

Pontificia Universidad Católica del Perú  
Escuela de Posgrado



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD**  
**CATÓLICA**  
DEL PERÚ

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Física

# Formación de Patrones inducidos por un flujo de corte en el modelo de Lotka-Volterra modificado

## Autor

Bach. Julio Jose Balbin Arias

## Asesor

Ph.D. Desiderio Vásquez Rodriguez

## Jurado

Mg. Jorge Luis Martín Quiroz Gonzalez

Dr. Pablo Martín Vilela Proaño

Lima - Perú

2017



*Dedicado a*

Mis padres y hermanos por su invaluable apoyo y estima en mi trabajo.



# Formación de Patrones inducidos por un flujo de corte en el modelo de Lotka-Volterra modificado

Julio J. Balbin Arias

Tesis para optar el grado de Magister

Marzo 2017

## Resumen

En esta tesis se analiza la formación de patrones debido a inestabilidades en un sistema de reacción - difusión - advección generadas mediante un flujo de corte. Las inestabilidades son similares a la formación de patrones de Turing en un sistema de activador - inhibidor donde una condición necesaria es que la difusividad del inhibidor es mayor que la difusividad del activador. En presencia de un flujo de corte, nosotros encontramos que esta condición no es necesaria. Nosotros analizamos dos modelos para un flujo de corte, uno de ellos consiste en dos capas moviéndose con diferentes velocidades, el otro correspondiente a un flujo de Poiseuille dentro de un tubo bidimensional. La inestabilidad aparece cuando la velocidad promedio del flujo aumenta por encima de cierta velocidad umbral, conduciendo así a los patrones que se mueven según el marco de referencia del flujo. Nuestros resultados, patrones aislados de Turing, pueden ser obtenidos usando una difusividad efectiva por efecto de la dispersión de Taylor.

# Declaración

El presente trabajo fue basado en una investigación realizada en el grupo de **Dinámica No Lineal**, El departamento de Física y el apoyo de **CONCYTEC**.

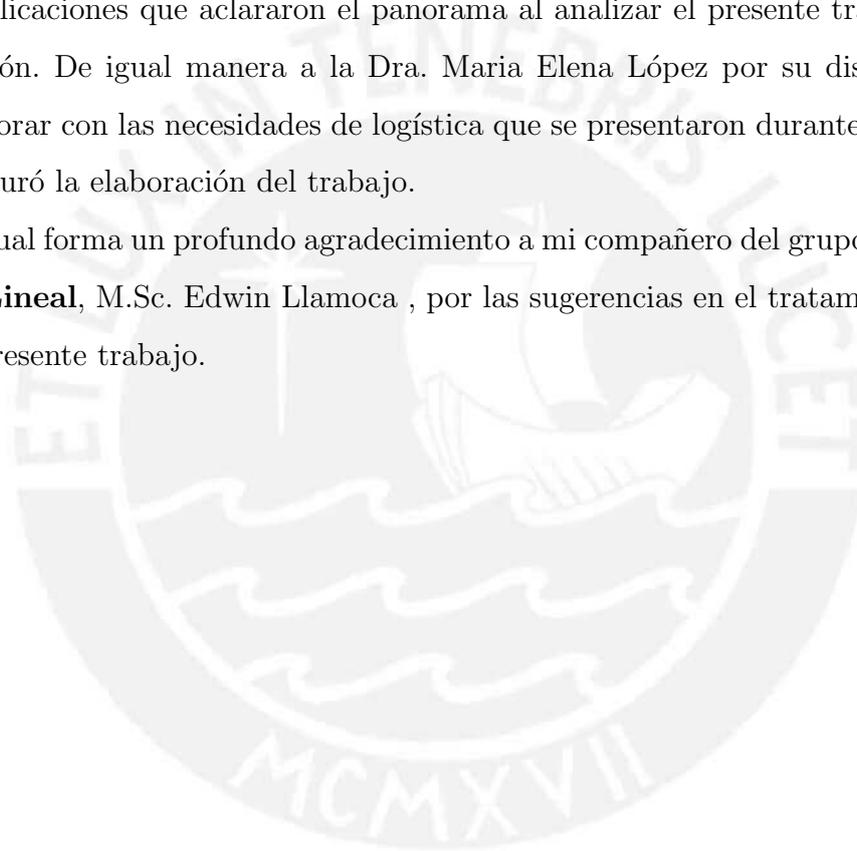
**Copyright © 2017 por Julio J. Balbin Arias.**

“The copyright de esta tesis debe ser tratada con el autor. Ninguna cita debe publicarse sin el consentimiento previo por escrito del autor y la informacin derivada de ella debe ser reconocida ”.

# Agradecimientos

Gracias a mi asesor, Ph.D. Desiderio Vásquez, por sus correcciones, sugerencias y explicaciones que aclararon el panorama al analizar el presente trabajo de investigación. De igual manera a la Dra. Maria Elena López por su disponibilidad de colaborar con las necesidades de logística que se presentaron durante estos dos años que duró la elaboración del trabajo.

De igual forma un profundo agradecimiento a mi compañero del grupo de **Dinámica No Lineal**, M.Sc. Edwin Llamoca , por las sugerencias en el tratamiento numérico del presente trabajo.



# Índice general

Resumen	III
Declaración	IV
Agradecimientos	V
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Difusión . . . . .	1
1.1.1. Primera Ley de Fick . . . . .	2
1.1.2. Segunda Ley de Fick . . . . .	3
1.2. Modelo de reacción-difusión como marco para entender la formación de patrones . . . . .	4
1.2.1. El modelo original de Turing . . . . .	6
1.3. Mecanismo de formación de patrones en un sistema de reacción-difusión	8
1.3.1. Difusión en la presencia de Activación e Inhibición local . . . . .	9
1.3.2. Condiciones de formación de patrones de Turing . . . . .	12
1.4. Efectos de la difusión sobre la dispersión de materia soluble . . . . .	13
1.4.1. Efectos convectivos en ausencia de consideraciones de Difusión	15
1.5. Modelo de Lotka-Volterra modificado . . . . .	18
1.5.1. Modelo de Lotka-Volterra . . . . .	18
1.5.2. Modificación del modelo de Lotka-Volterra . . . . .	18
1.5.3. Estados estacionarios . . . . .	20
1.6. Inestabilidades inducidas por efecto de un flujo de corte . . . . .	20
1.6.1. Modelo de 2 capas . . . . .	21
1.6.2. Modelo bidimensional con un flujo de Poiseuille . . . . .	22

<b>2. Implementación Numérica</b>	<b>23</b>
2.1. Ecuaciones Parabólicas . . . . .	23
2.1.1. Método Explícito . . . . .	23
2.2. Sistema reacción-difusión . . . . .	25
2.2.1. Funciones de reacción y condiciones de contorno . . . . .	25
2.3. Advección . . . . .	26
<b>3. Resultados</b>	<b>28</b>
3.1. Soluciones estacionarias del modelo de Lotka-Volterra . . . . .	29
3.2. Modelo de dos capas . . . . .	30
3.2.1. Formación de patrones de Turing . . . . .	31
3.2.2. Formación de patrones aislados . . . . .	33
3.3. Modelo bidimensional . . . . .	35
3.3.1. Formación de patrones de Turing . . . . .	37
3.3.2. Formación de patrones aislados . . . . .	38
<b>4. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# Índice de figuras

1.1. Partículas moviéndose aleatoriamente a lo largo de una dimensión cruzando un área “A” . . . . .	2
1.2. Derivación de la segunda Ley de Fick . . . . .	3
1.3. Esquema mostrando como actúa la variación de densidades (gradientes) de morfogenes si solo hay efecto de difusión [1] . . . . .	5
1.4. Con la introducción de las interacciones entre morfogenes, el sistema se puede autoregular y puede formar distintos patrones independientes de los pre-patrones . . . . .	5
1.5. <b>Condiciones Iniciales</b> Ambos morfogenes se esparcen y reaccionan entre ellos [1] . . . . .	6
1.6. Estado uniforme y estacionario . . . . .	6
1.7. Uniforme y oscilante . . . . .	7
1.8. Ondas estacionarias con longitud de onda finita <b>Patrones de Turing</b> . . . . .	7
1.9. Patrones de Turing generados en dos dimensiones. Todos los patrones provienen de una ecuación idéntica con variaciones de los parámetros. Figura tomada de <b>Meinhardt</b> [2]. . . . .	7
2.1. Grilla en dos dimensiones para la solución en diferencias finitas de la ecuación en dos dimensiones . . . . .	24
3.1. Flujo Parabólico . . . . .	28
3.2. Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para ( $V = 3.4$ ) con valores por debajo ( $V = 3.0$ ) y encima ( $V = 4.0$ ) del valor crítico. . . . .	30

3.3. Se muestra la relación de dispersión para el modelo de dos capas (Línea verde) y se compara con la relación de dispersión que incluye la aproximación de Taylor (Línea azul) para la velocidad 3,4. Todos los valores analizados fue realizado para distintos valores del parámetro de acople $\mu$ . . . . .	31
3.4. Formación de patrones para la especie $X$ , en la capa 1 y 2 por efecto del flujo, $V = 7,55$ . . . . .	32
3.5. Formación de patrones para la especie $Y$ , en la capa 1 y 2 por efecto del flujo, $V = 7,55$ . . . . .	32
3.6. Grilla de 200 puntos, se usa 20 puntos (centrados) que cumple las condiciones de Turing. Densidades $X_1$ , $X_2$ , $Y_1$ y $Y_2$ con velocidad ( $V = 9,00$ ) . . . . .	34
3.7. Segundo arreglo, donde las densidades $X_1$ , $X_2$ , $Y_1$ y $Y_2$ están bajo efecto de la velocidad ( $V = 9.00$ ) . . . . .	34
3.8. Tercer arreglo, donde las densidades $X_1$ , $X_2$ , $Y_1$ y $Y_2$ están bajo el efecto de la velocidad ( $V = 9.00$ ) . . . . .	35
3.9. Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para ( $V = 7.91$ ). El análisis lineal se realizo discretizando el sistema ODE en 20 capas. . . . .	36
3.10. Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para $V = 7.91$ con valores por debajo ( $V = 7.83$ ) y encima ( $V = 8.2$ ) del valor crítico. . . . .	36
3.11. Formación de patrones para la especie $X$ , por efecto del flujo de Poiseuille con velocidad promedio $V = 18.0$ . . . . .	37
3.12. Grilla de 200 puntos en el eje $x$ , se usa 20 puntos (centrados) que cumple las condiciones de Turing. Especie $X$ con $V = 18.0$ . . . . .	39
3.13. Segundo arreglo, donde la especie $X$ está bajo efecto de la velocidad promedio $V = 18.00$ . . . . .	39
3.14. Tercer arreglo, donde la especie $X$ está bajo efecto de la velocidad promedio $V = 18.00$ . . . . .	40

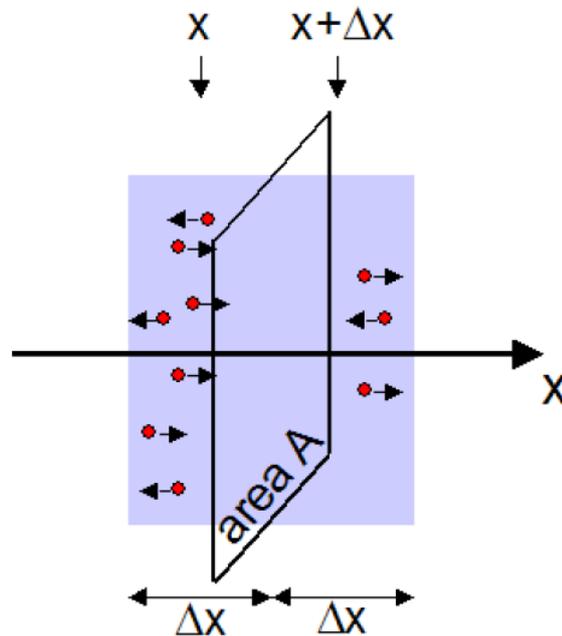
# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Difusión

Difusión es el movimiento de moléculas, átomos o poblaciones de otras especies desde una región de alta concentración hasta una de baja concentración. La palabra difusión deriva de la palabra Latin, *diffundere*, la cual significa “extenderse” (una sustancia que se extiende está en movimiento desde un área de alta concentración hasta un área de baja concentración). Para comenzar con el análisis de la difusión nosotros asumimos que el estado de pequeños volúmenes en un intervalo de tiempo puede ser descrito por medio de concentraciones (o número de componentes en el caso estocástico) de componentes particulares. Estas concentraciones pueden cambiar en el tiempo, pero implícitamente se asume que dentro de dichos pequeños volúmenes estas concentraciones no varían como función de la posición. En otras palabras, consideramos un volumen pequeño “bien-agitado”. También para estos pequeños volúmenes los efectos dinámicos ocurren en una escala de tiempo mucho más pequeña que la combinación aleatoria por efecto de la difusión. Como punto de partida para construir una base matemática necesaria para modelar espacialmente el sistema no homogéneo, nosotros usaremos las leyes de Fick:

## 1.1.1. Primera Ley de Fick



**Figura 1.1:** Partículas moviéndose aleatoriamente a lo largo de una dimensión cruzando un área “A”

La primera ley de Fick describe la velocidad a la que un gas disuelto se difunde a través de una membrana dada ciertas proporciones de la membrana y la sustancia que se difunde. Se ilustra la primera Ley de Fick, Fig. (1.1), mediante partículas moviéndose a lo largo de la dimensión  $x$ . Las partículas están moviéndose aleatoriamente. Si se asume que hay  $N(x)$  partículas en la región gris sobre la izquierda del área A y  $N(x + \Delta x)$  partículas en la región sobre la derecha del área A. Por tanto, ya que la probabilidad de viajar a la derecha o izquierda es idéntica, entonces  $0,5N(x)$  partículas viajarán hacia la derecha. Sin embargo,  $0,5N(x + \Delta x)$  viajarán hacia la izquierda y cruzarán el área A. Por lo tanto, el número que cruza hacia la derecha es:  $-\frac{1}{2}(N(x + \Delta x) - N(x))$ . El flujo de partículas  $J$  a través del área A durante un intervalo de tiempo corto  $\tau$  es definido como:

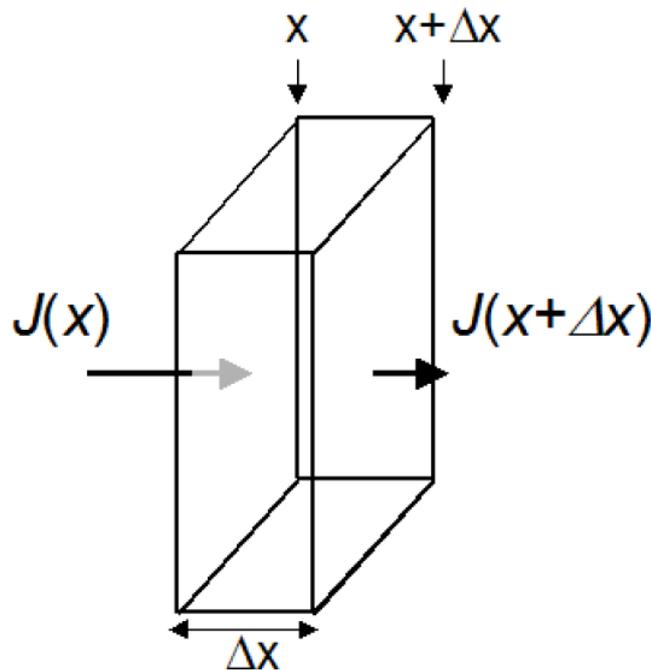
$$J = -\frac{\frac{1}{2}(N(x + \Delta x) - N(x))}{A\tau} \quad (1.1.1)$$

Reescribiendo la ecuación (1.1.1) en términos de la concentración  $C(x) \equiv \frac{N(x)}{A\Delta x}$  se obtiene:

$$J = -\frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \frac{(C(x + \Delta x) - C(x))}{\Delta x} = -D \frac{\partial C(x)}{\partial x} \quad (1.1.2)$$

Por lo tanto en el límite, donde  $\Delta x \rightarrow 0$  el flujo  $J$  es proporcional al gradiente de la concentración y una constante que se define como la constante de difusión o **difusividad**. Donde  $\Delta x$  se aproximará al camino libre medio y  $\tau$  al tiempo de relajación dando lugar a que  $D = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau}$  es constante. La ecuación (1.1.2) es comúnmente llamada **Primera Ley de Fick**.

