PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

"Valuación de opciones para retornos de Lévy simétricos"

Tesis para optar al grado de Magister en Matemáticas Aplicadas con mención en Procesos Estocásticos

presentado por:

Rodrigo Grandez Vargas
Bachiller en Ingeniería Económica

Asesor: Dr. Jonathan Farfán Vargas

Lima – Perú
2016

L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.

JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830)
Prefacio a la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822).

Mathematics seems to endow one with something like a new sense.

CHARLES ROBERT DARWIN (1809-1882)

To surrender to ignorance and call it God has always been premature, and it remains premature today.

ISAAC ASIMOV (1920-1992)

Índice

Resumen

El trabajo consiste en el estudio de un modelo de valuación de opciones europeas de compra, el cual asume que la dinámica del precio del activo financiero subyacente está caracterizada por un proceso de Lévy simétrico. El modelo busca capturar la evidencia empírica mostrada por los precios de los activos financieros. Este modelo es trabajado en [12], artículo que será seguido de cerca. La particularidad del modelo consiste en incorporar procesos estocásticos de salto con distribuciones marginales simétricas, lo cual reproduce de manera más fiel la realidad.

En este trabajo, primero se revisa en detalle los principales resultados obtenidos en [12], más precisamente, se revisa la definición de medida martingala equivalente natural en el contexto del modelo. Se estudia la existencia y unicidad de la medida martingala equivalente natural (MMEN). Luego, se usa esta medida para obtener el precio de la opción y calcular los parámetros de la distribución simétrica bajo esta medida MMEN y así obtener una fórmula generalizada tipo Black-Scholes. Además, se realizan aplicaciones con procesos de Lévy específicos tales como Varianza Gamma Simétrico, Normal Inverso Gaussiano Simétrico. Segundo, para extender las aplicaciones proporcionadas en [12], se propone una aplicación adicional. Así, se elige el proceso de Meixner Simétrico (MS) para describir la dinámica del activo subyacente y obtener el precio de la opción de compra europea en el contexto del modelo MS. Finalmente, se realiza simulaciones numéricas del precio de las opciones europeas bajo los tres modelos estudiados, para luego comparar dichos precios con el precio obtenido en el modelo clásico de Black-Scholes.

Introducción

En la actualidad el modelo más usado para valuar opciones en finanzas es el modelo de Black-Scholes, el cual se obtiene cuando el precio del activo financiero es descrito mediante un proceso Browniano Geométrico y el logaritmo de los retornos del activo se distribuye como una normal. Sin embargo, existe una extensa literatura tales como los de [7] y [20] que mediante técnicas empíricas muestran que las distribuciones empíricas de dichos retornos frecuentemente no son del tipo normal, aunque son simétricas con colas diferentes a una normal. Diversos trabajos en valuación de opciones han utilizado procesos de Lévy para describir la dinámica del activo subyacente. Así por ejemplo, en [3] y [8] se propone el uso de procesos de salto puro de actividad infinita para caracterizar el movimiento del precio del activo financiero. Por su parte, en [4] se propone un modelo de valuación de opciones basado en procesos de difusión de saltos con riesgo de salto sistemático para mostrar que el desplome de la bolsa de valores de todo el mundo en 1987 fue no predecible. Por otro lado, en [11] se desarrolla un modelo de valuación de opciones de compra en tiempo discreto basado en distribuciones marginales log-simétricas para los retornos y muestra que el modelo de Black-Scholes subestima el precio de la opción. De esta forma, hay una extensa literatura que proponen diferentes modelos para valuar opciones haciendo diferentes supuestos sobre el proceso de precios del activo subyacente, sobre el proceso de la tasa de interés y sobre la aleatoriedad en la volatilidad de los retornos. Considerando las evidencias empíricas mostradas en diversos trabajos, asumir una distribución simétrica para los retornos de los activos financieros es más apropiado.

Así, en este trabajo estudiamos un modelo de valuación de opciones europeas de compra en tiempo continuo, en el cual se relaja el supuesto de normalidad de los retornos del activo y se remplaza con un supuesto más general de simetría, pero se mantienen dos de los supuestos del modelo clásico de Black-Sholes: la independencia y la estacionariedad de los retornos. Estos supuestos conducen a elegir procesos estocásticos de Lévy simétricos para describir la dinámica de precios del activo. Más precisamente, el proceso de precios del activo es dado por $\{S_t = S_0 e^{Y_t}; t \geq 0\}$, donde $\{Y_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy simétrico. En este contexto, definimos un proceso de Lévy simétrico como un proceso que en cada instante de tiempo tiene una distribución simétrica, es decir, para cada $t > 0$, la variable aleatoria Y_t es simétrica.

Otro concepto importante con lo que trataremos es el de medida equivalente natural (MEN). En términos generales, el concepto matemático de cambio de medida es relevante para la teoría de valuación de opciones. Formalmente, dos medidas P y Q son equivalentes si: $P(A) = 1 \Leftrightarrow Q(A) = 1$, es decir, ambas definen el mismo conjunto de posibles escenarios. En el presente trabajo, si Y es un proceso de Lévy simétrico bajo P, definimos una medida equivalente Q como natural si, Y_t sigue siendo un proceso de Levy simétrico y la distribución de Y_t permanece dentro de la familia de distribuciones simétricas bajo la nueva medida Q. Adicionalmente, al requerimiento de que Q sea natural, se agrega una condición adicional, la cual es que el proceso de precios descontados $\{e^{-rt}S_t; t \geq 0\}$ sea una martingala bajo la medida Q, en cuyo caso a la medida Q se le denomina medida martingala equivalente natural (MMEN).

Cabe resaltar que la medida equivalente Q no es única. Matemáticamente, hay muchas distribuciones equivalentes a la original P. Sin embargo, para el caso de procesos de Levy con distribuciones simétricas hay una única MMEN. La existencia de una medida martingala equivalente está relacionado a la ausencia de arbitraje, mientras que la unicidad de la misma está relacionado a la completitud del mercado. La existencia de una MME nos permite valuar el precio de una opción de un activo riesgoso, no con respecto a la medida P, sino con respecto a la medida Q mediante el cálculo de los valores esperados de los pagos descontados de la opción. En términos económicos, cuando trabajamos bajo

Q se dice que estamos en un mundo de riesgo-neutral porque en dicho mundo el valor esperado de los retornos de todo activo riesgoso es igual al retorno libre de riesgo de la cuenta bancaria e^{rt}. Formalmente, se denota:

$$E_Q[S_t|F_0] = e^{rt}S_0.$$

En síntesis, los objetivos de este trabajo son:

1) Primero, fundamentar la existencia y la unicidad de una medida equivalente natural (MEN).

2) Segundo, fundamentar la unicidad de una medida martingala equivalente natural (MMEN).

3) Tercero, fundamentar el modelo propuesto en [12] para valuar opciones europeas de compra.

4) Finalmente, replicar las aplicaciones del enfoque teórico desarrollado en [12], presentar una aplicación adicional usando el proceso de Meixner Simétrico y luego comparar el precio de la opción europea de compra obtenido mediante este modelo con el modelo clásico de Black-Scholes.

La organización de este trabajo es la siguiente.

En el **capítulo 1**, se presentan algunas definiciones y resultados clásicos sobre procesos de Lévy y se estudian algunos resultados principales de transformación de medida para procesos de Lévy que nos permitirán encontrar la medida equivalente bajo la cual el proceso de Lévy continua preservando las características de un proceso de Lévy. De esta forma, sentaremos las bases para la búsqueda formal de la MEN.

