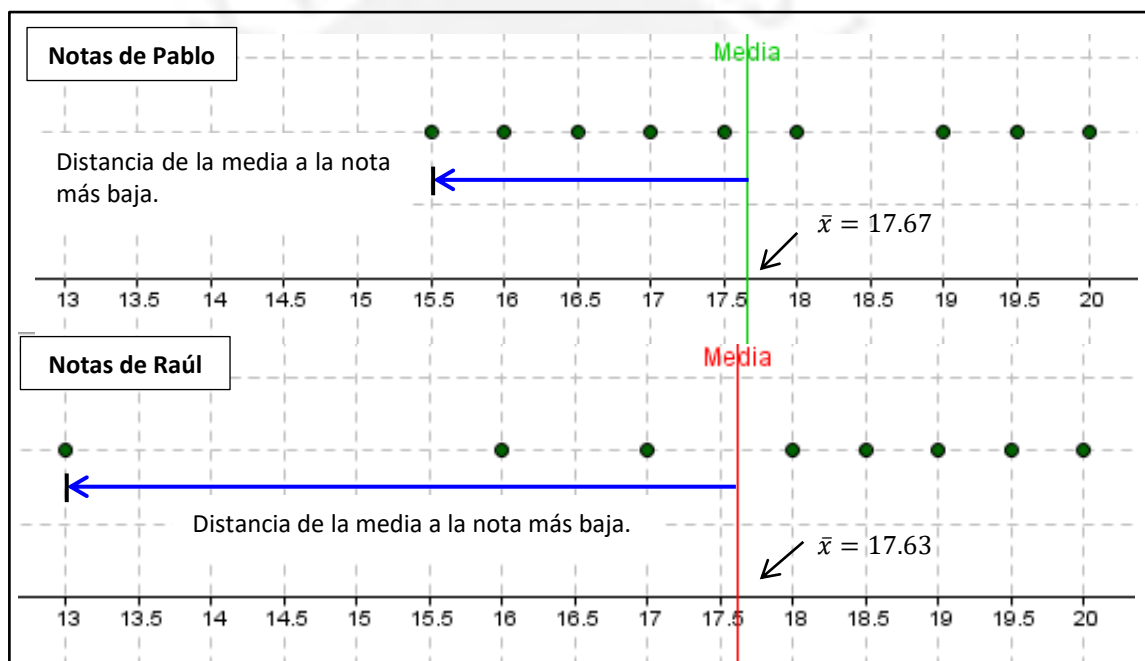


Figura 63. Comparación de las desviaciones entre la menor nota y la media en las notas de Pablo y Raúl realizado por el Grupo 2

De esta manera, consideramos que el Grupo 2 sí analizó y relacionó las diferentes representaciones realizadas, analizando la distribución de los datos en el gráfico de puntos y su relación con los valores de la media y la mediana. Así el grupo explicó que en las notas de Raúl había mayor variación que en las notas de Pablo, debido a su nota 13. De acuerdo a ello, podemos afirmar que guiados por la pregunta central, el grupo realizó y analizó las diferentes representaciones del grupo de datos en busca de mayor comprensión, lo que permitió identificar la información que estas brindaban y responder correctamente la pregunta, así como lo establece Wild y Pfannkuch (1999).

## Análisis del ítem d

d) Si hubiésemos deseado que el estudiante que no obtuvo el reconocimiento gane ¿qué modificaciones realizaría en la distribución de las notas?, ¿qué cambios observa?

En este ítem esperamos que los grupos al realizar modificaciones en las notas de Raúl identifiquen esa relación entre la media y el valor que tiene cada nota, así como percibir la variación a partir del análisis de las diferentes representaciones y reconocer que cada forma de representar un conjunto de datos brinda una nueva o mayor información.

A continuación presentamos algunas posibles acciones que esperamos de los grupos en el ítem d):

- **Que modifiquen la nota más baja de Raúl.** Proponen cambiar la menor nota 13, por una nota mayor.
- **Que reconozcan que cualquier cambio en los datos influye en el valor de la media.** Observan que el cambio de la nota 13 por una nota más alta hace que la media de las notas de Raúl aumente.
- **Que reconozcan que la distribución de los datos ha cambiado.** Observan que los puntos se encuentran más juntos.

### Resultados en el ítem d) – Actividad 3 – Grupo 1

A pesar de que el Grupo 1 respondió que Raúl debería recibir el reconocimiento en el ítem anterior, en el presente ítem el grupo propuso modificar las notas de Raúl. Por ejemplo, realizó dos modificaciones: cambió la nota más baja 13 por un 16 y cambió la nota 17 por un 19, como se muestra en la figura 64:

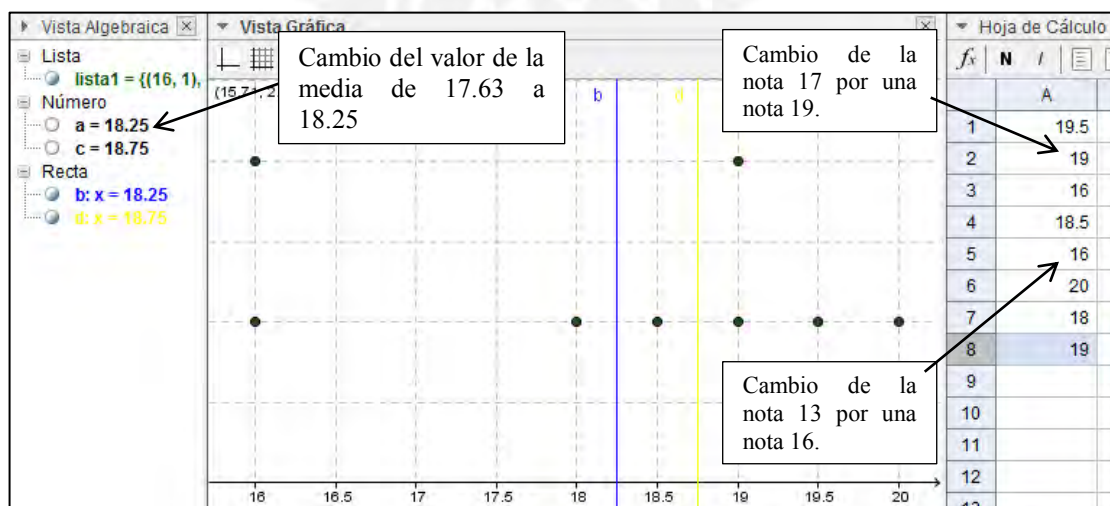


Figura 64. Modificaciones realizadas por el Grupo 1 en las notas de Raúl.

Enseguida el Grupo 1 observó que el valor de la media había variado siendo su nuevo valor  $\bar{x} = 18.25$ , verificando en simultáneo los cambios que se daban en el gráfico de puntos. Así, el grupo reconoció que con estos cambios, las notas de Raúl presentaban menor variación que antes, como se observa en la siguiente transcripción de audio:

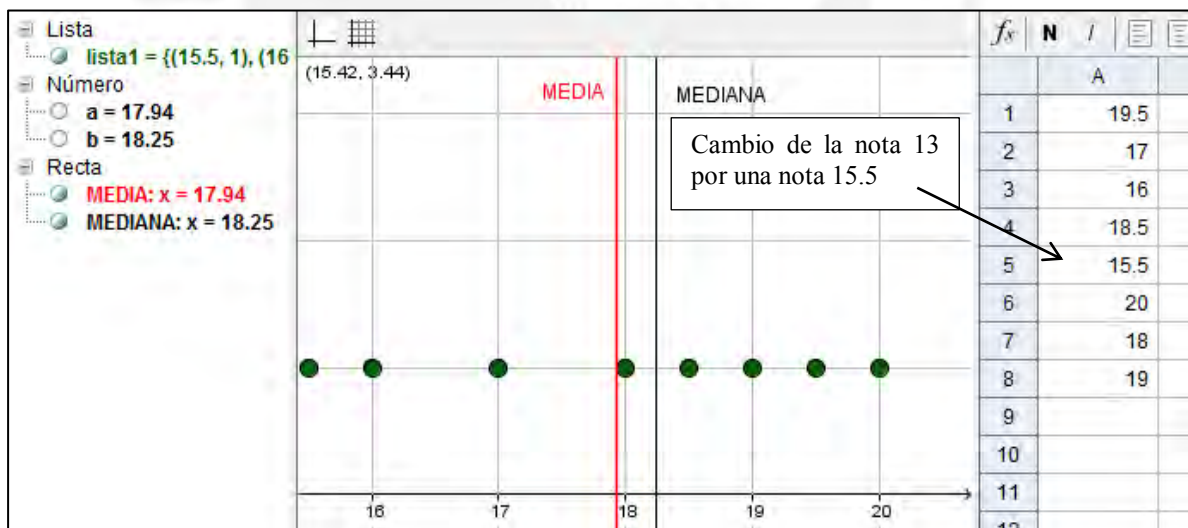
**Grupo 1:**

Pon 18 o 19 (en las notas de Raúl). Altera la media. Ahora sí representa menor dispersión, desviación. Observamos que ha cambiado la media de Raúl. Ahora ya le gana. Si cambiamos el 13 (de las notas de Raúl) su media cambia, ahora sí supera a la media de Pablo.

