

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



ESTRUCTURAS MÉTRICAS DE CONTACTO Y POLINOMIOS DE
BRIESKORN-PHAM

Tesis para optar por el grado de
Magíster en Matemáticas

Autor

Álvaro José Ballón Bordo

Asesor

Dr. Jaime Cuadros Valle

Jurado

Dr. Richard Gonzales Vilcarromero

Dr. Alfredo Poirier Schmitz

Julio del 2016

Lima-Perú

Contenidos

Introducción	3
1 Geometría simpléctica	4
1.1 Variedades simplécticas	4
1.2 Aplicación momento	6
1.3 Variedades complejas	11
1.4 Variedades de Kähler	16
2 Geometría de contacto y fibración de Boothby-Wang	20
2.1 Variedades de contacto	20
2.2 Fibrados principales	24
2.3 Teorema de Boothby-Wang	28
3 Geometría riemanniana en variedades de contacto	33
3.1 Estructuras métricas de contacto	33
3.2 Variedades de Sasaki	39
3.3 Simplectización cónica y cilíndrica	46

CONTENIDOS	2
4 Estructuras de contacto en variedades de Brieskorn	52
4.1 Links en hipersuperficies complejas	52
4.2 Deformaciones de estructuras de Sasaki	55
4.3 Estructuras de Sasaki en variedades de Brieskorn	59
Referencias	66



Introducción

Esta tesis presenta una visión global y prácticamente autocontenida de los avances que se llevaron a cabo en la décadas de los años 1960 y 1970 con respecto al estudio de las estructuras de contacto en variedades diferenciables. Nuestro objetivo principal será exhibir explícitamente estructuras métricas de contacto en las denominadas variedades de Brieskorn, que surgen como el conjunto de ceros de los llamados polinomios de Brieskorn-Pham intersecado con la esfera unitaria.

Para ello comenzaremos desarrollando a grandes rasgos los conceptos relacionados a la geometría simpléctica, la geometría compleja y las variedades de Kähler. Luego realizaremos un esbozo de prueba del teorema de Boothby-Wang, que constituye una generalización de la fibración de Hopf. A continuación presentaremos la construcción de estructuras métricas de contacto, en particular, las denominadas estructuras de Sasaki. El objetivo de ello es obtener estructuras de Sasaki en las variedades de Brieskorn, las cuales exhibiremos en coordenadas a fin de obtener un procedimiento para construirlas en una variedad de Brieskorn arbitraria. Por último, relacionaremos lo estudiado con la fibración de Boothby-Wang para probar que las estructuras construidas pueden ser proyectadas como hipersuperficies en el espacio proyectivo complejo. Debido a la naturaleza de las nociones presentadas, se espera que el lector tenga un conocimiento elemental de la geometría riemanniana.

Quisiera agradecer a mis padres Carlos y Margarita y a mi hermana Mónica por brindarme siempre su apoyo incondicional; a mi asesor Jaime Cuadros, por su paciente y eficaz supervisión; a los profesores Alfredo Poirier y Richard Gonzales por sus comentarios y críticas constructivas; y en general a todos los profesores de la Pontificia Universidad Católica del Perú que contribuyeron a mi formación.

Capítulo 1

Geometría simpléctica

1.1 Variedades simplécticas

Empezaremos definiendo un tipo de variedad diferenciable, llamada variedad simpléctica. Los distintos tipos de variedades que estudiaremos luego serán generalizaciones del concepto de variedad simpléctica en contextos diversos. Las variedades simplécticas son variedades de dimensión par que admiten una forma diferencial de grado 2 cerrada y no degenerada. Más adelante, generalizaremos esta noción y definiremos formas simplécticas en variedades complejas que admiten una métrica hermitiana.

Definición 1.1.1. Sea el par (M, ω) , donde M es una variedad diferenciable de dimensión par $2n$, $n \in \mathbb{Z}$, y ω es una forma diferencial de grado 2 definida globalmente en M . Se dice que la variedad M es una **variedad simpléctica** y ω es una **forma simpléctica** si se satisfacen las siguientes condiciones:

(S1) la forma diferencial ω es no degenerada; es decir, $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n \neq 0$;

(S2) la forma diferencial ω es cerrada; es decir, la derivada exterior de ω es idénticamente nula.

Nuestro objetivo en este capítulo es caracterizar las variedades simplécticas. En esta sección nos restringiremos al caso de variedades reales. Veamos a continuación el ejemplo más sencillo.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el espacio de fases de un sistema de n partículas que

no interactúan y cuyo movimiento está restringido a una sola dimensión. El movimiento de la i -ésima partícula, $1 \leq i \leq n$, puede describirse mediante su posición q_i y su momento lineal p_i . El espacio de fases del sistema puede ser descrito por las coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Si definimos la 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i,$$

observamos que ω_0 es cerrada y no degenerada. Por lo tanto ω_0 es una forma simpléctica y $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ es una variedad simpléctica. Observemos que si tenemos una función diferenciable $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se cumple $dH = i_{X_H}\omega$, donde i_{X_H} representa la contracción por el campo vectorial X_H , el cual está dado por

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, con $\gamma(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$, es una curva integral de X_H , entonces satisface $(X_H)_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$. Al evaluar, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}; \end{aligned}$$

es decir, se obtienen las ecuaciones de Hamilton para el sistema de partículas.

Ejemplo 1.1.3. Podemos generalizar el ejemplo anterior al contexto de una variedad cualquiera. Sea X una variedad diferenciable de dimensión n , y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Dado un elemento (q, p) de M , donde $q \in X$ y $p \in T_q^*X$ (el espacio cotangente en q), podemos elegir un sistema local de coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ donde q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, son las coordenadas de q y $p = \sum_i p_i dq_i$. En M , definimos la forma simpléctica ω como

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

Observemos que si definimos la forma de grado 1 mediante

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq_i,$$

entonces se tiene $\omega = -d\alpha$. A la 1-forma diferencial α se le denomina **forma tautológica** o **forma de Liouville**. A la forma ω se le conoce como **forma simpléctica canónica**.

Además observemos que en este caso la forma simpléctica ω no solo es cerrada, si no también exacta. Generalmente, las formas simplécticas no serán exactas.

Definición 1.1.4. Sean (M, ω) y (M', ω') variedades simplécticas y $\varphi : M \rightarrow M'$ un difeomorfismo. Decimos que φ es un **simplectomorfismo** si se tiene $\varphi^*\omega' = \omega$. Si existe un simplectomorfismo $\varphi : M \rightarrow M'$, decimos que (M, ω) y (M', ω') son **simplectomorfas**.

De hecho, todas las variedades simplécticas son localmente simplectomorfas a \mathbb{R}^{2n} con la forma simpléctica $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ dada como en el ejemplo 1.1.2. Este resultado se conoce como **teorema de Darboux**. La demostración de este hecho se puede consultar en [Be01].

Definición 1.1.5. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Si $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de clase C^∞ definida sobre M , su derivada exterior dH es una forma de grado 1. En [DS01] se prueba que las condiciones (S1) y (S2) implican que existe un campo vectorial X_H de clase C^∞ de modo que se tiene $i_{X_H}\omega = dH$. A este campo vectorial se le conoce como **campo vectorial Hamiltoniano** con **función hamiltoniana** H .

Proposición 1.1.6. La función hamiltoniana H y la forma simpléctica ω son invariantes bajo la aplicación del campo vectorial Hamiltoniano X_H ; es decir, las derivadas de Lie de H y de ω en la dirección del campo X_H se anulan.

Prueba. Para $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos $\mathcal{L}_{X_H}H = dH(X_H) = i_{X_H}\omega(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$. Para la forma simpléctica ω , usamos la fórmula de Cartan y obtenemos

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = i_{X_H}d\omega + d(i_{X_H}\omega) = d(dH) = 0.$$

□

1.2 Aplicación momento

Definición 1.2.1. Sea M una variedad y sea X un campo vectorial completo en M ; es decir, las curvas integrales de X están definidas en todo \mathbb{R} . La **familia de difeomorfismos generada por X** es el conjunto de transformaciones de M $\{\rho_t : M \rightarrow M; t \in \mathbb{R}\}$ tal que para cada $p \in M$, la función $\rho_t(p)$ es la única curva integral de X que atraviesa p en $t = 0$. Equivalentemente, esta familia cumple dos condiciones:

$$(F1) \quad \rho_0(p) = p;$$

$$(F2) \quad \frac{d\rho_t}{dt}(p) = X_{\rho_t(p)}.$$

Como consecuencia de (F1) y (F2) se cumple $\rho_s \circ \rho_t = \rho_{s+t}$. Una familia de transformaciones que satisface esta condición se denomina **familia uniparamétrica de difeomorfismos**. Denotamos mediante $\exp tX$ a la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por el campo vectorial X .

Recíprocamente, una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\{\rho_t : M \rightarrow M; t \in \mathbb{R}\}$ genera un campo vectorial X . Este campo vectorial está definido de modo que, en cada punto $q \in M$, el vector X_q es el vector tangente a la curva $\rho_t(q)$. De forma equivalente, se tiene

$$X_q = \left. \frac{d}{dt} \rho_t(q) \right|_{t=0}.$$

Ejemplo 1.2.2. Consideremos $GL_m(\mathbb{R})$ el grupo de matrices $m \times m$ reales invertibles. Como $GL_m(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{R}^{m \times m}$, entonces es una variedad cuyo espacio tangente en cada punto es el conjunto de matrices reales $m \times m$, que denotamos mediante $M_m(\mathbb{R})$. Sea X una matriz en $M_m(\mathbb{R})$ y consideremos el campo vectorial tangente a $GL_m(\mathbb{R})$ constante e igual a X en todo punto. Para hallar la familia de difeomorfismos generada por X , es necesario resolver la ecuación diferencial matricial

$$\frac{d\rho_t}{dt} = X$$

sujeta a la condición inicial $\rho_0(A) = A$, donde A es un elemento de $GL_m(\mathbb{R})$. Se observa fácilmente que se cumple

$$\rho_t(A) = A + tX.$$

Además, $\rho_s(\rho_t(A)) = \rho_s(A + tX) = A + tX + sX = A + (t + s)X = \rho_{s+t}X$.

Ejemplo 1.2.3. Sea X una matriz real $m \times m$. Consideremos ahora el campo vectorial $Y : GL_m(\mathbb{R}) \rightarrow TGL_m(\mathbb{R})$ dado por $Y(A) = X \cdot A$. La familia de difeomorfismos generada por Y se determina resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho_t}{dt} = X\rho_t$$

sujeta a la condición inicial $\rho_0(A) = A$. Luego, $\rho_t(A) = A \exp(tX)$, donde \exp representa la exponencial matricial. Nuevamente se verifica $\rho_s(\rho_t(A)) = \rho_{s+t}(A)$.

Definición 1.2.4. Sea $\psi : G \times M \rightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (M, ω) . Denotamos a los elementos de la imagen de la acción ψ mediante $\psi(g, m) = \psi_g(m) = gm$, donde el conjunto $\{\psi_g, g \in G\}$ está conformado por transformaciones de M . Si para todo punto g en la variedad M se cumple que ψ_g es un simplectomorfismo, decimos que ψ es una **acción simpléctica**. En particular, si $G = \mathbb{R}$, entonces la familia de simplectomorfismos de M dada por $\{\psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ genera un campo

1.2. APLICACIÓN MOMENTO

vectorial X en M en el sentido de la definición 1.2.1. Decimos que ψ es una **acción hamiltoniana** si existe $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dH = i_X \omega$.

Buscaremos extender la definición de acción hamiltoniana para un grupo de Lie G arbitrario. Para ello será necesario entender cómo la familia $\{\psi_g, g \in G\}$ genera un campo vectorial en M .

Definición 1.2.5. Sea L la acción simpléctica de un grupo de Lie G sobre la variedad simpléctica (M, ω) . Denotemos por \mathfrak{g} al álgebra de Lie correspondiente a G , la cual puede ser identificada con el espacio tangente $T_e G$ sobre el elemento identidad e del grupo G o con el espacio de campos vectoriales invariantes por la izquierda en G . Para $X \in \mathfrak{g}$, definimos el campo vectorial $\sigma(X)$ mediante

$$\sigma(X)_m = \frac{d}{dt}(L_{\exp tX}(m))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(tX)m)|_{t=0}.$$

Al campo vectorial $\sigma(X)$ se le denomina **generador infinitesimal** de la acción L en M asociado a X .

El segundo ingrediente necesario para la generalización buscada, denominada aplicación momento, es una condición de equivarianza respecto a la representación coadjunta del grupo de Lie. Algunos autores no consideran que esta condición sea necesaria para la definición de aplicación momento. Sin embargo, siguiendo [DS01], incluiremos la condición de equivarianza en la definición ya que se cumple en todos los ejemplos importantes. Recordamos para ello algunas definiciones pertinentes relacionadas a la representación de grupos de Lie.

Definición 1.2.6. Sea G un grupo de Lie y sea $\varphi_g : G \rightarrow G$ la operación de conjugación por el elemento $g \in G$; es decir,

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto gag^{-1}. \end{aligned}$$

La derivada de φ_g en la identidad es una aplicación lineal invertible de \mathfrak{g} en sí mismo, que denotamos por Ad_g . La aplicación

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}_g \end{aligned}$$

se denomina **representación adjunta** de G en \mathfrak{g} . Si \mathfrak{g}^* es el espacio vectorial dual de \mathfrak{g} y tenemos $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, definimos $\text{Ad}_g^* \alpha$ mediante $\langle \text{Ad}_g^* \alpha, X \rangle = \langle \alpha, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa la aplicación de los elementos de \mathfrak{g}^* sobre los elementos de \mathfrak{g} . Luego podemos definir la

representación coadjunta de G en \mathfrak{g} como

$$\begin{aligned} \text{Ad}^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*) \\ g &\longmapsto \text{Ad}_g^*. \end{aligned}$$

Teniendo en mente las definiciones anteriores, procedemos a generalizar el concepto de acción hamiltoniana para la acción sobre una variedad de un grupo de Lie cualquiera.

Definición 1.2.7. Una acción $\psi : G \times M \rightarrow M$ es **hamiltoniana** si existe una aplicación

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

tal que

(M1) se cumple $d\mu^X = i_{\sigma(X)}\omega$, donde $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\mu^X(p) = \langle \mu(p), X \rangle$, para $X \in \mathfrak{g}$.

(M2) μ es equivariante con respecto a la acción ψ y a la acción coadjunta Ad^* de G en \mathfrak{g}^* ; es decir, se cumple

$$\mu \circ \psi_g = \text{Ad}_g^* \circ \mu.$$

A la aplicación μ se le denomina una **aplicación momento** y a un (M, ω, G, μ) , G -**espacio hamiltoniano**.

Ejemplo 1.2.8. Consideremos la acción por traslaciones de $G = \mathbb{R}^3$ sobre $M = T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$. Para ello tomemos $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = (\vec{q}, \vec{p})$ coordenadas en M y consideremos la forma simpléctica canónica $\omega = \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i$. Sea $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector en $\mathbb{R}^3 = \mathfrak{g}$. Entonces la acción por traslación está dada por

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (\vec{a}, (\vec{q}, \vec{p})) &\longmapsto (\vec{q} + \vec{a}, \vec{p}). \end{aligned}$$

El generador infinitesimal asociado con \vec{a} es el campo vectorial constante $(\vec{a}, 0)$, pues se tiene

$$\sigma(a)_{(q,p)} = \frac{d}{dt}(\vec{q} + \exp t\vec{a}, p)|_{t=0} = (\vec{a}, 0).$$

Afirmamos que ψ es una acción hamiltoniana y que la aplicación $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por $\mu(\vec{q}, \vec{p}) = \vec{p}$ es la correspondiente aplicación momento. Para ello basta verificar que μ satisface las condiciones (M1) y (M2).

Observemos que $\mu^{\vec{a}}(\vec{q}, \vec{p})$ está dado por $\langle \mu(\vec{q}, \vec{p}), \vec{a} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{p}$. Luego $d\mu^{\vec{a}} = a_1 dp_1 + a_2 dp_2 + a_3 dp_3$. Por otro lado, es directo verificar que se cumple $i_{\sigma(a)}\omega = a_1 dp_1 + a_2 dp_2 +$

1.2. APLICACIÓN MOMENTO

$a_3 dp_3$. Con ello hemos verificado (M1). Notemos ahora que se satisface $\mu \circ \psi_{\vec{a}}(\vec{q}, \vec{p}) = \mu(\vec{q} + \vec{a}, \vec{p}) = \vec{p}$. Además, como G es conmutativo, la aplicación Ad_g es la identidad y se cumple $Ad_g^*(\vec{p}) = \vec{p}$. Queda probado que μ satisface la condición (M2).

Ejemplo 1.2.9. Ahora, consideremos la acción por rotaciones sobre $M = T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$. El grupo de Lie que actúa sobre M es ahora el grupo especial ortogonal $SO(3)$. La acción del grupo ψ está dada por

$$\begin{aligned} \psi : SO(3) \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (A, (\vec{q}, \vec{p})) &\longmapsto (A\vec{q}, A\vec{p}). \end{aligned}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ es el conjunto de matrices antisimétricas 3×3 . Si X es una matriz antisimétrica de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces podemos identificarla biunívocamente con el vector $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$. En consecuencia, $\mathfrak{so}(3) \approx \mathbb{R}^3$. Además la aplicación del operador X sobre un vector \vec{q} es igual al producto vectorial entre \vec{X} y \vec{q} ; es decir, se tiene

$$X\vec{q} = \vec{X} \times \vec{q}.$$

Luego, si $X \in \mathfrak{so}(3)$, entonces el generador infinitesimal correspondiente en el punto (p, q) de \mathbb{R}^6 está dado por

$$\sigma(X)_{(q,p)} = (\vec{X} \times \vec{q}, \vec{X} \times \vec{p}).$$

Afirmamos que la acción ψ es hamiltoniana y que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \approx \mathfrak{so}(3) \\ (\vec{q}, \vec{p}) &\longmapsto \vec{q} \times \vec{p} \end{aligned}$$

es una aplicación momento para ψ . En efecto, tenemos $\mu^X(\vec{q}, \vec{p}) = \det(\vec{q}, \vec{p}, \vec{X})$. La derivada exterior de μ^X está dada por

$$d\mu^X = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\vec{X} \times \vec{q})_i dp_i - (\vec{X} \times \vec{p})_i dq_i \right\}.$$

En la expresión anterior, el subíndice i representa la componente vectorial i -ésima. Un cálculo directo muestra

$$i_{\sigma(X)}\omega = \sum_{i=1}^3 \left\{ (\vec{X} \times \vec{q})_i dp_i - (\vec{X} \times \vec{p})_i dq_i \right\}.$$

Luego, se verifica la propiedad (M1) para μ . Además $\mu \circ \psi_A(q, p) = A\vec{q} \times A\vec{p} = (\det A)A(\vec{q} \times \vec{p}) = A(\vec{q} \times \vec{p})$. Por otro lado, se tiene $Ad_A^*(X) = A^T \cdot X \cdot A$ con lo cual $Ad_A^*(\vec{q} \times \vec{p}) = A(\vec{q} \times \vec{p})$. Se verifica directamente (M2) y queda probada la afirmación.

1.3 Variedades complejas

En esta sección y en la siguiente definiremos algunas estructuras adicionales que permitirán relacionar las variedades simplécticas con la geometría compleja. De hecho, como veremos a continuación, las variedades simplécticas y las complejas son ejemplos particulares de las denominadas variedades casi complejas. Si contamos con una métrica hermitiana es posible definir, de manera sencilla, una forma diferencial de grado 2 no degenerada en la variedad compleja. Si esta forma, denominada forma asociada, es cerrada, obtenemos una forma simpléctica que denominamos forma de Kähler.

Definición 1.3.1. Una **estructura casi compleja** en una variedad M es un tensor J de grado $(1,1)$ tal que en cada punto p , la transformación lineal $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ satisface $J_p^2 = -\mathbb{I}$. Al par (M, J) se le denomina **variedad casi compleja**.

Proposición 1.3.2. Toda variedad simpléctica (M, ω) admite una estructura casi compleja J . Además, existe una métrica riemanniana \hat{g} que cumple las siguientes condiciones.

- (MC1) La métrica \hat{g} es una **métrica asociada** a la variedad simpléctica (M, ω) con estructura compleja J ; es decir, se cumple $\hat{g}(JX, Y) = \omega(X, Y)$ para X, Y campos vectoriales tangentes a M .
- (MC2) La métrica \hat{g} es **compatible**; es decir, se tiene $\hat{g}(JX, JY) = \hat{g}(X, Y)$ para X, Y campos vectoriales tangentes a M .