En el **capítulo 2** se caracteriza un proceso de Lévy simétrico y se realiza la prueba de existencia y unicidad de la MEN. La prueba de existencia se divide en dos casos interesantes. Primero, si el proceso tiene un componente gaussiano, entonces es posible obtener una MEN. La existencia de esta medida se caracteriza cambiando el parámetro de posición de la distribución simétrica de Y_1. Segundo, si el proceso es de salto puro o, en otras palabras, no tiene el componente gaussiano entonces se obtiene una MEN siempre y cuando la medida de Lévy bajo la medida de probabilidad inicial sea equivalente a la medida de Lebesgue. Si asumimos que se cumple dicha condición entonces una MEN se obtiene cambiando el parámetro de escala de la distribución de Y_1. Asimismo, la prueba de unicidad depende de dos casos particulares. Primero, si el proceso tiene un componente gaussiano entonces se encuentra una única MEN. Finalmente, se realiza un estudio detallado de la unicidad de la MEN estudio de unicidad también toma una forma dicotómica. Estos resultados de unicidad y existencia son de vital importancia para el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el **capítulo 3**, se agrega una condición a la medida equivalente natural, la cual es que sea martingala, es decir una medida tal que el proceso de precios $e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$, sea una martingala. Cuando se agrega esta condición a la MEN, se consigue que la medida martingala equivalente natural (MMEN) sea única en los dos casos mencionados líneas arriba. A partir de esta nueva medida, se obtiene la fórmula de valuación de opciones de compra europea usando cambio de numerario. De esta forma se obtiene una fórmula cerrada de valuación de opciones cuando los retornos del proceso de precios es modelado con un proceso de Lévy simétrico.

En el **capítulo 4**, aplicaremos los resultados del capítulo anterior para obtener una fórmula de valuación de opciones europeas de compra cuando el proceso de precios de los activos es un proceso de Varianza Gamma Simétrico (VGS). Un resultado importante en este capítulo es que la fórmula de Black-Scholes es un caso particular de la fórmula obtenida bajo el modelo VGS. Este resultado se obtiene porque el exceso de curtosis es un parámetro que se puede controlar en dicho modelo. Posteriormente, se realizan simulaciones del precio de la opción obtenido mediante el modelo VGS y se compara con el obtenido en el modelo clásico de Black-Scholes.

En el **capítulo 5**, aplicaremos los resultados del capítulo 3 para obtener una fórmula de valuación de opciones europeas de compra cuando el proceso de precios de los activos es modelado como un proceso Normal Inverso Gaussiano Simétrico (NIGS). Al igual que en el capítulo anterior, en este capítulo, la fórmula de Black-Scholes es un caso particular de la fórmula obtenida bajo el modelo NIGS. Este resultado se obtiene porque el exceso de curtosis es un parámetro que se puede controlar en el modelo NIGS. Asimismo, se realizan simulaciones del precio de la opción obtenido mediante este modelo y se compara con el obtenido en el modelo clásico de Black-Scholes.

Finalmente en el **capítulo 6**, aplicaremos los resultados del capítulo 3 para obtener una fórmula de valuación de opciones de compra cuando el proceso de precios de los activos es un proceso de Meixner Simétrico (MS). Un resultado importante en este capítulo es que la fórmula de Black-Scholes es un caso particular de la fórmula obtenida bajo el modelo MS. Este resultado se obtiene porque el exceso de curtosis es un parámetro que se puede controlar en este modelo. Asimismo, se realizan simulaciones del precio de la opción obtenido mediante este modelo y se compara con el obtenido en el modelo clásico de Black-Scholes .

Capítulo 1

Procesos de Lévy

En el presente capítulo, salvo se mencione lo contrario, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ representará un espacio de probabilidad donde todos los procesos estocásticos con los que trabajemos estarán definidos. Para cada tiempo $t \geq 0$, la variable aleatoria $\cdot \to Y(t, \cdot)$ será denotada por Y_t y $Y(t)$. Además, cada proceso estocástico $Y : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ será denotado por (Y_t) y $\{Y_t\,;\, t \geq 0\}$. Por otro lado, en este capítulo enunciaremos algunos resultados importantes de procesos de Lévy, que serán necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. Las pruebas de dichos resultados serán omitidas en el presente trabajo, pero muchos de ellos pueden encontrarse en [1].

1.1. Funciones características

A continuación recordaremos algunos conceptos y resultados importantes de funciones características que se utilizarán a lo largo del presente trabajo. Asimismo, fijaremos algunas terminologías que se serán usadas.

Definición 1.1. *Sea X una variable aleatoria. La funcion característica $\psi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de X es definida por*

$$\psi_X(u) = E[\exp(iuX)] = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} dL_X(x)\,,$$

donde L_X *es la ley de* X *(es decir,* $L_X(A) = P(X \in A)$*, para todo* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [1]*).*

Observaciones 1.

a) La función característica de una variable aleatoria caracteriza completamente su distribución. Es decir, si dos variables aleatorias tienen la misma función característica entonces tiene la misma ley.

b) La función característica de una variable aleatoria es siempre continua y verifica que $\psi_X(0) = 1$.

Proposición 1.2. *Sean* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *variables aleatorias independientes. La función característica de* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *es el producto de las funciones características de las variables aleatorias* $X_1, X_2, \cdots, X_n$*:*

$$\psi_{S_n}(u) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(u), \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Demostración.

$$\psi_{S_n}(u) = E[\exp(iuS_n)] = E[\exp(iu(X_1+\cdots+X_n))] = E[\exp(iuX_1)\exp(iuX_2)\cdots\exp(iuX_n)]$$

como las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son independientes, se tiene que

$$\psi_{S_n}(u) = E[\exp(iuX_1)]E[\exp(iuX_2)]\cdots E[\exp(iuX_n)] = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(u)\,.$$

□

Sea X una variable aleatoria con función característica ψ_X. Dada la observación 1.a) hecha anteriormente, $\psi_X(0) = 1$ y ψ_X es continua en $u = 0$, entonces $\psi_X(u) \neq 0$ en un

[1] Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a la menor σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a los abiertos de $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es conocida como el σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$. Los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se denominan borelianos de $\mathbb{R}$ y cualquier medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se denomina medida de Borel o medida boreliana.

entorno de $u = 0$. Por tanto, podemos definir una versión continua del logaritmo de ψ_X. Así, existe una única función continua ϕ_X tal que

$$\phi_X(0) = 0 \quad y \quad \psi_X(u) = e^{\phi_X(u)}, \quad \text{en un entorno de } u = 0. \tag{1.2}$$

Definición 1.3. *La función ϕ_X es llamada función generatriz de cumulantes de X.*

Los cumulantes de X son definidos (en caso existan las derivadas de ϕ_X) mediante:

$$k_n(X) = \frac{1}{i^n}\frac{\partial^n \phi_X}{\partial u^n}(0) \tag{1.3}$$

Los cumulantes están relacionados con los momentos de X. En efecto, si asumimos que los momentos de X, $m_k = E[X^k]$ existen, para $k = 0, 1, 2....n$, el enésimo cumulante puede ser expresado como una función polinomial de m_k.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} k_1(X) &= m_1(X) = E[X], \\ k_2(X) &= m_2(X) - m_1(X)^2 = Var(X), \\ k_3(X) &= m_3(X) - 3m_2(X)m_1(X) + 2m_1(X)^3. \end{aligned}$$

Observaciones 2.

a) Versiones de cumulantes libres de escalas pueden ser obtenidas normalizando k_n por la enésima potencia de la desviación estándar

$$s(X) = \frac{k_3}{(k_2)^{3/2}}, \qquad c(X) = \frac{k_4}{(k_2)^2}.$$

El número $s(X)$ es llamado coeficiente de sesgo de X y la variable aleatoria X tiene sesgo positivo si $s(X) > 0$. El número $c(X)$ es llamado curtosis de X y la variable aleatoria X es leptocúrtica o de cola pesada si $c(X) > 0$.

b) Si X tiene distribución normal, ϕ_X es un polinomio de segundo grado, en consecuencia para $n \geq 3$, $k_n = 0$. Este resultado permite ver que $s(X)$, $c(X)$ y otros cumulantes de mayor orden son una medida de desviación de normalidad.

c) Por construcción, el sesgo y la curtosis son invariantes al cambio de escala:

$$s(\lambda X) = s(X) \quad c(\lambda X) = c(X), \quad \text{para todo } \lambda > 0\,.$$

El siguiente resultado se puede deducir facilmente de (1.1).

Proposición 1.4. *La función generatriz de cumulantes de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de cada función generatriz de cumulantes. Es decir, si* $X_1, X_2, ..., X_n$ *son variables aleatorias independientes, entonces :*

$$\phi_{X_1+X_2+...+X_n}(u) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(u)\,.$$

1.2. Divisibilidad infinita

La convolución de medidas de probabilidad será útil para caracterizar la propiedad de divisibilidad infinita de una variable aleatoria.