De esta manera, en el análisis de las notas de Raúl, al realizar modificaciones, el Grupo percibió la variación al comparar las dos representaciones de las notas de Raúl, es decir antes y después de realizar modificaciones. Entonces, el grupo reconoció que la media era una medida sensible cuando cambia el valor de alguno de los datos y que la mediana no se altera cuando los valores extremos cambian, pero sí cuando cambiaban valores del centro.

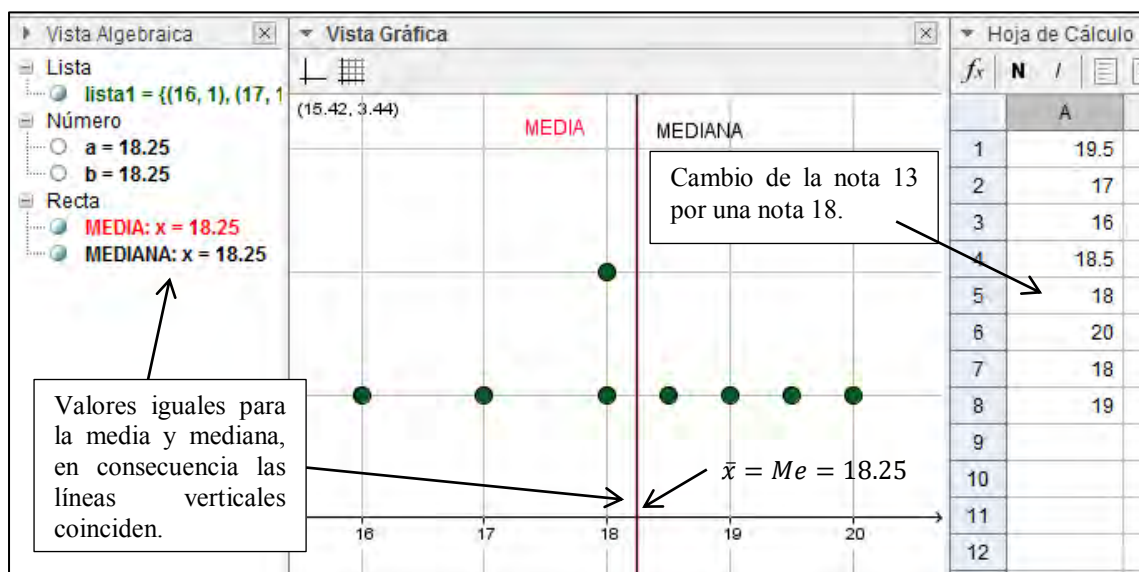
**Resultados en el ítem d) – Actividad 3 – Grupo 2**

El grupo 2 consideró realizar dos modificaciones en diferentes momentos. En un primer momento, modificó la menor nota 13 por una nota 15.5 y explicó que el nuevo valor de la media de las notas de Raúl aumentaba a  $\bar{x} = 17.94$  (ver figura 65).



**Figura 65.** Primera modificación realizada por el Grupo 2 en las notas de Raúl

En la segunda modificación mostrada en la figura 66, se observa que el grupo cambió la nota 13 por una nota 18, indicando que en este caso el valor de la media y la mediana se igualaban, en consecuencia contrastaron ese resultado observando el gráfico de puntos, explicando que las líneas que representan a la media y mediana coincidían.



**Figura 66.** Segunda modificación realizada por el Grupo 2 en las notas de Raúl.

De esta manera, a partir de las acciones del Grupo 2, observamos que el grupo relacionó las diferentes representaciones del grupo de notas de Raúl y al modificar el 13 por una nota más alta el grupo verificó que esa nota baja de Raúl (la más alejada de la media) era la que no le permitió ganar el reconocimiento, comparando la representación de las notas modificadas de Raúl.

### Consolidación de la Actividad 3

Se realizó la formalización de la Actividad 03 para enfatizar sobre el significado de las medidas estadísticas trabajadas y la información que brindaban cada una de ellas, mediante las nociones de la media, la mediana y la desviación estándar dentro de un contexto; así como identificar y comprender la relación que se da entre la media y la desviación en el estudio de la variación. También se hizo la reflexión acerca de que cada forma de representar un conjunto de datos nos brinda una nueva información, que nos permite profundizar sobre ese conjunto de datos.

### Análisis de las acciones

De acuerdo a los resultados evidenciados en las acciones del Grupo 1 y Grupo 2, podemos decir que se logró realizar el análisis de la variación entre los dos conjuntos de notas de los estudiantes mediante la construcción de diferentes representaciones, por ejemplo la media, la mediana, el gráfico de puntos, las líneas visuales de la media y la mediana, la tabla de datos en la hoja de cálculo, utilizando lápiz y papel y/o el software geogebra. Sin embargo, en el

desarrollo de la Actividad 3, se presentaron algunas dificultades al analizar los datos de la situación planteada.

Se evidenció que los grupos realizaron procesos de transnumeración, por ejemplo al determinar los valores de la media y la mediana, así como su representación visual en el gráfico de puntos, pero al momento de explicar por qué o para qué había que determinar esas medidas o qué información brindarían, no pudieron explicarlo como esperábamos. Observamos que la determinación de la media y la mediana fueron establecidas en un primer momento de forma mecánica, evidenciándose que para los grupos el análisis de datos implicaba hallar medidas, como la media de cada conjunto de datos y comparar quién era mayor, en este caso, quién de los estudiantes tenía mayor media de sus notas y finalmente dar respuesta, sin explorar el conjunto de datos con más herramientas estadísticas.

Sin embargo, al ser tan cercanos los valores de la media, los grupos sintieron la necesidad de recurrir a otra representación que permitiera tener mayor información y comprensión de los datos para dar respuesta a la pregunta central de la situación, en términos de Wild y Pfannkuch (1999). De esta manera, el grupo recurrió a la mediana de ambos conjuntos de notas, observando que la comparación entre la mediana de los conjuntos de notas, daba un resultado diferente al comparar las medias y más aún al comparar aquellas medidas con la distribución de las notas en el gráfico de puntos.

Esta contradicción entre sus respuestas, basándose en los valores de las medianas de cada conjunto de notas, permitió a los grupos relacionar cada representación como una forma distinta de expresar el mismo conjunto de datos, pero que brindaban una información cada vez más específica, logrando determinar con fundamento quién de los estudiantes debía tener el reconocimiento. En este proceso, los grupos despejaron sus dudas y algunos conceptos erróneos sobre el significado de la media y la mediana, no nos referimos a la definición o al proceso de calcularlos, sino al significado de la medida estadística dentro de un contexto determinado, que consideramos es lo más importante y la razón de ser al analizar datos en el estudio de la estadística debido a la variación de los datos.