### 1.1.2. Segunda Ley de Fick



**Figura 1.2:** Derivación de la segunda Ley de Fick

**La Segunda Ley de Fick** es el resultado de su primera Ley y la asunción que las partículas no pueden ser creadas o destruidas. Consideramos un volumen  $A\Delta x$  en la figura (1.2), entonces un flujo  $J(x)$  ingresa a la caja desde la izquierda y el flujo  $J(x + \Delta x)$  se aleja de la caja por la derecha, dando lugar a que el número de partículas que ingresa a la caja en un tiempo  $\tau$  es  $JA\tau$ . Ya que no hay partículas creadas o destruidas en la caja, la tasa de cambio de concentración durante un

tiempo corto  $\tau$  es dado por la siguiente expresión:

$$\frac{C(t + \tau) - C(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{(J(x) - J(x + \Delta x))\tau A}{A\Delta x} = -\frac{(J(x + \Delta x) - J(x))}{\Delta x} \quad (1.1.3)$$

Tomando los límites  $\tau \rightarrow 0$  y  $\Delta x \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{\partial C(x)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x)}{\partial x} \quad (1.1.4)$$

Empleando las ecuaciones (1.1.4) y (1.1.2) se obtiene la **Segunda Ley de Fick**:

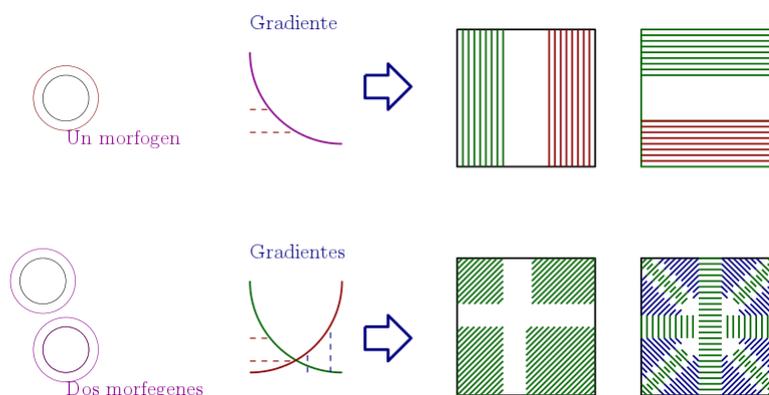
$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.1.5)$$

Esta ecuación indica que el cambio de la concentración en un instante de tiempo y posición es proporcional a la (**segunda derivada**) del perfil de concentración.

## 1.2. Modelo de reacción-difusión como marco para entender la formación de patrones

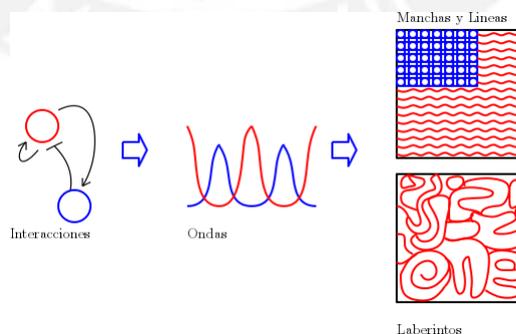
El modelo de reacción-difusión de Turing es uno de los más conocidos modelos teóricos, con el que se obtiene la formación de patrones autoregulados. Estudios en dinámica poblacional han revelado que fenómenos como **cazador - presa**, que en el presente trabajo será analizado bajo el modelo de reacción-difusión de Turing, pueden ser modelados por aproximaciones matemáticas que en general engloba dos formas primarias:

La primera envuelve el análisis de cada elemento de una red en forma cualitativa y así considerando todas las interacciones. Sin embargo, para sistemas más complejos en los cuales los parámetros dimensionales se hacen muy grandes, este análisis se transforma en una tarea difícil de hacer para obtener una predicción. Una segunda estrategia, incluye modelamiento matemático simple, en el cual los detalles del sistema son omitidos, de tal forma que se puede ser más efectivo en extraer la naturaleza del sistemas complejo [1]. En el modelo de reacción-difusión, propuesto por Turing, un sistema simple de dos sustancias interactuando una con otra se encuentra que ciertos sistemas pueden generar patrones espaciales en forma autónoma [1].



**Figura 1.3:** Esquema mostrando como actúa la variación de densidades (gradientes) de morfogenes si solo hay efecto de difusión [1]

Probablemente la característica “**revolucionaria**” del modelo de reacción-difusión es la introducción de una “**reacción**” que produce **morfogenes**. Un morfogen es un componente o sustancia que gobierna el desarrollo de la dinámica de un sistema como un tejido donde interactúan varios de estos, por lo general un morfogen tiene una función específica dentro de esta estructura. De otra manera, si solo la difusión estuviera presente en el sistema, fuentes locales de morfogenes formarían gradientes de densidad Fig. (1.3)- **Un morfogen**. En ciertos casos, la información posicional de la densidad de dichos morfogenes dependerá de las condiciones iniciales o “**pre-patrones**” Fig. (1.3)- **Dos morfogenes**. Si se introduce la **reacción**, el sistema gana la habilidad de generar varios patrones independiente de las condiciones iniciales (pre-patrones):



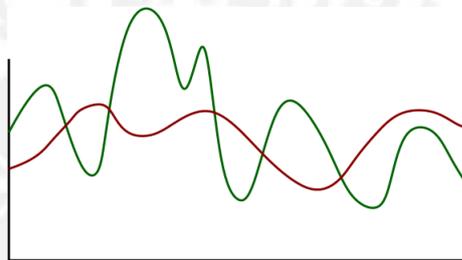
**Figura 1.4:** Con la introducción de las interacciones entre morfogenes, el sistema se puede autoregular y puede formar distintos patrones independientes de los pre-patrones

Se indica que muchas simulaciones de este modelo ha mostrado que este sistema puede replicar la mayoría de patrones espaciales biológicos [2], [3]. Sin embargo el

nivel de complejidad de los niveles biológicos no permite una simple reducción a un sistema de dos variables. La lógica de la formación de patrones puede ser entendida mediante modelos matemáticos simples, y posteriormente ser adaptado y expandido para el estudio de fenómenos biológicos complejos.

### 1.2.1. El modelo original de Turing

Turing estableció que su mayor logro fue explicar que la combinación de elementos físicamente conocidos es suficiente para explicar la formación de patrones biológicos.



**Figura 1.5: Condiciones Iniciales** Ambos morfógenos se esparcen y reaccionan entre ellos [1]

Los elementos seleccionados por Turing fue un par de partículas teóricas interactuantes esparcidas en un campo continuo, Fig. (1.5). En este análisis matemático, Turing revela que para un sistema cualquiera los estados estacionarios a los que puede converger (y observar en la naturaleza) convergen a estructuras como estados homogéneos Fig. (1.6), o estados homogéneos que oscilan en su valor como la Fig. (1.7) u oscilaciones químicas como en la Fig. (1.8):



**Figura 1.6:** Estado uniforme y estacionario

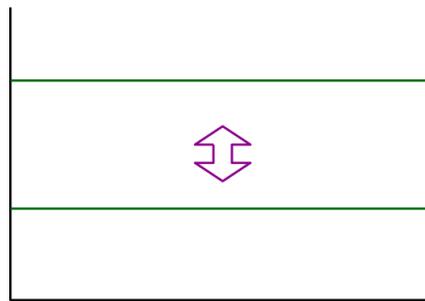


Figura 1.7: Uniforme y oscilante

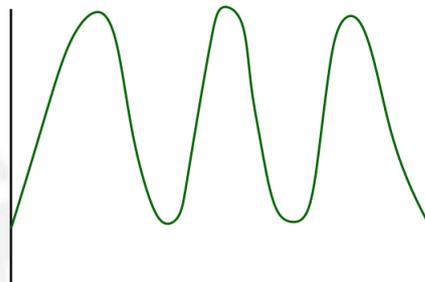


Figura 1.8: Ondas estacionarias con longitud de onda finita **Patrones de Turing**

Los patrones de Turing es un tipo de onda no-lineal que es mantenida por medio del equilibrio dinámico del sistema. La habilidad de los patrones de Turing de regenerarse autónomamente, incluso después de haber sido perturbado el sistema experimentalmente, es importante y de gran utilidad en la explicación de la autonomía mostrada en los procesos de formación de patrones [2, 3]. Sin embargo, la variación de los parámetros y las condiciones de frontera muestra la amplia variedad de la generación de patrones, llevando al límite de las estructuras espaciales como se puede observar en la Figura (1.9).

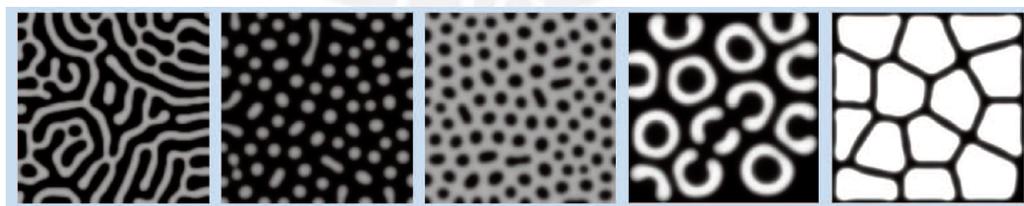


Figura 1.9: Patrones de Turing generados en dos dimensiones. Todos los patrones provienen de una ecuación idéntica con variaciones de los parámetros. Figura tomada de Meinhardt[2].

### 1.3. Mecanismo de formación de patrones en un sistema de reacción-difusión

Introducimos la naturaleza de los sistemas de reacción-difusión y los tipos de mecanismos que actúan para producir la auto-organización de los patrones. Nos concentraremos en el principio de inhibición y activación local. Nosotros definimos los sistemas de reacción-difusión como sistemas que son descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{D}\Delta U(\mathbf{x}, t) + \mathbf{R}(U(\mathbf{x}, t)), \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad U \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \quad \text{y } R \in C(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

donde  $U$  usualmente describe la concentración de algún agente (**morfo**gen). También  $U$  puede cambiar en el tiempo, debido a la difusión, y este efecto local es expresado a través del primer término del lado derecho de la expresión general para la reacción-difusión.

Por otro lado, las concentraciones pueden cambiar debido a las reacciones locales, y esto se expresa por la función de reacción  $R$ . Las ecuaciones de reacción-difusión se pueden considerar como un proceso disipativo debido a que hay un término reactivo,  $R$ , entonces hay procesos que llegan a ser irreversibles. Para iniciar el análisis se asumirá que en el sistema se tiene al menos un estado estacionario y espacialmente homogéneo  $U_0$ , cumpliendo la siguiente relación:

$$\mathbf{R}(U_0) = 0 \quad (1.3.7)$$

Entonces descomponemos una solución arbitraria del sistema como:

$$U = U_0 + \tilde{U} \quad (1.3.8)$$

Empleando las ecuaciones (1.3.7) y (1.3.8) se obtiene:

$$\dot{\tilde{U}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}\Delta \tilde{U}(\mathbf{x}, t) + L(\tilde{U}) + NL(\tilde{U}) \quad (1.3.9)$$

Donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{NL}$  son las funciones que dependen en  $U_0$  Lineal y No Lineal de la reacción evaluados en  $U_0$ .

### 1.3.1. Difusión en la presencia de Activación e Inhibición local

Considerando un sistema de dos morfogenes que interactúan mediante fenómeno de difusión, con constantes de difusión  $D_u$  y  $D_v$  positivas, y que a su vez reaccionan mediante las funciones  $F$  y  $G$ . Sea el caso de la ecuación general (1.3.6) para los valores  $n = 2$ ,  $m = 1$  que representa y coincide en el sistema recién mencionado.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(u, v) \\ G(u, v) \end{bmatrix} \quad (1.3.10)$$

tomando en cuenta que  $u$  y  $v$  son perturbaciones pequeñas se deprecian los términos no lineales en Ec. (1.3.9), y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{u} \\ \Delta \tilde{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}_{|u_0} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

Las constantes en la función de reacción linearizada pueden ser interpretados como valores inversos al tiempo de relajación de la función de reacción, cual describe “Cuan rápido  $u$  y  $v$  cambian en su dependencia de los valores actuales”. En términos físicos, el segundo término del lado derecho de (1.3.11) describe el proceso de activación e inhibición localmente, en otras palabras, la presencia de las componentes  $u$  y  $v$  pueden estimular o inhibir la evolución de  $u$  y  $v$ . Tomando en cuenta la evolución de variable  $u$ , manteniendo la variable  $v$  constante, su comportamiento temporal estará determinado solamente por la componente  $f_u$  de la matriz:

$$\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}_{|u_0}.$$

es positivo o negativo. Al analizar  $F_u$ , la componente en la ecuación de evolución actuará como un inhibidor si el signo es negativo y como un activador cuando este sea positivo. En el caso de la presencia de un activador, el sistema linearizado puede ir al infinito, ya que no habría control del inhibidor o la acción del mismo sea ineficiente. Sin embargo, en sistemas reales (sistemas de reacción no lineales), debido a las no-linealidades, el activador podría ser controlado por el inhibidor o el activador en si mismo puede generar inhibidor en grandes variaciones de  $u$  y  $v$  respecto de

$U_0$  [4]. Como consecuencia directa, las concentraciones de  $u$  y  $v$  se mantendrán en valores finitos.