Definición 1.5. *Sean* L_1 *y* L_2 *dos medidas de probabilidad que pertenecen a* $\mathbb{M}_1(\mathbb{R})$[2], *la convolución de* L_1 *y* L_2 *es la función* $L_1 * L_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$(L_1 * L_2)(A) = \int_{\mathbb{R}} L_1(A - x) L_2(dx)\,, \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,, \tag{1.4}$$

donde $A - x = \{y - x : y \in A\}$.

Teorema 1.6. *La convolución* $L_1 * L_2$ *es una medida de probabilidad en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

[2] Denotamos como $\mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las medidas borelianas de probabilidad en $\mathbb{R}$.

Demostración. Se conoce que $(L_1 * L_2)(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Además si $A = \mathbb{R}$, se cumple que $(L_1 * L_2)(A) = 1$. Ahora tomemos una sucesión $(A_n; n \in \mathbb{N})$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $(A_n - x; n \in \mathbb{N})$ también es de conjuntos disjuntos. Así se tiene que

$$\begin{aligned}
L_1 * L_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int_{\mathbb{R}} L_1\left[\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - x\right] L_2(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} L_1\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n - x)\right] L_2(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} L_1(A_n - x) L_2(dx) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} L_1(A_n - x) L_2(dx) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} L_1 * L_2(A_n)
\end{aligned}$$

El intercambio de la integral por la sumatoria se justifica a través del teorema de la convergencia monótona. □

Teorema 1.7. *Si f es una función de Borel*[3] *acotada en $\mathbb{R}$, entonces para cualesquiera $L_i \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$, se cumple que:*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)(L_1 * L_2)(dy) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y) L_1(dy) * L_2(dx);$
2. $L_1 * L_2 = L_2 * L_1;$
3. $(L_1 * L_2) * L_3 = L_1 * (L_2 * L_3).$

Demostración. Ver [1], p. 22-23. □

Definición 1.8. *Para cada medida de probabilidad $L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$, sea $L^{*^n} = L * ... * L$ (n veces). Decimos que L_0 tiene raíz n-ésima bajo convolución, si existe $L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ una medida, para la cual $(L)^{*^n} = L_0$. Si existe tal medida, será denotada por $L_0^{1/n}$.*

[3] Una función de Borel o función boreliana es una función medible respecto al σ-álgebra de Borel.

A continuación se presenta la definición, asi como propiedades y algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles.

Definición 1.9. *Sean $L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ una distribución y X una variable aleatoria.*

1. *Se dice que L es infinitamente divisible si, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen variables aleatorias $Y_1^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ independientes e idénticamente distribuidas tales que la suma*

$$Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)} \tag{1.5}$$

tiene distribución L.

2. *Se dice que X es infinitamente divisible, si su distribución es infinitamente divisible.*

Proposición 1.10. *Sean X una variable aleatoria, L_X la ley de X y ψ_X la función característica de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es infinitamente divisible.*
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, L_X tiene raíz n-ésima bajo convolución, la cual es a su vez la distribución de una variable aleatoria.*
3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, ψ_X tiene raíz n-ésima, la cual a su vez es la función característica de una variable aleatoria.*

Demostración. Demostraremos primero (1.) $\Rightarrow$ (2.). Dado $n \in \mathbb{N}$, existen variables aleatorias $Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ i.i.d. tales que $L_X \sim Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$. Es claro que la distribución común de las $Y_j^{(n)}$ es la convolución raíz n-ésima requerida.
Ahora probaremos que (2.) $\Rightarrow$ (3.). Sea Y una variable aleatoria con distribución $(L_X)^{1/n}$. Se tiene de la Proposición 1.7, que para todo u $\in \mathbb{R}$,

$$\psi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{iu(y_1+\cdots+y_n)} (L_X)^{1/n}(dy_1) \cdots (L_X)^{1/n}(dy_n) = (\psi_Y(u))^n ,$$

donde $\psi_Y(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy}(L_X)^{1/n}(dy)$.

Finalmente (3.) $\Rightarrow$ (1.). Sean $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \cdots, Y_n^{(n)}$ copias independientes de la variable aleatoria cuya función característica es la raíz enésima de $\psi_X(u)$. Luego, se tiene

$$E[e^{iuX}] = E[e^{iuY_1^{(n)}}] \cdots E[e^{iuY_n^{(n)}}] = E[e^{iu(Y_1^{(n)}+Y_2^{(n)}+\cdots+Y_n^{(n)})}].$$

De acuerdo a la observación 1.a), deducimos que $Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$ tiene la misma distribución que X. □

La proposición anterior sugiere una forma equivalente de definir divisibilidad infinita de una distribución.

Corolario 1.11. *$L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ es infinitamente divisible si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $L^{1/n} \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\psi_L(x) = [\psi_{L^{1/n}}(x)]^n, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. La prueba es inmediata a partir de la proposición anterior. □

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles. Los ejemplos corresponden a la distribución normal, la distribución de Poisson y la distribución de Poisson compuesta. Es importante resaltar que la función característica tiene un rol fundamental en la propiedad de divisibilidad infinita.

Ejemplo 2.

Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Entonces X es infinitamente divisible. En efecto, la función característica de X es

$$\psi_X(u) = \exp\left[iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right], \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$[\psi_X(u)]^{1/n} = \exp\left[iu\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma^2 u^2}{2n}\right],$$

con lo cual, X es infinitamente divisible tomando $Y_j^{(n)}, j = 1, 2, \cdots, n$ i.i.d. con distribución común $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$.

Ejemplo 3.

Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Entonces, X es infinitamente divisible. En efecto, la función característica de X es

$$\psi_X(u) = \exp[\lambda(e^{iu} - 1)]\,, \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$[\psi_X(u)]^{1/n} = \exp\left[\frac{\lambda}{n}(e^{iu} - 1)\right],$$

con lo cual, X es infinitamente divisible tomando $Y_j^{(n)}, j = 1, 2, \cdots, n$ i.i.d. con distribución común $Poisson(\frac{\lambda}{n})$.

Definición 1.12. *Sean $\xi = (\xi(n); n \in \mathbb{N})$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común L_ξ y N una variable aleatoria independiente de ξ tal que $N \sim Poisson(\lambda)$. Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson compuesta con parámetro $\lambda > 0$ y L_ξ si*

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi(n)\,.$$

En este caso, utilizaremos la notación $X \sim PC(\lambda, L_\xi)$.

Proposición 1.13. *La función característica de $X \sim PC(\lambda, L_\xi)$ es*

$$\psi_X(u) = \exp\left[\int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1)\lambda L_\xi(dy)\right], \quad \textit{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $\psi_\xi(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} L_\xi(dy)$ la función característica de cada $\xi(n)$. Luego, por independencia encontramos que

$$\begin{aligned}
\psi_X(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[e^{(iu\xi(1)+\ldots+iu\xi(n))}|N=n\big]P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\big[e^{(iu\xi(1)+\ldots+iu\xi(n))}|N=n\big]e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\psi_\xi(u))^n}{n!} \\
&= \exp[\lambda(\psi_\xi(u)-1)].
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.14. *Si X es una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson compuesta con parámetros $\lambda > 0$ y L_ξ, entonces X es infinitamente divisible.*

Demostración. Se verifica que X es infinitamente divisible tomando $Y_j^{(n)}, j = 1, 2, 3,$ i.i.d. con distribución común $PC(\frac{\lambda}{n}, L_\xi)$. □

A continuación revisaremos el Teorema de Paúl Lévy y A. Ya. Khintchine, que fue establecido en 1930, el cual da una caracterización de variables aleatorias infinitamente divisibles a través de sus funciones características. Pero, primero es necesario presentar una definición importante.

