PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN UN TEXTO DE PRIMERO DE SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

VANESSA ROCÍO ÁLVAREZ MEZA

Dirigido por

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2016

RESUMEN

El presente trabajo consiste en la descripción de la organización matemática que sobre los números racionales presenta un libro de texto de primero de secundaria peruano y su análisis a partir de los indicadores de completitud propuestos por Cecilio Fonseca.

Para desarrollarlo se tomó como base la Teoría Antropológica de lo Didáctico, cuyo concepto de praxeología dio herramientas para describir cómo aborda el tema de los números racionales el texto elegido, identificándose los tipos de tarea propuestos en las unidades “Fracciones” y “Números decimales” y las técnicas presentadas para realizarlas, así como las justificaciones involucradas.

En lo que se refiere a la metodología empleada, la investigación se encuentra dentro de un enfoque cualitativo, siendo de tipo bibliográfico.

Como resultado se encontró que el texto presentaba 9 tipos de tarea en la unidad “Fracciones” y 6, en la unidad “Números decimales”, que no en todos los casos mostraba técnicas que permitieran realizar dichos tipos de tarea y que casi no presentaba justificaciones a dichas técnicas, es decir, privilegia el saber hacer.

En relación a los indicadores de completitud, se identificó la organización matemática presentada no satisfacía el quinto indicador pero sí el cuarto y, en el caso de los demás, lo hacía en forma parcial, concluyéndose que se trata de una organización matemática relativamente completa.

Se halló además que no en el texto no se presenta mayor conexión entre las dos formas de representación de los racionales, limitándose a relacionarlas básicamente al pedir expresar un número dado en una de ellas en la otra.

Se evidenció también que busca presentar situaciones contextualizas a la vida cotidiana pero que, al hacerlo, solo utiliza racionales positivos, ya sea en su forma fraccionaria o decimal, planteando tareas muy similares a las que se proponen en primaria.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende analizar la organización matemática que sobre los números racionales presentan un libro de texto usado en primero de secundaria en el sistema educativo peruano a partir de los criterios de completitud de una organización matemática propuestos por Fonseca.

El trabajo está organizado en cuatro capítulos, el primero de los cuales presenta el planteamiento y justificación de nuestro problema de investigación. En él justificamos la importancia de analizar los libros de texto empleados en la escuela y la relevancia de tratar el tema de los números racionales, considerando tanto los negativos como los positivos, y sus dos formas de representación.

En el segundo capítulo se hace una presentación de la forma en que se trata el tema de los números racionales en la Educación Básica Peruana, considerando los contenidos propuestos en el Diseño Curricular Nacional, esto es, sus propiedades, representaciones y operaciones.

En el tercer capítulo, se hace una breve descripción de los principales conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y los indicadores de completitud de una organización matemática, presentándose ejemplos de tareas relacionadas a los números racionales que cumplen con ellos.

El cuarto capítulo contiene el análisis de la organización matemática que presenta sobre los racionales un libro de texto usado en primero de secundaria en el Perú, identificando en qué medida satisface los indicadores de completitud de una organización matemática.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En el presente capítulo se hará un breve recuento de las principales investigaciones relacionadas con nuestro tema de estudio; además se delimitará el problema de investigación, señalando la importancia de nuestro trabajo y se presentarán los objetivos del mismo.

1.1 Antecedentes

Siendo de nuestro interés la forma en que presentan los textos escolares los números racionales, buscamos investigaciones relacionadas tanto a dicho objeto matemático como al análisis de textos, encontrando algunas que tratan sobre los números racionales, otras que se centran en el análisis de textos empleando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y los indicadores de completitud de Fonseca (2004) y otras que analizan textos en relación a los racionales sin utilizar dicha teoría.

Entre los trabajos que utilizaban la TAD como marco teórico teniendo como punto de análisis los indicadores de completitud de Fonseca (2004) tenemos la realizada por Gonzales (2014) que tiene como objetivo describir y analizar la organización matemática propuesta para la enseñanza de los conceptos de escala y proporción de un texto de Matemáticas para arquitectos.

Para desarrollar su investigación, la autora usa una metodología cualitativa con enfoque documental, explicando que ésta investiga información sobre hechos en documentos a partir de preguntas o hipótesis de interés.

Posteriormente, describe el capítulo correspondiente a proporcionalidad, identificando en los ejemplos propuestos los tipos de tarea y técnicas presentes, para luego describir la organización matemática presente en el texto y analizarla considerando los indicadores de completitud de Fonseca.

Gonzales concluye que la organización matemática tal como la presenta el texto no puede ser considerada una praxeología puntual por tener tres tipos de tarea y que tampoco puede considerarse una praxeología local completa pues no satisfacía todos los indicadores de completitud o solo lo hacía en forma parcial.

Otro trabajo de análisis de textos basado en los indicadores de completitud es el de Becerra (2015), cuyo objetivo es describir y analizar la organización matemática que presenta un texto de quinto grado de primaria en relación a los cuadriláteros.

La autora dice que su investigación es cualitativo – descriptiva pues busca especificar las propiedades y características de un fenómeno indicando que es bibliográfica ya que está basada en el análisis de documentos.

Como parte de su trabajo, Becerra detalla los tipos de tareas, técnicas y tecnologías presentes en el texto, diferenciándolas en tres bloques: el primero centrado en el reconocimiento de rectas y ángulos, el segundo referido a la clasificación de los cuadriláteros y el tercero a las áreas y perímetros.

A continuación, la autora valora la organización matemática del texto a partir de los indicadores de completitud, concluyendo que se trata de una praxeología local relativamente completa y que la praxeología dominante era la del "saber hacer".

Consideramos estos dos trabajos de gran utilidad al nuestro pues analizan las organizaciones matemáticas presentes en textos a partir de los indicadores de completitud de Fonseca, teniendo como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico, dándonos ejemplo de cómo identificar tareas y técnicas y de la manera en que se debe verificar el grado de completitud de una organización matemática.

Nos parece importante también mencionar la investigación desarrollada por Carrillo (2012) cuyo objetivo fue analizar la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentaban en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria, texto oficial distribuido por el Ministerio de Educación del Perú a todos los alumnos de colegios estatales a nivel nacional.

En este trabajo se partió por identificar las concepciones de fracción presentes en el texto así como las tareas y técnicas que proponían. Se emplearon algunos elementos de la teoría antropológica de lo didáctico, como la noción de tareas, concluyéndose que las tareas y técnicas que se presentan no son muy explícitas. Se encontró que en el texto se usaron básicamente dos de las concepciones de fracción: parte – todo y como operador, predominando la primera.

Consideramos importante esta investigación pues aunque no se basa en los indicadores de completitud de Fonseca para el análisis del texto, tiene como marco teórico la Teoría antropológica de lo didáctico y está dedicada a las fracciones positivas que son punto de partida en la escuela para el trabajo con los números racionales, dándonos ejemplos tareas y técnicas utilizadas por los textos al tratar las fracciones.

Por otro lado, sobre los racionales, nos parece importante considerar la investigación de Gairín (1998), que estudia al número racional considerando sus dos representaciones: la decimal y fraccionaria. En este trabajo, el autor busca proporcionar a los estudiantes para maestros herramientas que les permitieran comprender mejor los números racionales, básicamente fortaleciendo las conexiones entre las notaciones decimal y fraccionaria.

Gairín enfatiza la importancia de introducir la fracción a través del modelo cociente para luego establecer conexiones entre este significado y las expresiones decimales, explicando por qué los otros significados no son apropiados para relacionar la representación fraccionaria de un racional con su expresión decimal.

Además, hace notar que el origen de las dificultades que se presentan al estudiar las representaciones fraccionarias y decimales se encuentra en que en la enseñanza se prioriza el significado parte – todo y en que éste no se relaciona con los otros significados, limitando la comprensión de los números racionales.

Este trabajo nos parece relevante pues rescata la importancia de relacionar las representaciones decimal y fraccionaria de los números racionales a través de un significado específico: el significado cociente.

Nos parece necesario considerar también el proyecto de investigación realizado por Gallardo y Saavedra (2011) ya que es el único que menciona a los racionales negativos. Éste está relacionado a los significados de los negativos fraccionarios que poseen los estudiantes de secundaria, mencionando la poca importancia que se le da en la escuela mexicana al tratamiento de los números negativos, planteándose como pregunta de investigación qué significados de las fracciones positivas deben tener los estudiantes para poder encontrarle significado y sentido a las fracciones negativas, presentando una propuesta de enseñanza relacionando los ámbitos didáctico e histórico.

Los autores mencionan que es importante que los alumnos dominen el significado de la fracción positiva para que puedan dar sentido de la fracción negativa en problemas no rutinarios y señalan que son los significados de medida, operador y cociente los que permiten concebir la fracción negativa.

Este trabajo aporta al nuestro pues, a diferencia de las demás investigaciones, hace referencia específicamente al número racional negativo, mencionando que su representación fraccionaria suele considerarse sólo como cociente de números con signo, por ejemplo, en la ecuación de la recta cuando se presenta una pendiente fraccionaria negativa y como solución de ecuaciones de primer o segundo grado, apareciendo repentinamente.

Además, señala que la mayoría de estudiantes no comprende realmente los números racionales, situación que genera dificultades no sólo en matemática sino también en física, donde se encuentra que no logran resolver problemas de cinemática usando álgebra por no entender los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades que involucran números positivos y negativos.

Finalmente, entre las investigaciones que se han realizado sobre la forma en que los textos presentan a los racionales, tenemos la realizada por Quispe (2008), que plantea como uno de sus objetivos específicos evaluar los significados del número racional utilizados en los libros de texto.

En el capítulo IV, el autor hace un análisis de los significados del número racional en los libros de texto peruanos considerando el programa curricular al que corresponden, el año de edición, conceptos, significados, sistemas de representación, problemas e ilustraciones representativos.

Quispe señala que se da un acentuado abuso de la resolución de ejercicios y que predomina el significado parte – todo en la enseñanza de los racionales, mencionando en sus conclusiones que en la etapa que comprende los años 1997 – 2005, se ha dejado de lado las definiciones formales de los racionales en los textos para dar unas menos elaboradas. Encontró también que si bien, los textos presentan los distintos significados del número racional, no son trabajados de manera sistemática, enfatizándose en el significado parte – todo y utilizando el significado cociente solo para justificar la necesidad de ampliar los enteros.

Consecuencia de la investigación de Quispe, tenemos la que desarrollara junto a Gallardo (2009), en ella se hace un análisis de la forma en que los libros de texto publicados en Perú entre los años 1963 y 2005 presentaban a los números racionales, realizando la revisión de 20 textos, 16 de primero de secundaria y 4 de segundo.

Para el análisis se considera la presencia de los significados (parte – todo, cociente, medida, razón y operador) y las representaciones empleadas, así como la inclusión de elementos históricos en su desarrollo didáctico y la contextualización de la fracción y sus aplicaciones en las tareas propuestas. Teniendo en cuenta la forma en que los textos presentan al número racional, los autores identificaron tres períodos: el primero comprende los textos publicados entre 1963 y 1973 y se caracteriza por concebir al número racional como la unión de un conjunto de números enteros y un conjunto de números fraccionarios; el segundo abarca de 1974 a 1995 donde se considera al número racional como el conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí y; el tercero que considera los textos publicados entre 1997 y 2005 en los que se define Q = $\left\{ \frac{a}{b} / a \in Z; b \in Z; b \neq 0 \right\}$.

Los autores concluyen que si bien en los últimos años hay más conciencia sobre lo importante que es contextualizar los contenidos matemáticos a la vida cotidiana del estudiante y mostrar sus aplicaciones, en los textos del último período, tampoco se considera el carácter histórico y contextualizado de las fracciones.

Estos trabajos son importantes pues analizan la evolución de la forma en la que textos de primero y segundo de secundaria presentan los números racionales en nuestro país; además de explicar los significados del número racional, aspecto que trataremos más adelante al mencionar aquellos que ayudan a la comprensión del racional no solo positivo y a relacionar sus dos representaciones.

1.2 Delimitación del problema de investigación

Nuestro trabajo pretende analizar la organización matemática que presentan los textos de primero de secundaria sobre los números racionales. Dicho tema está propuesto en el Diseño Curricular Nacional (2009), es decir, forma parte de la enseñanza obligatoria en nuestro país y debe desarrollarse en los primeros años de la educación secundaria, específicamente, en primero y segundo año, grados en los que los alumnos suelen tener entre 12 y 14 años de edad.

Según el Diseño Curricular Nacional (2009), la educación básica peruana se organiza en siete ciclos, correspondiendo los dos últimos a la educación secundaria. El VI ciclo comprende el primer y segundo año de secundaria y el

VII, el tercero, cuarto y quinto grado de secundaria. Además, organiza el área de Matemática en tres componentes: Número, relaciones y funciones; Geometría y medición y Estadística y probabilidad. Se consideran como capacidades del área el razonamiento y demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas.

En lo que se refiere a la componente Número, relaciones y funciones, en el que se ubican los números racionales, se señala que esta *se refiere al conocimiento de los mismos y a las propiedades de las operaciones y conjuntos,* planteando como competencia a lograr al término del VI ciclo que el estudiante resuelva problemas con números reales y polinomios; argumente y comunique los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Según la organización de esta componente, es en tercer grado de primaria que se inicia el trabajo con fracciones, centrándose en fracciones de cantidades continuas y utilizando básicamente medios, cuartos y octavos, siempre con fracciones homogéneas.

Es en cuarto grado que se presenta los decimales con aproximación a la décima y se profundiza las fracciones, tratándose tanto las homogéneas como las heterogéneas, pero considerando para estas últimas solo 2: 4; 5; 8 y 10 en los denominadores.

Es a partir de quinto grado que empieza a relacionar fracciones y decimales y se efectúa no solo adiciones y sustracciones sino las cuatro operaciones básicas.