Si incluimos el efecto de la difusión en el análisis, debemos tener en cuenta que la tendencia de la difusión es distribuir la materia en el espacio. La influencia de la difusión sobre el sistema es representada por el primer término en el lado derecho de Ec. (1.3.10). El sistema de ecuaciones (1.3.10) presenta una solución estacionaria y homogénea  $U_0$ . Dicha solución será estable si una perturbación pequeña decae con el tiempo. La evolución de dicha perturbación está descrita por las ecuaciones (1.3.11).

Ahora, haremos un análisis para evidenciar la posibilidad de formación de estructuras distintas de la solución estacionaria y estable  $U_0$  para el sistema sin difusión. Entonces asumimos un sistema activador e inhibidor,  $u$  y  $v$  respectivamente, donde la constante de difusión para  $v$  es mayor que para  $u$ . Luego se considera una perturbación homogénea local del mismo tamaño para ambos componentes,  $u$  y  $v$ , dentro del sistema, por ejemplo en la forma de una desviación positiva de  $u$  y  $v$  desde la desviación homogénea y estacionaria  $U_0$ , entonces iniciándose así la difusión en la vecindad de las perturbaciones. En el transcurso del tiempo se tendrá un decrecimiento de  $u$  y  $v$  debido a la difusión. Sin embargo, ya que la difusión del activador  $u$  es débil respecto a la del inhibidor  $v$ , habrá una deficiencia de inhibidor  $v$ , y por lo tanto el amortiguamiento del inhibidor  $v$  hacia el activador  $u$  será menos eficiente. Como consecuencia de este efecto, se encontrará, localmente la posibilidad de un crecimiento desmedido del activador hasta que alcance cierto valor de saturación debido al efecto de las no-linealidades [4]. Concluyendo que, debido a la competencia de la difusión con los efectos de activación e inhibición local, la difusión puede desestabilizar el estado estacionario y homogéneo  $U_0$ , de este modo dando cabida a la formación de patrones no-homogéneos espacialmente. Esta es la idea esencial de la investigación que realizó Turing [5] sobre formación de patrones por medio de difusión direccionada en sistemas de reacción-difusión (**sección 1.2.1**). Turing también hizo un estudio analítico de los sistemas de reacción difusión en la forma de Ec. (1.3.6), evidenciando que estos podían formar patrones no-homogéneos espacialmente si cumplen las siguientes condiciones:

1. Las desviaciones de la solución estacionaria global  $U_0$  decaen en el transcurso del tiempo, con esto se quiere dar a entender que los efectos causados **solo** por la función de reacción no alcanza para desestabilizar el sistema.
2. Algunas desviaciones locales del estado estacionario, influenciado en su vecindad por efectos de difusión, en co-acción con la función de reacción, brinda la posibilidad de la creación de patrones espaciales.

Para encontrar sistemas de reacción-difusión en el cual la difusión es responsable de la inestabilidad del estado homogéneo, nosotros haremos un análisis de Fourier sobre las desviaciones a dicha solución. Entonces descomponemos las desviaciones en modos de la siguiente forma  $\tilde{U}_k e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , los cuales son autofunciones del operador de Laplace. Tomando el sistema de ecuaciones (1.3.10), nosotros introducimos un modo de Fourier, para un número de onda  $k$ , en la ecuación linearizada (1.3.11) y al considerar que las funciones exponenciales de tipo  $e^{ikx}$  son funciones linealmente independientes, se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada  $k$ :

$$\dot{\tilde{U}}_k = \mathbf{L}\tilde{U}_k - k^2\mathbf{D}\tilde{U}_k \quad (1.3.12)$$

La solución estacionaria homogénea  $U_0$  es linealmente estable frente a las perturbaciones con un número de onda  $k$  si, y solo si, las condiciones

$$\text{Tr}(\mathbf{L} - k^2\mathbf{D}) = \text{Tr}\mathbf{L} - k^2\text{Tr}\mathbf{D} < \text{Tr}\mathbf{L} < 0 \quad (1.3.13)$$

y

$$\text{Det}(\mathbf{L} - k^2\mathbf{D}) = \text{Det}\mathbf{L} - (D_u G_v + D_v F_u)k^2 + D_u D_v k^4 > 0 \quad (1.3.14)$$

son satisfechas [6, 7]. La condición (1.3.13) se cumple siempre, mas en el caso de la condición (1.3.14) esta se puede violar si se cumple que

$$D_u G_v + D_v F_u > 0. \quad (1.3.15)$$

Entonces, si la condición (1.3.15) es satisfecha, puede haber una desestabilización de la solución estacionaria estable por una perturbación con un número de onda finito mediante difusión (de acuerdo a la segunda condición de Turing).

### 1.3.2. Condiciones de formación de patrones de Turing

Debido al análisis anterior sobre la ecuación linealizada (1.3.11), las condiciones que deben cumplir los autovalores para que un modo de Fourier evidencie la posibilidad de la formación de patrones de Turing [2] parten de las condiciones anteriormente contenidas, tales como  $Tr\mathbf{L} < 0$ ,  $Det\mathbf{L} > 0$  y la (1.3.15), donde si definimos la difusividad relativa  $d = D_v/D_u$  y consideramos que  $\mathbf{L}$  es la aproximación lineal de la matriz de reacción que aparece en (1.3.11), obtenemos:

$$Tr\mathbf{L} = F_u + G_v < 0, \quad (1.3.16)$$

$$Det\mathbf{L} = F_u G_v + F_v G_u > 0, \quad (1.3.17)$$

a partir de la ecuación (1.3.15), y al dividir por la constante de la difusividad  $D_u$ , se obtiene:

$$dF_u + G_v > 0. \quad (1.3.18)$$

Ahora analizando la ecuación (1.3.14),  $Det\mathbf{L} - (D_u G_v + D_v F_u)k^2 + D_u D_v k^4 > 0$ , tomando como variable  $k^2$  lo cual da una forma de parábola a esta ecuación. Entonces despejando los valores que podría tomar  $k^2$ , se obtiene

$$k^2 = \frac{(D_u G_v + D_v F_u) \pm \sqrt{(D_u G_v + D_v F_u)^2 - 4Det\mathbf{L}D_u D_v}}{2Det\mathbf{L}}, \quad (1.3.19)$$

y para poder garantizar que el valor  $k^2$  esté bien definido (sean todos sus valores reales), el interior de la raíz debe ser positivo:

$$(D_u G_v + D_v F_u)^2 - 4Det\mathbf{L}D_u D_v > 0 \quad (1.3.20)$$

lo cual es equivalente a

$$(dF_u + G_v)^2 - 4d(F_u G_v - F_v G_u) > 0. \quad (1.3.21)$$

Las dos últimas relaciones se asumirán como ciertas y base del análisis de inestabilidad sobre el sistema, ya que estos factores tienen que ver con la relación de dispersión del sistema, y los modos no lineales que desestabilizan la solución homogénea y estable, para profundizar en la deducción de las mismas, los detalles se pueden observar en [2].

## 1.4. Efectos de la difusión sobre la dispersión de materia soluble

En presencia de un flujo, un sistema de densidades y que cumple con la ley de difusión, descripción analítica en la Ec. 1.1.5, la parte de la variación temporal de la densidad se modifica con un factor  $V \cdot \nabla C$ , dando lugar a una ecuación resultante de la siguiente forma:

$$D \nabla^2 C = \frac{\partial C}{\partial t} + \hat{V} \cdot \hat{\nabla} C \quad (1.4.22)$$

Donde  $D$ , el coeficiente de difusión, se asume independiente de  $C$ . Para efectos del análisis asumiremos que tenemos un tubo capilar, y que la concentración es simétrica respecto la línea axial del tubo, entonces la concentración  $C$  es una función de  $r$  y  $x$ , donde  $r$  es la distancia de alejamiento radial dentro del área transversal,  $x$  es la distancia a lo largo del eje axial, y  $t$  es la referencia de tiempo. Por otro lado al querer analizar el sistema, que es un tubo, será conveniente emplear coordenada cilíndricas, de tal forma que

$$\nabla^2 = \partial^2 C / \partial r^2 + (1/r) \partial C / \partial r + \partial^2 C / \partial x^2.$$

El término  $V \cdot \nabla C$  representa que el sistema está bajo el efecto de un flujo que moviliza distintos puntos del fluido con una velocidad diferente que depende de un campo vectorial o una función de  $r$ . Por otro lado, en sistemas reales comunmente se observa que el flujo presente muestras caractersticas tales como: atenuarse en los bordes del tubo por donde se conduce, alcanzar su valor máximo de velocidad en el centro del tubo que conduce al fluido y entre los bordes y el centro formar un perfil de forma parabólica, un flujo teórico que muestra estas características mencionadas es el flujo de Poiseuille que es un flujo parabólico que se atenúa en sus bordes y es máximo en el centro del tubo, por tanto será el flujo que se empleará en el sistema planteado, donde  $\mathbf{V} = u_0(1 - \frac{r^2}{a^2})\hat{r}$ , donde la velocidad promedio del perfil planteado es igual a  $u_0/2$ . Tomando

$$z = r/a$$

la Ec. (1.4.22) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial C}{\partial z} + a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{a^2}{D} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{a^2 u_0}{D} (1 - z^2) \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (1.4.23)$$

Las condiciones de contorno que expresan el hecho que las paredes del tubo es impermeable es:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 1 \quad (1.4.24)$$

Se presentan dificultades para encontrar una solución completa de la Ec. (1.4.23), dando el valor de  $C$  para todo el dominio de  $z$ ,  $x$  y  $t$ , conociendo de antemano la distribución de  $C$  en el instante  $t = 0$ . Por otro lado, una solución aproximada puede ser encontrada siguiendo las siguientes condiciones límite [8]

- A** Los cambios de  $C$  debido al transporte convectivo a lo largo del tubo toman lugar en un tiempo  $\tau_{conv}$  muy pequeño, de tal forma que los efectos de la difusión pueden ser despreciados.
- B** El tiempo necesario para que aparezcan efectos apreciables, como consecuencia del transporte convectivo, es largo comparado con el intervalo de tiempo  $\tau_{red}$ , durante el cual las variaciones radiales de concentración se reducen en una fracción de la cantidad inicial por efecto de la difusión.

Los principios mostrados contrastan los tiempos en el cual la convección local y la difusión evidencian variaciones considerables en dirección radial y transversal al tubo, pero ya que ambas escalas de tiempo son distintas entonces no podríamos emplear dichas condiciones en simultáneo, por lo cual se trabajará en una condición límite donde ambas sean aplicables en primera instancia. Para encontrar las condiciones bajo las cuales la condición **B** es válida es necesario calcular cuan rápido la concentración  $C$  respecto a  $r$ , degenerando de esta manera en una concentración uniforme. Las soluciones de (1.4.23), para las cuales  $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$  y las variables  $z$  y  $t$  son separables, tienen la forma:

$$C = e^{-\alpha t} J_0(a z \alpha^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.4.25)$$

donde  $J_0(a z \alpha^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}})$  es una función de Bessel de orden zero. Bajo la condición de contorno (1.4.24):

$$J_1(a \alpha^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (1.4.26)$$

La raíz de Ec. (1.4.26) para el valor más pequeño de  $\alpha$  es  $a\alpha^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}} = 3,8$ , por tanto el tiempo necesario para una variación radial de  $C$  en la ecuación (1.4.25) en un termino  $1/e$  del valor inicial es:

$$t_1 = \frac{a^2}{(3,8)^2 D}. \quad (1.4.27)$$

Ahora, si el tiempo de dispersión de materia (**advección**) se da a lo largo del tubo de longitud  $L$ , entonces el tiempo necesario para que la convección provoque cambios apreciables en  $C$  es del orden de  $L/u_0$ , aplicando la condición  $B$ , se obtiene:

$$\frac{L}{u_0} \gg \frac{a^2}{(3,8)^2 D}, \quad (1.4.28)$$

### 1.4.1. Efectos convectivos en ausencia de consideraciones de Difusión

Bajo la condición **A** la difusión en la dirección longitudinal puede ser despreciada,  $\partial^2 C / \partial x^2$  mucho menor que  $\partial^2 C / \partial r^2 + (1/r)\partial C / \partial r$ , dando lugar a que la transferencia longitudinal de  $C$  es por efecto de convección. Consideraremos que la convección se da a través de un plano transversal que se mueve con rapidez  $u_0/2$ , la cual es la velocidad promedio del flujo. Empleando el siguiente cambio:

$$x_1 = x - \frac{1}{2}u_0 t, \quad (1.4.29)$$

la ecuación (1.4.23) se convierte a

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{a^2}{D} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{a^2 u_0}{D} \left(\frac{1}{2} - z^2\right) \frac{\partial C}{\partial x_1} \quad (1.4.30)$$

Debido a que la velocidad a través del plano transversal para el cual  $x_1$  no varía, el valor de la velocidad promedio es cero, la transferencia de  $C$  a través del plano solo depende de la variación radial de  $C$ . Si  $C$  no dependiera de  $x$  y la condición **B** fuera satisfecha, entonces se evidenciaría que cualquiera variación radial en  $C$  desaparecería rápidamente. Una pequeña variación radial en  $C$  puede por tanto ser calculada de la ecuación [8]

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{a^2 u_0}{D} \left(\frac{1}{2} - z^2\right) \frac{\partial C}{\partial x_1} \quad (1.4.31)$$

(ya que  $\Delta t$  es pequeño, los cambios por efecto de transporte convectivo no será apreciado) -  $\tau_{trans.convec.} \gg \tau_{efec.dif.}$  -  $\partial C/(\partial t \sim \Delta t) \simeq 0$ , y dentro del cálculo de  $\partial C/\partial x_1$  puede ser tomado como independiente de  $z$ . Una solución de Ec. (1.4.31) cual satisface las condiciones de contorno  $(\partial C/\partial z) = 0$  en  $z = 1$  es

$$C = C_{x_1} + A(z^2 - \frac{1}{2}z^4), \tag{1.4.32}$$

donde  $C_{x_1}$ , es el valor de  $C$  en  $z = 0$  y  $A$  es constante.

