

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**LA TRANSDIGRAMACIÓN Y LAS APREHENSIONES DEL REGISTRO
GRÁFICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN:
UN ESTUDIO CON PROFESORES DE SECUNDARIA**

**Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta**

Alfredo Demetrio Moreno Llacza

ASESOR

Dra. Katia Vigo Ingar

JURADO

Mg. Augusta Osorio Gonzales

Dra. Cileda de Quiroz e Silva Coutinho

Lima – Perú

2017





A Dios por permitirme concluir con mi trabajo de investigación.

A mis padres por la formación que me dieron y me permite seguir adelante.

A mi esposa por su apoyo incondicional en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

A mi Asesora Dra. Katia Vigo Ingar, profesora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su valiosa ayuda y colaboración durante el desarrollo del presente trabajo.

A los miembros del jurado, Dra. Cileda de Quieroz e Silva Coutinho de la PUC-SP/Brasil y la Magíster Augusta Osorio Gonzales de la PUCP, por las sugerencias y observaciones realizadas que permitieron mejorar la calidad de mi tesis.

A la Dra. María José Ferreira da Silva, por sus valiosas sugerencias para la elaboración de mi tesis.



RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo analizar las aprehensiones en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) que los profesores del nivel secundaria movilizan al percibir y describir la variación de los datos en el proceso de transnumeración, para lo cual nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los profesores de matemática del nivel secundario movilizan las aprehensiones en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) al percibir y describir la variación de los datos en el proceso de transnumeración? En esta investigación utilizamos como base teórica aspectos del Pensamiento Estadístico, específicamente la transnumeración, y la Teoría de Registros de Representación Semiótica adaptada para el aprendizaje de la estadística, específicamente las aprehensiones del registro gráfico, y en cuanto a la metodología optamos por el estudio de casos. En la parte experimental, propusimos dos actividades encaminadas a la construcción del diagrama de cajas y luego percibir y describir la variación de los datos por medio de las aprehensiones del registro gráfico en el desarrollo del proceso de transnumeración. Específicamente analizamos las aprehensiones perceptiva y discursiva del registro gráfico que movilizaron los profesores e identificamos las técnicas transnumerativas que utilizaron los profesores durante el proceso de transnumeración para realizar el análisis de variación. Finalmente todavía existe en los profesores la dificultad en el cálculo e interpretación de los cuartiles, a pesar que tienen conocimientos de la estadística descriptiva. Además se constató que muy pocos profesores conocían el gráfico de puntos y el diagrama de cajas.

Palabras clave: variación, aprehensiones, transnumeración, geogebra.

ABSTRACT

The present research aims to analyze the apprehensions that the secondary school teachers mobilize in the graphical register (Dot-plot and Box-plot) in perceiving and describing the variation of the data in the process of transnumeración, for which we ask the following question of Research: How do mathematics teachers at the secondary level mobilize apprehensions in the graphical register (Dot-plot and Box-plot) in perceiving and describing the variation of data in the transnumeration process? In this research we use as theoretical basis aspects of Statistical Thinking, specifically the transnumeration, and the Theory of Semiotic Representation Registers adapted for the learning of statistics, specifically the apprehensions of the graphic registry, and as for the methodology we opted for the study of Cases. In the experimental part, we proposed two activities aimed at the construction of the box diagram and then perceive and describe the variation of the data through the apprehensions of the graphic record in the development of the transnumeration process. Specifically we analyze the perceptive and discursive apprehensions of the graphic record that the teachers mobilized and we identified the transnumerative techniques that teachers used during the transnumeration process to perform the analysis of variation. Finally, it is still difficult for teachers to calculate and interpret the quartiles, even though they have a knowledge of descriptive statistics. In addition, it was found that very few teachers knew the dot plot and the box diagram.

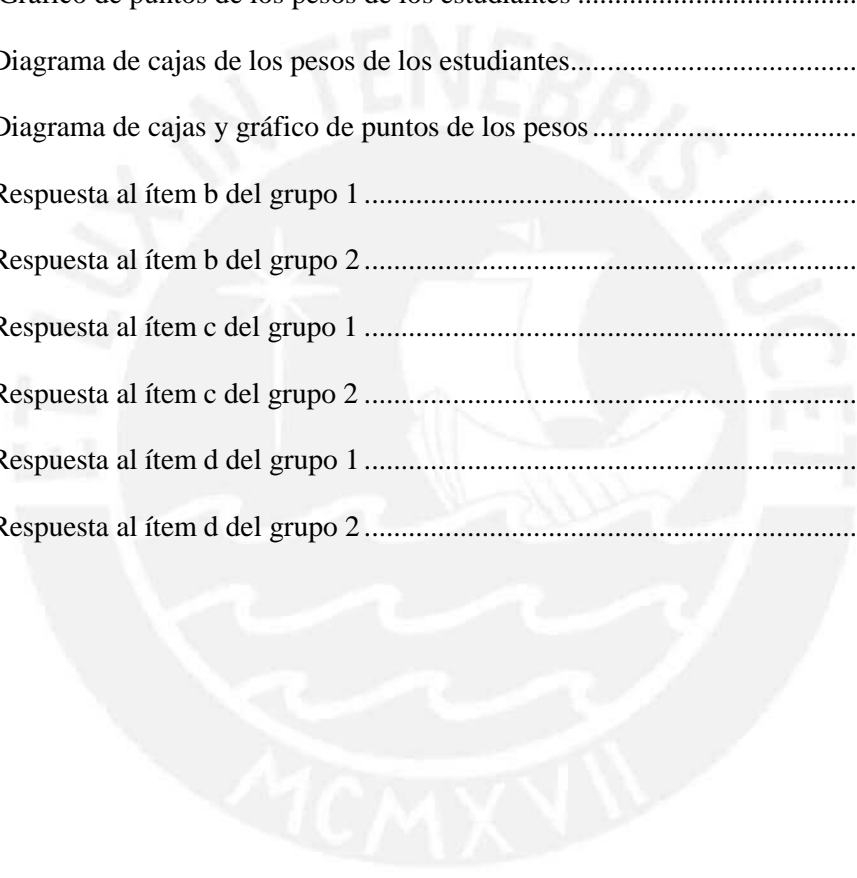
Key words: variation, apprehensions, transnumeration, geogebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Tipos de pensamiento fundamental	36
Figura 2. Gráfico Box-Plot del número de aciertos de 12 estudiantes	40
Figura 3. Comparación del gráfico Box-Plot y el gráfico de puntos del número de aciertos de los estudiantes.....	41
Figura 4. Transformación de una distribución de datos	44
Figura 5. Tratamiento de una tabla de frecuencias por la modificación de la amplitud del intervalo de clase.....	44
Figura 6. Gráfico de barras de la variable grado de instrucción.....	45
Figura 7. Gráfico de puntos de la variable edad.....	46
Figura 8. Aprehensión discursiva del Box-plot.....	46
Figura 9. Aprehensión secuencial	47
Figura 10. Cuartiles.....	60
Figura 11. Gráfico de cajas	61
Figura 12. Introducción a las medidas de tendencia central.....	62
Figura 13. Media aritmética	63
Figura 14. Mediana	63
Figura 15. Simetría de una distribución de datos	64
Figura 16. Rango.....	65
Figura 17. Desviación media.....	65
Figura 18. Varianza.....	66
Figura 19. Cálculo de la varianza.....	66
Figura 20. Cuantiles	67
Figura 21. Cálculo del tercer cuartil.....	68
Figura 22. Cálculo de un dato en una posición determinada.....	68
Figura 23. Tarea de extensión	69
Figura 24. Diagrama de cajas.....	69
Figura 25. Construcción del diagrama de cajas.....	71

Figura 26. Diagrama de cajas	75
Figura 27. Diagrama de cajas con tarjetas.....	75
Figura 28. Gráfico de punto de las edades de los estudiantes	77
Figura 29. Gráfico de punto de las edades de los estudiantes realizado por el grupo 1	77
Figura 30. Ordenamiento de las edades de los estudiantes.	78
Figura 31. Gráfico de puntos de las edades de los estudiantes realizado por el grupo 2.....	78
Figura 32. Respuesta al ítem b del grupo 1	80
Figura 33. Cálculo de la media del grupo 1	80
Figura 34. Respuesta al ítem b del grupo 2	80
Figura 35. División en el gráfico de puntos en dos grupos iguales.....	82
Figura 36. División del gráfico de puntos realizado por el grupo 1	82
Figura 37. Respuesta al ítem c del grupo 1	83
Figura 38. División del gráfico de puntos realizado por el grupo 2.....	83
Figura 39. Respuesta al ítem c del grupo 2	84
Figura 40. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales.....	85
Figura 41. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales.....	86
Figura 42. Respuesta al ítem d del grupo 1	86
Figura 43. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales realizado por el grupo 2	87
Figura 44. Respuesta al ítem d del grupo 2	87
Figura 45. Construcción del diagrama de cajas.....	89
Figura 46. Construcción del diagrama de cajas del grupo 1.....	89
Figura 47. Construcción del diagrama de cajas del grupo 2	90
Figura 48. Pegado de tarjetas del grupo 1	91
Figura 49. Pegado de tarjetas del grupo 2	92
Figura 50. Respuesta al ítem g del grupo 1	93
Figura 51. Respuesta al ítem g del grupo 2	93
Figura 52. Respuesta al ítem h del grupo 1	95
Figura 53. Respuesta al ítem h del grupo 2	95

Figura 54. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1.....	97
Figura 55. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1.....	97
Figura 56. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1.....	98
Figura 57. Respuesta al ítem i del grupo 1.....	99
Figura 58. Cambio de dato en el geogebra del grupo 2.....	100
Figura 59. Cambio de dato en el geogebra del grupo 2.....	101
Figura 60. Respuesta al ítem i del grupo 2.....	101
Figura 61. Gráfico de puntos de los pesos de los estudiantes	102
Figura 62. Diagrama de cajas de los pesos de los estudiantes.....	103
Figura 63. Diagrama de cajas y gráfico de puntos de los pesos	103
Figura 64. Respuesta al ítem b del grupo 1	105
Figura 65. Respuesta al ítem b del grupo 2	106
Figura 66. Respuesta al ítem c del grupo 1	107
Figura 67. Respuesta al ítem c del grupo 2	108
Figura 68. Respuesta al ítem d del grupo 1	109
Figura 69. Respuesta al ítem d del grupo 2.....	110



LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve problemas de Gestión de datos e incertidumbre	28
Tabla 2. Programación de contenidos de Estadística Aplicada a la Educación	31
Tabla 3. Técnicas transnumerativas	42
Tabla 4. Actividades del experimento.....	74



ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES	11
CAPITULO I: PROBLEMÁTICA.....	14
1.1 Antecedentes	14
1.2 Justificación.....	26
1.3 Aspectos teóricos.....	34
1.3.1 Pensamiento estadístico.....	34
1.3.1.1 Transnumeración.....	37
1.3.2 Teoría de Registros de Representación Semiótica	42
1.4 Pregunta y objetivos de investigación	48
1.5 Metodología de Investigación	49
1.5.1 Investigación Cualitativa.....	49
1.5.2 Estudio de caso.....	50
1.5.3 Procedimientos metodológicos.....	52
CAPITULO II: ANÁLISIS DEL OBJETO ESTADÍSTICO	55
2.1 Variación.....	55
2.1.1 Mediana.....	57
2.1.2 Cuartiles	59
2.1.3 Diagrama de cajas o Box-plot	60
2.2 Análisis de libros didácticos.....	61
CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS.....	72
3.1 Escenario de la investigación	72
3.2 Sujetos de la investigación	72
3.3 Descripción de las actividades	73
3.4 Análisis de las actividades.....	76
CONSIDERACIONES FINALES	111
REFERENCIAS	116
ANEXOS.....	120

CONSIDERACIONES INICIALES

En la actualidad la estadística está siendo considerada muy importante en la formación escolar básica del ciudadano porque proporciona una cantidad de herramientas para el análisis de la variación que permite mejorar la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Por consiguiente, la estadística ha sido incluida en el Diseño Curricular Nacional del 2016 como parte del área de matemática con el objetivo de desarrollar en los estudiantes el pensamiento estadístico (Wild y Pfaankuch, 1999), que le permitirá proporcionar argumentos basados en evidencia empírica y evaluar críticamente afirmaciones basados en datos.

Por otro lado, la enseñanza de la estadística ha adoptado el mismo enfoque determinístico que la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario, siendo la estadística una ciencia de naturaleza no determinística porque la variación es una de sus características (Moore, 1990), indispensable para su existencia y está ignorando la verdadera naturaleza de la estadística.

Sin embargo, al incluir la estadística al currículo, el Ministerio de Educación tiene el reto de realizar la formación de los profesores tanto en los conocimientos estadísticos como en los didácticos. Por eso la presente investigación fue realizada en un proyecto piloto de formación de profesores con el objetivo de analizar las aprehensiones en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) que los profesores movilizan al percibir y describir la variación de los datos durante el proceso de transnumeración.

Por lo tanto, para lograr dicho objetivo hemos considerado como marcos teóricos: el Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), específicamente la transnumeración, y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1991) adaptada para la estadística por Vieira (2008), específicamente las aprehensiones del registro gráfico. En tanto, con la finalidad de construir la noción de variación, se han diseñado dos actividades para

trabajar con lápiz, papel y con el software Geogebra, la que facilitó la construcción y la visualización simultáneamente de dos gráficos estadísticos.

Este trabajo se divide en tres capítulos:

En el capítulo 1, presentamos los antecedentes de la investigación en el que revisamos investigaciones sobre la variación con respecto a la mediana y los cuartiles, y los marcos teóricos: el Pensamiento Estadístico y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica adaptada para la estadística y también sobre el uso del geogebra. Así mismo presentamos la justificación, formulamos la pregunta y los objetivos de nuestra investigación. Además presentamos algunos aspectos de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval adaptada para la estadística por Vieira (2008), de los cuales nos centraremos en las aprehensiones del registro gráfico estadístico, también presentamos aspectos del estudio de caso como base metodológica de nuestra investigación.

En el capítulo 2, estudiamos el objeto variación. En primer lugar, presentamos la noción de variación y sus diferentes fuentes y luego el estudio de la variación en torno a la mediana y los cuartiles. Finalmente, presentamos el análisis de nuestro objeto en tres textos didácticos del tercer, cuarto y quinto grado de secundaria de nuestro país.

En el capítulo 3, presentamos el experimento, que comprende: la descripción del escenario de investigación, la descripción de los sujetos de investigación, la descripción de las actividades que constan de dos actividades; el análisis de las actividades con sus respectivos análisis previo y los resultados del experimento. Finalmente, presentamos las consideraciones finales de esta investigación y cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

Así mismo, debemos resaltar que la presente tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación DIMAT de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y

PEAMAT de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/BRASIL, titulado "Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEAMAT/DIMAT" y aprobado por la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).



CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

Presentamos algunas investigaciones en los que se aborda nuestro objeto estadístico, la variación. Además, presentamos otras investigaciones en las que se utilizan el programa Geogebra. Después presentaremos la justificación de la investigación y el marco teórico que está basado en el Pensamiento Estadístico y la Teoría de Registros de representación Semiótica. Posteriormente, la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos, y la metodología de la investigación.

1.1 Antecedentes

Vieira (2008) realiza un trabajo con el objetivo de estudiar la interacción entre estudiante y un software de estadística dinámica, Fathom. Este estudio se desarrolló por medio de una secuencia didáctica de actividades con el uso del software bajo el enfoque del análisis exploratorio de datos propuesta por Batanero, Estepa & Godino (1991) que desarrolla las siguientes capacidades de los estudiantes: organizar, analizar e interpretar las informaciones expresadas en gráficos y tablas. En esta investigación participaron ocho estudiantes del segundo año del nivel secundario del turno nocturno, de una escuela estatal localizada en el municipio de Santo André de Sao Paulo.

La autora, utiliza como marcos teóricos los niveles de comprensión gráfica de Curcio (1989) para analizar la comprensión gráfica movilizada por los estudiantes en situación de resolución de problemas propuestos en un contexto estadístico y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1994) para analizar la articulación de su uso en la representación y manipulación de los objetos estadísticos construidos por el estudiante utilizando como medio el software Fathom. Aunque la autora indica que esta teoría está dirigida principalmente a la geometría y al álgebra, trata de establecer un paralelo para la representación de los conceptos estadísticos.

Vieira (2008) refiere que, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, así como los objetos matemáticos, los objetos estadísticos no son accesibles o perceptibles; por ello es que para su apropiación es necesaria una forma de representación. Es así, que por medio de estas representaciones es que los conceptos estadísticos serán apropiados por los estudiantes. De la misma manera, afirma que así como la comprensión en matemática, la comprensión estadística implica que los estudiantes transiten por lo menos en dos registros de representación de un mismo objeto.

En la misma línea, la autora señala que de acuerdo con la Teoría de Registros de Representación Semiótica existen dos tipos diferentes de transformación de representaciones para el análisis del funcionamiento cognitivo de la comprensión. El primero es el tratamiento, que es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo sistema de registros; y la segunda es la conversión, que es la transformación de la representación de un objeto, en otra representación de ese mismo objeto en otro registro. De la misma manera considera para la comprensión estadística.

La investigadora señala que la representación figural es considerada de gran importancia para el estudio de la matemática. En ese sentido Duval (1994, p.123) afirma que hay varias maneras de aprehender una figura en un contexto geométrico, destacando cuatro tipos de aprehensiones: la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva, la aprehensión secuencial y la aprehensión operatoria.

En la parte experimental, la autora aplicó una prueba diagnóstica y realizó la secuencia didáctica con el uso del software Fathom (<http://fathom.concord.org/>). La prueba fue para verificar los conocimientos previos de los estudiantes en relación a los conceptos estadísticos y la secuencia didáctica estuvo compuesto de dos partes, en la primera se realizaron actividades de familiarización con el software Fathom a través de actividades propuestas a partir de un banco de datos, y en la segunda parte, los estudiantes a partir de una recolección

de datos de un grupo de estudiantes de la escuela, elaboran un informe compuesto por tablas, gráficos, medidas de tendencia central y textos explicativos para determinar las principales características de ese grupo.

A partir del análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, Vieira (2008) supone que los estudiantes tuvieron poco contacto con la estadística durante su vida escolar o el aprendizaje no fue efectivo, desconociendo que es una variable estadística. En relación a los gráficos no presentaban dificultades en su lectura, pero si en su construcción. También indica que presentan dificultades para el cálculo de la media aritmética, en los casos que se trata de una media ponderada y pocos conocen la mediana y la moda.

Por otro lado, la investigadora sostiene que durante el desarrollo de la segunda actividad de la secuencia didáctica, los estudiantes transitaron por tres de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico de Wild & Pfannkuch (1999): planeamiento del ciclo investigativo; tipos de pensamiento, realizando la transnumeración, organizando y analizando los datos; y ciclo interrogativo, interpretando los resultados y comparando los datos.

Además, la investigadora concluye que durante el desarrollo de la secuencia didáctica se percibió que la interacción entre el software y el grupo de estudiantes, contribuyó a la comprensión de conceptos como la media y la mediana por medio de la articulación de los diferentes tipos de representación semiótica como la representación numérica y la gráfica, pero fueron insuficientes para la comprensión de cuartil y el gráfico de cajas (Box-plot), para lo cual sugiere organizar actividades específicas en un mayor número.

Canossa (2009), realizó un trabajo de investigación con profesores de matemática de la red pública del Estado de São Paulo (Brasil), con el objetivo de colaborar con la formación continua de esos profesores, que no tuvieron los contenidos estadísticos en su formación inicial o lo tenían en forma superficial y técnica, es decir se limitaban al uso de algoritmos y a

algunos gráficos, sin ninguna interpretación de los resultados; y las dificultades de los profesores en desarrollar con sus estudiantes los contenidos relativos a estadística y sus interpretaciones. Debido a ello plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las características didácticas de una formación continua para profesores de Enseñanza Media, con el objetivo de trabajar con conceptos de mediana y cuartiles, para que los estudiantes puedan tomar decisiones a partir del análisis de variación de datos, con la ayuda de Dot-plot y Box-plot?

Para responder esta pregunta de investigación, el autor organiza el trabajo en tres fases, en la primera fase, aplica un cuestionario diagnóstico, que fue propuesto a 50 profesores de las escuelas públicas del Estado de São Paulo, pero solo 20 de ellos respondieron el cuestionario, que estuvo dividido en tres partes: la primera, para caracterizar el perfil del profesor entrevistado; la segunda, para verificar el grado de concordancia por medio de una encuesta con 10 afirmaciones. El objetivo de la encuesta fue identificar el discurso del profesor sobre el desarrollo de las clases de estadística, cuando trabajan conceptos de estadística descriptiva y la tercera parte, contiene dos actividades que fueron resueltas por los profesores, la cual sirvió para levantar información respecto a los conocimientos estadísticos del profesor sobre la mediana y los cuartiles.

Asimismo, el autor resalta algunos de los resultados de la encuesta, dos de ellos con respecto a las afirmaciones que están relacionadas con el uso del software y el trabajo simultáneo de la media, la desviación estándar, la mediana y los cuartiles, juntamente con las representaciones gráficas y tabulares con el objetivo de un análisis crítico de los datos, siendo el resultado para la primera, 12 profesores concordaban totalmente y 7 concordaban, mas no totalmente, y para la segunda, 19 profesores concordaban totalmente.

También, Canossa (2009) indica que de las actividades resueltas en la tercera parte, los profesores entrevistados no lograron utilizar los algoritmos para la obtener la mediana y los

cuartiles, y si lo hallaban tenían dificultades para la interpretación de los resultados y en base a esto consideró que los profesores se encontraban en un nivel de razonamiento idiosincrático del modelo propuesto por Garfield (2002), en este nivel existe cierto conocimiento de términos y símbolos estadísticos, más su utilización se realiza sin el debido entendimiento y muchas veces en forma incorrecta; y en un nivel apenas cultural de la alfabetización estadística.

En la segunda fase, elabora una secuencia didáctica en base a los resultados obtenidos del cuestionario, que fue trabajada con una profesora voluntaria, y en la tercera fase, realiza la observación de una clase de la profesora colaboradora, para evaluar la evolución de las concepciones y las prácticas docentes sobre los temas abordados.

Los marcos teóricos utilizados para este trabajo de investigación son los trabajos relacionados con las características profesionales de los profesores propuesto por Showers, Joyce & Bennet (1987); el modelo de razonamiento estadístico de Garfield (2002), que está organizado en cinco niveles: nivel 1: razonamiento idiosincrático, nivel 2: razonamiento verbal, nivel 3: razonamiento transaccional, nivel 4: razonamiento procedimental y nivel 5: procesos de razonamiento integrado; y la alfabetización estadística de Gal (2002), ya que el investigador pretende en su trabajo desarrollar una propuesta de formación continua, que propicie en el profesor un logro de la evolución de su razonamiento estadístico hasta el nivel 5 del modelo de Garfield.

Respecto de la primera fase, el investigador observó en los cuestionarios resueltos que muchos profesores no tenían conocimiento de los conceptos referentes a mediana y cuartil por consiguiente clasificó a los profesores en un nivel de razonamiento idiosincrático de acuerdo con Garfield (2002).

Por otro lado, en la segunda fase, del desarrollo de la formación de la profesora colaboradora, el investigador percibió que a pesar de poseer cierto conocimiento básico de estadística no conocía los gráficos Dot-plot y Box-plot, y además de acuerdo con el autor, la profesora llegó a tener cierta aversión en utilizar esos gráficos e insistiendo en utilizar los gráficos de barras y columnas, pero luego de algunas observaciones hechas por el autor, de los beneficios de su uso; y de la familiaridad adquirida por la profesora, el autor indicó que hubo una mejor concientización de la profesora en cuanto a la utilización de los gráficos.

Sin embargo, en la tercera fase, el autor observó que la profesora en el aula de clase no se sintió segura para el trabajo con sus estudiantes y no discutió puntos importantes para la construcción del conocimiento en sus estudiantes, como cuando la mediana no pertenece al conjunto de datos, y finalmente el autor coincide con Showers et al. (1987), al afirmar que en la formación de profesores se deben incluir cuatro partes: la presentación de la teoría, demostración de una nueva estrategia, práctica inicial en talleres y retroalimentación inmediata de sus esfuerzos, ya que es necesario un tiempo de maduración de los conceptos antes de incorporarlos a su práctica docente.

En resumen, las dificultades encontradas por Vieira (2008) y Canossa (2009), tanto en estudiantes y profesores respectivamente, coinciden en la dificultad de utilizar los algoritmos para la obtención de la mediana y los cuartiles, y si lo hallaban tenían dificultades para la interpretación de los resultados. Además Vieira (2008) supone que los estudiantes tuvieron poco contacto con la estadística durante su vida escolar o el aprendizaje no fue efectivo, y esto suponemos que sucede porque los profesores tienen dificultades en estos contenidos.

Por otro lado, Novaes (2011), analiza las concepciones sobre los objetos de Estadística Descriptiva tanto didácticas como de contenido, movilizadas por profesores de Educación Básica cuando organizan y realizan la administración de las secuencias didácticas en ese tema y, para eso observó los procedimientos adoptados en el aula de dos profesores que

participaron en formación continua. La metodología que utiliza es el estudio de casos con el cual busca responder las siguientes preguntas: ¿Qué concepciones pueden ser identificadas cuando los profesores de Educación Básica movilizan sus conocimientos estadísticos sobre variación para resolver problemas y preparar lecciones sobre ese tema? y ¿ como esos conocimientos pueden ser modelados con la teoría de concepciones a fin de establecer parámetros que contribuyan a la superación o minimización de las obstáculos y dificultades del aprendizaje de esos contenidos estadísticos ya identificados en la investigación en el área?

Con respecto a la formación continua, la autora indica que estuvo compuesto por cinco momentos. El primero conto con la presencia de 17 profesores de educación básica, durante un año de formación de conocimientos estadísticos ofrecida en el proyecto PEA-ESTAT, el segundo momento cubrió tanto el contenido como la didáctica y el desarrollo para la preparación de actividades destinadas a los alumnos de enseñanza fundamental II, el tercer momento acompañaron a uno de los profesores a su aula para observar su clase, con la presencia de otros profesores del proyecto como observadores, en el cuarto momento fue destinado a la formación en tecnologías y su uso para la introducción a las primeras nociones relativas al análisis exploratorio de datos.

Asimismo, la autora indica que el origen de la investigación fueron las dificultades encontradas en el aprendizaje de las nociones estadísticas de la Estadística Descriptiva, identificadas en otros estudios en el área, y la elección de estos objetos de Estadística Descriptiva fue a través de la identificación de las relaciones establecidas entre ellas, en analogía con las que se establecen en un ecosistema estable, que le da el nombre de ecosistema estadístico. El concepto de ecosistema didáctico es propuesto por Artaud (1988, citado en Novaes, 2011) que utiliza la ecología didáctica inspirada en la ecología biológica y en base a esto plantea un ecosistema de articulaciones entre los objetos involucrados en el desarrollo del pensamiento estadístico y supone que la Estadística Descriptiva es un

ecosistema compuesto por diversos microsistemas que además se interrelacionan con otros microsistemas que forman la matemática escolar.

Luego, como la investigadora busca identificar las concepciones movilizadas por los profesores en lo que se refiere a variabilidad de datos, utiliza el ecosistema didáctico propuesto por Artaud (1988), que ayuda a explicar las relaciones existentes entre los objetos matemáticos y objetos estadísticos de modo que permita la construcción del concepto de variabilidad.

La autora indica que la distribución, la media, la desviación estándar, la mediana y los cuartiles son parte integrante del ecosistema estadístico, y que a partir de ellos, los profesores realizan la construcción del concepto de variabilidad o variación.

Por otro lado, para la identificación de las concepciones de los profesores, la investigadora utilizó el modelo teórico de Concepción, Conocimiento y Concepto propuesto por Balacheff y Gaudin(2002), e identificó 16 concepciones, de las cuales tres de ellos corresponden al conocimiento estadístico, la primera que considera a la frecuencia de una variable cualitativa una variable cuantitativa discreta, la segunda identifica la frecuencia como los valores asumidos por la variable y la tercera que la variabilidad de los datos puede ser caracterizada apenas con un valor más frecuente en la distribución; y los otros trece corresponden al conocimiento didáctico. De estas hay una que se presenta como una dificultad, identificada en una de las profesoras, relacionada a la transferencia del pensamiento determinista de la matemática para el análisis de datos.