Prueba. Toda variedad admite una métrica riemanniana. Sea g tal métrica. Definimos una matriz A mediante

$$\omega(X, Y) = g(AX, Y).$$

Tal matriz existe ya que podemos expresar los elementos de la matriz A mediante la fórmula $A_i^j = \sum_k \omega_{ik} g^{kj}$, donde g^{kj} son los elementos de la inversa de g . Tenemos así

$$g(AX, Y) = \omega(X, Y) = -\omega(Y, X) = -g(AY, X) = -g(X, AY) = -g(A^\dagger X, Y).$$

Luego $A = -A^\dagger$ y por tanto $AA^\dagger = -A^2$. Este operador es positivo, hermitiano y diagonalizable con valores propios positivos. Podemos definir

$$J = (\sqrt{AA^\dagger})^{-1} A$$

con lo cual se logra $J^2 = -\mathbb{I}$. Observemos que el tensor J está definido en toda la variedad. Con ello hemos construido explícitamente una estructura casi compleja en una variedad simpléctica cualquiera.

Notemos de lo anterior que es posible definir una métrica \hat{g} mediante $\hat{g}(X, Y) = g(AX, JY)$. La verificación de que \hat{g} es una métrica riemanniana es relativamente sencilla. Esta métrica \hat{g} satisface $\hat{g}(JX, Y) = \omega(X, Y)$ y $\hat{g}(JX, JY) = \hat{g}(X, Y)$. En efecto, observemos que de $J^\dagger = -J$ y $\hat{g}(X, Y) = \omega(X, JY)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{g}(JX, Y) &= \hat{g}(X, -JY) = \omega(X, -J^2Y) = \omega(X, Y) \\ \hat{g}(JX, JY) &= \hat{g}(X, -J^2Y) = \hat{g}(X, Y).\end{aligned}$$

□

Definición 1.3.3. Sea (M, J) una variedad casi compleja. Podemos complejificar el fibrado tangente de M definiendo

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Al fibrado vectorial complejo $TM^{\mathbb{C}}$ se le denomina **fibrado tangente complejificado**. Este fibrado puede separarse en la suma directa de los subespacios propios del operador J correspondientes a los valores propios i y $-i$, a los cuales denotamos por $T^{1,0}$ y $T^{0,1}$ respectivamente. Explícitamente tales subespacios están dados por

$$\begin{aligned}T^{1,0}M &= \{X - iJX, X \in TM\}, \\ T^{0,1}M &= \{X + iJX, X \in TM\}.\end{aligned}$$

Del mismo modo podemos definir el **fibrado de formas diferenciales complejificado** $\Lambda_{\mathbb{C}}M = \Lambda M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Las formas diferenciales en este espacio son de la forma $\omega - i\tau$, donde ω y τ son formas reales en M . En particular definimos

$$\begin{aligned}\Lambda^{1,0}M &= \{\eta \in \Lambda_{\mathbb{C}}M, \eta(Z) = 0 \text{ para todo } Z \in T^{0,1}M\} = \{\omega - i\omega \circ J, \omega \in \Lambda^1M\}, \\ \Lambda^{0,1}M &= \{\eta \in \Lambda_{\mathbb{C}}M, \eta(Z) = 0 \text{ para todo } Z \in T^{1,0}M\} = \{\omega + i\omega \circ J, \omega \in \Lambda^1M\}.\end{aligned}$$

El subfibrado de formas complejificadas de grado 1, denotado por $\Lambda_{\mathbb{C}}^1M$, es también la suma directa de estos dos espacios.

Definición 1.3.4. Una **forma de tipo (l, m)** es una forma diferencial en el espacio generado por el producto exterior de l formas de tipo $(1, 0)$ y m formas de tipo $(0, 1)$. Decimos que una forma de tipo (l, m) en la variedad casi compleja (M, J) tiene **grado** $l + m$ y denotamos el espacio que generan por $\Lambda^{(l, m)}M$. Notemos que el espacio de formas de grado k en (M, J) , denotado por Λ^kM , se expresa como suma directa

$$\Lambda^kM = \bigoplus_{l+m=k} \Lambda^{(l, m)}M.$$

Observemos que la derivada exterior de una forma de tipo (l, m) con grado $l + m = k$ es una forma de grado $k + 1$, pero no necesariamente podrá expresarse como la suma de una forma de grado $(l + 1, m)$ con una forma de grado $(l, m + 1)$. Sin embargo, como veremos más adelante, esto sí sucede en una variedad compleja.

Definición 1.3.5. Una **variedad compleja** M de dimensión m es un espacio topológico de Hausdorff segundo-numerable junto con un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ que cumple las siguientes propiedades:

- (C1) los abiertos U_α cubren M ;
- (C2) cada aplicación $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ es un homeomorfismo entre U_α y un abierto \tilde{U}_α de \mathbb{C}^m ;
- (C3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces la aplicación cambio de coordenadas

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es biholomorfa (holomorfa con inversa holomorfa).

Proposición 1.3.6. *Toda variedad compleja es casi compleja.*

Prueba. Sea M una variedad compleja de dimensión m . Para probar esta proposición debemos construir un tensor J de tipo $(1,1)$ cuyo cuadrado sea $-\mathbb{I}$. En una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ alrededor de un punto p de M , definimos

$$J_\alpha = (\varphi_\alpha)_*^{-1} \circ j_n \circ (\varphi_\alpha)_*,$$

donde $j_m = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{m \times m} \\ -\mathbb{I}_{m \times m} & 0 \end{pmatrix}$ y el diferencial de φ_α se entiende como la derivada en \mathbb{R}^{2m} .

Un cálculo inmediato demuestra que se cumple $J_\alpha^2 = -\mathbb{I}$. Luego, solo resta probar que J_α define un tensor. Si φ_β es otra carta que contiene a p , entonces se tiene

$$J_\beta = (\varphi_\beta)_*^{-1} \circ j_n \circ (\varphi_\beta)_* = (\varphi_\beta)_*^{-1} \circ j_n \circ (\varphi_{\beta\alpha})_* \circ (\varphi_\alpha)_*.$$

Como $\varphi_{\beta\alpha}$ es biholomorfa por (C3), entonces su diferencial $(\varphi_{\beta\alpha})_*$ conmuta con j_n ya que las derivadas parciales cumplen con las relaciones de Cauchy-Riemann. Luego,

$$J_\beta = (\varphi_\beta)_*^{-1} \circ (\varphi_{\beta\alpha})_* \circ j_n \circ (\varphi_\alpha)_* = (\varphi_\alpha)_*^{-1} \circ j_n \circ (\varphi_\alpha)_* = J_\alpha.$$

En resumen, hemos definido en M una estructura casi compleja. □

Podríamos preguntarnos bajo qué condiciones se cumple el recíproco de la proposición 1.3.6. Esto equivale a preguntarse si la estructura casi compleja J proviene de una estructura compleja en la variedad M . De ser así se dice que J es **integrable**. De hecho, el teorema de Newlander-Nirenberg afirma que J es integrable si y solo si su **torsión de Nijenhuis** N_J , dada por

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY],$$

es idénticamente nula. Al ser un resultado clásico, admitiremos este teorema sin demostración y lo usaremos libremente en adelante.

Definición 1.3.7. Dada una variedad casi compleja (M, J) , los **operadores de Dolbeaut** ∂ y $\bar{\partial}$ sobre $\Lambda^{(l,m)}$ se definen mediante

$$\begin{aligned} \partial : \Lambda^{(l,m)} M &\longrightarrow \Lambda^{(l+1,m)} M \\ \omega &\longmapsto \pi^{(l+1,m)} d\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \Lambda^{(l,m)} M &\longrightarrow \Lambda^{(l,m+1)} M \\ \omega &\longmapsto \pi^{(l,m+1)} d\omega, \end{aligned}$$

donde $\pi^{(i,j)} : \Lambda^{i+j} M \longrightarrow \Lambda^{(i,j)}$ es la proyección canónica de una forma de grado $i+j$ sobre su componente en el subespacio de las formas de tipo (i, j) . Como se observó anteriormente, en general no es cierto que $d = \partial + \bar{\partial}$. A continuación demostraremos que la igualdad sí se cumple en variedades complejas.

Proposición 1.3.8. *En una variedad compleja M , la derivada exterior de una forma diferencial de tipo (l, m) es igual a la suma de los operadores de Dolbeaut sobre $\Lambda^{(l,m)}$; es decir, se tiene $d = \partial + \bar{\partial}$.*

Prueba. Localmente en un abierto $U \subset M$, podemos complejificar el fibrado tangente:

$$T^{\mathbb{C}}U = TU \otimes \mathbb{C}.$$

Tal fibrado complejificado está generado por los subfibrados propios de la estructura compleja J . El subfibrado $T^{1,0}$ relativo al valor propio i está generado por $\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right\}$; el subfibrado $T^{0,1}$ relativo al valor propio $-i$, por $\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right\}$. Utilizamos la notación $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}$.

De manera análoga, el fibrado cotangente es la suma directa de los fibrados $\Lambda^{1,0}U$ y $\Lambda^{0,1}U$ generados respectivamente por $\{dx_j + idy_j\}$ y $\{dx_j - idy_j\}$. Denotamos por $dz_j =$

$dx_j + idy_j$ y $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$ a las formas duales a los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial z_j}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ respectivamente. En U , podemos escribir una forma ω de grado k como

$$\omega = \sum_{|J|+|K|=k} a_{J,K} dx_J \wedge dy_K,$$

donde J y K son multi-índices y los coeficientes $a_{J,K}$ son funciones complejas definidas en U . Luego, mediante un cambio de variable, reexpresamos ω como

$$\omega = \sum_{|J|+|K|=k} b_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K = \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|J|=l, |K|=m} b_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K \right).$$

Cada término $\sum_{|J|=l, |K|=m} b_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K$ es una forma de tipo (l, m) . Tomamos la derivada exterior de ω y obtenemos

$$d\omega = \sum_{l+m=k} \left(\sum_{|J|=l, |K|=m} \partial b_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K + \sum_{|J|=l, |K|=m} \bar{\partial} b_{J,K} dz_J \wedge d\bar{z}_K \right) = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$$

ya que se tiene $db_{J,K} = \partial b_{J,K} + \bar{\partial} b_{J,K}$ por ser $b_{J,K}$ una función compleja definida en U . \square

A continuación presentaremos un ejemplo no trivial de variedad compleja llamado espacio proyectivo complejo. Este resultará ser una variedad de Kähler según la definición que veremos en la sección 1.4. Como se seguirá trabajando con esta variedad, será conveniente fijar una notación para los abiertos de la cobertura del espacio proyectivo, las cartas y las funciones de transición.

Ejemplo 1.3.9. El **espacio proyectivo complejo** de dimensión n , denotado $\mathbb{C}P^n$, se puede visualizar como el conjunto de rectas en \mathbb{C}^{n+1} . Afirmamos que este conjunto constituye una variedad compleja de manera natural. Para ello, formalizamos nuestra idea intuitiva de la siguiente manera. Sean z y w elementos de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, escribiremos $z \sim w$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^*$ tal que $z = \lambda w$. Es sencillo ver que \sim define una relación de equivalencia. El espacio proyectivo complejo de dimensión n se define como

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim = \{[z], z \in \mathbb{C}^{n+1}\}$$

donde $[z] = \{\lambda z, z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Dotamos ahora al espacio proyectivo de una estructura diferenciable dada por las cartas $(U_i, \varphi_i)_{i=0,1,\dots,n}$. Los abiertos U_i están definidos por

$$U_i := \{[z = (z_0, z_1, \dots, z_n)] \in \mathbb{C}P^n, z_i \neq 0\}.$$

Evidentemente se tiene $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{C}P^n$ con lo cual se cumple la condición (C1). Las cartas coordenadas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n$ se definen como

$$\varphi_i([z_0, z_1, \dots, z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

las mismas que son homeomorfismos; por tanto se cumple (C2). Por último debemos comprobar que los cambios de coordenadas son biholomorfos. Para ello basta observar que la aplicación de cambio de coordenadas $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : V_i \cap V_j \rightarrow V_i \cap V_j$ está dada explícitamente por

$$\varphi_{ij}(w_1, \dots, w_n) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \dots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_j}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_n}{w_i} \right).$$

Por lo tanto se cumple (C3) y queda constatado que $\mathbb{C}P^n$ es una variedad compleja.

1.4 Variedades de Kähler

En la sección anterior hemos demostrado que tanto las variedades simplécticas como las variedades complejas se encuentran dentro de una familia más amplia de variedades, llamadas variedades casi complejas. Resulta natural preguntarse, asimismo, si hay variedades simplécticas complejas. De hecho, existen en abundancia y reciben el nombre de variedades de Kähler, en honor a Erich Kähler quien fue el primero en introducirlas.

Definición 1.4.1. Sea (M, J) una variedad casi compleja. Una **métrica hermitiana** es una métrica riemanniana h compatible con la estructura casi compleja J ; es decir, se tiene $h(JX, JY) = h(X, Y)$ para todo $X, Y \in TM$. La **forma fundamental Ω asociada** a una métrica hermitiana se define mediante $\Omega(X, Y) = h(JX, Y)$.

Proposición 1.4.2. La extensión por linealidad compleja de una métrica hermitiana h al fibrado tangente complejificado $TM^{\mathbb{C}}$ cumple las siguientes propiedades:

$$(H1) \quad h(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{h(Z, W)}, \text{ para todo } Z, W \in TM^{\mathbb{C}},$$

$$(H2) \quad h(Z, \bar{Z}) > 0, \text{ para todo } Z \in TM^{\mathbb{C}},$$

$$(H3) \quad h(Z, W) = 0, \text{ para todo par de campos vectoriales } Z, W \text{ tal que ambos son secciones de } T^{1,0}M \text{ o de } T^{0,1}M.$$

Prueba. Probaremos (H3) ya que las demás propiedades se demuestran de manera similar. Sean Z y $W \in T^{1,0}M$. Entonces $Z = X - iJX$ y $W = Y - iJY$ para algunos $X, Y \in TM$.

Evaluamos y obtenemos

$$\begin{aligned} h(Z, W) &= h(X - iJX, Y - iJY) = h(X, Y) - ih(JX, Y) - ih(X, JY) - h(JX, JY) \\ &= -ih(JX, Y) - ih(X, JY), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue por compatibilidad. Además, usando nuevamente la compatibilidad se observa $h(X, JY) = h(JX, -Y) = -h(JX, Y)$. Por lo tanto, $h(Z, W) = 0$. En el caso que Z y W sean secciones de $T^{0,1}M$ se procede de manera similar. \square

En el caso de una variedad compleja M , escogemos coordenadas locales holomorfas z_α . De manera análoga a la proposición anterior, se demuestra que las componentes $h_{\alpha\bar{\beta}} = h(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta})$ son reales, de modo que expresamos h localmente como

$$h = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\bar{\beta}} (dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta + d\bar{z}_\alpha \otimes dz_\beta).$$

Al ser $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ vector propio correspondiente al valor propio i de J , obtenemos la expresión en coordenadas locales de la forma fundamental asociada:

$$\Omega = i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$$

Definición 1.4.3. Una **variedad de Kähler** es una variedad compleja M junto con una métrica hermitiana h tal que la forma fundamental asociada a h es cerrada. Si ω es la forma fundamental asociada, al cumplirse $d\omega = (\partial + \bar{\partial})\omega = 0$, observamos que también es cerrada bajo la acción de los operadores de Dolbeaut ∂ y $\bar{\partial}$. Si la forma fundamental asociada a una métrica hermitiana es cerrada, entonces se le denomina **forma de Kähler**. La siguiente proposición nos ayudará a obtener formas de Kähler en una variedad compleja.

Proposición 1.4.4. Sea M una variedad compleja y sea $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ estrictamente plurisubarmónica; es decir, la matriz hessiana de ρ es definida positiva en todo punto $p \in M$. Entonces la forma

$$\omega = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\rho$$

es de Kahler. A la función ρ se le denomina **potencial de Kähler global**.

Prueba. Para probar que ω es cerrada, observemos que al cumplirse $d^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) = 0$ y como ∂^2 , $\bar{\partial}^2$ y $(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)$ actúan sobre diferentes subfibrados, tenemos que cada uno de estos operadores de Dolbeaut de segundo orden es igual a cero. Luego se satisface

$$\partial\omega = \frac{i}{2} \partial^2 \bar{\partial}\omega = 0,$$

$$\bar{\partial}\omega = \frac{i}{2}\bar{\partial}\partial\bar{\partial}\omega = -\frac{i}{2}\bar{\partial}^2\partial\omega = 0.$$

A continuación, debemos probar que ω proviene de una métrica hermitiana h con la cual es compatible. Para ello es preciso construir una métrica que cumpla las propiedades (H1), (H2) y (H3). Es sencillo probar que una métrica con estas características restringida a vectores en TM es una métrica riemanniana compatible con la estructura compleja. Definimos, con este objetivo, $h(X, Y) = \omega(X, JY)$. Bastará probar que h tiene las propiedades deseadas. Para ello podemos tomar coordenadas locales y escoger campos vectoriales X e Y con coordenadas

$$X = \sum_{\lambda\sigma} \left(X_\lambda \frac{\partial}{\partial z_\lambda} + \tilde{X}_\sigma \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\sigma} \right),$$

$$Y = \sum_{\lambda\sigma} \left(Y_\lambda \frac{\partial}{\partial z_\lambda} + \tilde{Y}_\sigma \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\sigma} \right).$$

Un cálculo directo muestra que $g(X, Y)$ se expresa en estas coordenadas como

$$g(X, Y) = i\partial\bar{\partial}\rho(X, JY) = \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_\alpha\partial \bar{z}_\beta} (X_\alpha \tilde{Y}_\beta + \tilde{X}_\beta Y_\alpha) \right).$$

De esta expresión y recordando que ρ es plurisubarmónica, se obtienen directamente las propiedades (H1), (H2) y (H3) y queda demostrado que h es la métrica hermitiana buscada. \square

De hecho, existe un recíproco para el teorema anterior, conocido como el **lema $i\partial\bar{\partial}$** . Lo enunciamos a continuación.

Proposición 1.4.5. (Lema $i\partial\bar{\partial}$) *Sea ω una forma cerrada de tipo $(1,1)$ en una variedad compleja y sea $p \in M$. Entonces existe una vecindad U de p y una función real diferenciable $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\rho.$$

A ρ se le conoce como **potencial de Kähler local**. No demostraremos esta proposición, pero el lector interesado puede consultar [DS01] o [Mo07].

El siguiente ejemplo toma en cuenta lo expuesto anteriormente para demostrar que el espacio proyectivo complejo es una variedad de Kähler y para construir en él una forma de Kähler explícita.

Ejemplo 1.4.6. (Métrica de Fubini-Study) Definimos la función $\rho : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $\rho(z) = \log |z|^2 + 1$ y afirmamos que es estrictamente plurisubarmónica. En efecto, los elementos H_{jk} de la matriz hessiana H de la función diferenciable ρ están dados por

$$H_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (\log |z|^2 + 1) = \frac{\delta_{jk}}{\log |z|^2 + 1} - \frac{\bar{z}_j z_k}{(\log |z|^2 + 1)^2},$$

donde $j, k = 1, \dots, n$ y δ_{jk} es el tensor de Kronecker. Evaluamos $\bar{v}Hv$ y obtenemos

$$\bar{v}Hv = \frac{|v|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{\langle \bar{v}, \bar{z} \rangle \langle v, z \rangle}{(|z|^2 + 1)^2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy, se obtiene

$$\bar{v}Hv > \frac{|v|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{|v|^2 |z|^2}{(|z|^2 + 1)^2} = \frac{|v|^2}{(|z|^2 + 1)^2} > 0$$

para todo $v \neq 0$. Por lo tanto, la matriz hessiana de ρ es definida positiva y ρ es estrictamente plurisubarmónica. En consecuencia, definimos

$$\hat{\omega}_{FS} = i\partial\bar{\partial} \log(|z|^2 + 1).$$

La proposición 1.4.4 garantiza que $\hat{\omega}_{FS}$ es una forma de Kähler en \mathbb{C}^n , la cual se denomina **forma de Fubini-Study** en \mathbb{C}^n . Ahora observemos que, según nuestra definición de φ_{ij} en el ejemplo 1.3.9, tenemos

$$\varphi_{ij}^* \log(|z|^2 + 1) = \log(|z|^2 + 1) + \log \frac{1}{|z_i|^2}.$$

Luego, como $\partial\bar{\partial} \log |z_i|^2 = 0$, se tiene

$$\varphi^* \hat{\omega}_{FS} = i\partial\bar{\partial} \varphi_{ij}^* \log(|z|^2 + 1) = i\varphi_{ij}^* \partial\bar{\partial} \log(|z|^2 + 1) = \partial\bar{\partial} \log(|z|^2 + 1);$$

es decir, $\varphi_{ij}^* \hat{\omega}_{FS} = \hat{\omega}_{FS}$. Luego obtenemos $\varphi_i^* \hat{\omega}_{FS} = \varphi_j^* \hat{\omega}_{FS}$. Con ello resulta permisible definir la **forma de Fubini-Study en el espacio proyectivo** $\mathbb{C}P^n$, que denotamos por ω_{FS} . Por último, observemos que si $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ es la proyección usual al espacio proyectivo complejo, podemos definir $f_j : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ por $f_j = \varphi_j \circ \pi$. Se tiene entonces

$$\log(1 + |f_j(z)|^2) = \log |z|^2 - \log |z_j|^2,$$

y por lo tanto $f_j^*(\partial\bar{\partial} \log(1 + |z|^2)) = \partial\bar{\partial} \log |z|^2$. Obtenemos así $\pi^* \omega_{FS} = i\partial\bar{\partial} \log |z|^2$.