Reemplazando Ec. (1.4.32) en Ec. (1.4.31) se obtiene:

$$A = \frac{a^2 u_0}{8D} \frac{\partial C}{\partial x_1} \tag{1.4.33}$$

El caudal de  $C$  a través de la sección transversal en  $x_1$  es

$$Q = -2\pi a^2 \int_0^1 u_0(\frac{1}{2} - z^2)Czdz. \tag{1.4.34}$$

Insertando Ec. (1.4.32) y Ec. (1.4.33), Ec. (1.4.34) se transforma a

$$Q = -\frac{\pi a^4 u_0^2}{192D} \frac{\partial C_{x_1}}{\partial x_1}. \tag{1.4.35}$$

Por consecuencia de **B**, las variaciones en  $C$  son pequeñas en comparación a las correspondientes a la dirección longitudinal, y si  $C_m$ , es la concentración promedio sobre una sección transversal, entonces  $(\partial C_{x_1}/\partial x_1)$  es indistinguible respecto a  $\partial C_m/\partial x_1$ , finalmente la Ec. (1.4.35) tendrá la siguiente forma:

$$Q = -\frac{\pi a^4 u_0^2}{192D} \frac{\partial C_m}{\partial x_1}. \tag{1.4.36}$$

De la ecuación se interpreta, que  $C_m$  se dispersa a través de un plano transversal, que se mueve con velocidad  $u_0/2$ , exactamente igual a si obedeciera el régimen de difusión con una constante de difusión:

$$d_{mod} = \frac{a^2 u_0^2}{192D}. \tag{1.4.37}$$

Por conservación de la masa y continuidad en el espacio donde se mueve el flujo, se puede representar la equivalencia entre el caudal  $Q$  y la densidad promedio  $C_m$  de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = -\pi a^2 \frac{\partial C_m}{\partial t}, \tag{1.4.38}$$

Sustituyendo (1.4.38) en (1.4.36):

$$d_{mod} \frac{\partial^2 C_m}{\partial x_1^2} = \frac{\partial C_m}{\partial t} \tag{1.4.39}$$

Lo cual evidencia que la convección radial es equivalente a un proceso de difusión transversal con constante de difusión 1.4.37. Por tanto la constante de difusión puede ser modificada en 1.4.37, si el término de flujo ya no entra en la ecuación, dando lugar a una nueva constante de difusión:

$$D_{ef} = D + d_{mod} \tag{1.4.40}$$

la cual es válida debido a que estamos trabajando en una condición híbrida donde la participación del efecto de la difusión coexiste con el efecto axial que equivale a una difusión modificada caracterizado por  $d_{mod}$ , pero se debe mencionar que no solo bajo la condición especial que se brinda al sistema se cumple que  $D_{ef} = D_0 + d_{mod}$ , sino que esta es más general de lo que se asumió inicialmente, se puede ver en la referencia [9] Entonces la ecuación (1.4.22) toma la siguiente forma:

$$D_{ef} \left( \frac{\partial^2 C_r}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial C_r}{\partial t} \tag{1.4.41}$$

Donde  $C_r$  es la densidad promediada para un disco en el tubo en una posición axial arbitraria  $x_0$ . Para el caso de 1 y 2 dimensiones se tiene las siguientes modificaciones de la constante de difusión y difusión relativa [10, 11]:

**Para una dimensión**, se tendrán dos líneas de flujo con igual rapidez  $V/2$ , pero con sentidos opuestos, donde el sistema tiene un factor de acople entre las dos líneas de flujo,  $\mu$ , dando lugar a un modelo de dos capas para dos especies con difusión pura descrito por:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{V}{2} \frac{\partial X_1}{\partial x} = D \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \mu(X_2 - X_1), \tag{1.4.42}$$

y

$$\frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{V}{2} \frac{\partial X_2}{\partial x} = D \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \mu(X_1 - X_2). \tag{1.4.43}$$

Tomando el análisis hecho anteriormente para el efecto de la dispersión sobre la constante de difusión, se tendrá que la difusividad efectiva esta dada por:

$$D_{ef} = D + V^2/(8\mu).$$

Para el caso de dos dimensiones se tiene un perfil parabólico de velocidad, perfil de un flujo de Poiseuille, el cual tiene una velocidad promedio de  $\mathbf{V}$ , también ya que dicho sistema es parabólico entonces este debe estar dentro de un tubo, el cual consta de un ancho de  $a$ , dando lugar a una constante de difusión modificada de la forma:

$$D_{ef} = D + \frac{a^2 \mathbf{V}^2}{210D}.$$

## 1.5. Modelo de Lotka-Volterra modificado

### 1.5.1. Modelo de Lotka-Volterra

El modelo de Lotka-Volterra analiza el comportamiento de dos poblaciones distintas que interactúan en una región espacial, una de estas poblaciones se la llama predador y a la otra presa indicando que uno de ellos usará al otro como alimento, dando lugar así a variaciones periódicas de la población de cada una de las especies. El sistema de ecuaciones que describe este sistema es no lineal y se desarrolla en una región brindando valores a lo largo de un intervalo de tiempo. Una breve descripción del sistema es:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x(\alpha - \beta y) \quad (1.5.44)$$

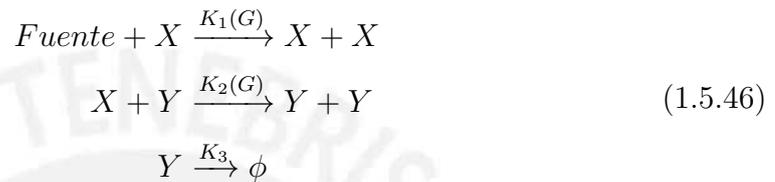
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y(\gamma - \delta x) \quad (1.5.45)$$

donde se podría identificar a  $y$  como el predador,  $x$  la presa y las constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  como las interacciones entre presa predador. Importante es que el modelo de Lotka-Volterra muestre oscilaciones de los valores de densidad para cada especie a lo largo del tiempo, mostrando cierta complementariedad entre los dos componentes coexistentes.

### 1.5.2. Modificación del modelo de Lotka-Volterra

El modelo de Lotka-Volterra modificado (también llamado modelo de Bazykin [12]) considera en base al modelo de Lotka-volterra clásico que ninguna de las especies presentes depende del territorio o de los suministros en el mismo, el modelo modificado a diferencia del modelo clásico considera la interferencia mutua entre

predadores y la capacidad de las presas a transportar sus suministros, capacidad de racionamiento. Debido a estos cambios el modelo modificado de Lotka-Volterra evidencia en sus estructura, al converger a una estructura no homogénea, la formación de patrones de Turing y patrones localizados, lo cual es una diferencia marcada respecto al modelo clásico que no mostraba patrones dimensionales, mas solo oscilaciones de las poblaciones participantes en el tiempo. El modelo modificado de Lotka-Volterra considera el siguiente mecanismo [13]



donde la especie  $X$  es la presa, y la especie  $Y$  es el predador. El modelo asume un crecimiento que depende de una función de la cantidad de presas,  $K_1(X)$ , y que tiene que ver con la capacidad de abastecer su alimento para dicha especie. Por otro lado indica una capacidad de reproducción de las presas para contrarrestar el arremetimiento que tienen los predadores sobre dicha población mediante una función que también depende de la cantidad de las presas,  $K_2(X)$ , dicha función también indica cierto nivel de saciedad de los predadores frente al consumo de las presas. De igual forma, el modelo incluye una interferencia mutua entre predadores (**peleas entre predadores**):



donde  $k_4$  es la interacción entre predadores. Por efecto de este mecanismo, se construye un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiar la dinámica del modelo:

$$\frac{dX}{d\tau} = X \left( r_0 \left( 1 - \frac{X}{X_0} \right) - \frac{kY}{1 + aX} \right) \quad (1.5.48)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = Y \left( \frac{kX}{1 + aX} - 1 - k_f Y \right), \quad (1.5.49)$$

donde  $K_1 = (1 - (X/X_0))$ ,  $K_2 = XY/(1 + aX)$  y  $K_f$  es una función de  $K_4$ , [13], de igual forma el sistema está caracterizado por las constantes de modelo  $r_0$ ,  $k$ ,  $k_f$  y  $a$ . Se puede ver que las ecuaciones (1.5.48) y (1.5.49) al reducir los factores de reabastecimiento y reproducción de los predadores a un factor convergente constante

y despreciando el factor  $k_f Y^2$ , por querer conservar el sistema en un primer grado de no-linealidad, se puede observar el sistema indicado en la subsección del modelo de Lotka-Volterra. Finalmente las ecuaciones (1.5.48) y (1.5.49) son el pilar para el modelo de Lotka-Volterra modificado.

### 1.5.3. Estados estacionarios

El sistema puede ser resuelto en muchas soluciones estacionarias: Las dos especies extintas  $(0, 0)$ , una coexistencia no trivial  $(\bar{X}, \bar{Y})$ . La solución de coexistencia  $\bar{X}$  satisface la siguiente ecuación cúbica:

$$\frac{k_f r_0}{X_0} \bar{X}^3 - \frac{k_f r_0}{X_0} \bar{X}^2 + (k(k-1) - 2k_f r_0 + \frac{k_f r_0}{X_0}) \bar{X} - (k + k_f r_0) = 0 \quad (1.5.50)$$

la cual tiene 3 raíces. La ecuación (1.5.50) solo tendrá 3 raíces reales y positivas si, y solo si, la siguiente condición se satisface [13]:

$$X_0 > 2 \quad (1.5.51)$$

y

$$k(k-1) + \frac{k_f r_0}{X_0} > 2k_f r_0. \quad (1.5.52)$$

En caso contrario, la Ec. (1.5.50) tiene una sola solución positiva y real.

## 1.6. Inestabilidades inducidas por efecto de un flujo de corte

La formación de patrones de Turing sin un flujo de corte puede ocurrir en un sistema activador-inhibidor, secciones 1.2 y 1.3, donde la difusividad del inhibidor es mucho mayor que la del activador. En la presencia del flujo de cizallamiento, un estado estacionario y homogéneo puede mostrar una inestabilidad incluso si esta condición no es satisfecha. A continuación se mostrarán dos escalas de un mismo modelo, Lotka-Volterra modificado bajo la influencia de difusión y flujo, donde gracias a la dependencia de la difusividad efectiva (1.4.40), se evidencia que al aumentar la rapidez promedio del flujo, la difusividad relativa puede cambiar desde: difusividad

del inhibidor menor que la del activador hasta, difusividad del inhibidor mayor que la del activador, la cual es la condición para la formación de patrones de Turing en ausencia de flujo, lo cual es coherente con el sistema, ya que la difusividad efectiva es un concepto válido, solo si el flujo en si, ya no está presente en el sistema de ecuaciones, siendo su único efecto el de la velocidad promedio,  $\bar{V}$ , en la definición de la difusividad efectiva.

### 1.6.1. Modelo de 2 capas

El sistema de ecuaciones de 2 capas para el modelo de Lotka-Volterra modificado bajo la influencia de difusión [11], viene dado por:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{V}{2} \frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \mu(X_2 - X_1) + f(X_1, Y_1), \quad (1.6.53)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{V}{2} \frac{\partial Y_1}{\partial x} = d \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + d\mu(Y_2 - Y_1) + g(X_1, Y_1), \quad (1.6.54)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{V}{2} \frac{\partial X_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \mu(X_1 - X_2) + f(X_2, Y_2), \quad (1.6.55)$$

y

$$\frac{\partial Y_2}{\partial t} - \frac{V}{2} \frac{\partial Y_2}{\partial x} = d \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} + d\mu(Y_1 - Y_2) + g(X_2, Y_2), \quad (1.6.56)$$

#### Análisis Lineal para el modelo de 2 capas

Se introducen perturbaciones sobre el estado estacionario de la forma  $X_i = X_0 + X'_i e^{\sigma t} e^{ikx}$  y  $Y_i = Y_0 + Y'_i e^{\sigma t} e^{ikx}$ , obteniendo un conjunto de ecuaciones homogéneas sobre las amplitudes  $X'_i$  y  $Y'_i$ .

$$\begin{bmatrix} F_k - iVk/2 & f_y & \mu & 0 \\ g_x & G_k - iVk/2 & 0 & d\mu \\ \mu & 0 & F_k + iVk/2 & f_y \\ 0 & d\mu & g_x & G_k + iVk/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ X'_2 \\ Y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.6.57)$$

Donde se define  $F_k = f_x - k^2 - \mu - \sigma$  y  $G_k = g_y - dk^2 - d\mu - \sigma$ . Ya que las perturbaciones sobre la especie  $X$  e  $Y$  en sus dos capas deben ser diferentes de cero, entonces el determinante de la matriz con las funciones de reacción debe ser cero, a partir del cual se puede encontrar la dependencia de  $\sigma$  en función de  $k$ , lo cual

mostrará para que valor de  $k$  hay una transición de la parte real de  $\sigma$ , evidenciando así la formación de inestabilidades por efecto del flujo.

### 1.6.2. Modelo bidimensional con un flujo de Poiseuille

El modelo de Lotka-Volterra modificado bajo la influencia de la difusión y un flujo de Poiseuille viene dado por:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} X = D_X \nabla^2 X + f(X, Y) \quad (1.6.58)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \bar{V} \cdot \bar{\nabla} Y = D_Y \nabla^2 Y + g(X, Y). \quad (1.6.59)$$

Las ecuaciones están dentro de un dominio rectangular  $x - z$ . El dominio para el flujo está confinado en la dirección  $z$  con  $-a/2 < z < a/2$ . El flujo de Poiseuille tiene la siguiente dependencia:

$$\vec{V}(x, z) = V(z)\hat{x} = \frac{3}{2}\bar{V}\left(1 - 4\frac{z^2}{a^2}\hat{x}\right). \quad (1.6.60)$$

Donde  $\bar{V}$  corresponde al promedio del perfil de velocidad.