Coutinho, Almouloud & Silva (2012), realizan un estudio con cinco profesores de matemática de la Escuela Básica para analizar el uso de un software, Geogebra, como herramienta didáctica para mejorar el desarrollo de la Alfabetización Estadística, mediante la construcción de gráficos estadísticos con características dinámicas que ayuden a la interpretación de estos

gráficos. Además indican que se escogió el Geogebra para discutir con los profesores las potencialidades de un software para el análisis de gráficos estadísticos a partir de la percepción de variación de los datos, ya que da la posibilidad de analizar simultáneamente más de un gráfico, representando a un mismo banco de datos. Este estudio es parte del proyecto Proceso de Enseñanza y Aprendizaje que involucra razonamiento estadístico y probabilístico (PEA-ESTAT)

El objetivo de este trabajo fue construir un tutorial para la construcción de gráficos estadísticos con el software Geogebra, de tal manera que este tutorial tenga un lenguaje accesible para cualquier profesor que enseña matemática en la Escuela Básica. También los autores indican que la elaboración del tutorial se hizo utilizando un enfoque experimental, valorizando la participación de los profesores participantes, que deberían construir sus conocimientos específicos y didácticos para el trabajo con sus propios estudiantes.

Además, Coutinho, Almouloud & Silva (2012) concluyen que en lo que respecta al uso del Geogebra para el desarrollo de la Alfabetización Estadística, ya que hay indicios que el trabajo realizado a contribuido para: la formación de profesores, en cuanto a los conocimientos de conceptos estadísticos y metodológicos que son utilizados para la construcción de tales conocimientos y el conocimiento didáctico del contenido; la construcción de una predisposición para explorar situaciones-problemas, buscando regularidades, hacer conjeturas, hacer inducción, pensar de manera lógica; y el aumento de confianza personal para desarrollar actividades dirigidas a la construcción de conocimiento/saberes estadísticos y el uso de diferentes procedimientos para resolver problemas.

Por otro lado, Amaral (2010) realiza un estudio con profesoras de educación primaria de una escuela de Educación Básica con el objetivo de validar una secuencia didáctica que contempla actividades que contribuyan a la reconstrucción de los significados de las medidas de

tendencia central: moda, media y mediana de acuerdo a los niveles funcionamiento de conocimientos de Aline Robert (1998)

Amaral (2010), describe los fundamentos teóricos del estudio, en primer lugar los niveles de funcionamiento del conocimiento que proporciona herramientas de análisis de las nociones matemáticas para que el investigador realice un análisis adaptado a las especificidades de la complejidad de contenidos, que sea para fines de evaluación, diagnóstico o elaboración de secuencias y escenarios, y para el estudio utiliza una de las dimensiones que está compuesta por tres niveles: técnico, movilizable y disponible, en segundo lugar la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (1994) que afirma que existen varias maneras de aprender una figura en un contexto geométrico, destacando cuatro tipos de aprehensión: perceptiva, discursiva, secuencial y operatoria.

Asimismo, el autor diseña una secuencia didáctica de diez actividades para promover la discusión de los significados, conocimientos y las propiedades de las medidas de tendencia central para reconstruir esos conocimientos y proporcionar a los profesores condiciones necesarias para el entendimiento de ese contenido en el nivel que enseñan.

Con respecto a las actividades de la secuencia, en la actividad 4, lo que pretende el autor es hacer entender primero que la mediana es parte de la distribución cuando el número de datos es impar para luego en la actividad 5 introduce el algoritmo para el cálculo de la mediana cuando el número de datos es par y en este caso no es parte de la distribución.

Finalmente, el investigador observa que el esclarecimiento de los significados de las medidas de tendencia central proporciona a las profesoras seguridad para el desenvolvimiento de su trabajo en el aula de clases, por lo tanto, la secuencia contribuyó para que las profesoras puedan proporcionar una mejor formación a sus estudiantes.

Por otro lado, Coutinho, Silva & Almouloud (2011), analizan las relaciones entre el uso de varios registros de representación semiótica en el caso de estadística, específicamente en gráficos y tablas, y el desarrollo del pensamiento estadístico, particularmente la transnumeración.

Los autores se ocupan principalmente del análisis de la utilización simultánea del histograma y diagrama de cajas, construidas en el mismo sistema ejes, para facilitar la comparación y la relación de la información obtenida a partir del análisis de cada uno y de los dos juntos. Para este análisis, se utiliza los registros de representación semiótica de Duval (2003) y de transnumeración de Pfannkuch (2008).

Asimismo, los autores consideran, en primer lugar, que para la actividad cognitiva en la estadística se requiere de una variedad de representaciones semióticas como, tablas, gráficos (barras, histograma, box-plot) y los diagramas (ramas y hojas); y en segundo lugar, que la comprensión estadística implica transitar entre los diferentes registros de representación semiótica que participan en el proceso de construcción de los conceptos estadísticos.

Por otro lado, los investigadores afirman que:

La investigación en la educación estadística, en particular el trabajo de Pfannkuch (2008), indican que el desarrollo de pensamiento estadístico sigue los siguientes pasos: transnumeración, el desarrollo del razonamiento con modelos estadísticos y la consideración de la variación (p.500)

Además, Coutinho, Silva & Almouloud (2011) describen en primer lugar, que el proceso de transnumeración es pasar los datos brutos a un registro tabular, tabla de frecuencias, y esto, a los registros gráficos tales como el histograma y el box-plot, en busca de significados en el conjunto de datos analizados para la resolución del problema propuesto; en segundo lugar, que el desarrollo del razonamiento con modelos estadísticos se da por el análisis de forma, de la dispersión y de las medidas estadísticas en busca de la construcción de un lenguaje propio; y en tercer lugar, que la consideración de la variación es realizada por el análisis de forma, de

la dispersión y de las medidas para la identificación de las distintas propiedades tales como la simetría y la amplitud.

Finalmente, los autores infieren una evolución del desarrollo del pensamiento estadístico, ya que los profesores construyeron diversas representaciones para un mismo conjunto de datos, identificándose algunos elementos del proceso de transnumeración. Además observaron elementos de aprehensión perceptiva y discursiva, sin embargo la articulación necesaria entre estos registros no fue observada.

En base a la revisión de la literatura, identificamos las dificultades que tienen los profesores de matemática cuando calculan e interpretan la mediana y los cuartiles de acuerdo a Canossa (2009) y Amaral (2010); y además resaltamos la importancia de dos teorías en la educación estadística, primero la Teoría de los Registros de Representación Semiótica adaptada por Vieira (2008), para la comprensión de conceptos estadísticos que servirá para el estudio de los tratamientos y conversiones de las representaciones de una distribución de datos, y de las aprehensiones del registro gráfico; segundo, la transnumeración, uno de los tipos de pensamiento estadístico, que permite comprender un fenómeno en particular por medio del cambio de representaciones de un conjunto de datos.

Por otro lado, debemos resaltar las potencialidades del uso del software Geogebra, en la enseñanza de la estadística de acuerdo a Coutinho, Almouloud & Silva (2012), ya que da la posibilidad de visualizar simultáneamente más de un gráfico estadístico que representa a un mismo conjunto de datos.

Finalmente, tomaremos la sugerencia de Vieira (2008) de realizar actividades específicas para la comprensión de cuartil y el gráfico de cajas (Box-plot); diseñando actividades que serán desarrolladas por los profesores, y que serán adaptadas de las actividades de Canossa (2009) y Coutinho, Silva & Almouloud (2011), teniendo en cuenta las dificultades que tienen

los profesores con respecto a la mediana y los cuartiles, identificados por Canossa (2009) y Amaral (2010), de tal manera que los profesores logren construir la noción de variación.

1.2 Justificación

De acuerdo a nuestros antecedentes, los profesores de matemática, se enfrentan al desafío de enseñar estadística, ya que para muchos de ellos la estadística es una disciplina relativamente nueva, debido a que no han tenido una formación adecuada tanto en el contenido estadístico y en la didáctica. Por ejemplo Canossa (2009) afirma que los profesores no lograron utilizar los algoritmos para obtener la mediana y los cuartiles, y si lo hallaban tenían dificultades para la interpretación de los resultados; así como también las dificultades que tenían en desarrollar con sus estudiantes los contenidos relativos a estadística y sus interpretaciones. En el Perú hay poca evidencia de las dificultades que los profesores de matemática tienen con respecto a sus conocimientos estadísticos y didácticos, ya que no hay evidencia en los trabajos de investigación que tuvimos acceso.

De igual manera, Azcárate (2006) manifiesta que así como se ha introducido contenidos estadísticos a los currículos, simultáneamente no se dedicó la necesaria atención a la formación inicial y continua de los profesores, ya que la mayoría de los profesores nunca han estudiado formalmente estos conocimientos y agrega que los profesores de secundaria pueden haber recibido algún curso introductorio en la universidad desde la perspectiva formal, y finaliza señalando que esta forma de aprendizaje no prepara a los profesores para la enseñanza de los conocimientos estadísticos. Reforzando esta idea, Ortiz ,Serrano & Mohamed (2009 citado en Del Pino & Estrella, 2012) , afirman:

[...] por un lado, hemos de preparar [a los profesores] adecuadamente tanto en el conocimiento específico de estadística y probabilidad como en el conocimiento pedagógico del mismo, ya que como hemos observado en nuestra investigación, los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores de educación primaria en varios problemas son muy similares a los niños [...], siendo por tanto alarmante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar (p. 112).

En ese mismo sentido, Del Pino & Estrella (2012), afirman:

[...] un informe conjunto de IASE(International Association for Statistical Education) e ICMI(International Commission on Mathematical Instruction) sugiere asegurarse que los futuros profesores tengan un curso obligatorio de estadística, con énfasis en la comprensión conceptual, la exploración de los datos y el uso de tecnología apropiada. Es fundamental que posean al menos un conocimiento sólido de los principios y conceptos que subyacen a las prácticas del análisis de datos que en la actualidad son llamados a enseñar.(p.59)

En base a nuestros antecedentes, estamos de acuerdo con este informe, ya que los profesores enseñan la estadística limitándose solo al uso de algoritmos y a algunos gráficos, sin ninguna interpretación. Sin embargo vivimos en un mundo globalizado y computarizado inmersos en grandes cantidades de información con lo que nos invaden los medios de comunicación en forma de tablas y gráficos, y el estudiante debe ser capaz de comprender y usar esta información, como consecuencia el estudiante no lograría una actitud crítica frente a estas informaciones. Por esa razón, Garfield & Ben-Zvi (2008) proponen un cambio en la enseñanza de la estadística que permita transitar de una enseñanza basada en el aprendizaje de fórmulas, técnicas y procedimientos hacia una que propicie el desarrollo del razonamiento y/o el pensamiento estadístico.

Por eso, destacamos la Teoría de los Registros de Representación Semiótica adaptada a la enseñanza de la estadística por primera vez por Vieira (2008), para la comprensión de los conceptos estadísticos, que implica que nuestros estudiantes transiten por lo menos en dos registros de representación de un mismo objeto estadístico.

Por otro lado, en el año 2015, el Ministerio de Educación (MINEDU), realizó una Evaluación Censal Estudiantil (ECE) a estudiantes de colegios estatales y privados sobre competencias de Lectura y Matemática. La prueba fue aplicada a segundo grado de secundaria y se evaluaron cuatro capacidades : matematiza situaciones, comunica y representa ideas matemáticas, elabora y usa estrategias, y razona y argumenta generando ideas matemáticas; y uno de los contenidos considerados fue gestión de datos e incertidumbre que incluye medidas de tendencia central y dispersión.

Asimismo, de acuerdo con los documentos curriculares vigentes, la ECE considera que:

La competencia matemática es un saber actuar deliberado y reflexivo que selecciona y moviliza una diversidad de habilidades, conocimientos matemáticos, destrezas, actitudes y emociones, en la formulación y resolución de problemas en una variedad de contextos.

Esta competencia se pone de manifiesto en situaciones referidas a cuantificar, medir, identificar regularidades, establecer equivalencias y variaciones, caracterizar y describir la forma y la ubicación de los objetos; asimismo en la organización y sistematización de datos, y en el manejo de la incertidumbre, entre otros.(p. 3).

Además, el informe de los resultados de esta evaluación establece que solo el 9,5% de estudiantes del segundo grado de secundaria pertenecen al nivel suficiente. Este resultado puede reflejar las dificultades de los profesores, incluso la falta de comprensión y de formación adecuada para trabajar los contenidos tanto de matemática y estadística.

Asimismo, de acuerdo al DCN 2016, el área de Matemática promueve y facilita que los estudiantes desarrollen las siguientes competencias: resuelve problemas de cantidad, resuelve problemas de forma, movimiento y localización, resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio y por último resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, y a continuación presentamos en la tabla 1, Estándares de aprendizaje de la competencia resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, donde se describe los niveles de desarrollo de la competencia por cada ciclo que corresponde a los conocimientos y capacidades desarrollados en el nivel secundario.

Tabla 1. Estándares de aprendizaje de la competencia Resuelve problemas de Gestión de datos e incertidumbre

Nivel/Ciclo	Descripción de los niveles de desarrollo de la competencia
Nivel destacado	Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias y situaciones referidas a caracterizar una población en base a una muestra representativa. Emplea técnicas de muestreo estratificado y recolecta datos, usando diversas estrategias y procedimientos, determina el quintil. Representa el comportamiento de los datos usando gráficos y tablas pertinentes, estadísticos, relaciones entre medidas de tendencia central y el coeficiente de variación, identificando lo más óptimo. Interpreta la información sobre el comportamiento de los datos y la probabilidad condicional. Contrasta conclusiones sobre la relación entre variables.

<p>Nivel esperado al final del ciclo VI</p> <p>1º, 2º y 3º grado de secundaria</p>	<p>Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continuas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas o polígonos de frecuencia, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. En base a esto, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.</p>
<p>Nivel esperado al final del ciclo VII</p> <p>4º y 5º grado de secundaria</p>	<p>Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables a estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar, y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionadas a su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; en base a esto contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.</p>

Fuente: Diseño Curricular Nacional 2016(MINEDU, Perú, 2016)

De acuerdo a la tabla 1, el desarrollo de la competencia, resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, permite el desarrollo del tipo de pensamiento estadístico denominado transnumeración, ya que el estudiante debe realizar diferentes cambios de representación de los datos para la búsqueda de nuevas informaciones y de esta manera generar comprensión del mundo real.

Por otro lado, desarrolla las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión en forma separada que no ayuda a la construcción de la noción de variación y al desarrollo del pensamiento estadístico. Además no está presente los gráficos de caja (Box-plot) y puntos (Dot-plot), el primero sirve para visualizar la dispersión de los datos y el segundo para representar la distribución de datos, ambos para una variable cuantitativa o una variable

cualitativa ordinal. El uso simultáneo de ambas gráficas facilita la construcción del concepto variación. Además el concepto de variación no se incluye como objeto de estudio, solo las medidas de dispersión: rango, desviación estándar y coeficiente de variación.

En ese sentido, Estepa y Del Pino (2013), afirman que:

La variación es un concepto estrechamente ligado a los conceptos de variable e incertidumbre. Frecuentemente se considera como una medida de la desviación de los datos respecto a una medida de tendencia central. Aunque la medida de dispersión sea un elemento importante en el análisis de los datos, la variación comprende más que una sola medida. En el estudio de la variación se debe considerar no solamente el significado(concepto) o cómo se utiliza como herramienta, sino que también hay que considerarla en el contexto de los datos(Makar y Confrey, 2005), ya que, los datos no son solo números, son números con un contexto(Coob y Moore, 1997, p.801). (p. 43-44).

Ahora de acuerdo, a la competencia, resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, el estudiante combina capacidades como: 1) Representa datos con gráficos o medidas estadísticas o probabilísticas, 2) Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos, 3) Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos, y 4) Sustenta conclusiones o decisiones en base a la información obtenida.

De acuerdo al desempeño de las capacidades para el desarrollo de la competencia en los ciclos VI y VII, como se detalla en el párrafo anterior, se desprende que uno de los objetivos es que el estudiante desarrolle el pensamiento estadístico por medio de la transnumeración, cambiando las representaciones de los datos para la búsqueda de nuevas informaciones.

Por otro lado, con respecto a la formación inicial de profesores de matemática del nivel secundario de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos las capacidades que desarrolla el futuro profesor en el curso Estadística Aplicada a la Educación, son las siguientes:

- Estudia y aplica los métodos de la estadística descriptiva en el tratamiento de información inherente a la educación.
- Realiza un trabajo de investigación: Elabora y aplica un cuestionario.
- Estudia y aplica los conceptos básicos de probabilidades en el campo educativo.

Tabla 2. Programación de contenidos de Estadística Aplicada a la Educación

SEMANA	CONTENIDO
17 – VIII -15 21 – VIII -15	Concepto fundamentales Origen e historia de la Estadística Definición: Estadística, población, muestra, unidad estadística, datos, variables y tipos. Clasificación de la Estadística. Parámetros estadísticos
24 –VIII - 15 28- VIII– 15	Organización y presentación de datos cualitativos. Tabulación unidimensional de datos cualitativos. Representación gráfica de datos cualitativos. Tablas bidimensionales. Presentación en cuadros.
31– IX – 15 04 – IX - 15	Organización y presentación de datos cuantitativos discretos. Tabulación unidimensional de datos cuantitativos discretos. Representación gráfica. Presentación en cuadros.
07 – IX -15 11 – IX -15	Organización y presentación de datos cuantitativos continuos Elaboración de tablas usando intervalos de clase. Representación gráfica. Presentación en cuadros.
14 – IX – 15 18 – IX - 15	Medidas de tendencia central: Media aritmética, mediana, moda. Propiedades de la media aritmética.
21 – IX – 15 25 – IX - 15	Medidas de posición. Percentiles, deciles, cuartiles. Propiedades de las medidas de posición
28 – IX – 15 02 – X – 15	Medidas de dispersión. Rango. Varianza, desviación estándar, coeficiente de variación. Propiedades de las medidas de dispersión.

Fuente: Syllabus del curso de Estadística Aplicada a la Educación de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

En la tabla 2 observamos que se desarrollan las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión, pero no hay el concepto de variación o variabilidad ni los conceptos de las tres medidas que se trabajan en forma separada.

De igual forma, en uno de los libros que utilizan los profesores de la Universidad Mayor de San Marcos para su formación titulado “Estadística Descriptiva- Una invitación a la investigación” del autor Fernández (2005) y para sus sesiones del clases, el libro Matemática- Quinto grado de secundaria del Ministerio de Educación, los temas son desarrollados de la misma manera. Como consecuencia no se está desarrollando el pensamiento estadístico de los profesores y estudiantes, ya que la variación es el corazón de la Estadística y es lo que lo

diferencia de la Matemática. Por esa razón los profesores de matemática deben tener una perspectiva diferente cuando enseñan los conceptos estadísticos y en palabras de Wild y Pfannkuch (1999, p. 235-236), “la variación es la razón por lo que la gente ha tenido que desarrollar métodos estadísticos sofisticados para filtrar los mensajes de datos del ruido ambiental”.

Asimismo, el tránsito entre los diferentes registros de representación semióticas en la estadística tales como tablas y gráficas permite la comprensión del concepto estadístico de variación. En ese sentido; Viera (2008), afirma que:

[...] en el análisis de un conjunto de datos, se debe poder pasar de un banco de datos para su distribución en su forma tabular o en su forma gráfica, y además para su representación por medio de medidas de resumen. Sin embargo la resolución de problemas estadísticos pasa no solo por la transformación de un registro a otro, como también por el uso simultáneo de esos registros para la obtención de un mayor número de informaciones, permitiendo un análisis crítico de los datos, de acuerdo a los principios del Análisis Exploratoria de Datos.(p.24). (traducción nuestra)

Por otro lado, en esta investigación, hemos considerado pertinente utilizar ambientes computacionales. Al respecto, Godino (1995) considera que la capacitación estadística debe incluir el conocimiento de las formas de procesar los datos en programas estadísticos, siendo que la computadora no solo debe ser considerada como un recurso de cálculo si no también como un recurso didáctico.

En ese mismo contexto, Vieira (2008) reconoce la influencia de la tecnología en la enseñanza de la estadística y de la misma manera Coutinho, Almouloud & Silva (2012).

De acuerdo a, Coutinho, Silva & Almouloud (2011, 2012) el software Geogebra permite representar diferentes formas de un conjunto de datos, así como también visualizar en un mismo sistema de ejes dos gráficos a la vez, que permite extraer información nueva ,y genera comprensión de los conceptos estadísticos; y con este proceso se desarrolla el pensamiento estadístico.

Por lo tanto, elegimos el Geogebra para trabajar como herramienta mediadora en la construcción del concepto variación, ya que además este software es un programa de uso gratuito, de libre acceso y presenta características de facilidad de uso.

Por otro lado, Pfannkuch (2008) propone para la formación de profesores tres de los elementos fundamentales del pensamiento estadístico, que son: la transnumeración, el razonamiento con modelos estadísticos, y la consideración de la variación. La transnumeración ayuda a la comprensión de la información por medio de diferentes representaciones de los datos en sus diversas modalidades como tablas, gráficas y medidas de resumen, el razonamiento con modelos estadísticos se refiere a la capacidad de expresar verbalmente o por escrito los resultados obtenidos en las representaciones relativas a la transnumeración y la consideración de la variación como un concepto fundamental en Estadística.

Por lo tanto, de acuerdo a nuestros antecedentes, al DCN (2016), al Syllabus de estadística para la formación inicial de profesores de matemática en una universidad pública y siendo la variación uno de los tipos fundamentales del Pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) consideramos realizar un trabajo de investigación con profesores de matemática del nivel secundario en un proyecto piloto de formación de profesores para el estudio de la variación en torno a la mediana y los cuartiles, teniendo como marcos teóricos: el Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), específicamente la transnumeración, y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval pero adaptada para la estadística por Vieira (2008), específicamente las aprehensiones de un gráfico estadístico, con actividades diseñadas para trabajar con lápiz, papel y el Geogebra, adaptadas de Canossa (2009) y Coutinho, Silva & Almouloud (2011).

A continuación presentamos algunos aspectos de los marcos teóricos de nuestra investigación que estarán basados en el Pensamiento Estadístico y la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

1.3 Aspectos teóricos

En esta parte presentaremos algunos aspectos de los marcos teóricos con las que trabajaremos nuestra investigación. Los aspectos que presentamos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1999) están encaminados principalmente a conocer algunas aprehensiones dentro del registro figural, pero esta teoría está dirigida para el aprendizaje de la matemática. Vieira (2008) hizo la adaptación de esta teoría para el aprendizaje en la estadística trabajando con los registros de tablas y gráficas estadísticas, y en nuestro caso trabajaremos principalmente con las aprehensiones de las gráficas estadísticas.

Por otro lado, presentaremos, la transnumeración, un tipo de pensamiento fundamental que está dentro de la segunda dimensión del Pensamiento Estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch(1999).

1.3.1 Pensamiento estadístico

Wild y Pfannkuch (1999) investigan los complejos procesos de pensamiento involucrado en la resolución de problemas de la vida real usando estadística con vistas al mejoramiento de tal resolución de problemas. También de acuerdo a estos autores la investigación estadística se usa para expandir el cuerpo del conocimiento en contexto es decir consideran que el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje en la esfera del contexto.

Asimismo hay varios autores que han definido el pensamiento estadístico, como Snee(1990, citado por Wild y Pfannkuch,1999,p.2) define el pensamiento estadístico como:

Procesos de pensamiento que reconocen la presencia de la variación está a todo nuestro alrededor y presente en todo lo que hacemos, todo trabajo es una serie de procesos interconectados, y la identificación, caracterización, cuantificación, control y reducción de la variación proporcionan oportunidades de mejoramiento.

Moore(1997) señala que los elementos fundamentales del pensamiento estadístico aprobada por el Consejo de la Asociación Estadística Americana(ASA) por recomendación del Comité de Currículum de la ASA y de la Asociación Matemática de América son las siguientes: 1) omnipresencia de la variación, en contraposición a la visión determinista; 2) la necesidad de los datos en los procesos; 3) el diseño de la producción de datos y 4) la cuantificación y explicación de la variación. Además presentó dos recomendaciones más, incorporar más datos y conceptos, menos recetas y deducciones; y adoptar el aprendizaje activo.

Wild y Pfannkuch (1999) amplían la definición de Snee (1990); y presentan una estructura basada en cuatro dimensiones: ciclo investigativo, los tipos de pensamiento, ciclo interrogativo y las disposiciones.

Al respecto, según los autores, la segunda dimensión, denominada los tipos de pensamiento está conformado por dos tipos de pensamiento: el pensamiento general aplicado al contexto estadístico y el pensamiento fundamental implicado en la investigación estadística que está conformado por cinco tipos de pensamiento fundamental y que mostramos en la figura 1 son los siguientes: reconocimiento de la necesidad de los datos, la transnumeración, la consideración de la variación, el razonamiento con modelos estadísticos y la integración de la estadística con el contexto.

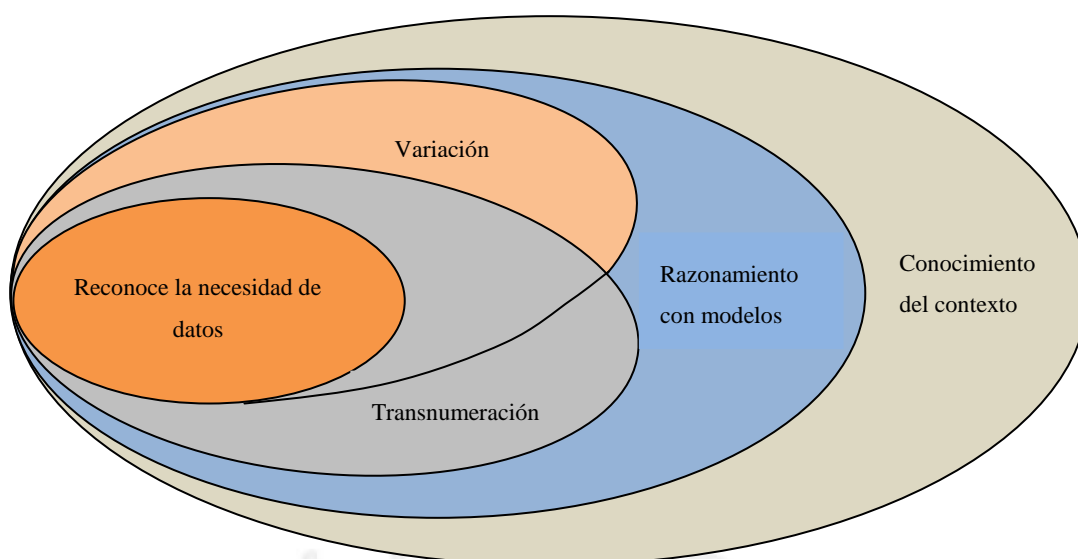


Figura 1. Tipos de pensamiento fundamental

Fuente: Adaptada por Ramirez de Wild y Pfannkuch(1999, p.226)

En la figura 1, se observa un esquema adaptado por Ramirez (2012), en el que se observa los cinco tipos fundamentales del pensamiento estadístico en donde la transnumeración y la variación contienen al reconocimiento de la necesidad de datos y de la misma forma el razonamiento con modelos contiene a los anteriores y el que contiene a todos es el conocimiento del contexto.

De acuerdo a Wild y Pfaankuch (1999), se entiende que el tipo de pensamiento estadístico reconocimiento de la necesidad de los datos, refiere a que la investigación estadística busca resolver un problema a partir de la recogida de datos y no de acuerdo a su experiencia personal ni ha hechos anecdóticos, de ahí que existe el reconocimiento de la necesidad de datos.

Luego, la transnumeración es el proceso de realizar cambios de representación de los datos para la comprensión del fenómeno estudiado, el cual es uno de los aspectos teóricos que utilizaremos en la investigación y detallaremos en las siguientes líneas. Respecto a la variación, Wild y Pfaankuch (1999) explican que la toma de decisiones bajo incertidumbre

requiere la comprensión de la omnipresencia de la variación. En la siguiente sección presentaremos un ejemplo de transnumeración.

Por otro lado, el razonamiento con modelos estadísticos está asociado al uso de diferentes modelos para pensar acerca de ciertos aspectos de la investigación en forma genérica. Por último, la integración de la estadística con el contexto se refiere a que el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información en los datos son las materias primas con que trabaja el pensamiento estadístico.

A continuación detallaremos el pensamiento transnumerativo que es la referencia teórica que utilizaremos en nuestra investigación.

1.3.1.1 Transnumeración

Wild y Pfannkuch (1999) definen la transnumeración como la habilidad para realizar transformaciones numéricas para facilitar la comprensión. Hacen referencia a los elementos del pensamiento implicados en la comprensión de la información al formar y cambiar representaciones de los datos de los diferentes aspectos del mundo real para llegar a una mejor comprensión de ese mundo real. Estas diferentes representaciones son las siguientes: la representación tabular, mediante tabla de frecuencias; la representación numérica, mediante el cálculo de medidas estadísticas; y representaciones gráficas, mediante gráficas estadísticas.