De este modo, al final de la primaria el alumno debe tener conocimiento de las fracciones y decimales y ser capaz de efectuar con ellos las cuatro operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación y división; comparar y ordenar fracciones y decimales exactos hasta los centésimos y resolver problemas que implican operaciones combinadas con fracciones y decimales.

En primero de secundaria se inicia el estudio de los números racionales en sí, debiendo aprender sobre el tema:

- Representación, orden y operaciones con números racionales.
- Operaciones con fracciones y decimales.

Y desarrollar las siguientes capacidades:

En razonamiento y demostración:

- Compara y ordena números naturales, enteros y racionales.
- Transforma fracciones en decimales y viceversa.
- Realiza y verifica operaciones utilizando la calculadora, para reflexionar sobre conceptos y para descubrir propiedades.

En comunicación matemática:

- Interpreta el significado de números naturales, enteros y racionales en diversas situaciones y contextos.
- Matematiza situaciones de contexto real, utilizando los números naturales, enteros o racionales y sus propiedades.

En resolución de problemas:

- Resuelve problemas que implican cálculos en expresiones numéricas con números naturales, enteros o racionales.

Como se aprecia, las capacidades relacionadas a los números racionales son: comparar y ordenar, interpretar su significado, matematizar y resolver problemas además de transformar fracciones en decimales y viceversa.

Lo presentado hasta el momento muestra cómo se ha estado abarcando el tema de los racionales según el DCN 2009, el cual aún es considerado en muchos colegios privados. Sin embargo, creemos oportuno considerar también el Currículo Nacional de Educación Básica (MINEDU, 2016), en el que se define competencias como las facultades que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético.

En el mismo documento podemos ver que la competencia que involucra nuestro tema de estudio es la 23 que enuncia: “Resuelve problemas de cantidad” y comprende las siguientes capacidades (recursos para actuar de manera competente):

- Traduce cantidades a expresiones numéricas.
- Comunica su comprensión de los números y las operaciones.
- Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.
- Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.

De acuerdo a esta nueva propuesta, el Programa Curricular de Educación Secundaria (MINEDU, 2016) indica que al término del primer año de secundaria el alumno debe realizar desempeños (descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias) como los siguientes:

- Traduce relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades (unidades de masa, temperatura, monetarias y otros), de aumentos o descuentos porcentuales; a expresiones numéricas que incluyen operaciones con números enteros, relaciones de proporcionalidad, y expresiones porcentuales, fraccionarias o decimales; al plantear y resolver problemas.
- Expresa el significado del valor posicional de las cifras de un número, las unidades de medida (masa, temperatura y monetarias), porcentaje como fracción, el descuento porcentual, y el significado del signo positivo y negativo en un número entero; el significado de la equivalencia entre expresiones fraccionarias, decimales y porcentuales; según el contexto de la situación. Usa lenguaje matemático y diversas representaciones.
- Selecciona y emplea estrategias de cálculo, estimación y procedimientos matemáticos para realizar operaciones con números enteros, expresiones fraccionarias y decimales, y para simplificar expresiones numéricas. Selecciona y usa unidades e instrumentos de medición pertinentes para medir o estimar la masa, el tiempo o la temperatura, y realizar conversiones entre unidades, de acuerdo a la situación planteada.

- Plantea afirmaciones sobre los criterios de divisibilidad; las propiedades de las operaciones con números enteros y expresiones decimales, así como las relaciones inversas entre las operaciones. Justifica dichas afirmaciones con ejemplos, y propiedades de los números y operaciones; e infiere relaciones entre estas. Reconoce errores en sus justificaciones y la de otros, y las corrige.

Si bien nuestra investigación no involucra trabajo directo en el aula pues nos dedicaremos a analizar un texto, nos parece importante considerar lo que se espera al término del grado que hemos elegido pues así podremos determinar si el texto va acorde con lo que proponen los documentos oficiales del Ministerio, de allí que, luego de revisar ambas propuestas, consideramos que al abordar el tema de los números racionales, las tareas que propongan los textos deben centrarse en:

- Comparar y ordenar números racionales.
- Transformar fracciones en decimales y viceversa.
- Interpretar el significado de la equivalencia entre expresiones fraccionarias, decimales y porcentuales; según el contexto de la situación.
- Resolver problemas que impliquen cálculos con expresiones porcentuales y fraccionarias o decimales.

1.3 Justificación de la investigación

Como menciona Vásquez (2012), el libro de texto es uno de los recursos más utilizados en los diferentes niveles educativos, siendo un elemento casi inseparable del trabajo en la escuela. En la actualidad, el libro de texto además de ser el lugar en el que los estudiantes van a confrontar información teórica y práctica, también es una guía para el desarrollo de las clases de los profesores.

Eguren, Belaúnde y González (2004) indican que, usado de manera apropiada, el libro de texto, *puede convertirse en un aliado para lograr aprendizajes pertinentes y duraderos.* Sin embargo, como señala Vargas (2001 citado por Carrillo, 2012), los libros de texto no sólo pueden facilitar sino también dificultar o, inclusive, impedir el aprendizaje escolar. Por lo cual, resulta conveniente analizar la forma en que los textos presentan los diversos temas que abordan.

De otro lado, a lo largo de nuestra práctica docente hemos observado que los textos escolares desarrollan en unidades diferentes la representación fraccionaria de los números racionales, a la que se suele denominar fracciones y la representación decimal, bajo el nombre de números decimales, sin establecer mayor relación entre ellos.

También, al revisar textos escolares de primero de secundaria, hemos notado que cuando se trabaja con la representación fraccionaria de los racionales, se suele emplear las técnicas empleadas en la primaria con las fracciones positivas. Así, parecen confirmarse los resultados obtenidos por Gallardo y Saavedra (2011), quienes señalan que las fracciones negativas son una problemática poco abordada a nivel secundaria, a pesar de su importancia para el desarrollo de competencias cognitivas, el trabajo con conceptos matemáticos posteriores como son los números reales, tema previsto en el último ciclo de la educación regular básica.

Además, como menciona Obando (2003), los racionales constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana y las relaciones con otros temas como es el caso de la proporcionalidad tanto aritmética como geométrica.

Dado que en el Perú no se han realizado investigaciones que analicen el tratamiento que se da a los números racionales en la educación básica, especialmente, sobre la poca conexión que se presenta entre sus dos representaciones y el poco trabajo con los racionales negativos, se plantea este trabajo de investigación, en el cual, identificaremos la organización matemática que propone un texto sobre los racionales y cuál es su grado de completitud.

1.4 Pregunta de investigación

¿Qué caracteriza las organizaciones matemáticas sobre los números racionales presentes en un texto escolar de primero de secundaria?

1.5 Objetivo general y objetivos específicos

Objetivo general

Identificar las características que posee la organización matemática presente en un texto escolar de primer año de secundaria de educación básica, en relación al tema números racionales.

Objetivos específicos

- Describir la organización matemática que presenta un texto de primer año de secundaria en relación a los números racionales.
- Valorar la organización matemática presentada en el texto a partir de los indicadores de completitud.

1.6 Metodología de la investigación

De acuerdo a Hernández (2010), una investigación cualitativa se enfoca en comprender y profundizar los fenómenos y se aplica a un menor número de casos. A la vez, no requiere que se definan variables, sino conceptos generales. Además, los datos no se reducen a valores numéricos y los resultados no intentan generalizarse.

Dado que nuestro trabajo busca analizar la forma en que un texto trata el tema de los números racionales en particular, es decir, se centra en un solo caso buscando profundizarlo y que describiremos la organización matemática que presenta el libro escogido en concreto, es decir, no se generalizarán los resultados, podemos decir que nuestra investigación se encuentra dentro de un enfoque cualitativo.

Por otra parte, puesto que analizaremos un texto escolar, nuestra investigación es de tipo bibliográfico, la cual, según Gil (2002, citado por Becerra, 2015), es desarrollada con base en material ya elaborado, especialmente en libros.
A continuación, describiremos la secuencia que seguimos en nuestro trabajo, teniendo como base las etapas de la investigación bibliográfica propuestas por Gil (2002, citado por Becerra, 2015).

1) Elección del tema

En esta etapa, luego de elaborar una lista de temas de nuestro interés y revisar algunas investigaciones, decidimos centrarnos en el análisis de textos pues no requería de un trabajo directo con alumnos, lo cual en el momento de iniciar la investigación no nos era posible. A la vez, elegimos como tema los números racionales y la forma en que los presentan los textos escolares.

2) Levantamiento bibliográfico preliminar

Una vez definido nuestro tema de investigación, procedimos a buscar trabajos previos tanto sobre los números racionales como de análisis de textos.

3) Formulación del problema

Luego de la revisión de bibliografía, redactamos nuestra pregunta de investigación y, en base a ella, nos planteamos el objetivo general y los objetivos específicos que nos llevarían a conseguirlo.

4) Elaboración del plan provisional

En esta etapa se hizo un listado de todas las acciones que debíamos realizar: recopilación de bibliografía, redacción del marco teórico, revisión del libro de texto, identificación de tareas, técnicas, tecnologías y teorías propuestas en el texto, interpretación de la información obtenida, elaboración de conclusiones y redacción del informe final, y se colocó una fecha tentativa de ejecución de cada una, como se muestra a continuación.

Tabla 1. Plan provisional de trabajo

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
Recopilación de bibliografía.	X	X					
Redacción del marco teórico.			X				
Revisión del libro de texto.				X			
Identificación de tareas, técnicas, tecnologías y teorías propuestas en el texto.				X	X		
Interpretación de la información obtenida.						X	
Elaboración de conclusiones.						X	
Elaboración del informe final.							X

5) Búsqueda de fuentes

De acuerdo al plan elaborado, procedimos a seleccionar aquellas investigaciones que podían servir como antecedentes a la nuestra y otras fuentes que nos permitieran elaborar el marco teórico y documentos del Ministerio de Educación que nos ayudarían a contextualizar el problema.

6) Lectura del material

Paso seguido, procedimos a la lectura del material seleccionado, dando preferencia a los eran fuente de otros trabajos, pues consideramos conveniente ir a los orígenes.

7) Informe

Habiendo leído tanto sobre los números racionales como sobre el análisis de textos y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, procedimos a redactar los tres primeros capítulos de nuestro trabajo que comprenden el planteamiento y justificación del problema y el marco teórico.

8) Organización lógica

En este momento, decidimos la forma en que procederíamos al análisis del texto. Empezamos por la lectura de las dos unidades del libro que tratan los números racionales, la unidad 3 titulada “Fracciones” y la unidad 4 llamada “Números decimales”.

A continuación, de acuerdo a los ejercicios propuestos, identificamos las tareas involucradas y las agrupamos en tipos de tareas para, posteriormente, identificar las técnicas, tecnologías y teorías correspondientes.

Finalmente, verificamos si la organización matemática que presenta el texto satisfacía los indicadores de completitud de Fonseca.

9) Redacción del informe

Finalmente, se procedió a la redacción del capítulo correspondiente al análisis del texto, las conclusiones y las sugerencias para futuras investigaciones.

Habiendo presentado investigaciones previas relacionadas a nuestro tema de investigación, explicado el contexto en el que se desarrolla nuestro trabajo, explicado por qué es relevante y formulado nuestra pregunta de investigación y objetivos, pasaremos a explicar los conceptos que sobre los números racionales se presentan en la educación básica.

CAPÍTULO 2: LOS NÚMEROS RACIONALES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

En este capítulo definiremos brevemente los números racionales, haciendo mención a sus representaciones, propiedades y operaciones considerando el tratamiento que se les da en la instrucción básica.

2.1 Definición de número racional

Para definir los números racionales, partiremos de la idea que plantea Centeno (1998 citado por Elguero, 2009) de que los conceptos matemáticos tienen una exigencia hacia la generalización que permita ampliar las teorías existentes y suprimir restricciones.

De esa forma, consideraremos los números racionales como aquellos que surgen ante la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, dada la imposibilidad de encontrar siempre una solución entera a la ecuación $ax = b$, con a y b enteros.

Definiéndose cada número racional como un cociente $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y b es diferente de cero, esta definición coincide con la que Quispe y Gallardo (2009), indican se utilizaba en el período 1997 – 2005 y que nos parece la más conveniente pues, como menciona Gairín (1998), el significado cociente ayuda a relacionar la representación fraccionaria de los racionales con la decimal.

Cada cociente $\frac{a}{b}$ recibe el nombre de fracción y puede escribirse también de la forma a/b, recibiendo "a" el nombre de numerador y "b" el de denominador. A su vez, las fracciones que representan el mismo número, nos dice Elguero (2009), forman una familia de fracciones que es la que define al número racional.

Así por ejemplo, las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}, \frac{10}{25}, \ldots$ pertenecen a una misma familia y definen el mismo número racional, el cual puede ser representado por cualquiera de las fracciones de la familia.

En el contexto escolar, como hace Rojas (2000), se denomina fracciones equivalentes a aquellas que representan el mismo número y se las define diciendo que: "$\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si a.d = b.c". A la vez, se indica que se puede obtener fracciones equivalentes por amplificación o simplificación según se multiplique o divida por una misma cantidad natural sus términos (numerador y denominador).

De este modo, al multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{2}{5}$ por dos, obtenemos $\frac{4}{10}$, fracción que es equivalente a $\frac{2}{5}$ puesto que 2(10) = 5(4). Lo mismo sucede cuando dividimos el numerador y denominador de $\frac{15}{12}$ entre tres, en este caso, resulta $\frac{5}{4}$, que es equivalente a $\frac{15}{12}$ pues 5(12) = 15(4).