Capítulo 2

Geometría de contacto y fibración de Boothby-Wang

2.1 Variedades de contacto

En esta sección estudiaremos un análogo de dimensión impar de las variedades simplécticas, denominadas variedades de contacto. En las variedades de contacto existen teoremas y estructuras similares a las de las variedades simplécticas; pero además admiten un campo vectorial con ciertas características de interés, denominado campo vectorial de Reeb. Tanto las variedades simplécticas como las de contacto cobrarán importancia cuando estudiemos más adelante las variedades de Sasaki y, en particular, cuando construyamos variedades de Brieskorn.

Definición 2.1.1. Sea el par (M, α) , donde M es una variedad de dimensión impar $2n + 1$ y α es una forma diferenciable de grado 1 definida en M . Decimos que M es una **variedad de contacto** si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ es no degenerada (en particular, es un elemento de volumen). A la forma α se le denomina **forma de contacto**.

Observemos que la forma α define en M una distribución, denominada **estructura de contacto**, dada por $H : p \mapsto H_p = \ker \alpha_p$. Cada uno de los espacios vectoriales $H_p \subset T_p M$ tiene codimensión 1.

Definición 2.1.2. En una variedad de contacto (M, α) , definimos el **campo vectorial de Reeb** R asociado a la forma de contacto α como aquel que cumple las siguientes condiciones:

$$(R1) \quad \mathcal{L}_R \alpha = 0;$$

$$(R2) \quad \alpha(R) = 1.$$

Si $2n + 1$ es la dimensión de M , por la condición de contacto $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$, se observa que $d\alpha$ tiene rango $2n$ y por ende tiene núcleo de dimensión 1. Como $\mathcal{L}_R \alpha = d(i_R \alpha) + i_R(d\alpha) = 0$ se tiene $i_R d\alpha = 0$. Asimismo $d\alpha$ es invariante a lo largo de las curvas del campo vectorial de Reeb, ya que se tiene $\mathcal{L}_R d\alpha = d(i_R d\alpha) + i_R d^2 \alpha = 0$. Se sigue de ello $T_p M = \ker \alpha_p \oplus \ker d\alpha_p$ para todo punto p in M .

La condición (R1) determina la dirección de R ; mientras que (R2) normaliza R y por lo tanto ambas condiciones definen unívocamente al campo vectorial de Reeb. De hecho, el campo vectorial de Reeb existe para toda forma de contacto α . La demostración de esta afirmación puede encontrarse en [BG08].

Ejemplo 2.1.3. Consideremos \mathbb{R}^{2n+1} con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ y definamos la forma α_0 de grado 1 mediante

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^n x_i dy_i + dz.$$

Tenemos que $d\alpha_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i$, con lo cual $(d\alpha_0)^n = n!(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)$ y $\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^n = n!(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge dz)$. Luego α_0 es una forma de contacto en \mathbb{R}^{2n+1} , a la cual llamamos **forma de contacto canónica**. La estructura de contacto $H = \ker \alpha_0$ está dada en cada punto por los hiperplanos

$$H_{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)} = \left\{ v = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \sum_i b_i x_i + c = 0 \right\}$$

y el campo vectorial de Reeb es el campo unitario en la dirección positiva del eje z .

Ejemplo 2.1.4. Sea M una hipersuperficie de \mathbb{R}^{2n+2} ($\dim M = 2n + 1$) tal que ninguno de sus planos tangentes pase por el origen. Construiremos una estructura de contacto en M ; así obtendremos abundancia de ejemplos de variedades de contacto. Para ello, tomemos coordenadas (x_1, \dots, x_{2n+2}) en \mathbb{R}^{2n+2} y definamos

$$\alpha = x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + \dots + x_{2n+1} dx_{2n+2} - x_{2n+2} dx_{2n+1}.$$

En el punto $p = (p_1, \dots, p_{2n+2})$ de M , tomemos v_1, \dots, v_{2n+1} vectores linealmente independientes y $w = v_1 \times \dots \times v_{2n+1}$ el $2n + 1$ producto vectorial de ellos. El vector w es ortogonal al hiperplano generado por $\{v_1, \dots, v_{2n+1}\}$ y sus componentes están dadas por

$$w_i = \left\langle w, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \det \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, v_1, \dots, v_{2n+1} \right) = (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}(v_1, \dots, v_{2n+1}),$$

donde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ indica el vector unitario en la i -ésima dirección y \widehat{dx}_i indica omisión del factor dx_i . Ahora calculamos $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ y utilizando la misma notación obtenemos

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = n! \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} x_i dx_i \wedge \dots \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}.$$

Finalmente evaluamos en $\{v_1, \dots, v_{2n+1}\}$, vectores que se encuentran en $T_p M$, para lograr

$$(\alpha \wedge (d\alpha)^n)_p(v_1, \dots, v_{2n+1}) = n! \sum_{i=1}^{2n+2} p_i w_i.$$

Si $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ es la inclusión, de la igualdad anterior y del hecho de que se tenga $\langle p, w \rangle \neq 0$ (ya que el plano tangente en p no pasa por el origen), deducimos que $i^* \alpha$ no se anula en TM y por tanto es una forma de contacto en M .

Definición 2.1.5. Sean (M_1, α) y (M_2, β) variedades de contacto. Un **contactomorfismo** $f : M_1 \rightarrow M_2$ es un difeomorfismo tal que $f^* \beta = \tau \alpha$, donde $\tau : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real diferenciable que no se anula en ningún punto debido a la condición de contacto. Equivalentemente, f es un contactomorfismo si lleva la estructura de contacto H_α relativa a α a la estructura de contacto H_β relativa a β ; es decir, si $X \in H_\alpha$, entonces $f_* X \in H_\beta$.

La equivalencia de ambas definiciones se verifica notando que $\beta(f_* X) = f^* \beta(X) = \tau \alpha(X) = 0$; y por otro lado si $\beta(f_* X) = 0$, entonces $f^* \beta(X) = 0$ lo cual a su vez implica que $f^* \beta$ es proporcional a α . En caso exista un contactomorfismo entre dos variedades de contacto M_1 y M_2 , se dice que estas son **contactomorfas**.

De manera análoga a la situación en variedades simplécticas, existe un **teorema de Darboux de contacto** que afirma que toda variedad de contacto es localmente contactomorfa a $(\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_0)$, como se definió en el ejemplo 2.1.3.

Proposición 2.1.6. (Simplectización). *Sea (M, α) una variedad de contacto y sea $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la proyección sobre M . Entonces $(M \times \mathbb{R}, d(e^t \pi^* \alpha))$, donde t denota la coordenada en \mathbb{R} , es una variedad simpléctica.*

Prueba. Sea $\dim M = 2n - 1$ y pongamos $\omega = d(e^t \pi^* \alpha)$. Evidentemente ω es cerrada, por tanto basta probar que ω^n no se anula. Calculamos el producto exterior

$$\begin{aligned} \omega^n &= (d(e^t \pi^* \alpha))^n = (e^t (dt \wedge \pi^* \alpha + d\pi^* \alpha))^n \\ &= e^{nt} \left((dt \wedge \pi^* \alpha)^n + \binom{n}{1} (dt \wedge \pi^* \alpha)^{n-1} \wedge d\pi^* \alpha + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{n}{n-1} (dt \wedge \pi^* \alpha) \wedge (d\pi^* \alpha)^{n-1} + (d\pi^* \alpha)^n \right). \end{aligned}$$

En esta expresión, el único término que no se anula es el penúltimo, dado que los anteriores involucran una potencia de dt que es una forma de grado 1, y el último involucra a $d\alpha^n$, que es una forma de grado $2n$ sobre una variedad de dimensión $2n - 1$. Al simplificar logramos

$$\omega^n = ne^{nt} dt \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0,$$

y por tanto ω es una forma simpléctica. A $(M \times \mathbb{R}, \omega)$ se le conoce como la **simplectización** de M . \square

Ejemplo 2.1.7. Siguiendo al ejemplo 2.1.4, en la esfera de tres dimensiones $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ tomamos coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) y definimos la forma de contacto

$$\alpha = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2.$$

El campo vectorial

$$R = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

restringido a puntos en S^3 es tangente a S^3 . Observamos que si i es la inclusión de S^3 en \mathbb{R}^4 , entonces $i^*\alpha$ es una forma de contacto en S^3 , como se vio en el ejemplo 2.1.4. En consecuencia se tiene $i^*\alpha(R) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$ en la esfera. Además, como $d\alpha = 2(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2)$, tenemos $i_R d\alpha = -2(x_1 dx_1 + y_1 dx_1 + x_2 dx_2 + y_2 dy_2)$. Al ser la forma de grado 0 dada por $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$ constante en la esfera, se tiene

$$df = 0 = 2(x_1 dx_1 + y_1 dy_1 + x_2 dx_2 + y_2 dy_2).$$

Por lo tanto $(i^*\alpha)(R) = 1$ y $\mathcal{L}_R(i^*\alpha) = 0$. El campo vectorial R cumple con las condiciones (R1) y (R2): en efecto R es el campo vectorial de Reeb correspondiente a la forma de contacto $i^*\alpha$.

Las curvas integrales de este campo vectorial se corresponden con las fibras de la **fibración de Hopf** p definida por

$$p : S^3 \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ (z_1, z_2) \longmapsto [(z_1, z_2)],$$

donde $(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$. En efecto, $p^{-1}([(z_1, z_2)]) = \{\lambda(z_1, z_2), \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ ya que (z'_1, z'_2) está en la preimagen de $[(z_1, z_2)]$ si y solo si $(z'_1, z'_2) = \lambda(z_1, z_2)$. Como $1 = |z'_1|^2 + |z'_2|^2 = |\lambda|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |\lambda|^2$, se debe tener $|\lambda| = 1$. Luego la fibra es una curva γ en S^3 parametrizada por $\gamma(\theta) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$. Los vectores tangentes a γ son de la forma

$$\gamma'(0) = (iz_1, iz_2) = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = R,$$

lo cual demuestra la afirmación.

2.2 Fibrados principales

En esta sección desarrollaremos las herramientas necesarias para demostrar más adelante el teorema de Boothby-Wang. Estudiaremos los denominados fibrados principales, los cuales han encontrado aplicaciones diversas en la formalización de teorías de calibre en física. Para ello será necesario introducir conceptos de curvatura y conexión en estos fibrados.

Definición 2.2.1. Sea P una variedad y sea $R : P \times G \rightarrow P$ una acción por la derecha de un grupo de Lie G sobre P . Denotamos $R(g, p) = R_g p = p \cdot g$. Sean $M = P/G$ el espacio de órbitas de la acción y $\pi : P \rightarrow M$ la proyección natural de un punto de P a su respectiva órbita. Decimos que (P, M, π) es un **G-fibrado principal** si se cumplen las siguientes condiciones:

- (F1) la acción de G sobre P es libre; es decir, $R(p, g) = p$ si y solo si $g = e$, donde e es la identidad en G ;
- (F2) la proyección $\pi : P \rightarrow M = P/G$ es diferenciable;
- (F3) el fibrado (P, M, π) es localmente trivial: la trivialidad local significa que M admite una cobertura por abiertos U_α asociados a una familia de difeomorfismos $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ tal que $\psi_\alpha(p, g) = (\pi(p), g_\alpha(p))$, para todo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ y para alguna aplicación equivariante $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$; es decir $g_\alpha(p \cdot g) = g_\alpha(p) \cdot g$.

A la variedad P se le denomina **espacio total**; a la variedad M se le conoce como **espacio base** y a G como **grupo estructural**. Dado X en \mathfrak{g} , el álgebra de Lie del grupo G , de manera análoga a la definición 1.2.6 se puede definir el **generador infinitesimal**, que también denotamos por $\sigma(X)$, como el campo vectorial dado por

$$\sigma(X)_p = \frac{d}{dt}(R_{\exp tX}(p))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp tX)|_{t=0}$$

en cada punto p de P .

Definición 2.2.2. Sea (P, M, π) un G-fibrado principal y sea p un punto de P . El subespacio vectorial $V_p = \ker(\pi_*)_p \subset T_p P$ se denomina **espacio vertical** en p . Un campo vectorial X es vertical si $X_p \in V_p$ para todo $p \in P$. Notemos que la distribución $V \subset TP$ de espacios verticales es invariante bajo la acción R de G . Para verificar esta afirmación, observemos que para un campo vectorial vertical X se tiene $(\pi_*)_p(X_p) = 0$. Además, como $\pi \circ R_g(p) = \pi(p)$, obtenemos

$$(\pi_*)_{pg}(R_g)_*(X_p) = (\pi \circ R_g)_*(X_p) = (\pi_*)_p(X_p) = 0.$$

Así, $(R_g)_*(V_p) \subset V_{pg}$. La inclusión contraria se demuestra de manera análoga. Por lo tanto se tiene $(R_g)_*(V_p) = V_{pg}$. Notemos además que si Y es un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} , se satisface

$$\pi_*\sigma_p(Y) = \frac{d}{dt}(\pi(p \cdot \exp tY))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\pi(p))|_{t=0} = 0.$$

La igualdad anterior indica que $\sigma(Y)$ es un campo vectorial vertical. De hecho, σ_p es un isomorfismo entre \mathfrak{g} y el espacio vertical V_p .

Definición 2.2.3. Sea (P, M, π) un G -fibrado principal y denotemos mediante R la acción por la derecha de G sobre P . Una **conexión** es una distribución diferenciable H de subespacios $H_p \subset T_pP$ complementarios a los espacios verticales V_p que es invariante bajo la acción R de G ; es decir, se tiene $(R_g)_*(H_p) = H_{pg}$. Los espacios H_p reciben el nombre de **espacios horizontales**.

Como la dimensión de los espacios verticales es igual a $k = \dim G$, los espacios horizontales tienen dimensión $\dim P - k$. Luego la conexión es el núcleo de k formas diferenciales de grado 1 que podemos escribir como una 1-forma α con valores vectoriales de k componentes. La imagen deberá ser un espacio vectorial de dimensión k ; tomaremos la imagen igual al álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Definimos la **forma de conexión** $\alpha : P \rightarrow \Lambda^1(T_pP, \mathfrak{g})$ como

$$\alpha_p(Y) = \begin{cases} X & \text{si } Y_p = \sigma_p(X) \text{ para algún } X \in \mathfrak{g} \\ 0 & \text{si } Y_p \text{ es horizontal.} \end{cases}$$

Proposición 2.2.4. Sea (P, M, π) un G -fibrado principal y X un elemento del álgebra de Lie de G . Entonces $(R_g)_*(\sigma_p(X)) = \sigma_{p.g}(ad_{g^{-1}}(X))$. En consecuencia, si α es la forma de conexión asociada a una conexión H , se cumple $R_g^*\alpha_{pg}(Y) = ad_{g^{-1}} \circ \alpha_p(Y)$ para todo $Y \in T_pP$.

Prueba. Para comprobar la primera afirmación calculamos

$$\begin{aligned} (R_g)_*(\sigma_p(X)) &= \frac{d}{dt}(p \exp(tX)g)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(pgg^{-1} \exp(tX)g)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(pg \exp(tad_{g^{-1}}X)) = \sigma_{pg}(ad_{g^{-1}}(X)). \end{aligned}$$

La segunda afirmación se sigue de la primera. Si Y es un vector horizontal lo buscado es trivial. Por otro lado, si $Y = \sigma(X)$ para algún $X \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$R_g^*\alpha_{pg}(Y) = \alpha_{pg}((R_g)_*(\sigma(X))) = \alpha_{pg}(\sigma_{pg}(ad_{g^{-1}}(X))) = ad_{g^{-1}}(X) = ad_{g^{-1}} \circ \alpha_p(Y).$$

□

Definición 2.2.5. Sea (P, M, π) un G -fibrado principal y sea $h : TP \rightarrow TP$ la **proyección horizontal** sobre una conexión H a lo largo de la distribución vertical. Cada $h_p : T_pP \rightarrow T_pP$ es una aplicación lineal que se anula en vectores verticales y es la identidad al restringirse a vectores horizontales. Asimismo, sea α la forma de conexión asociada a H . Definimos la **curvatura** $\omega : P \rightarrow \Lambda^2(P, \mathfrak{g})$ de la conexión como la 2-forma con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} mediante

$$\omega_p(u, v) = d\alpha_p(hu, hv).$$

De hecho, la curvatura ω puede expresarse en términos de la **ecuación de estructura**, que se encuentra demostrada en [KN63], a través de

$$\omega = d\alpha + \frac{1}{2} [\alpha, \alpha].$$

Hasta este punto hemos trabajado con G -fibrados principales sin imponer condiciones sobre el grupo G . En la sección 2.3 enunciaremos y desarrollaremos a grandes rasgos el teorema de Boothby-Wang. Para comprender el teorema no es necesario conocer toda la teoría de conexión y curvatura en G -fibrados; por lo tanto no será desarrollada con mayor profundidad. Recomendamos que el lector interesado consulte [DF84], ya que en el capítulo 25 se expone el tema con amplio detalle. Nosotros nos enfocaremos en fibrados cuyo grupo estructural es el círculo S^1 o cualquier grupo homeomorfo al mismo como $U(1)$ o $SO(2)$. En este caso, lo expuesto arriba se simplifica notablemente y se relaciona directamente con los conceptos definidos en la sección 2.1.

Definición 2.2.6. Un fibrado principal (P, M, π) es un **fibrado circular** si su grupo estructural es S^1 . Usualmente presentamos S^1 como $U(1)$ o $SO(2)$. Observemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$ asociada a $U(1)$ es igual a $i\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$. Por tanto, no habrá pérdida de generalidad en considerar que el álgebra de Lie asociada al grupo estructural de un fibrado circular es \mathbb{R} . Observamos que la forma de conexión y la curvatura asociadas a una conexión H son formas diferenciales usuales con valores reales.

Proposición 2.2.7. Sea (P, M, π) un fibrado circular con conexión H y sea $\xi = \sigma(1)$ el campo vectorial que genera la acción de S^1 en M . Entonces la forma de conexión α cumple las propiedades (R1) y (R2) con respecto al campo vectorial ξ .

Prueba. Para probar que α cumple (R2) basta ver que se tiene $\alpha(\sigma(1)) = 1$. Para demostrar (R1), notemos que la condición de equivarianza $R_g^*\alpha = ad_{g^{-1}} \circ \alpha$ (ver Proposición 2.2.4) se reduce a la invarianza de α bajo la acción del grupo; es decir, se cumple $R_g^*\alpha = \alpha$. Observemos además que la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por $\sigma(1)$ es $R_{\exp(t)}$. Luego se tiene

$$\mathcal{L}_\xi \alpha = \frac{d}{dt} \left(R_{\exp(t)}^* \alpha \right) = \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

□

La proposición anterior muestra que cuando el espacio total P es de dimensión impar $2n+1$ y la forma de conexión α cumple con la condición de contacto $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$, entonces (P, α) es una variedad de contacto y $\xi = \sigma(1)$ es el campo vectorial de Reeb asociado a α . A continuación veremos un ejemplo explícito de esta situación.

Ejemplo 2.2.8. La fibración de Hopf, introducida en el ejemplo 2.1.7, puede tratarse como un fibrado circular. Esta vez extenderemos la fibración de Hopf a dimensiones más altas. Sea π definida por

$$\begin{aligned} \pi : S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\longmapsto [(z_1, \dots, z_{n+1})]. \end{aligned}$$

Si consideremos la acción ρ de $U(1)$ sobre la esfera $2n+1$ dimensional $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ dada por

$$\begin{aligned} \rho : U(1) \times S^{2n+1} &\longrightarrow S^{2n+1} \\ e^{i\theta} \times (z_1, \dots, z_{n+1}) &\longmapsto (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_{n+1}), \end{aligned}$$

se observa, de manera análoga al ejemplo 2.1.7, que se tiene $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/U(1)$. La acción determina un fibrado circular donde el espacio total es S^{2n+1} , el grupo estructural es $U(1)$ y el espacio base es $\mathbb{C}P^n$. Sea $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. El generador infinitesimal de la acción $U(1)$ es el campo vectorial R dado por

$$R_p = \sigma_p(1) = \frac{d}{dt} \left((p_1, \dots, p_{n+1}) e^{it} \right) \Big|_{t=0} = i(p_1, \dots, p_{n+1}),$$

el cual determina el campo vectorial tangente a la esfera

$$R_p = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} - y_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

en coordenadas reales $p_i = x_i + iy_i$. Luego, la forma de conexión expresada en coordenadas reales es

$$\alpha = x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + \dots + x_{n+1} dy_{n+1} - y_{n+1} dx_{n+1}.$$

En el ejemplo 2.1.4 se demostró que $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ es no degenerada, y por ende tampoco lo es su restricción a S^{2n+1} . Asimismo, de manera similar al ejemplo 2.1.7, se demuestra que R es el campo vectorial de Reeb asociado a $i^* \alpha$, donde i es la inclusión de S^{2n+1} en \mathbb{R}^{2n+2} .