Progresivamente, en el proceso de interacción con los grupos, la transnumeración se fue dando de forma natural, ya que los grupos fueron sintiendo la necesidad de tener mayor información y por ello construir otras representaciones que le permitieran dar respuesta a la pregunta, evidenciándose que transnumerar no era parte de un proceso mecánico o repetitivo cada vez que nos encontramos con un conjunto de datos, sino que analizar un conjunto de

datos significa utilizar diferentes herramientas estadísticas como lo son las diferentes representaciones de un conjunto de datos, en el sentido de Wild y Pfannkuch (1999).

Por esto, podemos afirmar que en base a la transnumeración, los grupos percibieron la variación a partir del trabajo con dos conjuntos de datos mediante las diferentes representaciones. Ello, permitió la movilización de diferentes nociones como la media, la desviación estándar y la mediana, logrando comprender el significado de cada medida. Además de ello, la comparación de las distancias de cada nota con su respectiva media, favoreció la comprensión del significado de la desviación estándar y la media, así como la información que aportan en el análisis de la variación de los datos.





## CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro marco teórico, basado en los fundamentos de Wild y Pfannkuch (1999), nos permitió analizar los procesos de transnumeración realizados por los profesores de matemática en el estudio de la variación. Según los resultados obtenidos a partir de la implementación de nuestras actividades pudimos verificar el logro de los objetivos propuestos, dándonos lugar a responder a nuestra pregunta de investigación: *¿Cómo se presentan los procesos de transnumeración al desarrollar actividades sobre variación en profesores de matemática?*

Al respecto, podemos afirmar que los profesores realizaron la construcción de diferentes representaciones del conjunto de datos, por ejemplo, construyeron tablas, diagrama de barras, pictogramas, gráfico de puntos, medidas de resumen como la media, la mediana y la moda, así como líneas visuales que indicaban la ubicación del valor de estas medidas en el gráfico de puntos. Afirmamos también que los procesos de transnumeración les permitieron comprender la variación mediante el análisis de las nociones de la media y desviación estándar, por lo que logramos percibir los elementos de construcción del pensamiento estadístico, mediante la utilización de las diferentes representaciones, es decir, mediante el pensamiento transnumerativo.

Ello, lo pudimos corroborar en base a nuestros resultados obtenidos en cada una de nuestras actividades implementadas. Al respecto, en la primera actividad, los profesores realizaron una transnumeración natural, ya que se dejó libremente la reorganización de los datos plasmados en las imágenes, ante lo cual, se observó varias representaciones del mismo conjunto de datos, pero que cada vez daban mayor información, una información más detallada, que efectivamente generó mayor comprensión, ya que la forma cómo los habían organizado y las categorías que se habían creado lo permitió, lo cual, concuerda con lo afirmado por Wild y Pfannkuch (1999). Esta actividad también permitió a los profesores familiarizarse con el gráfico de puntos, que fue necesario para dar lugar a la segunda y tercera actividad, referidas al estudio propio de la variación en uno y dos conjuntos de datos respectivamente.

En la segunda actividad, los profesores realizaron el estudio de la variación de un conjunto de datos, en base al trabajo con diferentes representaciones de forma simultánea en el software geogebra, así los profesores construyeron la representación de la media, de forma numérica y visual. Asimismo, movilizaron las nociones de las medidas de variación, como por ejemplo, el rango y la desviación estándar, comparando la distribución de los datos en el gráfico de puntos, esto es, mediante las diferencias entre el valor de cada dato y la media del conjunto de

datos. En relación a ello, cabe mencionar que el gráfico de puntos, resultó ser un recurso didáctico que permitió comprender y relacionar diversos conceptos estadísticos, favoreciendo a los profesores en la comprensión de la variación.

En la tercera actividad, los profesores percibieron la variación mediante el análisis de dos conjuntos de datos. Los procesos de transnumeración realizados por los profesores permitieron comprender la variación y tener una visión completa y clara sobre el conjunto de datos como un todo, comprendiendo la importancia de relacionar todas las representaciones y entender el significado que tiene cada una y la información que brinda cada representación del conjunto de datos.

El análisis de la variación llevó a los profesores a comprender cuál era el sentido de cambiar o recurrir a otras representaciones, es decir, por qué transnumerar; generándose la necesidad de tener que cambiar de representaciones y entender cuál es el sentido de ello. Además, hemos corroborado que mientras más comprensión se tenga de las diferentes nociones estadísticas, éstas se convierten en herramientas que permiten tener mayor capacidad para transnumerar, tal como lo establece Wild y Pfannkuch (1999)

También observamos que la transnumeración es practicada por los profesores, ellos constantemente transnumerar, es decir, construyen diferentes representaciones de un conjunto de datos, porque tienen la noción de ello, por ejemplo construyen tablas, diagrama de barras, pictogramas y medidas de resumen. Sin embargo, se observó que este proceso de transnumerar no es reflexivo, es decir, se llevan a cabo dichos cambios de representación, pero todas estas representaciones del mismo conjunto de datos, no se analizan, no se contrastan, ni se conciben como un todo, dejando de lado la interpretación del significado de cada representación según el contexto dado. Así, también constatamos que el conocimiento previo de la media, se convirtió inicialmente en una dificultad para la construcción del conocimiento de su significado, porque esta concepción de asociar la media sólo con el algoritmo que lo identifica, no permitía a los profesores realizar mayor análisis del conjunto de datos.

Consideramos que con el desarrollo de las actividades, los profesores reflexionaron sobre la forma en que abordan la enseñanza de la estadística y que debido a la variación de los datos es que se genera la necesidad de estudiarla. De esta manera, aseveramos que este proceso reflexivo del cambio de representaciones, es decir transnumerar, debe ser generado con los estudiantes, pero también incidimos que debe ser de forma reflexiva, no mecánica, ni

repetitiva; se trata de comprender que representar un conjunto de datos no es el fin del estudio de la estadística, sino que es una herramienta que sirve para el análisis de los datos. Y para ello, admitimos que es necesario realizar una formación de profesores orientados en la formación didáctica de la estadística que tenga como eje principal el análisis de datos y no sólo los cálculos y procedimientos que involucren construir mecánicamente y sin sentido diferentes representaciones.

Por lo que, establecemos que nuestras actividades servirían como un piloto para considerar lo que es necesario realizar y enfatizar en un programa de formación de profesores en la enseñanza de la estadística y además sirva para investigaciones futuras.