Obtener fracciones equivalentes por amplificación, permitirá homogenizar dos o más fracciones, es decir, escribirlas con el mismo denominador, lo cual será útil para sumarlas, restarlas y compararlas. Por su parte, el obtener fracciones equivalentes por simplificación, será utilizado para dar como resultado fracciones irreductibles, que Rojas (2000) define como aquellas en las cuales los términos tienen como único divisor común a la unidad.

2.2 El número racional y sus representaciones decimal y fraccionaria

La representación fraccionaria del número racional surge de la definición dada, lo que no sucede con la representación decimal.

Nos parece importante diferenciar, como hacen Ávila y García (2008), el número decimal de la expresión decimal ya que es frecuente confundir ambos términos y llamar número decimal a una expresión por el solo hecho de llevar una coma en su escritura.

Ávila y García (2008), definen el número decimal como aquél que puede escribirse como fracción decimal, esto es, con un numerador entero y un denominador potencia de 10, como 3/100. Estos números (los decimales), señala Gairín (1998), se representan escribiendo primero la parte entera, colocando un cero si no la hay, seguida de una coma, tras la cual se escriben las cifras decimales haciendo que cada una ocupe el lugar que corresponda a su orden, así el número decimal que corresponde a la fracción 3/100 es 0,03.

Gairín (1998) indica también que, las fracciones ordinarias (las que no tienen como denominador una potencia de 10), pueden ser expresadas en forma decimal dividiendo su numerador entre su denominador y prolongando la división hasta el orden que se desee.

Si nos centramos en la idea de número racional como cociente de dos enteros en el que el divisor es distinto de cero y efectuamos la división, tendremos tres posibles situaciones, las cuales ejemplificamos a continuación:

$$\frac{12}{5} = 2{,}4 \qquad -\frac{14}{3} = -4{,}666\ldots \qquad -\frac{13}{6} = -2{,}1666\ldots$$

Podemos observar que, como mencionan Ávila y García (2008), en el caso de las fracciones decimales se obtiene una expresión decimal finita, mientras que en el caso de las fracciones ordinarias resultan expresiones decimales infinitas.

Los textos escolares, como el de Rojas (2000), indican que en el primer caso tenemos un decimal exacto, en el segundo un decimal periódico puro y en el tercero, un decimal periódico mixto.

Tratándose de dos formas de representar un mismo número y, habiendo visto cómo pasar de la representación fraccionaria a la decimal, es necesario considerar también el proceso inverso. Para ello, en los textos escolares se presenta un proceso que se denomina “fracción generatriz”, que depende de la expresión decimal que se tenga, como detallaremos a continuación según lo presentado en el libro de Rojas (2000):

a) Si se trata de un decimal exacto: La generatriz tiene como numerador la parte decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como número de cifras decimales tiene el numerador.
   Por ejemplo:

$$0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

b) Para un decimal periódico puro: La generatriz tiene como numerador el período y como denominador tantos nueves como cifras tiene el período.
   Por ejemplo:

$$-0{,}454545\ldots = -\frac{45}{99} = -\frac{5}{11}$$

c) Para un decimal periódico mixto: La generatriz tiene como numerador la parte no periódica seguida de un período menos, la parte no periódica y como denominador tantos nueves como cifras tiene la parte periódica seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.
   Por ejemplo:

$$-0{,}4555\ldots = -\frac{45-4}{90} = -\frac{41}{90}$$

Estos procesos (técnicas utilizando el lenguaje de la TAD) se justifican en operaciones algebraicas (tecnologías para la TAD) como veremos a continuación:

Si llamamos “g” al decimal “0,b” tenemos que 10g = b, de donde g = $\frac{b}{10}$, siendo “g” la fracción generatriz del decimal exacto 0,b.

Por otro lado, si denominamos “g” al decimal “0,bbb…” tendríamos que:

10g = b,bbb…

además: 10g = b + 0,bbb…

reemplazando 0,bbb… por “g” obtendríamos:

10g = b + g

de donde: 9g = b

y finalmente g = $\frac{b}{9}$

siendo “g” la fracción generatriz del decimal periódico puro 0,bbb…

A su vez, si denominamos “g” al decimal “0,abbb…” tenemos que:

100g = ab,bbb…

y 10g = a,bbb…

restando ambas expresiones obtenemos:

90g = ab – a

resultando g = $\frac{ab - a}{90}$

donde “g” es la fracción generatriz del decimal periódico mixto 0,abbb…

Cabe mencionar que en la educación básica, se presentan estas técnicas sin hacer referencia a las tecnologías que las sustentan.

2.3 Significados de la fracción positiva

Si bien queremos abarcar el número racional en sus dos representaciones y entendiendo que estas pueden ser positivas y negativas, nos parece importante tratar los significados de la fracción positiva para identificar cuales contribuyen a la formación del concepto de racional negativo.

a) Significado parte – todo

Como menciona Behr (1992), esta concepción implica la habilidad de dividir una cantidad continua o discreta en partes de igual medida y, según investigaciones como la de Gairín (1998), Quispe (2008) y Carrillo (2012), es la más trabajada en la escuela.

Este significado, señala Behr (1992) permite nombrar las fracciones y sirve de base para desarrollar el concepto de fracciones equivalentes, las relaciones de orden y las operaciones, aunque, puede dificultar la comprensión de la relación entre fracción y decimal (Gairín, 1998) y no contribuye a la noción de fracción negativa (Gallardo y Saavedra, 2011).

b) Significado medida

Behr (1992) relaciona la noción de medida con la recta numérica, diciendo que al hablar de medida pensamos en una unidad y sus subunidades, lo que en la recta se traduce en una distancia.

A la vez explica que para dar significado a una determinada fracción en la recta numérica, primero se debe establecer una subunidad de numerador uno, para luego trasladarla las veces que sea necesario.

Menciona también que más que asociar la fracción con un punto en la recta, era conveniente presentarla como una distancia en ella, proponiendo no tomar estas distancias desde cero en todos los casos, para ayudar así a la noción de suma.

Otra ventaja de usar este significado en la recta es la posibilidad de identificar números mixtos y de generar la idea de que toda fracción proviene de una fracción unitaria, como muestra Behr (1992) en los siguientes gráficos:

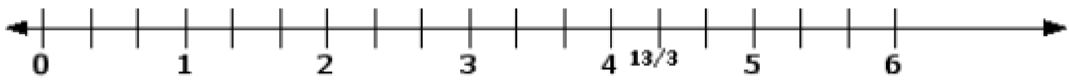


FIGURE 7-66

Figura 1

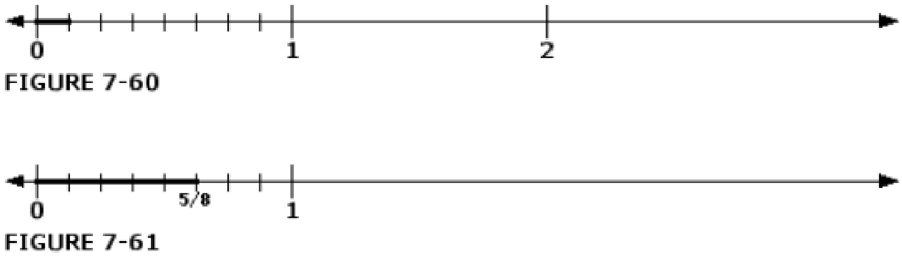


Figura 2

En la figura 1 se puede apreciar que $\frac{13}{3}$ equivale a $4\frac{1}{3}$, mientras que en la figura 2, primero se identifica la fracción unitaria 1/8 para, a partir de ella, ubicar 5/8.

Gallardo y Saavedra (2011) mencionan que este significado permite concebir la noción de fracción negativa, y creemos que para ello es importante no limitarnos a ver la fracción como medida de longitudes sino, como propone Behr (1992), relacionarla con la recta numérica, de donde se hará posible dar idea de la fracción negativa.

c) Significado razón

Behr (1992) indica que este significado se refiere a la relación entre dos cantidades, entendida como una comparación, la misma que transmite la noción de magnitud relativa y lleva al concepto de proporción, el cual podrá ser representado en el plano cartesiano y permitirá, interpretar conceptos que se estudiarán posteriormente como el de pendiente de una recta.

Así, pese a que Gallardo y Saavedra (2011) no mencionan este significado entre los que permiten reconocer la fracción negativa, nos parece que la interpretación de una pendiente negativa sí puede contribuir a darle sentido al racional negativo.

d) Significado operador

Según Behr (1992) este significado da una interpretación algebraica al número $\frac{a}{b}$, de modo que se concibe como una función que transforma una figura geométrica en otra $\frac{a}{b}$ veces más grande, o que transforma una cantidad en otra reducida o ampliada $\frac{a}{b}$ veces.

A la vez, Behr (1992) indica que, en el caso de cantidades discretas, el número racional tiene la interpretación de multiplicador – divisor, donde el número “n” pasa ser “an” para luego reducirse a “an $\div$ b”.

De acuerdo a Gallardo y Saavedra (2011) este significado permite concebir la fracción negativa y creemos que es así porque al considerarse como multiplicador – divisor, se relaciona con las operaciones con números enteros, lo cual, considera tanto a los números positivos como a los negativos y, es el conjunto numérico que se trabaja previo a los racionales en la escuela secundaria.

e) Significado cociente

Behr (1992) menciona que el símbolo $\frac{a}{b}$ o a/b, es usado como una forma abreviada de $a \div b$, que indica una división. Este significado está relacionado con la partición o reparto.

Según Gairín (1998) este significado permite establecer conexiones entre las dos representaciones de los racionales, la fracción y el decimal y, según Gallardo y Saavedra (2011), ayuda a concebir la fracción negativa, razones por las que es importante trabajarlo en la escuela.

2.4 Comparación de números racionales

Antes de desarrollar la forma en que se efectúan operaciones con los números racionales, nos parece importante mencionar la forma en que se comparan estos, es decir, cómo determinar si un número es menor, mayor o igual que otro.

Para comparar dos números racionales, debemos considerar los siguientes casos:

- Si se trata de dos números racionales, uno positivo y otro negativo.
- Si se trata de dos números racionales positivos o de dos racionales negativos.

En el primer caso, como indica Rojas (2000), siempre es mayor el positivo, mientras que en el segundo debemos tener en cuenta cómo están expresados y qué características presentan, teniendo como opciones:

- Si están expresados como fracción y tienen igual denominador.
- Si están expresados como fracción y tienen diferente denominador.
- Si están expresados como decimal.
- Si uno está en forma decimal y el otro en forma fraccionaria.

La técnica en el primer caso según Rojas (2000) es comparar solo los numeradores, mientras que para el segundo, consiste en igualar los denominadores para proceder como en el caso anterior.

Por otro lado, en el tercer caso, Rojas (2000) señala como técnica que se debe igualar el número de decimales agregando ceros en la parte decimal para luego eliminar la coma decimal y compararlos como si fueran enteros.

Por último, si están expresados en distinta forma de representación, la técnica indica que debe elegirse una de éstas, realizar la conversión y comparar según sea el caso.

2.5 Operaciones con números racionales

Para efectuar operaciones con números racionales se considera la forma en que se encuentran expresados estos (como fracción o decimal). A continuación veremos los procesos a seguir para la adición y multiplicación, teniendo en cuenta lo observado en los libros de texto. Esta presentación nos ayudará más adelante al mencionar las tareas, técnicas, tecnologías y teorías presentes en el libro analizado.

En ambos casos, se tiene en cuenta las reglas de signos de los números enteros que enunciaremos a continuación en base a lo descrito por Rojas (2000):

- Si sumamos dos números enteros del mismo, sumamos los valores absolutos y el signo del resultado será el mismo que el de los sumandos.
- Si sumamos dos números enteros de distinto signo, restamos sus valores absolutos (el mayor menos el menor) y al resultado se le coloca el signo del número de mayor valor absoluto.
- Si multiplicamos dos números enteros del mismo signo, su producto será positivo.
- Si multiplicamos dos números enteros de distinto signo, su producto será negativo.

Refiriéndonos a las operaciones con racionales en sí, tenemos, según Rojas (2000), que para la adición se debe considerar los siguientes casos:

a) Si los números están expresados como fracción, las fracciones deben ser homogéneas, en caso contrario, deberán homogenizarse para, paso seguido, sumar los numeradores.

   Por ejemplo:

$$\frac{4}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{4}{9}+\left(-\frac{3}{9}\right) = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$$

b) Si los números están expresados como decimal, se presentan dos situaciones:

   - Si todos los números son decimales exactos: se escribe los números en forma vertical, ordenándolos de modo que se mantenga el lugar de la coma decimal y se suma de las cifras que ocupen el mismo orden, empezando por la parte decimal.

     Por ejemplo:

     -2,453 + (-1,2)

-2,453 +
-1,2
———
-3,653

- Si uno de los números es un decimal periódico: se expresa los números como fracción y se opera como en el primer caso.

  Por ejemplo:

  -1,5 + 0,333…

  $$-1\frac{5}{10}+\frac{3}{9} = -1\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = -\frac{3}{2}+\frac{1}{3} = \frac{-9+2}{6} = -\frac{7}{6} = -1{,}1666\ldots$$

Mientras que, en el caso de la multiplicación, tenemos los siguientes casos:

a) Si los números están expresados como fracción, multiplicamos los numeradores y el resultado se coloca sobre el producto de los denominadores, teniendo en cuenta, que, al igual que con los enteros, si se multiplica dos números positivos o dos números negativos el resultado es un número positivo, mientras que si multiplicamos un número negativo y otro positivo, resulta un número negativo.

   Por ejemplo:

   $$\frac{2}{3} \text{ x } -\frac{5}{4}$$

   $$-\frac{2 \text{ x } 5}{3 \text{ x } 4} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

b) Si los números están expresados como decimal, se presentan dos situaciones:

   - Si todos los números son decimales exactos: multiplicamos como si se tratara de enteros y en el producto se consideran tantas cifras decimales como el total de decimales de los factores.