Observamos entonces que, en este caso en particular, la forma de conexión es una forma de contacto y el generador infinitesimal de la acción de grupo es el campo vectorial de Reeb asociado.

Si elegimos la distribución horizontal como la distribución ortogonal al fibrado lineal generado por R , tenemos que, para $u \in T_p S^{2n+1}$, la proyección horizontal h está dada por $h_p(u) = u - \langle u, R \rangle_p R_p$. Al ser $i_R \alpha = 0$, tenemos $d(i^* \alpha)(h(u), h(v)) = d(i^* \alpha)(u, v)$. Luego la curvatura está dada por $\omega(u, v) = d(i^* \alpha)(u, v)$. En coordenadas complejas podemos expresar

$$i^* \alpha = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) = \frac{i}{2} (\bar{\partial} - \partial) \log |z|^2.$$

Por lo tanto se tiene

$$d(i^* \alpha) = \frac{i}{2} (\partial + \bar{\partial})(\bar{\partial} - \partial) \log |z|^2 = i \partial \bar{\partial} \log |z|^2 = \pi^* \omega_{FS},$$

donde ω_{FS} es la forma de Fubini-Study en $\mathbb{C}P^n$. Se sigue que la curvatura asociada a la distribución horizontal elegida es $\pi^* \omega_{FS}$.

2.3 Teorema de Boothby-Wang

En esta sección desarrollaremos el teorema de Boothby-Wang, el cual permite construir variedades de contacto regulares a partir de variedades simplécticas. De hecho, tales variedades serán fibrados circulares sobre la variedad simpléctica. Boothby-Wang afirma, además, que las únicas variedades de contacto regulares que existen son estos fibrados. El teorema es en esencia una generalización de la fibración de Hopf y puede ser usado para construir variedades de contacto en abundancia. Para enunciarlo necesitaremos definir algunas nociones previas.

Proposición 2.3.1. (Teorema del flujo tubular). *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea X un campo vectorial completo definido sobre M que no se anula en ningún punto. Entonces en torno de todo $p \in M$ existe una carta coordenada (U, φ) y $\varepsilon > 0$ tal que dentro de la **caja de flujo***

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

se cumple $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi_*(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

La prueba de este teorema es elemental pero técnica. El lector interesado puede consultar [PM82].

Definición 2.3.2. Se dice que un campo vectorial completo X que no se anula en ningún punto de una variedad M es **regular** si para todo $p \in M$ existe una caja de flujo que es atravesada como máximo una vez por cada curva integral de X . Decimos que una forma de contacto es una **forma regular** si el campo vectorial de Reeb asociado es regular. Observemos que si M es una variedad compacta y X es un campo vectorial regular, entonces las curvas integrales son homeomorfas al círculo. Esto se debe a que las curvas integrales de un campo vectorial completo son conjuntos cerrados dentro de un compacto, por lo tanto son compactas y no pueden ser homeomorfas a la recta real.

Utilizando el resultado de la proposición 2.2.7, vemos que si la forma de conexión de un fibrado principal circular (P, M, π) es una forma de contacto sobre P asociada al campo vectorial de Reeb R , entonces las curvas integrales de R son las fibras de la acción S^1 . Por la trivialidad local, estas fibras son disjuntas y difeomorfas al círculo, por lo tanto R es un campo vectorial regular.

Para enunciar el teorema de Boothby-Wang necesitaremos un concepto adicional relacionado con la teoría de de Rham: el concepto de forma diferencial integral. Enunciaremos algunas propiedades de las formas integrales en fibrados circulares, pero no las demostraremos debido a que se nos alejaríamos mucho de nuestro objetivo. El lector puede profundizar en este tema en [DP77].

Definición 2.3.3. Sea M una variedad diferenciable y sea ω una forma diferencial cerrada de grado k definida en M . Decimos que ω es una **forma diferencial integral** si para todo cociclo diferenciable γ de orden k la integral $\int_{\gamma} \omega$ es un número entero. Si (M, ω) es una variedad simpléctica y ω es integral, decimos que ω es una **forma simpléctica integral**.

El concepto anterior puede formularse en términos de cohomología; sin embargo, para nuestro propósito, solamente necesitaremos la siguiente observación. Sea (P, M, π) un fibrado principal circular y α una forma de conexión. Como vimos en la proposición 2.2.7, si R_g representa la acción por la derecha de un elemento $g \in S^1$, entonces se cumple $R_g^* d\alpha = d\alpha$. Por lo tanto se induce una forma ω en el espacio base M tal que $d\alpha = \pi^* \omega$. En este caso, por ser S^1 abeliano, la ecuación de estructura nos indica que la curvatura es precisamente $\pi^* \omega$. Sin embargo, abusando un poco del lenguaje, también denominaremos curvatura a ω . Si ω es la curvatura asociada a la forma de conexión α , entonces $\omega/2\pi$ es una forma entera y la clase de cohomología determinada por ella, denominada **clase de Euler**, está relacionada biunívocamente con el tipo de isomorfismo del fibrado. Además, cualquier forma entera de grado 2 definida en el fibrado se encuentra en la clase de Euler. A partir de estas definiciones y observaciones formulamos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, donde $\omega/2\pi$ es una forma simpléctica integral. Sea (P, M, π) un fibrado principal circular con clase de Euler $[\omega/2\pi]$. Entonces existe una forma de contacto regular α sobre P cuya curvatura asociada es ω . Además,*

el campo vectorial de Reeb R asociado a la forma de contacto α coincide con el generador infinitesimal de la acción de S^1 sobre P .

Prueba. Por la observación realizada en la definición 2.3.2 y por la proposición 2.2.7, basta probar que existe una forma de contacto α sobre P cuya curvatura es ω . Para ello tomemos una forma de conexión α' cualquiera. Entonces existe ω' tal que $d\alpha' = \pi^*\omega'$. Como $\omega'/2\pi$ es una forma entera, se encuentra en la misma clase de cohomología de ω . Esto quiere decir que existe una forma diferencial β de grado 1 definida sobre M tal que

$$\omega - \omega' = d\beta.$$

Luego, si tomamos $\alpha = \alpha' + \pi^*\beta$, comprobamos que α es una conexión 1-forma sobre el fibrado. Esto se debe que para todo $Y \in \mathfrak{u}(1)$ se tiene $\alpha(\sigma(Y)) = \alpha'(\sigma(Y)) + \beta(\pi_*\sigma(Y))$. Pero, al cumplirse $\pi_*\sigma(Y) = 0$ por ser $\sigma(Y)$ un campo vectorial vertical, tenemos $\alpha(\sigma(Y))\alpha'(\sigma(Y)) = Y$. Asimismo, $d\alpha = d\alpha' + d(\pi^*\beta) = d\alpha' + \pi^*\omega - \pi^*\omega' = \pi^*\omega$; es decir, la curvatura asociada a α es ω . Por último, debemos comprobar que α cumple la condición de contacto. En efecto, se satisface

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge \pi^*\omega^n \neq 0$$

por ser ω una forma simpléctica. □

El teorema de Boothby-Wang proporciona las condiciones para que se cumpla el recíproco de la proposición anterior. Específicamente, establece que toda variedad de contacto compacta cuya forma de contacto sea regular es el fibrado circular de una variedad simpléctica con forma simpléctica entera. A continuación enunciaremos el teorema y exhibiremos, a grandes rasgos, los pasos involucrados en la su prueba.

Teorema 2.3.5. (Fibración de Boothby-Wang). *Sea (P, α') una variedad de contacto compacta y conexa, de dimensión $2n + 1$ y con forma de contacto regular α' . Entonces existe una forma de contacto $\alpha = \tau\alpha'$, donde $\tau : P \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que no se anula en ningún punto de M , cuyo campo vectorial de Reeb genera una acción libre de S^1 sobre P . Asimismo, existe una variedad simpléctica M de dimensión $2n$ con forma simpléctica integral ω , y una aplicación diferenciable $\pi : P \rightarrow M$ tal que (P, M, π) es un fibrado circular. Además, α es una forma de conexión en este fibrado cuya curvatura asociada es ω .*

Prueba. Dada la variedad de contacto (P, α') con forma de contacto regular α' , tenemos por definición que el campo vectorial de Reeb R' asociado a α' es regular. Luego, como se mencionó en la definición 2.3.2, al ser P compacta las curvas integrales maximales de R' son homeomorfas al círculo. Un resultado de Palais en [Pa57] afirma que el conjunto M de

curvas integrales maximales de R' con la topología cociente es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Además, la proyección natural $\pi : P \rightarrow M$ es diferenciable y la terna (P, M, π) constituye un fibrado.

A continuación demostraremos que las curvas integrales de R' generan en P una acción libre de S^1 . Para ello, probaremos que las curvas integrales maximales de R' tienen periodo constante. Sea entonces $\{\varphi_t : P \rightarrow P, t \in \mathbb{R}\}$ la familia uniparamétrica de difeomorfismos generada por R' , como en la definición 1.2.1. Definimos $\lambda : P \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\lambda(p)$ es el periodo de la curva integral de R' que pasa por $p \in P$. Formalmente se define $\lambda(p) = \inf \{t, t > 0, \varphi_t(m) = m\}$. Este periodo existe debido a que las curvas integrales de R' son homeomorfas a círculos; es decir, son cerradas en P . Observemos además que la función λ tiene una cota inferior positiva. En efecto, como P es compacta, entonces puede ser cubierta por un número finito de cajas de flujo (ver definición 2.3.1). En cada caja de flujo, la función periodo λ está acotada inferiormente por el lado 2ε de la misma.

Mostraremos a continuación que la función λ es constante en P . Sea k una métrica riemanniana en M . Definimos una métrica g sobre P vía $g = \pi^*k + \alpha' \otimes \alpha'$, donde \otimes es el producto tensorial de formas diferenciales. Observemos que R' es un campo vectorial de Killing de magnitud unitaria respecto a g ; es decir, se cumple $\mathcal{L}_{R'}g = 0$ y $g(R', R') = 1$. En efecto, se tiene

$$g(R', R') = \pi^*k(R', R') + \alpha' \otimes \alpha'(R', R') = k(\pi_*R', \pi_*R') + \alpha'(R')\alpha'(R') = 1$$

ya que $\pi_*(R') = 0$ y $\alpha'(R') = 1$. Por otro lado, como π^*k es constante a lo largo del flujo de R' , tenemos $\mathcal{L}_{R'}\pi^*k = 0$. De ello se desprende

$$\mathcal{L}_{R'}g = \mathcal{L}_{R'}\pi^*k + \mathcal{L}_{R'}\alpha' \otimes \alpha' + \alpha' \otimes \mathcal{L}_{R'}\alpha' = 0,$$

por ser R' el campo vectorial de Reeb asociado a α' . Afirmamos que las curvas integrales de R' son geodésicas. Para ello basta demostrar que se tiene $\nabla_{R'}R' = 0$. Primero observemos que, por la condición de norma unitaria, tenemos $0 = \nabla_X g(R', R') = 2g(\nabla_X R', R')$, donde la primera igualdad se debe a que $g(R', R')$ es constante y la segunda igualdad se obtiene al combinar la simetría y la compatibilidad de la métrica. Ahora, para todo campo vectorial diferenciable no nulo X en P , se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_{R'}g)(R', X) = \nabla_{R'}g(R', X) - g(\mathcal{L}_{R'}R', X) - g(R', \mathcal{L}_{R'}X) \\ &= \nabla_{R'}g(R', X) - g(R', \mathcal{L}_{R'}X) \\ &= g(\nabla_{R'}R', X) + g(R', \nabla_{R'}X) - g(R', \nabla_{R'}X) + g(R', \nabla_X R') \\ &= g(\nabla_{R'}R', X). \end{aligned}$$

Luego inferimos $\nabla_{R'}R' = 0$ y las curvas integrales de R' son geodésicas. Para un punto $q \in P$, denotaremos la curva integral de R' que contiene a q mediante γ_q . Escojamos

arbitrariamente un punto p en la variedad P . Por la definición de la función periodo λ , tenemos $\varphi_{\lambda(p)}(p) = p$ y $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $0 < t < \lambda(p)$. Por la condición de regularidad, existe una caja de flujo B alrededor de p de manera que sea atravesada por cada curva integral de R' como máximo una vez. Tomemos $x \in B$ que no se encuentre en γ_p y tracemos la geodésica c_x que une x y γ_p . Las geodésicas c_x y γ_p son ortogonales en el punto de intersección \bar{x} . Notamos que $\varphi_{\lambda(p)}$ es una isometría, ya que φ_t es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado al campo vectorial de Killing R' . Por lo tanto, la imagen de la geodésica c_x es ella misma. Además, por la condición de regularidad, para todo punto q en c_x se tiene que $\varphi_{\lambda(p)}(q)$ se encuentra en γ_q . Así, se tiene $\varphi_{\lambda(p)}(x) = x$ y el periodo es constante al ser P una variedad diferenciable conexa. No habrá riesgo de confusión si denotamos el periodo constante mediante λ .

Para obtener la forma de contacto buscada, definamos la forma $\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha'$ y $R = \lambda R'$. Notemos que α es una forma de contacto cuyo campo vectorial de Reeb asociado es R . Las curvas integrales de R tienen periodo unitario constante. De este modo, el grupo uniparamétrico de difeomorfismos ψ_t de R depende solo de la clase de equivalencia módulo 1 de t ; por ende, el campo vectorial R genera una acción libre de S^1 . Queda demostrado que, bajo esta acción de S^1 , se satisfacen las condiciones (F1) y (F2) en (P, M, π) . La prueba de (F3) también hace uso de la regularidad de R' e implica la construcción de las funciones de transición. Para mayores detalles al respecto, referimos al lector al capítulo 3 de [Be01].

En el fibrado S^1 -principal construido, el espacio vertical $\ker \pi^*$ coincide con el fibrado lineal generado por R . Elijamos, de manera natural, la distribución $\ker \alpha$ como distribución horizontal en el fibrado. Por ser α una forma de contacto y por la condición S^1 , esta distribución es invariante bajo la acción por la derecha de S^1 . Ya hemos visto que el álgebra de Lie de S^1 puede ser identificada con \mathbb{R} y que se tiene $R = \sigma(1)$. Ya que α es una forma de contacto, de la condición (R2) vemos que se satisface $\alpha(\sigma(1)) = 1$. De hecho, se cumple $\alpha(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que α es una forma de conexión.

Sea ahora ω la curvatura de la forma de conexión α . Como S^1 es un grupo abeliano, la ecuación de estructura se reduce a $d\alpha = \pi^*\omega$. Es directo observar que se tiene $\pi^*d\omega = 0$, por lo tanto obtenemos $d\omega = 0$. Además $(\pi^*\omega)^n = (d\alpha)^n \neq 0$, lo cual implica $\omega^n \neq 0$. Así, ω es una forma simpléctica sobre M . Además, el hecho de que las funciones de transición en el fibrado tengan valores reales módulo 1 implica que la forma simpléctica es integral. No daremos detalles al respecto, pero el lector interesado puede consultar [Ko56].

□

Capítulo 3

Geometría riemanniana en variedades de contacto

3.1 Estructuras métricas de contacto

Empezaremos ahora con el estudio de la geometría riemanniana en las variedades de contacto. Para ello, estudiaremos ciertos tipos de métricas con propiedades de compatibilidad, de manera muy similar al caso de las variedades casi complejas estudiadas en la sección 1.3.

Definición 3.1.1. Sean M una variedad diferenciable de dimensión impar, $\alpha : M \rightarrow \Lambda^1(M, \mathbb{R})$ una 1-forma diferencial, $R : M \rightarrow TM$ un campo vectorial y ϕ un tensor de tipo $(1,1)$ sobre M . Decimos que (M, ϕ, R, α) es una **variedad casi de contacto** si se cumplen las siguientes condiciones:

$$(CC1) \quad \phi^2 = -\mathbb{I} + \alpha \otimes R,$$

$$(CC2) \quad \alpha(R) = 1.$$

En tal caso, decimos también que (ϕ, R, α) es una **estructura casi de contacto** sobre la variedad M . En la siguiente proposición veremos algunas propiedades adicionales que se desprenden de esta definición.

Proposición 3.1.2. *Sea (M, ϕ, R, α) una variedad casi de contacto de dimensión $2n + 1$. Entonces se cumple $\phi(R) = 0$ y $\alpha \circ \phi = 0$. Además, el rango de ϕ es $2n$.*

3.1. ESTRUCTURAS MÉTRICAS DE CONTACTO

34

Prueba. De las condiciones (CC1) y (CC2) tenemos

$$\phi^2(R) = -R + \alpha(R)R = -R + R = 0.$$

Por lo tanto, o bien $\phi(R) = 0$ o $\phi(R)$ es un vector propio de ϕ con valor propio nulo. Si se diera la segunda situación, tendríamos

$$0 = \phi^2(\phi(R)) = -\phi(R) + \alpha(\phi(R))R;$$

es decir, se tendría $\phi(R) = \alpha(\phi(R))R$. Si $\phi(R)$ fuera no nulo, de esta última igualdad se tiene $\alpha(\phi(R)) \neq 0$. Luego,

$$0 = \phi^2(R) = \alpha(\phi(R))\phi(R) = \alpha(\phi(R))^2R \neq 0.$$

Por contradicción, $\phi(R)$ debe ser nulo.

Para demostrar que $\alpha \circ \phi$ es idénticamente nulo, evaluemos $\phi^3(X)$ para un campo vectorial X de dos maneras:

$$\begin{aligned} \phi^3(X) &= \phi^2(\phi(X)) = -\phi(X) + \alpha(\phi(X))R \\ \phi^3(X) &= \phi(\phi^2(X)) = \phi(-X + \alpha(X)R) = -\phi(X) + \alpha(X)\phi(R) = -\phi(X). \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos que $\alpha(\phi(X)) = 0$ para X arbitrario.

Finalmente, si $R' \in \ker \phi$, donde R' es no nulo, entonces $0 = \phi^2(R') = -R' + \alpha(R')R$. Así, todo $R' \in \ker \phi$ es paralelo a R , lo cual implica que $\ker \phi$ tiene dimensión 1 y que la imagen de ϕ tiene dimensión $2n$. \square

Definición 3.1.3. Sea (M, ϕ, R, α) una variedad casi de contacto y g una métrica riemanniana definida sobre M . Se dice que g es **compatible** con la estructura de contacto (ϕ, R, α) si satisface

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y).$$

Cuando definimos una métrica compatible g sobre la variedad de contacto (M, ϕ, R, α) , decimos que (ϕ, R, α, g) es una **estructura métrica casi de contacto**. De manera análoga a la definición 1.4.1, definimos la **2-forma Φ asociada** a esta estructura como

$$\Phi(X, Y) = g(\phi X, Y).$$

De la proposición 3.1.2 se deduce que una métrica compatible g cumple con $g(X, R) = \alpha(X)$. Esta condición cobrará importancia en la definición 3.1.4, en donde se introducirá la noción de estructura métrica de contacto.

Definición 3.1.4. Sea (M, α) una variedad de contacto con campo vectorial de Reeb R . Decimos que una métrica riemanniana g es una **métrica asociada** si existe un tensor ϕ de tipo $(1,1)$ de modo que (ϕ, R, α, g) sea una estructura métrica casi de contacto y $g(\phi X, Y) = d\alpha(X, Y)$. En tal caso decimos que (ϕ, R, α, g) es una **estructura métrica de contacto**.

Proposición 3.1.5. Sea (M, α) una variedad de contacto y sea R el campo vectorial de Reeb asociado. Entonces existe una estructura métrica casi de contacto (ϕ, R, α, g) tal que $g(\phi X, Y) = d\alpha(X, Y)$.

Prueba. Sea k' una métrica riemanniana en M . Definamos la métrica riemanniana k mediante

$$k(X, Y) = k'(-X + \alpha(X)R, -Y + \alpha(Y)R) + \alpha(X)\alpha(Y).$$

La verificación de que k es definida positiva y simétrica es directa; además cumple con $k(X, R) = \alpha(X)$. Sea $H = \ker \alpha$ la estructura de contacto asociada a α . Entonces $d\alpha$ restringida a H define una forma de grado 2 cerrada y no degenerada, al ser $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. Al copiar el procedimiento utilizado en la proposición 1.3.2, podemos encontrar una estructura casi compleja ϕ' definida en H y una métrica \hat{g} compatible con ϕ' tal que $\hat{g}(\phi' X, Y) = d\alpha(X, Y)$.

Podemos extender ϕ' a un tensor ϕ definido en todo M , si notamos que se tiene $T_p M = H_p \oplus \ker d\alpha_p$ y que $\ker d\alpha$ es el espacio de una dimensión generado por R . Definimos ϕ por la fórmula

$$\phi_p(X) = \begin{cases} \phi'_p(X) & \text{si } X_p \in H_p \\ 0 & \text{si } X_p \in \ker d\alpha_p \end{cases}$$

De este modo se tendrá $\phi(R) = 0$. Se verifica directamente $\phi^2 = -\mathbb{I} + \alpha \otimes R$.