#### Análisis Lineal para el modelo modificado de Lotka Volterra con un Flujo de Poiseuille

Empleando la forma de las perturbaciones indicada en la sección 1.6.1, se obtiene el siguiente sistema para el análisis lineal:

$$\sigma X_1 = D_X \left( \frac{d^2 X_1}{dz^2} - k^2 X_1 \right) - ikV(z)X_1 + f_x X_1 + f_y Y_1 \quad (1.6.61)$$

$$\sigma Y_1 = D_Y \left( \frac{d^2 Y_1}{dz^2} - k^2 Y_1 \right) - ikV(z)Y_1 + g_x X_1 + g_y Y_1 \quad (1.6.62)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias permite la solución trivial  $X = 0$  e  $Y = 0$ . Sin embargo una solución no trivial es permitida solo para ciertos valor de  $\sigma$  dado un valor de  $k$ . Por lo tanto este sistema de autovalores determina la relación de dispersión  $\sigma = \sigma(k)$ . La discretización de capas de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 1.6.61 y 1.6.62 serán tratadas en detalle en el capítulo siguiente.

# Capítulo 2

## Implementación Numérica

### 2.1. Ecuaciones Parabólicas

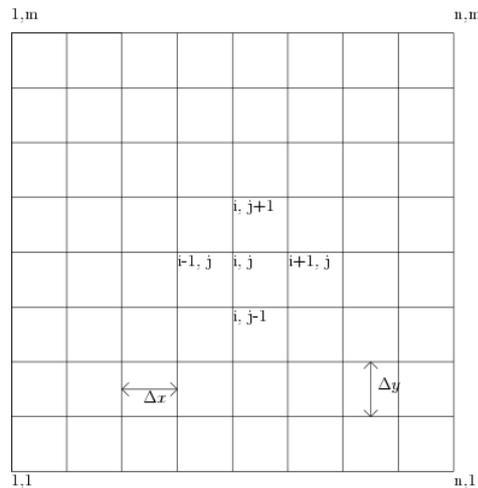
Las ecuaciones parabólicas describen variados fenómenos en el mundo físico desde escalas macro hasta escalas micro, dos fenómenos de alta relevancia son los de dinámica de poblaciones y los de oscilaciones químicas. Dichas ecuaciones pueden ser resueltas por métodos exactos o aproximaciones numéricas que siguen distintas técnicas. Particularmente, las soluciones exactas son complicadas de obtener cuando aumenta la dimensionalidad del problema y el número de parámetros dentro del modelo, por lo cual los métodos numéricos se vuelven un tentativo y provechoso camino para analizar el comportamiento de dichas ecuaciones. En este caso, se empleará la técnica de diferencias finitas por el método explícito [14], la cual será descrita a continuación.

#### 2.1.1. Método Explícito

El método explícito en este caso será aplicado sobre una grilla rectangular, considerando la ecuación de difusión en 2 y 1 dimensiones:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \quad (2.1.2)$$



**Figura 2.1:** Grilla en dos dimensiones para la solución en diferencias finitas de la ecuación en dos dimensiones

Una vez planteada la grilla para la discretización de la ecuación parabólica, y tomando  $\Delta x$  como el tamaño del paso en  $x$ ,  $\Delta y$  como el tamaño del paso en  $y$  y  $\Delta t$  el tamaño del paso en el tiempo. Se puede expresar las ecuaciones parabólicas en el sentido de las diferencias finitas, siendo los pasos en  $x$  representados por el índice  $i$ , que representa el desplazamiento en una dimensión. En el caso de dos dimensiones, se adiciona desplazamiento a lo largo del eje  $Y$  representado por el índice  $j$ . De igual manera para el desplazamiento en el tiempo se usará el subíndice  $k$ . La forma final obtenida es:

$$\frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\Delta t} = D \frac{C_{i+1}^k - 2C_i^k + C_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (1 - Dim) \quad (2.1.3)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1$$

y

$$\frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} = D \frac{C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + D \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \quad (2 - Dim) \quad (2.1.4)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1, j = 2, 3, \dots, m - 1$$

Expresando la ecuación de la siguiente forma:

$$C_{i,j}^{k+1} = C_{i,j}^k + \lambda_1 (C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k) \quad (1 - dim) \quad (2.1.5)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1$$

y

$$C_{i,j}^{k+1} = C_{i,j}^k + \lambda_1(C_{i+1,j}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i-1,j}^k) + \lambda_2(C_{i,j+1}^k - 2C_{i,j}^k + C_{i,j-1}^k) \quad (2 - dim)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1, j = 2, 3, \dots, m - 1$$
(2.1.6)

Para garantizar la estabilidad del método numérico, se requiere el cumplimiento del siguiente criterio [15]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{4} \frac{\Delta x^2}{\lambda} \quad (2 - dim)$$
(2.1.7)

y

$$\Delta t \leq \frac{1}{8} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\lambda} \quad (1 - dim)$$
(2.1.8)

donde  $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ .

## 2.2. Sistema reacción-difusión

### 2.2.1. Funciones de reacción y condiciones de contorno

La reacción se centra en la creación de nuevas especies en base a otras pre-existentes y así variar las densidades en función del tiempo e independiente del ordenamiento causado por la difusión. En este caso la reacción afecta a dos especies, (**densidades**)  $X$  e  $Y$ , mediante dos funciones  $f(X, Y)$  y  $g(X, Y)$ , las cuales afectan el valor de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Por otro lado la grilla que se emplea en este caso es una grilla rectangular donde la escala del eje  $x$ ,  $L_x$ , es mucho mayor que la escala del eje  $y$ ,  $L_y$ , entonces  $L_y \ll L_x$ . También las condiciones en las paredes paralelas al eje  $x$  cumplen las condiciones de no-flujo, mientras que las paredes paralelas al eje  $y$  cumplen condiciones periódicas, lo cual evidencia las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial X, Y}{\partial y} \Big|_{\Omega} (x, y, t) = 0 \quad (\text{Problema de Neumann}).$$

y

$$X, Y \Big|_{\Omega} (x, y, t) = X, Y \Big|_{\Omega} (x + x_{const.}, y, t) \quad (\text{condiciones periódicas}),$$

## 2.3. Advección

El efecto de flujo sobre el sistema, desde un movimiento relativo de un sistema de dos capas hasta un flujo de Poiseuille en un sistema de varias capas, incluye un término gradiente de la densidad  $X$  e  $Y$ :

$$\frac{V}{2} \frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{o} \quad \frac{V}{2} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad 1 - \text{dim} \quad (2.3.9)$$

y

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} X \quad \text{o} \quad \vec{V} \cdot \vec{\nabla} Y \quad 2 - \text{dim} \quad (2.3.10)$$

Entonces una vez planteadas los términos advectivos se da paso a la forma en diferencias finitas:

$$\frac{V}{2} \left( \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \quad 1 - \text{dim} \quad (2.3.11)$$

$$v(z) \left( \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \quad 2 - \text{dim} \quad (2.3.12)$$

$$\vec{v} = v(z)\hat{i}$$

donde  $C$  desempeña el rol de las densidades  $X$  e  $Y$ .

Finalmente la forma en diferencias finitas de la ecuación de reacción-difusión con advección:

**Modelo de 2 capas:**

$$\begin{aligned} \frac{X1_i^{k+1} - X1_i^k}{\Delta t} + \frac{V}{2} \left( \frac{X1_{i+1}^k - X1_{i-1}^k}{2\Delta x} \right) &= \frac{X1_{i+1}^k - 2X1_i^k + X1_{i-1}^k}{\Delta x^2} \\ &+ \mu(X2_i^k - X1_i^k) + f(X1_i^k, Y1_i^k) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$, i = 2, 3, \dots, n - 1;$

$$\begin{aligned} \frac{Y1_i^{k+1} - Y1_i^k}{\Delta t} - \frac{V}{2} \left( \frac{Y1_{i+1}^k - Y1_{i-1}^k}{2\Delta x} \right) &= \frac{Y1_{i+1}^k - 2Y1_i^k + Y1_{i-1}^k}{\Delta x^2} \\ &+ \mu(Y2_i^k - Y1_i^k) + g(X1_i^k, Y1_i^k) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$, i = 2, 3, \dots, n - 1;$

$$\begin{aligned} \frac{X2_i^{k+1} - X2_i^k}{\Delta t} + \frac{V}{2} \left( \frac{X2_{i+1}^k - X2_{i-1}^k}{2\Delta x} \right) &= \frac{X2_{i+1}^k - 2X2_i^k + X2_{i-1}^k}{\Delta x^2} \\ &+ \mu(X1_i^k - X2_i^k) + f(X2_i^k, Y2_i^k) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$, i = 2, 3, \dots, n - 1;$

y

$$\begin{aligned} \frac{Y_2^{k+1} - Y_2^k}{\Delta t} - \frac{V}{2} \left( \frac{Y_2^k - Y_1^k}{2\Delta x} \right) &= \frac{Y_2^k - 2Y_1^k + Y_0^k}{\Delta x^2} \\ \mu(Y_1^k - Y_2^k) + g(X_2^k, Y_2^k) & \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$, i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

**Modelo de varias capas:** Aquí se introduce el método en diferencias finitas para resolver el sistema ODE, Ecuaciones 1.6.61 y 1.6.62, para obtener la ecuación de autovalores.

$$\begin{aligned} \frac{X_{i,j}^{k+1} - X_{i,j}^k}{\Delta t} + v(j) \left( \frac{X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) &= \frac{X_{i+1,j}^k - 2X_{i,j}^k + X_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{X_{i,j+1}^k - 2X_{i,j}^k + X_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} + f(X_{i,j}^k, Y_{i,j}^k) \\ &, i = 2, 3, \dots, n - 1, j = 2, 3, \dots, m - 1; \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{Y_{i,j}^{k+1} - Y_{i,j}^k}{\Delta t} + v(j) \left( \frac{Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k}{2\Delta x} \right) &= d \frac{Y_{i+1,j}^k - 2Y_{i,j}^k + Y_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \\ &+ d \frac{Y_{i,j+1}^k - 2Y_{i,j}^k + Y_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} + g(X_{i,j}^k, Y_{i,j}^k) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1, j = 2, 3, \dots, m - 1.$$

con las condiciones de frontera:

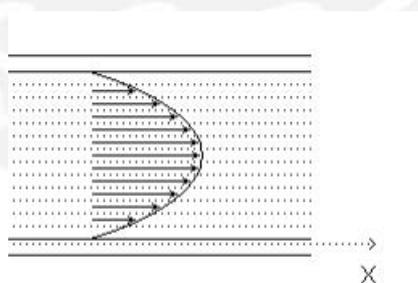
$$\frac{\partial X, Y}{\partial y} \Big|_{\Omega} (x, y, t) = 0 \quad (\text{Problema de Neumann}).$$

$$X, Y \Big|_{\Omega} (x, y, t) = X, Y \Big|_{\Omega} (x + x_{const.}, y, t) \quad (\text{condiciones periódicas}),$$

## Capítulo 3

### Resultados

En este capítulo se dará aplicación al modelo de reacción-difusión bajo el efecto de un flujo de corte. El arreglo físico que consideramos serán dos líneas de flujo con módulos de velocidad igual,  $V/2$ , pero con direcciones contrarias. En el cual la difusión a lo largo de la línea de difusión es representada por el término  $D\partial^2 C/\partial^2 z$  y la difusión entre las capas será proporcional al factor  $\mu$  el cual representa cuan “fuerte” es la difusión entre ambas capas. Por otro lado se tiene el sistema bidimensional que tendrá un ancho de  $a$  y el perfil de velocidad dentro de él, Poiseuille [16] - Fig. (3.1), tendrá una velocidad promedio de  $V$ , donde  $V$  es el máximo valor que alcanza dicho perfil de velocidad.



**Figura 3.1:** Flujo Parabólico

### 3.1. Soluciones estacionarias del modelo de Lotka-Volterra

El modelo de Lotka-Volterra basa su estructura y potenciales soluciones en los siguientes parámetros:  $r_0$ ,  $x_0$ ,  $k$ ,  $k_f$ . Los valores para los parámetros ha emplear en el análisis presente serán:  $r_0 = 0,24$ ,  $x_0 = 44$ ,  $k = 1,3$  y  $k_f = 0,115$  [11]. En base al sistema definido bajo los parámetros anteriormente mencionados, el modelo de Lotka-Volterra modificado sin difusión brindará 3 soluciones no-triviales para las especies  $X$  e  $Y$ . Los valores de  $X$  e  $Y$  mencionados debajo son soluciones estacionarias estables que cumple todas las condiciones de Turing, Ecuaciones 1.3.16, 1.3.17, 1.3.18 y 1.3.20, donde para la ecuación 1.3.18 se obtiene  $d > 1.2454$  indicando como condición necesaria que el valor para  $d$  es positivo dando lugar a la posibilidad de alcanzar las inestabilidades para la formación de patrones:

$$\begin{aligned} X &= 8,293726584 \\ Y &= 1,392353884 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Las soluciones siguientes indican valores estacionarios, pero inestable para el sistema sin difusión

$$\begin{aligned} X &= 11,48287581 \\ Y &= 1,703107227 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

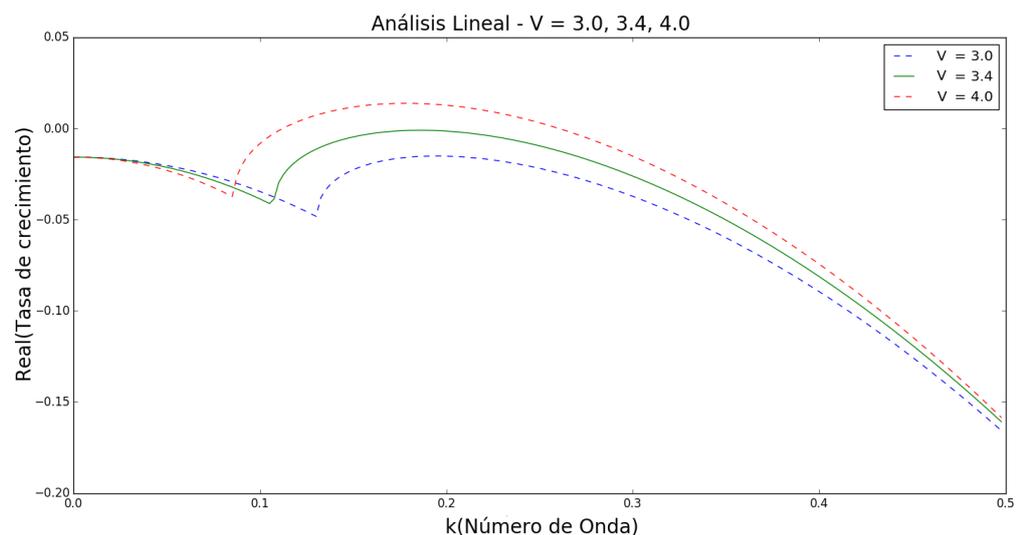
Finalmente, la solución aquí mencionada es estacionaria y estable. En este caso  $f_x = -0.0075518$  y  $g_y = -0.244022$  indicando que ambas concentraciones  $X$  e  $Y$  son inhibidores. Esto no permite satisfacer la condición  $df_x + gy > 0$  para varlores de  $d$  positivos, por lo cual no se encontraran patrones de Turing a partir de esta solucion homogenea.

$$\begin{aligned} X &= 22,22339761 \\ Y &= 2,121930191. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

La solución con la que se trabajará la formación de patrones estará basada en la solución estacionaria-estable que cumple las condiciones de Turing.