     Por ejemplo:

     (-3,2)(-0,15)

     0,480

- Si uno de los números es un decimal periódico: se expresa los números como fracción, se opera y finalmente se convierte el resultado en decimal.

  Por ejemplo:

$$-0{,}5 \text{ x } 0{,}1666\ldots$$

$$-\frac{5}{10} \text{x} \frac{16-1}{90} = -\frac{1}{2} \text{x} \frac{15}{90} = -\frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} = -0{,}08333\ldots$$

Cabe mencionar que la sustracción se explica como la adición con el opuesto del sustraendo y la división como la multiplicación con el inverso del divisor.

Aunque si se trata de una división de racionales expresados como decimal, si estos son periódicos, primero deben escribirse en su forma fraccionaria para proceder a operar y si son exactos, se iguala la cantidad de decimales de dividendo y divisor para luego, eliminar la coma decimal y proceder como si se tratara de enteros. En el último caso, la técnica se justifica en que al multiplicar tanto el dividendo como el divisor por la unidad seguida de ceros, el cociente no varía.

Al desarrollar la adición y multiplicación de racionales, Rojas (2000) presenta las propiedades de estas operaciones, escribiendo para la adición:

1) Clausura: El resultado de sumar dos números racionales es otro número racional.
2) Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma.
3) Asociativa: La forma en que agrupemos los sumandos no altera la suma.
4) Elemento neutro: Si sumamos un número racional con el elemento neutro (el cero), obtenemos el mismo número.
5) Elemento opuesto: Si sumamos un número racional con su opuesto, resulta cero.

Mientras que para la multiplicación:

1) Clausura: El resultado de multiplicar dos números racionales es otro número racional.

2) Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.
3) Asociativa: La forma en que agrupemos los factores no altera el producto.
4) Elemento neutro: Si multiplicamos un número racional con el elemento neutro (el uno), obtenemos el mismo número.
5) Elemento inverso: Si multiplicamos un número racional con su inverso, resulta uno.
6) Distributiva respecto a la adición: El producto de un número racional por una adición es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

Estas propiedades, que posteriormente nos ayudarán al identificar las tareas, técnicas, tecnologías y teorías presentes en los textos, se suelen emplear al efectuar operaciones. Sin embargo, la propiedad de clausura no suele explicitarse, mientras que la propiedad distributiva se aplica más adelante al multiplicar una constante o monomio por un polinomio.

CAPÍTULO 3: LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

3.1 Principales conceptos

El marco teórico usado para el análisis del texto en esta investigación es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propuesta por Yves Chevallard (1999), quien sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales (una escuela, una clase) y sostiene que toda actividad humana puede describirse mediante un modelo único al que llama praxeología.

Esta teoría, mencionan Bosch y Gascón (2009) fue de los primeros enfoques en tener en cuenta como objeto de investigación no sólo actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino también cómo surge y se utiliza el saber matemático hasta que es incorporado en la escuela.

Dichos autores para definir una **praxeología**, hacen un pequeño análisis etimológico, señalando que la palabra proviene de los términos griegos: *praxis* y *logos,* e indican que la praxis es el "saber hacer" mientras que el logos es el "saber", esto es, un explicación sobre el qué se hace y por qué.

Por su parte, Chevallard (1999) explica que el saber hacer involucra un determinado tipo de tareas y una manera determinada de realizarlas, a la vez que el saber incluye las descripciones y explicaciones que dan sentido a las técnicas y la teoría que sostiene dichas explicaciones.

Como podemos observar, una praxeología tiene dos componentes: el saber hacer y el saber, éstos reciben en la TAD el nombre de bloque práctico – técnico y tecnológico - teórico respectivamente. El primero está formado por tipos de tareas y técnicas y el segundo, por tecnologías y teorías.

Los **tipos de tareas** son, de acuerdo a Chevallard (1999), un conjunto de tareas que se expresa generalmente por un verbo y que requiere un objeto relativamente preciso para definirse. Los tipos de tarea son construcciones institucionales, es decir, dependen de la institución que los proponga. Un tipo de tarea es por ejemplo: “calcular la suma de dos números racionales”. Dicho tipo de tarea comprende las siguientes tareas:

- “calcular la suma de dos números racionales expresados como fracción que tienen el mismo denominador”
- “calcular la suma de dos números racionales expresados como fracción que tienen distinto denominador”
- “calcular la suma de dos números racionales expresados como decimal”
- “calcular la suma de dos números racionales expresados en distintas formas de representación”

Para poder resolver un tipo de tarea se hace necesario un procedimiento, una manera de hacerlo, esta forma de realizar la tarea recibe el nombre de **técnica**. Es importante tener en cuenta que, como menciona Chevallard (1999), una técnica sólo tiene éxito sobre una parte del tipo de tareas a la que es relativa, lo cual llama alcance de la técnica; además debe considerarse que las técnicas no son necesariamente de naturaleza algorítmica y que dependen de lo institucionalmente reconocido. Considerando la tarea propuesta líneas arriba: “calcular la suma de dos números racionales expresados como fracción tienen distinto denominador”, la técnica comprende homogenizar las fracciones, sumar los numeradores, simplificar el resultado si es posible.

Por otro lado, tenemos las **tecnologías** que Chevallard (1999) define como el discurso racional que justifica la técnica para asegurarse que permiten realizar el tipo de tareas que se pretende. Las tecnologías además de justificar las técnicas, tienen como función explicarlas, decir porqué son correctas y también, producirlas. Al igual que las técnicas, varían de acuerdo a la institución. Siguiendo con el ejemplo dado, la tecnología que respalda el homogenizar las fracciones en la escuela es el que las fracciones equivalentes representan al mismo número racional.

Por último, las **teorías** son definidas por Chevallard (1999) como las justificaciones y explicaciones que dan sustento a las tecnologías. En el caso de nuestro ejemplo, la teoría que sostiene la tecnología no está dada en la escuela, como mencionamos en el capítulo anterior, por requerir un grado de abstracción que no corresponde al nivel de desarrollo de pensamiento de los alumnos de primero de secundaria, pero es el que los racionales sean un grupo conmutativo con respecto a la adición.

Otros conceptos de esta teoría que es necesario mencionar son lo que Chevallard (1999) llama **organización o praxeología matemática**, es decir, la realidad matemática que va a enseñarse, en nuestro caso, los números racionales; y lo que denomina **organización o praxeología didáctica**, que se refiere a la manera en que puede construirse dicha realidad, esto es, cómo debe enseñarse, comprendiendo al profesor, al alumno y un programa de estudio.

Por otra parte, debemos considerar la clasificación que hace Chevallard (1999) de las organizaciones matemáticas y que Fonseca (2004) desarrolla con el nombre "complejidad creciente de las organizaciones matemáticas".

La primera clase recibe el nombre de **praxeología puntual** (OMP), que es, de acuerdo a Chevallard (1999 citado en Lucas 2010), aquella que está generada alrededor de lo que la institución considera un único tipo de tareas y queda definida, en principio, por un bloque práctico técnico. Por su parte, Fonseca (2004) menciona que, en secundaria, puede darse tantos ejemplos de OMP como tipos de tarea existan.

La segunda clase se denomina **praxeología local** (OML) que Chevallard (1999) define como la combinación de praxeologías puntuales centradas en una misma tecnología. Fonseca (2004) señala que cada OML está caracterizada por una tecnología que permite justificar, explicar y relacionar entre sí las técnicas de las OMP que la forman.

La tercera clase es llamada **praxeología regional** (OMR) y se refiere a la unión de praxeologías locales formadas alrededor de una teoría común mediante su coordinación y articulación, como sostiene Chevallard (1999 citado en Lucas, 2010).

La cuarta y última clase lleva por nombre **praxeología global** (OMG) y se refiere al complejo praxeológico obtenido al agregar varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías.

Además de los conceptos expuestos, es necesario mencionar algunos de los supuestos presentados por Fonseca (2004), entre ellos el que toda actividad matemática institucional puede analizarse en términos de praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Es decir, la organización ideal es aquella en la que las praxeologías puntuales llevan a una praxeología local y que éstas generan una praxeología regional, descrita adecuadamente. Para ello es preciso que se describa además de la teoría unificadora, las organizaciones locales que la integran, las relaciones que se establecen entre éstas y las nuevas cuestiones problemáticas que pueden abordarse en la organización regional que no podían abordarse en ninguna de las organizaciones locales iniciales.

Por otro lado, nos parece conveniente resaltar un hecho que Fonseca constató en su investigación y es el que en la educación básica la enseñanza se centra en el bloque técnico práctico, sin cuestionarse hasta qué punto se justifican las técnicas ni la interpretación de resultados. Por su parte, en la educación superior la atención está dada en el bloque tecnológico – teórico, siendo que lo práctico técnico debería provocar la emergencia de nuevos elementos tecnológico - teóricos o modificar los existentes.

Otro aspecto a considerar del trabajo de Fonseca (2004) y que será de gran utilidad en el nuestro son los indicadores de completitud de una organización matemática local (OML), que nos permitirán identificar el grado de completitud de las organizaciones matemáticas propuestas en torno a los números racionales en el texto escolar que analizaremos.

3.2 Indicadores de completitud

1) Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

   Una OML será menos *completa* cuantos más tipos de *tareas aisladas* (esto es, realizables mediante técnicas que no estén relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico) existan en ella.

   En el caso particular de los números racionales, la organización matemática asociada satisfará este criterio si se considera por ejemplo las siguientes tareas:

   - Ubicar números racionales expresados como fracción en la recta numérica.
   - Comparar números racionales expresados como fracción.
   - Calcular la suma de dos o más números racionales expresados como fracción.

   Ya que se relacionan entre sí pues la técnica que se usará para resolverlas es homogenizar las fracciones, es decir, multiplicar ambos términos de cada una de modo que todas queden con el mismo denominador.

2) Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.

   Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo concreto de tareas *existan dos o más técnicas* (que pueden ser variaciones de una misma técnica) que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo, existiendo además, los *elementos tecnológicos que permiten discernir*, para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevarla a cabo.

   Se satisface este criterio si, por ejemplo, para el tipo de tarea: Calcular la suma o diferencia de números racionales, se plantea: $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$, para lo cual el alumno podrá elegir alguna de estas técnicas:

a) sumar los números al interior de cada paréntesis, para lo cual deberá homogenizar las fracciones y luego sumar los denominadores para, posteriormente, homogenizar las fracciones que resultaron y proceder a restarlas.
b) eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición para, paso seguido, homogenizar todas las fracciones y efectuar la suma de los numeradores siguiendo la regla dada para la adición de números enteros.

3) Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.

Una OML será más completa si existen criterios (más o menos explícitos) que permiten elegir adecuadamente la presentación ostensiva más adecuada de cada técnica para realizar cada tarea.

Este criterio se satisface por ejemplo, si dado el tipo de tarea: “Calcular la suma y diferencia de dos números racionales”, se propone lo siguiente:

“Calcula: $\frac{1}{5}$ - 0,333…”, para lo cual, el alumno deberá elegir si es conveniente utilizar la representación decimal o la fraccionaria para su desarrollo, considerando que al ser uno de los sumandos un decimal periódico, de usar la representación decimal, deberá aproximar, con lo que no se obtendrá el valor exacto de la operación, resultando apropiado expresar el decimal como fracción.

4) Existencia de tareas y técnicas inversas.

Una OML es más completa si existen técnicas (no necesariamente únicas) que permiten realizar las tareas también “inversas”, por ejemplo aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas de la tarea inicial.

Se satisface este criterio, por ejemplo, si se considera simultáneamente los siguientes tipos de tareas:

- Expresar un número racional en su representación fraccionaria como decimal.

- Expresar un número racional en su representación decimal como fracción.

5) Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.

Una OML será más completa si para cada técnica existe el tipo de tareas consistente en interpretar el funcionamiento y el resultado de aplicarla para realizar una tarea o un tipo de tareas de OML. Para esto, deben existir los elementos tecnológicos necesarios que permitan llevar a cabo esta tarea de interpretación.

Este criterio se satisface, por ejemplo, cuando teniendo en cuenta el tipo de tarea "Demostrar propiedades de la radicación de números racionales", se pide: Demuestra que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}^{m} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}$, así el alumno comprobará una de las propiedades que se enunció.

6) Existencia de tareas matemáticas "abiertas".

Una OML es más completa si presenta tipos de tareas matemáticas en los que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano.

Se satisface este criterio cuando al considerar el tipo de tarea: "Identificar factores de una multiplicación conociendo su producto", se propone: Escribe una multiplicación de cuatro fracciones cuyo resultado sea -1.

7) Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.

Una OML es más completa en la medida en que la tecnología permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas.

Este criterio se satisface, por ejemplo, al proponer la tarea: "Calcular una fracción equivalente a otra conociendo la suma de sus términos", pues puede usarse como técnica hacer un listado de las fracciones equivalentes hasta encontrar aquella cuya suma sea la pedida, para luego generalizar, como veremos a continuación:

Hallar una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$ cuyos términos sumen 48.

En este caso, podemos enumerar las fracciones equivalentes e ir sumando sus términos:

$$\left\{\frac{5}{7},\frac{10}{14},\frac{15}{21},\frac{20}{28}\right\}$$

En el primer caso los términos suman 12, en el segundo 24, en el tercero 36 y en el cuarto 48 que es lo pedido.

Pero si nos pidieran hallar una fracción equivalente cuyos términos sumen 156, el proceso sería mucho más largo, haciéndose conveniente generalizar así se tendría:

$$\left\{\frac{5}{7},\frac{10}{14},\frac{15}{21},\frac{20}{28},\ldots,\frac{5n}{7n}\right\}$$

Y se plantearía $5n + 7n = 156$, donde $n = 13$ y la fracción pedida sería $\frac{5x13}{7x13}$, es decir, $\frac{65}{91}$.