Definición 1.15. *Sea ν una medida de Borel definida sobre $\mathbb{R} - \{0\} = \{y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$. Se dice que ν^* es una medida de Lévy si*

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (y^2 \wedge 1)\nu(dy) < \infty. \tag{1.6}$$

Proposición 1.16. *Si L es una medida de Lévy y $0 < \epsilon \leq 1$, entonces se cumple que*

$$L((-\epsilon, \epsilon)^c) < \infty, \quad \textit{para todo } \epsilon > 0.$$

Demostración. Se tiene que

$$\int_{(-\epsilon,\epsilon)^c} y^2 L(dy) \leq \int_{(-\epsilon,\epsilon)^c} (y^2 \wedge 1) L(dy) \leq \int_{\mathbb{R}-\{0\}} (y^2 \wedge 1) L(dy) < \infty.$$

□

Proposición 1.17. *Toda medida de Lévy en $\mathbb{R} - \{0\}$ es σ-finita*[4]

Demostración. La prueba es inmediata a partir de la Proposición 1.16. □

Existen caracterizaciones alternativas para (1.6), siendo una de ellas

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} \nu(dy) < \infty. \tag{1.7}$$

Proposición 1.18. *Las condiciones (1.6) y (1.7) son equivalentes.*

Demostración. Basta verificar que para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|y|^2}{1+|y|^2} \leq |y|^2 \wedge 1 \leq 2\frac{|y|^2}{1+|y|^2}.$$

□

Teorema 1.19 (Lévy-Khintchine)**.** *Sea $L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$.*

1. *Si L es infinitamente divisible, entonces*

$$\psi(u) = \exp\left[iu\mu - \frac{c^2u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left[e^{iuy} - 1 - iuy1_D(y)\right]\nu(dy)\right], \quad u \in \mathbb{R}; \tag{1.8}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, ν es una medida de Lévy en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $D = \{y \in \mathbb{R}; |y| \leq 1\}$.

2. *La representación de $\psi(u)$ en (1.8) mediante μ, c, y ν es única.*

[4] Sea $(S, \mathcal{F})$ un espacio medible, una medida L en $(S, \mathcal{F})$ es σ-finita si existe una sucesión $(A_n; n \in \mathbb{N})$ en $\mathcal{F}$ tal que $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $L(A_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. *Recíprocamente, si* $c \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *y* ν *es una medida de Lévy, entonces existe una distribución infinitamente divisible* $L \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$ *cuya función característica está dada por (1.8).*

Demostración. Ver [1], p. 61-62. □

Sea X una variable aleatoria infinitamente divisible. Entonces (por el resultado anterior) su función característica se puede escribir como

$$\psi_X(u) = e^{\Lambda(u)}, \tag{1.9}$$

donde

$$\Lambda(u) = iu\mu - \frac{c^2u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} [e^{iuy} - 1 - iuy1_D(y)]\nu(dy), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.20. *La función* $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es conocida como símbolo de Lévy de* X.

Definición 1.21. *La terna* (μ, c, ν) *del Teorema de Lévy-Khintchine es conocida como terna generadora de* L.

1.3. Definición y propiedades básicas de los procesos de Lévy

Definición 1.22. *Sea* $Y = \{Y_t \,;\, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico definido en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Se dice que* Y *es un proceso de Lévy si se cumplen las siguientes condiciones*

1. $Y_0 = 0$ *c.s.;*

2. Y *tiene incrementos independientes, es decir, para tiempos* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$, *las variables aleatorias*

$$Y(t_1), Y(t_2) - Y(t_1), \cdots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

son independientes;

3. *Y tiene incrementos estacionarios, es decir, para cada par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, las variables aleatorias*

$$Y_t - Y_s \quad y \quad Y_{t-s} - Y_0 = Y_{t-s}$$

tienen la misma distribución;

4. *Hay un $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $P[\Omega_0] = 1$ tal que, para cada $\omega \in \Omega_0$, la función $t \to Y_t(\omega)$ es continua por la derecha y tiene límites por la izquierda.*

Proposición 1.23. *Sea Y un proceso de Lévy. Entonces, para cada $t \geq 0$, Y_t es infinitamente divisible.*

Demostración. Ver [1], p. 43. □

Lema 1.24. *Si $H = \{H_t; t \geq 0\}$ es un proceso estocástico continuo en probabilidad*[5] *entonces la función $t \to \psi_{H_t}(u)$ es continua para todo $u \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Ver [1], p. 44. □

Proposición 1.25. *Sea Y un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$. Entonces, existe una función continua $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$\psi_{Y_t}(u) = E[e^{iuY_t}] = e^{t\Lambda(u)}, \quad \textit{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

La función Λ es llamada el exponente característico de Y. Note que Λ es el símbolo de Lévy de Y_1.

Demostración. Ver [1], p. 44-45. □

[5] Para cada $a > 0$ y cada $s \geq 0$, $\lim_{t \to s} P(|Y_t - Y_s| > a) = 0$.

Cabe resaltar que el único grado de libertad que nosotros tenemos para especificar un proceso de Lévy es mediante la especificación de la distribución de Y_t para un solo tiempo (por ejemplo $t = 1$).

El siguiente resultado es importante en la teoría de procesos de Levy y es conocido como la representacion de Lévy-Khintchine para procesos de Lévy.

Teorema 1.26.

1. *Si Y es un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ entonces*

$$E[e^{iuY_t}] = \exp\left[t\left(i\mu u - \frac{c^2u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left[e^{iuy} - 1 - iuy1_{|y|\leq 1}(y)\right]\nu(dx)\right)\right], \quad (1.10)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ y ν es una medida de Lévy en $\mathbb{R} - \{0\}$. La terna μ, c y ν está únicamente determinado por Y.

2. *Si $\mu \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ y ν es una medida de Lévy, entonces existe un proceso de Lévy Y que satisface (1.10). Dicho proceso Y es único en Ley.*

A la terna (μ, c, ν) se le denomina terna generadora del proceso Y y algunas veces se le llama a Y como el proceso generado por (μ, c, ν).

Demostración. Ver [18], p. 65. □

Proposición 1.27. *Sea Y un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ con terna característica (μ, c, ν). Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Para algún $t > 0$ el n-ésimo momento de Y_t, $E[|Y_t|^n]$ es finito.*

2. *Para todo $t > 0$, el n-ésimo momento de Y_t, $E[|Y_t|^n]$ es finito.*

3. $\int_{|y|\geq 1} |y|^n \nu(dy) < \infty$.

En este caso los momentos de Y_t pueden ser obtenidos a partir de su función característica por derivación. En particular, la varianza de Y_t está dada por

$$Var(Y_t) = t\left(c^2 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy)\right). \tag{1.11}$$

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en [17], p. 103-104. □

1.4. Saltos de un proceso de Lévy, medida de salto y medida de intensidad

Definición 1.28. *Sea Y un proceso de Lévy con terna característica (μ, c, ν). Se define el salto del proceso Y en el instante $t \geq 0$, como $\Delta Y(t) = Y(t) - Y(t-)$, donde $Y(t-) = \text{lím}_{s\uparrow t} Y(s)$. Asimismo, se define el proceso de salto $\Delta Y = \{\Delta Y(t); t \geq 0\}$. Si $\sup_{t\geq 0} |\Delta Y(t)| \leq C < \infty$ c.s. donde $C \in \mathbb{R}$, diremos que el proceso Y tiene saltos acotados.*

Proposición 1.29. *Sea Y un proceso de Lévy con saltos acotados. Entonces, $E[|Y(t)|^m] < \infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Ver [16], p. 14-15. □

En lugar de explorar todos los saltos ΔY de un proceso de Lévy Y, resulta más favorable contar los saltos del proceso que tengan un cierto tamaño. Sea $\mathcal{B}_0$, la familia de borelianos $U \subset \mathbb{R}$ cuya clausura $\bar{U}$ no contiene a $\{0\}$. Para $0 \leq t < \infty$ y $U \in \mathcal{B}_0$, nos interesa describir y estudiar las propiedades de

$$N(t, U) = \#\{0 \leq s \leq t; \Delta Y(s) \in U\}.$$

Definición 1.30. *Sea Y un proceso de Lévy, la medida de salto se define como*

$$N : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_0 \;\rightarrow\; \mathbb{N}$$

$$(w,t,U) \quad \to \quad N(w,t,U) = \sum_{0\le s\le t} 1_U(\Delta Y_s(w)).$$

$N(w,t,U) = N(t,U)$ representa el número de saltos de tamaño $\Delta(Y_s) \in U$ que ocurren antes del tiempo t. La forma diferencial de esta medida se escribe como $N(dt,dz)$.