De esta manera, Wild y Pfannkuch, expresan el significado de la transnumeración con la siguiente afirmación: "La transnumeración es un proceso dinámico para cambiar representaciones que engendren comprensión" (p.227)

Por otro lado, Pfannkuch y Rubick (2002), identificaron tres fases de la transnumeración:

- La primera fase ocurre cuando encontramos formas de obtener datos, a través de la medida o clasificación, que capturan cualidades y características del mundo real.

- La segunda fase ocurre cuando construimos múltiples representaciones estadísticas del mundo real, al pasar los datos a una representación tabular o gráfica que permita obtener la comprensión del mundo real por medio de las nuevas informaciones obtenidas.
- La tercera fase ocurre cuando comunicamos a otros las nuevas informaciones obtenidas acerca del mundo real.

A continuación presentaremos nuestro ejemplo, en donde detallaremos el proceso de transnumeración:

Doce estudiantes fueron evaluados con una prueba de 18 preguntas y a continuación se presenta el número de aciertos en la prueba de cada estudiante: 12, 18, 8, 10, 14, 16, 18, 10, 0, 6, 10, 16. El profesor responsable de la evaluación precisa tomar acciones para el incentivo y refuerzo de los estudiantes, ¿cómo puede percibir la variación del número de aciertos?

Para resolver este problema se puede optar por varias estrategias de acuerdo con Canossa (2009).

Primera estrategia

Como la intención del profesor es tomar acciones para el incentivo y refuerzo de los estudiantes, debemos determinar los cuartiles. Para eso, primero ordenamos el número de aciertos en forma ascendente: 0; 6; 8; 10; 10; 10; 12; 14; 16; 16; 18; 18.

Luego, determinamos la mediana que es valor que divide al conjunto de datos en dos partes de igual tamaño, en donde cada uno de las partes contiene el mismo número de datos. Asimismo la mitad de los datos son menores o iguales a la mediana y la otra mitad son mayores o iguales a ella.

En este ejemplo, la mediana está entre el sexto y séptimo elemento, en otras palabras, 10 y 12; por lo tanto, la media aritmética de los términos centrales nos da la mediana(md). Luego md es igual a 11

1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0	
0	6	8	10	10	10	12	14	16	16	18	18	
6 elementos						md	6 elementos					

Para determinar el primer cuartil(Q1) y el tercer cuartil(Q3) se procede de forma análoga.

Con los seis elementos a cada lado, obtenemos la mediana entre esos elementos; por lo tanto, para obtener Q1, utilizamos los términos situados en la tercera y cuarta posición, es decir, 8 y 10; luego, Q1 es 9; y, para obtener Q3, utilizamos los términos situados en la novena y décima posición, es decir, 16 y 16; por lo tanto, Q3=16

1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0
0	6	8	10	10	10	12	14	16	16	18	18
6 elementos			md	6 elementos							
Q1						Q3					

Además identificamos el valor mínimo y máximo del número de aciertos de los estudiantes, siendo estos 0 y 18 respectivamente. Luego, comunicamos los resultados, indicando que el rango del número de aciertos es 18, el 25% de los estudiantes con los mejores números de aciertos tienen número de aciertos mayores o iguales a 16, el 25% de los estudiantes con los peores número de aciertos tienen número de aciertos menores o iguales a 9 y el 50% de los estudiantes tiene número de aciertos menores o iguales a 11 y el otro 50% número de aciertos mayores o iguales a 11.

Como la transnumeración es un proceso dinámico, conforme a Wild y Pfannkuch (1999), se puede construir una representación gráfica de la variación del número de aciertos, en donde se indiquen los valores mínimo, máximo, los cuartiles y la mediana, para eso construimos el gráfico box-plot o el diagrama de cajas como se muestra en la figura 2. En esta parte hemos realizado un cambio de representación, de los datos no agrupados al diagrama de cajas; y esta

nueva representación nos brinda nuevas informaciones sobre la distribución del número de aciertos.

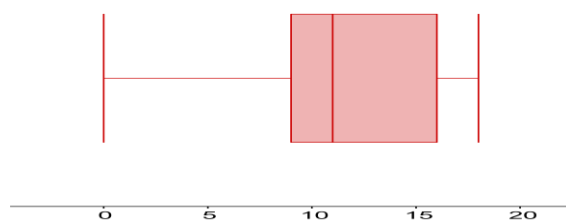


Figura 2. Gráfico Box-Plot del número de aciertos de 12 estudiantes

Fuente: Creación propia

En la figura 2 aparte de observar los valores de los cuartiles y la mediana, podemos percibir la variación del número de aciertos observando la concentración y la dispersión del número de aciertos, es decir entre que cuartiles existe más concentración o dispersión del número de aciertos; y de esa manera se obtiene más información de la distribución del número de aciertos. Por ejemplo entre el primer cuartil y la mediana están más concentrados el número de aciertos que entre la mediana y el tercer cuartil.

Segunda estrategia

En este caso el primer paso es representar la variación del número de aciertos mediante un gráfico de puntos y luego a partir de este gráfico construir el gráfico box-plot para percibir y describir la variación del número de aciertos de los estudiantes como se muestra en la figura 3.

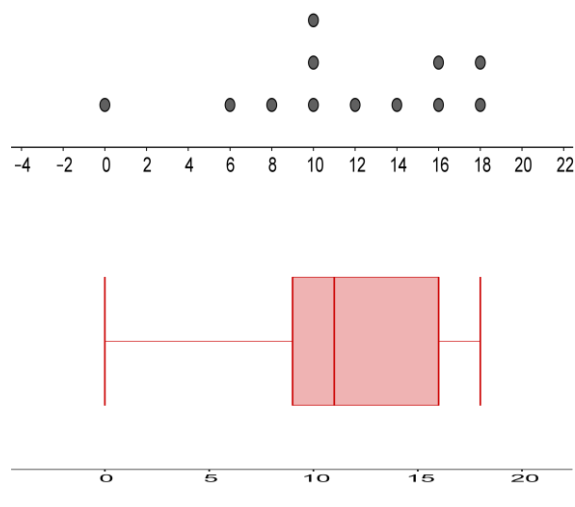


Figura 3. Comparación del gráfico Box-Plot y el gráfico de puntos del número de aciertos de los estudiantes.

Fuente: Creación propia

En la figura 3, a diferencia del otro cambio de representación en la primera estrategia, del registro numérico al registro gráfico, hemos realizado un cambio de representación en el mismo registro, del gráfico de puntos al diagrama de cajas; y mediante la comparación simultánea de estos dos gráficos podemos percibir y describir la variación de las notas.

Por otro lado, la concentración de los datos en la región limitada por los cuartiles se refiere a que los datos se encuentran muy cercanos entre sí, y esto está asociado a la densidad de esas regiones. Por ejemplo en el gráfico anterior la región limitada por el primer y segundo cuartil es más densa que la región limitada por el segundo y tercer cuartil.

Por lo tanto, dada la situación de análisis de datos, importa reconocer como los profesores pasan de una representación a otra para obtener más comprensión.

Por otra parte, de acuerdo con el DCN (2016) y los textos utilizados por los estudiantes hasta el año 2015 no presentan el gráfico Box-plot, esto evidencia que los profesores no conocen este gráfico.

Por consiguiente, para obtener evidencia de los procesos transnumerativos de los profesores, se utilizará el marco de las técnicas transnumerativas de Chick (2004), las que se basan en las ideas germinales de Wild y Pfannkuch (1999) las cuales están descritas en el siguiente tabla 3.

Tabla 3. Técnicas transnumerativas

Técnica	Descripción
Ordenamiento	Los datos se ordenan por algún criterio
Agrupamiento	Los datos se agrupan de acuerdo a algún criterio. Esto crea una nueva variable. El cambio de variable puede involucrar de antemano un tipo de transnumeración.
Selección de subconjuntos	Un subconjunto de datos se selecciona para obtener más comprensión.
Cambio de tipo de variable	Una variable numérica se piensa en términos categóricos o una variable categórica se piensa en términos numéricos u ordinales.
Cálculo de frecuencias	Las frecuencias de ocurrencia de valores de una variable categórica. Crea una nueva variable.
Cálculo de proporción	Proporciones, fracciones en relación a todo. Esto crea una nueva variable
Graficación/tabulación	Algunas o todas las variables en los datos(en su forma presente) son graficadas o tabuladas
Cálculo de tendencia central	Una medida de tendencia central (por ejemplo la media) para una variable puede crear una variable.
Cálculo de medida de dispersión	Alguna medida de dispersión de los valores asociados con una variable numérica. Puede crear una nueva variable.
Otros cálculos	Término genérico, reconocer que son posibles otros cálculos estadísticos sobre los datos(por ejemplo, suma, coeficiente de correlación)

Fuente: Traducido de Chick (2004)

Para nuestro trabajo de investigación usaremos las técnicas graficación, cálculo de tendencia central y cálculo de medidas de dispersión, dado que realizaremos el análisis de variación en torno a la mediana y los cuartiles utilizando los registros, gráfico y numérico.

1.3.2 Teoría de Registros de Representación Semiótica

Primero detallaremos la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004) para el aprendizaje de la matemática y luego presentaremos la adaptación que hizo Vieira (2008) de esta teoría para el aprendizaje de la estadística.

Raymond Duval(2004) afirma que para estudiar los fenómenos relativos a los conocimientos es necesario recurrir a la noción de representación. Además agrega que la representación que

se utiliza en la adquisición de conocimientos matemáticos es la representación semiótica, y la especificidad de esta consiste en el empleo de un sistema particular de signos(sistema semiótico) como por ejemplo: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos.

Además, Duval (2004) manifiesta que para que una representación semiótica sea un registro de representación semiótica, debe cumplir tres actividades cognitivas: la primera, formación de una representación, constituido por un conjunto de marcas perceptibles que representan alguna cosa en un sistema determinado; la segunda, el tratamiento es la transformación de la representación en un mismo registro y; la tercera, la conversión es la transformación de una representación a otra representación, en otro registro, conservando el objeto matemático de la representación inicial.

Según Duval (2004), el acceso a los objetos matemáticos pasa necesariamente por representaciones semióticas. Además según el estudioso una representación puede funcionar verdaderamente como representación, y permitirle el acceso al objeto representado solo cuando cumplen dos condiciones: primero, que se disponga de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, una situación, de un proceso, y segundo, que espontáneamente puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo.

Por lo tanto el autor manifiesta que la comprensión en matemática implica transitar por lo menos en dos registros de representación semiótica y Vieira(2008) realiza un paralelo para la comprensión en estadística poniendo como ejemplo que para un análisis de un conjunto de datos se utilizan varios registros de representación semiótica.

Así de esa manera, Vieira (2008) manifiesta que una distribución de datos se puede representar en su registro tabular, por medio de tabla de frecuencias y en su registro gráfico, por medio de gráficas estadísticas y en su registro numérico por medio de las medidas de

resumen. Por ejemplo la distribución de frecuencias de la variable género se representa en su registro tabular mediante la tabla de frecuencias y luego se pasa a su registro gráfico mediante el gráfico de columnas como se observa la figura 4.

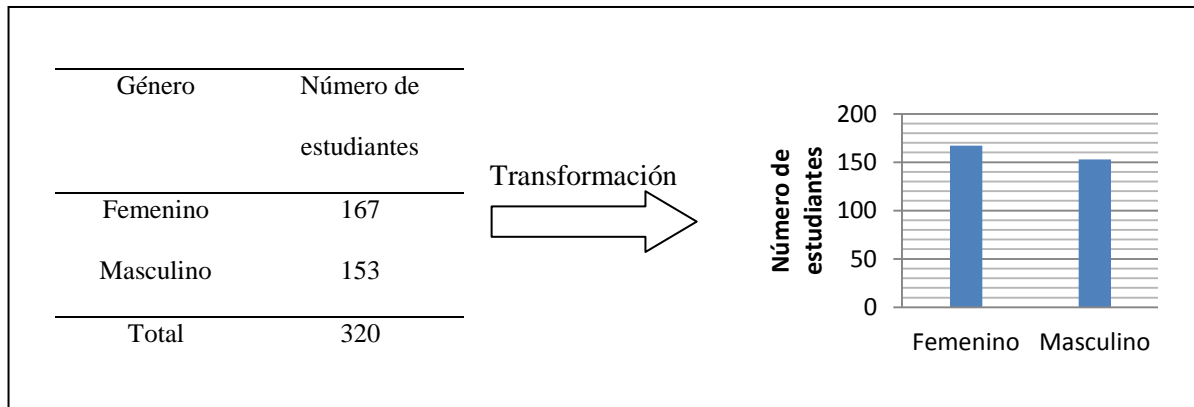


Figura 4. Transformación de una distribución de datos

Fuente: Creación propia

Para Vieira, por ejemplo el tratamiento en el registro tabular se da por el cambio de amplitud del intervalo de clase en una tabla de frecuencias que agrupan los datos de una variable cuantitativa discreta como muestra en la figura 5.

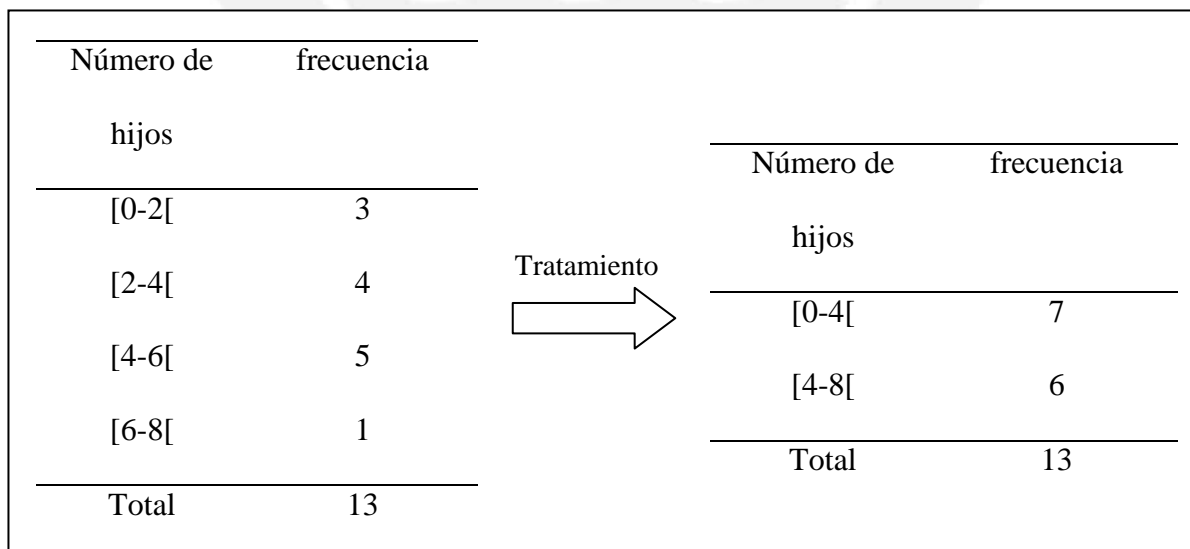


Figura 5. Tratamiento de una tabla de frecuencias por la modificación de la amplitud del intervalo de clase

Fuente: Creación propia

En la figura 4 se muestra una transformación que se llama conversión, en este caso pasa del registro tabular al registro gráfico.

Duval(2004) afirma que existen varias maneras de aprender una figura en un contexto geométrico, destacando cuatro tipos diferentes de aprehensiones: la perceptiva, la discursiva, la secuencial y operatoria.

El investigador indica que la aprehensión perceptiva de una figura permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático(en geometría). Para Vieira(2008) esta aprehensión en un gráfico estadístico permite hacer una lectura directa de los datos en el gráfico, pero plantea la hipótesis de que la aprehensión perceptiva es más compleja en la estadística que en la matemática porque para realizar la lectura de los datos de un gráfico se necesita determinar el tipo de variable, los valores que toma la variable y la lectura de los ejes.

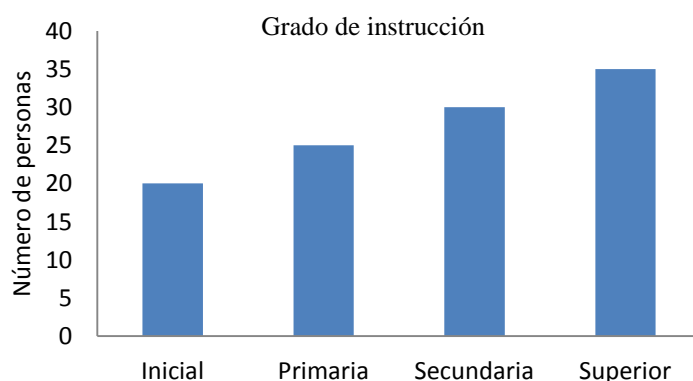


Figura 6. Gráfico de barras de la variable grado de instrucción

Fuente: Creación propia

Por ejemplo, la aprehensión perceptiva del **gráfico**(ver figura 6) permite identificar que este **gráfico** representa un **gráfico** de barras de la variable grado de instrucción, y la altura de cada barra representa la cantidad de personas de un determinado grado de instrucción.

Otro ejemplo, la aprehensión perceptiva del gráfico (ver figura 7) permite identificar que este gráfico representa un gráfico de puntos de la variable edad, y cada punto representa una observación para cada edad.

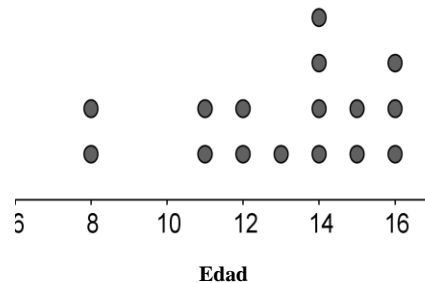


Figura 7. Gráfico de puntos de la variable edad

Fuente: Creación propia

Ahora comparando estos dos gráficos podemos destacar los que manifiesta Vieira (2008) que la aprehensión perceptiva en la estadística es más compleja que en la matemática, ya que en el gráfico de puntos no es explícito el eje vertical, esto puede confundir a los profesores de matemática porque están acostumbrados a ubicar un punto con un par ordenado en un sistema de coordenadas cartesianas de dos ejes.

Asimismo, para Duval (2004), la aprehensión discursiva de una figura es la explicación de las propiedades de una figura.

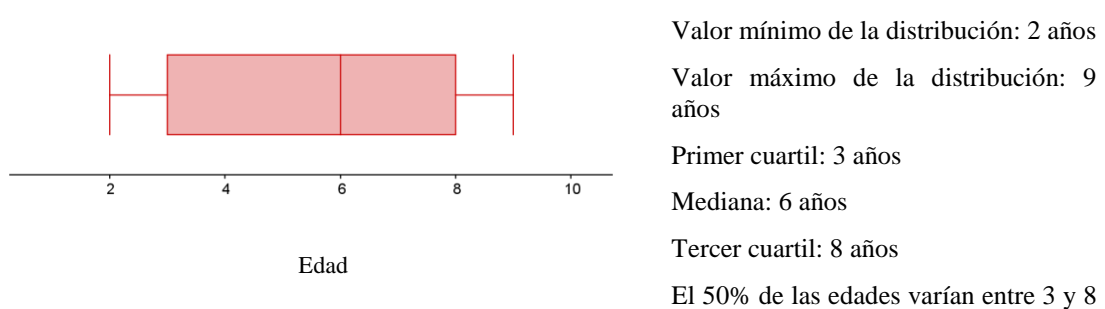


Figura 8. Aprehensión discursiva del Box-plot

Fuente: Creación propia

Según Vieira(2008), la aprehensión discursiva se da cuando el individuo explica las propiedades de un gráfico estadístico, además interpreta e identifica relaciones entre ellas. Por ejemplo en el gráfico box-plot o diagrama de cajas podemos identificar las propiedades del gráfico que sirve para el análisis de variación de los datos, como se muestra en la figura 8.

Para Duval (2004), la aprehensión secuencial de una figura es la secuencia que se sigue para la construcción de la figura. En estadística, de acuerdo a Vieira(2008), la aprehensión secuencial de un box-plot (gráfico de cajas o diagrama de cajas) sería la secuencia de pasos que se sigue para la construcción del box-plot de la distribución, es decir del histograma se construye el polígono de frecuencia acumulada y luego se construye el box-plot o del histograma directamente al box-plot por medio de la determinación algebraica de la mediana y los cuartiles.

A continuación, en la figura 9, mostramos como construir un gráfico box-plot a partir de un gráfico de puntos, por medio de la división del conjunto de datos en cuatro grupos con un mismo número de elementos en base a la variable para determinar los cuartiles y luego trazar el diagrama de cajas.

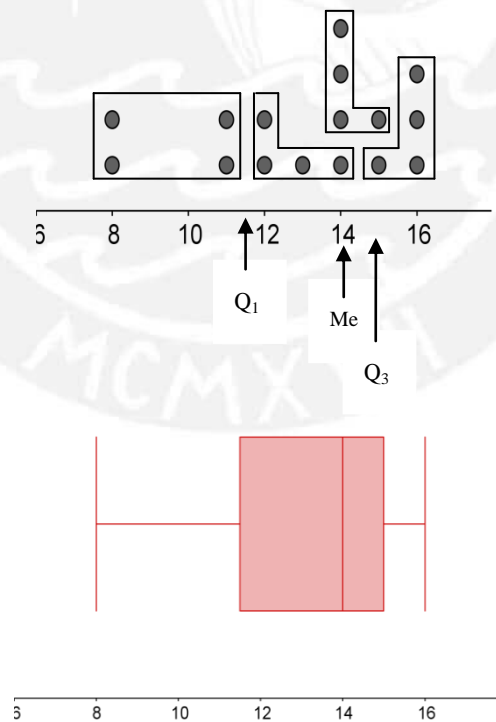


Figura 9. Aprehensión secuencial

Fuente: Creación propia

Para Duval (2004), la aprehensión operatoria corresponde a la modificación de una figura a otras figuras. Para Vieira (2008), la aprehensión operatoria se da cuando se pasa de un histograma para un polígono de frecuencias acumuladas. Otro ejemplo de aprehensión operatoria se da cuando se pasa de un gráfico de puntos para un diagrama de cajas, se modifica el gráfico de puntos a un diagrama de cajas con el objetivo de describir la variación de los datos.

La contribución de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica adaptada por Vieira (2008) a nuestro trabajo de investigación es que nos permitirá identificar los tipos de aprehensiones del registro gráfico que movilizan los profesores al percibir y describir la variación; y la transnumeración, nos permitirá identificar los diferentes cambios de representación que realizan los profesores para percibir y describir la variación.

1.4 Pregunta y objetivos de investigación

De acuerdo a las investigaciones revisadas, a los resultados de la ECE 2015, al análisis del DCN (2016) y considerando la importancia de la variación para la estadística conforme a Wild y Pfannkuch(1999), nuestra pregunta de investigación es:

¿Cómo los profesores de matemática del nivel secundario movilizan las aprehensiones en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) cuando los profesores perciban y describan la variación de los datos durante el proceso de transnumeración?

Objetivo general

Analizar las aprehensiones que los profesores movilizan en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) al percibir y describir la variación de los datos durante el proceso de transnumeración.

Objetivos específicos

- 1.- Identificar las aprehensiones perceptiva y discursiva de las gráficas estadísticas (gráfico de puntos y diagrama de cajas), que movilizan los profesores de matemática del nivel secundario cuando perciben y describen la variación de datos.
- 2.- Identificar en los procesos transnumerativos de los profesores de matemática, las técnicas transnumerativas.

1.5 Metodología de Investigación

1.5.1 Investigación Cualitativa

Nuestra investigación se desarrollará en un proyecto piloto de formación de profesores, que es un ambiente natural, en donde los profesores desarrollaran actividades para realizar el estudio de la variación, además nuestra preocupación es más por el proceso de cómo se desarrolla el estudio de variación por parte de los profesores que los mismos resultados.

Por otro lado, la investigación no se basa en una hipótesis determinada a priori; y el investigador forma parte de la escena de la investigación.

Por lo tanto, de acuerdo a estas condiciones y conforme a Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010), nuestra investigación es de naturaleza cualitativa. Para estos autores, un estudio cualitativo se conduce básicamente en ambientes naturales, exploran los fenómenos en profundidad, los significados se extraen de los datos y no se fundamenta en la estadística.

Con respecto al proceso de la investigación, los autores afirman que es inductivo, recurrente, analiza múltiples realidades subjetivas y no tiene secuencia lineal.

El método cualitativo para diseñar nuestra investigación y contestar nuestra pregunta de investigación se basa en el estudio de caso.

1.5.2 Estudio de caso

Para Ponte(2006), el estudio de caso, se ha convertido en una metodología de investigación cualitativa importante en la Educación Matemática, indicando que este tipo de metodología ha sido utilizado para investigar cuestiones de aprendizaje de los estudiantes, como por ejemplo: el conocimiento y las prácticas profesionales de los profesores, programas de formación inicial y continua de profesores, proyectos de innovación curricular, nuevos currículos, etc.

Así mismo, Ponte(2006) afirma que un estudio de caso tiene como objetivo conocer una entidad bien definida como una persona, una institución, un curso, una disciplina, un sistema educativo, una política o cualquier otra unidad social cuyo propósito es comprender a profundidad el cómo y el por qué de esa entidad, evidenciando su identidad y características propias. En nuestro caso, necesitamos comprender como los profesores movilizan las aprehensiones en el registro gráfico para percibir y describir la variación de los datos, en el desarrollo del proceso de transnumeración. En la siguiente sección se detalla las características de los profesores que participaron en la formación continua de profesores.

Con respecto a las modalidades de estudio de caso, Stake (1995) indica tres modalidades: estudio de caso intrínseco, estudio de caso instrumental y estudio de caso colectivo.

El estudio de caso intrínseco lo que busca es alcanzar la mayor comprensión del caso en sí mismo. Por ejemplo cuando el investigador intenta resolver un problema en el aula.

El estudio de caso instrumental lo que busca es analizar un caso en particular para obtener una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico.

En el estudio de caso colectivo, lo que el investigador busca es indagar un problema que requiere analizar varios casos, por ejemplo varias escuelas, varios profesores, mas su objetivo final es intrínseco o instrumental, es decir el investigador elige varios casos para maximizar sus diferencias que ayudan a determinar las dimensiones del problema con más claridad.

Para nuestro trabajo de investigación optamos por el estudio de caso colectivo ya que seleccionamos cuatro profesores agrupados en dos grupos, cada uno formado por dos profesores, y desarrollaron todas las actividades del proyecto piloto de formación de profesores.

Continuando con el estudio de caso, Ponte (2006) señala que el estudio de caso es esencialmente un diseño de investigación y lo fundamenta señalando que puede tener varios propósitos: exploratorios, descriptivos y analíticos; puede utilizar una gran variedad de instrumentos y estrategias, asumiendo formatos específicos y utilizando técnicas de recolección y análisis de datos muy diversos. Además indica que tiene las siguientes características:

- Investigación de naturaleza empírica significa que está basado en trabajos de campo o en análisis documental, especificando que esta investigación, en primer lugar estudia un fenómeno particular en su contexto real por medio de entrevistas, observaciones, documentos y artefactos, en segundo lugar es descriptivo, esto significa que el producto final es factual, literal, sistemática y lo más completo posible, y en tercer lugar puede tener un profundo alcance analítico, cuestionando una situación confrontándola con otras situaciones ya conocidas y con teorías ya existentes, y además puede asimismo ayudar a generar nuevas teorías y nuevas preguntas para futuras investigaciones.
- Investigación no experimental, significa que el investigador no pretende modificar la situación sino que trata de comprender la situación.

El presente trabajo de investigación es una investigación de naturaleza empírica que tiene el propósito, descriptivo porque realizaremos una descripción completa y literal de los hechos en el análisis de las dos actividades desarrolladas por los profesores. ; y no experimental, ya que nosotros no pretendemos modificar la situación.

Por otro lado, Ponte (2006), considera que a pesar que el estudio de caso es de naturaleza empírica, este puede tener una orientación teórica que guíe la investigación, en nuestro caso las orientaciones teóricas serán la transnumeración y la Teoría de registros de Representación Semiótica adaptada para la enseñanza de la estadística.

Por todo lo expuesto, afirmamos que el método de estudio en nuestra investigación es el estudio de caso.

1.5.3 Procedimientos metodológicos

Basado en nuestro interés de aportar al desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes concluimos que era necesario que los profesores desarrollen este tipo de pensamiento debido a que ellos enseñan matemática y tienen desarrollado su pensamiento matemático que es diferente al otro pensamiento. Además teniendo en cuenta que la variación es el corazón de la estadística decidimos el estudio de algunas investigaciones en el ámbito de la Educación Estadística, específicamente en la formación de profesores, el pensamiento estadístico y los registros de representación semiótica que están relacionados con el tipo de pensamiento transnumerativo con el objetivo de describir la variación de datos, y en base a estos antecedentes identificamos el problema de investigación.