## 3.2. Modelo de dos capas

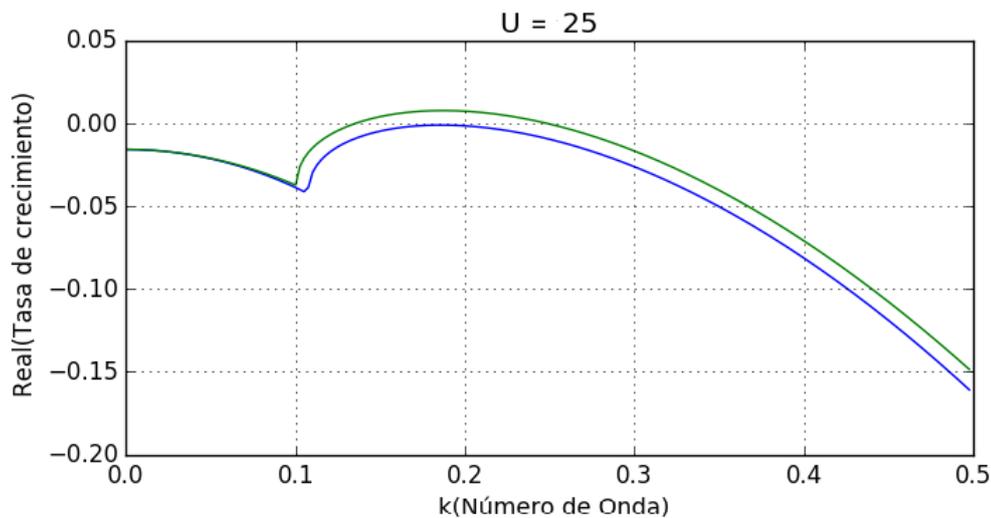
Se hará un análisis general de la estabilidad lineal según indica la Ec. 1.6.57. Donde la forma matricial de 1.6.57 contiene un vector que incluye las amplitudes de las perturbaciones, las cuales al tener que ser no triviales da lugar a que el determinante la matriz que contiene los factores  $k$  y  $\sigma$ , brinde una relación entre los mismos. Según se indica en el análisis de estabilidad lineal el valor de  $\sigma$  representará la tasa de crecimiento, el valor de  $k$  al número de onda y el parámetro  $\mathbf{V}$  del factor  $\pm V/2$  la velocidad, a continuación se mostrará la dependencia entre  $k$  y  $\sigma$ , tasa de crecimiento, para un parámetro de acople  $\mu = 25$  :



**Figura 3.2:** Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para ( $\mathbf{V} = 3.4$ ) con valores por debajo ( $\mathbf{V} = 3.0$ ) y encima ( $\mathbf{V} = 4.0$ ) del valor crítico.

La figura 3.2 fue analizada para un factor de acople  $\mu = 25$ . La curva azul correspondiente al parámetro  $V = 3.0$  tiene todos sus valores negativos lo que hace que el sistema para esos parámetros sea estable. La curva verde correspondiente al parámetro 3.4 muestra una curva que tiene la mínima cantidad de puntos iguales al valor cero para la tasa de crecimiento, llamando de esta manera a  $V = 3.4$  valor crítico. La curva roja tiene una cantidad no nula de puntos positivos para la tasa de crecimiento, indicando que el sistema que representa dicha curva alcanza la inestabilidad para ciertos valores de número de onda  $k$ . A continuación se realizará el

análisis lineal para la Ec. 1.6.57, contrastando dos curvas, una que toma en cuenta el flujo de corte y otra la difusividad efectiva en ausencia de flujo. Los sistemas se trabajarán para una velocidad de  $V = 3.4$ , mostrando que para el parámetro  $\mu = 25$  las curvas de análisis lineal que consideran flujo y la que toma en cuenta la difusividad efectiva son muy parecidas [10]:



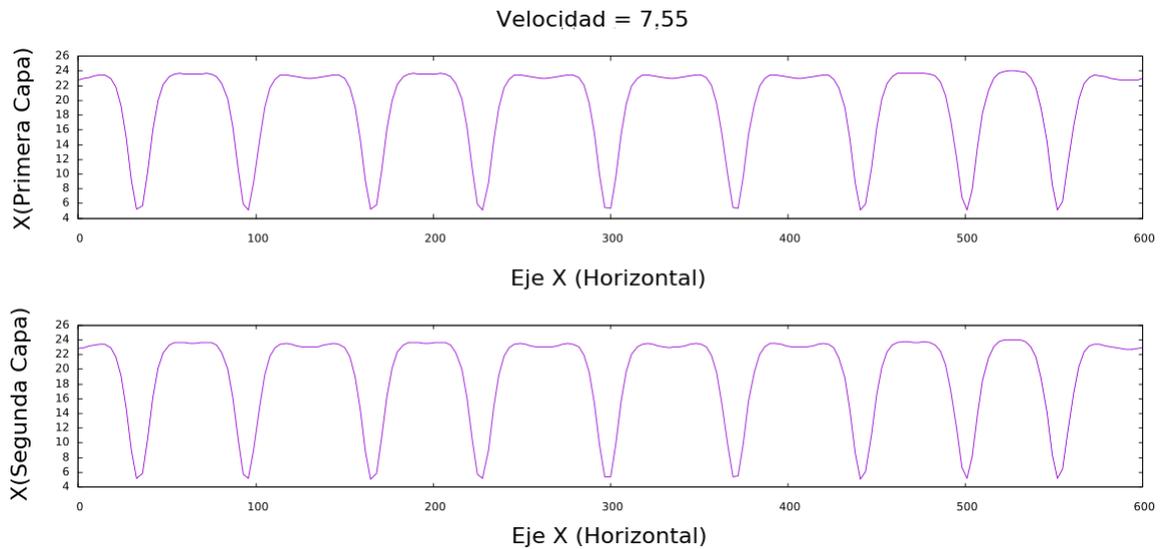
**Figura 3.3:** Se muestra la relación de dispersión para el modelo de dos capas (Línea verde) y se compara con la relación de dispersión que incluye la aproximación de Taylor (Línea azul) para la velocidad 3,4. Todos los valores analizados fue realizado para distintos valores del parámetro de acople  $\mu$

Al analizar la gráfica 3.3 se observa que para un factor de acople  $\mu = 25$  las curvas de análisis lineal considerando flujo y difusividad efectiva guardan gran semejanza. El valor de  $\mu = 25$  fue usado en la referencia [11] con alto grado de fiabilidad.

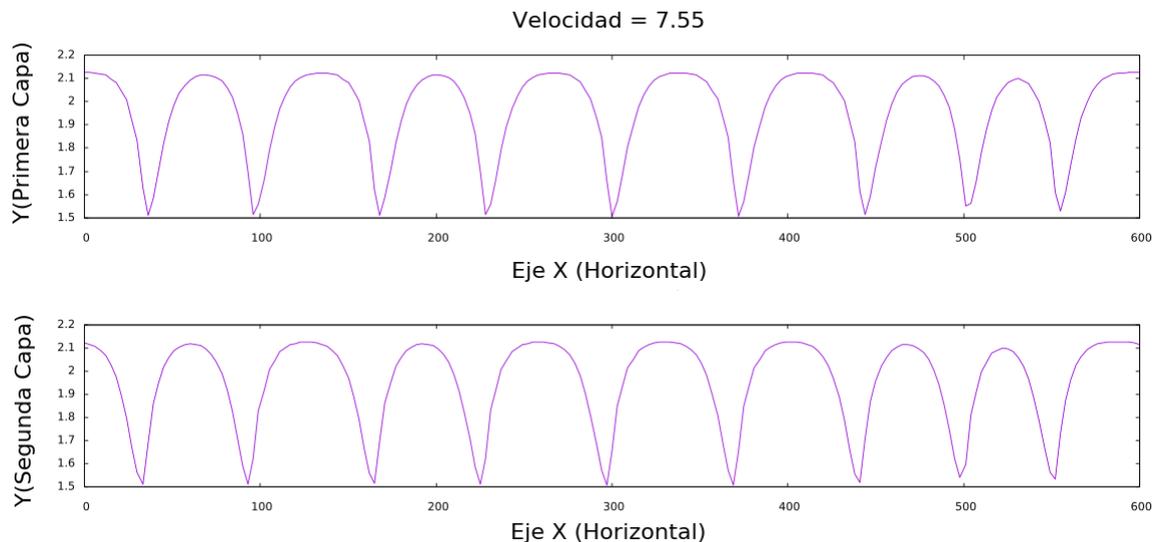
### 3.2.1. Formación de patrones de Turing

En base a la solución estacionaria estable  $X = 8.293726584$  e  $Y = 1.392353884$  que permite la formación de patrones de Turing y conociendo de antemano la mínima velocidad a partir de la cual se puede formar los patrones por efecto del flujo,  $V = 3.4$ , se analizará la formación de patrones en el modelo de Lotka-Volterra modificado. Los resultados a mostrar se analizarán en base a la velocidad  $V = 7.55$  que cumple con ser mayor que la velocidad crítica. Para encontrar los patrones se resuelve el

sistema no lineal formado por las ecuaciones 1.6.53, 1.6.54, 1.6.55 y 1.6.56 de acuerdo al método numérico de elementos finitos descrito en el Capítulo 2. Los resultados de formación de patrones para las especies  $X$  e  $Y$  en sus dos capas es la siguiente:



**Figura 3.4:** Formación de patrones para la especie  $X$ , en la capa 1 y 2 por efecto del flujo,  $V = 7,55$



**Figura 3.5:** Formación de patrones para la especie  $Y$ , en la capa 1 y 2 por efecto del flujo,  $V = 7,55$

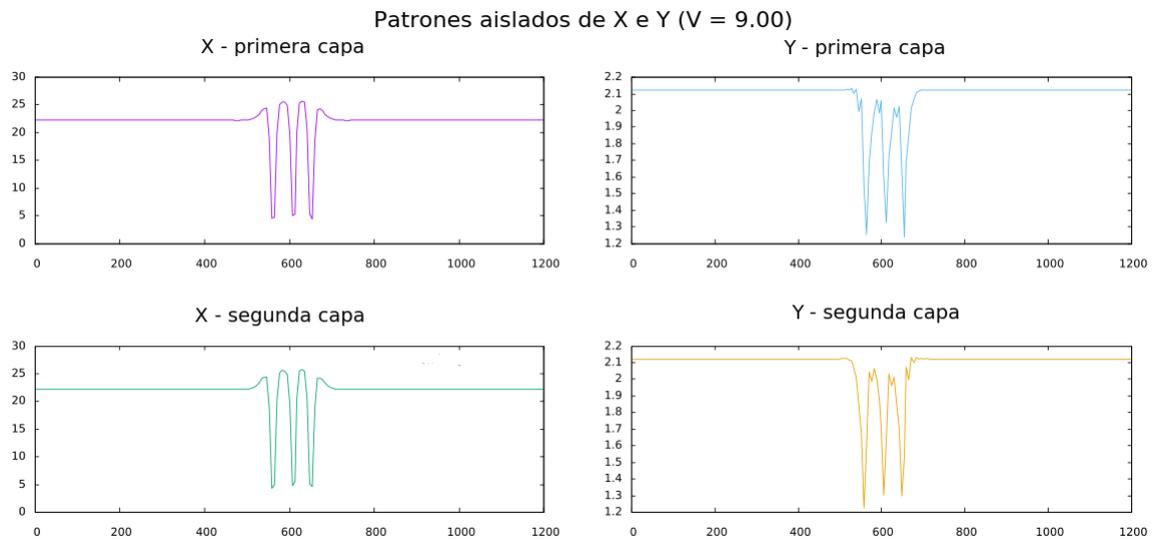
Las gráficas 3.4 y 3.5 muestran estructuras estacionarias y estables. Dichas estructuras son periódicas a lo largo del eje  $X$ , de igual forma están bien definidas en todo

su dominio.