También podemos extender \hat{g} a una métrica g , al definir

$$g_p(X, Y) = \begin{cases} \hat{g}_p(X, Y) & \text{si } X_p, Y_p \in H_p, \\ k(X, Y) & \text{si } X_p \in \ker d\alpha_p \text{ o } Y_p \in \ker d\alpha_p. \end{cases}$$

Esta métrica g es compatible con ϕ en la distribución H debido a que \hat{g} lo es. También es compatible en la dirección de R , ya que se tiene $g(\phi(X), \phi(R)) = 0 = k(X, R) - \alpha(X)\alpha(R) = g(X, R) - \alpha(X)\alpha(R)$. Además, es una métrica asociada a $d\alpha$ ya que \hat{g} es una métrica asociada a ϕ' en H , y cumple $g(\phi R, X) = 0 = d\alpha(R, X)$ y $g(\phi(X), R) = \alpha(\phi(X)) = 0 = d\alpha(\phi(X), R)$. \square

Ejemplo 3.1.6. Consideremos el espacio euclideo \mathbb{R}^{2n+1} con coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1,$

3.1. ESTRUCTURAS MÉTRICAS DE CONTACTO

$\dots, y_n, z)$ provisto de la forma de contacto usual α dada por

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i dy_i + dz.$$

En este caso el campo vectorial de Reeb está dado por $R = \frac{\partial}{\partial z}$. Definimos la métrica riemanniana g mediante

$$g = \alpha \otimes \alpha + \sum_{i=1}^n ((dx_i)^2 + (dy_i)^2)$$

Asimismo definimos el tensor de orden (1,1) por

$$\phi = \sum_{i=1}^n \left(dy_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} - dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

A continuación, veremos que (ϕ, R, α, g) es una estructura métrica de contacto en \mathbb{R}^{2n+1} . Primero comprobamos que el tensor ϕ que acabamos de definir cumple con la condición (CC1). Para ello basta evaluar en la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, z \right)$. En efecto, obtenemos

$$\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_k} + x_k \frac{\partial}{\partial z}; \quad \phi \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \phi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0.$$

De estas igualdades podemos calcular el valor de ϕ^2 en la base y comparar:

$$\begin{aligned} \phi^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= \phi \left(\frac{\partial}{\partial y_k} + x_k \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} + \underbrace{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)}_0 \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi^2 \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) &= \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_k} + \underbrace{x_k}_{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)} \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) &= 0 = -\frac{\partial}{\partial z} + \underbrace{\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)}_1 \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Luego tenemos $\phi^2 = -\mathbb{I} + \alpha \otimes R$.

Ahora procedemos a comprobar que la métrica g es compatible con ϕ y asociada a $d\alpha$. Para ello evaluamos en dos campos vectoriales U y V arbitrarios, que expresamos en coordenadas como

$$U = \sum_{k=1}^n \left(U_k^x \frac{\partial}{\partial x_k} + U_k^y \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + U^z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$V = \sum_{k=1}^n \left(V_k^x \frac{\partial}{\partial x_k} + V_k^y \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + V^z \frac{\partial}{\partial z}.$$

De este modo podemos evaluar, por ejemplo,

$$\phi(U) = \sum_{k=1}^n \left(U_k^y \frac{\partial}{\partial x_k} - U_k^x \frac{\partial}{\partial y_k} + U_k^x x_k \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

La fórmula para $\phi(V)$ es análoga. Luego, al tenerse $\alpha \circ \phi = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} g(\phi(U), \phi(V)) &= \sum_{i=1}^n ((dx_i)^2 + (dy_i)^2) (\phi(U), \phi(V)) = \sum_{i=1}^n (U_i^y V_i^y + U_i^x V_i^x) \\ &= g(U, V) - \alpha(U)\alpha(V) \end{aligned}$$

con lo cual g resulta compatible con ϕ . Además se cumple

$$g(\phi(U), V) = \sum_{i=1}^n (U_i^y V_i^y - U_i^x V_i^x) = \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge dy_i) (U, V) = d\alpha(U, V)$$

con lo cual g es una métrica asociada a α . Queda probado, entonces, que (ϕ, R, α, g) es una estructura de contacto en \mathbb{R}^{2n} . Si bien se ha definido una estructura métrica de contacto en \mathbb{R}^{2n+1} , debemos advertir que esta no es la única que existe en el espacio euclideo.

Ejemplo 3.1.7. Consideremos ahora la esfera de dimensión impar S^{2n+1} como subvariedad de \mathbb{R}^{2n+2} , en el cual especificamos coordenadas rectangulares $(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})$. Como se vio en el ejemplo 2.1.4, la 1-forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$$

restringida a la esfera es una forma de contacto en S^{2n+1} . Denotamos a la forma de contacto en la esfera por $i^* \alpha$, donde i es la inclusión natural de S^{2n+1} en \mathbb{R}^{2n+2} . Sea R el campo vectorial sobre \mathbb{R}^{2n+2} dado por

$$R = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{n+1} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Al restringir este campo a la esfera, obtenemos campo vectorial tangente a ella que resulta ser el campo vectorial de Reeb asociado a $i^* \alpha$.

Sea J la estructura casi compleja usual en \mathbb{R}^{2n+2} , dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

3.1. ESTRUCTURAS MÉTRICAS DE CONTACTO

38

donde \mathbb{I} es la matriz identidad $(n+1) \times (n+1)$, y sea $\pi : \mathbb{R}^{2n+2} - \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$ la proyección radial. Definimos $\phi(X) = \pi_*(J(X))$. Como $J(R)$ es normal a la esfera, tenemos $\phi(R) = 0$. Dado un punto y un vector $v \in \mathbb{R}^{2n+2}$, se cumple $J(x) = -R$ (al identificar a x como vector). La expresión para el tensor ϕ es

$$\phi_x(v) = Jv - g(x, Jv) \frac{x}{|x|^2},$$

donde g es la métrica euclideana en \mathbb{R}^{2n+2} . En particular, si $x \in S^{2n+1}$ y $v \in T_x S^{2n+1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \phi_x^2(v) &= \phi(Jv - g(x, Jv)x) = J(Jv - g(x, Jv)x) - g(x, J(Jv - g(x, Jv)x))x \\ &= -v + g(x, Jv)R - \underbrace{g(x, -v + g(x, Jv)R)}_0 Jx. \end{aligned}$$

Este último término es cero debido a que v y R son tangentes a la esfera, mientras que x es un vector normal. Notemos que se cumple $g(x, Jv) = \alpha_x(v)$, luego la expresión anterior se simplifica a

$$\phi^2(v) = -v + \alpha(v)R.$$

De ello se obtiene que la terna $(\phi, R, i^*\alpha)$, donde ϕ y R están restringidos al espacio tangente a la esfera, constituye una estructura casi de contacto en S^{2n+1} .

Si consideramos la métrica inducida g en la esfera, probaremos a continuación que $(\phi, R, i^*\alpha, g)$ una estructura métrica de contacto. Para ello debemos comprobar que g es compatible con ϕ y es una métrica asociada α . En efecto, para $u, v \in T_x S^{2n+1}$, se tiene

$$\begin{aligned} g(\phi_x(u), \phi_x(v)) &= g(Ju - g_x(x, Ju)x, Jv - g(x, Jv)x) \\ &= g(Ju, Jv) - g(x, Jv)g(Ju, x) - g(x, Ju)g(x, Jv) + g(x, Ju)g(x, Jv) \\ &= g(u, v) - \alpha_x(u)\alpha_x(v). \end{aligned}$$

Equivalentemente, escribimos $g(\phi(X), \phi(Y)) = g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$ para $X, Y \in TS^{2n+1}$; es decir, g es compatible. Además se tiene

$$g_x(\phi_x u, v) = g_x(J_x u - g_x(x, J_x u)x, v) = g_x(Ju, v) = d\alpha_x(u, v),$$

como puede comprobarse al calcular en coordenadas locales. Así, se tiene $g(\phi(X), Y) = d\alpha(X, Y)$. En resumen, $(\phi, R, i^*\alpha, i^*g)$ resulta ser una estructura métrica de contacto en S^{2n+1} .

Ejemplo 3.1.8. Dada (P, α) una variedad de contacto compacta con campo vectorial de Reeb R regular, consideremos $\pi : P \rightarrow M$ la fibración de Boothby-Wang como en el teorema 2.3.5, con (M, ω) variedad simpléctica. Sea H una distribución horizontal asociada

a la fibración. Como $\pi_*|_{H_p}$ es biyectiva, para todo campo vectorial X en M existe un campo vectorial $\tilde{\pi}X$ en P tal que se cumple $\tilde{\pi}X \in H$ y $\tilde{\pi}(\pi_*X) = X$.

Sea \hat{g} una métrica asociada para ω y J la estructura casi compleja correspondiente. Podemos definir, para X un campo vectorial en P , el tensor ϕ de tipo (1,1) dado por $\phi(X) = \tilde{\pi}(J\pi_*X)$. Notamos que, si X es horizontal, se tiene $\phi^2(X) = -X$; mientras que si $X \in \ker \pi_*$ es vertical, se cumple $\phi^2(X) = 0$. Como el campo vectorial de Reeb R es vertical, tenemos $\phi^2 = -\mathbb{I} + \alpha \otimes R$.

Definamos ahora una métrica riemanniana g mediante

$$g = \pi^*\hat{g} + \alpha \otimes \alpha.$$

Esta resulta compatible con ϕ por ser \hat{g} compatible con J . Además, recordando que se cumple $d\alpha = \pi^*\omega$, tenemos

$$g_p(\phi X, Y) = \hat{g}_{\pi(p)}(J\pi_*X, \pi_*Y) = \omega_{\pi(p)}(\pi_*X, \pi_*Y) = (\pi^*\omega)_p(X, Y) = d\alpha_p(X, Y).$$

Luego (ϕ, R, α, g) es una estructura métrica de contacto en P . Observemos que en este caso R es un campo vectorial de Killing, ya que al satisfacerse $\pi_*R = 0$, $\pi^*\hat{g}$ es constante en la dirección de R . Una estructura métrica de contacto cuyo campo vectorial de Reeb es un campo vectorial de Killing recibe el nombre de **estructura de K-contacto**.

Proposición 3.1.9. *Sea (M, ϕ, R, α, g) una variedad métrica de contacto. Entonces las curvas integrales de R son geodésicas.*

Prueba. Sabemos que se cumple $\alpha(X) = g(X, R)$. En particular, se tiene $g(R, R) = 1$. Por lo tanto, para todo campo vectorial X , tenemos $0 = \nabla_X g(R, R) = 2g(\nabla_X R, R)$. Además, por la condición (C2) de la definición 2.1.1, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_R \alpha)(X) = R(\alpha(X)) - \alpha(\mathcal{L}_R X) = \nabla_R g(X, R) - g(\nabla_R X - \nabla_X R, R) \\ &= g(\nabla_R X, R) + g(X, \nabla_R R) - g(\nabla_R X, R) + g(\nabla_X R, R) = g(X, \nabla_R R) \end{aligned}$$

Luego se satisface $\nabla_R R = 0$ y las curvas integrales de R resultan geodésicas. □

3.2 Variedades de Sasaki

En esta sección ampliaremos el concepto de estructura métrica de contacto para definir las estructuras de Sasaki. Estas son estructuras de contacto con la propiedad adicional de

normalidad, lo cual significa que la estructura de contacto es en cierto modo integrable. Al tomar en cuenta la condición de que la 2-forma asociada a la estructura métrica de contacto coincide con la derivada exterior de la forma de contacto, las estructuras de Sasaki representan un paralelo de las variedades de Kähler en geometría de contacto. Empezaremos por definir normalidad en estructuras casi de contacto.

Definición 3.2.1. Sea (M, ϕ, R, α) una variedad casi de contacto y consideremos la variedad $M \times \mathbb{R}$. Podemos escribir los campos vectoriales en $M \times \mathbb{R}$ como $(X, f \frac{d}{dt})$, donde t es la coordenada en \mathbb{R} y X es un campo vectorial en M . La función $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ . En $M \times \mathbb{R}$ podemos definir el tensor J de tipo (1,1) mediante

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = \left(\phi(X) - fR, \alpha(X) \frac{d}{dt} \right).$$

Notemos que se cumple

$$\begin{aligned} J^2(X, f \frac{d}{dt}) &= J \left(\phi(X) - fR, \alpha(X) \frac{d}{dt} \right) = \left(\phi(\phi(X) - fR) - \alpha(X)R, \alpha(\phi(X) - fR) \frac{d}{dt} \right) \\ &= (-X, -f \frac{d}{dt}). \end{aligned}$$

Por lo tanto J es una estructura casi compleja en $M \times \mathbb{R}$.

La **torsión de Nijenhuis** N_A para un tensor diferenciable A de tipo (1,1) definido sobre una variedad diferenciable M se define mediante

$$N_A(X, Y) = -A^2[X, Y] + A[AX, Y] + A[X, AY] - [AX, AY].$$

No es difícil probar que la torsión N_A de un tensor A es un también un tensor. En particular, si $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ , entonces se cumple

$$N_A(\varphi X, Y) = N_A(x, \varphi Y) = \varphi N_A(X, Y).$$

Si la torsión de Nijenhuis de A es idénticamente nula, decimos que A es **integrable**. Si la estructura casi compleja J es integrable, decimos que la estructura casi de contacto (ϕ, R, α) es **normal**.

En la siguiente proposición, buscaremos expresar la condición de normalidad en función del tensor estructural ϕ .

Proposición 3.2.2. *Sea (M, ϕ, R, α) una variedad casi de contacto. La estructura casi de contacto (ϕ, R, α) es normal si y solo si*

$$N_\phi - d\alpha \otimes R = 0,$$

donde N_ϕ es la torsión de Nijenhuis del tensor ϕ .

Prueba. Ya que N_J es un tensor de tipo (1,2) que es antisimétrico, este queda totalmente determinado al ser evaluado en dos pares de campos vectoriales en $M \times \mathbb{R}$ de la forma $((X, 0), (Y, 0))$ y $((X, 0), (0, \frac{d}{dt}))$. Con ello, buscamos expresar la torsión N_J en términos de N_ϕ . Tenemos

$$N_J((X, 0), (Y, 0)) = [(X, 0), (Y, 0)] + J \left(\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), (Y, 0) \right] \right) \\ + J \left(\left[(X, 0), \left(\phi(Y), \alpha(Y) \frac{d}{dt} \right) \right] \right) - \left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), \left(\phi(Y), \alpha(Y) \frac{d}{dt} \right) \right].$$

Podemos expresar el primer sumando como

$$[(X, Y), 0] = (-\phi^2([X, Y]) + \alpha([X, Y])R, 0)$$

Para expandir el segundo y el tercer sumando, observemos primero que se tiene

$$\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), (Y, 0) \right] = \left([\phi(X), Y], -Y(\alpha(X)) \frac{d}{dt} \right).$$

Al evaluar, obtenemos para el segundo término

$$J \left(\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), (Y, 0) \right] \right) = \left(\phi[\phi(X), Y] + Y(\alpha(X))R, \alpha([\phi(X), Y]) \frac{d}{dt} \right).$$

Podemos trabajar de manera análoga para expandir el tercer término y obtenemos

$$J \left(\left[(X, 0), \left(\phi(Y), \alpha(Y) \frac{d}{dt} \right) \right] \right) = \left(\phi[X, \phi(Y)] - X(\alpha(Y))R, \alpha([X, \phi(Y)]) \frac{d}{dt} \right).$$

Desarrollamos ahora el cuarto sumando:

$$\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), \left(\phi(Y), \alpha(Y) \frac{d}{dt} \right) \right] = \left([\phi(X), \phi(Y)], (\phi(X)(\alpha(Y)) - \phi(Y)(\alpha(X))) \frac{d}{dt} \right).$$

Sumamos todos los términos y utilizamos las fórmulas intrínsecas para la derivada exterior y la derivada de Lie. La suma se reduce a

$$N_J((X, Y), 0) = \left(N_\phi(X, Y) - d\alpha(X, Y)R, ((\mathcal{L}_{\phi(Y)}\alpha)(X) - (\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y)) \frac{d}{dt} \right).$$

Si N_J es nulo, entonces los tensores definidos por

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\phi(X, Y) - d\alpha(X, Y)R$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\phi(Y)}\alpha)(X) - (\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y)$$

3.2. VARIEDADES DE SASAKI

42

también se anulan. Con esto se ha probado que $N_J = 0$ implica que $N^{(1)} = N_\phi - d\alpha \otimes R$ se anula.

Para probar la implicación contraria, evaluamos primero $N_J((X, 0), (0, \frac{d}{dt}))$. Como en el cálculo anterior, se tiene

$$N_J((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) = J \left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), \left(0, \frac{d}{dt} \right) \right] + J[(X, 0), (-R, 0)] \\ - \left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), (-R, 0) \right];$$

ya que $[(X, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$. Evaluamos los corchetes de Lie en cada término para obtener

$$\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), \left(0, \frac{d}{dt} \right) \right] = 0; \quad [(X, 0), (-R, 0)] = (-[X, R], 0);$$

$$\left[\left(\phi(X), \alpha(X) \frac{d}{dt} \right), (-R, 0) \right] = \left(-[\phi(X), R], R(\alpha(X)) \frac{d}{dt} \right).$$

Además, se tiene $J(-[X, R], 0) = -((\phi([X, R]), \alpha([X, R]) \frac{d}{dt}))$. Sumando todos los términos, y utilizando la fórmula intrínseca de la derivada de Lie, la expresión buscada se reduce a

$$N_J((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) = -((\mathcal{L}_R \phi)(X), (\mathcal{L}_R \alpha)(X)).$$

Definimos ahora los tensores

$$N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_R \phi)(X);$$

$$N^{(4)}(X) = (\mathcal{L}_R \alpha)(X).$$

Observemos que J es integrable si y solo si todos los $N^{(i)}$ son nulos. La proposición quedará probada si demostramos que $N^{(1)} = 0$ implica $N^{(i)} = 0$ para $i = 2, 3, 4$.

Primero probemos que $N^{(1)} = 0$ implica $N^{(4)} = 0$. Para ello evaluamos $N^{(1)}(X, R)$ y obtenemos

$$0 = N^{(1)}(X, R) = N_\phi(X, R) - d\alpha(X, R)R \\ = -\phi^2[X, R] + \phi[\phi(X), R] + R(\alpha(X))R + \alpha([X, R])R \\ = [X, R] - \alpha([X, R]) + \phi[\phi(X), R] + R(\alpha(X))R + \alpha([X, R])R \\ = [X, R] + \phi[\phi(X), R] + R(\alpha(X))R.$$

Al aplicar α a la última igualdad, y si tenemos en cuenta que $\alpha \circ \phi = 0$ y $X(\alpha(R)) = 0$, usando la fórmula de derivada exterior obtenemos

$$0 = \alpha([X, R]) + R(\alpha(X)) = -d\alpha(X, R) = -i_R d\alpha(X).$$

Por la fórmula de Cartan, se tiene

$$(\mathcal{L}_R\alpha) = \underbrace{d(i_R\alpha)}_0 + i_R d\alpha = 0.$$

De ello se concluye $N^{(4)} = 0$.

Ahora demostramos la igualdad $N^{(3)} = 0$. Por el cálculo anterior notamos que se cumple

$$0 = N^{(1)}(\phi(X), R) = [\phi(X), R] - \phi[X, R] = \phi((\mathcal{L}_R\phi)(X)) = -(\mathcal{L}_R\phi)(X) = -N^{(3)}(X).$$

Por último, demostramos $N^{(2)} = 0$. Para ello notamos que, como $\alpha \circ \phi = 0$, se sigue $\alpha(N_\phi(\phi(X), Y)) = \alpha(-[\phi^2(X), \phi(Y)])$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(N^{(1)}(\phi(X), Y)) = \alpha(-[\phi^2(X), \phi(Y)]) - d\alpha(\phi(X), Y) \\ &= \alpha([X, \phi(Y)] - \alpha([\alpha(X)R, \phi(Y)]) - d\alpha(\phi(X), Y) \\ &= \alpha([X, \phi(Y)]) - \alpha(\alpha(X)[R, \phi(Y)] - \phi(Y)(\alpha(X))R) - d\alpha(\phi(X), Y) \\ &= \alpha([X, \phi(Y)] + \phi(Y)(\alpha(X)) - \alpha(X)\alpha([R, \phi(Y)])) - d\alpha(\phi(X), Y). \end{aligned}$$

Observemos que se tiene

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y) &= \phi(X)(\alpha(Y)) - \alpha([\phi(X), Y]) = d\alpha(\phi(X), Y); \\ (\mathcal{L}_{\phi(Y)}\alpha)(X) &= \phi(Y)(\alpha(X)) + \alpha([X, \phi(Y)]); \\ 0 = d\alpha(R, \phi(Y)) &= \underbrace{R(\alpha(\phi(Y)))}_0 - \underbrace{\phi(Y)(\alpha(R))}_0 - \alpha([R, \phi(Y)]). \end{aligned}$$

Luego la expresión anterior se reduce a

$$0 = \alpha(N^{(1)}(\phi(X), Y)) = (\mathcal{L}_{\phi(Y)}\alpha)(X) - (\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y) = N^{(2)}(X, Y),$$

y queda probada la implicación buscada. \square

Será útil en el futuro tener en cuenta las definiciones de los tensores $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ y $N^{(4)}$ que se especificaron en la demostración anterior. Reescribimos a continuación las expresiones para cada uno de ellos con el objetivo de tenerlas a la mano.