Luego de haber mencionado los principales conceptos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y enumerado los indicadores de completitud de Fonseca dando ejemplos en cada uno de ellos, procederemos a analizar las unidades del libro de texto que desarrollan el tema de los números racionales.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DEL TEXTO

En este capítulo, presentaremos el resultado del análisis de la organización matemática relacionada a los números racionales presente en un libro de texto de primero de secundaria, grado en el que, de acuerdo al Diseño Curricular Nacional (2009) se inicia el estudio de este conjunto numérico en la educación básica. El texto elegido es Hipervínculos 1 de editorial Santillana (2012) que es el que se utiliza en la institución educativa en la que laboramos.

Iniciaremos con la descripción del texto para luego, enumerar los tipos de tareas que hemos podido identificar en cada uno de los capítulos revisados indicando las técnicas, tecnologías y teorías que las acompañan. Posteriormente haremos el análisis en base a los indicadores de completitud para finalmente, exponer los resultados obtenidos.

4.1 Descripción del texto

El libro de editorial Santillana inicia cada unidad con la sección "Recordamos lo que sabemos" que contiene actividades cuya finalidad es recuperar saberes previos, paso seguido presenta la teoría a desarrollarse, bajo el título "Voy a aprender", acompañada de ejemplos y, posteriormente, propone ejercicios que llevan como título "Más actividades", estos últimos agrupados por capacidades (razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas). Al final de cada unidad se tiene un conjunto de ejercicios, también por capacidades que lleva como título "Aplico mis conocimientos".

Los números racionales se desarrollan en los capítulos 3 y 4 que tienen como título "Fracciones" y "Números decimales" respectivamente. En el capítulo 3, luego de recordar los saberes previos relacionados a las fracciones, proponiendo algunos ejercicios, se señala que se hizo necesario ampliar los naturales para poder restar en todos los casos y menciona que existen operaciones que no tienen solución dentro de los enteros presentando algunos ejemplos, justificando así la aparición de los números racionales. A continuación, define la fracción como división de dos enteros, muestra las fracciones mayores y menores que la unidad, las fracciones equivalentes y la comparación de fracciones. Luego explica las operaciones con fracciones empezando con la adición y sustracción seguidas de la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

El capítulo 4 inicia relacionando las fracciones decimales con los números decimales para seguir con la descomposición de números decimales, la aproximación por redondeo y truncamiento, la comparación de decimales y la fracción generatriz. Más adelante presenta las operaciones con decimales, manteniendo el mismo orden que se usó para las operaciones con fracciones.

4.2 Descripción de la organización matemática presentada

A continuación presentaremos los tipos de tareas identificados en cada una de las unidades revisadas, mencionando en cada caso la técnica que se propone en el texto para resolverla. También señalaremos las tecnologías y teorías involucradas, aunque no estén presentes en el texto.

4.2.1 Organización matemática de la Unidad 3 “Fracciones”

En esta unidad hemos encontrado 8 tipos de tareas, los detallaremos a continuación, mostrando un ejemplo de cómo son abordadas en el texto.

Tipo de tarea 1: Identificar partes de un todo.

Tarea 1.1: Identificar la fracción que corresponde a una figura que está dividida en partes iguales.

Tarea 1.2: Identificar la fracción que corresponde a una figura dada que no está dividida en partes iguales.

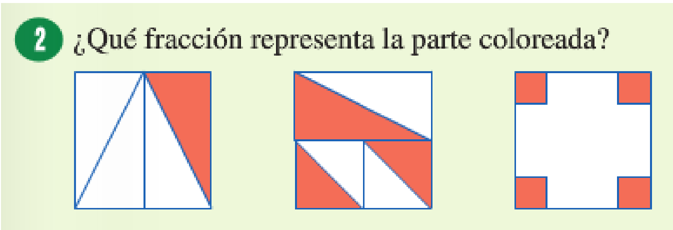


Figura 3. Ejemplo tipo de tarea 1

Fuente: Santillana (2012, p. 95)

El primer gráfico de la figura 3 corresponde a la tarea 1.1, en la cual, la técnica propuesta es el doble conteo de partes, es decir, contar la cantidad de partes iguales en las que fue dividida la figura y la cantidad de dichas partes que está pintada, correspondiendo la primera al denominador y la segunda, al numerador.

Los otros dos gráficos corresponden a la tarea 1.2, caso para el cual el texto no presenta ninguna técnica, aunque podemos decir que se debe dividir cada uno en partes iguales para luego proceder con en la tarea 1.1.

Tarea 1.3**:** Identificar qué parte de una cantidad es otra.

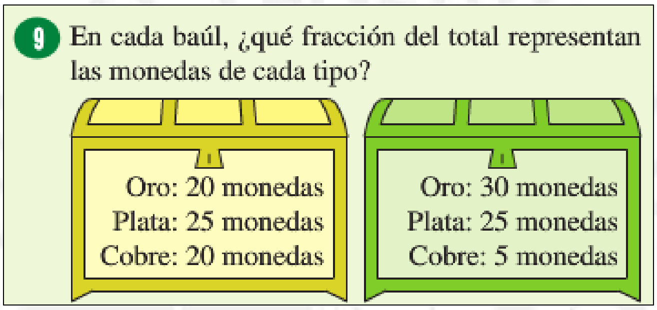


Figura 4. Ejemplo 1.3

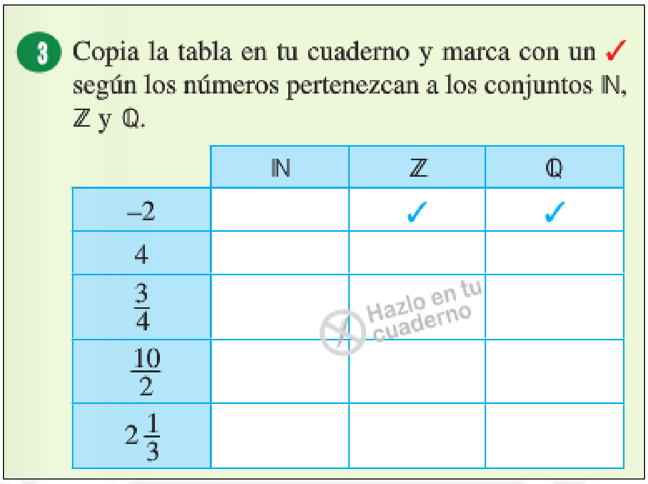
Fuente: Santillana (2012, p. 95)

En este caso, tratándose de una magnitud discreta y no continua como en el ejemplo anterior, la técnica varía, debiéndose formar una fracción en la que el numerador sea la cantidad de monedas del tipo pedido y el denominador el total de monedas, para luego, si es posible, simplificarla. La tecnología el significado parte – todo de las fracciones positivas.

La tecnología en este tipo de tarea es el significado parte – todo de las fracciones positivas.

A nuestro parecer, este tipo de tarea no contribuye a la comprensión del número racional, no solo porque es un tipo de tarea propia de los grados anteriores, sino porque se centra en el significado parte – todo, que como mencionan Gallardo y Saavedra (2011) no contribuye a la comprensión del racional negativo y, de acuerdo a Gairín (1998) tampoco ayuda a establecer conexiones entre las representaciones de los números racionales.

<u>Tipo de tarea 2</u>: Identificar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número dado.



3 Copia la tabla en tu cuaderno y marca con un ✓ según los números pertenezcan a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
-2		✓	✓
4			
$\frac{3}{4}$			
$\frac{10}{2}$			
$2\frac{1}{3}$			

Hazlo en tu cuaderno

Figura 5. Ejemplo tipo de tarea 2

Fuente: Santillana (2012, p. 95)

En este caso, el texto no presenta ninguna técnica, solo presenta un diagrama de Venn, en el que se observa que el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los enteros y éstos, en el conjunto de los números racionales, los cuales no se definen de manera clara, ya que se limita a decir que el conjunto de los enteros se amplía al de los racionales por las limitaciones que se presentan en la división de enteros.

La técnica consistiría en identificar primero los números naturales teniendo en cuenta que son aquellos que usamos para contar además del cero, mientras que los enteros, son los naturales y sus opuestos y los racionales, aquellos que pueden expresarse como cociente de dos enteros; considerando que, en algunos casos, es necesario operar previamente.

<u>Tipo de tarea 3</u>: Identificar fracciones representadas en la recta numérica.

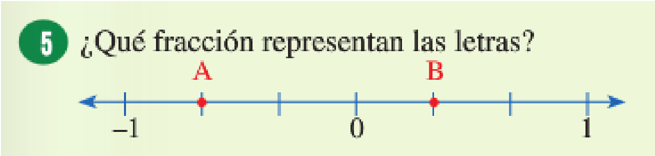


Figura 6. Ejemplo tipo de tarea 3

Fuente: Santillana (2012, p. 95)

En este caso, el texto no presenta una técnica pero, dado que puede considerarse un tipo de tarea inversa al tipo de tarea 4, puede aplicarse la técnica presentada en ese caso de manera inversa, identificando la cantidad de partes iguales en las que se ha dividido la unidad, para tomarla como denominador de la fracción y, contar a cuántos espacios del cero se encuentra el punto considerando que si está a su derecha se trata de un número positivo y si está a su izquierda, de un negativo, este número será el numerador de la fracción. La tecnología es el significado medida de las fracciones positivas.

Tipo de tarea 4: Representar fracciones en la recta numérica.

En este caso la técnica es dividir cada unidad en tantas partes como indica el denominador de la fracción dada y contar, a partir del cero, la cantidad que indica su numerador. En este caso, la tecnología también es el significado medida de las fracciones positivas.

Este tipo de tarea, al igual que el anterior, nos parece necesario pues el significado medida contribuye, de acuerdo a Gallardo y Saavedra (2011), a concebir la fracción negativa, además de que relacionarlo con la recta numérica es, según Behr (1992), la forma más apropiada de presentarlo.

Tipo de tarea 5: Determinar fracciones equivalentes.

Tarea 5.1: Determinar si dos fracciones son equivalentes.

14 Reproduce las tarjetas en tu cuaderno y pinta del mismo color las fracciones equivalentes.

$\frac{3}{7}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{16}{40}$
$\frac{4}{10}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{9}{21}$

Figura 7. Ejemplo tarea 5.1

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

En este caso la técnica propuesta en el libro es efectuar el producto cruzado, esto es, multiplicar el numerador de una fracción por el denominador de la otra y verificar si los resultados son iguales.

Tarea 5.2: Determinar la fracción equivalente irreductible de una fracción dada.

Obtén la fracción irreducible.

16 $\frac{35}{25}$ **17** $\frac{84}{142}$ **18** $\frac{120}{64}$ **19** $\frac{70}{630}$

Figura 8. Ejemplo tarea 5.2

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

Aquí la técnica es dividir ambos términos de la fracción entre su máximo común divisor y escribir una nueva fracción en la que los términos sean los cocientes obtenidos.

Tarea 5.3: Determinar el valor que falta para que dos fracciones sean equivalentes.

Halla el valor de x en las siguientes igualdades:

20 $\frac{40}{24} = \frac{x}{3}$ **21** $\frac{2}{3} = \frac{100}{x}$ **22** $\frac{-30}{9} = \frac{x}{12}$

Figura 9. Ejemplo tarea 5.3

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

Para el ejercicio 21, la técnica consiste en buscar porqué número se multiplicó el numerador de la primera fracción para obtener el numerador de la otra y multiplicar su denominador por la cantidad hallada.

Para los otros dos casos no se explicita la técnica pero podría deducirse que, para el ejercicio 20 se debe buscar la cantidad por la que se dividió el denominador para obtener el denominador de la otra y dividir su numerador por la cantidad hallada.

Otra técnica que podría usarse, y que ayuda a resolver la tarea en todos los casos, es efectuar el producto cruzado y luego resolver la ecuación que resulta.

<u>Tarea 5.4</u>: Determinar una fracción equivalente a otra teniendo como dato su denominador.

25 Escribe estas fracciones con denominador 24.

$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{7}{2}, \frac{10}{48}$

Figura 10. Ejemplo tarea 5.4

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

En este caso la técnica es encontrar por cuánto se debe multiplicar o dividir cada denominador para que resulte el valor dado y hacer lo mismo con su numerador.

Esta técnica se sustenta en la definición de fracciones equivalentes.

En cuanto a este tipo de tarea, debemos mencionar que si bien es necesario el trabajo con fracciones equivalentes pues proporcionan herramientas para sumar y restar fracciones y compararlas, el que todas las tareas involucren solo fracciones positivas, limitan la noción de número racional quedándose en un trabajo similar al realizado en los grados previos.

<u>Tipo de tarea 6</u>: Comparar fracciones.

Tarea 6.1: Comparar fracciones para ordenarlas.

23 Ordena de forma creciente las siguientes fracciones: $\frac{1}{7}, \frac{5}{9}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$

Figura 11. Ejemplo tarea 6.1

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

Tarea 6.2: Comparar fracciones a partir de un texto.

28 El día de ayer se observó que en el salón de 1.° A asistieron $\frac{5}{6}$ de los alumnos y en 1.° B asistieron $\frac{7}{9}$. ¿En qué sección asistieron más alumnos?

Figura 12. Ejemplo tarea 6.2

Fuente: Santillana (2012, p. 99)

La técnica señalada por el texto para este tipo de tarea es reducir las fracciones a común denominador y comparar los numeradores, es decir, homogenizarlas, notándose que la tarea 5.4 ahora es parte de la técnica. La tecnología es la definición de fracciones equivalentes.

A nuestro parecer, la tarea 6.1 es apropiada pues entre las capacidades que se debe desarrollar en primero de secundaria según el DCN (2009) se encuentra el comparar y ordenar números racionales pero, la tarea 6.2, una vez más se limita a las fracciones positivas que no aportan nada que ayude a la comprensión de los números racionales por parte de los estudiantes.