Proposición 1.31. *La medida $N(t,U)$ es finita para todo $U \in \mathcal{B}_0$.*

Demostración. Ver [5], p. 1-2. □

Corolario 1.32. *La función de conjuntos $U \to N(\omega,t,U)$ define una medida σ-finita para ω y t fijos.*

Demostración. Ver [5], p. 3-4. □

Definición 1.33. *Definimos la medida de intensidad de Y o medida de Lévy como la función $\nu : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{N}$ dada por*

$$\nu(U) = E[N(1,U)]\,,$$

donde $E = E^P$ denota esperanza con respecto a P.

Teorema 1.34. *Si $U \in \mathcal{B}_0$ entonces $N^U = \{N(t,U);\, t \ge 0\}$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = \nu(U)$.*

Demostración. Ver [1], p. 102-103. □

Teorema 1.35. *Si $U_1, U_2, ..., U_m \in \mathcal{B}_0$ y son disjuntos, $N(t,U_1), N(t,U_2), ..., N(t,U_m)$ son independientes.*

Demostración. Ver [1], p. 104-106. □

Definición 1.36. *Sean $(X_n;\, n \in \mathbb{N})$, una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con distribución común $L_{X_n} = L_X$, y $N = \{N(t);\, t \ge 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ e independiente de $(X_n;\, n \in \mathbb{N})$. El proceso de Poisson compuesto, $Z = \{Z(t);\, t \ge 0\}$ se define como*

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X(i), \quad t \ge 0. \tag{1.12}$$

Proposición 1.37. *El proceso de Poisson compuesto es un proceso de Lévy.*

Demostración. Ver [1], p. 50. □

Proposición 1.38. *La medida de intensidad del proceso de Poisson Compuesto Z dada en (1.12) es $\nu = \lambda L_X$.*

Demostración. Ver [1], p. 50. □

El resultado anterior muestra que un proceso de Lévy puede ser representando por un proceso de Poisson compuesto si y solo si su medida de Lévy es finita.

1.5. Integración de Poisson y Descomposición de Lévy-Ito

En esta sección, se considera que el proceso $\{N(t, U);\, t \geq 0\}$ con $U \in \mathcal{B}_0$, es inducido por un proceso de Lévy Y. Es decir,

$$N(t, U) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_U(\Delta Y_s).$$

Asimismo, es importante resaltar que en algunas ocasiones se utilizará ν_U para denotar la restricción sobre U de la medida ν.

Definición 1.39. *Sea Y un proceso de Lévy, $U \in \mathcal{B}_0$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de Borel en U. Entonces, para todo $t > 0$ y $\omega \in \Omega$, definimos la integral de Poisson de f como*

$$\int_U f(x) N(t, dx)(\omega) = \sum_{x \in U} f(x) N(t, \{x\})(\omega).$$

Como $N(t, \{x\}) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta Y(s) = x$ para al menos un $0 \leq s \leq t$, se tiene

$$\int_U f(x) N(t, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} f(\Delta Y_s) 1_U(\Delta Y_s). \tag{1.13}$$

Se puede obtener otra representación útil de las integrales de Poisson utilizando la sucesión de tiempos en que ocurren los saltos del proceso $N(t,U)$. Obviamente, dichos tiempos de salto o llegada son inducidos por el proceso de Lévy Y subyacente.

Definición 1.40. *Si $U \in \mathcal{B}_0$, la sucesión de tiempos de llegada $\tau^U = (\tau_n^U, n \in \mathbb{N})$ se define como*

$$\tau_1^U = inf\{t > 0; \Delta Y(t) \in U\};$$

$$\tau_n^U = inf\{t > \tau_{n-1}^U; \Delta Y(t) \in U\}, \quad para\ n \geq 2\,.$$

Con lo cual, a partir de (1.13), se tiene que

$$\int_U f(x)N(t,dx) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\Delta Y(\tau_n^U))1_{[0,t]}(\tau_n^U). \tag{1.14}$$

A continuación se enunciarán algunas propiedades de la integral de Poisson.

Teorema 1.41. *Sea $U \in \mathcal{B}_0$.*

1. *Para todo $t \geq 0$, $\int_U f(x)N(t,dx)$ tiene una distribución de Poisson compuesta. Además, para todo $u \in \mathbb{R}$,*

$$E\left[\exp\left(iu\int_U f(x)N(t,dx)\right)\right] = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\nu_{f,U}(dx)\right],$$

   donde $\nu_{f,U}(A) = \nu(U \cap f^{-1}(A))$.

2. *Si $f \in L^1(U,\nu_U)$,*

$$E\left[\int_U f(x)N(t,dx)\right] = t\int_U f(x)\nu(dx).$$

3. *Si $f \in L^2(U,\nu_U)$,*

$$Var\left(\left|\int_U f(x)N(t,dx)\right|\right) = t\int_U |f(x)|^2\nu(dx).$$

Demostración. Ver [1], p. 107-108. □

Teorema 1.42. *Sean* U_1 *y* U_2 *conjuntos disjuntos que pertenecen a* $\mathcal{B}_0$. *Entonces, los dos procesos* $J^1 = (J^1(t), t \geq 0)$ *y* $J^2 = (J^2(t), t \geq 0)$ *dados por*

$$J^1(t) = \int_{U_1} xN(t, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta Y(s) 1_{U_1}(\Delta Y_s),$$
$$J^2(t) = \int_{U_2} xN(t, dx) = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta Y(s) 1_{U_2}(\Delta Y_s),$$

son procesos de Lévy independientes.

Demostración. Ver [1], p. 116-117. □

Definición 1.43. *Sean* $U \in \mathcal{B}_0$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función boreliana. La sucesión de variables tamaño de salto* $(Z_f^U(n); n \in \mathbb{N})$ *se define como*

$$Z_f^U(n) = \int_U f(x) N(\tau_n^U, dx) - \int_U f(x) N(\tau_{n-1}^U, dx).$$

Lo que también es equivalente a

$$Z_f^U(n) = f(\Delta Y(\tau_n^U)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 1.44. *Las variables aleatorias* $Z_f^U(n)$, $n \in \mathbb{N}$ *son i.i.d. con distribución común dada por*

$$P(Z_f^U(n) \in A) = \frac{\nu(U \cap f^{-1}(A))}{\nu(U)} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demostración. Ver [1], p. 108. □

Teorema 1.45. $\{\int_U f(x) N(t, dx); t \geq 0\}$ *es un proceso de Poisson compuesto.*

Demostración. Ver [1], p. 109. □

Definición 1.46. *Sea* $U \in \mathcal{B}_0$, $f \in L^1(U, \nu_U)$ *y para todo* $t \geq 0$, *se define la integral de*

Poisson compensada como

$$\int_U f(x)\bar{N}(t,dx) = \int_U f(x)N(t,dx) - t\int_U f(x)\nu(dx).$$

Proposición 1.47. *La integral de Poisson compensada tiene las siguientes propiedades:*

1. *La integral de Poisson compensada es una martingala con respecto a la filtracion natural de $\bar{N}(t,dx)$.*

2. *La función característica de la integral de Poisson compensada es:*

$$\exp\left\{t\int_U [e^{iux} - 1 - iux]\nu_{f,U}(dx)\right\},$$

donde $\nu_{f,U}(A) = \nu(U \cap f^{-1}(A))$ y $u \in \mathbb{R}$.

3. *Si $f \in L^2(U, \nu_U)$ entonces*

$$E\left[\left|\int_U f(x)\bar{N}(t,dx)\right|^2\right] = t\int_U |f(x)|^2\nu(dx).$$

Demostración. Ver [1], p. 109-110. □

Uno de los principales resultados en la teoría de los procesos de Lévy es la descomposición de Lévy-Ito. Este resultado permite descomponer los caminos muestrales de un proceso de Lévy en una parte continua y otra de saltos. Debemos recordar que la medida de saltos N se encuentra asociada a un proceso de Lévy Y, el cual se quiere descomponer.