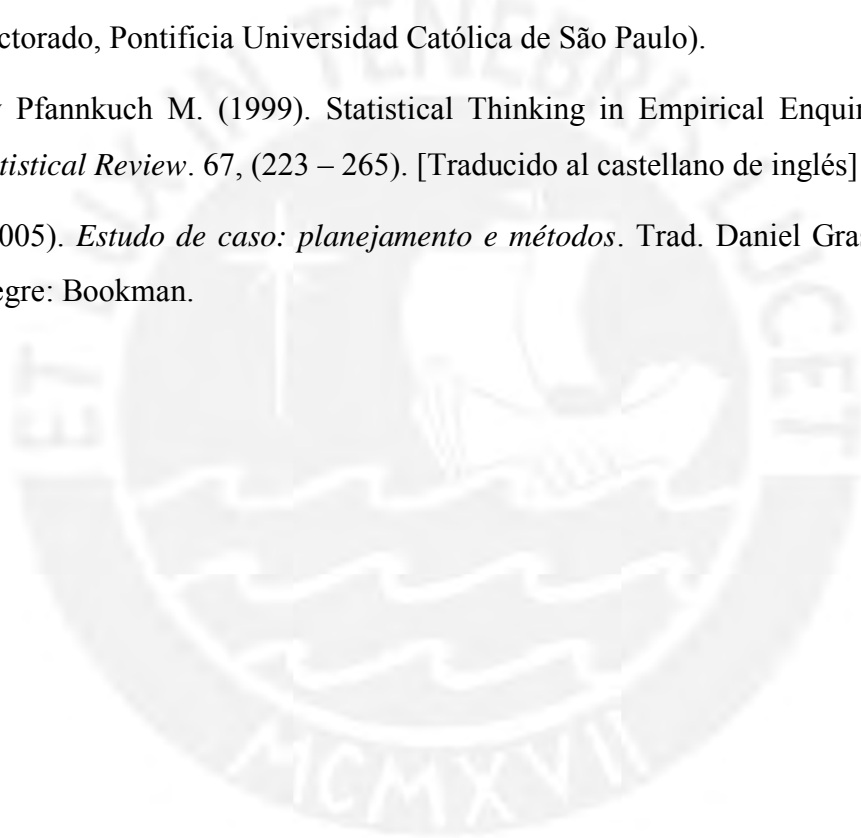


## REFERENCIAS

- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma* 9 (25 – 31). Recuperado de: <http://www.ugr.es>
- Batanero, C.(2000). Significado y Comprensión de las Medidas de Tendencia Central. *UNO* 25(41– 48). Recuperado de <http://www.urg.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2004). *El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística*. En Patricio, J. (Ed.). Aspectos Didácticos de las matemáticas (125 – 164). Zaragoza: ICE. Recuperado de <http://www.urg.es/~batanero/>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos*. Granada: ReproDigital.
- Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Trad. María Álvarez, Sara Bahia y Telmo Mourinho. Portugal: Porto Editora.
- Chick, H. (2004). Tools for Transnumeration: Early stages in the Art of Data Representation. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, 167-174. Recuperado de [https://www.merga.net.au/documents/RR\\_chick.pdf](https://www.merga.net.au/documents/RR_chick.pdf)
- Chick, H., Pfannkuch, M. y Watson, J. (2005). Transnumerative thinking: finding and telling stories within data. *Curriculum Matters* (87 – 108).
- Cooper, L. y Shore, F. The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*. v. 18, n. 2, 2010. Recuperado de <http://www.amstat.org/publications/jse/v18n2/cooper.pdf>.
- Coutinho, C., Almouloud, S. y Silva, M. (2012). O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática. *Revista Eletrónica de Matemática*, 7(2), (246 – 265)
- Estrella, S. y Olfos R. (Mayo, 2015). *Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia*. Trabajo presentado en Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México.
- Freitas, E. (2010). *Relações entre Mobilização dos Registros de Representação Semiótica e os Níveis de Letramento Estatístico com duas Professoras*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de São Paulo).
- Instituto Pedagógico Nacional Monterrico (2015). Sílabo de Investigación VIII de la especialidad Matemática – Física - IPNM

- Makar, K. y Confrey J. (2005). “Variation – Talk”: Articulating Meaning in Statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), (27 – 54)
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. En *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf>
- Montgomery, D. (2009). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. Recuperado de <http://es.slideshare.net/ederdavila/probabilidad-y-estadistica-para-i-ingeniera-y-administracion-montgomery>
- Norma (2012). *Matemática 2*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C.
- Norma (2012). *Matemática 3*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C.
- Novaes, D. (2011). *Concepciones de Profesores de Educación Básica sobre Variabilidad Estadística*. (Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo).
- Ortiz, J. (Ed.) (2011). *Investigaciones Actuales en Educación Estadística y Formación de Profesores*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/LIBRO.pdf>
- Pérez, R., Caso, C., Río, M. y López, A. (2012). *Introducción a la Estadística Económica*. España: Universidad de Oviedo.
- Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/>
- Perú, Ministerio de Educación (2016b). Sistema de Consulta de Resultados de Evaluaciones: SICRECE. [http://sistemas02.minedu.gob.pe/consulta\\_ece/publico/index.php](http://sistemas02.minedu.gob.pe/consulta_ece/publico/index.php)
- Perú, Ministerio de Educación (2016c). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>
- Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 19(25).
- Sanoja J. y Ortiz J. (2013). *El Conocimiento Didáctico del Contenido Estadístico del Maestro*. En Salcedo, A. (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 125 – 151). Venezuela: Universidad Central de Venezuela.

- Silva, C. (2007). *Pensamiento Estadístico y Razonamiento sobre Variación: un estudio con profesores de Matemática*. (Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo).
- Taylor, S. y Bogdan R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados*. Trad. Jorge Piatigorsky. Barcelona: Paidós
- Véliz, C. (2011). *Estadística para la administración y los negocios*. México: Pearson Educación.
- Vieira, C. (2015). *A prática docente e sua influencia na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal*. (Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica de São Paulo).
- Wild C. y Pfannkuch M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*. 67, (223 – 265). [Traducido al castellano de inglés]
- Yin, R. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Trad. Daniel Grassi. 3a ed. Porto Alegre: Bookman.



## ANEXOS



INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL MONTEERRICO  
Programa Académico de Formación Inicial Docente

### SILABO DE INVESTIGACION VIII

#### I. DATOS GENERALES

Escuelas Profesionales:	Educación Inicial y Primaria, Comunicación y Ciencia y Tecnología
Coordinación Académica:	Educación Inicial, Educación Primaria, Lengua, Literatura y Comunicación, Idiomas, Ciencias Histórico Sociales, Matemática- Física y Ciencias Naturales.
Semestre Académico:	2015-II
Ciclo de estudios:	VIII
Número de Créditos:	3
Número de Horas:	4 semanales
Requisitos:	Ninguno
Carácter:	Obligatorio
Docente:	Emilio Jesús Campos Alarcón, Jessica Yanireé Díaz Gálvez, María Isabel Carrion Prodenzio, Sergio Alonso Torres Quispe, Isabel Condor Nunayalle.

#### II. SUMILLA

Es una asignatura de naturaleza teórico práctica que pertenece al Subsistema de Desarrollo Personal - Profesional y es de carácter obligatorio; cuyo propósito es brindar herramientas teóricas, metodológicas y tecnológicas para el procesamiento de la información, así como orientar la elaboración de los proyectos de investigación.

La asignatura comprende los ejes temáticos: Elementos de Estadística; Procesamiento y organización de datos para variables cualitativas y cuantitativas; Análisis e interpretación de datos univariados y bivariados; Nociones de inferencia y Proyecto de Investigación.

#### III. LOGROS DE ASIGNATURA

- Aplica herramientas estadísticas para procesar e interpretar información del fenómeno educativo a investigar considerando el diseño de la investigación, el tipo de datos y la muestra.
- Diseña y Socializa proyectos de investigación, para tomar decisiones oportunas y pertinentes respecto a la aplicación de los mismos, considerando el enfoque, el ámbito de intervención (nivel y/o especialidad), marco teórico, consistencia entre sus elementos y los protocolos institucionales.

#### IV. PROGRAMACIÓN

UNIDAD/ DURACIÓN	LOGRO DE UNIDAD	CONTENIDOS	EVIDENCIAS
Unidad I  <b>SISTEMATIZACIÓN DE INFORMACIÓN,</b>  (Del 19 de agosto al 18 de setiembre)	<input type="checkbox"/> Procesa datos recogidos según sus variables de atención, para contrastar las teorías con la realidad, empleando software, tablas y gráficos estadísticos.	<input type="checkbox"/> Conceptos básicos: - Población, muestra, variable, tipos de variables. - Tabulación de datos mediante el uso de software (SPSS, Excel). - Frecuencias absolutas y relativas (simples y acumuladas), frecuencias porcentuales, para datos agrupados y no agrupados. <input type="checkbox"/> Presentación gráfica de la información. - Diagrama de barras, de sectores, histogramas, polígono de frecuencias, ojivas.	<input type="checkbox"/> Identificación de variables, sistematización de información en tablas y gráficos estadísticos.  <input type="checkbox"/> Sistematización de información en tablas de frecuencia para datos agrupados y no agrupados usando software estadístico.