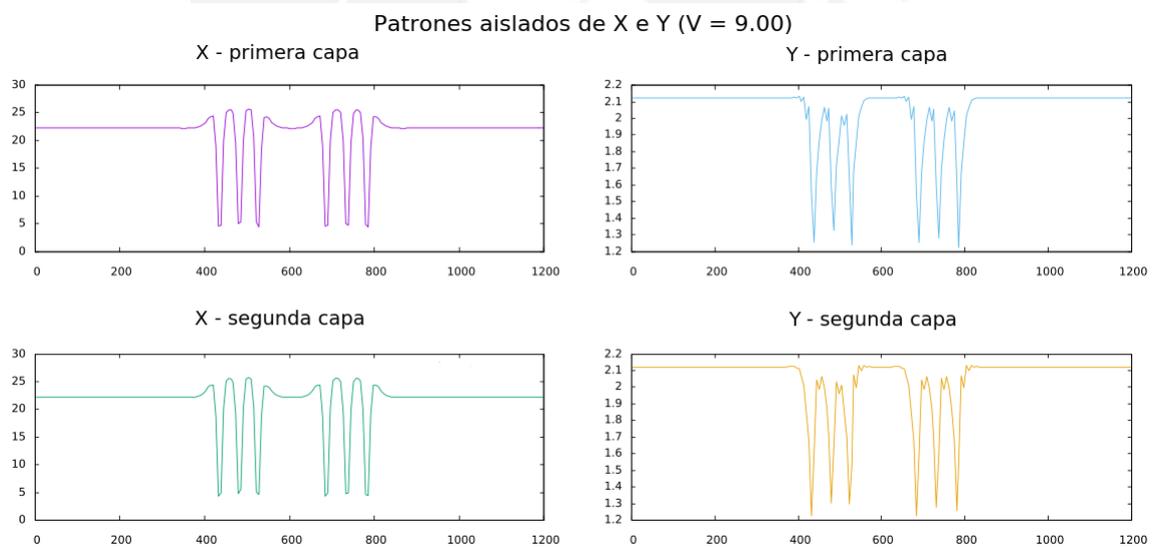
### 3.2.2. Formación de patrones aislados

A continuación se empleará la solución estacionaria estable y que cumple las condiciones de Turing como se hizo anteriormente. En adición se tomará también la solución estacionaria y se estable que no cumple las condiciones de Turing, siendo la finalidad del mismo poder crear una alternación de ambas soluciones alrededor del eje X. La sucesión de las soluciones estables se hace con el objetivo de formar los patrones en la región que tenga la solución que cumple la condición de Turing y mantener invariable las zonas donde la solución no cumpla las condiciones de Turing. Los presentes resultados seguirán la siguiente estructura:

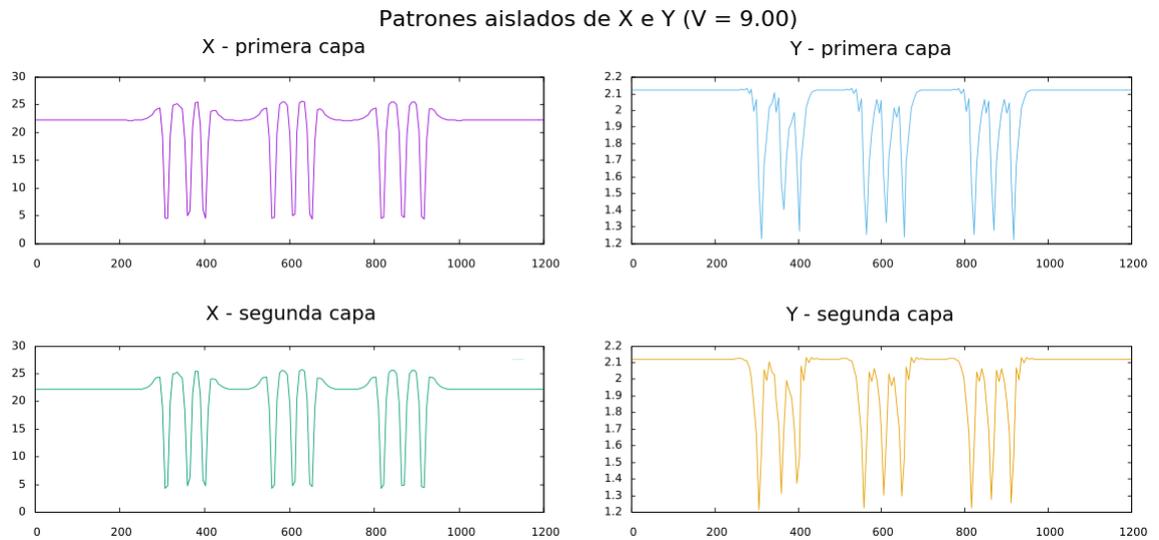
- La primera se divide en tres zonas, dos bordes y una central, la zona central contará con la solución que cumple las condiciones de Turing mientras los bordes con la que no cumple.
- La segunda cuenta con cinco zonas, dos bordes amplios y tres zonas centrales, donde las tres zonas interiores el orden **Turing - No Turing - Turing** donde Turing es una zona que cumple las condiciones de Turing. Los bordes contendrán la solución que no cumple las condiciones de Turing.
- La tercera estructura es una estructura de 7 zonas, los bordes son las zonas más amplias que contienen la solución que cumple las condiciones de Turing y cinco zonas interiores que siguen el siguiente orden **Turing - No Turing - Turing - No Turing - Turing** donde El significado de este arreglo es análogo a la explicación dada para la segunda estructura.



**Figura 3.6:** Grilla de 200 puntos, se usa 20 puntos (centrados) que cumple las condiciones de Turing. Densidades  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  y  $Y_2$  con velocidad ( $V = 9,00$ )



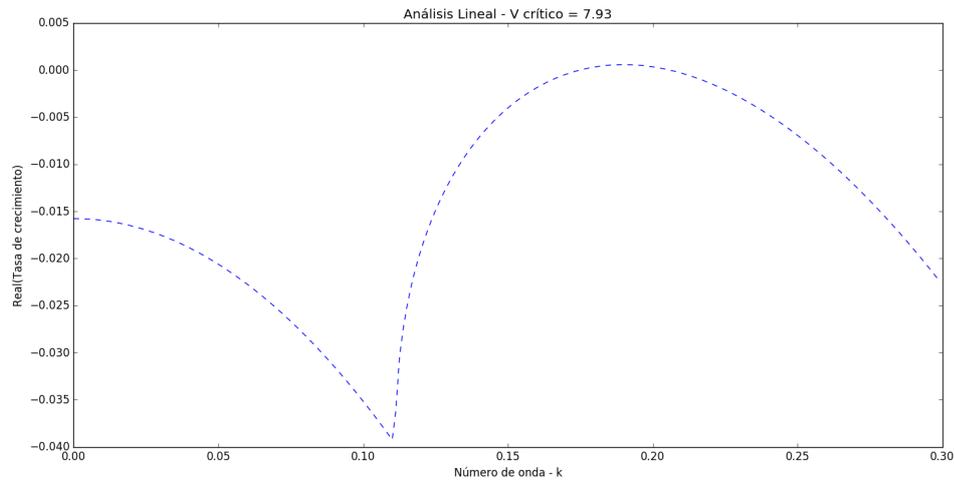
**Figura 3.7:** Segundo arreglo, donde las densidades  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  y  $Y_2$  están bajo efecto de la velocidad ( $V = 9.00$ )



**Figura 3.8:** Tercer arreglo, donde las densidades  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  y  $Y_2$  están bajo el efecto de la velocidad ( $V = 9.00$ )

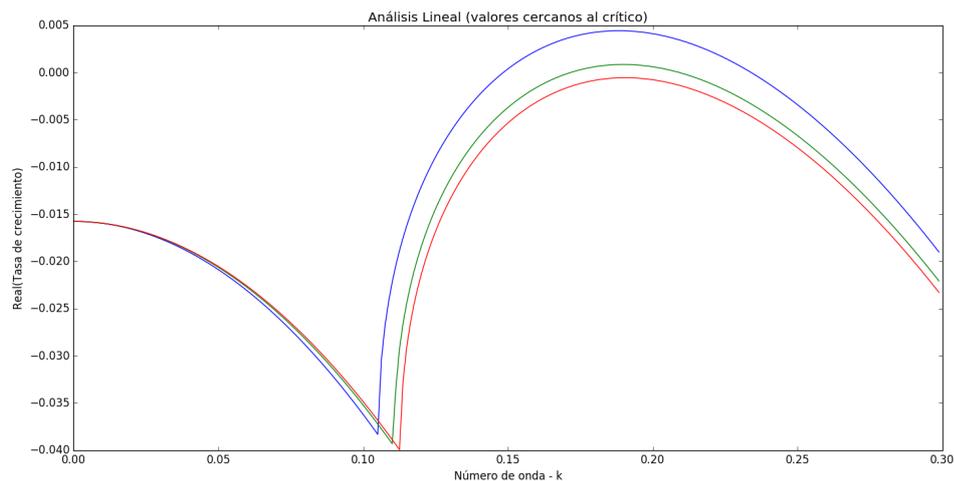
### 3.3. Modelo bidimensional

Para el modelo bidimensional se hará el análisis de estabilidad lineal según lo indicado en las ecuaciones 1.6.61 y 1.6.62. En analogía al análisis de estabilidad lineal para el modelo de dos capas, las ecuaciones 1.6.61 y 1.6.62 brindarán una estructura matricial, donde las dimensiones son las que se obtienen en el modelo de dos capas por el número de capas que se use en el bidimensional, que contiene un vector de las amplitudes de las perturbaciones y ya que estas no son triviales, entonces el determinante de la matriz cuadrada debe ser cero, dando lugar a una relación desde la cual se puede analizar el comportamiento de  $\sigma$  en función de  $k$ . Donde  $\sigma$  representa la tasa de crecimiento, el valor de  $k$  el número de onda y  $V$  el promedio del perfil de velocidad de Poiseuille. A continuación se muestra la dependencia lineal entre  $k$  y  $\sigma$  para una velocidad promedio,  $V = 7.91$ :



**Figura 3.9:** Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para  $(V = 7.91)$ . El análisis lineal se realizó discretizando el sistema ODE en 20 capas.

La figura 3.9 fue analizada para una velocidad promedio  $V = 7.91$ , donde se observa que dicha curva alcanza la máxima cantidad de ceros posibles para la tasa de crecimiento sin llegar a tener valores positivos, por tanto a dicho valor  $V = 7.91$  se llamará crítico. A continuación buscará observar como se comportan los valores de la velocidad promedio cercanos al crítico:



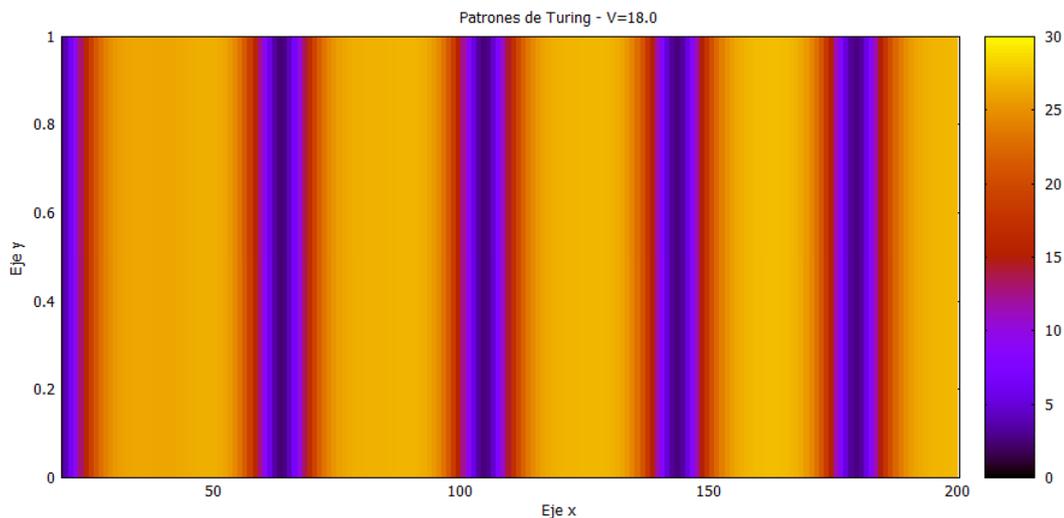
**Figura 3.10:** Análisis de estabilidad lineal. Curva crítica para  $V = 7.91$  con valores por debajo ( $V = 7.83$ ) y encima ( $V = 8.2$ ) del valor crítico.

La figura 3.10 fue analizada para una velocidad promedio  $V = 7.91$ . La curva roja con  $V = 7.83$  tiene todos sus valores de  $\sigma$  negativos por tanto el sistema es estable

por efecto del flujo, la curva roja que corresponde al valor crítico tiene la máxima cantidad de valores cero para  $\sigma$ , lo cual muestra una frontera entre la estabilidad y una posible inestabilidad por consecuencia del flujo y finalmente se tiene una curva azul que corresponde a  $V = 8.2$ , lo cual indica que ya existen de  $k$ , para los cuales  $\sigma$  alcanza valores positivos lo cual ocasionará que el sistema genere inestabilidades que puede dar paso a la formación de patrones.

### 3.3.1. Formación de patrones de Turing

En base a la solución estacionaria estable  $X = 8.293726584$  e  $Y = 1.392353884$  que cumple con las condiciones de Turing y conociendo de antemano la mínima velocidad a partir de la cual se puede formar los patrones por efecto del flujo,  $V = 7.91$ , se analizará la formación de patrones en el caso bidimensional. Los resultados a mostrar se analizarán en base a la velocidad  $V = 18.00$  que cumple con ser mayor que la velocidad crítica. Los resultados de formación de patrones para las especies  $X$  e  $Y$  del caso bidimensional corresponde a:



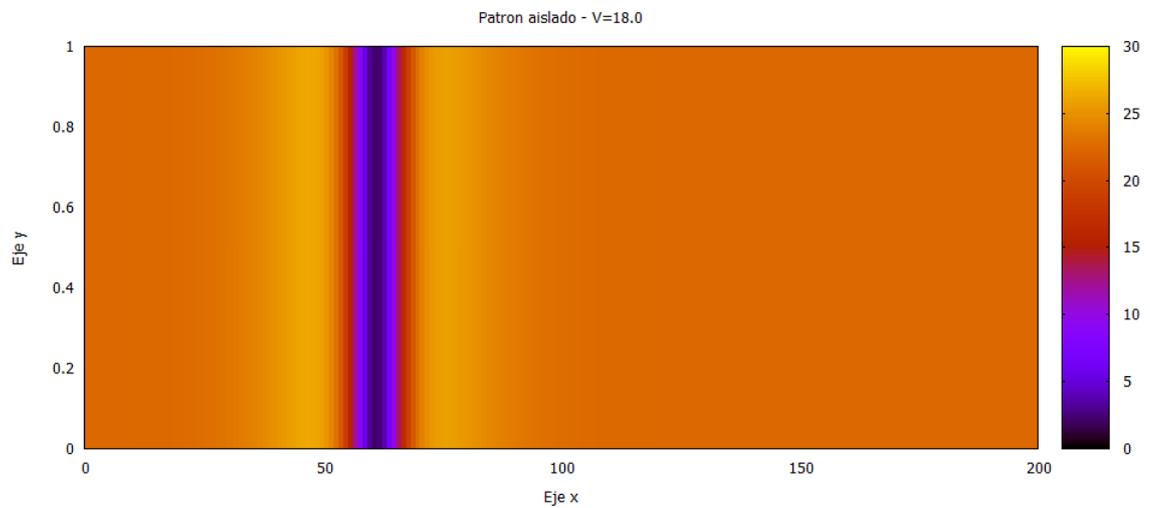
**Figura 3.11:** Formación de patrones para la especie  $X$ , por efecto del flujo de Poiseuille con velocidad promedio  $V = 18.0$ .

La gráfica 3.11 muestra una estructura definida, estacionaria y estable en la extensión del plano  $XY$ , dicha formación estable evidencia la formación de patrones bidimensionales en el modelo de Lotka-Volterra modificado.