Tipo de tarea 7: Calcular el resultado de efectuar operaciones con fracciones.

Tarea 7.1: Calcular la suma y/o diferencia de dos fracciones.

43 Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

a	b	$a+b$	$a-b$
$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{10}$	...	...
$\frac{23}{24}$	$-\frac{3}{8}$	...	...
$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	...	...
...	$\frac{5}{4}$	...	1
$\frac{8}{5}$	...	$\frac{7}{10}$	...

Figura 13. Ejemplo tarea 7.1

Fuente: Santillana (2012, p. 102)

La técnica que presenta el libro es reducir las fracciones a común denominador y resolver como fracciones homogéneas, esto es, escribiendo el mismo denominador y sumando o restando los numeradores. En este caso, una vez más la tarea 5.4 es parte de la técnica.

Tarea 7.2: Calcular el producto de dos o más fracciones.

Calcula los productos.

62 $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$

63 $-\frac{55}{32} \cdot -\frac{40}{33}$

64 $\frac{12}{25} \cdot \frac{35}{4}$

65 $\frac{19}{16} \cdot \frac{32}{38}$

66 $-\frac{14}{9} \cdot \frac{18}{49}$

67 $\frac{17}{15} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{13}{34}$

Figura 14. Ejemplo tarea 7.2

Fuente: Santillana (2012, p. 105)

La técnica que menciona el texto es multiplicar los numeradores y los denominadores entre sí. Particularmente añadiríamos: colocar los resultados como numerador y denominador de una nueva fracción y simplificarla si es posible.

Tarea 7.3: Calcular el cociente de dos fracciones.

Resuelve las siguientes divisiones:

81 $\frac{5}{9} \div \frac{5}{3}$

82 $-\frac{169}{32} \div \frac{13}{16}$

83 $\frac{240}{14} \div -\frac{48}{7}$

84 $\frac{16}{25} \div \frac{64}{35}$

85 $-\frac{14}{18} \div -\frac{120}{28}$

86 $\frac{24}{5} \div \frac{4}{30} \div \frac{3}{10}$

87 $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$

88 $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{15}{48}}$

89 $\dfrac{\frac{7}{12}}{-\frac{14}{36}}$

90 $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$

91 $\dfrac{7}{\frac{3}{2}}$

92 $\dfrac{-\frac{13}{12}}{-26}$

Figura 15. Ejemplo tarea 7.3

Fuente: Santillana (2012, p. 108)

La técnica propuesta en el texto es multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción, ésta se aplica para los ejercicios 81 – 86.

En el caso de los ejercicios 87 – 90, que presentan lo que el autor llama fracciones complejas, es decir, cuando el numerador o el denominador son fracciones, la técnica es dividir el producto de los extremos entre el producto de los medios, siendo los extremos el numerador de la primera fracción y el denominador de la segunda y los medios su denominador y numerador respectivamente.

Tarea 7.4: Calcular el resultado de elevar una fracción a un exponente entero.

186 $\left(\frac{2}{7}\right)^2$ 187 $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$

Figura 16. Ejemplo tarea 7.4

Fuente: Santillana (2012, p. 116)

La técnica en este caso es multiplicar la fracción tantas veces como indica el exponente.

Tarea 7.5: Calcular la raíz enésima de una fracción.

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{729}}$$

Figura 17. Ejemplo tarea 7.5

Fuente: Santillana (2012, p. 113)

En este caso la técnica que señala el texto es calcular la raíz del numerador y escribirla sobre la raíz del denominador, considerando que la raíz enésima de un número es aquel que elevado a la "n" da como resultado el número dado.

<u>Tarea 7.6</u>: Calcular el resultado de efectuar operaciones que combinen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y/o radicación de fracciones.

Resuelvan las siguientes operaciones combinadas:

124 $\sqrt{\left[\frac{4}{11}\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\right)+1\frac{3}{4}\right]\div\frac{1}{125}}$

125 $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}-\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{3}\div\frac{1}{9}$

Figura 18. Ejemplo tarea 7.6

Fuente: Santillana (2012, p. 113)

Una vez más el texto no presenta una técnica para estos casos, limitándose a presentar técnicas para situaciones específicas como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 32 Resuelvo operaciones combinadas

Calcula el resultado de las siguientes operaciones combinadas:

a) $\sqrt{\frac{1}{25}}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}$

$=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{5}-1=-\frac{4}{5}$

1.° Calculamos las raíces.
2.° Calculamos el producto.
3.° Resolvemos la sustracción.

b) $\left(\sqrt[3]{-\frac{343}{512}}-\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\right)\div\left(\sqrt{\frac{64}{9}}\right)^{-1}$

1.° Calculamos las raíces.
2.° Resolvemos los paréntesis y el exponente negativo.
3° Resolvemos la división.

$\left(-\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{8}{3}\right)^{-1}=-\frac{11}{8}\div\frac{3}{8}=-\frac{11}{\cancel{8}_{1}}\times\frac{\cancel{8}^{1}}{3}=-\frac{11}{3}$

Figura 19. Ejemplo de técnica para la tarea 7.6

Fuente: Santillana (2012, p. 113)

La técnica para resolver esta tarea sería eliminar los signos de colección (paréntesis, llaves, corchetes) si los hubiera y luego efectuar las operaciones teniendo en cuenta que se debe respetar el siguiente orden: raíces y potencias, multiplicaciones y divisiones y finalmente, sumas y restas.

Se puede apreciar que para resolver esta tarea, se hace necesario emplear como técnica lo que antes fueron las tareas 7.1 – 7.5.

Por otro lado, la tecnología en este tipo de tarea son las propiedades de las operaciones con números racionales.

Sobre este tipo de tarea podemos decir que es pertinente dado que utiliza tanto las fracciones negativas como las positivas, permitiendo una visión más amplia del número racional, a la vez que se presentan tareas y técnicas inversas como es el caso de las tareas 7.2 y 7.3, y 7.4 y 7.5.

A la vez, este tipo de tarea permitirá que más adelante los alumnos sean capaces de "Resolver problemas que impliquen cálculos con expresiones fraccionarias o decimales", que es lo que se espera según el DCN (2009)

<u>Tipo de tarea 8</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren efectuar operaciones con fracciones.

<u>Tarea 8.1</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren sumar y/o restar fracciones.

55 Un terreno se divide entre tres personas. A la primera le corresponde $\frac{2}{3}$ y a la segunda $\frac{1}{5}$. ¿Qué fracción del terreno le corresponde a la tercera persona?

Figura 20. Ejemplo tarea 8.1

Fuente: Santillana (2012, p. 102)

En este caso, el texto no plantea una técnica pero, el alumno puede relacionarla con ejercicios realizados en años anteriores y hacer lo siguiente: averiguar qué parte ya ha sido utilizada sumando las partes que se conoce para luego calcular lo que falta para completar la unidad.

> **57** Un caño A llena un tanque en 2 horas y otro caño B, en 3 horas. Si se abren los dos caños a la vez, ¿en cuánto tiempo se llenará el tanque?

Figura 21. Ejemplo 2 tarea 8.1

Fuente: Santillana (2012, p. 102)

En este caso la técnica es identificar cuánto llena cada caño en una unidad de tiempo para, luego averiguar qué parten llenan juntos en esa unidad de tiempo y, posteriormente, calcular el tiempo que tardarán en llenar el total.

Tarea 8.2: Resolver situaciones contextualizadas que requieren multiplicar fracciones.

> **75** De un caño salen $1\frac{3}{4}$ litros de agua por minuto. ¿Cuántos litros de agua saldrán en una hora?

Figura 22. Ejemplo tarea 8.2

Fuente: Santillana (2012, p. 105)

Aquí la técnica es multiplicar lo que se sabe ocurre una cantidad de tiempo por el tiempo pedido, considerando que ambos deben estar en la misma unidad de medida (segundos, minutos, horas).

Tarea 8.3: Resolver situaciones contextualizadas que requieren dividir fracciones.

> **107** En un taller de corte y confección se dividió una tela de 48 metros entre todas las alumnas. Si a cada una le tocó una pieza de $3\frac{1}{5}$ metros, ¿cuántas alumnas hay en el taller?

Figura 23. Ejemplo tarea 8.3

Fuente: Santillana (2012, p. 108)

Una vez más, no se da una técnica para el caso en particular pero puede relacionarse con tareas desarrolladas en años anteriores, llegando a identificar que se debe dividir el largo de la tela entre el tamaño de la pieza que le tocó a cada alumna.

Tarea 8.4: Resolver situaciones contextualizadas que requieren potenciar fracciones.

Resuelve y explica tu proceso de solución.

132 El lado de un terreno cuadrado mide $\frac{5}{6}$ hm. ¿Cuánto mide el área de dicho terreno?

133 La arista de un dado mide $1\frac{1}{2}$ cm. ¿Cuál es su volumen?

Figura 24. Ejemplo tarea 8.4

Fuente: Santillana (2012, p. 113)

En el primer caso, la técnica es aplicar la regla para cálculo del área de un cuadrado y elevar el lado al cuadrado, y en el segundo, aunque no se menciona en el texto, puede relacionarse con el ejercicio anterior y aplicar la regla para cálculo del volumen de un cubo y elevar al cubo el valor de la arista.

Tarea 8.5: Resolver situaciones contextualizadas que requieren radicar fracciones.

134 Si el área de una mesa cuadrada mide $\frac{9}{4}$ m^2. ¿Cuánto mide uno de sus lados?

135 El volumen de un tanque cúbico es $\frac{125}{8}$ m^3. ¿Cuánto mide la arista del tanque?

Figura 25. Ejemplo tarea 8.5

Fuente: Santillana (2012, p. 113)

Para el primer caso, la técnica consiste en hallar la raíz cuadrada del valor del área. Para el segundo caso, no hay una técnica en el texto pero se puede relacionar con la tarea inversa que sería calcular el volumen de un cubo y hallar la raíz cúbica del valor que corresponde al volumen.

Debemos notar que en todas estas tareas, se ha usado como técnicas las tareas correspondientes al tipo de tarea 7 y que, en este tipo de tarea, la tecnología, está dada por las propiedades de las operaciones con números racionales.

Sobre este tipo de tarea podemos decir que si bien, como señalan Quispe y Gallardo (2009) es importante contextualizar los contenidos matemáticos a la vida cotidiana del estudiante y mostrar sus aplicaciones, se sigue trabajando básicamente con la fracción positiva, lo que no hace mayor diferencia de lo que se desarrolla en grados anteriores.

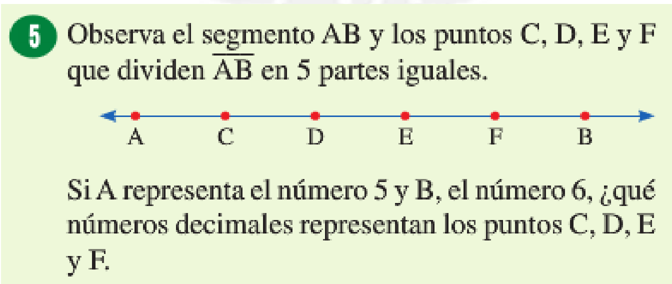
Por último, refiriéndonos a la teoría, podemos decir que, en este capítulo, está dada por la teoría de los números racionales.

4.2.2 Organización matemática de la Unidad 4 “Números decimales”

En esta unidad hemos identificado 6 tipos de tarea, para presentarlas hemos optado por mantener la numeración dada en los tipos de tarea de la unidad 3 en los casos que consideramos que los tipos de tarea podrían proponerse como tareas de un mismo tipo de tarea en la que no se distinga fracciones de decimales sino que se hable de número racional. Para hacer la diferencia entre los tipos de tarea que se refieren a las fracciones y lo que involucran a los decimales, hemos agregado la letra “a” después del número que corresponde.

Habiendo hecho esta aclaración pasamos a detallar los tipos de tarea encontrados:

Tipo de tarea 3a: Identificar decimales representados en la recta numérica.


5 Observa el segmento AB y los puntos C, D, E y F que dividen $\overline{AB}$ en 5 partes iguales.

Si A representa el número 5 y B, el número 6, ¿qué números decimales representan los puntos C, D, E y F.

Figura 26. Ejemplo tipo de tarea 3a

Fuente: Santillana (2012, p. 128)

En este caso, el libro no presenta una técnica pero, habiendo trabajado con fracciones, el alumno puede reconocer que se ha dividido una unidad para luego identificar la cantidad de partes iguales en las que se ha dividido e identificar qué distancia hay entre dos puntos para, a partir de ella, calcular los valores faltantes. Para este tipo de tarea la tecnología es el concepto de número decimal.

Este tipo de tarea puede ser apropiado ya que puede relacionarse con el significado medida de las fracciones que relacionado con la recta numérica puede contribuir, como mencionan Gallardo y Saavedra (2011) a dar sentido a las fracciones negativas que forman parte del contenido a desarrollar en el grado según el DCN (2009). No obstante, sería mejor que se trabajase no solo con números positivos.

<u>Tipo de tarea 6a</u>: Comparar números racionales.

<u>Tarea 6a.1</u>: Comparar números racionales para ordenarlos.

Ordena los números en orden decreciente.

62 $-0{,}25;\ -\frac{7}{5};\ -\frac{3}{8};\ -\frac{10}{7};\ -1{,}025$

63 $\frac{3}{7};\ 0{,}125;\ \frac{4}{5};\ 0{,}235;\ \frac{5}{3}$

Figura 27. Ejemplo tarea 6a.1

Fuente: Santillana (2012, p. 134)

En este caso, no se presenta la técnica pero puesto que el ejercicio se presenta luego de desarrollar fracción generatriz, consideramos que la técnica que se contempla es expresar todos los números en forma fraccionaria para luego compararlos homogenizando los denominadores.