UNIDAD/ DURACIÓN	LOGRO DE UNIDAD	CONTENIDOS	EVIDENCIAS
<p>Unidad II</p> <p><b>ESTADÍGRAFOS DE TENDENCIA CENTRAL, POSICIÓN Y DESVIACIÓN.</b></p> <p>(Del 21 de setiembre al 16 de octubre)</p>	<p>□ Interpreta datos univariados de variables cuantitativas para llegar a conclusiones válidas de la información estadística obtenida, considerando el uso de estadígrafos software.</p>	<p>□ Medidas de tendencia central.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Media, mediana, moda.</li> </ul> <p>□ Medidas de Posición</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cuantiles, Deciles, Percentiles.</li> </ul> <p>□ Medidas de dispersión.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rango, varianza, desviación estándar, coeficientes de variación.</li> </ul>	<p>□ Cálculo e Interpretación de estadígrafos de tendencia central usando software estadístico.</p> <p>□ Cálculo e Interpretación de estadígrafos de posición y dispersión usando software estadístico.</p>
<p>UNIDAD III</p> <p><b>MÉTODOS ESTADÍSTICOS APLICADOS A LA INVESTIGACION</b></p> <p>(Del 19 de octubre al 13 de noviembre)</p>	<p>□ Aplica los métodos estadísticos acorde al tipo de investigación para llegar a conclusiones válidas de la información obtenida.</p>	<p>□ Estudio de normalidad de datos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Prueba de <del>Kolmogorov-Smirnov</del>.</li> </ul> <p>□ Métodos estadísticos para diseños descriptivos correlacional.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Regresión y correlación, coeficiente de correlación lineal, distribución Chi-cuadrado.</li> </ul> <p>□ Métodos estadísticos para investigaciones de diseño experimental.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Prueba t para una muestra, para dos muestras independientes y para dos muestras relacionadas.</li> </ul> <p>□ Prueba de Hipótesis</p>	<p>□ Aplicación de los métodos estadísticos apropiados acordes a su investigación.</p>
<p>Unidad IV</p> <p><b>CONFIABILIDAD Y MUESTREO.</b></p> <p>(Del 16 al 27 de noviembre)</p>	<p>□ Determina la confiabilidad de un instrumento de investigación considerando el parámetro adecuado mediante el uso de software.</p>	<p>□ Análisis de validez y confiabilidad de instrumentos de investigación.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- R de Pearson, Spearman, Guttman, Alfa de Cronbach, Kuder Richardson.</li> </ul> <p>□ Teoría de Muestreo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tamaño y determinación de la muestra.</li> </ul>	<p>□ Informe sobre determinación de la muestra, análisis de juicio de expertos y confiabilidad del instrumento.</p>
<p>Unidad V</p> <p><b>PROYECTO DE INVESTIGACIÓN</b></p> <p>(Del 30 de noviembre al 11 de diciembre)</p>	<p>□ Valida la hipótesis de una investigación utilizando el estadígrafos y software.</p> <p>□ Socializa proyectos de investigación para la toma de decisiones y mejora de la práctica educativa, evidenciando consistencia en sus elementos.</p>	<p>□ Proyecto de investigación:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Marco Poblacional y muestral.</li> <li>- Instrumentos.</li> <li>- Presentación y análisis estadístico de los datos.</li> </ul>	<p>□ Informe del análisis estadístico de su investigación.</p> <p>□ Informe y socialización del Proyecto de Investigación</p>



**PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES<sup>1</sup>**

El propósito de este protocolo es brindar a los y a las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por \_\_\_\_\_ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad \_\_\_\_\_. La meta de este estudio es \_\_\_\_\_

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará \_\_\_\_ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán confidenciales, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, \_\_\_\_\_ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta (de ser el caso que se haya proporcionado información escrita sobre la investigación). He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, puedan ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con \_\_\_\_\_ al correo (o al teléfono) \_\_\_\_\_.

Nombre completo del (de la) participante	Firma	Fecha
Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha

<sup>1</sup> Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

## PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

### Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

#### Hoja de ruta para observación de los encuentros

---

#### Ficha de observación de la Actividad 01

Fecha: \_\_\_\_\_

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los profesores observados: \_\_\_\_\_

N° de Grupo \_\_\_\_\_

Condiciones de la observación:

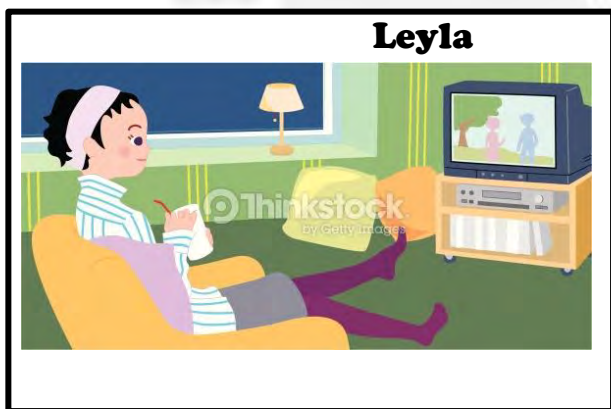
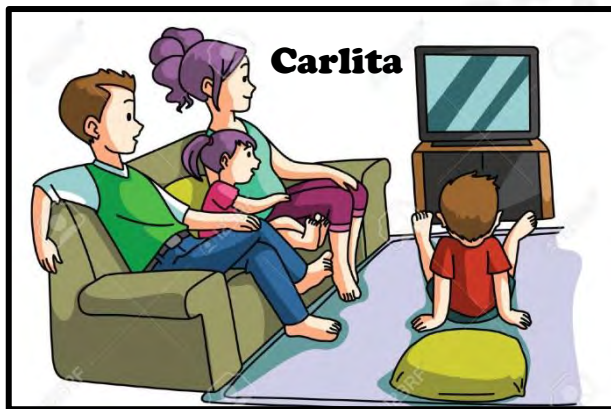
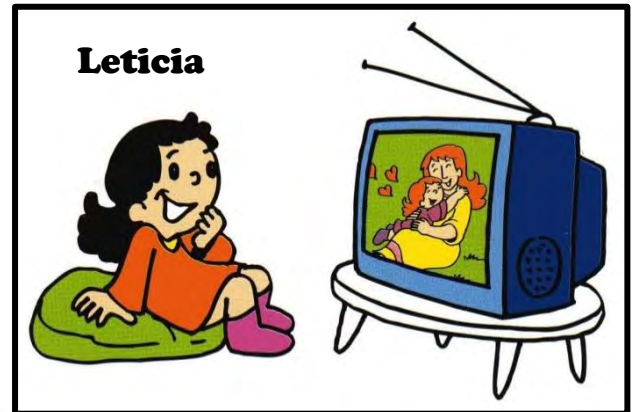
- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la Actividad 01.
- Después de terminada la Actividad 01, recoger la ficha de trabajo del alumno.
- Tener presente que la Actividad 01 se desarrollará en parejas, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de profesores de forma ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfocarse especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de profesores hace en el momento que se va realizando la actividad 01.

### Actividad 01

- a) Realice una representación sobre las actividades de las personas utilizando las figuras, ¿qué información identifica a partir de esta representación?
- b) Ahora realice una representación en la cual se reemplacen las figuras por puntos, ¿qué puede decir de este tipo de gráfico? Escriba algunas líneas.



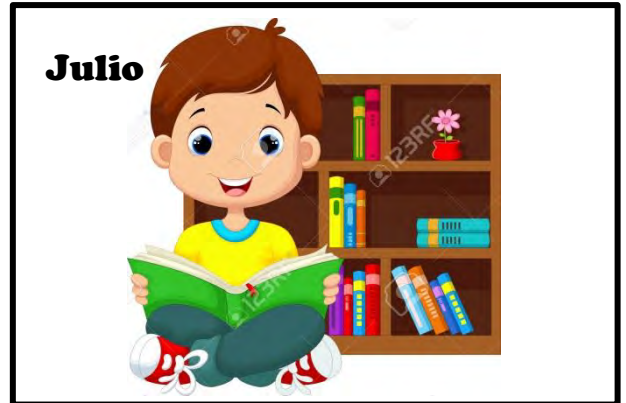
Imágenes de las actividades que realizan los estudiantes – Actividad 01



Imágenes de actividades que realizan los estudiantes – Actividad 01



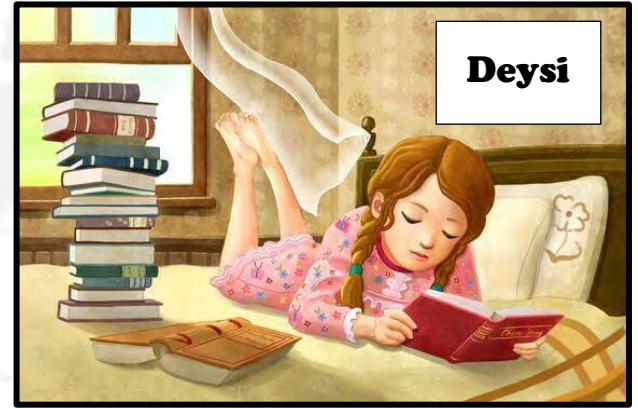
**Gina**



**Julio**



**Edison**



**Deysi**



**Joel**



**Rita**



**Leo**



**Alex**

Imágenes de actividades que realizan los estudiantes – Actividad 01



## Actividad 02

En la I.E José Faustino Sánchez Carrión de Lurín los estudiantes se organizan para participar en el desfile escolar. Sin embargo, uno de los requisitos para que participen en el desfile es que las medidas de las estaturas de las estudiantes mujeres deben presentar en promedio 1.58 cm. Según las medidas de las estaturas de las estudiantes presentadas a continuación ¿considera que las estudiantes pueden participar en el desfile?