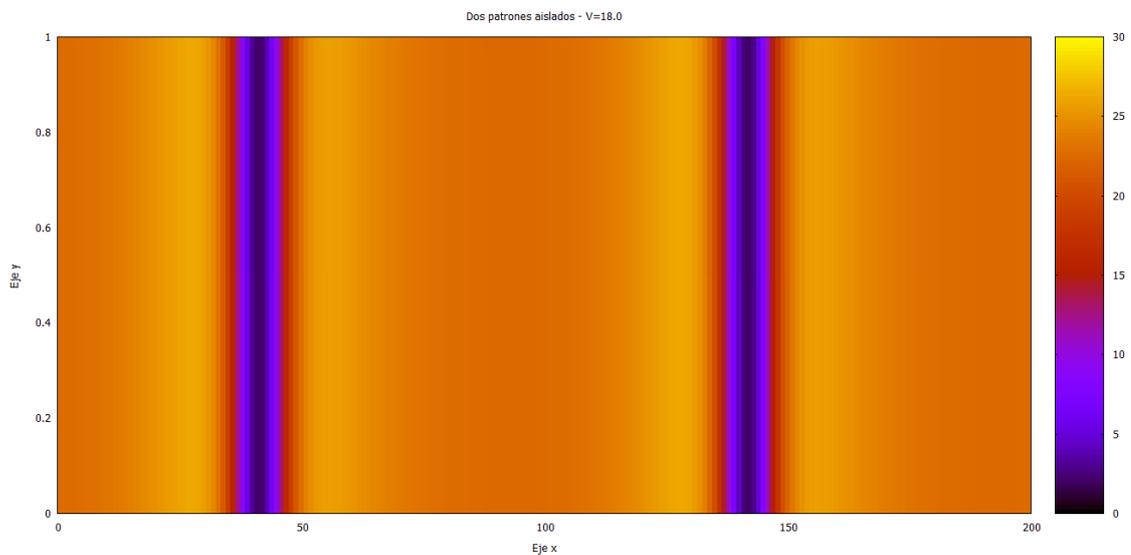
### 3.3.2. Formación de patrones aislados

Para la formación de patrones aislados se empleará la solución estacionaria estable y que cumple las condiciones de Turing. En adición se tomará también la solución estacionaria y estable que no permite la formación de patrones de Turing, siendo la finalidad del mismo poder alternar ambas soluciones en distintas regiones del eje X. La alternación de las soluciones estables se hace con el objetivo de formar los patrones en la región que tenga la solución que cumple la condición de Turing y mantener invariable las zonas donde la solución no cumpla las condiciones de Turing. Los presentes resultados seguirán la siguiente estructura:

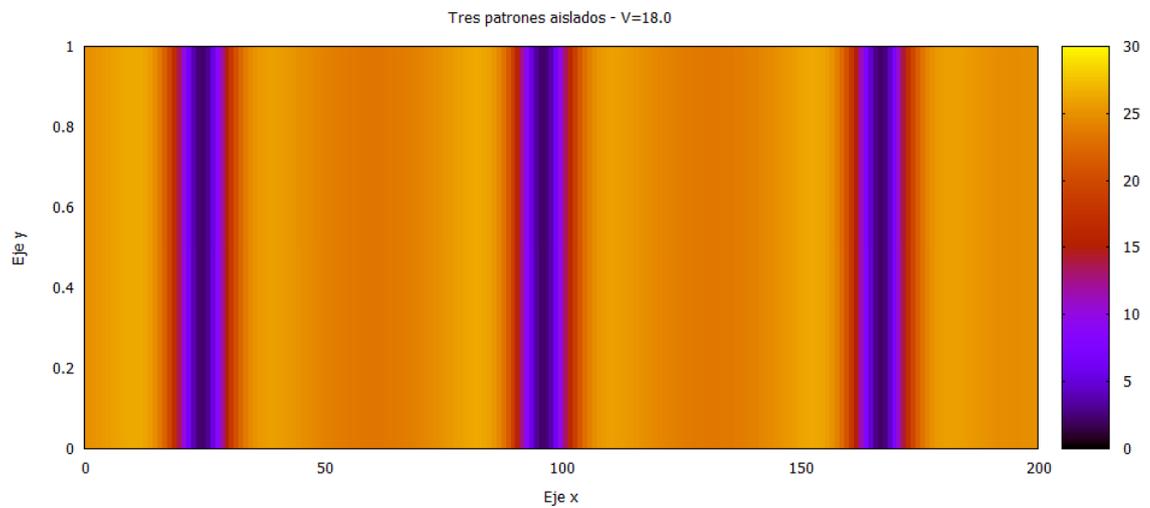
- La primera se divide en tres zonas, dos bordes y una central, la zona central contará con la solución que cumple las condiciones de Turing mientras los bordes con la que no cumple.
- La segunda cuenta con cinco zonas, dos bordes amplios y tres zonas centrales, donde las tres zonas interiores el orden **Turing - No Turing - Turing** donde Turing es una zona que cumple las condiciones de Turing. Los bordes contendrán la solución que no cumple las condiciones de Turing.
- La tercera estructura es una estructura de 7 zonas, los bordes son las zonas más amplias que contienen la solución que cumple las condiciones de Turing y cinco zonas interiores que siguen el siguiente orden **Turing - No Turing - Turing - No Turing - Turing** donde El significado de este arreglo es análogo a la explicación dada para la segunda estructura.



**Figura 3.12:** Grilla de 200 puntos en el eje x, se usa 20 puntos (centrados) que cumple las condiciones de Turing. Especie X con  $V = 18.0$



**Figura 3.13:** Segundo arreglo, donde la especie X está bajo efecto de la velocidad promedio  $V = 18.00$



**Figura 3.14:** Tercer arreglo, donde la especie  $X$  está bajo efecto de la velocidad promedio  $V = 18.00$

Se puede observar que a pesar de emplear dos soluciones estacionarias, la solución estacionaria que no cumple las condiciones de Turing no afectó las regiones donde si se cumple dichas condiciones, permitiendo de esta manera la formación de patrones de Turing aislados.

# Capítulo 4

## Conclusiones

1. El flujo de corte genera una inestabilidad en la solución homogénea en el sistema de reacción-difusión-advección lo cual causa la formación de patrones de Turing, Fig 3.2 y Fig. 3.10. La influencia del flujo de corte sobre el sistema de reacción-difusión-advección, Ec. 1.4.40, fue evaluado usando un análisis de estabilidad lineal.
2. Se observa formación de patrones de Turing en el sistema de dos capas con el sistema Lotka-Volterra modificado para velocidades por encima de los valores críticos,  $V_c = 3.4$ , Fig. 3.4 y Fig. 3.5. Los valores críticos que se emplean como indicador de la formación de los patrones de Turing por efecto del flujo de corte son obtenidos del análisis de las ecuaciones no lineales del modelo de Lotka-Volterra modificado, 1.6.53, 1.6.54, 1.6.55 y 1.6.56. Al obtener dichos valores críticos, se distinguió los resultados entre los que mostraban inestabilidades, formación de patrones de Turing, y los que se mantenían homogéneos. Un análisis semejante se hizo en [10] evidenciando la utilidad de este procedimiento.
3. Se observa formación de patrones de Turing en el sistema bidimensional con el modelo Lotka-Volterra modificado para velocidades por encima de los valores críticos,  $V_c = 7.91$ , Fig. 3.11. Los valores críticos que se emplean como indicador de la formación de los patrones de Turing por efecto del flujo de corte son obtenidos del análisis de las ecuaciones no lineales del modelo de

Lotka-Volterra modificado, 1.6.58 y 1.6.59. En la misma manera que el caso de dos capas, se distinguió los resultados entre los que mostraban inestabilidades, formación de patrones de Turing, y los que se mantenían homogéneos, siendo el valor crítico aquel que se encontraba en la frontera entre los dos casos.

4. En el modelo de dos capas empleando el sistema no-lineal, 1.6.53, 1.6.54, 1.6.55 y 1.6.56, y para valores de velocidad,  $V = 7.55$ , por encima del valor crítico se observan patrones extensos en el dominio, Fig. 3.4 y Fig. 3.5. Dichos patrones se forman a partir del estado homogéneo que permite la inestabilidad de Turing aplicado a todo el dominio, siendo este perturbado con valores aleatorios muy pequeños.
5. En el modelo bidimensional al analizar el sistema no-lineal, 1.6.58 y 1.6.59, y para valores de velocidad,  $V = 18.00$ , por encima del valor crítico se observan patrones extensos en el dominio, Fig. 3.11. El sistema bidimensional consta de una estructura de 20 capas. Se usan condiciones iniciales similares al caso de dos capas.
6. Se observa formación de patrones aislados en el modelo de Lotka-Volterra modificado empleando sus ecuaciones no lineales en el caso de dos capas, Fig. 3.6, Fig. 3.7 y Fig. 3.8, empleando la solución estacionaria estable que cumple condiciones de Turing, Ec. 3.1.1, y solución estacionaria estable que no forma patrones de Turing, Ec. 3.1.3. Para la obtención de los patrones aislados, se tuvo que diseñar arreglos entre las soluciones estables que cumplen las condiciones de Turing y la que no, observando que cuando la región restringida a la solución que cumplía las condiciones de Turing era muy pequeña (20 puntos de la grilla en el eje x sobre un total de 160) entonces los patrones no se formaban.
7. Se observa formación de patrones aislados en el modelo de Lotka-Volterra modificado bidimensional, Fig. 3.12, Fig. 3.13 y 3.14, empleando solución estacionaria estable que cumple condiciones de Turing, Ec. 3.1.1, y solución estacionaria estable que no forma Turing Ec. 3.1.3. Para la obtención de los

patrones aislados, se tuvo que diseñar arreglos estableciendo condiciones iniciales similares a las empleadas en el modelo de dos capas. Observando que cuando la región restringida a la solución que cumplía las condiciones de Turing era muy pequeña, entonces los patrones no se formaban, siendo la proporción adecuada para la formación de patrones aislados la de 20 puntos de grilla en el eje  $x$  consecutivos sobre un dominio de 200.

8. El sistema de Turing que se analiza muestra una biestabilidad entre los patrones de Turing y una solución homogénea en el espacio. Las soluciones sobre el sistema no-lineal de Lotka-Volterra modificado se alcanzan con ambas, de modo que las condiciones iniciales se puede intercalar entre las dos. Los patrones aislados, Figuras 3.12, 3.13 y 3.14, reflejan el intercalamiento que puede existir en la convergencia del sistema de Lotka-Volterra modificado, lo cual es una confirmación de la biestabilidad que también fue analizado en [11] sobre un sistema Brusselator.
9. La inestabilidad sobre el sistema de Lotka-Volterra modificado se obtiene por efecto de la dispersión de Taylor, ya que la constante de difusión modificado por el efecto de Taylor tiene la forma  $D_{ef} = D_0 + (a^2V^2)/(210D_0)$ . Entonces si  $d_{Turing} > 1$  es la difusividad relativa para la cual se alcanza la formación de patrones en un sistema sin advección, si tomamos las difusividades del sistema sean  $D_Y = 1/d_{Turing}$  y  $D_X = 1,0$ , para lo cual  $d = D_Y/D_X$  es igual a  $d = 1/d_{Turing}$  lo cual implica que no se forman patrones de Turing dado que ahora  $d < 1$ . Una vez que se incluye el flujo, empleando la aproximación de Taylor tendremos  $d = (D_Y + (a^2V^2)/(210D_Y))/(D_X + (a^2V^2)/(210D_X))$ , donde  $D_Y = 1/d_{Turing}$  y  $D_X = 1,0$ , entonces cuando la velocidad es relativamente grande  $V \rightarrow \infty$  se entiende que  $d = D_X/D_Y$ , lo cual conlleva a que  $d \simeq d_{Turing}$ .

# Bibliografía

- [1] S. Kondo (2010), **Reaction - Diffusion Model as a Framework for Understanding Biological Pattern Formation** **329**, Science 1616.
- [2] J. Murray (2003), **Mathematical Biology**, Springer.
- [3] H. Meinhardt (1982), **Models of Biological Pattern Formation**, Academic Press.
- [4] H. G. Purwins, H. Bodeker y A. Liehr (2005), **Dissipative solitons in reaction-diffusion systems**, Lectures Notes in Physics **661**, Springer Berlin
- [5] A. Turing (1952), **Chemical basis of morphogenesis**, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B **237**, Biological Systems
- [6] P. C. Fife (1979), **Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems**, Lecture Notes in Biomathematics B **28**, Springer Berlin
- [7] J. Smoller (1994), **Shock Waves and Reaction Diffusion Equations**, Second Edition, Springer
- [8] G. Taylor (1953), **Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube**, Proceedings of the Royal Society of London. **Series A**, Mathematical and Physical Science
- [9] J. Mestel (2002), **Taylor Dispersion Shear augmented diffusion**, Lecture Handout for Course M4A33, Imperial College.
- [10] D. Vasquez (2004), **Chemical Instability Induced by a Shear Flow**, Physical Review Letters **93**, Number 10.

- [11] D. Vasquez (2008), **Chemical pattern formation induced by a shear flow in a two-layer model**, Physical Review E **78**.
- [12] A. Bazykin (1998), **Nonlinear Dynamics of Interacting Populations**, World Scientific.
- [13] E. McGehee, N. Schutt (2007), **Bifurcations, and Temporal and Spatial patterns of a modified Lotka-Volterra model**, International Journal of Bifurcation and Chaos **18**.
- [14] S. Koonin (1990), **Computational Physics**, West View, Advance Book Program.
- [15] R. Burden (2011), **Análisis numérico**, Cengage Learning.
- [16] S. Suter (1993), **The history of Poiseuille's Law**, Annu. Rev. Fluid. Mech.
- [17] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1995), *An error bound for the finite element approximation of the Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy*, Numerische Mathematics, **72**, pp 1–20.
- [18] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1997), *Finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy with non-smooth free energy*, Numerische Mathematics, **77**, pp 1–34.
- [19] J. W. Barrett and J. F. Blowey (1999a), *An improve error bound for finite element approximation of a model for phase separation of a multi-component alloy*, IMA J. Numer. Anal. **19**, pp 147-168.
- [20] P. G. Ciarlet (1978), **The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland.
- [21] J. L. Lions (1969), **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites**, Dunod.
- [22] U. Alon (2006), **An introduction to Systems Biology**, Chapman and Hall.

- [23] H. R. Ueda (2007), **Cold Spring Harb. Symp Quant. Biol.** **72**, 365.
- [24] H. Meinhardt (1995), **The Algorithmic Beauty of Seashells**, Springer Verlag.
- [25] S. Kondo (2002), **The reaction-diffusion system: a mechanism for autonomous pattern formation in the animal skin**, *Genes to Cells* **7**, Blackwell Science
- [26] C. Holling (1965), **The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation**, *Mem. Entomol. Soc. Can.* **45**.