A continuación realizamos el estudio de los marcos teóricos: Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), específicamente la transnumeración; y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1994) adaptada por Vieira (2008) para la estadística, específicamente las aprehensiones del registro gráfico. Luego planteamos la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

Para contestar la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos planteados realizamos un proyecto piloto de formación continua de profesores, en donde participaron 14 profesores de matemática del nivel secundario de Instituciones Educativas Públicas de Lima Metropolitana

y Huaral. Además los profesores tienen algunos conocimientos de estadística descriptiva, como las medidas de tendencia central y de dispersión, pero no conocen el diagrama de cajas, ya que en el DCN (2016) no está considerado este gráfico y también en la última versión del libro de quinto grado de secundaria recién aparece este gráfico.

Por otro lado, en el proyecto piloto de formación continua de profesores se realizaron dos investigaciones sobre variación desarrolladas en cinco actividades, la primera investigación corresponde a la variación en torno a la media, que se desarrollo en las tres primeras actividades; y la segunda en torno a la mediana y los cuartiles, que se desarrollo en las dos últimas actividades.

Los instrumentos para la recogida de datos son las siguientes:

Fichas de actividades: Presentamos dos actividades que fueron adaptadas de las actividades de Canossa(2009) y Coutinho, Silva & Almouloud (2011).

Ficha de observación: Estas fichas fueron elaboradas para dos observadores no participantes con el objetivo que registren el comportamiento de los profesores durante el desarrollo de las actividades.

Filmación de Video: Servirá para filmar todo el desarrollo de las actividades.

Grabaciones de audio: Servirá para grabar las conversaciones de los profesores durante el desarrollo de las actividades.

Grabaciones de las pantallas del computador: Para el desarrollo de una parte de las actividades se utilizará el Geogebra entonces se grabará todas las construcciones de los gráficos que realicen los profesores.

Finalmente, planteado la pregunta de investigación en base a los antecedentes y dando la justificación y los objetivos del trabajo de investigación, siguiendo la metodología de

investigación cualitativa, el estudio de caso, ahora presentaremos el análisis didáctico del objeto estadístico.



CAPITULO II: ANÁLISIS DEL OBJETO ESTADÍSTICO

En esta sección presentaremos nuestro objeto estadístico variación desde el punto de vista estadístico y del punto de vista didáctico.

2.1 Variación

En esta parte presentaremos la noción de variación y luego el estudio del análisis de variación de los datos en torno a la mediana y los cuartiles considerando como medida de dispersión el rango intercuartil. Este tipo de análisis se realiza en distribuciones de datos asimétricos.

Presentaremos algunas definiciones de variación de algunos autores como: "En términos simples, la variación es la cualidad de una entidad(una variable) para variar, incluyendo variación debida a la incertidumbre"(Makar y Confrey, 2005).

Reading y Shaughnessy (2004), definen variabilidad como la característica(variable) de una entidad que es observable y a la variación lo entienden como la descripción o medición de esta característica.

Por otro lado, la otra definición: "Usamos la palabra variabilidad para describir la situación en la que las observaciones o las mediciones deben ser las mismas, pero no lo son" (Phatak y Robinson, 2005). Además dan un ejemplo donde indican que las mediciones de hierro en los sucesivos lotes de azúcar producidos por un proceso de cristalización serán con toda seguridad diferentes.

Muchos autores consideran que variabilidad y variación son sinónimos, ya que Garfield et al. (2008) indican que no han acordado aún en la comunidad de Educación Estadística la distinción entre variabilidad y variación. En nuestra investigación serán consideradas sinónimos.

Además, Franklin et al (2005) discuten algunas fuentes de variación en un conjunto de datos, que a continuación se presentan:

- Variación en la medida

Esta variación se da cuando realizamos medidas repetidas sobre un mismo individuo u objeto, esto puede suceder porque el instrumento de medida no es adecuado, por ejemplo cuando queremos medir una distancia grande con una regla pequeña, otro ejemplo sería cuando una persona se mide la presión arterial en diferentes momentos y la medida de la presión varía en cada instante.

- Variación natural

Esta variación es inherente a la naturaleza, por ejemplo las personas de una ciudad tienen diferentes pesos, estaturas y opiniones.

- Variación inducida

Este tipo de variación se da cuando se someten a los individuos a condiciones diferentes, por ejemplo si aplicamos diferentes métodos de enseñanza en dos aulas obtendremos resultados diferentes. La variabilidad de los resultados será debida a la variabilidad natural de las características de los estudiantes, pero también a la variabilidad inducida por el método de enseñanza.

- Variación en el muestreo

Este tipo de variación se da cuando realizamos estimaciones de los parámetros de una población cuando se selecciona diferentes muestras de esta población, resultando que las estimaciones variarán entre si, por ejemplo en un proceso electoral se toma una muestra aleatoria de una población para determinar la proporción desconocida de todos los electores que apoyan a un candidato. Si se toma otra muestra aleatoria de la misma población la estimación de esa proporción será diferente a la primera, es decir si se toman diferentes muestras de una misma población, las estimaciones variarán entre sí.

Como la variación va asociada a las medidas de tendencia central y de posición, en el estudio del objeto se considerará el estudio la mediana y los cuartiles, además como medida de

variabilidad el rango intercuartil, ya que en nuestro trabajo de investigación estudiaremos la variación en torno a la mediana y los cuartiles para esto utilizaremos las definiciones del libro titulado “Estadística Descriptiva- Una invitación a la investigación” del autor Fernández(2005), libro que se encuentra en la bibliografía del syllabus del curso de Estadística aplicada a la Educación de la Facultad de Educación de la Universidad Mayor de San Marcos y el libro titulado “Introducción a la Estadística Económica” de los autores Pérez, Caso, Rio y López(2012) que presenta el aspecto formal de los objetos estadísticos asociados a la variación.

Pérez, Caso, Rio y López(2012), cuando inicia el tema de medidas de tendencia central indica que la medida de tendencia central más utilizada es la media aritmética e indica que puede plantear situaciones muy diversas en la que esta medida no es la más idónea para resumir la información y presenta como alternativas la moda, la mediana y los cuartiles. Los autores indican que la representatividad de las medidas de tendencia central depende del análisis de variación de los datos.

2.1.1 Mediana

Pérez, Caso, Rio y López(2012), define la mediana como el valor central de un conjunto de datos ordenados en forma creciente que divide a la distribución en dos partes iguales e indica que deja tantas observaciones a su izquierda como a su derecha.

Por otra parte Fernández(2005), define a la mediana como el valor que divide al total de n observaciones, previamente ordenadas o tabuladas, en dos partes con el mismo número de observaciones señalando que la mitad de observaciones son menores o iguales a la mediana y la otra mitad son mayores o iguales a ella. Además señala que la mediana no necesariamente pertenece a la distribución de los datos.

Ambos autores indican que si la distribución de datos no agrupados tiene un número impar de datos, la mediana es el valor central, pero si el número de datos es par, la mediana es la media

aritmética de los dos valores centrales. Para entender el cálculo de la mediana, Fernández (2005, p. 237) presenta los dos casos de la siguiente manera:

Se presentan dos casos:

Cuando se tiene un número impar de datos

Entonces la mediana es igual al valor del término central.

Ejemplo: Sean los valores 130, 12, 3, 29, 45. Halle la mediana.

1ro. Ordenamos: 3, 12, 29, 45, 130

2do. Hallamos el lugar(L) que ocupa la mediana

$$L = \frac{n+1}{2} = 3 \Rightarrow Me = 29$$

Se observa que: $\overbrace{3,12,29}^2, \overbrace{45,130}^2$ antes y después de la mediana existe el mismo número de datos.

Cuando se tiene un número par de datos

Entonces la mediana es igual a la media aritmética de los dos términos centrales.

Ejemplo: Las edades de 8 profesores de la UNI son las siguientes:

30, 23, 45, 27, 34, 48, 28, 41. Halle la mediana.

1ro. Ordenamos: 23, 27, 28, 30, 34, 41, 45, 48

2do. Hallamos el lugar(L) que ocupa la mediana

$$L = \frac{n+1}{2} = 4,5 \Rightarrow Me = \frac{30+34}{2} = 32$$

Los dos autores definen y calculan la mediana numéricamente, pero no representan los datos en un gráfico, y en este gráfico representar la mediana de esta forma este cambio de representación ayudaría a comprender la variación de los datos con respecto a la mediana.

De acuerdo a Canossa(2009), una de las dificultades que tenía la profesora que participó en su investigación era el cálculo de la mediana cuando la cantidad de datos es par y no pertenecía al conjunto de datos y esto lo indica Fernández(2005),

También Pérez, Caso, Rio y López(2012, p. 35) sugieren que si la distribución de datos tiene una gran cantidad de datos es conveniente representarlo en su forma tabular, es decir en una tabla de frecuencias acumuladas, y para el cálculo de la mediana lo presenta de la siguiente manera:

- Si no existe ningún valor de la distribución cuya frecuencia acumulada coincida con $\frac{n}{2}$, la mediana será el menor valor de la variable que presenta una frecuencia acumulada mayor que $\frac{n}{2}$. En particular, esta situación se dará siempre que n sea impar puesto que en ese caso el valor de $\frac{n}{2}$ no es entero.

- Si $\frac{n}{2}$ coincide con la frecuencia acumulada de un valor x_i , la mediana está indeterminada entre los valores x_i y x_{i+1} . En tal caso se tomará como mediana la media aritmética de ambos, esto es, $Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Esta situación solamente puede aparecer si n es par.

Asimismo ambos autores utilizan la tabla de frecuencias para el cálculo de la mediana, realizando en este caso el cambio de representación, del registro tabular al registro numérico, es decir se está desarrollando un proceso de transnumeración, de acuerdo a Wild y Pfannkuch (1999).

En cuanto a las propiedades, Véliz (2011, p. 55) afirma que:

La mediana es una medida de centralización resistente. Al variar uno de los datos que no sean los de posición central, la mediana no varía; por ello se utiliza como resumen numérico de un grupo de datos cuya forma de polígono de frecuencias no es simétrica.

De acuerdo al comentario de Véliz (2011), la mediana no es sensible a los valores extremos y lo explica refiriéndose a la simetría del polígono de frecuencias, es decir realiza un cambio de representación, de registro numérico a registro gráfico, lo cual ayuda a visualizar la variación de datos con respecto a la mediana.

2.1.2 Cuartiles

Pérez, Caso, Rio y López(2012), señalan que las medidas de posición no central, denominadas cuantiles tienen un significado análogo al de la mediana, con la diferencia de que en vez que apunte al centro de la distribución, ahora el objetivo es determinar valores que dividan a la distribución en más de dos partes iguales. Además especifica que los cuantiles más utilizados son los siguientes: los cuartiles, los deciles, los centiles o percentiles. Este tipo de medidas nos ayudaran a percibir la variabilidad de los datos con más detalle.

En nuestro caso presentaremos la definición de cuartiles, ya que es la que utilizaremos en el presente trabajo de investigación.

De acuerdo a Fernández(2005), los cuartiles son aquellos valores que dividen a la distribución de datos ordenados en cuatro partes iguales como se muestra en el figura 10, siendo Q_1 , Q_2 y Q_3 los cuartiles, y siendo Q_1 el primer cuartil, Q_2 es el segundo cuartil (mediana) y Q_3 es el tercer cuartil.

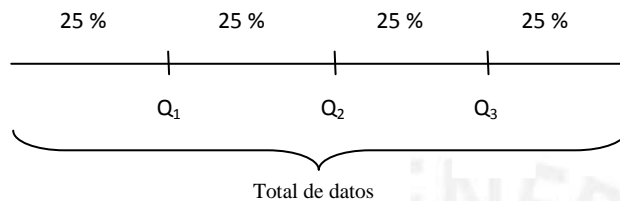


Figura 10. Cuartiles

Adaptado de Fernández (2005)

Además Fernández (2005) da la interpretación de los cuartiles de acuerdo a lo que se observa en la figura 10 de la siguiente manera:

Q_1 es el mayor valor del 25% de los datos menores y Q_3 es el menor valor del 25% de los datos mayores. Este cambio de registro gráfico a registro lengua natural, ayuda a comprender los cuartiles, conforme a Vieira(2008).

2.1.3 Diagrama de cajas o Box-plot

De acuerdo a Pérez, Caso, Rio y López(2012), el diagrama de cajas es una representación basada en los cuartiles y en los valores extremos(mínimo y máximo) de la distribución.

Además Fernández (2005) indica que en el gráfico de cajas se observa principalmente:

- La centralización, observando la mediana.
- La dispersión o variabilidad, mediante el rango intercuartil $d= Q_3 - Q_1$
- La simetría de la distribución, observando la posición de la mediana.

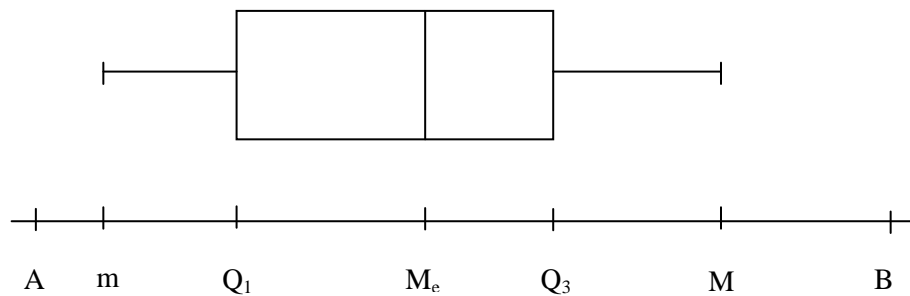


Figura 11. Gráfico de cajas

Fuente: Adaptado de Fernández (2005, p.181)

En la figura 11, se muestra los elementos del gráfico box-plot o gráfico de cajas o diagrama de cajas que ayuda a comprender la variación especificando los valores de los cuartiles, los valores máximo y mínimo no discrepantes, este gráfico nos brinda una nueva información, la densidad de las cajas dividida por la mediana que nos permite visualizar la concentración y dispersión de los datos, es decir se ha realizado un cambio de representación para obtener esta nueva información, del registro numérico al registro gráfico, y de acuerdo a Wild y Pfannkuch(1999) estamos realizando la transnumeración.

Finalmente, Fernández (2005) señala que para determinar los valores de m y M se debe tener en cuenta que m es el dato mínimo no outlier y M es el dato máximo no outlier. En el grafico 10, $A = Q_1 - 1.5d$ y $B = Q_3 + 1.5d$. Además afirma que si un dato es menor que A o mayor que B , se considera que es un dato discordante o atípico(outlier)

2.2 Análisis de libros didácticos

Para tener una referencia sobre el desarrollo del tema de variación en las instituciones educativas públicas, realizamos un estudio de los textos Matemática 3^o, Matemática 4^o y Matemática 5^o utilizado por los estudiantes del tercero, cuarto y quinto grado de secundaria. El primer texto tiene 6 unidades, las primeras 5 unidades con temas de matemática y la última unidad corresponde al área de la estadística denominada interpretación de información, y los temas dentro de esta unidad son las siguientes: representación de datos estadísticos, medidas

de tendencia central, medidas de dispersión, ¿sucesos al azar? y estudio de la combinatoria; y el segundo texto tiene 8 unidades, las primeras 7 unidades con temas de matemática y la última unidad corresponde al área de la estadística denominada estadística y probabilidad; y dentro de esta unidad desarrollan los siguientes temas: relación entre población y muestra, muestreo aleatorio y no aleatorio- investigaciones estadísticas, cuartiles, deciles y percentiles, coeficiente de variación, eventos y probabilidades, probabilidad de eventos compuestos, probabilidad condicional, y probabilidad de eventos independientes; y el tercer texto tiene 12 unidades, en la penúltima unidad denominada gestión de datos y en el tema de gráficos estadísticos se presenta en diagrama de cajas.

En la figura 12 observamos la introducción de las medidas de tendencia central con un ejemplo contextualizado titulado “la mejor decisión” en donde se debe elegir al mejor representante de un conjunto de datos.

Medidas de tendencia central

► **¿Por qué medidas de tendencia central?**

La mejor decisión
Tres analistas de derecho laboral quieren determinar un valor representativo para el número de trabajadores por tienda.

SAMUEL: Se puede obtener si se calcula el valor promedio del conjunto de datos.
JAIMÉ: Si se ordena el conjunto de datos, se puede considerar el valor central.
NÉSTOR: En todo caso, puede ser el valor que más se repite, ¿no te parece?

Según lo anterior, responde:

- ¿Cuál es el valor al que se refiere cada uno de ellos? ¿Son iguales?

Atención

Existen medidas que nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos de una información. En un conjunto de valores ordenados se puede reconocer: un valor igual al promedio aritmético, un valor que se ubica al medio y un valor que se repite más. Esos valores representan al conjunto y se llaman: la **media aritmética**, la **mediana** y la **moda**.

Figura 12. Introducción a las medidas de tendencia central

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 215)

Después definen la media aritmética, la mediana y la moda, cada uno con sus respectivos ejemplos para el cálculo de estas medidas en una tabla de frecuencias. Este proceso lo observamos en la figura 13.

Media aritmética (\bar{x})
Es el valor promedio del conjunto de datos observados para una variable.

Dado un conjunto de valores x_1, x_2, \dots, x_n , se presentan con frecuencias f_1, f_2, \dots, f_n , la media aritmética se da por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{N}$$

Cuando los datos se agrupan en clases, la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i}{N}$$

TEM EN CONSIDERACIÓN
 m_i : valor medio de clase (marca de clase)
 N : número de datos
 f_i : frecuencia de cada clase
 Σ : sumatoria

RECUERDA
La media aritmética también se llama valor promedio, promedio aritmético o simplemente media o promedio.

EJEMPLO 1
Determina la media en cada caso. Para ambas situaciones, elabora una columna donde aparezca el producto.

RESOLUCIÓN

a.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
13	7	91
14	8	112
15	10	150
Total	25	353

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 f_i \cdot x_i}{N} = \frac{353}{25} = 14,12$$

b.

Intervalo	f_i	m_i	$f_i \cdot m_i$
[08; 12[2	10	20
[12; 16[5	14	70
[16; 20]	8	18	144
Total	15		234

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 f_i \cdot m_i}{N} = \frac{234}{15} = 15,6$$

Figura 13. Media aritmética

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 215)

En la figura 13 se presenta la definición y el cálculo de media aritmética para datos agrupados en tablas de frecuencias. En este caso al pasar de la tabla de frecuencias a una medida de tendencia central se ha realizado un cambio de registro, del registro tabular al registro numérico, y de acuerdo con Vieira (2008) y Wild y Pfannkuch (1999), este cambio de registro permite obtener más información sobre los datos.

Mediana (Me)
Es el valor central en un conjunto ordenado de datos. Para datos agrupados en intervalos se empieza calculando la mitad de los datos ($n/2$). Si F_{m-1} es la primera frecuencia acumulada que supera a ($n/2$), entonces $I_m = [L_i; L_s[$ se llama intervalo mediano.

Intervalo	f_i	F_i
I_1	f_1	F_1
I_2	f_2	F_2
\vdots	\vdots	\vdots
I_{m-1}	f_{m-1}	F_{m-1}
$I_m = [L_i; L_s[$	f_m	F_m
\vdots	\vdots	\vdots
Total	n	

$$Me = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m} \right) A$$

Donde:
 n : n° de datos
 A : amplitud
 L_i : límite inferior
 L_s : límite superior
 f_i : frecuencia absoluta del intervalo de la mediana
 F_i : frecuencia acumulada absoluta del intervalo inmediatamente inferior al intervalo de la mediana

EJEMPLO 3
Calcula la mediana a partir de la tabla de frecuencias.

I	[112; 123[[123; 134[[134; 145[[145; 156[[156; 167[[167; 178]
f	5	5	6	3	4	7

RESOLUCIÓN

Intervalo	f_i	F_i
[112;123[5	5
[123;134[5	10
[134;145[6	16
[145;156[3	19
[156;167[4	23
[167;178]	7	30

- Se calcula: $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow f_m = 6 \Rightarrow I_m = [134; 145[$
- Se identifica: $L_i = 134$; $F_{m-1} = 10$; $A = 11$
- Se plantea:

$$Me = 134 + \left(\frac{30 - 10}{6} \right) 11$$

Figura 14. Mediana

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 216)

De la misma forma, en la figura 14 se presenta la definición y el cálculo de la mediana para datos agrupados en tablas de frecuencias.

El libro presenta el cálculo de las medidas de tendencia central a partir de una tabla de frecuencias en donde se está realizando la transnumeración al realizar un cambio de representación para obtener más información.

En la figura 15 se presenta la relación entre las tres medidas para determinar si la distribución de datos es simétrica o no, y en el ejemplo 7 no presentan los datos sino directamente los valores de las medidas quitándoles la opción a los estudiantes explorar los datos con los diferentes cambios de representación de una distribución de datos y de esta manera lograr el aprendizaje de estas medidas, conforme con Vieira(2008).

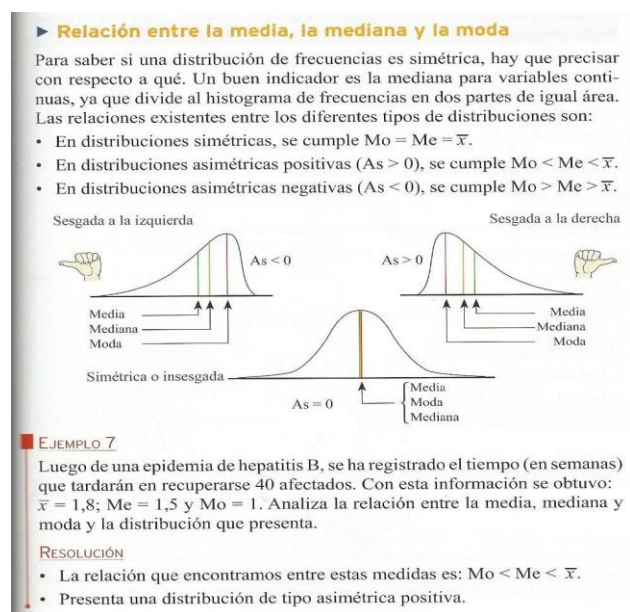


Figura 15. Simetría de una distribución de datos

Fuente: Matemática 3^o de secundaria(Perú, 2012, p. 219)

A continuación se desarrolla las medidas de dispersión: rango, desviación media y varianza, cada uno con un ejemplo.

En la figura 16 se presenta la definición de rango y un ejemplo que solo utiliza el registro numérico y tiene como objetivo el cálculo del rango.

► **Medida de dispersión**

Indica el grado de concentración de los datos de una distribución respecto a las medidas de centralización. Entre las medidas de dispersión más usuales se encuentran.

- **Rango o recorrido (R):** se mide la amplitud de los valores de la muestra y se calcula mediante la diferencia entre el valor más elevado ($x_{\text{máx}}$) y el valor más bajo ($x_{\text{mín}}$).
 $R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$.

■ **EJEMPLO 1**

Los siguientes datos muestran los pagos anuales, en nuevos soles, hechos por Sipal a la clínica Montefiori. Determina el rango de los pagos anuales.

863; 1883; 1041; 957; 1334; 1624; 1698; 1138; 903; 1745; 1802; 1204

RESOLUCIÓN

$$x_{\text{máx}} = 1883 \quad \text{y} \quad x_{\text{mín}} = 863$$
$$R = 1883 - 863 = 1020$$

Los pagos anuales hechos por Sipal a la clínica Montefiori varían hasta en S/. 1020.

Figura 16. Rango

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 222)

En la figura 17, se presenta la definición y el cálculo de la desviación media por medio de un ejemplo.

• Desviación media (DM): es la media aritmética de las diferencias, en valor absoluto, entre los valores de la variable y la media aritmética.	
Datos no agrupados	Datos agrupados
Si tiene un conjunto de n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , entonces: $DM = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} }{n}$	Quando los datos se agrupan en clases: $DM = \frac{\sum_{i=1}^m f_i \cdot x_i - \bar{x} }{n}$ Donde: m = número de clases. x_i = punto medio o marca de clase i . f_i = frecuencia absoluta de la clase i .
■ EJEMPLO 2	
La cantidad de errores que comete un digitador en 5 días, son 4; 6; 12; 16 y 22. Determina la desviación media de los errores. ($\bar{x} = 12$)	
RESOLUCIÓN	
$DM = \frac{\sum_{i=1}^m x_i - \bar{x} }{n} = \frac{ 4 - 12 + 6 - 12 + 12 - 12 + 16 - 12 + 22 - 12 }{5} = \frac{28}{5} = 5,6$	
El número de errores por día se encuentra en promedio alejado 5,6 respecto a la media. Si en los días siguientes el número de errores por día se acerca a la media el valor de la DM disminuirá.	

Figura 17. Desviación media

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 223)

En la figura 18, se presenta la definición y el cálculo de la varianza tanto para datos agrupados y no agrupados.

- **Varianza:** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones. Se denota S^2 y su unidad es el cuadrado de la unidad de los datos.

Datos no agrupados	Datos agrupados
$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{n}$	Cuando los datos se agrupan en clases: Donde: $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n}$
	m = número de clases x_i = marca de clase i f_i = frecuencia absoluta

Figura 18. Varianza

En la figura 19, se **Fuente:** Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 224) **desviación estándar** en una tabla de frecuencias, en este ejemplo solo se limitan al cálculo de estas medidas.

EJEMPLO 4
 El administrador de un hospital investigó el número de días que 204 pacientes, elegidos al azar, se quedaron en el hospital después de una operación. Calcula la varianza, si obtuvo los siguientes datos:

Días	[1; 3]	[4; 6]	[7; 9]	[10; 12]	[13; 15]
f_i	23	94	48	21	18

RESOLUCIÓN
 Se elabora la tabla de frecuencias.

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
[1; 3]	2	23	46	25	575
[4; 6]	5	94	470	4	376
[7; 9]	8	48	384	1	48
[10; 12]	11	21	231	16	336
[13; 15]	14	18	252	49	882
		204	1 383		2 217

Luego, se determina la media. Finalmente, se determina S_x^2 .

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{n} = \frac{1\,383}{204} = 6,78 = 7$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{2\,217}{204} = 10,87$$

∴ la varianza es: 10,87

$$S_x = \sqrt{S_x^2}$$

Figura 19. Cálculo de la varianza

Fuente: Matemática 3° de secundaria(Perú, 2012, p. 224)

En el desarrollo de las medidas de tendencia central y de dispersión, solo realizan el cambio del registro tabular al registro numérico, lo que falta es realizar cambios al registro gráfico para una mejor comprensión de estas medidas y poder percibir la variación de los datos en torno a estas medidas. Asimismo de acuerdo al proceso de transnumeración de Wild y Pfannkuch(1999) también se necesita realizar cambios de representación para encontrar nuevas informaciones.

El análisis de variación de los datos de acuerdo a Novaes(2011) se realiza en torno a la media o en torno a la mediana y los cuartiles. Hasta el momento se ha realizado en torno a la media pero falta en torno a la mediana y los cuartiles. En el texto de cuarto grado de secundaria se desarrolla el tema de los cuantiles como se presenta a continuación.

En la figura 20 se observa la definición de cuartiles, deciles y percentiles y dan el procedimiento y la fórmula para calcular los cuantiles, También realizan las representaciones de los cuantiles en la recta numérica e indican en cuantas partes iguales divide a la distribución de datos especificándolo en porcentajes, esto ayuda al aprendizaje de los cuantiles, conforme con Vieira(2008), pero es necesario que se presente la gráfica de la distribución de datos para visualizar la variación de los datos con respecto a los cuantiles.

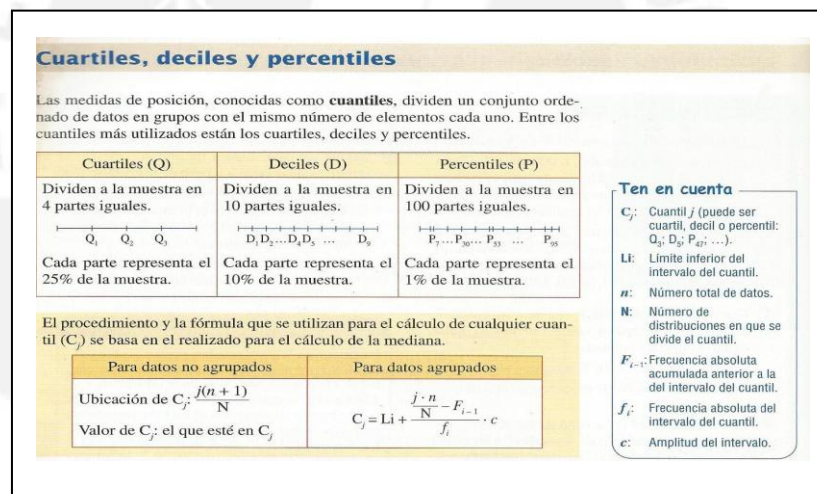


Figura 20. Cuantiles

Fuente: Matemática 4° de secundaria(Perú, 2012, p. 244)

Posteriormente a esta introducción, se observa en la figura 21, un ejemplo de un problema contextualizado en donde piden calcular el tercer cuartil del conjunto de datos. En el procedimiento se indica primero ordenar los datos y luego se utiliza la fórmula para la ubicación del tercer cuartil y a continuación lo representan en la recta numérica para hallar su valor.