ESTUDIANTE	ESTATURA (cm)
E1	1,50
E2	1,52
E3	1,48
E4	1,55
E5	1,61
E6	1,66
E7	1,48
E8	1,54
E9	1,52

ESTUDIANTE	ESTATURA (cm)
E10	1,63
E11	1,52
E12	1,48
E13	1,53
E14	1,51
E15	1,49
E16	1,55
E17	1,56

Abra el geogebra y según las orientaciones en la guía construya un gráfico de puntos sobre las estaturas de las estudiantes mujeres.

- ¿Qué información de las estaturas de las estudiantes identifica a partir del gráfico de puntos?
- ¿Puede identificar alguna(s) medida(s) estadística(s) sobre las estaturas de las estudiantes a partir del gráfico de puntos? ¿cuáles?, ¿cuál es la información que brindan esas medidas estadísticas? Escriba algunas líneas.
- ¿Considera que estas medidas se relacionan de alguna forma con la distribución de los datos (medida de las estaturas) en el gráfico de puntos? ¿cómo representaría esa(s) medida(s) en el gráfico de puntos?
- Si se sabe que la media es un número que representa a cada uno de los valores de un conjunto de datos (las medidas de las estaturas) ¿considera que la media de las estaturas es representativa? Escriba algunas líneas.
- Si quisiéramos que las estaturas de las estudiantes cumplan con el requisito establecido ¿cómo cree que deberían ser las medidas de las estaturas de las estudiantes? ¿Por qué?
- A partir de estos cambios, ¿qué observa en las medidas?

### Actividad 03

Un profesor de matemática quiere reconocer el esfuerzo entre dos estudiantes del 4° de secundaria en el área de matemática, Pablo y Raúl. Considerando las notas obtenidas por los estudiantes en el transcurso de las clases, **¿quién de los dos estudiantes cree que tendrá el reconocimiento?**

NOTAS DE MATEMÁTICA	
NOTAS DE PABLO	NOTAS DE RAÚL
17	19.5
15.5	17
16	16
17.5	18.5
16.5	13
19.5	20
19	18
20	19
18	

Según las orientaciones en la guía del geogebra construya un gráfico de puntos sobre las notas de Pablo y Raúl.

- ¿Qué medida(s) considera que permitirá(n) saber quién de los dos estudiantes demostró un esfuerzo constante? ¿por qué?
- ¿Qué información identifica a partir de esa(s) medida(s)? ¿considera que esa información es suficiente para saber quién de los dos estudiantes demostró un esfuerzo constante? ¿por qué?
- ¿Quién de los dos estudiantes considera que demostró un esfuerzo constante en sus notas? Explique con qué criterio analizó las notas y decidió su respuesta.
- Si hubiésemos deseado que el estudiante que no obtuvo el reconocimiento gane ¿qué modificaciones realizaría en la distribución de las notas?, ¿qué cambios observa?

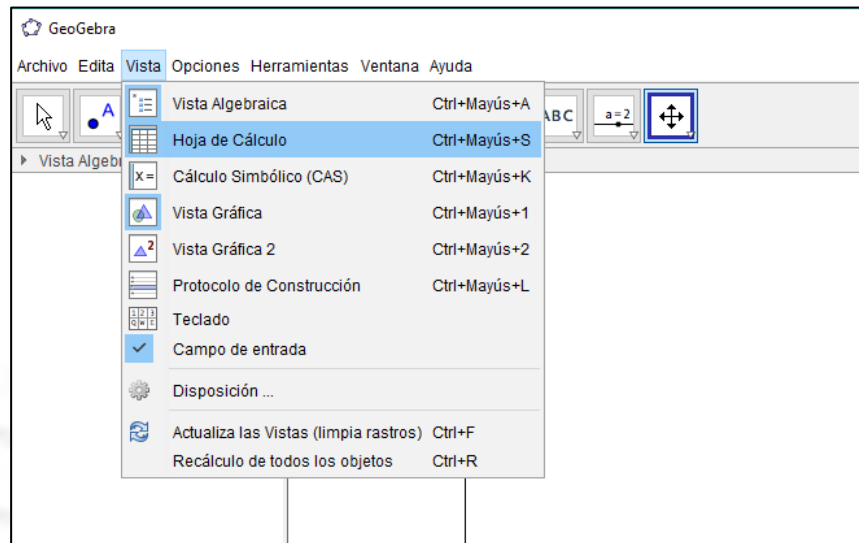


## Construcción del Gráfico de Puntos con Geogebra

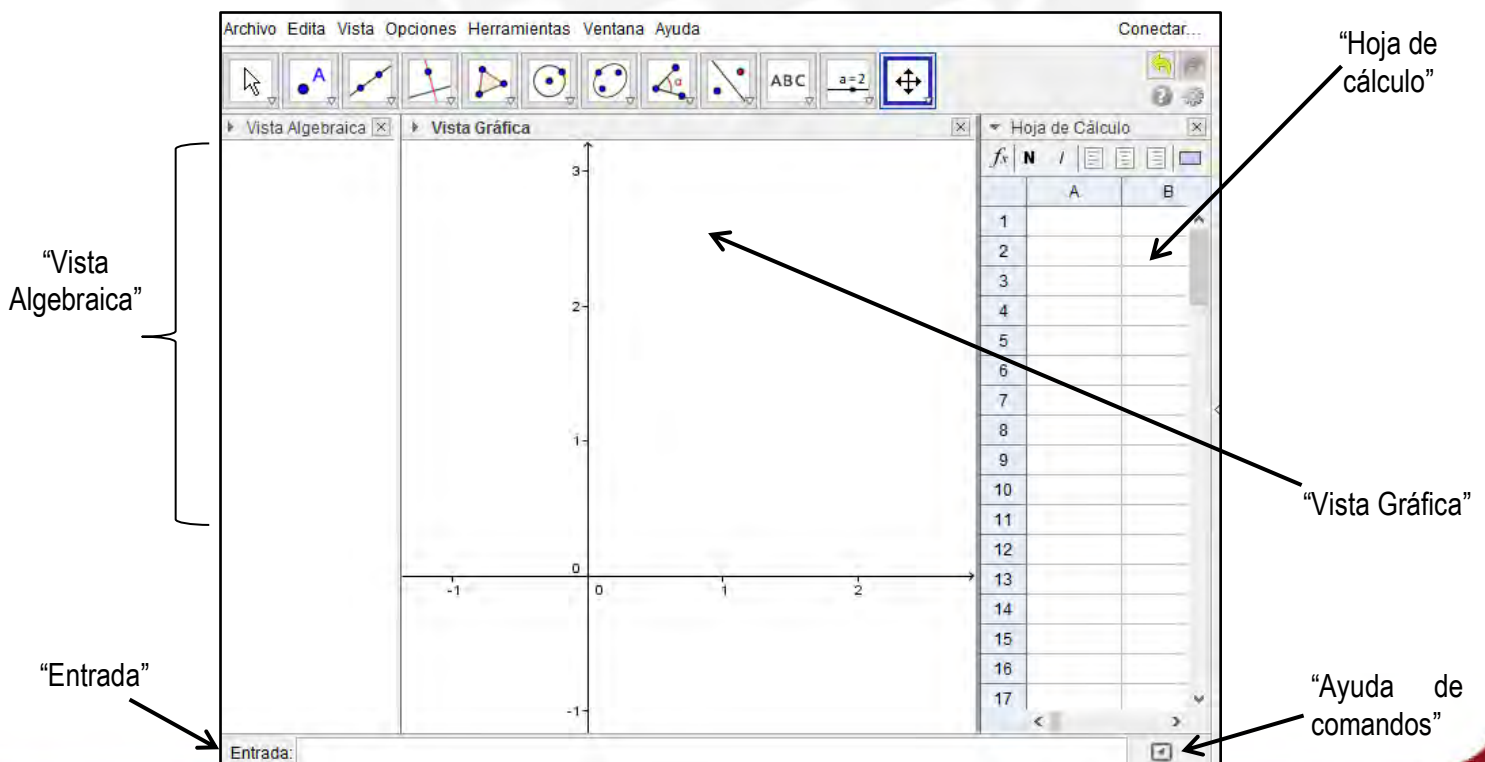
Para construir el gráfico de puntos con el geogebra realizar los siguientes pasos:

1) Abrir el ícono  ubicado en el Escritorio.

2) Ubicar la ventana “Vista” y activar en ella la “Hoja de Cálculo” como se indica en la siguiente figura:



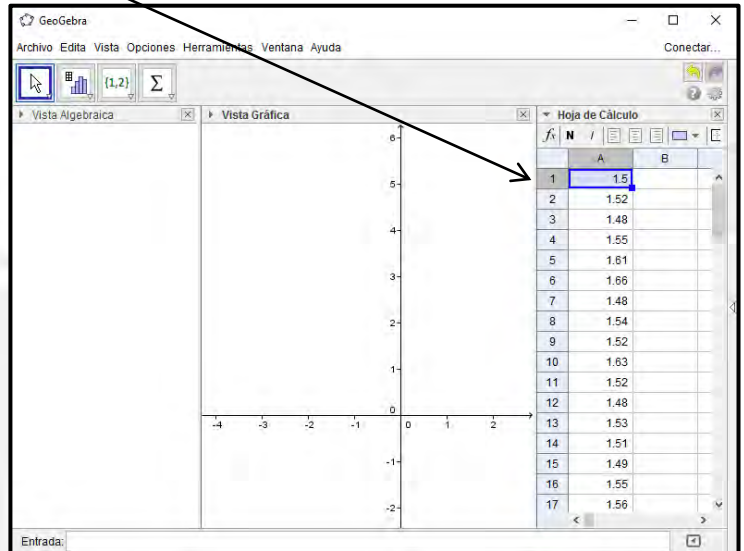
3) A partir de ello, se observarán las siguientes partes: “Vista algebraica”, “Vista Gráfica”, “Hoja de cálculo”, “Entrada” y “Ayuda de comandos”.



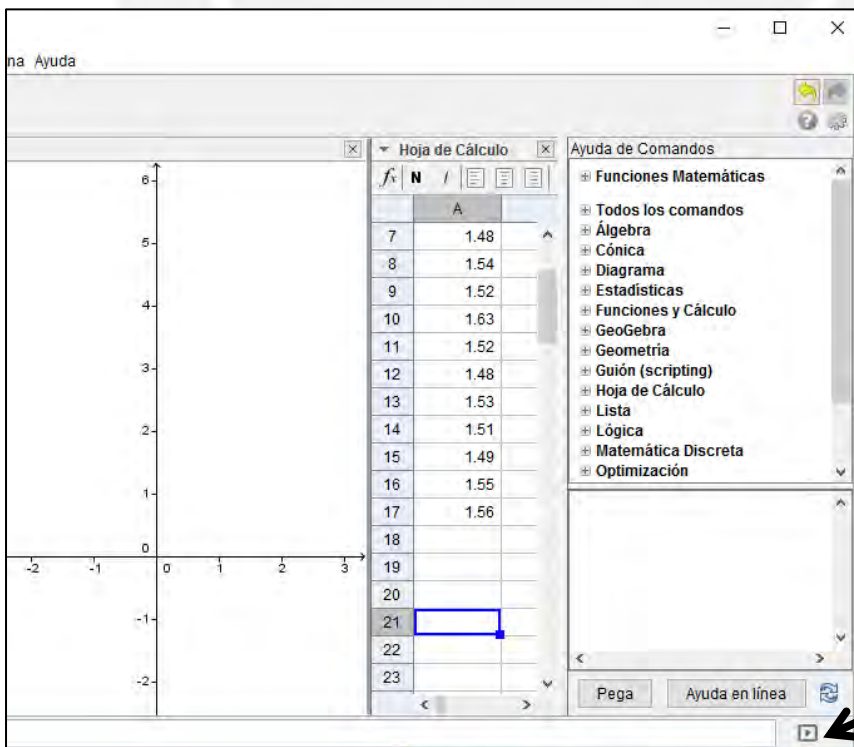
Para representar una base de datos mediante el gráfico de puntos, suponemos las siguientes medidas referentes a la estatura de las estudiantes mujeres del 3° “G” de secundaria

- 4) Digitar las estaturas de las estudiantes de la Actividad 02 en la hoja de cálculo, usando puntos en vez de comas, tal como se muestra a continuación:

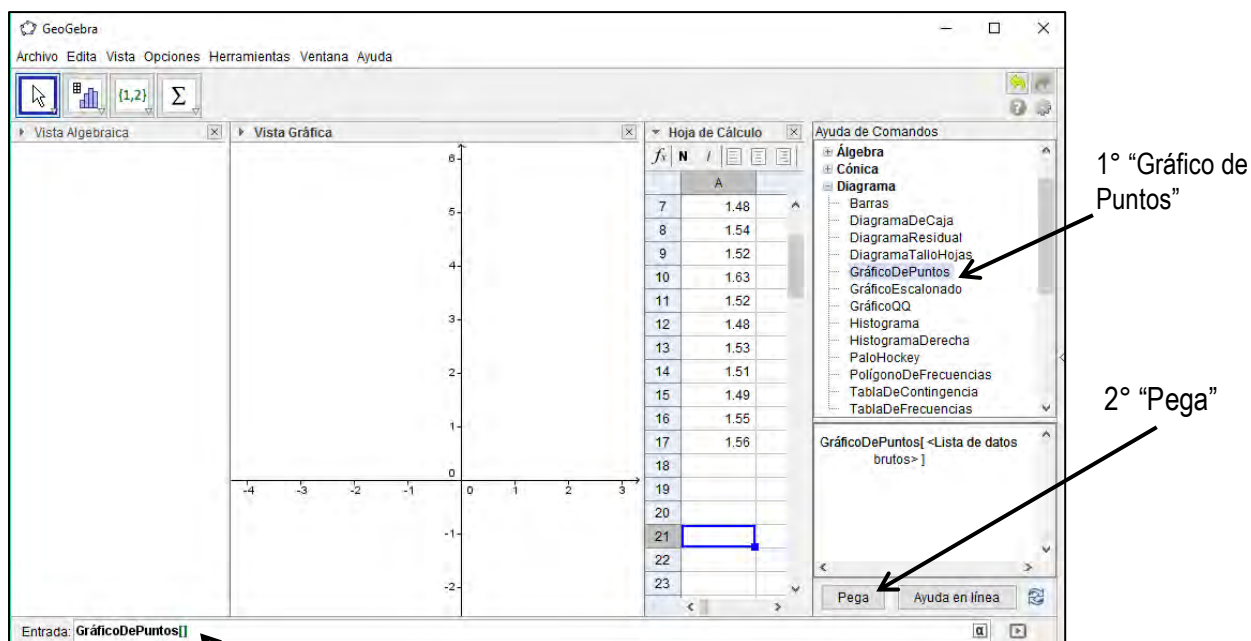
ESTUDIANTE	ESTATURA (cm)
E1	1,50
E2	1,52
E3	1,48
E4	1,55
E5	1,61
E6	1,66
E7	1,48
E8	1,54
E9	1,52
E10	1,63
E11	1,52
E12	1,48
E13	1,53
E14	1,51
E15	1,49
E16	1,55
E17	1,56