Definición 1.48. *Para todo $a > 0$, sea el proceso de Poisson Compuesto,*

$$\left\{\int_{|x|\geq a} xN(t,dx); t \geq 0\right\}.$$

Definimos un nuevo proceso estocástico $Y^a = \{Y^a(t); t \geq 0\}$ *dado por*

$$Y^a(t) = Y(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t,dx)\,, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Sean $\{\tau_n; n \in \mathbb{N}\}$, los tiempos de llegada del proceso de Poisson $N(t, A^c)$, $t \geq 0$, donde $A = \{y \in \mathbb{R}; |y| < a\}$. Entonces

$$Y^a(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{si } 0 \leq t < \tau_1\,, \\ Y(\tau_1-) & \text{si } t = \tau_1\,, \\ Y(t) - Y(\tau_1) + Y(\tau_1-) & \text{si } \tau_1 < t < \tau_2\,, \\ Y^a(\tau_2-) & \text{si } t = \tau_2\,, \end{cases}$$

y así recursivamente.

Teorema 1.49. *El proceso estocástico* Y^a *es un proceso de Lévy.*

Demostración. Ver [1], p. 120. □

Definición 1.50. *Para cualquier* $a > 0$*, definimos el proceso de Lévy compensado de eliminación de saltos,* $\hat{Y}^a = \{\hat{Y}^a(t);\, t \geq 0\}$*, donde*

$$\hat{Y}^a(t) = Y^a(t) - E[Y^a(t)].$$

Teorema 1.51. *El proceso compensado de eliminación de saltos es una martingala cadlag*[6] *centrada y cuadrado integrable.*

Demostración. ver [1], p. 120-121. □

A partir de ahora consideraremos $a = 1$ y a los procesos Y^1 e $\hat{Y}^1$ como Y e $\hat{Y}$, respectivamente.

[6] Por cadlag entendemos caminos continuos por la derecha y que tiene límite por la izquierda.

Teorema 1.52. *Para todo* $t \geq 0$,

$$\hat{Y}(t) = Y^c(t) + Y^d(t),$$

donde Y^c *y* Y^d *son procesos de Lévy independientes,* Y^c *tiene caminos muestrales continuos y*

$$Y^d(t) = \int_{|x|<1} x\bar{N}(t, dx).$$

Demostración. ver [1], p. 121-122. □

Proposición 1.53. *Para todo* $t \geq 0$ *y* $u \in \mathbb{R}$

$$E[e^{iuY^d(t)}] = \exp\left\{t \int_{|x|<1} [e^{iux} - 1 - iux]\nu(dx)\right\}.$$

Demostración. Ver [1], p. 123. □

Definición 1.54. *El proceso de Wiener o movimiento browniano estándar es un proceso estocástico* $\{W_t; t \geq 0\}$ *con valores en* $\mathbb{R}$ *definido para todo* $t \in [0, \infty)$ *tal que*

a) $W_0 = 0$ *c.s.;*

b) Los caminos muestrales $t \to W_t$ *son continuos c.s.;*

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$*, tiempos* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n$ *y conjuntos de Borel* $A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$P\Big(W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n\Big) =$$

$$= \int_{A_1} ... \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2)...p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)dx_1...dx_n,$$

donde

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

está definido para todo $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$*. Además* $p(t, x, y)$ *es llamada densidad de transición.*

Teorema 1.55. *Se cumple una de las siguentes condiciones:*

a) $Y_t^c = 0$, *para todo* $t \geq 0$.

b) *Existe* $\sigma > 0$ *tal que* $\frac{Y_t^c}{\sigma}$, $t \geq 0$ *es un movimiento browniano estándar.*

Demostración. Ver [1], p. 123-126. □

Teorema 1.56. *Sea* Y *un proceso de Lévy. Entonces, existen* $b \in \mathbb{R}$, *un movimiento browniano estándar* B_a *(con* $Var(B_a(t)) = at$*) y una medida de Poisson* N *en* $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} - \{0\})$ *independiente de* B_a, *tal que para todo* $t \geq 0$,

$$Y(t) = bt + B_a(t) + \int_{|x|<1} x\bar{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx).$$

Demostración. Este es un resultado directo de combinar los Teoremas 1.52 y 1.55. Los detalles de la prueba están en [1], p. 126.

□

El proceso de Lévy Y puede ser considerado como una variable aleatoria en el espacio $\mathbf{D} = D([0, \infty), \mathbb{R})$ de caminos muestrales cadlag, equipado con su σ-álgebra $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$[7], la cual nos da información de cuales eventos son medibles o no. En otras palabras, que declaraciones pueden ser hechas sobre estos caminos muestrales. La distribución de Y induce una medida de probabilidad P en este espacio de caminos muestrales. Ahora si consideramos otro proceso de Lévy X, este induce otra medida de probabilidad Q en el espacio $\mathbf{D}$. En lo siguiente, analizaremos condiciones bajo las cuales P y Q son medidas de probabilidad equivalentes, en el sentido que ellas definan el mismo conjunto de posibles escenarios:

$$P(A) = 1 \Leftrightarrow Q(A) = 1$$

Si P y Q son equivalentes, entonces los modelos estocásticos X y Y definen el mismo conjunto de posibles evoluciones. La construción de un nuevo proceso en el mismo conjunto de

[7] $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$ es el σ-álgebra generado por $\{y_s\,;\, 0 \leq s < \infty\}$, donde $y_t : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}$ es la función de cordenadas.

sendas mediante la asignación de nuevas probabilidades a eventos, es decir reponderando las probabilidades, es llamado cambio de medida.

Dada una medida de probabilidad P en el espacio $\mathbf{D} = D([0,T),\mathbb{R})$, medidas equivalentes podrían ser generadas de muchas formas. Por ejemplo, dada una variable aleatoria $Z > 0$ en $\mathbf{D}$ con $E^P[Z] = 1$, la nueva medida de probabilidad Q definida mediante un ajuste a la probabilidad de cada $\omega \in \mathbf{D}$ por $Z(\omega)$, es decir,

$$Q(A) = E^P[Z1_A]\,, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_{\mathbf{D}},$$

es equivalente a P. Si restringimos a eventos que ocurren entre 0 y t, entonces cada camino muestral entre 0 y t es reponderado por $Z_t = E[Z|\mathcal{F}_t]$:

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{F_t} = Z_t, \quad \textit{equivalentemente} \quad Q(A) = E^P[Z_t 1_A], \text{para todo } A \in \mathcal{F}_t\,. \tag{1.15}$$

Por construción, Z_t es una martingala estrictamente positiva que verifica $E[Z_t] = 1$. Reciprocamente, cualquier martingala estrictamente positiva $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ con $E[Z_t] = 1$ define una nueva medida en el espacio de caminos muestrales mediante (1.15). Aunque, los procesos definidos por P y Q comparten los mismas sendas, ambos pueden tener diferentes propiedades analíticas y estadísticas. En general, si P define un proceso de Lévy Y, el proceso X definido por Q no es necesariamente un proceso de Lévy, porque podría tener incrementos que no cumplan con ser independientes y/o estacionarios.

En la siguiente sección analizaremos el cambio de medida equivalente para procesos de Lévy.

1.6. Transformación de medida para procesos de Lévy

Por conveniencia, en lo que sigue de esta sección fijaremos un espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$. Denotamos a un proceso de Lévy $\{Y_t\,;\, t \geq 0\}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mediante $((Y_t),P)$. Para cada medida de probabilidad P sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, nos referiremos a un proceso de Lévy con respecto a P como P-proceso de Lévy y a todas las características del proceso antepondremos P para denotar que dichas características están definidas bajo la medida de probabilidad P.