<u>Tarea 6a.3</u>: Comparar números decimales.

Copia y compara usando los símbolos <; > o =.

29 $5{,}234 \ (\dots)\ 5{,}237$ 30 $2{,}47 \ (\dots)\ 2{,}5$

31 $58{,}4 \ (\dots)\ 58 + \frac{4}{10}$ 32 $3{,}04 \ (\dots)\ \frac{304}{10}$

33 $-4{,}8 \ (\dots)\ 0{,}1$ 34 $-0{,}5 \ (\dots)\ \frac{23}{9}$

35 $1{,}34 \ (\dots)\ 1{,}3$ 36 $36{,}4 \ (\dots)\ 36 + \frac{4}{10}$

37 $7{,}03 \ (\dots)\ \frac{703}{10}$ 38 $5 + \frac{3}{100} \ (\dots)\ 5{,}03$

39 $-3{,}7 \ (\dots)\ 0{,}5$ 40 $-1{,}642 \ (\dots)\ -1{,}842$

Figura 28. Ejemplo tarea 7a.6

Fuente: Santillana (2012, p. 131)

La técnica, en los casos en que las cantidades a comparar se encuentran expresadas como decimal es comparar la parte entera y luego la parte decimal, para lo cual se iguala la cantidad de decimales usando ceros.

Cuando se trata de comparar una expresión decimal con una suma de entero más fracción, el texto no explicita la técnica pero, habiendo explicado previamente cómo obtener la expresión decimal de una fracción, creemos que la técnica sería expresar las fracciones como decimales, efectuar la suma y, finalmente, comparar como en el caso anterior.

La tecnología en este caso es que un número racional tiene dos formas de representación: la decimal y la fraccionaria.

Este tipo de tarea es necesario puesto que el DCN (2009) propone que, al término del primero de secundaria, los alumnos sean capaces de comparar números racionales pero nos parece que el texto, usa esta tarea de modo limitado ya que, salvo en la tarea 6a.1, se limita a comparar decimales exactos, dejando de lado los periódicos.

<u>Tipo de tarea 7a</u>: Calcular el resultado de efectuar operaciones con expresiones decimales.

Tarea 7a.1: Calcular la suma o resta de dos números racionales expresados en forma decimal.

En este caso, el texto propone dos técnicas, dependiendo de si se pide redondear o no. En el primer caso, la técnica consiste en redondear cada número al orden indicado, esto es, se usa como técnica la tarea 9.1, para posteriormente, alinear las comas y sumar como si se tratase de enteros. En el segundo caso, a técnica es expresar todos los números como fracción y luego sumarlos como se indicó en la unidad 3.

Tarea 7a.2: Calcular el producto de dos o más números racionales expresados en forma decimal.

En esta tarea, si se trata de decimales exactos, la técnica propuesta por el texto es en multiplicar como si fuesen naturales y colocar la coma en el producto contando de derecha izquierda tantas cifras como cifras tenga la suma de las cifras decimales de los dos factores.

Cuando se trata de decimales periódicos, la técnica es redondear al orden indicado, esto es, una vez más la tarea 9.1 se convierte en técnica, y proceder como en el caso anterior.

Tarea 7a.3: Calcular el cociente de dos números racionales expresados en forma decimal.

La técnica es multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor y dividir como si se tratara de una división de decimal entre número natural.

Tarea 7a.4: Calcular el resultado de elevar a un exponente entero un número racional expresado en forma decimal.

La técnica es multiplicar por sí mismo el número tantas veces como indique el exponente.

<u>Tarea 7a.5</u>: Calcular la raíz enésima de un número racionales expresado en forma decimal.

En este caso se presentan dos técnicas, la primera es calcular la raíz del número como si fuera entero y considerar tantos decimales como resulte de dividir la cantidad de cifras decimales del radicando entre el índice. La segunda es expresar el decimal como fracción, calcular la raíz de ambos términos y, finalmente, dividir el numerador entre el denominador obtenidos.

<u>Tarea 7a.6</u>: Efectuar operaciones que combinen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y/o radicación de números racionales expresados en forma decimal.

Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

221 $\frac{(0,7)(1,8)}{0,9}$

222 $\frac{(0,3)(0,5)\sqrt{1,2 \cdot 0,3}}{9}$

Figura 29. Ejemplo tarea 7a.6

Fuente: Santillana (2012, p. 144)

Al igual que en el caso de las fracciones, el texto no presenta una técnica que pueda usarse en distintos casos sino que muestra la técnica a seguir en un caso concreto sin precisar sus pasos, como veremos a continuación.

Ejemplo 29 Resuelvo operaciones combinadas

Calcula el resultado de $-\frac{6 \cdot 10^{15}}{2,4 \cdot 10^{19}} - \sqrt[4]{0,0625} \cdot 10^{-16}$.

- Aplicamos las propiedades de la potenciación y radicación:

$$-\frac{6 \cdot 10^{15}}{2,4 \cdot 10^{19}} - \sqrt[4]{0,0625} \cdot 10^{-16}$$ ← Aplicamos $a^m \div a^n = a^{m-n}$ y $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$

$$= -2,5 \cdot 10^{-4} - 0,5 \cdot 10^{-4}$$ ← Agrupamos los coeficientes.

$$= (-2,5 - 0,5) \cdot 10^{-4}$$

$$= -3 \cdot 10^{-4}$$

Figura 30. Ejemplo de técnica para la tarea 7a.6

Fuente: Santillana (2012, p. 143)

Es importante mencionar que en el caso de tareas tarea 7a.3, 7a.4, 7a.5 y 7a.6 solo se utiliza decimales exactos lo que, a nuestro parecer, es una limitación.

En este tipo de tarea la tecnología son las propiedades de las operaciones con expresiones decimales.

En relación a este tipo de tarea, podemos decir que, a nuestro parecer, no se aprovecha, no solo porque sigue dando énfasis a los números positivos sino también porque se centra en los cálculos por aproximación, dejando de lado el valor exacto que, en el caso de los decimales periódicos, obliga a relacionar las dos representaciones del número racional, aspecto necesario, como menciona Gairín (1998), para la comprensión de éste.

Aunque, al mismo tiempo, presenta técnicas como las siguientes:

Ejercicio **resuelto**

a) $\mathbf{3{,}6 \cdot 0{,}01} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{100} = \frac{3{,}6}{100} = 0{,}036$

b) $\mathbf{1{,}25 \div 0{,}001} = 1{,}25 \div \frac{1}{1\,000}$

$= 1{,}25 \cdot 1\,000 = 1\,250$

Figura 31. Ejemplo de técnica para las tareas 7a.2 y 7a.3

Fuente: Santillana (2012, p. 140)

Lo cual, carece de sentido dado que, en este caso, el cambio de representación no es necesario.

<u>Tipo de tarea 8a</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren efectuar operaciones con números racionales expresados en forma decimal.

<u>Tarea 8a.1</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren sumar y/o restar números racionales expresados en forma decimal.

<u>Tarea 8a.2</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren multiplicar números racionales expresados en forma decimal.

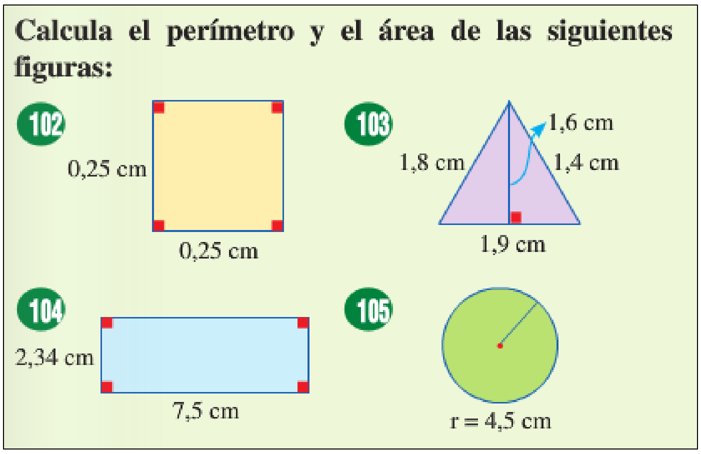


Figura 32. Ejemplo tareas 8a.1 y 8a.2

Fuente: Santillana (2012, p. 137)

La técnica para la tarea 8a.1 es aplicar la noción de perímetro y sumar las longitudes de los lados teniendo en cuenta que los cuadrados tienen los cuatro lados de igual longitud mientras que los rectángulos tienen los lados opuestos de igual longitud.

En este caso, nos llama la atención que pidan calcular el perímetro de la circunferencia dado que la definición de perímetro es la suma de las longitudes de los lados de un polígono y, cuando se desea saber el borde una circunferencia se usa el término "longitud de la circunferencia".

La técnica para la tarea 8a.2 es aplicar las reglas para el cálculo de áreas dependiendo de la figura reemplazando en ellas las medidas dadas y efectuando las multiplicaciones.

<u>Tarea 8a.3</u>: Resolver situaciones contextualizadas que requieren dividir números racionales expresados en forma decimal.

163 Gaby quiere repartir 7 litros de aceite en botellas de 0,250 litros. ¿Cuántas botellas necesitará?

Figura 33. Ejemplo tarea 8a.3

Fuente: Santillana (2012, p. 140)

Aquí la técnica es dividir lo que se quiere repartir entre la capacidad de la botella.

Tarea 8a.6: Resolver situaciones contextualizadas que requieren efectuar más de una operación con números racionales expresados en forma decimal.

> **126** Marlene compra en el mercado 3 kg de papa a S/. 1,60 el kilogramo; 2 kg de arroz a S/. 3,80 el kilogramo y 4 kg de azúcar a S/. 3,50 el kilogramo. ¿Cuánto gastó Marlene en el mercado?

Figura 34. Ejemplo tarea 8a.6

Fuente: Santillana (2012, p. 137)

En este caso la técnica consiste en averiguar el precio total de cada producto, multiplicando el precio unitario por el total de kilos comprados y luego sumar los resultados.

En este tipo de tarea las técnicas son las tareas del tipo de tarea 7a, salvo en el caso de la tarea 7a.1 que, cuando requiere expresar el decimal como fracción y operar en esa forma de representación, emplea las técnicas de las operaciones con fracciones vistas en la unidad anterior.

Para este tipo de tarea, la tecnología está dada por las propiedades de las operaciones con expresiones decimales.

En relación a este tipo de tarea podemos decir que es conveniente en tanto, contextualiza a la vida cotidiana los decimales, lo cual, como mencionan Quispe y Gallardo (2009) es necesario al desarrollar los temas matemáticos pero, se sigue presentando en situaciones en las que solo se requiere números positivos.

Tipo de tarea 9: Calcular el valor aproximado de un decimal.

Tarea 9.1: Calcular el valor aproximado de un decimal por redondeo.

Tarea 9.2: Calcula el valor aproximado de un decimal por truncamiento.

28 Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

	Truncamiento		Redondeo	
	A la décima	A la centésima	A la décima	A la centésima
32,2747				
–5,3579				
4,3952				
–78,345				

Figura 35. Ejemplo tipo de tarea 9

Fuente: Santillana (2012, p. 131)

La técnica cuando se trata del truncamiento es eliminar las cifras que hay a la derecha de la cifra del orden solicitado y, para el redondeo, considerar la cifra del orden siguiente al solicitado, si es menor que 5, se mantiene la igual la cifra solicitada y, si es igual o mayor que 5, se aumenta una unidad dicha cifra.

Cabe mencionar que este tipo de tarea se presenta en el texto antes de las operaciones con números decimales, por eso hemos considerado la tarea 9.1 como técnica en el tipo de tarea 7a.

En este caso la tecnología son las propiedades de los números decimales. Consideramos que este tipo de tarea es necesario pues servirá de técnica para operar con los decimales, sobre todo, si se desea contextualizar a situaciones de la vida cotidiana.

Tipo de tarea 10: Expresar números racionales dados en una de sus formas de representación en la otra.

Tarea 10.1: Expresar en forma decimal un número racional dado en su forma fraccionaria.

¿A qué número decimal equivalen las siguientes fracciones?

6. $\frac{72}{10}$
7. $\frac{-45}{10}$
8. $-\frac{283}{100}$
9. $\frac{120}{1\,000}$
10. $\frac{30}{100}$
11. $-\frac{6}{10}$
12. $\frac{205}{100}$
13. $\frac{-2}{10}$
14. $-\frac{37}{10}$

Figura 36. Ejemplo tarea 10.1

Fuente: Santillana (2012, p. 128)

La técnica es dividir el numerador entre el denominador de la fracción dada y la tecnología la definición de fracción, siendo la tecnología la definición de número racional.

<u>Tarea 10.2</u>: Expresar como fracción un número racional dado en su forma decimal.

Calcula la fracción generatriz y ubícalas en la recta numérica.

68. $0,\widehat{24}$
69. $-1,\widehat{15}$
70. $-0,4\widehat{5}$
71. $-2,1\widehat{6}$
72. $0,18$
73. $3,\widehat{6}$
74. $0,\widehat{5}$
75. $1,12\widehat{4}$

Figura 37. Ejemplo tarea 10.2

Fuente: Santillana (2012, p. 134)

En este caso la técnica es aplicar las reglas de la fracción generatriz cuya tecnología está dada por las propiedades de las operaciones con números racionales.

En cuanto a este tipo de tarea podemos decir que es apropiado, no solo porque permite relacionar las dos formas de representación de los números racionales que es, de acuerdo a Gairín (1998) necesario para la comprensión del número racional sino porque se trata de tareas inversas que es uno de los indicadores de completitud de una OML que menciona Fonseca (2004).

Por último, debemos señalar que en todos los tipos de tarea mencionados, la teoría es la teoría de los números racionales.