- 5) Hacer clic en “Ayuda de Comandos” y luego en la nueva ventana elegir “Diagrama”:

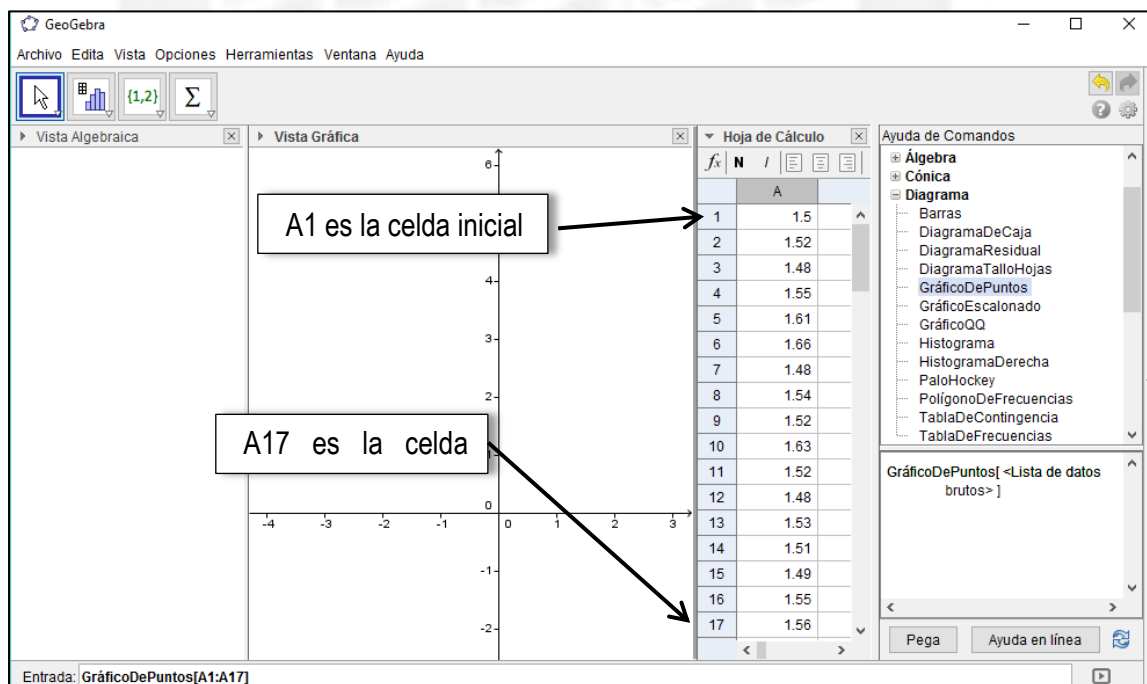


- 6) Dentro de las opciones de “Diagrama” elegir “Gráfico de Puntos”, hacer clic en “Pega”. Luego en “Entrada” ubicarse entre los corchetes.



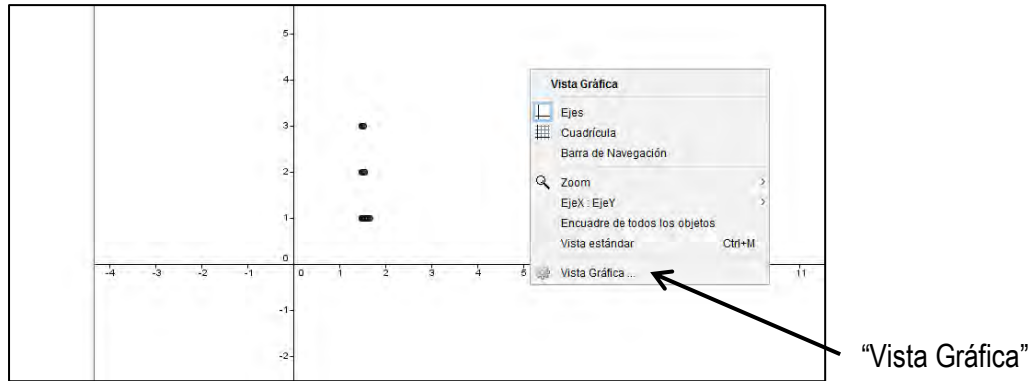
- 3° En “Entrada” ubicarse dentro de los corchetes.

- 7) Digitar dentro de los corchetes “[A1:A17]” la celda inicial y la celda final en las cuales se encuentran los datos, luego presionar la tecla “Enter” para obtener el gráfico de puntos.

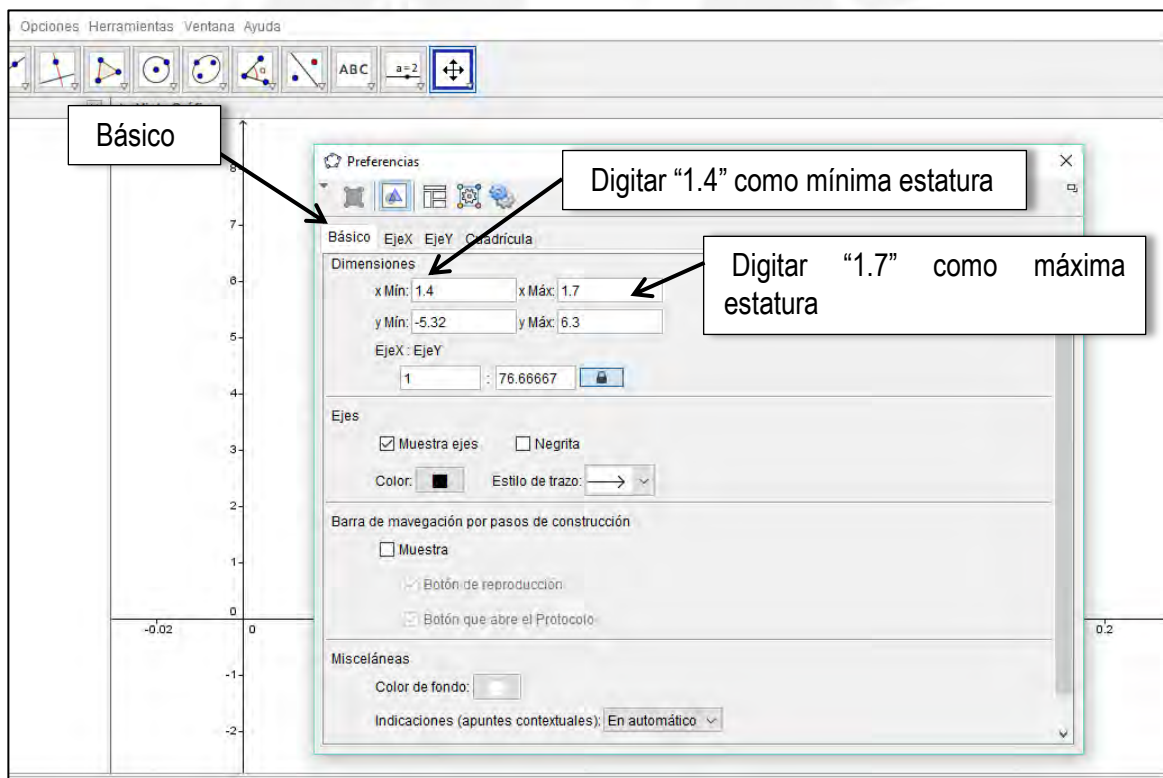


- ↖ Digitar “[A1:A17]” y presionar “Enter”

- 8) Observamos que los puntos no se aprecian muy bien, por ello daremos algunos arreglos haciendo clic derecho en la pantalla, luego en la ventana que aparece elegir “Vista Gráfica”:



- 9) Observamos una nueva ventana “Preferencias”, en ella elegir “Básico” y digitar valores extremos pero cercanos al mínimo y máximo valor de las estaturas de las estudiantes. Por ejemplo:



Podemos explorar haciendo clic en “Eje x” o “Eje y” para dar formato a la presentación de nuestro gráfico de puntos.