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N_\phi(X, Y) - d\alpha(X, Y)R; \\ N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_{\phi(Y)}\alpha)(X) - (\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y); \\ N^{(3)}(X) &= (\mathcal{L}_R\phi)(X); \\ N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_R\alpha)(X). \end{aligned}$$

De hecho, podemos caracterizar las estructuras métricas de contacto mediante $N^{(2)}, N^{(3)}$ y $N^{(4)}$ de la siguiente manera.

Proposición 3.2.3. *Sea M una variedad de contacto y sea (ϕ, R, α, g) una estructura métrica de contacto asociada a M . Entonces los tensores $N^{(4)}$ y $N^{(2)}$ se anulan. Además, si la estructura es de K -contacto, es decir, el campo vectorial es de Killing, entonces $N^{(3)}$ también se anula.*

Prueba. En una estructura métrica de contacto (ϕ, R, α, g) , se satisface $\mathcal{L}_R\alpha = 0$, ya que α es la forma de contacto y R es el campo vectorial de Reeb asociado a ella. Así, por definición, $N^{(4)}(X) = 0$. Además, se cumple

$$(\mathcal{L}_{\phi(X)}\alpha)(Y) = \phi(X)(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}_{\phi(X)}Y) = d\alpha(\phi(X)Y).$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} N^{(2)}(X, Y) &= d\alpha(\phi(Y), X) - d\alpha(\phi(X), Y) \\ &= g(Y - \alpha(Y)R, X) + g(-X + \alpha(X)R, Y) \\ &= g(Y, X) - g(X, Y) - \alpha(Y)\alpha(X) + \alpha(X)\alpha(Y) = 0. \end{aligned}$$

Si la estructura es de K -contacto, y como $\mathcal{L}_Rd\alpha = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_Rd\alpha)(X, Y) = R(d\alpha(X, Y)) - d\alpha(\mathcal{L}_RX, Y) - d\alpha(X, \mathcal{L}_RY) \\ &= R(g(\phi(X), Y)) - g(\phi(\mathcal{L}_RX), Y) - g(\phi(X), \mathcal{L}_RY) \\ &= R(g(\phi(X), Y)) - g(\mathcal{L}_R\phi(X), Y) + g((\mathcal{L}_R\phi)(X), Y) - g(\phi(X), \mathcal{L}_RY) \\ &= (\mathcal{L}_Rg)(\phi(X), Y) + g((\mathcal{L}_R\phi)(X), Y) = g((\mathcal{L}_R\phi)(X), Y). \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple para Y arbitrario, tenemos $N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_R\phi)(X) = 0$. \square

Definición 3.2.4. Sea M una variedad diferenciable y (ϕ, R, α, g) una estructura métrica de contacto. Decimos que (M, ϕ, R, α, g) es una variedad de **Sasaki** si (ϕ, R, α, g) es normal. En tal caso, a la estructura métrica de contacto se le conoce como **estructura de Sasaki**.

A continuación daremos algunos ejemplos de variedades de Sasaki. Los siguientes ejemplos demostrarán que las estructuras métricas de contacto definidas en \mathbb{R}^{2n+1} y S^{2n+1} en los ejemplos 3.1.6 y 3.1.7, respectivamente, son de Sasaki.

Ejemplo 3.2.5. Para demostrar que la estructura métrica de contacto (ϕ, R, α, g) definida en el ejemplo 3.1.6 es Sasaki, debemos probar que se cumple $N_\phi = d\alpha \otimes R$. Para calcular N_ϕ , al ser este un tensor antisimétrico, basta evaluar las componentes

$$N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right); \quad N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right); \quad N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right); \quad N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial z}\right); \quad N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

De hecho, todas ellas se anulan excepto la tercera. Debido a que los cálculos son muy similares, calcularemos solo esta componente, cuyo cálculo es el más elaborado. Tenemos así

$$\begin{aligned} N_\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= -\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right] + \phi\left[\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial y_j}\right] + \phi\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \phi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right] - \left[\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \phi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right] \\ &= 0 + \phi\left[\underbrace{-\frac{\partial}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}}_0, \frac{\partial}{\partial y_j}\right] + \phi\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}}_0\right] - \left[\frac{\partial}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial z} = d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Como se tiene $R = \frac{\partial}{\partial z}$, se demuestra la condición de normalidad. Por lo tanto, la estructura es de Sasaki.

Ejemplo 3.2.6. Ahora demostraremos que la estructura métrica de contacto definida en S^{2n+1} en el ejemplo 3.1.7 es de Sasaki. Para ello usaremos una estrategia diferente que en el ejemplo anterior. Consideremos $S^{2n+1} \times \mathbb{R}^+ \approx \mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}$. Probaremos que la estructura casi compleja usual J en $\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}$ coincide con

$$\hat{J}\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\phi(X) - fR, \alpha(X) \frac{d}{dt}\right)$$

cuando X es un campo vectorial tangente a S^{2n+1} y $f \frac{d}{dt}$ es normal a la esfera, donde $f : \mathbb{R}^{2n+2} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de clase C^∞ . Para ello consideremos un punto $x \in \mathbb{R}^{2n+2}$ y un vector $v \in T\mathbb{R}^{2n+2}$. Descompongamos v en su componente tangencial v_t y su componente normal v_n al hiperplano determinado por x . Estas componentes están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} v_t &= v - g(x, v) \frac{x}{|x|^2}, \\ v_n &= g(x, v) \frac{x}{|x|^2}. \end{aligned}$$

Tenemos $Jv = J(v_t + v_n)$. Así,

$$\begin{aligned} Jv_t &= \left(Jv - g(Jv, x) \frac{x}{|x|^2} + g(x, v) \frac{R}{|x|^2}, -g(Jv, x) \frac{x}{|x|^2}\right) \\ &= (\phi(v) + v_n R, \alpha(v)) = (\phi(v_t), \alpha(v)) \end{aligned}$$

donde el primer término en el paréntesis representa la componente tangencial y el segundo la componente normal al hiperplano normal a x . Asimismo se tiene

$$Jv_n = (-v_n R, 0).$$

3.3. SIMPLECTIZACIÓN CÓNICA Y CILÍNDRICA

Por lo tanto se consigue $Jv = (\phi(v_t) - v_n R, \alpha(v)) = \hat{J}v$. Como J es integrable, por la definición 3.2.1 queda probado que la estructura definida en la esfera es de Sasaki.

Es natural preguntarse si la estructura métrica de contacto definida para la fibración de Boothby-Wang en el ejemplo 3.1.8 es de Sasaki. De hecho, en general, no lo es, si bien ya hemos probado que es de K-contacto. En [Mo64] se demuestra que esta estructura es de Sasaki si y solo si la estructura simpléctica del espacio base proviene de una forma de Kähler. El siguiente ejemplo corrobora esta afirmación.

Ejemplo 3.2.7. Sea (P, α) una variedad de contacto compacta y regular de dimensión $2n + 1$ y sea R el campo vectorial de Reeb asociado a α . Por el teorema de Boothby-Wang, P es el espacio total de un fibrado circular principal sobre una variedad simpléctica (M, ω) . Sea π la proyección de este fibrado y J una estructura casi compleja sobre M . Definimos ϕ y g sobre P de la misma manera que en el ejemplo 3.1.8, de modo que (P, ϕ, R, α, g) resulta una variedad métrica de contacto. Al tenerse $\mathcal{L}_R \phi = 0$, se logra

$$N_\phi(R, X) = -\phi^2[R, X] + \phi[R, \phi(X)] = -\phi((\mathcal{L}_R \phi)(X)) = 0.$$

Recordemos que el tensor estructural ϕ fue definido mediante $\phi = \tilde{\pi} J \pi_*$, donde $\tilde{\pi}$ es la inversa de π_* restringida a $\ker \alpha$. Calculamos el tensor $N^{(1)}$ asociado a ϕ . Para X, Y campos vectoriales horizontales en P tenemos

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N_\phi(X, Y) - d\alpha(X, Y) \\ &= -\tilde{\pi} J^2 \pi_*[X, Y] + \tilde{\pi} J^2 \pi_*[\tilde{\pi} J^2 \pi_*(X), Y] \\ &\quad + \tilde{\pi} J^2 \pi_*[x, \tilde{\pi} J^2 \pi_*(Y)] - [\tilde{\pi} J^2 \pi_*(X), \tilde{\pi} J^2 \pi_*(Y)] - d\alpha(X, Y). \end{aligned}$$

Si notamos la igualdad $\tilde{\pi}[X, Y] = h[\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(Y)]$, donde h es la proyección horizontal, podemos descomponer el factor $[\tilde{\pi} J^2 \pi_*(X), \tilde{\pi} J^2 \pi_*(Y)]$ en su componente horizontal $\tilde{\pi}[J \pi_*(X), J \pi_*(Y)]$ y vertical $\alpha([\tilde{\pi} J^2 \pi_*(X), \tilde{\pi} J^2 \pi_*(Y)])R$. Luego la expresión anterior se reduce a

$$N^{(1)}(X, Y) = \tilde{\pi} N_J(X, Y) - \alpha([\tilde{\pi} J^2 \pi_*(X), \tilde{\pi} J^2 \pi_*(Y)])R - d\alpha(X, Y).$$

Pero, como se observa directamente de la fórmula intrínseca para la derivada exterior y la compatibilidad de la métrica, se tiene $\alpha([\phi(X), \phi(Y)]) = -d\alpha(X, Y)$. Así, obtenemos $N^{(1)} = \tilde{\pi} N_J$. Se deduce que ϕ será normal si y solo si J es integrable. Por lo tanto, en una fibración de Boothby-Wang, un espacio base de Kähler está asociado a una estructura de Sasaki en el espacio total.

3.3 Simplectización cónica y cilíndrica

En esta sección daremos una definición alternativa de variedad de Sasaki en términos del cono métrico. La definición de normalidad en la sección anterior puede interpretarse como

equivalente a que el cilindro métrico sea una variedad compleja. Nuestro objetivo será relacionar ambas definiciones; para ello comenzaremos por deducir algunas propiedades de cono métrico de una variedad diferenciable en función de las estructuras de contacto definidas en ella.

Definición 3.3.1. Sea M una variedad diferenciable con una métrica riemanniana g definida sobre ella. El **cilindro métrico** asociado a (M, g) es la variedad riemanniana $(K(M), g_K)$, donde $K(M) = M \times \mathbb{R}$ y $g_K = dt^2 + \pi^*g$, donde t representa la coordenada real y π es la proyección del cilindro sobre M . Análogamente, definimos el **cono métrico** asociado a (M, g) como la variedad riemanniana $(C(M), g_C)$, donde $C(M) = M \times \mathbb{R}_+$ y $g_C = dr^2 + r^2\pi^*g$, donde r es la coordenada real positiva. No habrá riesgo de confusión si denotamos también por π la proyección del cono sobre M .

Observemos que en el cono métrico podemos definir un grupo uniparamétrico de homotecias $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ que actúa por la izquierda en el cono mediante

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : C(M) &\longrightarrow C(M) \\ (x, r) &\longmapsto (x, \lambda r). \end{aligned}$$

Es directo comprobar que la métrica cónica g_C es homogénea de grado 2 bajo ψ_λ , pues satisface $\psi_\lambda^*g_C = \lambda^2g_C$. Como la acción del grupo es en esencia multiplicación por un número, el álgebra de Lie es la recta real. La acción del grupo está generada por

$$\sigma_{(p,r)}(1) = \left. \frac{d}{dt}(p, e^t r) \right|_{t=0} = (0, r) = r \frac{d}{dr}.$$

Proposición 3.3.2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión impar y sea (ϕ, R, α, g) una estructura métrica casi de contacto definida en M . Entonces se cumple lo siguiente:

- (1) existe una estructura casi compleja J en $K(M)$, de modo que g_K es hermitiana y compatible con J ;
- (2) existe una estructura casi compleja I en $C(M)$, de modo que g_C es hermitiana y compatible con I .

Además, si la estructura casi de contacto es normal, tanto J como I son integrables.

Prueba. Para demostrar (1), basta, como es usual definir

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi(X) - fR, \alpha(X) \frac{d}{dt}).$$

3.3. SIMPLECTIZACIÓN CÓNICA Y CILÍNDRICA

Ya hemos comprobado, en la definición 3.2.1 que J es una estructura casi compleja. Claramente g_K es una métrica riemanniana. Solo debemos probar la compatibilidad:

$$\begin{aligned} g_K(J(X, f \frac{d}{dt}), J(Y, h \frac{d}{dt})) &= \alpha(X)\alpha(Y) + g(\phi(X) - fR, \phi(Y) - hR) \\ &= \alpha(X)\alpha(Y) + g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y) + f \cdot g \\ &= g(X, Y) + f \cdot g = g_K((X, f \frac{d}{dt}), (Y, h \frac{d}{dt})). \end{aligned}$$

La demostración de (2) es análoga si definimos la estructura casi compleja I en $C(M)$ mediante

$$I(X, fr \frac{d}{dr}) = (\phi(X) - fR, \alpha(X)r \frac{d}{dr}).$$

Si la estructura casi de contacto es normal, las estructuras casi complejas definidas son integrables por la definición 3.2.1. \square

A continuación veremos que, bajo ciertas condiciones, el recíproco de la proposición anterior también se cumple.

Proposición 3.3.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y supongamos que el cilindro métrico $(K(M), g_K)$ y el cono métrico $(C(M), g_C)$ admitan estructuras casi complejas J e I compatibles con las métricas respectivas. Denotemos, como es usual, la coordenada real del cilindro por t y la coordenada real del cono por r . Entonces se cumple lo siguiente.*

- (1) *Si $R = J(\frac{d}{dt})$ es un campo vectorial tangente a M que no se anula en ningún punto, entonces M admite una estructura métrica casi de contacto.*
- (2) *Si $R = I(r \frac{d}{dr})$ es un campo vectorial tangente a M que no se anula en ningún punto, entonces M admite una estructura métrica casi de contacto.*

Prueba. Con $R = J(\frac{d}{dt})$, definimos en el cilindro la forma diferencial $\hat{\alpha}(X) = g_K(R, X)$. Observamos que se cumple $\hat{\alpha}(R) = g_K(R, R) = g_K(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}) = 1$. De forma natural, podemos definir la forma $\alpha = i^*\hat{\alpha}$ sobre M , donde i es la inmersión de M en su cilindro. Si L_R es el fibrado de rectas generado por R , tenemos $TK(M) = \ker \alpha \oplus L_R$. Definimos

$$\phi(X) = \begin{cases} J(X) & \text{si } X \in \ker \alpha \\ 0 & \text{si } X \in L_R, \end{cases}$$

y observamos que se cumple $\phi^2 = -\mathbb{I} + \alpha \otimes R$. Así, como en la proposición 3.1.2, se tiene $\alpha \circ \phi = 0$ y $\phi(R) = 0$. Para probar (1) debemos comprobar la igualdad $g(\phi(X), \phi(Y)) =$

$g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$. Para ello, supongamos primero $X, Y \in \ker \alpha \cap TM$. Por la compatibilidad de g_K tenemos entonces

$$g(X, Y) = g_K(J(X, 0), J(X, 0)) = g(\phi(X), \phi(Y)).$$

Ahora, si $X \in \ker \alpha \cap TM$, tenemos $g(X, R) - \alpha(X)\alpha(R) = \alpha(X) - \alpha(X) = 0 = g(\phi(X), \phi(R))$. Por último, obtenemos $g(R, R) - \alpha(R)\alpha(R) = 0 = g(\phi(R), \phi(R))$.

En el caso del cono, para $R = I(r \frac{d}{dr})$, definimos $\hat{\alpha}(X) = \frac{1}{r^2} g_C(R, X)$. La forma α y el tensor estructural ϕ se definen manera totalmente análoga al cilindro. La demostración para el cono resulta ser, entonces, casi idéntica al caso del cilindro. \square

La ventaja de utilizar el cono métrico radica en que podemos calcular la forma casi de contacto α de la siguiente manera. Definamos en el cono una 1-forma $\hat{\alpha}$ mediante

$$\hat{\alpha} = d^c \log r = I(d \log r) = i(\bar{\partial} - \partial) \log r,$$

donde $d^c \beta = I \circ \beta$ para una forma diferencial β de grado 1. De hecho, $\hat{\alpha}$ es la misma forma diferencial definida en la proposición anterior. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} I(d \log r)(R) &= \frac{dr}{r} (-I(R)) = \frac{dr}{r} (r \frac{d}{dr}) = 1 = \hat{\alpha}(R); \\ I(d \log r)(X) &= \frac{dr}{r} (-I(X)) = 0 = \hat{\alpha}(X); \quad \text{si } X \in \ker \alpha; \\ I(d \log r)(r \frac{d}{dr}) &= \frac{dr}{r} (R) = 0 = \hat{\alpha}(r \frac{d}{dr}). \end{aligned}$$

Finalmente se tiene $\alpha = i^* \hat{\alpha}$, donde i es la inmersión de la variedad en su cono métrico.

En la proposición 2.1.6 vimos que el cilindro $M \times \mathbb{R}$ de una variedad de contacto (M, α) es una variedad simpléctica. Es directo constatar que, al revertir los pasos involucrados en la proposición, se obtiene el recíproco. Además, se tiene una simplectización similar para el cono que veremos a continuación.

Proposición 3.3.4. (Simplectización). *Dada una variedad M y una 1-forma diferencial α definida en M . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) (M, α) es una variedad de contacto.
- (2) $(K(M), d(e^t \pi^* \alpha))$ es una variedad simpléctica, donde t representa la coordenada en \mathbb{R} y $\pi : K(M) \rightarrow M$ es la proyección natural.
- (3) $(C(M), d(r^2 \pi^* \alpha))$ es una variedad simpléctica, donde r representa la coordenada en \mathbb{R} y $\pi : C(M) \rightarrow M$ es la proyección natural.

3.3. SIMPLECTIZACIÓN CÓNICA Y CILÍNDRICA

Prueba. Ya hemos probado la equivalencia entre (1) y (2). Probaremos ahora la equivalencia entre (1) y (3). Por un lado, si $\dim M = 2n + 1$, bastará probar que se tiene $\omega^{n+1} \neq 0$. En efecto, un cálculo directo conduce a

$$\omega^{n+1} = (r^2 d\pi^* \alpha + 2r dr \wedge \pi^* \alpha)^{n+1} = nr^{n+2} dr \wedge \pi^* \alpha \wedge (d\pi^* \alpha)^n \neq 0.$$

La implicación contraria se demuestra de manera similar, simplemente revirtiendo los pasos en los cálculos. \square

Nos interesa ahora saber qué estructura tiene el cono métrico de una variedad métrica de contacto, en particular cuando la variedad es de Sasaki. La siguiente proposición nos muestra la relación buscada entre este tipo de variedades y su cono métrico.