Sea $\mathbf{D} = D([0,\infty), \mathbb{R})$, el espacio de funciones $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuas por la derecha con límite por la izquierda. Sea la función de cordenadas definida por $y_t : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{F}_{\mathbf{D}}$, el σ-álgebra generado por $\{y_s\,;\, 0 \leq s < \infty\}$ y $\mathcal{F}_t$, el σ-álgebra generado por $\{y_s\,;\, 0 \leq s \leq t\}$. Todo proceso de Lévy $((Y_t), P)$ induce una medida de probabilidad $P^{\mathbf{D}}$ sobre $(\mathbf{D}, \mathcal{F}_{\mathbf{D}})$ tal que $((y_t), P^{\mathbf{D}})$ es un proceso de Lévy idéntico en ley con $((Y_t), P)$. Así cuando decimos que $((y_t), P^{\mathbf{D}})$ es un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$, estamos diciendo que $P^{\mathbf{D}}$ es una medida de probabilidad sobre $(\mathbf{D}, \mathcal{F}_{\mathbf{D}})$ y (y_t) es un $P^{\mathbf{D}}$-proceso de Lévy.

En esta sección es importante tener en cuenta que cuando consideramos dos procesos de Lévy $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$, $\mathbf{D}, \mathcal{F}_{\mathbf{D}}$ y (y_t) son comunes y solamente las medidas P y Q son diferentes.

Los siguientes resultados consideran procesos de Lévy de la forma $((y_t), P)$ donde P es una medida de probabilidad sobre $(\mathbf{D}, \mathcal{F}_{\mathbf{D}})$. Además, dichos resultados proporcionan una clase de medidas equivalentes que preserva la estructura del proceso de Lévy.

Antes de enunciar los resultados, recordemos algunas definiciones y notaciones. Sean ρ_1 y ρ_2, dos medidas sobre un espacio medible $(\mathbf{M}, \mathcal{F}_{\mathbf{M}})$.

- Se dice que ρ_1 es absolutamente continua con respecto a ρ_2, si

$$\{B \in \mathcal{F}_{\mathbf{M}};\, \rho_2(B) = 0\} \subset \{B \in \mathcal{F}_{\mathbf{M}};\, \rho_1(B) = 0\}.$$

  Denotaremos esto mediante $\rho_1 \ll \rho_2$.

- En el caso anterior, existe una función medible $g : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\rho_1(A) = \int_A g(\omega)\rho_2(d\omega)\,, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_{\mathbf{M}}.$$

  Esta función es conocida como la derivada de Radon-Nikodym de ρ_1 con respecto a

ρ_2 y es denotada por $\frac{d\rho_1}{d\rho_2}$.

- Se dice que ρ_1 es equivalente a ρ_2, si $\rho_1 \ll \rho_2$ y $\rho_2 \ll \rho_1$. Denotaremos esto mediante $\rho_1 \approx \rho_2$.
- Si $\rho_1 \approx \rho_2$, entonces $\frac{d\rho_1}{d\rho_2}$ es estrictamente positiva y finita ρ_1-c.s. o , equivalentemente, ρ_2-c.s.

Lema 1.57. *Sean $((y_t), P)$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ con terna característica (μ_P, c_P, ν_P). Sean $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible positiva que satisface*

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\frac{\phi(y)}{2}} - 1)^2 \nu_P(dy) < \infty. \tag{1.16}$$

Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) Para cada $t \geq 0$, el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{\substack{0<s\leq t \\ |\Delta y_s|>\varepsilon}} \phi(\Delta y_s) - t \int_{|y|>\varepsilon} \left(e^{\phi(y)} - 1 \right) \nu_P(dy) \right) \tag{1.17}$$

existe y la convergencia es uniforme en t sobre cualquier intervalo compacto, P-c.s.

b) El proceso $((D_t), P)$ definido como

$$D_t = \eta y_t^c - \frac{\eta^2 c_P^2 t}{2} - \eta \mu_P t + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{\substack{0<s\leq t \\ |\Delta y_s|>\varepsilon}} \phi(\Delta y_s) - t \int_{|y|>\varepsilon} \left(e^{\phi(y)} - 1 \right) \nu_P(dy) \right), \tag{1.18}$$

donde $((y_t^c), P)$ es la parte continua de $((y_t), P)$, es un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ con terna característica (μ_D, c_D, ν_D) expresada por

$$\begin{aligned} \mu_D &= -\frac{1}{2}\eta^2 c_P^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(e^y - 1 - y 1_{\{0<|y|\leq 1\}}(y) \right) \left(\nu_P \phi^{-1} \right)(dy), \\ c_D &= \eta^2 c_P^2, \\ \nu_D &= \left(\nu_P \phi^{-1} \right)_{\mathbb{R}-\{0\}}. \end{aligned}$$

c) El proceso $((D_t), P)$ *definido en b) satisface*

$$E^P[e^{D_t}] = 1\,, \quad \textit{para cada } t \in (0,\infty). \tag{1.19}$$

d) Para cada $u \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{F}(u) = \int_{\mathbb{R}} \Big(e^{iuy+\phi(y)} - 1 - iuy1_{\{|y|\leq 1\}}(y) - \phi(y)1_{\{|y|\leq 1\}}(\phi(y))\Big)\nu_P(dy).$$

es finito.

e) Para cada $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E^P[e^{iuy_t+D_t}] = \exp\Bigg[t\Bigg(& -\frac{1}{2}c_P^2(u)^2 \\ & + \int_{\mathbb{R}} \Big(e^{iuy} - 1 - iuy1_{\{|y|\leq 1\}}(y)\Big)e^{\phi(y)}\nu_P(dy) \\ & + iu\mu_P + iuc_P^2\eta + iu\int_{|y|\leq 1} y\Big(e^{\phi(y)} - 1\Big)\nu_P(dy)\Bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [18], p. 221-225. □

Lema 1.58. *Sean* $((y_t), P)$ *un proceso de Lévy en* $\mathbb{R}$ *y* $((D_t), P)$ *el proceso dado por (1.18). Si* $0 \leq s < t$ *y* $A \in \mathcal{F}_s$ *entonces*

$$E^P[e^{D_t}1_A] = E^P[e^{D_s}1_A]\,.$$

Demostración. Ver [18], p.221. □

Lema 1.59. *Para cada* $t \geq 0$, *sea* Q_t *una medida de probabilidad en el espacio medible* $(\boldsymbol{D}, \mathcal{F}_t)$. *Supongamos que*

$$Q_t|_{\mathcal{F}_s} = Q_s\,, \quad \textit{para cualesquiera } 0 \leq s < t.$$

Entonces, existe una única medida de probabilidad Q sobre $(\boldsymbol{D}, \mathcal{F}_t)$ tal que

$$Q|_{\mathcal{F}_t} = Q_t\,, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Ver [18], p.221. □

Estos dos últimos resultados garantizan que existe una única medida de probabilidad $Q^{\eta,\phi}$ en $(\mathbf{D}, \mathcal{F}_t)$ tal que

$$Q^{\eta,\phi} = E^P[e^{D_t} 1_A], \quad \text{para cualesquiera } t \geq 0 \text{ y } A \in \mathcal{F}_t. \tag{1.20}$$

En particular,

$$Q^{\eta,\phi}|_{\mathcal{F}_t} \approx P|_{\mathcal{F}_t}\,, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.21}$$

Lema 1.60. *(y_t) tiene incrementos estacionarios e independientes bajo la medida $Q^{\eta,\phi}$.*

Demostración. Ver [18], p-225. □

Teorema 1.61. *Sean $((y_t), P)$ un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$ con terna característica (μ_P, c_P, ν_P), $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible positiva que satisface (1.16). Si $Q^{\eta,\phi} = Q$ es la medida de probabilidad dada por (1.20) entonces $((y_t), Q)$ es un proceso de Lévy con terna característica (μ_Q, c_Q, ν_Q) expresada por*

$$\begin{aligned} \nu_Q(dy) &= e^{\phi(y)} \nu_P(dy), \\ c_Q &= c_P, \\ \mu_Q &= \mu_P + \int_{|y|\leq 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy) + \eta c_P^2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Además, se tiene que

$$Q|_{\mathcal{F}_t} \approx P|_{\mathcal{F}_t}\,, \quad \textit{para todo } t \in [0, \infty). \tag{1.23}$$

Demostración. La ecuación 1.23 es consecuencia inmediata de (1.20). Ahora probaremos que (y_t) es un Q-proceso de Lévy con terna característica (μ_Q, c_Q, ν_Q) dada por (1.22).