4.3 Resultados

Habiendo realizado la descripción de la organización matemática presente en las unidades 3 y 4 del libro de Santillana podemos decir que en la unidad 3: Fracciones, encontramos 9 tipos de tarea, de los cuales, el primero (identificar partes de un todo) se centra en el significado parte - todo que, como mencionan Quispe (2008) y Carrillo (2012) es el que se prioriza en primaria lo que para Gairín (1998) limita la comprensión de los números racionales, además de ser, según Gallardo y Saavedra (2011), un significado que no contribuye a la darle significado a la fracción negativa.

Por su parte, el tipo de tarea 2 (identificar los conjuntos numéricos a los que pertenece un número dado) permite relacionar los naturales, enteros y racionales pero, al presentarse solo una vez, queda como una tarea aislada.

Los demás tipos de tarea de la unidad están de acuerdo a lo que propone el DCN (2009), esto es, comparar, ordenar y resolver problemas con expresiones fraccionarias aunque nos parece limitada la forma en que se presenta estos tipos de tarea pues salvo en los que involucran operaciones, el uso de las fracciones negativas es escaso.

En el caso de la unidad 4 “Números decimales”, se presentan 6 los tipos de tarea, en los que se proponen ejercicios, a nuestro parecer, limitados pues o se centran en los números positivos, coincidiendo con lo que mencionan Gallardo y Saavedra (2011) o en los decimales exactos, dejando de lado los decimales periódicos que, en el caso de las operaciones, requieren un cambio de representación y que permitirían hacer la conexión entre las dos formas de representación que, según Garín (1998), es necesaria para la comprensión del número racional.

Algo que sí nos parece importante resaltar es que, en ambas unidades, el texto busca proponer tareas contextualizadas a la vida cotidiana, lo que Quispe y

Gallardo (2009) señalan como una necesidad para la comprensión de los objetos matemáticos.

Así mismo, creemos que debemos rescatar el que en muchos casos, lo que en un momento se presenta como una tarea luego pasa a ser una técnica, lo cual le da sentido. Esto sucede tanto en la unidad de fracciones como en la de decimales, por ejemplo, la tarea 5.4 se usa como técnica en el tipo de tarea 6 y en la tarea 7.1, lo mismo sucede con el tipo de tarea 7 que aparece como técnica en el tipo de tarea 8.

Por otra parte, no se ha encontrado que se presente una definición en el texto de los números racionales y que las propiedades de la adición y multiplicación solo se mencionen sin que se propongan tareas en relación a ellas ni se les emplee para justificar técnicas, lo cual, quita opción de aprovechar la tecnología de este objeto matemático.

Otro punto importante es que, como mencionamos desde el inicio, las fracciones y decimales se presentan en unidades diferentes lo que no permite establecer conexiones entre ambas formas de representación, lo cual, según Gairín (1998), no contribuye a la comprensión de los números racionales.

Por otro lado, centrándonos en los indicadores de completitud descritos por Fonseca (2004), en lo que se refiere al primer indicador: integración de los tipos de tarea y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, podemos observar que solo se integran tareas cuando se trata del tipo de tarea 6 (comparar fracciones) y la tarea 7.1 (calcular la suma y/o diferencia de dos fracciones), en los cuales se usa como técnica la tarea 5.4 (determinar una fracción equivalente a otra teniendo como dato su denominador) que permite homogenizar fracciones y que hará posible poder compararlas así como efectuar sumas y restas con ellas. En cuanto a tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, no hemos encontrado ninguna en el texto.

Sobre el segundo indicador: diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas, en la tarea 6a.1 (comparar números racionales para ordenarlos), si bien no se presenta ninguna técnica, al tratarse de racionales expresados tanto en su forma decimal como fraccionaria, se da la posibilidad de elegir entre expresar todos los números como fracción o como decimal. Por su parte, en la tarea 7a.1 (calcular la suma y/o resta de dos números racionales expresados en forma decimal), sí se presentan dos técnicas: redondear los números o expresarlos en forma fraccionaria, dándose como criterio, en cierta forma, que se dese el valor exacto o el aproximado. Otra tarea en la que se presentan dos técnicas aunque no se da un criterio para elegir entre ellas es la 7a.5 (calcular la raíz enésima de dos números racionales expresados en forma decimal).

En relación al tercer indicador: independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar la técnica, siendo que los números racionales tienen dos formas de representación, este indicador debería estar presente pero, al trabajarse las fracciones y los decimales en unidades diferentes, se limita a las tareas 6a.1 (comparar números racionales para ordenarlos), 7a.1 (calcular la suma y/o resta de dos números racionales expresados en forma decimal), 7a.5 (calcular la raíz enésima de un número racional expresado en forma decimal), en las cuales se combinan las dos formas de representación de los racionales, dando la opción de expresarlos en una de ellas para compararlos o efectuar operaciones.

En cuanto al cuarto indicador: existencia de tareas y técnicas inversas, tenemos que los tipos de tarea 3 (identificar fracciones representadas en la recta numérica) y 4 (representar fracciones en la recta numérica) son inversas, lo mismo que las tareas 7.4 (calcular el resultado de elevar una fracción a un exponente entero) y 7.5 (calcular la raíz enésima de una fracción) y en las tareas 10.1(expresar en forma decimal un número racional dado en su forma fraccionaria) y 10.2 (expresar como fracción una número racional dado en su forma decimal).

Refiriéndonos al quinto indicador: interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas, no hemos encontrado ninguna tarea relacionada, ya que el texto se centra en aplicar técnicas más no en que se las interprete.

Sobre el sexto indicador: existencia de tareas matemáticas abiertas, teniendo en cuenta que los datos y las incógnitas no estén prefijados de antemano, podemos decir que se da en el ejemplo que presentaremos a continuación pero que, creemos, debería pedir que expliquen o justifiquen de alguna manera.

Identifica las afirmaciones verdaderas o falsas.

97 La sustracción de un número racional y su opuesto es cero.

98 Es posible sustraer a un número racional negativo otro número racional negativo y obtener un número racional positivo.

99 Es posible sustraer a un número racional positivo otro número racional positivo y obtener un número racional negativo.

100 Al restar un número de otro, el signo del resultado es siempre el del menor.

Figura 38. Ejemplo de tarea abierta

Fuente: Santillana (2012, p. 137)

Este ejercicio podría ser considerado una tarea dentro de un tipo de tarea que se refiera a los racionales en general como: calcular la suma y/o resta de dos números racionales, aunque el alumno será quien elija los números a sumar o restar. Por otra parte, centrándonos en si el texto presenta tipos de tareas que permitan al estudiante decidir, ante una situación matemática o extramatemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes, podemos decir que si bien hay un tipo de tarea en cada unidad relacionado a resolver situaciones que requieren efectuar operaciones con números racionales ya sea expresados como fracción o decimal, nos parece que son a nivel muy básico dado que, como dijimos anteriormente, las situaciones presentadas son similares a las que se trabajan en primaria y están centradas en los números positivos.

Por último, considerando el séptimo indicador: integración de los elementos tecnológicos y su incidencia sobre la práctica, creemos que en algunos casos sí hay incidencia de la tecnología sobre la práctica, como por ejemplo la definición de fracciones equivalentes que permite establecer técnicas para comparar y efectuar operaciones con fracciones, del mismo modo, el significado medida de las fracciones que sostiene el trabajo en la recta numérica, tanto con las fracciones como con los decimales, aunque no necesariamente permitan construir nuevas técnicas.

En la siguiente tabla mostramos un resumen de lo encontrado al analizar el texto en relación a los indicadores de completitud.

Tabla 2. Indicadores de completitud presentes en el texto

	Indicador	Cumplido
1	Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.	EN FORMA PARCIAL
2	Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	EN FORMA PARCIAL
3	Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	EN FORMA PARCIAL
4	Existencia de tareas y técnicas inversas.	SI
5	Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.	NO
6	Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.	EN FORMA PARCIAL
7	Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.	EN FORMA PARCIAL

Como podemos apreciar en la tabla, la organización matemática que presenta el texto en relación a los números racionales no cumple o cumple en forma parcial los indicadores de completitud, por lo que podemos afirmar que se trata de una praxeología local relativamente completa.

CONCLUSIONES

En relación al primer objetivo específico: Describir la organización matemática que presenta un texto de primer año de secundaria en relación a los números racionales, encontramos el tipo de tarea: Identificar partes de un todo, en la unidad Fracciones, el cual podría obviarse ya que, como menciona Gairín (1998) limita la comprensión de los números racionales y, según Gallardo y Saavedra (2011), no contribuye a darle sentido a la fracción negativa, además de ser un significado, de acuerdo a Carrillo (2012) presentado con frecuencia en primaria.

Así mismo, hallamos que si bien los tipos de tarea presentados en las dos unidades que trabajan los números racionales, pueden ser apropiados, por consistir en ejercicios de representación en la recta numérica, comparación, cálculo y resolución de situaciones contextualizadas, contemplados en el DCN, trabajan muy poco con los racionales negativos, coincidiendo con lo que mencionan Gallardo y Saavedra (2011) y, en el caso de los decimales, se centraban en los decimales exactos, quitando opción a utilizar ambas representaciones de los racionales lo que, según Gairín (1998) dificulta que los estudiantes establezcan conexiones entre ellas y, por lo tanto, no lleguen a comprender los números racionales.

Algo más que nos parece importante mencionar es que, tanto en la unidad de Fracciones como en la de Números decimales, el texto busca proponer tareas contextualizadas a la vida cotidiana, lo que Quispe y Gallardo (2009) señalan como una necesidad para la comprensión de los objetos matemáticos aunque, como dijimos en el párrafo anterior, se trata solo con números positivos.

Lo que encontramos como una limitación en el texto es que las dos representaciones del número racional se abordan en unidades diferentes, lo que no permite establecer conexiones entre ellas y que, de acuerdo a Gairín (1998), es necesario para la comprensión del número racional.

Así mismo, se constató que en el texto se privilegia el saber hacer, dejándose de lado el saber, es decir, se prioriza el plantear tareas dando técnicas para desarrollarlas sin justificarlas, deficiencia que también encontraron Carrillo (2012) y Quispe (2008) en sus respectivas investigaciones y que Fonseca (2004) menciona como algo usual en la educación básica.

En lo que se refiere al segundo objetivo: Valorar la organización matemática presentada en el texto a partir de los indicadores de completitud, pudimos observar que el texto integra en cierta forma los tipos de tarea, básicamente en los casos de las tareas que involucran comparar fracciones y sumarlas o restarlas. Se encontró también que casi no presenta técnicas diferentes para cada tipo de tareas y que, en cuanto a la independencia de los objetos ostensivos, se limita al momento de efectuar operaciones que combinan ambas formas de representación de los racionales o al hacer comparaciones en las que hay decimales y fracciones.

En cuanto a la presencia de tareas y técnicas inversas, se halló que no solo estaba presente al cambiar de una forma de representación a otra, sino también, al tratar con la recta numérica y con algunas operaciones como la potenciación y radicación.

En lo que se refiere a la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas, la organización matemática presentada en el texto, no cumplió con este indicador, y, lo hizo en poca medida con la existencia de tareas abiertas, mientras que hubo poca integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica, concluyéndose que la praxeología matemática presente en el texto es relativamente completa.

REFERENCIAS

Ávila, A; García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura.* México. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/losdecimalesa.pdf

Becerra López, A. (2015). *Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que se presenta en un libro de texto del quinto grado de educación primaria.* Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe

Behr, M; Post, T. (1992). Teaching Rational Number and Decimal Concepts. En T. Post (Ed.) *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201 – 248). Boston: Allyn and Bacon. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_2.html

Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89- 113). Santander: SEIEM. Recuperado de http://www.seiem.es/docs/actas/13/SEIEMXIII-BoschGascon.pdf

Carrillo Yalán, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria.* Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe

Chevallard, Y (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.Recuperado de http://www.cienciamia.com.mx

Editorial Santillana (2012). *Hipervínculos Matemática*. Perú.

Eguren, M.; Belaúnde, C. y González, N. (2004). Repensando el texto escolar desde su uso: un diagnóstico para la escuela urbana. Recuperado de http://old.cies.org.pe

Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural de trabajo.* Tesis de maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis doctoral. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo. Recuperado de www.atd-tad.org

Gairín Sallán, J. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. Recuperado de http://fqm193.ugr.es

Gallardo, A y Saavedra, G. (2011). Significados de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. En Marín, Margarita; Fernández, Gabriel; Blanco, Lorenzo J.; Palarea, María Mercedes (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV (pp.* 361-370). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es

Gonzales Hernández, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe

Hernández, R.; Fernández, C y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.* Recuperado de http://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Obando Zapata, G. (2003) La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte – todo. *EMA*, 8(2), 157-182. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Oliveira Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación. Diploma de estudios avanzados). Universidad de Vigo. Recuperado de http://www.atd-tad.org/wpcontent/uploads/2012/07/DEA-Catarina-Lucas_versi%C3%B3n-preliminar.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional*. Lima. Recuperado de http://ebr.minedu.gob.pe

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/documentos.php#top

Quispe Yapo, W. (2008) .*Interferencias en la comprensión de los significados del número racional.* Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de la Matemática. Universidad Nacional de san Antonio Abad del Cuzco. Recuperado de http://es.slideshare.net/collasuyow/tesis-maestra-wenceslao-quispe-yapo

Quispe, W y Gallardo, J. (2009). Una aproximación a la comprensión de la fracción en Perú a través de los libros de texto. En María José González, María Teresa González, Jesús Murillo, *Investigación en Educación Matemática XIII.* España. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co

Rojas, A. (2000). *Matemática 1*. Perú. Editorial San Marcos.

Vásquez, E. (2012). *Medición del impacto de libro de texto en el aula de clases.* Tesis para optar el grado de Doctor. University of Flensburg. Recuperado de http://d-nb.info/1029421323/34