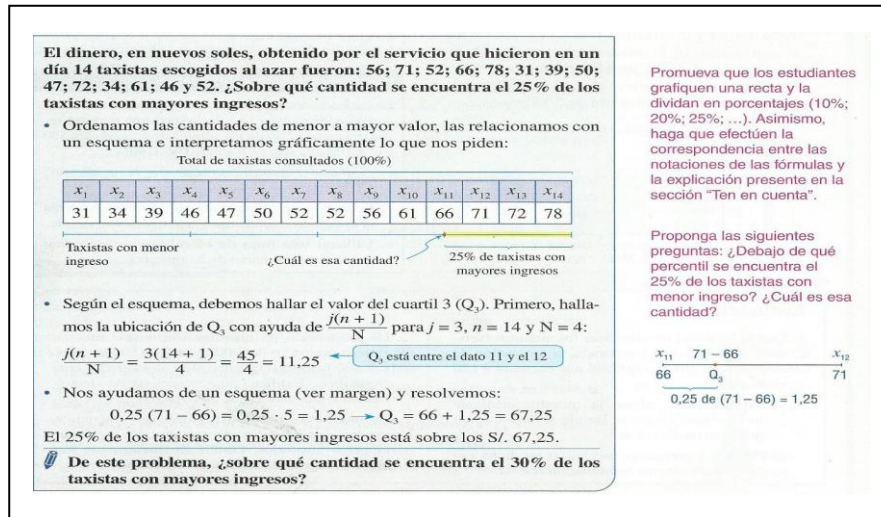


Figura 21. Cálculo del tercer cuartil

Fuente: Matemática 4^o de secundaria(Perú, 2012, p. 245)

Este cambio de representación permite visualizar la posición del cuartil, pero para mejorar la visualización se debería representar mediante otro gráfico, el gráfico de puntos y en este trazar una recta vertical con el valor del cuartil y luego observar la variación de los datos en torno a este cuartil. Además no se realiza la observación que el valor calculado del cuartil no pertenece al conjunto de datos, conforme sugiere Canossa (2009).

De otro lado, en la figura 22 se aprecia un ejemplo con un conjunto de datos.

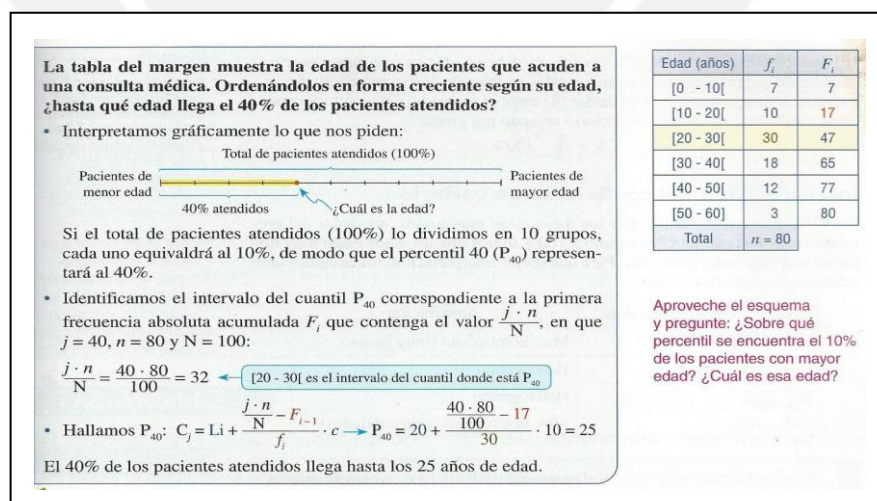


Figura 22. Cálculo de un dato en una posición determinada

Fuente: Matemática 4^o de secundaria(Perú, 2012, p. 245)

En este ejemplo, el conjunto de datos están representados en una tabla con intervalos de clase y piden determinar un valor del conjunto de datos que ocupa una posición determinada. En este caso pasan del registro tabular al registro gráfico lo cual permite la interpretación y cálculo de ese valor.

Los tipos de tarea expresados en registro de lengua natural, registro tabular y registro gráfico, que se presentan a continuación en las siguientes figuras, pretende que el estudiante halle e intérprete las medidas de posición y no visualice la concentración y dispersión de los datos con respecto a estas medidas.

En la figura 23 proponen situaciones donde se exige a los estudiante calcular un dato de la distribución que ocupa una posición determinada y la interpretación de estas medidas de posición, estas situaciones son enunciadas en registro de lengua natural y tabular.

ACTIVIDADES

1 Observen las calificaciones obtenidas por 18 participantes en un concurso matemático:

16; 19; 13; 7; 14; 18; 16; 9; 14
15; 7; 18; 14; 16; 9; 10; 12; 17

En pareja, **representen** gráficamente:

- El 25% de los participantes con menores calificaciones.
- El 12% de los participantes con mayores calificaciones.

2 De la situación anterior, ¿sobre qué calificación se encuentra el 20% de los participantes con mayores calificaciones? **Expliquen.** 16

3 ¿Qué significa que un estudiante haya obtenido un puntaje superior al noveno decil (D_9) en un cuestionario de informática?

4 La tabla muestra el consumo semanal de fruta de los trabajadores de una empresa. **Calcula e interpreta** el cuartil 1 y el percentil 95. 1,7 kg y

Consumo (kg)	f_i	F_i
[0 - 1,5[15	15
[1,5 - 3,0[26	41
[3,0 - 4,5[20	61
[4,5 - 6,0]	13	74

Figura 23. Tarea de extensión

Fuente: Matemática 4° de secundaria(Perú, 2012, p. 245)

Luego para dar solución a estas situaciones, los estudiantes deberán realizar cambios de registros de representación, es decir realizar conversiones.

De acuerdo a Novaes (2011) las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión se deberían trabajar en forma conjunta para comprender el concepto de variación, en los textos analizados lo desarrollan en forma separada, asimismo no se presenta el análisis de la

variación en torno a la mediana y los cuartiles, para esto se necesita usar el gráfico de cajas o Box-plot, que no aparece en los contenidos del DCN (2016), pero si aparece en el libro de quinto grado de secundaria, como se muestra en la figura 24.

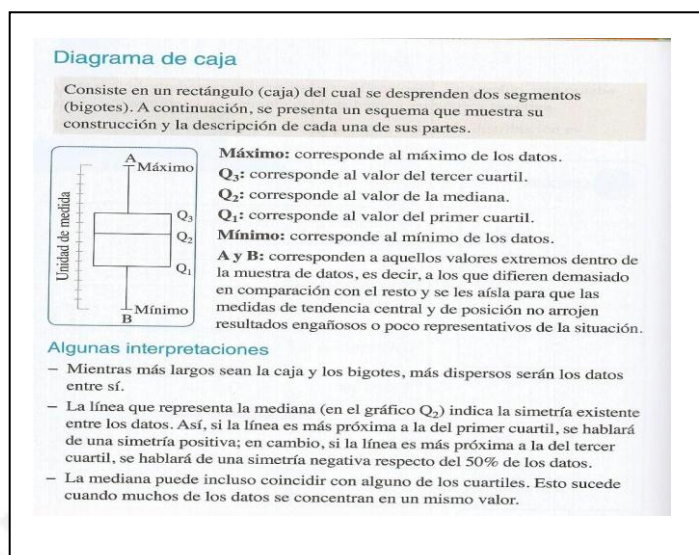


Figura 24. Diagrama de cajas

Fuente: Matemática 5° de secundaria(Perú, 2016, p. 170)

En esta figura presentan el diagrama de cajas indicando los cinco números (máximo, cuartil 3, cuartil 2(mediana), cuartil 1, mínimo) y otras interpretaciones de este gráfico, toda esta descripción lo realizará el estudiante por medio de la aprehensión discursiva, conforme a Vieira (2008).

Por otro lado, en el libro presentan la construcción de un diagrama de cajas, como observamos en la figura 25, calculando a partir de una tabla de frecuencias los cuartiles y la mediana y luego en base a estos valores calculados construyen este gráfico.

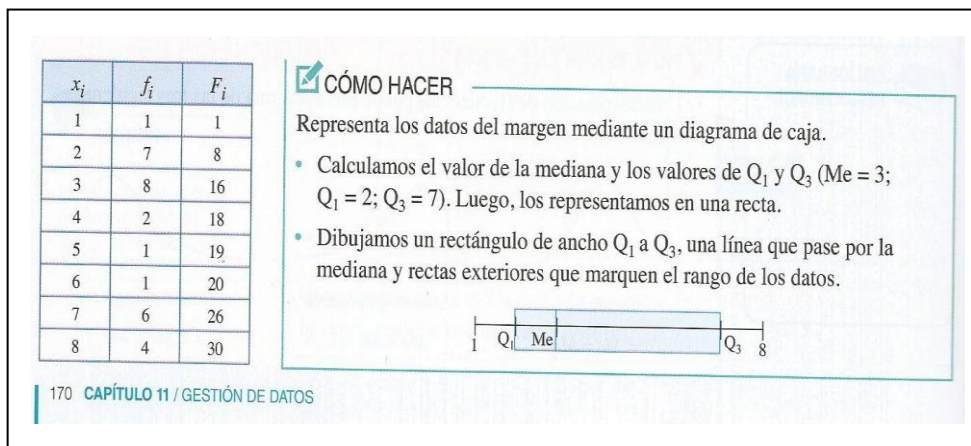


Figura 25. Construcción del diagrama de cajas

Fuente: Matemática 5° de secundaria(Perú, 2016, p. 170)

De esta manera, el libro presenta la construcción el diagrama de cajas, pasando por diferentes cambios de representación, del registro tabular al registro numérico y luego al registro gráfico.

Por consiguiente, de acuerdo con Wild y Pfannkuch (1999) este gráfico es resultado de un proceso de transnumeración, es decir el diagrama de cajas se puede construir a partir de un histograma, por medio de la aprehensión secuencial, de acuerdo con Vieira (2008).

Finalmente, los libros de texto presentan el desarrollo de las medidas de tendencia central y de dispersión en forma separada, a pesar que en la introducción de las medidas de tendencia central, figura 11, buscan un valor representativo de un conjunto de datos. Además el cálculo de estas medidas lo hacen a partir de una tabla de frecuencias, en donde se realiza el cambio de representación, de registro tabular a registro numérico, y esto evidencia que se está realizando la transnumeración. Sin embargo, poco se utiliza el registro gráfico, es decir muy pocas veces se realiza la representación gráfica de los datos, ya que a través de las aprehensiones del registro gráfico se puede ayudar a comprender los diferentes objetos estadísticos.

CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, presentamos la descripción del escenario donde se realizó la investigación, los sujetos que participaron en ella y la secuencia de dos actividades, que son parte de un piloto de formación continua de profesores, y que han sido adaptadas tomando en cuenta algunas de las actividades propuestas por Canossa (2009) y Coutinho, Silva & Almouloud (2011).

Por otro lado, en el proyecto piloto de formación continua de profesores se realizaron dos investigaciones sobre variación desarrolladas en cinco actividades, la primera investigación corresponde a la variación en torno a la media, que se desarrollo en las tres primeras actividades; y la segunda en torno a la mediana y los cuartiles, que se desarrollo en las dos últimas actividades.

Nuestro trabajo de investigación corresponde a la variación en torno a la mediana y los cuartiles.

3.1 Escenario de la investigación

El experimento se llevo a cabo en el Auditorio de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), y fue desarrollado en dos sábados en el horario de 11 a. m. a 2 p. m.

3.2 Sujetos de la investigación

En nuestra investigación participaron 14 profesores de matemática del nivel secundario de Instituciones Educativas Públicas de Lima Metropolitana y Huaral. La participación de los profesores fue en forma voluntaria y trabajaron en parejas formándose 7 grupos y cada grupo trabajó con una laptop.

Los profesores participantes en esta investigación, tienen algún conocimiento de estadística descriptiva, ya que han llevado el curso de estadística en su formación docente (ver anexo), pero a pesar de eso no conocen el diagrama de cajas. Además en la primera investigación lograron graficar el gráfico de puntos.

De los 14 profesores, se analizaron los trabajos realizados por cuatro profesores que formaron los grupos: Grupo 1: Alberto y Mario y Grupo 2: Leandro y Juan, quienes fueron elegidos por participar en las cinco actividades programadas y haber desarrollado todas las preguntas planteadas en cada actividad.

3.3 Descripción de las actividades

Las actividades fueron diseñadas en base a los problemas detectados en las investigaciones de Vieira (2008), Canossa (2009), Amaral (2010) y Novaes (2011), identificando dos problemas que lo explicamos a continuación:

En primer lugar, Vieira (2008), Canossa (2009) y Amaral (2010) señalan que los profesores y estudiantes tienen problemas con el cálculo e interpretación de los cuartiles y como consecuencia no comprenden el gráfico Box-plot para realizar el análisis de variación de los datos.

En segundo lugar, Novaes (2011) indica que los profesores de matemática presentan las siguientes dificultades: la primera, transferir su pensamiento determinista de la matemática hacia el análisis de datos, y la segunda, tienen la concepción que la variación de los datos puede ser caracterizada apenas con el valor más frecuente en la distribución.

Por estas razones, realizamos las siguientes actividades que han sido adaptadas tomando en cuenta algunas de las actividades propuestas por Canossa (2009) y Coutinho, Silva & Almouloud (2011). Las dos actividades se muestran en la tabla 4, en donde se indica el objetivo de cada actividad.

Tabla 4. Actividades del experimento

Actividad	Objetivo
Actividad 4	Construir y comprender el diagrama de cajas o Box-plot de un conjunto de datos
Actividad 5	Representación y análisis de la variación de los datos con respecto a la mediana y los cuartiles

Actividad 4

En la Actividad 4 (ver anexo) tenemos por objetivo que los profesores construyan el diagrama de cajas o Box-plot a partir del gráfico de puntos, ya que los profesores no conocen el Box-plot y por ese motivo fue necesario dar la secuencias de pasos para la construcción de este gráfico. Luego a partir de las aprehensiones perceptiva y discursiva de los gráficos, gráfico de puntos y diagrama de cajas, perciban y describan la variación de los datos en el proceso de transnumeración. Sin embargo, la percepción se da en ambos sentidos, del gráfico de puntos al diagrama de cajas y viceversa.

Para el desarrollo de esta actividad les entregamos a los profesores tarjetas con las edades de un grupo de 16 estudiantes (ver anexo), plumones de tres colores diferentes y papelógrafos para que construyan primero el gráfico de puntos, y a partir de este, se construye por medio de una secuencias de pasos, el diagrama de cajas que servirá para realizar el análisis de variación de las edades. Después harán uso del geogebra para graficar el grafico de puntos y el diagrama de cajas y mediante la modificación en las edades de los 16 estudiantes puedan describir los cambios en los dos gráficos en forma simultánea por medio de las aprehensiones perceptiva y discursiva.

Por otro lado, las tarjetas ayudan a los profesores a realizar la diferencia entre la frecuencia y la densidad de los datos. Por densidad de datos nos referimos a que tan cerca o alejados se encuentran los datos, es decir hay más densidad cuando los datos están más cercanos. Por

ejemplo, si tenemos un conjunto de 8 datos: 2, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 17. El diagrama de cajas de este conjunto de datos se muestra en la figura 26.

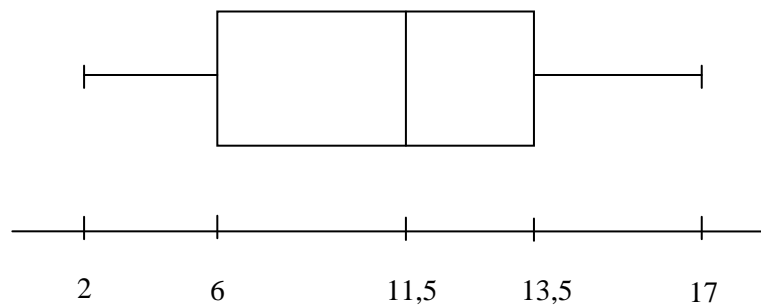


Figura 26. Diagrama de cajas

En la figura 26, observamos que el valor mínimo es 2, el primer cuartil es 6, el segundo cuartil es 11,5, el tercer cuartil es 13,5 y el valor máximo es 17. Ahora si queremos realizar la diferencia entre la frecuencia y la densidad de los datos, colocamos cuatro tarjetas enumeradas en el lugar que le corresponden, para visualizar los valores de los datos.

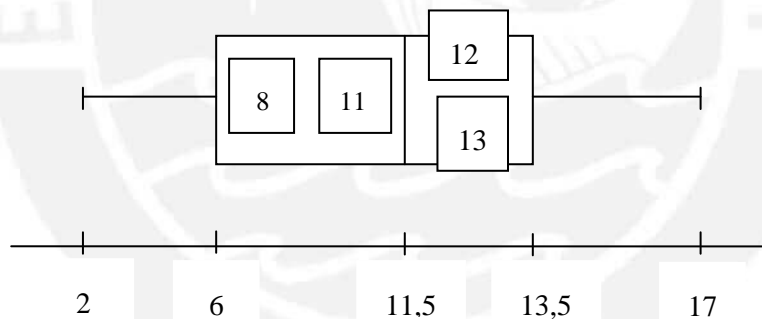


Figura 27. Diagrama de cajas con tarjetas

En la figura 27, observamos que en cada una de las partes del rectángulo hay dos datos, es decir tienen la misma cantidad de datos, pero la diferencia entre los valores de los datos en cada una de las partes es diferente, presentándose la menor diferencia, en la parte derecha del rectángulo. De esta manera lograremos realizar la diferencia entre frecuencia y densidad de los datos porque simultáneamente observamos la cantidad de datos y la diferencia que existe entre los datos en cada una de las dos partes del rectángulo.

Actividad 5

En la Actividad 5 (ver anexo) tenemos por objetivo que los profesores representen la variabilidad de los datos en un proceso de transnumeración, en donde harán uso de registros de representación semiótica, gráfico de puntos y el diagrama de cajas, para que realicen por medio de las aprehensiones perceptiva y discursiva del registro gráfico, el análisis de variación de los datos en torno a la mediana y los cuartiles, utilizando el geogebra.

Para el desarrollo de la actividad les presentamos los pesos de un grupo de 51 estudiantes (ver anexo) en un archivo de geogebra con el nombre peso.ggb en donde el peso de un estudiante es un valor atípico.

3.4 Análisis de las actividades

A continuación analizaremos cada una de las actividades, especificando el análisis previo y luego el análisis de resultados.

Actividad 4

Basados en las edades de los estudiantes de un aula, que se encuentra en las tarjetas, realice lo siguiente:

- a) Construya un gráfico de puntos para las edades de los estudiantes en un papelógrafo. (Solo utilice la mitad del papelógrafo)

El ítem a tiene el objetivo de construir el gráfico de puntos, lo cual será necesario para construir el diagrama de cajas.

Análisis previo del ítem a

En el ítem a, esperamos que los profesores realicen el gráfico de puntos, porque en la primera actividad ya graficaron el gráfico de puntos, y este gráfico se muestra en la figura 28.

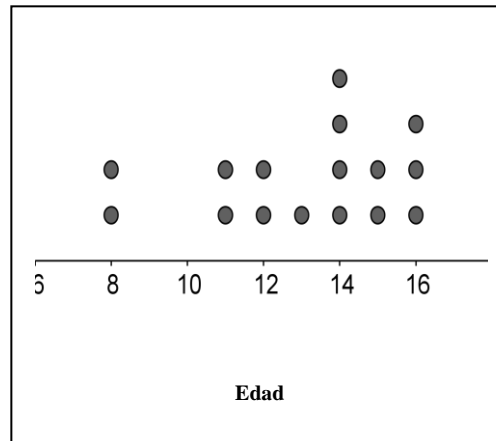


Figura 28. Gráfico de punto de las edades de los estudiantes

Análisis de resultados del ítem a

Grupo 1

Teniendo en cuenta las edades de los estudiantes que se encuentran en las 16 tarjetas, el grupo 1 construyó el gráfico de puntos, como se muestra en la figura 29, , sin embargo afirmamos que en la construcción del gráfico, el grupo 1 no tuvo cuidado en la escala del eje horizontal, al ubicar el 8 una unidad antes que 11, esto significa que los profesores al representar los números en el eje horizontal no consideraron que dicho eje está en correspondencia biunívoca con los números reales, en particular con los números enteros.

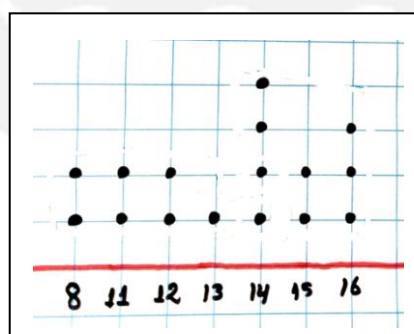


Figura 29. Gráfico de punto de las edades de los estudiantes realizado por el grupo 1

En este caso como la indicación dada es explícita para representar las edades mediante el gráfico de puntos, el grupo 1 realizó este gráfico con una deficiencia en la escala, pero por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico no se percataron de este error.

Por otro lado, al realizar un gráfico debemos tener en cuenta que es una herramienta para explorar los datos e identificar la información que encierra el conjunto de datos, por esa razón debemos tener cuidado en la construcción de un gráfico.

Grupo 2

En el ítem a, el grupo 2, a diferencia del grupo 1, primero organizó los datos realizando un conteo de estos, indicando la frecuencia para cada valor de la variable edad, como se muestra en la figura 30. Esto no lo habíamos previsto.

8	→	2
11	→	2
12	→	2
13	→	1
14	→	4
15	→	2
16	→	3
		<u>16</u>

Figura 30. Ordenamiento de las edades de los estudiantes.

Esto significa que este grupo desarrollo el proceso de transnumeración al pasar los datos desagrupados a una posible tabla de frecuencias con el objetivo de organizar los datos y obtener nuevas informaciones, como la frecuencia para cada valor de la variable edad. Luego a partir de esta nueva representación, construyen el gráfico de puntos, como se muestra en la figura 31, realizando el cambio de representación al pasar del registro tabular al registro gráfico.

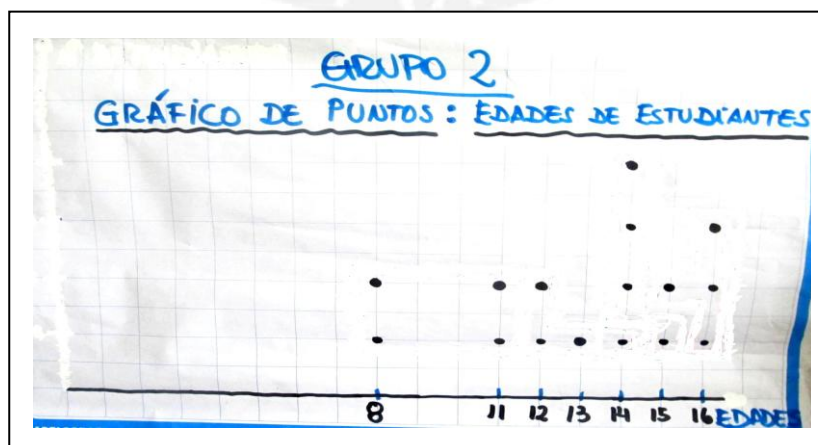


Figura 31. Gráfico de puntos de las edades de los estudiantes realizado por el grupo 2

El grupo 2 a diferencia del grupo 1 construyó el gráfico teniendo en cuenta la escala en el eje horizontal del gráfico. Además, este grupo realizó un proceso de transnumeración y conforme a Chick (2004) se identifica la técnica transnumerativa, tabulación.

Finalmente, se realizó la consolidación del ítem a debido a que uno de los grupos no ubicó en forma correcta los valores de la variable edad en el eje horizontal. Por ello se consolidó la importancia de realizar en forma correcta la construcción de un gráfico.

b) ¿Qué puedes decir acerca de la variación de las edades de los estudiantes, a partir de la representación realizada?

El ítem b tiene el objetivo de realizar el análisis de variación de las edades de los estudiantes por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos.

Análisis Previo del ítem b

En esta pregunta por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos, esperamos que los profesores identifiquen la edad mínima es 8 años, la edad máxima 16 años y el rango es igual a 8 años.

Análisis de resultados del ítem b

Grupo 1

Los profesores luego de observar el gráfico de puntos mostrado en la figura 29 y por medio de un discurso escrito como se muestra en la figura 32, afirmamos que movilizaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos, al afirmar que observan bastante dispersión de las edades, esto basado solo en la observación de los valores del eje horizontal y al considerar la diferencia entre los valores máximo y mínimo.

b) Se observa bastante dispersión de las edades, es así como tenemos la distancia entre el mayor y el menor es 8.

Figura 32. Respuesta al ítem b del grupo 1

Además, como los profesores deben describir la variación de las edades a partir del gráfico, ellos buscan una medida que describa esta variación calculando la diferencia entre los valores máximo y mínimo (figura 32), en este caso han realizado un proceso de transnumeración, al cambiar del registro gráfico al registro numérico con el objetivo de buscar más información de la variación de las edades, y esto nos permite identificar otra técnica transnumerativa, el cálculo de medidas de dispersión.

Grupo 2

Los profesores del grupo 2, primero calcularon la media utilizando la tabla de frecuencias (figura 27), y el procedimiento de este cálculo se muestra en la figura 33. Este procedimiento lo realizaron porque en la actividad 2 realizaron el análisis de la variación en torno a la media.

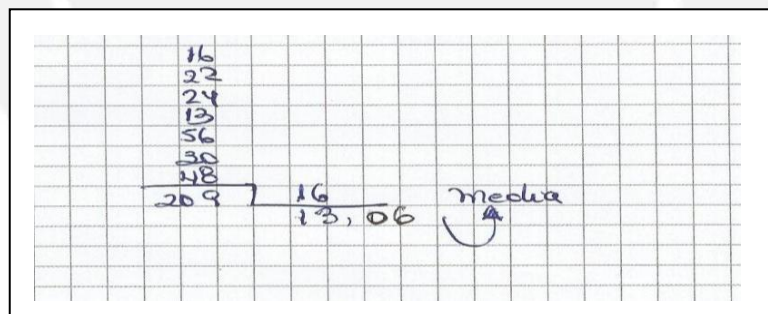


Figura 33. Cálculo de la media del grupo 1

Ahora de acuerdo, al discurso descrito en la figura 34, afirmamos que el objetivo de los profesores fue describir la variación en torno a la media. Esto no estuvo previsto.

b) En el gráfico de puntos, se observa que la edad 8 está más dispersa a la media.

Figura 34. Respuesta al ítem b del grupo 2

En la respuesta del grupo 2, podemos observar que los profesores describen la variación con respecto a la media, indicando que la edad 8 está más dispersa a la media, cuyo valor es 13,06, pero esta afirmación lo hicieron sin representar este valor en el gráfico de puntos, al parecer lo que hicieron es ubicar mentalmente este valor en el gráfico. Recordemos que en la actividad 2 representaron a la media en el gráfico de puntos con una recta vertical.

Sin embargo, movilizaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos cuando dicen: "...más dispersa...", esto significa que comparan como se encuentran los puntos en el gráfico, que corresponden a los valores de la variable edad mayores o iguales a 11 y los que corresponden a la edad 8 con respecto a la media.

De acuerdo con Wild y Pfaankuch (1999), la transnumeración está basada en el cambio de representaciones y esto permite comprender mejor una situación del mundo real mediante la extracción de información de las nuevas representaciones. El grupo 2 calculó la media para analizar como los valores de la variable edad se encuentran con respecto a la media, es decir que valores se encuentran más alejados o más cercanos a la media y de esa manera realizan la variación de los datos en torno a la media.

En el proceso de transnumeración del grupo 2 identificamos otra técnica transnumerativa, el cálculo de medidas de tendencia central.

Finalmente, se realizó la consolidación del ítem b debido a que cada uno de los grupos realizó la descripción de la variación de dos maneras diferentes a partir del gráfico de puntos.

Además se agrego que se puede realizar el análisis de variación en torno a la mediana.