Proposición 3.3.5. *Se tiene que (M, ϕ, R, α, g) es una variedad métrica de contacto si y solo si existe una métrica compatible \hat{g} en M de modo que la métrica cónica $g_C = dr^2 + r^2 \hat{g}$ es una métrica asociada en el cono simpléctico $(C(M), \frac{1}{2} d(r^2 \pi^* \alpha))$. Por lo tanto, la variedad métrica de contacto es de Sasaki si y solo si el cono simpléctico es una variedad de Kähler.*

Prueba. Sea la estructura de contacto (ϕ, R, α, g) en M . Tomemos la métrica \hat{g} sobre M dada por $\hat{g} = \frac{g}{2} + \frac{1}{2} \alpha \otimes \alpha$. Al ser g compatible y asociada a α , es decir, al satisfacerse $g(\phi(X), Y) = d\alpha(X, Y)$, resulta que \hat{g} también es compatible y cumple $\hat{g}(\phi(X), Y) = \frac{1}{2} d\alpha(X, Y)$. Por lo tanto, podemos expresar \hat{g} como

$$\hat{g} = \alpha \otimes \alpha - \frac{1}{2} d\alpha \circ (\phi \otimes \mathbb{I}).$$

Si definimos la estructura casi compleja I como en la proposición 3.3.2 y observamos que se cumple $\hat{g}(R, Y) = \alpha(Y)$, tenemos

$$\begin{aligned} g_C(I(X, fr \frac{d}{dr}), (Y, hr \frac{d}{dr})) &= g_C((\phi(X) - fR, \alpha(X)r \frac{d}{dr}), (Y, hr \frac{d}{dr})) \\ &= hr^2 \alpha(X) + r^2 (\frac{1}{2} d\alpha(X, Y) - f\alpha(Y)) \\ &= r dr \wedge \pi^* \alpha(I(X, fr \frac{d}{dr}), (Y, hr \frac{d}{dr})) \\ &\quad - \frac{r^2}{2} \pi^* d\alpha(I(X, fr \frac{d}{dr}), (Y, hr \frac{d}{dr})). \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$g_C \circ (I \otimes \mathbb{I}) = r dr \wedge \pi^* \alpha + \frac{r^2}{2} \pi^* d\alpha = \frac{1}{2} d(r^2 \pi^* \alpha).$$

Además g_C es hermitiana como se vio en la proposición 3.3.2. En particular, si I es integrable, es decir, si (ϕ, R, α, g) es de Sasaki, entonces el cono simpléctico es una variedad de Kähler. Al recordar la igualdad

$$\pi^* \alpha = d^c \log r = i(\bar{\partial} - \partial) \log r,$$

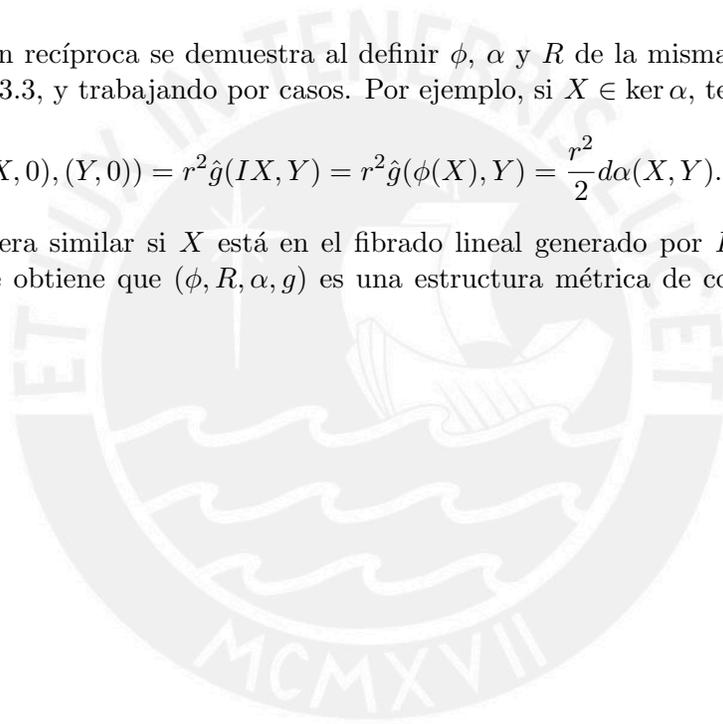
la forma de Kähler ω en el cono puede calcularse mediante

$$\omega = d(r^2 d^c \log r) = d(r d^c r) = \frac{1}{2} d d^c r^2 = i \partial \bar{\partial} r^2.$$

La afirmación recíproca se demuestra al definir ϕ , α y R de la misma manera que en la proposición 3.3.3, y trabajando por casos. Por ejemplo, si $X \in \ker \alpha$, tenemos

$$g_C(I(X, 0), (Y, 0)) = r^2 \hat{g}(IX, Y) = r^2 \hat{g}(\phi(X), Y) = \frac{r^2}{2} d\alpha(X, Y).$$

Se procede de manera similar si X está en el fibrado lineal generado por R . Al definir $g = 2\hat{g} - \alpha \otimes \alpha$, se obtiene que (ϕ, R, α, g) es una estructura métrica de contacto sobre M . □



Capítulo 4

Estructuras de contacto en variedades de Brieskorn

4.1 Links en hipersuperficies complejas

En esta sección introduciremos el concepto de *link* en una hipersuperficie compleja. Estos están constituidos por la intersección de una variedad algebraica con esferas de radio pequeño alrededor de un punto singular. Si el radio es suficientemente pequeño, veremos que el teorema de fibración de Milnor nos garantiza que la intersección es una variedad diferenciable compacta y conexa. En algunos links es posible construir estructuras de Sasaki como la restricción natural de la estructura en la esfera. Esto será posible, en particular, en las variedades de Brieskorn que surgen como el link asociado a los polinomios de Brieskorn-Pham.

Definición 4.1.1. Sea f un polinomio en $n + 1$ variables complejas $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, de modo que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ no son idénticamente nulas para todo $i = 1, \dots, n + 1$. El conjunto de ceros del polinomio es denotado por V_f y constituye una hipersuperficie compleja en \mathbb{C}^{n+1} . Sea w un punto en V_f y sea $S_\varepsilon^{2n+1}(w)$ la esfera de radio ε centrada en w . La intersección

$$L_f = V_f \cap S_\varepsilon^{2n+1}(w)$$

recibe el nombre de *link* asociado a f de radio ε . En su tratado sobre singularidades en hipersuperficies complejas, Milnor prueba que el link asociado a un polinomio f es una variedad diferenciable compacta. Enunciamos a continuación su famoso teorema que admitimos sin demostración. La teoría que se debe desarrollar para demostrar este resultado

es extensa y puede consultarse en el texto original de Milnor [Mi68].

Teorema 4.1.2. (Fibración de Milnor). *Sea f un polinomio en $n + 1$ variables complejas $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que sus derivadas parciales de primer orden no son idénticamente nulas. Sea $L_f(\varepsilon)$ el link de radio ε asociado a f y sea $w \in V_f$, donde V_f es el conjunto de ceros de f . Entonces existe δ tal que para todo $\varepsilon < \delta$ la aplicación $\phi : S_\varepsilon^{2n+1} - L_f(\varepsilon) \rightarrow S^1$ dada por*

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

es la aplicación proyección de un fibrado diferenciable, donde en particular cada fibra es diferenciable. Si w es un punto singular de f , cada fibra F tiene el tipo de homotopía de un bouquet de esferas de dimensión n y es homotópicamente equivalente a su clausura \bar{F} . El borde $\partial\bar{F}$ es igual a $L_f(\varepsilon)$ y es una variedad compacta, diferenciable, $(n - 2)$ -conexa de dimensión $2n - 1$.

No será necesario utilizar el teorema de fibración de Milnor en su totalidad. Será suficiente notar que este teorema garantiza que el link asociado a un polinomio f es una variedad diferenciable y compacta de dimensión $2n - 1$. De hecho, es posible construir estructuras de Sasaki en una gran variedad de links; en particular construiremos este tipo de estructura en las llamadas variedades de Brieskorn.

Definición 4.1.3. Un **polinomio de Brieskorn-Pham** en $n + 1$ variables complejas $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ es un polinomio de la forma $p(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$, donde a_1, \dots, a_{n+1} son enteros positivos. Un link de radio unitario asociado a un polinomio de Brieskorn-Pham recibe el nombre de **variedad de Brieskorn**. Las variedades de Brieskorn son diferenciables y compactas. Además una variedad de Brieskorn de dimensión $2n - 1$ es subvariedad de la esfera unitaria S^{2n+1} . Si una variedad de Brieskorn B de dimensión $2n - 1$ es el link unitario asociado al polinomio $p(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$, entonces la denotaremos por $B^{2n-1}(a_1, \dots, a_{n+1})$.

Ejemplo 4.1.4. Veremos a continuación un ejemplo de variedad de Brieskorn de dimensión 1. Estas representan curvas de dimensión 1 en \mathbb{R}^4 . Consideremos $B^1(2, 1)$ como subvariedad compleja de \mathbb{C}^2 . Un punto $(z_1, z_2) \in B^1(2, 1)$ debe cumplir las ecuaciones

$$z_1^2 + z_2 = 0,$$

$$z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1.$$

Si consideramos las variables reales (x_1, x_2, y_1, y_2) , donde $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, tenemos que para $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in B^1(2, 1)$ se cumple

$$x_1^2 - y_1^2 + x_2 = 0;$$

4.1. LINKS EN HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS

$$\begin{aligned} 2x_1y_1 + y_2 &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Al reemplazar y simplificar, obtenemos

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 + x_1^2 + y_1^2 = 1.$$

Observamos que $B^1(2, 1)$ es una curva regular cerrada en \mathbb{R}^4 parametrizada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\lambda} \cos \theta \\ x_2 = \lambda \cos 2\theta \\ y_1 = \sqrt{\lambda} \sin \theta \\ y_2 = -\lambda \sin 2\theta, \end{cases}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ejemplo 4.1.5. $B^3(1, 1, 1)$ es una hipersuperficie compleja de dimensión real 3 en \mathbb{C}^3 . En efecto, como en el ejemplo anterior, un punto $(z_1, z_2, z_3) \in B^3(1, 1, 1)$ cumple

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 &= 1. \end{aligned}$$

Así, si $z_j = x_j + iy_j$, para $j = 1, 2, 3$, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, al reemplazar y completar cuadrados llegamos a

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \left(y_1 + \frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y_2^2 = \frac{1}{2}.$$

No existe una parametrización global para $B^3(1, 1, 1)$. Sin embargo, es posible cubrirla con parametrizaciones locales. Por ejemplo, en el abierto de $B^3(1, 1, 1)$ dado por su intersección con

$$U = \{(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6; x_i > 0, y_i > 0, i = 1, 2, 3\}$$

podemos expresar una parametrización mediante

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \theta - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \vartheta \sin \theta \\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \vartheta \sin \theta \\ x_3 = -\frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \theta \\ y_1 = \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \eta - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \vartheta \sin \eta \\ y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \vartheta \sin \eta \\ y_3 = -\frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \eta, \end{cases}$$

donde $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\theta \in (\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi)$ y $\eta \in (\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{8}}, \pi)$.

Nuestro interés principal será obtener estructuras de Sasaki en las variedades de Brieskorn. Para ello, podemos valernos del siguiente resultado de Okumura dado en [Ok68], en cuak afirma que bajo ciertas condiciones la restricción de una estructura métrica de contacto a una subvariedad es una estructura métrica de contacto sobre la misma.

Proposición 4.1.6. (Okumura). *Sea (M, ϕ, R, α, g) una variedad de Sasaki y N una subvariedad diferenciable inmersa en M . Sea $i : N \rightarrow M$ la inclusión de N en M . Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones.*

(OK1) *El campo vectorial R restringido a N , denotado por $R|_N$, es tangente a N .*

(OK2) *$\phi(T_p N) \subset T_p N$ para todo punto $p \in N$.*

Entonces $(N, \phi|_N, R|_N, i^ \alpha, i^* g)$, donde $\phi|_N$ representa la restricción de ϕ a la subvariedad N , es una variedad de Sasaki.*

Prueba. Las condiciones (OK1) y (OK2) garantizan que las restricciones ϕ_N y R_N están bien definidas en N . También quedan bien definidos $i^* \alpha$ y $i^* g$. Además, por tratarse de restricciones a una subvariedad inmersa, R_N , ϕ_N , $i^* \alpha$ y $i^* g$ satisfacen las mismas relaciones que ϕ , R , α y g . Por lo tanto constituyen una estructura de Sasaki en N . \square

Notemos que podríamos haber usado esta propiedad para demostrar que la esfera de dimensión impar es de Sasaki. Sin embargo, resultó ilustrativo construir a estructura de Sasaki de manera explícita. Esto resultará particularmente útil porque las variedades de Brieskorn heredarán la estructura de Sasaki de la esfera en donde están inmersas. Sin embargo, en general, la estructura de Sasaki que construimos en el ejemplo 3.2.6 no cumplirá (OK1) y (OK2) con respecto a la variedad de Brieskorn. No obstante, será posible deformar la estructura de manera que las condiciones se cumplan, como veremos en la siguiente sección.

4.2 Deformaciones de estructuras de Sasaki

En esta sección se desarrollará el método seguido por Takahashi en [Ta78] para construir nuevas estructuras de Sasaki en una variedad a partir de una estructura de Sasaki pre-existente. El proceso recibe el nombre de deformación de estructuras de Sasaki, y es de particular utilidad para construir estructuras de este tipo en subvariedades inmersas. En

particular, el método nos permitirá construir estructuras de Sasaki en las variedades de Brieskorn.

Proposición 4.2.1. (Takahashi) *Sea (M, ϕ, R, α, g) una variedad de Sasaki y sea S un campo vectorial diferenciable sobre M que satisface las siguientes condiciones.*

$$(TK1) \quad \mathcal{L}_S g = 0$$

$$(TK2) \quad [S, R] = 0$$

$$(TK3) \quad 1 + \alpha(S) > 0$$

Entonces la estructura $(\tilde{\phi}, \tilde{R}, \tilde{\alpha}, \tilde{g})$ dada por

$$\tilde{R} = R + S,$$

$$\tilde{\alpha} = (1 + \alpha(S))^{-1} \alpha,$$

$$\tilde{\phi}(X) = \phi(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}),$$

$$\tilde{g}(X, Y) = (1 + \alpha(S))^{-1} g(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}, Y - \tilde{\alpha}(Y)\tilde{R}) + \tilde{\alpha}(X)\tilde{\alpha}(Y),$$

donde X e Y son campos vectoriales diferenciables en M , es también una estructura de Sasaki. Diremos que $(\tilde{\phi}, \tilde{R}, \tilde{\alpha}, \tilde{g})$ es la **estructura deformada** asociada a (ϕ, R, α, g) generada por campo vectorial S .

Prueba. Es evidente que $\tilde{\alpha}$ es una forma de contacto sobre M . Para demostrar que la estructura $(\tilde{\phi}, \tilde{R}, \tilde{\alpha}, \tilde{g})$ es de Sasaki bastará verificar una a una las siguientes condiciones:

$$(1) \quad \tilde{\alpha}(\tilde{R}) = 1,$$

$$(2) \quad \mathcal{L}_{\tilde{R}} \tilde{\alpha} = 0,$$

$$(3) \quad \tilde{\phi}^2(X) = -X + \tilde{\alpha}(X)\tilde{R},$$

$$(4) \quad \tilde{g}(\tilde{\phi}(X), \tilde{\phi}(Y)) = \tilde{g}(X, Y) - \tilde{\alpha}(X)\tilde{\alpha}(Y),$$

$$(5) \quad d\tilde{\alpha}(X, Y) = \tilde{g}(\tilde{\phi}(X), Y),$$

$$(6) \quad N_{\tilde{\phi}}(X, Y) = d\tilde{\alpha}(X, Y)\tilde{R},$$

donde X e Y son campos vectoriales diferenciables arbitrarios en M y $N_{\tilde{\phi}}$ es la torsión de Nijenhuis de $\tilde{\phi}$. La demostración de la proposición se realizará paso a paso.

Demostración de (1): Evidente de la definición.

Demostración de (2): Demostraremos primero que se cumple $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi = 0$ y $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\alpha = 0$. Como en la demostración de la proposición 3.2.3, y al usar (TK1), se observa que se tiene

$$(\mathcal{L}_{\tilde{R}}d\alpha)(X, Y) = g((\mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi)(X), Y).$$

Si tomamos $X \in \ker \alpha$, se comprueba de manera directa que se cumple $(i_{\tilde{R}}d\alpha)(X) = d\alpha(X, \tilde{R}) = \alpha(N_{\phi}(X, \tilde{R})) = 0$. Un argumento similar muestra $(i_{\tilde{R}}d\alpha)(\tilde{R}) = 0$. Entonces se obtiene $\mathcal{L}_{\tilde{R}}d\alpha = d(i_{\tilde{R}}d\alpha) = 0$. Así, inferimos $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi = 0$. Por la linealidad de ϕ y por (TK2), conseguimos

$$0 = (\mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi^2)(X) = \mathcal{L}_{\tilde{R}}\alpha(X)\tilde{R} + \alpha(X)\underbrace{[\tilde{R}, \tilde{R}]}_0;$$

por lo tanto, se satisface $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\alpha = 0$. Se desprende la igualdad $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\tilde{\alpha} = (1 + \alpha(S))^{-1}\mathcal{L}_{\tilde{R}}\alpha = 0$.

Demostración de (3): Tomemos $X \in \ker \tilde{\alpha} = \ker \alpha$. En tal caso, y como se cumple $\tilde{\phi}(X) = \phi(X)$ y $\phi(X) \in \ker \tilde{\alpha}$, tenemos $\tilde{\phi}^2(X) = \phi^2(X) = -X$. Por otro lado, tenemos $\tilde{\phi}(\tilde{R}) = \phi(\tilde{R} - \tilde{\alpha}(\tilde{R})\tilde{R}) = \phi(\tilde{R} - \tilde{R}) = 0$. Con ello el tensor $\tilde{\phi}$ queda determinado.

Demostración de (4): Debemos probar que \tilde{g} es compatible con $\tilde{\phi}$. Observemos que se cumple

$$\tilde{g}(\tilde{\phi}(X), \tilde{\phi}(Y)) = (1 + \alpha(S))^{-1}g(\tilde{\phi}(X) - \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(X)), \tilde{\phi}(Y) - \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(Y))) + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(X))\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(Y)).$$

Al cumplirse $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\phi}(X), \tilde{\phi}(Y)) &= (1 + \alpha(S))^{-1}g(\tilde{\phi}(X), \tilde{\phi}(Y)) = (1 + \alpha(S))^{-1}g(\phi(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}), \phi(Y - \tilde{\alpha}(Y)\tilde{R})) \\ &= (1 + \alpha(S))^{-1} \left[g(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}, Y - \tilde{\alpha}(Y)\tilde{R}) - \alpha(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R})\alpha(Y - \tilde{\alpha}(Y)\tilde{R}) \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la compatibilidad de g . Ahora, notemos que al satisfacerse $\alpha(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}) = \alpha(X) - \tilde{\alpha}(X)\alpha(R + S) = \alpha(X) - \tilde{\alpha}(X) - \alpha(S)\tilde{\alpha}(X) = 0$, tenemos

$$\tilde{g}(\tilde{\phi}(X), \tilde{\phi}(Y)) = (1 + \alpha(S))^{-1}g(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}, Y - \tilde{\alpha}(Y)\tilde{R}) = \tilde{g}(X, Y) - \tilde{\alpha}(X)\tilde{\alpha}(Y).$$

Así, \tilde{g} resulta compatible con $\tilde{\phi}$.

Demostración de (5): Tomemos $X, Y \in \ker \alpha$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} d\tilde{\alpha}(X, Y) &= -\tilde{\alpha}([X, Y]) = -(1 + \alpha(S))^{-1}\alpha([X, Y]) = (1 + \alpha(S))^{-1}g(\phi(X), Y) \\ &= (1 + \alpha(S))^{-1}g(\tilde{\phi}(X), Y) = \tilde{g}(\tilde{\phi}(X), Y). \end{aligned}$$

4.2. DEFORMACIONES DE ESTRUCTURAS DE SASAKI

Por otro lado, para $X \in \ker \alpha$, se tiene $d\tilde{\alpha}(\tilde{R}, X) = -\tilde{\alpha}([\tilde{R}, X]) = (\mathcal{L}_{\tilde{R}}\tilde{\alpha})(X) = 0 = \tilde{g}(\tilde{\phi}(\tilde{R}), X)$.

Demostración de (6): Tomemos $X, Y \in \ker \alpha$. Entonces, dado que se cumple $\phi(X) = \tilde{\phi}(X)$ y $\phi(Y) = \tilde{\phi}(Y)$, tenemos

$$\begin{aligned} N_{\tilde{\phi}}(X, Y) &= -\tilde{\phi}^2[X, Y] + \tilde{\phi}([\phi(X), Y]) + \tilde{\phi}([X, \phi(Y)]) - [\phi(X), \phi(Y)] \\ &= N_{\phi}(X, Y) - \alpha([X, Y])R - \tilde{\alpha}([X, Y])\tilde{R} - \phi(\tilde{\alpha}([\phi(X), Y])\tilde{R} + \tilde{\alpha}([X, \phi(Y)])\tilde{R}) \\ &= -\tilde{\alpha}([X, Y])\tilde{R} + (1 + \alpha(S))^{-1}N^{(2)}(X, Y)\phi(\tilde{R}) = d\tilde{\alpha}(X, Y)\tilde{R}, \end{aligned}$$

donde $N^{(2)}$ es el tensor definido en la proposición 3.2.2. Por otro lado, si $X \in \ker \alpha$, entonces se verifica

$$N_{\tilde{\phi}}(\tilde{R}, X) = [\tilde{R}, X] - \tilde{\phi}([\tilde{R}, \phi(X)]) = \tilde{\phi}((\mathcal{L}_{\tilde{R}}\tilde{\phi})(X)).$$

Bastará probar entonces que se tiene $\mathcal{L}_{\tilde{R}}\tilde{\phi} = 0$. En efecto, se cumple

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\tilde{R}}\tilde{\phi})(X) &= \mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}) - \tilde{\phi}([\tilde{R}, X]) \\ &= \underbrace{(\mathcal{L}_{\tilde{R}}\phi)(X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R})}_0 + \phi([\tilde{R}, X - \tilde{\alpha}(X)\tilde{R}]) - \phi([\tilde{R}, X]) - \underbrace{\tilde{\alpha}([\tilde{R}, X])\tilde{R}}_0 = 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.2.2. Tomemos coordenadas $(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})$ en \mathbb{R}^{2n+2} . Recordemos que en la esfera $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ la estructura de Sasaki usual (ϕ, R, α, g) está dada por

$$\phi = \pi_*J,$$

donde $\pi : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow S^{2n+1}$ es la proyección radial,

$$R = \sum_{i=1}^{n+1} \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

por la restricción a la esfera de

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$$

y la restricción de la métrica euclideana g en \mathbb{R}^{2n+2} . Los campos vectoriales de la forma $x_k \frac{\partial}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ son campos de Killing de g . Así, al definir

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} (r_i - 1) \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

donde los r_i son números reales, observamos directamente que se cumplen (TK1) y (TK2). Si exigimos

$$\sum_{i=1}^{n+1} r_i(x_i^2 + y_i^2) > 0,$$

se cumplen las condiciones de la proposición 4.2.1 y por lo tanto la estructura deformada asociada a S será también una estructura de Sasaki sobre la esfera.

4.3 Estructuras de Sasaki en variedades de Brieskorn

En esta sección utilizaremos el resultado de Takahashi para mostrar que existe una estructura deformada en la esfera que induce una estructura de Sasaki sobre las variedades de Brieskorn inmersas en ella. Con este resultado, procederemos a dar ejemplos explícitos de tales estructuras.

Proposición 4.3.1. *Toda variedad de Brieskorn admite una estructura de Sasaki.*

Prueba. Consideremos el polinomio de Brieskorn-Pham dado por $F(z) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$, donde $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$. La variedad de Brieskorn asociada está dada por $B = B^{2n-1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = S^{2n+1} \cap F^{-1}(0)$. En el ejemplo 4.2.2 se vio que

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{A}{a_j} - 1 \right) \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

donde A es el mínimo común múltiplo de los enteros a_j , genera una deformación de la estructura de Sasaki usual en la esfera, que denotamos por (ϕ, R, α, g) . Tomamos en S^{2n+1} la deformación de la estructura de Sasaki asociada al campo vectorial S , y denotamos a la estructura deformada por $(\tilde{\phi}, \tilde{R}, \tilde{\alpha}, \tilde{g})$. En este caso podemos expresar \tilde{R} y $\tilde{\alpha}$ por

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{A}{a_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n K^{-1}(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

donde $K = \sum_{i=1}^n \frac{A}{a_i}(x_i^2 + y_i^2)$. Probaremos que la restricción de esta estructura deformada a la variedad de Brieskorn es una estructura de Sasaki. Para ello bastará probar las condiciones (OK1) y (OK2). Para comprobar (OK1), por el teorema de la preimagen,

verificar $\tilde{R}_p(F) = 0$ para todo $p \in B$. Sea P la parte real de F y Q la parte imaginaria. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} R(P) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{A}{a_i} \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (z_1^{a_1} + \cdots + z_{n+1}^{a_{n+1}} + \bar{z}_1^{a_1} + \cdots + \bar{z}_n^{a_n}) \\ &= -\frac{A}{2i} (z_1^{a_1} + \cdots + z_{n+1}^{a_{n+1}} - \bar{z}_1^{a_1} - \cdots - \bar{z}_n^{a_n}) = -AQ. \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene $R(Q) = AP$. Así, para $p \in B$, se obtiene $R_p(P + iQ) = -AQ(p) + iAP(p) = 0$.

Denotemos al conjunto de ceros de F mediante Z_F . Denotemos también por $(\hat{\phi}, \hat{R}, \hat{\alpha}, \hat{g})$ a la estructura deformada en la esfera restringida a B . Como F está definido por una ecuación holomorfa, si tomamos $X \in T_p Z_F$, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el teorema de la preimagen, tenemos que se cumple

$$J_p(X)(F) = (F_* J)_p(X) = i(F_*)_p(X) = 0,$$

donde J es la estructura compleja en \mathbb{C}^{n+1} . Por lo tanto $J(TZ_F) \subset TZ_F$. Además, en $\ker \hat{\alpha}$ se cumple $\hat{\phi}|_{\ker \hat{\alpha}} = \tilde{\phi}|_{\ker \hat{\alpha}} = \phi|_{\ker \hat{\alpha}} = J|_{\ker \hat{\alpha}}$. En un punto $p \in B$, se tiene $\ker \hat{\alpha}_p = \ker \alpha_p \cap T_p Z_F$. Como $\tilde{\phi}(\tilde{R}) = \hat{\phi}(\hat{R}) = 0$, basta probar la inclusión $\tilde{\phi} \ker \hat{\alpha} \subset \ker \hat{\alpha}$. Notemos que se tiene $\tilde{\phi}(\ker \alpha) \subset \ker \alpha$. Como J deja invariante a TZ_F , deja invariante también $\ker \hat{\alpha}$. Queda probada la condición (OK2) y con ello que la estructura $(\hat{\phi}, \hat{R}, \hat{\alpha}, \hat{g})$ es de Sasaki en B . \square

Ejemplo 4.3.2. En este ejemplo usaremos nuestra construcción de la estructura de Sasaki en la esfera dada en el ejemplo 3.1.7 para expresar en coordenadas la estructura deformada construida en la proposición anterior. En consecuencia, podremos expresar estructuras de Sasaki explícitamente para una variedad de Brieskorn dada. Sea $B = B^{2n-1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ una variedad de Brieskorn, y definamos $w_i = \frac{A}{a_i}$, donde A es el mínimo común múltiplo de a_1, \dots, a_{n+1} . Si $(\tilde{\phi}, \tilde{R}, \tilde{\alpha}, g)$ es la estructura deformada definida en la proposición anterior, ya sabemos que las expresiones de $\tilde{\alpha}$ y \tilde{R} en coordenadas (x_1, \dots, x_{2n+2}) de \mathbb{R}^{2n+2} están dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \sum_{i=1}^{n+1} w_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \\ \tilde{\alpha} &= \sum_{i=1}^{n+1} K^{-1} (x_i dy_i - y_i dx_i), \end{aligned}$$

donde $K = \sum_{i=1}^{n+1} w_i (x_i^2 + y_i^2)$.

En uso de la estructura ϕ definida en el ejemplo 3.1.7, podemos expresar $\tilde{\phi}$. Sean g la métrica euclidea y J la estructura casi compleja usual en \mathbb{R}^{2n+2} . Entonces en un punto $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in B$ se tiene

$$g\left(\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = g\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - g(x, J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right))x - \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(J(\tilde{R}) - g(x, J(\tilde{R}))x, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right).$$

Si tomamos en cuenta que se cumplen $\tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{y_i}{K}$, $J(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ y $g(X, JR) = K$, obtenemos

$$g\left(\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \frac{y_i(wx)_j}{K}$$

con $(wx)_j = w_j x_j$. De manera análoga, al poner $(wy)_j = w_j y_j$ y con δ_{ij} el tensor de Kronecker, calculamos

$$\begin{aligned} g\left(\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right) &= -\delta_{ij} + \frac{y_i(wy)_j}{K}; \\ g\left(\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) &= \delta_{ij} - \frac{x_i(wx)_j}{K}; \\ g\left(\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) &= -\frac{x_i(wy)_j}{K}. \end{aligned}$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_x &= \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{y_i(wx)_j}{K} dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(-\delta_{ij} + \frac{y_i(wy)_j}{K}\right) dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &+ \left(\delta_{ij} - \frac{x_i(wx)_j}{K}\right) dy_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{x_i(wy)_j}{K} dy_i \otimes \frac{\partial}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos en coordenadas la métrica deformada \tilde{g} . Para ello evaluamos en $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in B$ para obtener

$$\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{K} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\tilde{R}, \frac{\partial}{\partial x_j} - \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\tilde{R}\right) + \tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

De $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \tilde{R}\right) = -(wy)_i$ y $g(\tilde{R}, \tilde{R}) = \sum_{i=1}^{n+1} ((wx)_i^2 + (wy)_i^2)$ obtenemos

$$\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{K} \delta_{ij} - \frac{y_i y_j}{K^2} (w_i + w_j - 1) + \frac{y_i y_j}{K^3} \sum_{k=1}^{n+1} ((wx)_k^2 + (wy)_k^2).$$

4.3. ESTRUCTURAS DE SASAKI EN VARIEDADES DE BRIESKORN

De manera análoga se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right) &= g \left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{x_j y_i}{K^2} (w_i + w_j - 1) - \frac{x_j y_i}{K^3} \sum_{k=1}^{n+1} ((wx)_k^2 + (wy)_k^2); \\ \tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right) &= \frac{1}{K} \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{K^2} (w_i + w_j - 1) + \frac{x_i x_j}{K^3} \sum_{k=1}^{n+1} ((wx)_k^2 + (wy)_k^2). \end{aligned}$$

Con las expresiones anteriores, tenemos a la mano un procedimiento directo para exhibir explícitamente estructuras de Sasaki en una variedad de Brieskorn. Por ejemplo, para $B^3(2, 3, 5)$, tenemos $w_1 = 15$, $w_2 = 10$ y $w_3 = 6$. De este modo logramos

$$K = 15(x_1^2 + y_1^2) + 10(x_2^2 + y_2^2) + 6(x_3^2 + y_3^2),$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^3 (x_i dy_i - y_i dx_i),$$

$$\tilde{R} = 15 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + 10 \left(x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + 6 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Hallar todos los elementos de las matrices que representan a $\tilde{\phi}$ y \tilde{g} en coordenadas más trabajoso, ya que se debe escribir 16 elementos diferentes en cada caso. Entre otros, tenemos

$$g \left(\tilde{\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{10x_2 y_1}{K},$$

$$\tilde{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -\frac{24y_1 y_2}{K^2} + \frac{y_1 y_2}{K^3} (100(x_1^2 + y_1^2) + 225(x_2^2 + y_2^2) + 36(x_3^2 + y_3^2)).$$

Ejemplo 4.3.3. Consideremos el caso $\hat{B} = B^{2n-1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ en donde $a = a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1}$. Tomemos la acción $U(1)$ como en el ejemplo 2.2.8 y definamos $\mathcal{Z} = \hat{B}/U(1)$. Al ser el polinomio de Brieskorn homogéneo, \mathcal{Z} es una subvariedad de $\mathbb{C}P^n$.

$$\begin{array}{ccc} \hat{B} & \xrightarrow{i} & S^{2n+1} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}P^n. \end{array}$$

Si $i : \hat{B} \rightarrow S^{2n+1}$ es la inclusión de \hat{B} en la esfera y α es la forma de contacto usual en la esfera, es fácil ver que $i^* \alpha$ es la forma de contacto en \hat{B} , ya que en este caso la deformación es trivial, y es igual a $i \partial \bar{\partial} \log |z|^2$ como se vio en el ejemplo 2.2.8. Así, si $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ es la proyección natural, $d(i^* \alpha) \circ \pi$ es igual a la forma de Fubini Study ω_{FS} restringida a la

hipersuperficie \mathcal{Z} . Por lo tanto la acción $U(1)$ determina una fibración de Boothby-Wang de B sobre una variedad de Kahler, lo cual confirma que \hat{B} es de Sasaki.

El argumento anterior puede generalizarse para una variedad de Brieskorn $B = B^{2n-1}(a_1, \dots, a_{n+1})$, donde a_1, \dots, a_{n+1} no son necesariamente todos iguales. Para ello, al poner $w_i = \frac{A}{a_i}$, con A igual al mínimo común múltiplo de a_1, \dots, a_{n+1} , definimos una acción σ de \mathbb{C} sobre \mathbb{C}^{n+1} mediante

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ \lambda \times (z_1, \dots, z_{n+1}) &\longmapsto (\lambda^{w_1} z_1, \dots, \lambda^{w_{n+1}} z_{n+1}). \end{aligned}$$

El cociente $\mathbb{C}P(w) = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}$ bajo la acción σ , donde $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$, recibe el nombre de **espacio proyectivo complejo ponderado**. Es importante observar, sin embargo, que $\mathbb{C}P(\mathbf{w})$ no es una variedad diferenciable; de hecho, no es siquiera una variedad topológica. Por ejemplo, basta observar que, en los vértices, las vecindades no son difeomorfas a \mathbb{C}^n , sino al cociente de \mathbb{C}^n/G , donde G es un grupo finito. Una entidad de este tipo recibe el nombre de **orbifold**.

No es difícil demostrar que, para todo elemento en $[z] = [(z_1, \dots, z_{n+1})] \in \mathbb{C}P(w)$, existe un representante $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ de modo que se tenga $[u] = [z]$ y $u \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Por ello, podemos construir $\mathbb{C}P(w)$ como el cociente de una acción $U(1)$ sobre S^{2n+1} dada por

$$\begin{aligned} s : U(1) \times S^{2n+1} &\longrightarrow S^{2n+1} \\ e^{i\theta} \times (z_1, \dots, z_{n+1}) &\longmapsto (e^{i\theta w_1} z_1, \dots, e^{i\theta w_{n+1}} z_{n+1}). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $\mathbb{C}P(\mathbf{w})$ es un orbifold de Kähler, en el sentido que admite una 2-forma similar a la forma de Fubini-Study. Sin embargo, esta forma no es, en general, definida positiva. Existen subespacios de $\mathbb{C}P(\mathbf{w})$ donde la 2-forma se anula, por lo cual una posible métrica asociada también se anularía en dichos subespacios. No exploraremos esta métrica singular de tipo Fubini-Study en este trabajo. Referimos al lector interesado a [RT11].

Si definimos $\mathcal{Z} = B/U(1) \subset \mathbb{C}P(w)$ con la acción definida arriba y si $f(z_1, \dots, z_{n+1}) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ es el polinomio de Brieskorn-Pham asociado a B , entonces \mathcal{Z} es una hipersuperficie en $\mathbb{C}P(w)$ dada por

$$\mathcal{Z} = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}P(w), f(z_1, \dots, z_{n+1}) = 0\}.$$

La hipersuperficie \mathcal{Z} está bien definida ya que se tiene $f(\lambda^{w_1} z_1, \dots, \lambda^{w_{n+1}} z_{n+1}) = \lambda^A f(z_1, \dots, z_{n+1})$. Sin embargo, esta no es necesariamente una variedad diferenciable dado que podría heredar las singularidades del orbifold $\mathbb{C}P(\mathbf{w})$. Esto evidentemente genera

problemas si uno desea usar el teorema de Boothby-Wang para garantizar la existencia de fibrados principales del círculo cuyos espacios totales sean variedades de Brieskorn. En este sentido, no es extender de manera directa el diagrama dado arriba al nivel de orbifolds. Para lograr esta extensión debemos trabajar en una categoría más general. En este escenario, la 2-forma simpléctica es representada como una clase racional (no necesariamente integral) y se debe apelar a una extensión del teorema de Boothby-Wang diseñada para encajar dentro de esta nueva situación. El lector interesado puede encontrar una discusión en detalle de este punto de vista en [BG08]. Nosotros preferimos apelar a la construcción de estructuras Sasaki vía el cono métrico para atacar este problema.

Ejemplo 4.3.4. En este ejemplo construiremos la estructura deformada de Takashi utilizando el cono métrico introducido en la sección 3.3. Como $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es el cono métrico de S^{2n+1} , nosotros estamos interesados en definir una forma de Fubini-Study en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ que genere la estructura de Takahashi en la esfera, con el método introducido en la proposición 3.3.5. Siguiendo de cerca a Sparks en [Sp11], definiremos $\tilde{r} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\tilde{r}^2(\rho_1, \dots, \rho_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^{2/w_i}$$

donde $z_i = \rho_i e^{i\theta_i}$. Afirmamos que \tilde{r}^2 es una función estrictamente plurisubarmónica en \mathbb{C}^{n+1} . En efecto, el elemento H_{jk} de la matriz Hessiana H de \tilde{r}^2 está dado por

$$H_{jk} = \delta_{jk} \frac{z_j^{1/w_j} z_k^{1/w_k}}{w_j w_k};$$

es decir, H es una matriz diagonal con entradas positivas. Por lo tanto H es definida positiva.

Definimos la forma de Fubini-Study ponderada en \mathbb{C}^{n+1} mediante $\tilde{\omega}_{FS} = i\bar{\partial}\tilde{r}^2$. Entonces, para

$$\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}$$

definimos

$$\tilde{R} = J\left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \rho_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

donde $z_i = x_i + iy_i$. Podemos hallar la forma de contacto en la esfera como en la proposición 3.3.3:

$$\tilde{\alpha} = i(\bar{\partial} - \partial) \log \tilde{r} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{w_i} \rho_i^{2/w_i - 1} d\theta_i.$$

Así, se observa directamente la igualdad $\tilde{\alpha}(\tilde{R}) = 1$. Ahora, denotemos por la forma de contacto usual en la esfera mediante α . Recordemos que se tiene $X \in \ker \alpha$ si y solo si $J(X)$ es tangente a M . Lo mismo sucede para un campo vectorial $X \in \ker \tilde{\alpha}$. Al determinar la misma estructura de contacto, entonces existe una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se tiene $\tilde{\alpha} = f\alpha$. Evaluando en \tilde{R} se obtiene

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha(\tilde{R})},$$

que es justamente la forma de contacto deformada de Takahashi.

Ahora definimos

$$\tilde{\phi}(X) = \begin{cases} J(X) & \text{si } X \in \ker \tilde{\alpha} \\ 0 & \text{si } X \in L_{\tilde{R}} \end{cases}$$

y $\tilde{g}(X, Y) = d\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(X), Y)$. De este modo hemos obtenido, con un método distinto, la estructura deformada de Takahashi. Esta estructura es de Sasaki, ya que ω_{FS} es una forma de Kähler en el cono.

Refiriéndonos al ejemplo 4.3.3, cabe mencionar que la estructura de Kähler en \mathbb{C}^{n+1} es heredada por el espacio proyectivo complejo ponderado a través de la acción \mathbb{C}^* inducida por el campo vectorial de Euler $\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}$. Un ejercicio interesante consiste en exhibir las estructuras de contacto que se generan en B a partir de las distintas generalizaciones de la métrica de Fubini-Study, obteniendo así diversidad de estructuras de Sasaki en las variedades de Brieskorn diferentes a la estructura de Takahashi. También se podría trabajar en exhibir explícitamente la forma simpléctica racional generada en \mathcal{Z} y la forma de Kähler en $\mathbb{C}P(\mathbf{w})$ en coordenadas locales.

Referencias

- [Be01] Berndt, R. (2001). *An introduction to symplectic geometry*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [Bl02] Blair, D. E. (2002). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*. Boston: Birkhauser.
- [BG08] Boyer, C. P., & Galicki, K. (2008). *Sasakian geometry*. New York: Oxford University Press.
- [DS01] Da Silva, A. C. (2001). *Lectures on symplectic geometry*. Berlin: Springer.
- [DP77] Do Carmo, M. D., & Palis, J. (1977). *Geometry and Topology*. Springer Verlag.
- [DF84] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., & Novikov, S. P. (1984). *Modern geometry: methods and applications*. New York: Springer-Verlag.
- [EG80] Eguchi, T., Gilkey, P. B., & Hanson, A. J. (1980). *Gravitation, gauge theories and differential geometry*. Amsterdam, Netherlands: North-Holland Pub.
- [Ge08] Geiges, H. (2008). *An introduction to contact topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [Jo00] Joyce, D. D. (2000). *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford: Oxford University Press.
- [KN63] Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry*. New York: Interscience.
- [Ko56] Kobayashi, S. (1956). Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group. *Tohoku Mathematical Journal Tohoku Math. J.*, 8(1), 29-45.

- [Mi68] Milnor, J. W. (1968). *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [Mo64] Morimoto, A. (1964). *On normal almost contact structures with a regularity*. Tohoku Mathematical Journal Tohoku Math. J., 16(1), 90-104.
- [Mo07] Moroianu, A. (2007). *Lectures on Kähler geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [Ok68] Okumura, M. (1968). *On contact metric immersion*. Kodai Math. Sem. Rep. Kodai Mathematical Seminar Reports, 20(4), 389-409.
- [Pa57] Palais, R. S. (1957). *A global formulation of the Lie theory of transportation groups*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [PM82] Palis J. P., & Melo, W. D. (1982). *Geometric theory of dynamical systems: An introduction*. New York: Springer-Verlag.
- [RT11] Ross, J., & Thomas, R.P. *Weighted projective embeddings, stability of orbifolds and constant scalar curvature Kähler metrics*. J. Diff. Geom. 88: 109-159.
- [SH62] Sasaki, S., & Hatakeyama, Y. (1962). *On differentiable manifolds with contact metric structures*. J. Math. Soc. Japan Journal of the Mathematical Society of Japan, 14(3), 249-271.
- [Sp11] Sparks, J. (2011). *Sasaki-Einstein manifolds*. Surveys in Differential Geometry, 16(1), 265-324.
- [Ta78] Takahashi, T. (1978). *Deformations of Sasakian structures and its application to the Brieskorn manifolds*. Tohoku Mathematical Journal Tohoku Math. J., 30(1), 37-43.