- c) En base a las edades de los estudiantes, se piensa dividir al aula en dos grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo, ¿Cómo haría usted esta división en el gráfico?, ¿Cuál es el valor que divide al aula en dos grupos con el mismo número de estudiantes?

El ítem c tiene el objetivo de determinar la mediana de la distribución de las edades mediante la división del gráfico de puntos en dos grupos con el mismo número de estudiantes.

Análisis Previo del ítem c

En la pregunta c, esperamos que los profesores presenten la división en el gráfico de puntos, como se muestra en la figura 35.

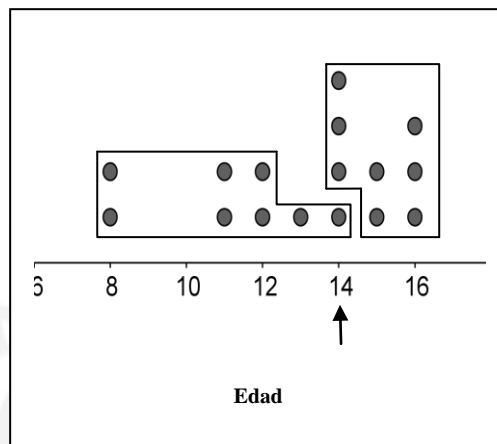


Figura 35. División en el gráfico de puntos en dos grupos iguales

Además deben calcular la mediana en base a la división realizada en el gráfico de puntos.

Análisis de resultados del ítem c

Grupo 1

De acuerdo al análisis previo, el grupo 1 logró la división en el gráfico de puntos en dos grupos con el mismo número de estudiantes, indicando que la posición del valor se encuentra entre los dos puntos que están encerrados en el rectángulo rojo, como se muestra en la figura 36.

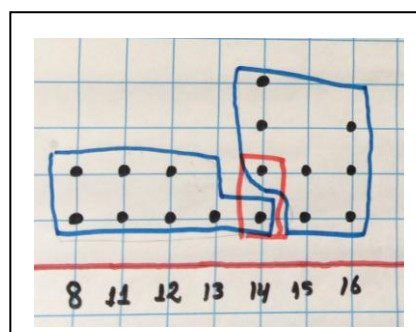


Figura 36. División del gráfico de puntos realizado por el grupo 1

Luego ellos identifican que el valor que solicitamos es la mediana, y calculan la mediana ordenando los datos en forma ascendente y como el número de datos es par, la mediana es la media de los términos centrales. En la figura 37, se muestra la respuesta del grupo 1.

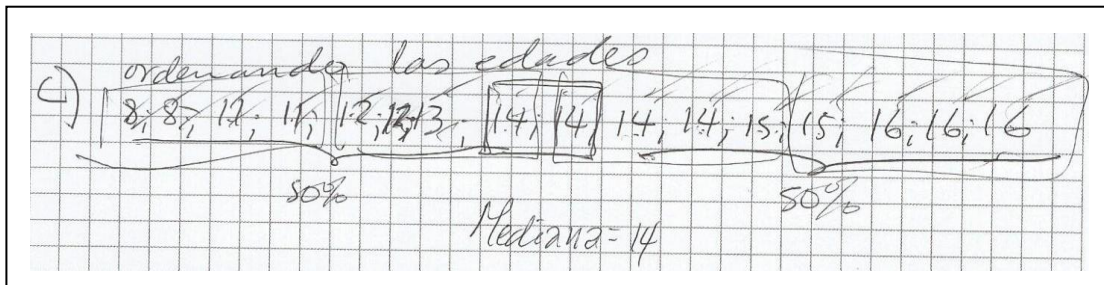


Figura 37. Respuesta al ítem c del grupo 1

En esta figura podemos observar que los profesores indican el procedimiento para hallar la mediana, pero no detallan que la mediana es la media de los términos centrales. Esto indica que los profesores lo calcularon mentalmente o tienen dificultad para calcular el valor de la mediana cuando el número de datos es par.

Sin embargo, este procedimiento desarrollado por los profesores, lo pudieron haber realizado solamente en el gráfico de puntos, por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico modificado, ya que en este gráfico los datos se encuentran ordenados y divididos en dos partes iguales.

Grupo 2

De igual manera el grupo 2 logró realizar la división en el gráfico de puntos, como se muestra en la figura 38.

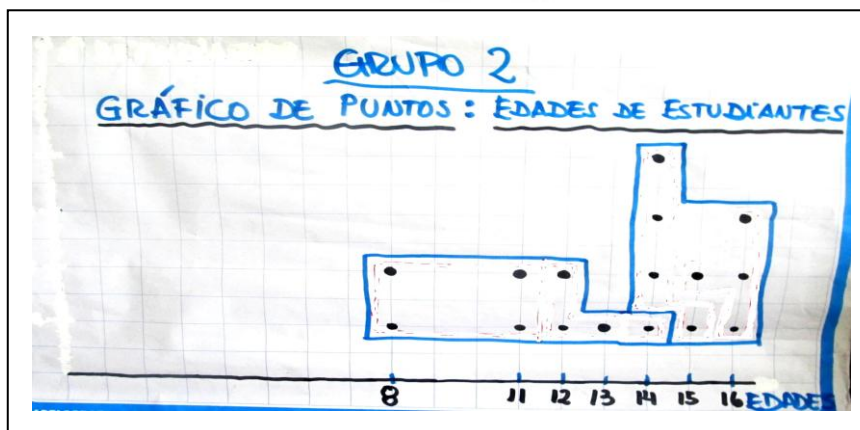


Figura 38. División del gráfico de puntos realizado por el grupo 2

Los profesores de este grupo 2, si lograron determinar el valor de la mediana a partir de la división en el gráfico de puntos. Esto evidencia que el grupo 2 movilizó la aprehensión perceptiva del gráfico modificado. Así mismo no tuvieron problemas para calcular el valor de la mediana, como se muestra en la figura 39, y de igual manera se identificó la técnica transnumerativa, el cálculo de la mediana.

Handwritten work on grid paper showing the calculation of the median for an even number of data points. The text reads: "La mediana 14 y 14" with a bracket underneath labeled "Términos Centrales". To the right, the calculation is shown: $(\frac{14+14}{2} = \frac{28}{2} = 14 = \text{Mediana})$.

Figura 39. Respuesta al ítem c del grupo 2

Los dos grupos conocían la mediana, el grupo 1 no cálculo la mediana del gráfico modificado, mientras el grupo 2 si lo hizo. Esto muestra que la utilización del gráfico como herramienta de análisis de datos en el proceso de transnumeración no es un recurso usual de los profesores. Esto lo evidenciamos cuando revisamos los libros que utilizan los estudiantes. Además, el grupo 1 presentó dificultades para hallar la mediana porque el número de datos es par y esto lo evidenciaremos en el siguiente ítem.

Finalmente, se realizó la consolidación del ítem c para tengan en cuenta que en el gráfico de puntos, los datos se encuentran ordenados y que cada punto representa una observación. Además el cálculo de la mediana se puede realizar directamente del gráfico de puntos.

- d) Ahora se piensa dividir al aula en cuatro grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo, ¿cómo haría usted esta división en el gráfico?, ¿cuáles son los valores que dividen al aula en cuatro grupos con el mismo número de estudiantes?, ¿ cómo se llaman esos valores?

El ítem d tiene el objetivo de determinar el primer y tercer cuartil de la distribución de las edades mediante la división del gráfico de puntos en cuatro grupos con el mismo número de estudiantes.

Análisis Previo del ítem d

En la pregunta d, esperamos que los profesores presenten el siguiente gráfico, como se muestra en la figura 40.

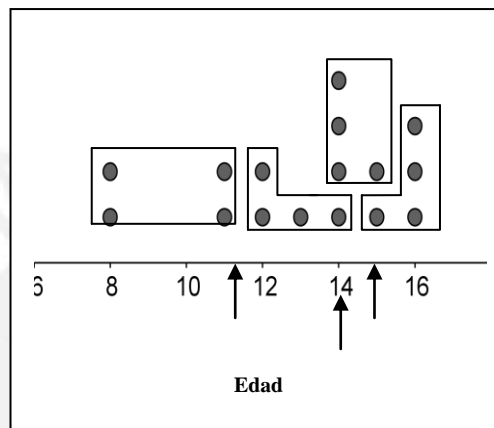


Figura 40. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales

Primer cuartil (Q1)=11,5; segundo cuartil (Q2)=14 y tercer cuartil (Q3)=15.

En base a las investigaciones de Canossa (2009), Amaral (2010) y Vieira (2008), las dificultades que pueden presentar los profesores es en ubicar los cuartiles en el gráfico, confundiendo las observaciones con el valor de los cuartiles y la otra dificultad sería en el cálculo de los cuartiles.

Análisis de resultados del ítem d

Grupo1

En la pregunta d, el grupo 1 presentó el siguiente gráfico, como se muestra en la figura 41.

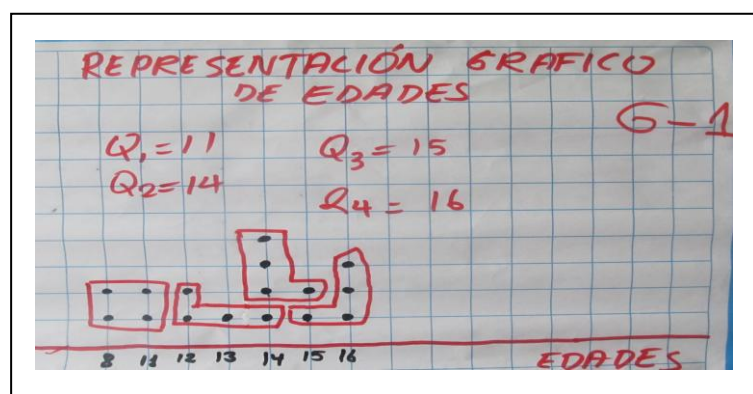


Figura 41. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales realizado por el grupo 1

Como observamos en la figura 41, los profesores realizaron la división en el gráfico de puntos en forma correcta, conforme al análisis previo. Para el cálculo de los cuartiles, tuvieron dos dificultades, la primera dificultad fue en el número de cuartiles, ellos indicaron cuatro cuartiles como observamos en la figura; la segunda dificultad fue en el cálculo del primer cuartil como observamos en el procedimiento escrito en la figura 42 y eso fue previsto en el análisis previo. De la misma forma, Canossa (2009) pudo evidenciar esta dificultad en su trabajo de investigación.

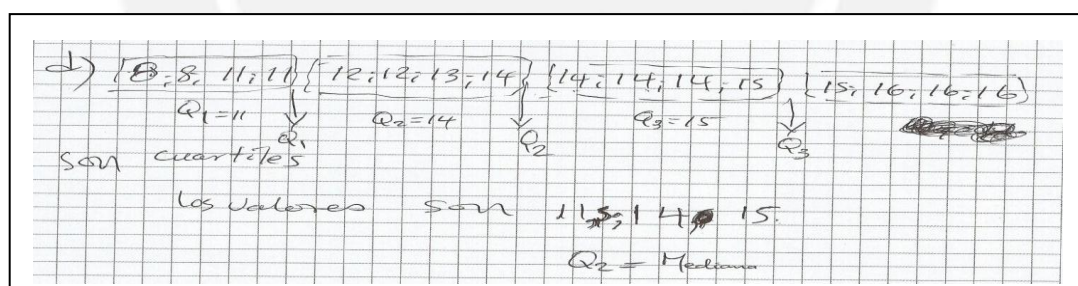


Figura 42. Respuesta al ítem d del grupo 1

En la figura 42, observamos el procedimiento que siguieron los profesores para hallar los cuartiles, de acuerdo a esto afirmamos que los profesores tiene la dificultad de hallar la mediana cuando el número de datos es par. Por ejemplo para hallar el primer cuartil, que es la mediana de los primeros ocho datos ordenados en forma ascendente, cuyos términos centrales son: 11 y 12, indican que el primer cuartil (Q_1) es 11(cuarto término), esto significa que los profesores no calcularon la media de los términos centrales, en cambio para el cálculo del

segundo y tercer cuartil aparentemente no se equivocaron porque los términos centrales son iguales, esto se puede observar en la figura 42. Esto evidencia la dificultad que tienen los profesores en el cálculo de los cuartiles y esta misma dificultad fueron encontrados por Canossa (2009), Amaral (2010) y Vieira (2008).

Para resolver la primera dificultad, el investigador intervino con la siguiente pregunta, ¿cuántos cortes es necesario hacer para dividir un segmento en cuatro partes iguales?, y ellos contestaron que es necesario realizar tres cortes, esta pregunta les ayudo para darse cuenta que un conjunto de datos tiene tres cuartiles. A los profesores les crea confusión la palabra cuartil. Esta dificultad no estuvo prevista.

Grupo 2

De acuerdo al análisis previo, los profesores del grupo 2 realizaron la división en el gráfico de puntos en forma correcta, como se observa en la figura 43.

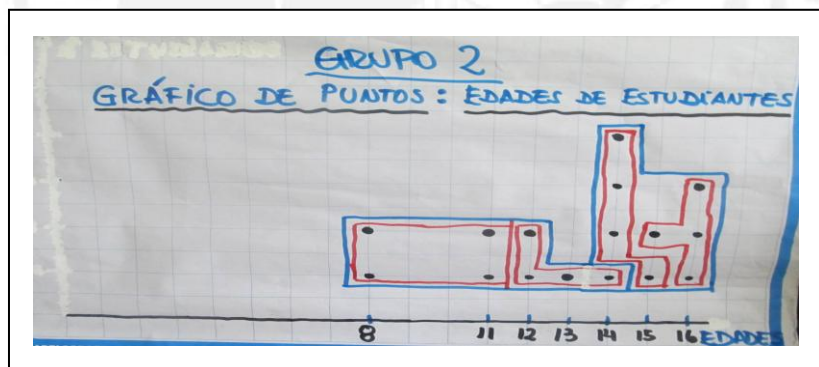


Figura 43. División del gráfico de puntos en cuatro partes iguales realizado por el grupo 2

Los profesores del grupo 2 por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico modificado de puntos, calcularon los cuartiles como lo indican en la figura 44.

d) El orden establecido en el gráfico de punto.
11,5 ; 14 ; 15,5

Figura 44. Respuesta al ítem d del grupo 2

En el figura 44, observamos que el valor del tercer cuartil es 15,5, pero este valor no es el correcto, esto significa que se equivocaron en el cálculo del tercer cuartil, esto podría haber sucedido porque de acuerdo a la división que realizaron en el gráfico de puntos (figura 43) ellos consideraron como términos centrales al 15 y 16 y lo correcto es 15 y 15.

Finalmente, se realizó la consolidación del ítem d para señalar que un conjunto de datos tiene tres cuartiles, señalando que la mediana el segundo cuartil y que para el cálculo del primer cuartil y tercer cuartil se utiliza la misma metodología para calcular la mediana en cada uno de los grupos con la misma cantidad de observaciones.

- e) Ubique en un eje horizontal paralelo al eje horizontal del gráfico de puntos, los valores encontrados hasta el momento. (Esto debe realizarlo en la otra mitad del papelógrafo). También ubique el valor mínimo y máximo.
- f) Ahora trace un rectángulo que abarque el 50% de los datos que se encuentran en el centro, a continuación divida el rectángulo trazando una línea vertical que ubique la mediana, y luego trace dos segmentos horizontales, uno desde el valor mínimo a una de los lados del rectángulo y el otro desde el otro lado al valor máximo.

Los ítems e y f tienen el objetivo de construir el diagrama de cajas o Box-plot.

Análisis previo de los ítems e y f

En la preguntas e y f esperamos que los profesores ubiquen la mediana y los cuartiles en la recta numérica y luego trazan el rectángulo que abarca el 50% de datos que se encuentra en el centro, como se muestra en la figura 45.

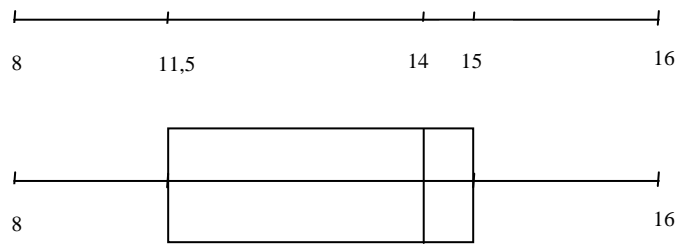


Figura 45. Construcción del diagrama de cajas

En base a las investigaciones de Canossa (2009), la dificultad que pueden presentar es la interpretación del 50% de los datos que se encuentran en el centro, para esto los profesores deben interpretar cada uno de los cuartiles. En todo este proceso de transnumeración a los profesores les ayudamos a desarrollar la aprehensión secuencial del diagrama de cajas, ya que les indicamos la secuencia a seguir para la construcción del diagrama de cajas a partir del gráfico de puntos.

Análisis de resultados de los ítems e y f

Para el desarrollo de los ítem, e y f, los profesores volvieron a graficar el gráfico de puntos en la mitad de un papelógrafo, luego siguieron las instrucciones para construir el diagrama de cajas.

Los profesores del grupo 1 y del grupo 2 lograron construir el diagrama de cajas a partir del gráfico de puntos como se muestran en las figuras 46 y 47 respectivamente.

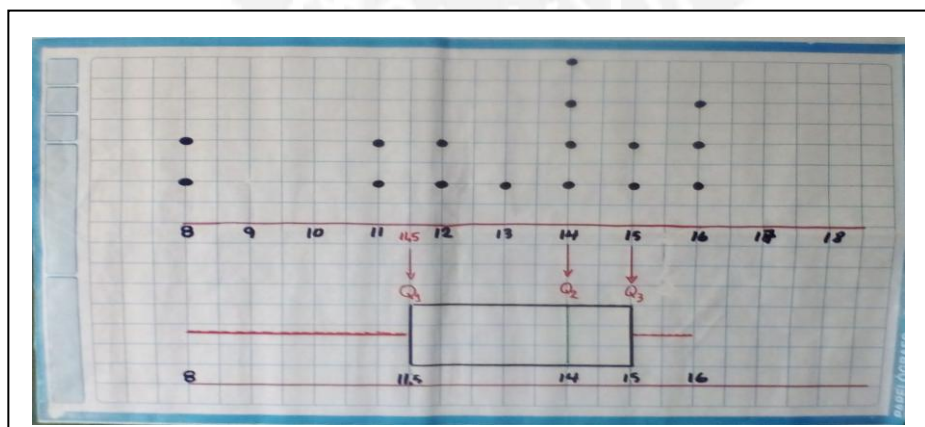


Figura 46. Construcción del diagrama de cajas del grupo 1

Por lo tanto, los profesores desarrollaron la aprehensión secuencial, ya que siguieron todos los pasos para graficar el diagrama de cajas a partir del gráfico de puntos.

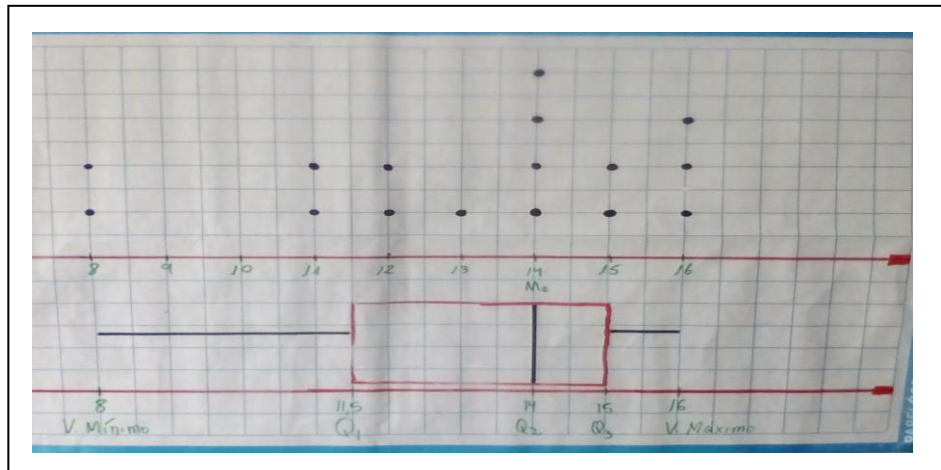


Figura 47. Construcción del diagrama de cajas del grupo 2

Por otro lado, observamos que en la figura 47, el grupo 2 describe en el diagrama de cajas los cinco números: valor mínimo, el primer cuartil (Q_1), la mediana (Q_2), el tercer cuartil (Q_3) y valor máximo, esto significa que los profesores están movilizando la aprehensión discursiva.

Ahora, de acuerdo a Wild y Pfannkuch (1999), los profesores al haber cambiado la representación de los datos, del gráfico de puntos al diagrama de cajas, se evidencia que los profesores están realizando la transnumeración (por indicaciones de la actividad) que genera más comprensión por las nuevas informaciones que brinda el nuevo gráfico.

Finalmente, se realizó la consolidación de los ítems e y f indicándoles a los profesores que el gráfico que construyeron se llama Box-plot o diagrama de cajas y que a partir de este gráfico podemos describir los cinco números: valor mínimo, el primer cuartil (Q_1), la mediana (Q_2), el tercer cuartil (Q_3) y valor máximo.

- g) Ahora pegue las tarjetas en una de las partes del rectángulo que le corresponde
¿considera que esta nueva representación de las edades nos brinda más información sobre la variación de los edades? . Explique.

El ítem g tiene el objetivo de describir la concentración y dispersión de las edades por medio de la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas y describir los cinco números por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas.

Análisis previo del ítem g

En el ítem g, esperamos que los profesores peguen cuatro tarjetas en cada una de las dos partes del rectángulo. Luego al observar las tarjetas pegadas, esperamos que los profesores logren diferenciar entre la cantidad de datos (frecuencia) y la diferencia que hay entre los datos dentro de cada parte del rectángulo (densidad de datos) y logren describir la concentración y dispersión de los datos en la caja por medio de la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas. Además permitirá comprender las características del nuevo gráfico y además describirán los valores mínimo, máximo, la mediana y los cuartiles, por medio de la aprehensión discursiva.

Análisis de resultados del ítem g

Los profesores de los grupos 1 y 2 pegaron las tarjetas en cada una de las partes del rectángulo, como observamos en la figuras 48 y 49 respectivamente, distribuyeron ocho tarjetas de la siguiente manera: en el lado izquierdo pegaron tres tarjetas y en el lado derecho cinco tarjetas, cuando a cada parte le correspondía cuatro tarjetas.

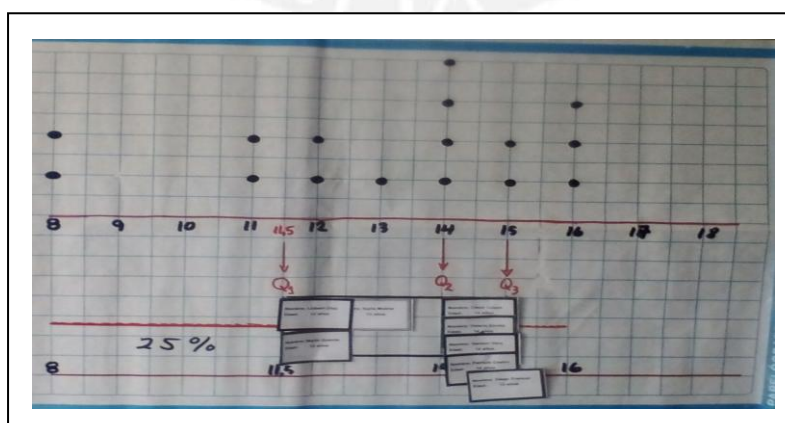


Figura 48. Pegado de tarjetas del grupo 1

Así mismo, por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos identificaron las tarjetas que pegaron en ambas partes de la caja, pero como la edad 14 es la mediana, pertenece al conjunto de datos y divide a la caja, esto confundió a los profesores en la distribución de las tarjetas, y no se percataron que observando el diagrama de cajas, cada parte debería tener cuatro tarjetas.

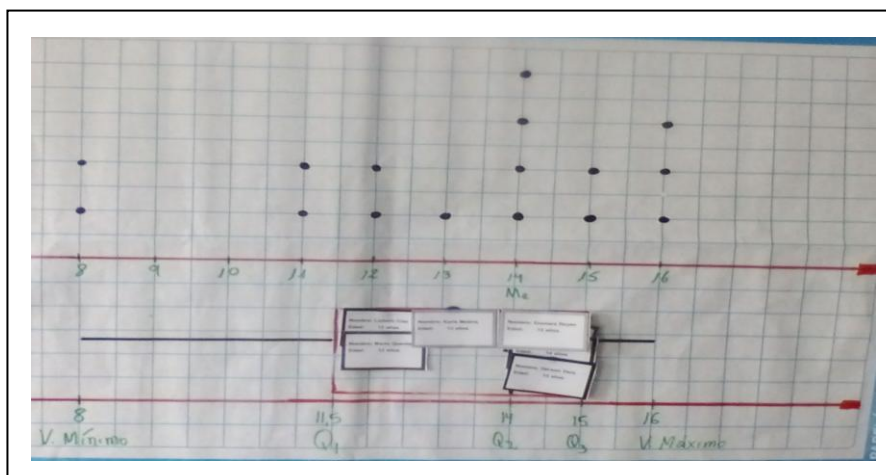


Figura 49. Pegado de tarjetas del grupo 2

En seguida, los profesores reacomodaron las tarjetas, cuatro en cada parte y luego al visualizar el diagrama de cajas se generó la discusión sobre la diferencia de los tamaños de las dos partes de la caja, que sería la otra nueva información que presenta el diagrama de cajas, de ahí presentamos el siguiente diálogo:

Alberto: Si en las dos partes de la caja hay la misma cantidad de datos, ¿por qué hay diferencia entre los tamaños de las dos partes de la caja?

Investigador: Observen los datos de las tarjetas o el gráfico de puntos.

Mario: En la primera parte, las edades son 12,12,13 y 14 y en la segunda parte son 14,14,14 y 15.

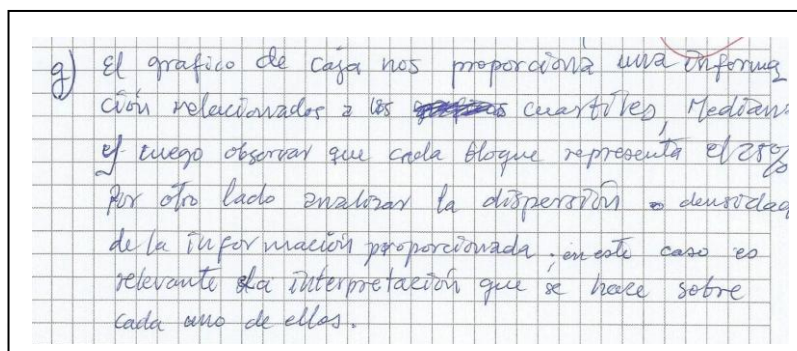
Leandro: En la primera parte las edades están más separadas que en la segunda parte.

Alberto: Es decir en la primera parte están más dispersas y en la otra más concentradas.

Alberto: En la segunda parte las edades son más densas.

Las tarjetas ayudaron a diferenciar la cantidad de datos con la densidad de los datos, es decir en cada parte hay la misma cantidad de datos pero la diferencia está en que tan cercano se encuentran los datos y esto lo realizaron por medio de la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas.

Luego la respuesta al ítem g de los profesores del grupo 1 se detalla en la figura 50.

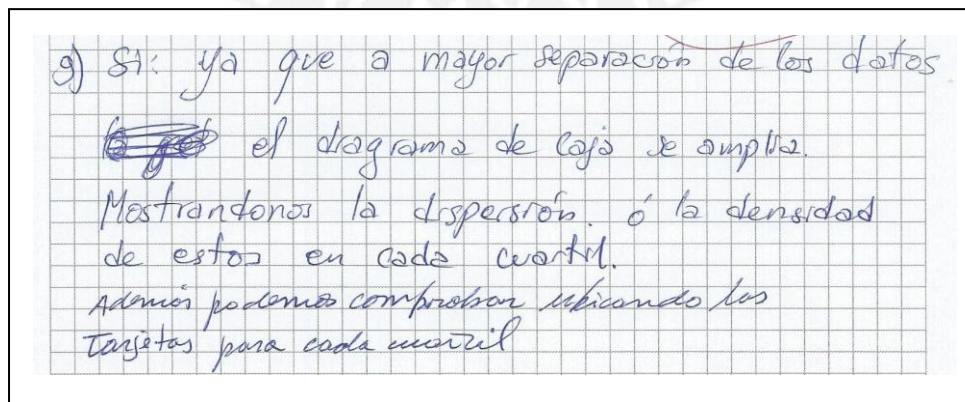


g) el grafico de caja nos proporciona una información relacionada a los ~~cuartiles~~ cuartiles, Mediana y luego observar que cada bloque representa el 25% por otro lado analizar la dispersión o densidad de la información proporcionada, en este caso es relevante la interpretación que se hace sobre cada uno de ellas.

Figura 50. Respuesta al ítem g del grupo 1

La respuesta de los profesores del grupo 1 indica que están describiendo la variación de las edades por medio de las aprehensiones discursiva del diagrama de caja porque indican que la nueva información que proporciona este nuevo gráfico son los cinco números y la dispersión de los datos.

Por otro lado, la respuesta al ítem g de los profesores del grupo 2 se muestra en la figura 51.



g) Si: ya que a mayor separación de los datos ~~el~~ el diagrama de caja se simplifica. Mostrándonos la dispersión o la densidad de estos en cada cuartil. Además podemos comprobar ubicando los tarjetas para cada cuartil.

Figura 51. Respuesta al ítem g del grupo 2

En la respuesta de los profesores del grupo 2, describen la dispersión o concentración de los datos por medio de la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas.

Finalmente, se realizó la consolidación del ítem g, indicándoles la estructura del diagrama de cajas y la información que se observa, los valores mínimo y máximo y los cuartiles.

h) Ahora grafique simultáneamente con el geogebra el diagrama de cajas y el gráfico de puntos para las edades de los estudiantes, ¿qué relación observas entre los gráficos con respecto a la variación de las edades?

El ítem h tiene el objetivo relacionar el gráfico de puntos con el diagrama de cajas.

Análisis previo del ítem h

Primero, los profesores deben percatarse que a partir del gráfico de puntos se ha graficado el diagrama de cajas y este es un resumen de la distribución de datos donde se especifica cinco valores: mínimo, máximo, cuartil 1, mediana y cuartil 3. Este cambio de representación busca nuevas informaciones sobre los datos, reorganizando los datos en función de los cuartiles y los valores mínimo y máximo; segundo, visualizando ambos gráficos se describe la concentración y dispersión de los datos. Para analizar la relación que existe entre dos gráficos los profesores realizarán la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión discursiva del diagrama de cajas.

Análisis de resultados del ítem h

Grupo1

La respuesta de los profesores del grupo1, se muestra en la figura 52, donde afirman que en el gráfico de puntos observan la ubicación de las edades, esto lo identifican por medio de la aprehensión perceptiva de este gráfico y de la misma manera la aprehensión discursiva del diagrama de cajas cuando indican la ubicación de los cuartiles y la mediana.

h) En el gráfico de puntos se observa la ubicación de las edades y en el gráfico por cajas no proporciona la ubicación de los cuartiles y la mediana y el grado de dispersión o de densidad.

Figura 52. Respuesta al ítem h del grupo 1

Por otro lado, detallan sobre la concentración y dispersión de las edades en el diagrama de cajas, pero no se percatan que el diagrama de cajas es una reorganización de los datos en función de los cinco números, a pesar de haber desarrollado la comprensión secuencial.

Grupo 2

Los profesores del grupo 2 describen el porcentaje de datos en cada parte del diagrama de cajas por medio de la comprensión perceptiva del diagrama de cajas, así lo muestra la respuesta en la figura 53, y no identifican los cuartiles ni los valores mínimo y máximo.

h) Cada espacio representa el 25% de los datos.
En el diagrama de caja se encuentran el 50% de los datos.

Figura 53. Respuesta al ítem h del grupo 2

En la segunda línea del texto, de la figura 53, afirman que en el diagrama de caja se encuentran el 50% de los datos, lo que quisieron afirmar fue que el 50% de los datos se encuentran entre el primer cuartil y el tercer cuartil, pero de todas maneras por medio la comprensión discursiva del diagrama de cajas están indicando una propiedad del diagrama de cajas. Al respecto Vieira (2008) afirma que la comprensión discursiva se da cuando el individuo explica las propiedades de un gráfico estadístico, además interpreta e identifica relaciones entre ellas. En este caso al grupo 2 le falta interpretar los cuartiles e identificar los valores mínimo y máximo.

En conclusión, los dos grupos no relacionaron los dos gráficos, a pesar de haber desarrollado la aprehensión secuencial, pero si desarrollaron la aprehensión discursiva del diagrama de cajas identificando solo algunas características del gráfico.

Finalmente se hizo la consolidación del ítem g, estableciendo que la relación entre los dos gráficos está dada por su construcción, porque a partir del gráfico de puntos construimos el diagrama de cajas, y por el análisis de variación de los datos, ya que observando ambos gráficos podemos diferenciar la frecuencia con la densidad de datos.

i) ¿ Qué modificaciones realizarías en la distribución de las edades para hacer variar el diagrama de caja ?

El objetivo del ítem i es comprender el diagrama de cajas para el análisis de variación de datos.

Análisis previo del ítem i

Esperamos que los profesores realicen los cambios observando simultáneamente el gráfico de puntos y el diagrama de cajas con el objetivo de variar este gráfico. Algunos cambios que pueden realizar son los siguientes: 1) cambiar los valores mínimo y máximo para hacer variar los bigotes del diagrama de caja, 2) cambiar los valores que se encuentran entre dos cuartiles para cambiar la longitud de la caja. En este proceso se desarrolla la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos, y las aprehensiones perceptiva y discursiva del diagrama de cajas.

Análisis de resultados del ítem i

Grupo1

Los profesores del grupo 1 realizan los siguientes cambios, de acuerdo a las siguientes diálogos entre los profesores.

Alberto: Las dispersiones de la izquierda deben de acercarse más, ponle 10 en vez de 8 y al otro 8 ponle también 10.

En la figura 54 se presenta los cambios realizados por los profesores en el geogebra y Mario realiza el siguiente comentario

Mario: El bigote se acerca, porque antes el 8 estaba muy separado.

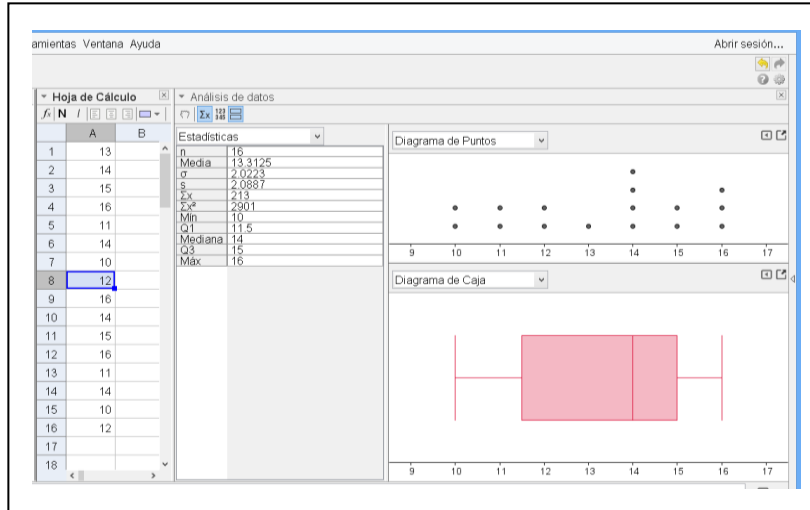


Figura 54. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1

En este caso, el grupo1 cambio el valor mínimo y Mario realiza este comentario observando los dos gráficos, percibiendo que al aumentar el valor mínimo de la edad, de 8 a 10, en el diagrama de cajas el bigote se hace más corto y esto lo realiza por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas.

Alberto: En vez de 11 ponle 13

Después de realizar este cambio dicho por Alberto en el geogebra, en la figura 55 se presenta de cómo cambia el diagrama de cajas y el gráfico de puntos; y el comentario de Mario es el siguiente: Mario: La caja también se acorta.

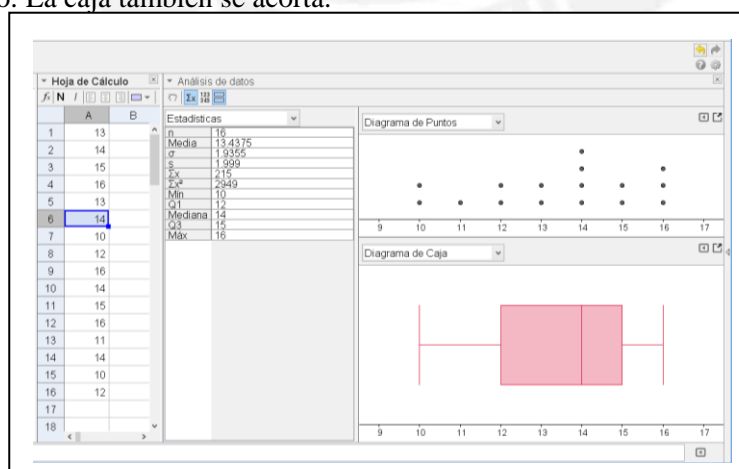


Figura 55. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1

En este caso la longitud de la caja disminuye, Mario percibe ese cambio observando el diagrama de cajas por medio de la aprehensión perceptiva.

Luego el siguiente cambio que realizan lo describe el siguiente diálogo.

Alberto: Ahora ponle 4 por 10.

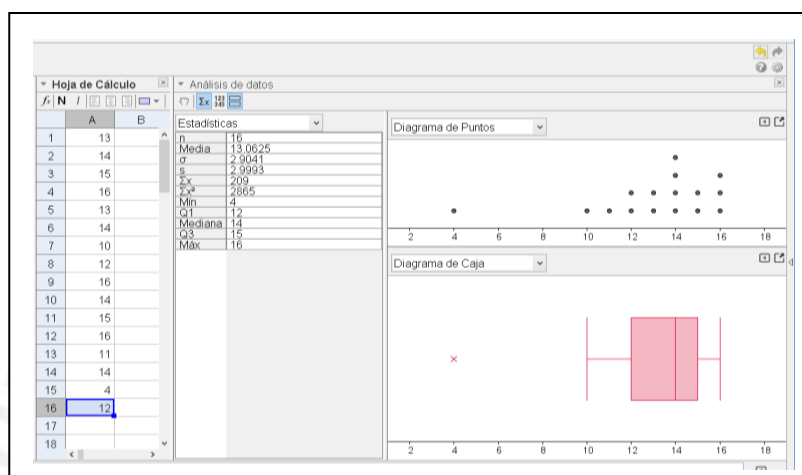


Figura 56. Cambio de dato en el geogebra del grupo 1

Luego observan el cambio en el geogebra como se muestra en la figura 56 y se desarrolla el siguiente diálogo:

Alberto: El valor escapa porque el recorrido es demasiado extenso, y ¿por qué cuando cambiamos al 10 por 4, en el diagrama de cajas aparece una x?

Investigador: Observen el gráfico de puntos.

Mario: Ese valor está muy alejado de los demás datos.

Investigador: Ese valor se llama valor atípico.

Alberto: Hay mucha dispersión porque el recorrido es muy grande.

Mario realiza este comentario en base a la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos, pero el comentario de Alberto se basa en una medida de dispersión, el rango, y esto lo realiza por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos.

Este último cambio realizado por los profesores no estuvo previsto en el análisis previo, pero sirvió para que a través de las aprehensiones de los gráficos describan un valor atípico de una distribución de datos.

Por otro lado, después de realizar estos cambios, el profesor Alberto realiza el siguiente comentario:

Alberto: De esta forma hacemos razonar a los chicos.

El profesor Alberto resalta que este tipo de actividad ayudaría a los jóvenes a desarrollar el pensamiento estadístico.

Finalmente la respuesta al ítem i se muestra en la figura 57

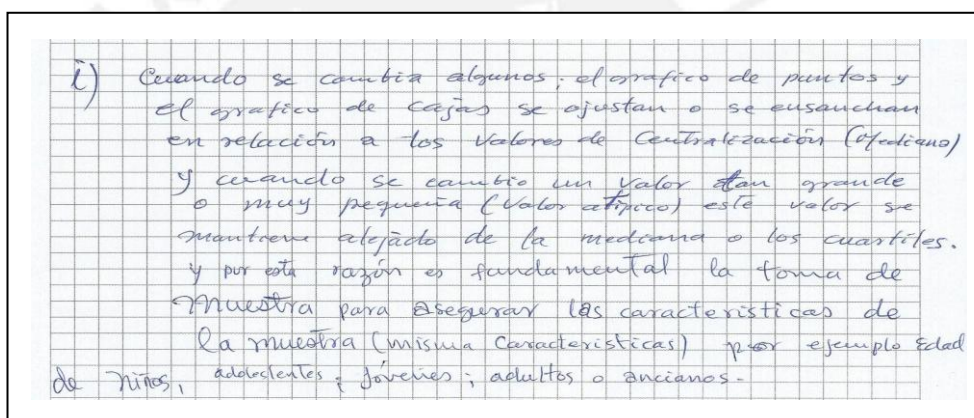


Figura 57. Respuesta al ítem i del grupo 1

Después que los profesores del grupo 1 realizaron los diferentes cambios en los datos, dan su respuesta al ítem i, describiendo los cambios que observaron en el diagrama de cajas, por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y del diagrama de cajas.

Además describen el valor atípico como un valor muy alejado de los demás valores y esta descripción lo lograron por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión perceptiva del diagrama de cajas, y en las últimas líneas del párrafo tratan de explicar porque aparecen los valores atípicos.

Grupo2

Ahora presentamos el diálogo entre los profesores del grupo 2.

Leandro: Cambia el 16 por el 20.

Juan: El bigote de la derecha cambia y la mediana no cambia.

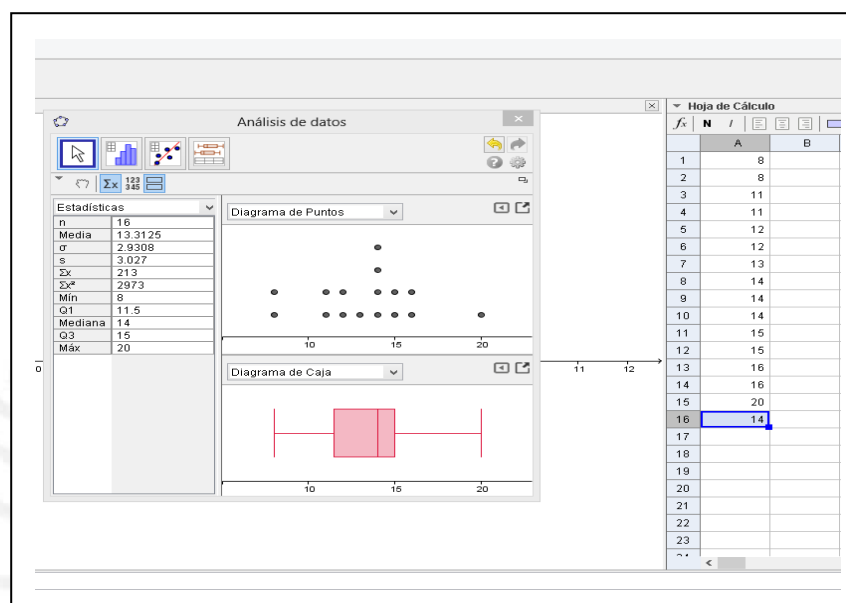


Figura 58. Cambio de dato en el geogebra del grupo 2

En la figura 58 observamos el cambio realizado por los profesores, en este caso Juan realiza ese comentario por medio de la comprensión discursiva del diagrama de cajas, al mencionar que la mediana no cambia, y la comprensión perceptiva de este mismo gráfico cuando afirma que el bigote de la derecha cambia.

Después restablecen el dato inicial y a continuación cambian el 8 por 10, como se muestra en la figura 59, Juan ante este cambio, afirma que los cuartiles no cambian y además agrega que los cuartiles no son afectados por los valores extremos. En este caso Juan por medio de la comprensión discursiva afirma que los cuartiles no cambian.

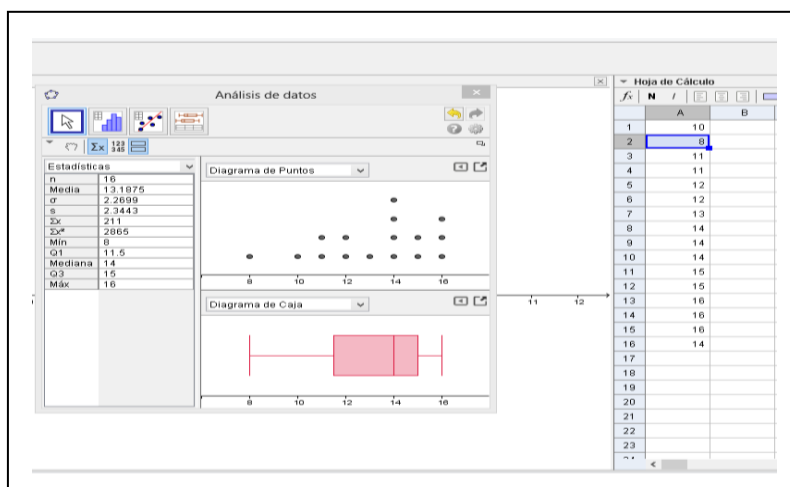


Figura 59. Cambio de dato en el geogebra del grupo 2

Finalmente, la respuesta del grupo 2 se muestra en la figura 60.

i) Los valores extremos no afectan los cuartiles
 En 16 lo cambiamos por 20

Figura 60. Respuesta al ítem i del grupo 2

El grupo 2 no responde a la pregunta a pesar de haber observado los cambios en el diagrama de cajas, pero llegan a la conclusión de que los valores extremos no afectan los cuartiles.

Finalmente, en la consolidación del ítem i se presentaron los diferentes cambios realizados por los profesores, resaltando lo que significa un valor atípico en un conjunto de datos.

Actividad 5

El director de una Institución Educativa del pueblo de Huachinga, anexo de Huaral, preocupado por la alimentación de sus 51 estudiantes, con edades desde 13 hasta 15 años, decide enviar un informe de los pesos(en kg.) de los estudiantes a la directora ejecutiva del Programa Nacional de Alimentación Escolar Qali Warma, con el objetivo de que los almuerzos que ofrecen ayude a la buena nutrición de los estudiantes. Para contestar las siguientes preguntas abra el archivo PESO.ggb

- a) ¿De qué manera puedes representar la variación de los pesos de los estudiantes?

El objetivo del ítem a es la representación gráfica de los pesos de los estudiantes usando el geogebra.

Análisis previo del ítem a

En la pregunta a, esperamos que los profesores realicen diferentes representaciones de la distribución de pesos en registro gráfico, teniendo en cuenta que los profesores conocen diferentes gráficas estadísticas, las posibles representaciones en el registro gráfico se muestran en las figuras 61 y 62.

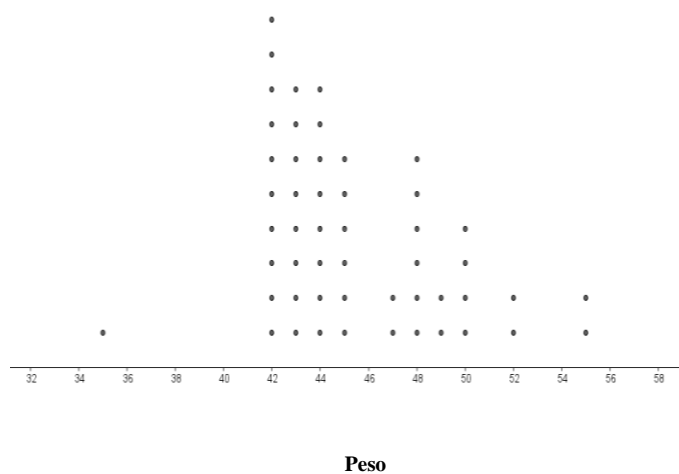


Figura 61. Gráfico de puntos de los pesos de los estudiantes

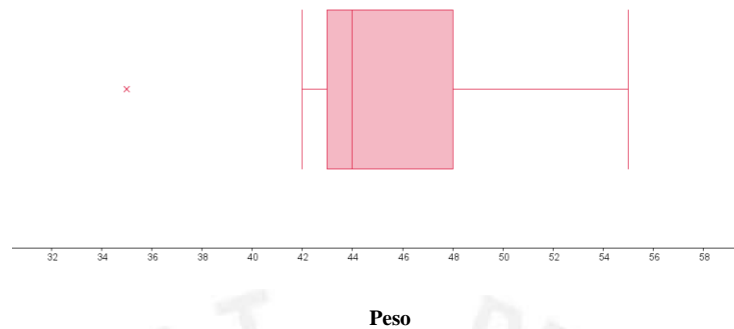


Figura 62. Diagrama de cajas de los pesos de los estudiantes

En este proceso de transnumeración lo que se busca es realizar el análisis de variación de los pesos y el cambio de representación que realizarán es al registro gráfico, esto es porque en la anterior actividad trabajaron el gráfico de puntos y diagrama de cajas.

Análisis de resultados del ítem a

Los dos grupos presentan los dos gráficos en el geogebra, como se muestra en la figura 63 y además las medidas estadísticas.

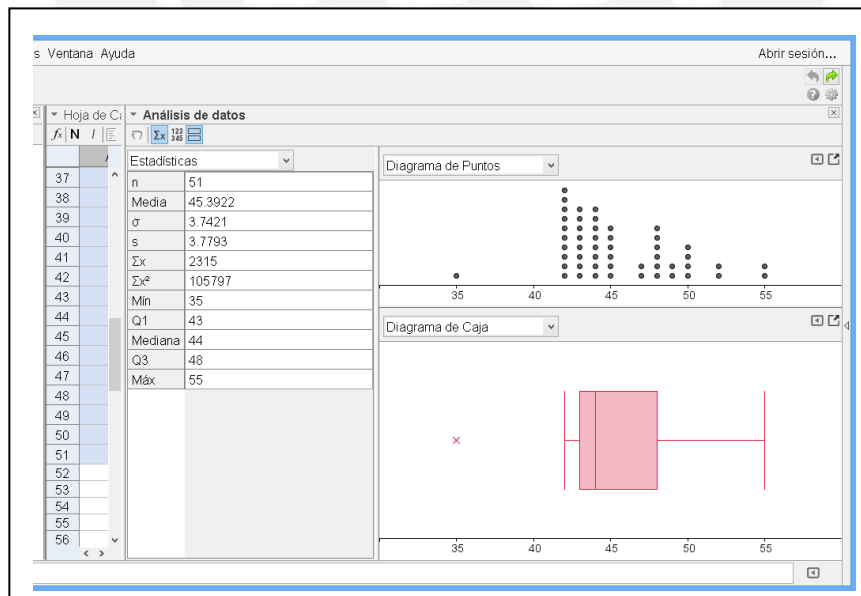


Figura 63. Diagrama de cajas y gráfico de puntos de los pesos

de los estudiantes en el geogebra

Los grupos 1 y 2 representaron el conjunto de datos mediante el gráfico de puntos y el diagrama de cajas con la intención de describir la variación de los pesos de los estudiantes, esto significa que los dos grupos desarrollaron el proceso de transnumeración y como evidencia de este proceso utilizaron la técnica transnumerativa de la graficación, usando el geogebra.

b) ¿ Qué puedes decir acerca de la variación de los pesos de los estudiantes, a partir de las representaciones realizadas?

El objetivo del ítem b es percibir y describir la variación de los pesos de los estudiantes.

Análisis previo del ítem b

En ítem b, esperamos que los profesores al observar los gráficos se percaten que hay un estudiante que tiene un peso muy bajo y está muy alejado de los demás pesos de los otros estudiantes, siendo este un valor atípico, que puede ser visualizado tanto en el diagrama de cajas como en el gráfico de puntos. Así como también identificarán los valores de los cuartiles: la mediana igual a 44 kg, primer cuartil igual a 43 kg, tercer cuartil igual a 48 kg, el valor mínimo igual a 35 kg, el valor máximo igual a 55 kg, y dar más detalles sobre la concentración y dispersión de los datos en el diagrama de cajas. En todo este proceso de transnumeración, se realizará la descripción de la variación de los pesos por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión discursiva del diagrama de cajas.

Análisis de los resultados del ítem b

Grupo 1

A continuación presentamos el diálogo entre los profesores del grupo 1

Alberto: Hay mayor densidad entre los pesos de 42 a 44 kg.

Mario: El 50 % de los pesos está concentrado entre 43 y 48 kg.

Estos dos profesores están describiendo la variación de los pesos por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas, indicando algunas características de la concentración y la dispersión de los pesos entre los cuartiles, pero no dicen nada de la presencia del valor atípico. En la figura 64 se muestra la respuesta a este ítem por parte del grupo 1

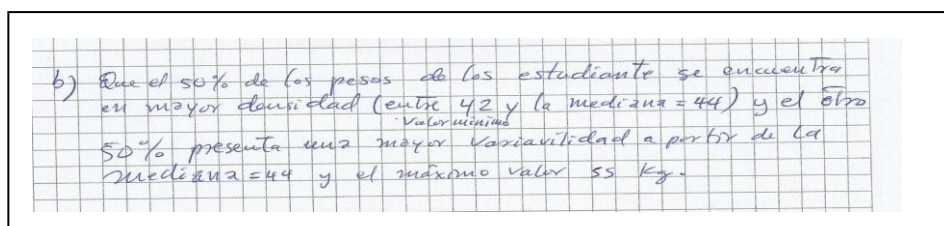


Figura 64. Respuesta al ítem b del grupo 1

De acuerdo a esta respuesta, los profesores de este grupo por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas, identifican: el valor mínimo, el valor máximo y la mediana. Por otro lado, en el primer párrafo de la respuesta indican que el 50% de los pesos de los estudiantes se encuentra entre 42 y 44 kg., sin considerar como parte de ese porcentaje de estudiantes, al estudiante de peso igual a 35 kg., además este es el valor mínimo y un valor atípico de los pesos de los estudiantes, esta dificultad no estuvo previsto en el análisis previo y esto sucede porque no lo identifican por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y el diagrama de cajas.

Grupo 2

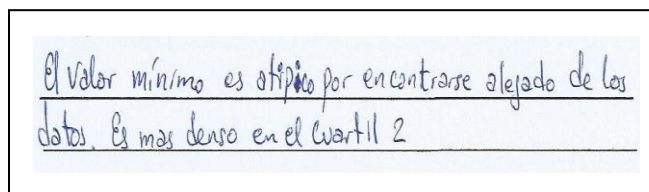
De la misma manera que el anterior grupo, presentamos el diálogo de los profesores.

Leandro: El peso mínimo es 35 kg, y el máximo 55 kg; y los pesos están concentrados entre 42 y 44 kg.

Juan: Hay un valor atípico y la mayor concentración se encuentra entre 43 y 44 kg.

Los dos profesores describen la variación de los pesos movilizando la aprehensión perceptiva en el gráfico de puntos y la aprehensión discursiva del diagrama de caja, realizando las descripciones de los valores mínimo, máximo, las concentraciones de los datos y el valor atípico.

Finalmente la respuesta del grupo 2 se muestra en la figura 65.



El valor mínimo es atípico por encontrarse alejado de los datos. Es más denso en el cuartil 2

Figura 65. Respuesta al ítem b del grupo 2

El grupo 2, a pesar de sus comentarios de la variación de los pesos, por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas, la respuesta que brindan no es muy detallada sobre la variación de los pesos, ya que por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos solo indican que el valor mínimo es atípico por encontrarse alejado de los datos.

Además, en la última línea del párrafo describen la densidad de los datos pero solo con respecto a un cuartil, lo cual no es correcto a pesar que en los diálogos describen en forma correcta. Esto evidencia que tienen dificultades en la interpretación de los cuartiles.

Por otro lado, la tercera fase del proceso de transnumeración ocurre cuando comunicamos a otros las nuevas informaciones obtenidas acerca del mundo real. El grupo 2 tiene la dificultad para realizar esta comunicación.

Finalmente, en la consolidación del ítem b, se detalló la descripción de la variación de los pesos a partir del diagrama de cajas.

c) ¿Qué medidas considera que permitirán a la directora determinar el tipo de almuerzo que debe enviar a la Institución Educativa?

Análisis previo del ítem c

Se espera que los profesores consideren que la descripción de la variación de los pesos se debe realizar teniendo como medidas características a los cuartiles representados en el diagrama de cajas y descritos por medio de la aprehensión discursiva.

La dificultad que pueden presentar los profesores es que entiendan el contexto, es decir el uso de las medidas de posición para describir la variación de los pesos, con el fin de determinar el tipo de almuerzo para los estudiantes de Huachinga.

Análisis de resultados del ítem c

Grupo 1

A continuación presentamos el diálogo entre los dos profesores.

Alberto: Teniendo en cuenta su edad, de 13 a 15 años, su peso de la mayoría está entre 42 y 44 kg, significa que están flaquitos o sea necesitan una papa más para la olla.

Mario: Pero también vamos a ver su talla, no solamente el peso.

Alberto: Pero acá solamente nos están hablando del peso, y hay un 50% de estudiantes que están en desnutrición.

En el diálogo, ellos están utilizando los valores de los cuartiles para describir la variación de los pesos, por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas. Por otro lado, los profesores comentan que necesitan las estaturas de los estudiantes, pero esa información no lo tienen, razón por la cual el investigador interviene para decirles que describan la distribución de pesos y luego Alberto dice que esa descripción se realizará con los cuartiles.

Finalmente la respuesta de los profesores del grupo 1 a la pregunta, se muestra en la figura 66.

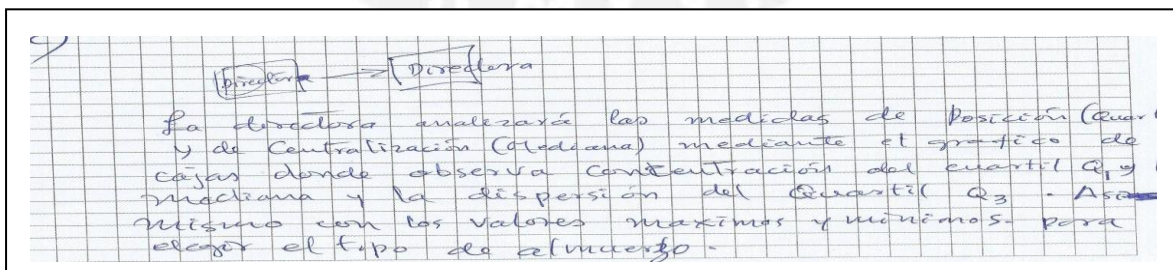


Figura 66. Respuesta al ítem c del grupo 1

En esta respuesta consideran que la directora deberá tener en cuenta los cuartiles y los valores mínimo y máximo para tomar una decisión.

Grupo 2

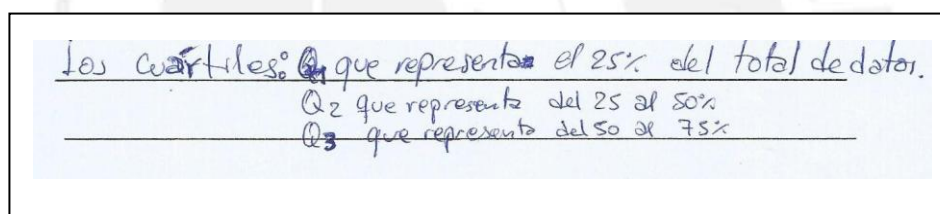
Los profesores de este grupo se preguntan si una de las medidas sería la mediana o la media, a continuación presentamos el diálogo entre los profesores.

Leandro: ¿la mediana o media?, la media es aproximadamente 45 kg, la mediana 44 kg, peso mínimo 35 kg, máximo 55 kg.

Juan: Sería la mediana. Los cuartiles, porque la nutricionista en base a estos datos decidirá el tipo de almuerzo.

Juan no justifica porque elige los cuartiles, pero esa decisión lo toma visualizando el diagrama de cajas y lo hace por medio de la comprensión discursiva del diagrama de cajas.

En la respuesta que presentan, como se muestra en la figura 67, indican lo que representan los cuartiles, lo cual significa que están confundiendo la interpretación de los cuartiles con el porcentaje de datos entre los cuartiles.



Los cuartiles: Q_1 que representa el 25% del total de datos.
 Q_2 que representa del 25 al 50%
 Q_3 que representa del 50 al 75%

Figura 67. Respuesta al ítem c del grupo 2

De acuerdo a la respuesta, este grupo está indicando que los cuartiles serán las medidas que ayudaran a tomar la decisión.

Finalmente, en la consolidación del ítem c, se indico que las medidas que la directora debe considerar para tomar la decisión son los cuartiles.

d) ¿Qué información puede identificar a partir de esas medidas? Explique.

Análisis previo del ítem d

Esperamos que los profesores presenten la información, por medio de la comprensión discursiva del diagrama de cajas, mediante un texto que comunique la interpretación de los

cuartiles, indicando la presencia de un valor atípico y entre qué cuartiles se encuentran concentrados o dispersos los datos. En esta parte se desarrolla la tercera fase de la transnumeración, que es la comunicación a otros de lo que está sucediendo en el mundo real a partir del sistema estadístico.

Análisis de resultados del ítem d

Grupo 1

La respuesta del grupo 1 se muestra en la figura 68

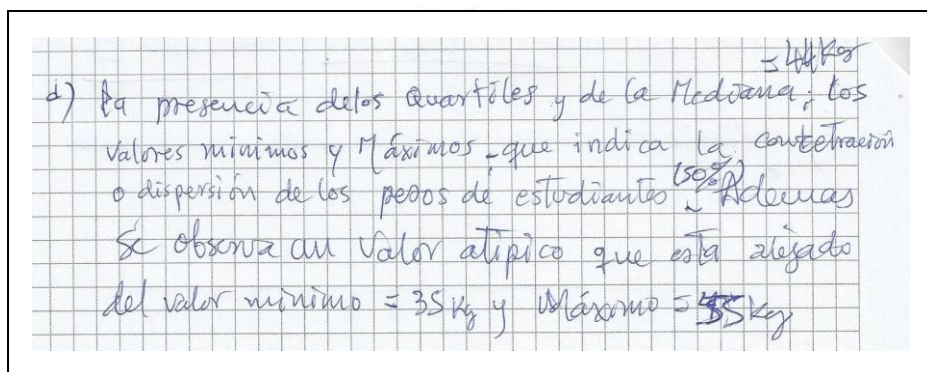


Figura 68. Respuesta al ítem d del grupo 1

No realizan la interpretación de los cuartiles, ni la identificación de la concentración o dispersión de los datos en el contexto del problema solo lo expresan de un modo general, pero si indican que hay un valor atípico y dan los valores para el peso mínimo y máximo.

De acuerdo a Pfannkuch y Rubick (2002), la tercera fase de la transnumeración es la comunicación a otros lo que está sucediendo en el mundo real a partir del sistema estadístico.

Al respecto, el grupo 1 tiene dificultad para comunicar la información porque presentan dificultades en la interpretación de los cuartiles.

Grupo 2

De acuerdo, a la respuesta dada por el grupo 2, en la figura 69, los profesores del grupo 2, de igual forma no detallan la información porque tienen dificultades en la interpretación de los

cuartiles y solo describen la concentración de los datos entre los cuartiles. No detallan la información de acuerdo al contexto.

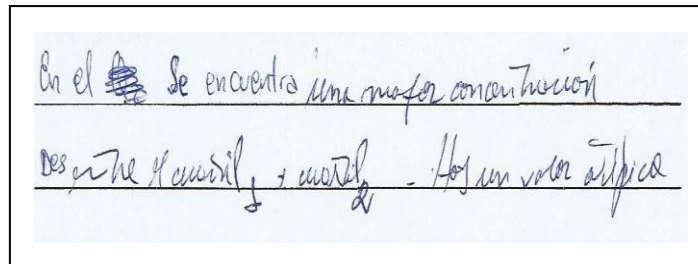
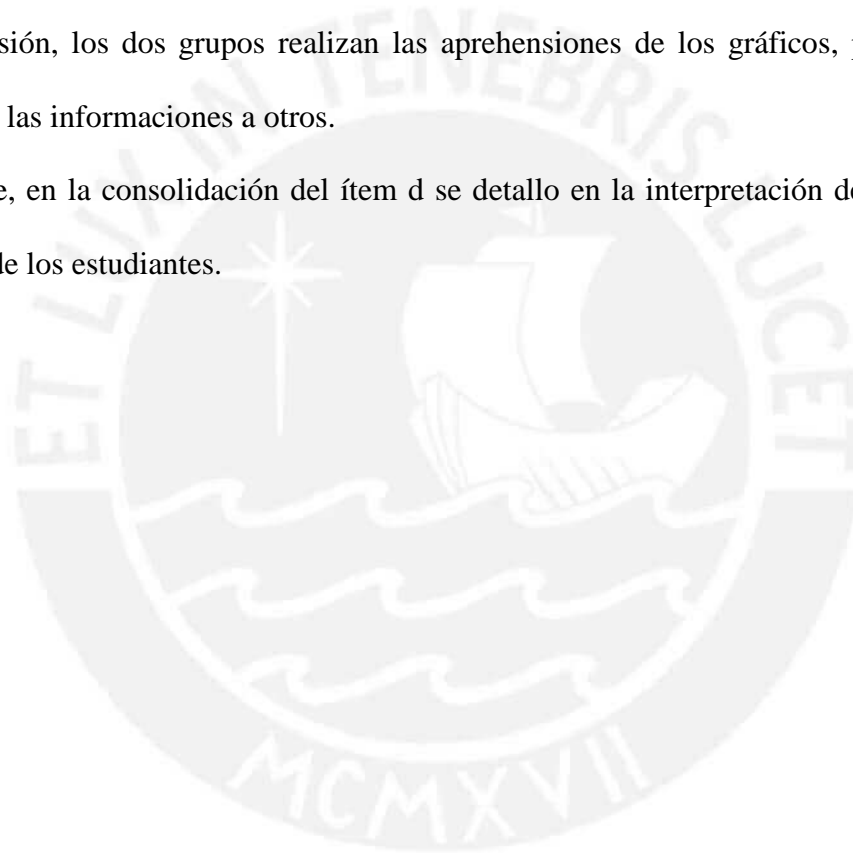


Figura 69. Respuesta al ítem d del grupo 2

En conclusión, los dos grupos realizan las aprehensiones de los gráficos, pero no lograron comunicar las informaciones a otros.

Finalmente, en la consolidación del ítem d se detalló en la interpretación de los cuartiles de los pesos de los estudiantes.



CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de esta investigación fue analizar las aprehensiones en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas) que los profesores movilizan al percibir y describir la variación de los datos en el proceso de transnumeración, permitiendo de esta manera a los profesores que construyan la noción de variación.

De acuerdo a Wild y Pfannkuch (1991), la transnumeración es el cambio de representación de los datos para una mejor comprensión del fenómeno a investigar y que genera nuevas informaciones del fenómeno. Asimismo esta teoría nos permitió identificar las técnicas transnumerativas, planteadas por Chick (2004), que utilizaron los profesores en el proceso de los cambios de representación.

Asimismo, Vieira (2008) en base a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004), afirma que la comprensión en estadística implica la capacidad de transitar en más de un registro de representación semiótica y esto estaría relacionado con la transnumeración. De igual manera, las aprehensiones del registro gráfico permitió analizar de que manera los profesores perciben y describen la variación de los datos.

Además debemos resaltar que Vieira (2008) es la primera investigadora que utiliza la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, en la Educación Estadística.

Por lo tanto, considerando la importancia de los registros de representación, elegimos trabajar una parte de las actividades propuestas con el software Geogebra porque permite la visualización simultánea de dos gráficos estadísticos a la vez ante los cambios en el conjunto de datos.

Por esto, elaboramos dos actividades que fueron diseñadas para trabajar con lápiz, papel y el software Geogebra, en base al estudio de casos, metodología cualitativa que consideramos ser

la más adecuada para la recogida de datos que permitirá responder nuestra pregunta de investigación.

Iniciamos con la actividad 4, en donde los profesores construyeron el diagrama de cajas a partir del gráfico de puntos por medio de la aprehensión secuencial, en este caso nosotros le damos la secuencia para construir el diagrama de cajas porque los profesores no conocen este gráfico.

La dificultad que presentaron los profesores fue primero en la cantidad de cuartiles que tiene un conjunto de datos, la cual ellos afirmaron que son 4 cuartiles, pero luego de una discusión grupal y con la intervención del investigador al preguntarles, ¿cuántos cortes se debe realizar a un segmento para dividirlo en cuatro partes iguales?, ellos contestaron que se necesitan realizar tres cortes, de esta manera ellos concluyeron que hay tres cuartiles y la otra dificultad fue en calcular el valor del primer cuartil y tercer cuartil, a pesar de que calcularon la mediana(segundo cuartil), como en este caso la dificultad es calcular los cuartiles cuando el número de datos es par, esta misma dificultad lo encontramos en nuestros antecedentes como Canossa (2009). Después de una discusión grupal de cómo se calcula mediana cuando la cantidad de datos es par, lograron calcular los cuartiles, ya que después de la división del gráfico de puntos en cuatro partes iguales, se percataron que el primer cuartil es la mediana de la mitad de datos y el tercer cuartil es la mediana de la otra mitad.

Por otro lado, vale resaltar que algunos grupos que no fueron considerados como unidades de análisis, presentaron una dificultad a nivel gráfico cuando desarrollaron el ítem c, en donde se les solicitaba que realicen la división en el gráfico de puntos, de tal manera que represente la división del aula, en base a las edades de los estudiantes, en dos grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo.

En este caso estos profesores no desarrollaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos porque consideraron a los puntos en el plano sin considerar el eje horizontal del gráfico, y como consecuencia agruparon los puntos de cualquier manera, con la condición de que cada grupo tenga el mismo número de puntos, es decir lo trabajaron como un problema geométrico. Luego, de las discusiones grupales, estos profesores se percataron que no habían considerado los valores de la variable edad que está representado en el eje horizontal.

Durante el desarrollo de esta actividad los profesores movilizaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y las aprehensiones perceptiva y discursiva del diagrama de cajas para percibir y describir la concentración y dispersión de los datos entre los cuartiles, haciendo la diferencia entre la cantidad de datos entre los cuartiles y que tan cercanos y alejados se encuentran los datos entre los cuartiles. Esta actividad fue diseñada por la sugerencia de Vieira (2008) y Canossa (2009), ya que ellos encontraron que los estudiantes y profesores tenían dificultad con el diagrama de cajas. Además la otra parte de esta actividad se realizó con la ayuda del Geogebra, en donde se visualizó el gráfico de puntos y diagrama de cajas simultáneamente para que los profesores por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión discursiva del diagrama de cajas perciban la variación de los datos, de esta manera los profesores lograron realizar estos procesos cognitivos y lo que no estuvo previsto en esta parte de la actividad fue que los profesores al realizar los diferentes cambios en el conjunto de datos y visualizando simultáneamente los dos gráficos apareció el valor atípico, percatándose ellos que este valor es el valor mínimo o máximo que está muy alejado de los demás datos. Hay que destacar que en la primera parte del desarrollo de esta actividad identificamos que los dos grupos realizaron las siguientes técnicas transnumerativas de acuerdo a Chick (2004), la tabulación, el cálculo de las medidas de tendencia central y de dispersión, lo que evidencia el proceso de transnumeración por parte de los profesores.

Por otro lado, los profesores tienen dificultad en la interpretación de los cuartiles, esta misma dificultad también se evidenció en el trabajo de Canossa (2009).

La actividad 5 se realizó con el Geogebra, que permitió a los profesores en el proceso de transnumeración representar la variación de un conjunto de datos mediante gráficos y que por medio de las aprehensiones perceptiva y discursiva realizaron la descripción de la variación de los datos en un problema contextualizado. Durante el desarrollo de la actividad los profesores movilizaron las aprehensiones perceptiva y discursiva pero no lograron comunicar la información en el contexto, por medio de la interpretación de los cuartiles de la variable peso. Además identificamos la técnica transnumerativa de la graficación de acuerdo con Chick (2004).

Por consiguiente, por medio de estas dos actividades podemos afirmar que nuestra investigación cumplió el objetivo general, ya que logramos identificar las aprehensiones perceptiva del gráfico de puntos y las aprehensiones perceptiva y discursiva del diagrama de cajas que movilizaron los profesores para percibir y describir la variación de los datos, asimismo identificamos en los procesos de transnumeración de los profesores las siguientes técnicas transnumerativas de acuerdo a Chick (2004): la tabulación, la graficación, el cálculo de las medidas de tendencia central y el cálculo de las medidas de dispersión.

Una de las limitaciones de nuestro trabajo de investigación fue el uso del Geogebra por parte de los profesores, ya que les tomaba tiempo para familiarizarse con el software, entonces esto sugiere que como parte de las actividades se debe incluir una actividad de familiarización con el software.

Pensamos que la investigación presentada, debe ser continuada y ampliada, realizando la construcción del diagrama de cajas a partir del histograma, para percibir no solo la variación

sino también la forma de la distribución, al comparar el histograma y el diagrama de cajas en forma simultánea.

Por otro lado, realizar la comparación de la variación entre dos grupos de datos que tengan valores atípicos, utilizando el diagrama de cajas y como medida de variabilidad, el rango intercuartil.



REFERENCIAS

- Amaral, F.(2010). *Validação de Sequência Didática para (Re)Construção de conhecimentos Estatísticos por Professores do Ensino Fundamental* (Tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. Recuperado de <http://www.pupsp.br/pos/edmat>.
- Azcárate, P.(2006). *¿Por qué no nos gusta enseñar Estadística y probabilidad?*. Recuperado de http://earlystatistics.net/template/pdf/Azcárate_thales2006_Conferencia.doc.
- Batanero, C., Estepa, A. & Godino, J.(1991). *Análisis Exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria*. Granada. Suma, n.9, p. 25-31.
- Batanero, C. (2001) *Didáctica de la Estadística*. Universidad de Granada. España: Recuperado de http://www.ugr.es/iase/publications/rt04/4,2Bakker_etal.pdf.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. A joint ICMI/IASE study. Springer.
- Canossa, R.(2009). *O professor de matemática e o trabalho com medidas separatrizes*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de <http://www.pupsp.br/pos/edmat>.
- Chick, H. (2004). *Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation*. Mathematics education for the third millennium: Towards 2010, 167-174.
- Coutinho, C; Santos, F(2013). *Aprendizagem da estatísticas e o uso de ambientes computacionais: Uma análise didática de programas para construção de gráficos estatísticos*. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática . Montevideo, Uruguay, 16 al 20 de setiembre de 2013. Recuperado de <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/324.pdf>.
- Coutinho, C; Almouloud, S; Silva, M.(2012). *O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso Geogebra: um estudo com professores de matemática*. Revista Electrónica de Educación Matemática. V. 07, n.2, p. 246-265.

- Coutinho, C; Almouloud, S; Silva, M.(2011). *O desenvolvimento do pensamento estatístico e sua articulação com a mobilização de registros de representação semiótica*. Boletim de Educação de Matemática. V. 24, n.39, p. 495-514.
- Duval, R.(1994). *Les différents fonctionnements possible d'une figure dans une démarche géométrique*. Repères, n.17, p.121-138, 1994.
- Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures:Kinds of Representation and specific Processings*. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57771-0_10#page-1
- Del Pino, G. & Estrella, S.(2012). *Educación estadística: relaciones con la matemática*. *Pensamiento Educativo*. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana. 49(1). P. 53-64. ISSN 0719-0409. Recuperado de <http://www.pensamientoeducativo.org> – <http://www.pel.cl> .
- Estepa, A; Del Pino, J.(2013). *Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística*. Revista de Didáctica de las Matemáticas Números, Vol. 83, p.43-63
- Eisenhart, C. (1983). *Laws of error I. Development of the concept*. En S. Kotz y N. L. Johson (Eds.). Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 4, pp. 531-547. New York: John Wiley y Son Inc.
- Estrella, S. (2010). *Instrumento para la evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en profesores de Educación Básica* (Tesis de magíster inédita) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Fernández, J.(2005). *Estadística Descriptiva- Una invitación a la investigación*. Perú. Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. [En línea] Recuperado de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf.

- Garfield, J; Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning*. Connecting research and teaching practice. New York, NY, USA: Springer.
- Godino, J. D (1995). *¿Qué aportan los ordenadores al aprendizaje y la enseñanza de la estadística?*. UNO, 5, 1995, p.45-56.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. (2008). *Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teacher's through project work*. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey. Resumen recuperado de http://www.ugr.es/~icmi/iase_study.
- Hald, A. (1998). *A History of Mathematical Statistics*. From 1750 to 1930. New York: John Wiley & Son Inc.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Quinta edición. Editorial McGraw-Hill/ Interamericana Editores, S.A-México.
- Makar, K. y Confrey, J. (2005). *"Variation-talk": Articulating meaning in statistics*. Statistics Education Research Journal, 4(1), 27-54. Recuperado de <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj>.
- Moore, D. S. (1997). *New pedagogy and new content. The case of statistics*. International Statistical Review, 65(2), 123-165.
- Novaes, D. (2011). *Concepções de Professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística*. (Tesis de Doctorado en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. Recuperado de <http://www.pupsp.br/pos/edmat>.
- Ortiz, J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). *Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad*. En L. Serrano (Ed.), Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica (pp. 95-116). España: Universidad de Granada.
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/> Perú, Ministerio de Educación

(2016). *Diseño Curricular Nacional. Área Curricular Matemática. 3.º, 4.º, 5.º grados de educación secundaria*. Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/>

Pfannkuch, M.(2008). *Training teachers to develop statistical thinkin*. In: joint icmi/iase study: teaching statistics in school mathematics.challenges for teaching and teacher education, 18th. (batanero, c.; burril, g.; reading c.; rossman, a.(Eds)). Recuperado de http://www.ugr.es/~icmi/iase_study.

Pfannkuch, M., & Rubick, A. (2002). *An exploration of students' statistical thinking with given data*.Statistics Education Research Journal, 1(2), 4-21.

Phatak, A., Robinson, G. (2005) *Understanding and modelling variability:Practitioners'Perspectives*. International Statistical Institute, 55th Session. Recuperado de <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatins.php?show=13>.

Reading, C., Shaughnessy, J. M. (2004). *Reasoning about variation*. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, 201-226. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ramirez, G.(2012). *Formas de pensamiento de profesores sobre variabilidad mediante problemas de simulación computacional*.VIII Festival Internacional de Matemática. Recuperado de <http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Greivin-Ramirez.pdf>

Stake, R. *Investigación con estudio de casos*. 2. ed.Madrid: Morata, 1999.

Vieira, M.(2008). *Análise Exploratoria de dados: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio*(Tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. Recuperado de <http://www.pupsp.br/pos/edmat>.

Wild,C.J, Pfannkuch, M.(1999) *Statistical Thinking Empirical Enquiry*. International Statistical Review. Auckland: n.67, p. 223-265.

ANEXOS

Actividad 4

Basados en las edades de los estudiantes de un aula, que se encuentra en las tarjetas, realice lo siguiente:

- a) Construya un gráfico de puntos para las edades de los estudiantes en un papelógrafo.(Solo utilice la mitad del papelógrafo)
- b) ¿ Qué puedes decir acerca de la variación de las edades de los estudiantes, a partir de la representación realizada?
-

- c) En base a las edades de los estudiantes, se piensa dividir al aula en dos grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo, ¿Cómo haría usted esta división en el gráfico?, ¿Cuál es el valor que divide al aula en dos grupos con el mismo número de estudiantes?
-

- d) Ahora se piensa dividir al aula en cuatro grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo, ¿cómo haría usted esta división en el gráfico?, ¿cuáles son los valores que dividen al aula en cuatro grupos con el mismo número de estudiantes?, ¿ cómo se llaman esos valores?
-

- e) Ubique en un eje horizontal paralelo al eje horizontal del gráfico de puntos, los valores encontrados hasta el momento.(Esto debe realizarlo en la otra mitad del papelógrafo). También ubique el valor mínimo y máximo.

- f) Ahora trace un rectángulo que abarque el 50% de los datos que se encuentran en el centro, a continuación divida el rectángulo trazando una línea vertical que ubique la

mediana, y luego trace dos segmentos horizontales, uno desde el valor mínimo a una de los lados del rectángulo y el otro desde el otro lado al valor máximo.

- g) Ahora pegue las tarjetas en una de las partes del rectángulo que le corresponde ¿considera que esta nueva representación de las edades nos brinda más información sobre la variación de los edades? . Explique.

- h) Ahora grafique simultáneamente con el geogebra el diagrama de cajas y el gráfico de puntos para las edades de los estudiantes, ¿ qué relación observas entre los gráficos con respecto a la variación de las edades?

- i) ¿ Qué modificaciones realizarías en la distribución de las edades para hacer variar el diagrama de caja ?

Actividad 5

El director de una Institución Educativa del pueblo de Huachinga, anexo de Huaral, preocupado por la alimentación de sus 51 estudiantes, con edades desde 13 hasta 15 años, decide enviar un informe de los pesos(en kg.) de los estudiantes a la directora ejecutiva del Programa Nacional de Alimentación Escolar Qali Warma, con el objetivo de que los almuerzos que ofrecen ayude a la buena nutrición de los estudiantes. Para contestar las siguientes preguntas abra el archivo PESO.ggb

a) ¿De qué manera puedes representar la variación de los pesos de los estudiantes?

b) ¿Qué puedes decir acerca de la variación de los pesos de los estudiantes, a partir de las representaciones realizadas?

c) ¿Qué medidas considera que permitirán a la directora determinar el tipo de almuerzo que debe enviar a la Institución Educativa?

d) ¿Qué información puede identificar a partir de esas medidas? Explique.

Tarjetas para la actividad 4

Nombre: Karla Molina
Edad: 13 años

Nombre: Patricia
Castro
Edad: 14 años

Nombre: Xiomara Reyes
Edad: 15 años

Nombre: Mary Torres
Edad: 16 años

Nombre: Eliam Ramírez
Edad: 11 años

Nombre: Valeria Zavala
Edad: 14 años

Nombre: Roxana Cerrón
Edad: 8 años

Nombre: Lizbeth Díaz
Edad: 12 años

Nombre: Daniel Castro
Edad: 16 años

Nombre: Gerson Vera
Edad: 14 años

Nombre: Diego Francia
Edad: 15 años

Nombre: Agustín Fretel
Edad: 16 años

Nombre: Frank Vásquez
Edad: 11 años

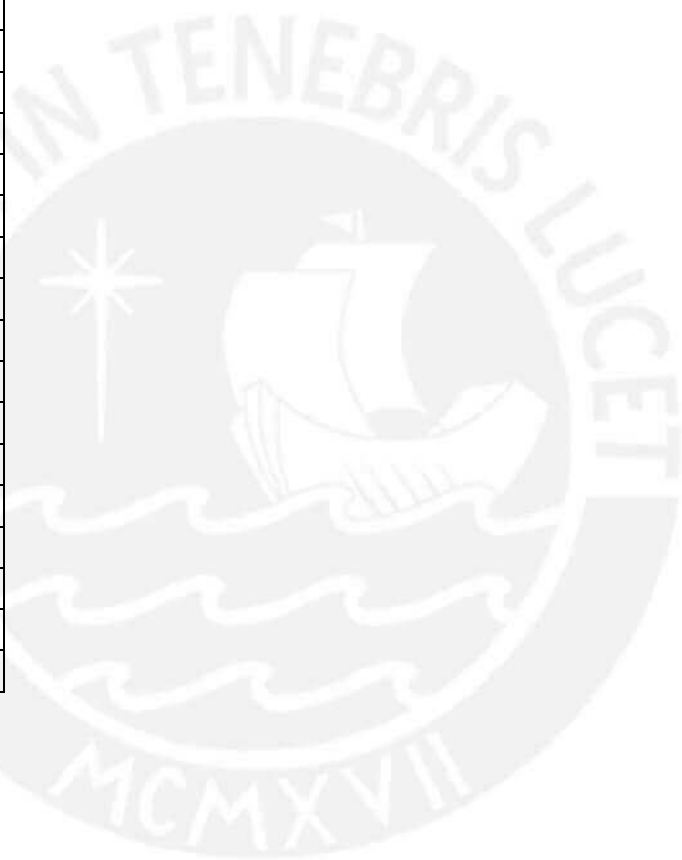
Nombre: César Luque
Edad: 14 años

Nombre: David Tanta
Edad: 8 años

Nombre: Mario Quenta
Edad: 12 años

Datos para la actividad 5: Peso de los estudiantes en kg.

43	50
45	43
45	45
43	45
47	43
42	47
44	42
42	44
43	42
55	43
48	55
43	48
44	43
42	44
44	42
42	44
50	42
52	50
44	52
45	44
48	45
48	48
49	48
42	49
	42
	50
	35



PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y a las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por _____ (nombre del investigador o investigadora a cargo) de la Universidad _____. La meta de este estudio es _____

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá responder una entrevista (encuesta o lo que fuera pertinente), lo que le tomará ____ minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que usted haya expresado.

Su participación será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por usted serán confidenciales, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar su participación en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted. Si se sintiera incómoda o incómodo, frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, _____ doy mi consentimiento para participar en el estudio y soy consciente de que mi participación es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta (de ser el caso que se haya proporcionado información escrita sobre la investigación). He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que mis datos personales, incluyendo datos relacionados a mi salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, puedan ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que estoy participando.

Entiendo que puedo finalizar mi participación en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mí.

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con _____ al correo (o al teléfono) _____

Nombre completo del(de la participante)

Firma

Fecha

Nombre del investigador responsable

Firma

Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.