Por el Lema 1.60, (y_t) tiene incrementos independientes y estacionarios bajo Q. Además, de (1.20) y del hecho que (y_t) tiene trayectorias estocásticamente continuas bajo P, se tiene que (y_t) tiene trayectorias estocásticamente continuas bajo Q y $y_0 = 0$. Esto muestra que $((y_t), Q)$ es un proceso de Lévy.

Por el Lema 1.57 parte e), la Q-función de distribución de y_t es

$$\begin{aligned}\psi_{y_t}^Q = E^Q[e^{iuy_t}] = E^P[e^{iuy_t + D_t}] = \exp\Bigg[t\Bigg(&-\frac{1}{2}c_P^2(u)^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\Big(e^{iuy} - 1 - iuy1_{\{|y|\le 1\}}(y)\Big)e^{\phi(y)}\nu_P(dy) \\ &+ iu\mu_P + iuc_P^2\eta + iu\int_{|y|\le 1} y\Big(e^{\phi(y)} - 1\Big)\nu_P(dy)\Bigg)\Bigg],\end{aligned}$$

la cual se reduce a

$$\begin{aligned}\psi_{y_t}^Q = E^Q[e^{iuy_t}] = E^P[e^{iuy_t + D_t}] = \exp\Bigg[t\Bigg(&-\frac{1}{2}c_Q^2u^2 + i\mu_Q u \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\Big(e^{iuy} - 1 - iuy1_{\{|y|\le 1\}}(y))\Big)\nu_Q(dy)\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{1.24}$$

Así, por el Teorema 1.26, la terna característica de y_t bajo Q está determinada por $c_Q = c_P$, $\nu_Q(dy) = e^{\phi(y)}\nu_P(dy)$ y $\mu_Q = \mu_P + \int_{|y|\le 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy) + c_P^2\eta$. □

Proposición 1.62. *Sean P y Q dos medidas de probabilidad sobre un espacio medible $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$. Sea $(\tilde{\Theta}, \tilde{\mathcal{F}}_\Theta)$ otro espacio medible y sea $X : \Theta \to \tilde{\Theta}$ una variable aleatoria medible con respecto a $\mathcal{F}_\Theta$ y $\tilde{\mathcal{F}}_\Theta$. Sean P_Xy Q_X las medidas de probabilidad sobre $\tilde{\Theta}$ inducida por X bajo P y Q respectivamente. Si $P \approx Q$ entonces $P_X \approx Q_X$.*

Demostración. Notamos que si $P \approx Q$, entonces, para todo $B \in \tilde{\mathcal{F}}_\Theta$, $P_X(B) = P[X \in \mathcal{B}] = 0$ y $Q_X(B) = Q[X \in \mathcal{B}] = 0$ son equivalentes. □

Lema 1.63. *Sean $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$ procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ generados por (μ_P, c_P, ν_P) y (μ_Q, c_Q, ν_Q) respectivamente. Si $P|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$, para cada $t \ge 0$ y la funcion ϕ está definida mediante $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_Q}{d\nu_P}\right)$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) $\nu_P \approx \nu_Q$.

b) $\int_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{\phi(y)}{2}} - 1\right)^2 \nu_P(dy) < \infty$.

Demostración. Ver [18], p. 225-229. □

Lema 1.64. *Sean $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$ procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ con ternas características $(\mu_P, c_P, 0)$ y $(\mu_Q, c_Q, 0)$ respectivamente. Si $P|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$, para algún $t \geq 0$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a) $c_P = c_Q$.

b) Si $c_P = 0$ *entonces* $\mu_Q = \mu_P$.

Demostración. Ver [18], p. 229-230. □

Teorema 1.65. *Sean $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$ procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ con ternas características dadas por (μ_P, c_P, ν_P) y (μ_Q, c_Q, ν_Q) respectivamente. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $P|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$ *para todo* $t \in (0, \infty)$.

2. *Se cumplen las siguientes cuatros condiciones:*

   (a) $c_P = c_Q$;

   (b) $\nu_P \approx \nu_Q$;

   (c) La función $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_Q}{d\nu_P}\right)$ *satisface*

   $$\int_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{\phi(y)}{2}} - 1\right)^2 \nu_P(dy) < \infty;$$

   (d) Existe $\eta \in \mathbb{R}$ *tal que*

   $$\mu_Q - \mu_P + \int_{|y|\leq 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy) = \eta c_P^2. \tag{1.25}$$

Demostración. (2.) $\to$ (1.). Si se cumple la afirmación (2.), $c_P = c_Q$, $\nu_Q(dy) = e^{\phi(y)}\nu_P(dy)$ y existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_Q = \mu_P + \int_{|y|\leq 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy) + \eta c_P^2$. Por el Teorema 1.61, Q y $Q^{\eta,\phi}$ (dada por (1.20)) tienen la misma terna característica. En particular,

$$Q[B] = Q^{\eta,\phi} = E^P[e^{D_t} 1_B] \qquad \text{para } t \in [0,\infty),\ B \in \mathcal{F}_t\,,$$

donde D_t es dada por (1.18). Con esto queda mostrada la afirmación (1).

(1.) $\to$ (2.). Supongamos que (1.) se cumple, es decir, asumimos que $P|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$ para cada $t \in [0,\infty)$. Se mostrará que la afirmación (2.) se cumple. En efecto, por el Lemma 1.63 se cumplen $2(b)$ y $2(c)$. Ahora, consideremos $((y_t^{c_P}), P)$ y $((y_t^{c_Q}), Q)$ como las partes continuas de $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$ respectivamente. Dichos procesos de Lévy tienen ternas características dadas por $(\mu_P, c_P, 0)$ y $(\mu_Q, c_Q, 0)$ respectivamente. Denotemos por P_c y Q_c las medidas inducidas sobre $(D, \mathcal{F}_D)$ por $((y_t^{c_P}), P)$ y $((y_t^{c_P}), Q)$ respectivamente. Por la Proposición 1.62 se tiene que $P_c|_{\mathcal{F}_t} \approx Q_c|_{\mathcal{F}_t}$. La terna característica de $((y_t^{c_P}), Q)$ es $(\mu_Q - \int_{|y|\leq 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy), c_Q, 0)$.

Por el Lemma 1.64, $c_Q = c_P$ y $\mu_Q = \mu_P + \displaystyle\int_{|y|\leq 1} y(\nu_Q - \nu_P)(dy) + c_P^2\eta$ para algún $\eta \in \mathbb{R}$. Con esto queda finalizada la prueba del teorema. □

Corolario 1.66. *Sean $((y_t), P)$ y $((y_t), Q)$ procesos de Lévy en $\mathbb{R}$ con ternas características dadas por (μ_P, c_P, ν_P) y (μ_Q, c_Q, ν_Q) respectivamente. Suponga que se cumple la condición (1) (y por tanto también la condición (2)) del Teorema 1.65. Sean $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_Q}{d\nu_P}\right)$. Entonces, la medida $Q^{\eta,\phi}$ construida en (1.20) coincide con la medida Q.*

Demostración. (y_t) tiene incrementos estacionarios e independientes bajo Q y bajo $Q^{\eta,\phi}$. Por tanto, para probar que Q y $Q^{\eta,\phi}$ coinciden, basta probar que la Q-distribución y la $Q^{\eta,\phi}$-distribución de y_t coinciden para todo $t \geq 0$. Esto último se cumple ya que (por los Teoremas 1.61 y 1.65) $((y_t), Q)$ y $((y_t), Q^{\eta,\phi})$ tienen la misma terna característica. □

Con el objetivo de que Y preserve la propiedad de simetría bajo la nueva medida equivalente Q, se mostrará que una condición necesaria y suficiente es que la función ϕ dada en el Teorema 1.65 parte (c), sea par.

Capítulo 2

Procesos de Lévy Simétricos

A lo largo de este capítulo Y representará a un proceso de Lévy definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y que toma valores en el espacio de los números reales. Además se asumirá que:

1. $\{\mathcal{F}_t;\ t \geq 0\}$ es la filtración natural generada por el proceso Y;
2. $\sigma(\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}) = \mathcal{F}$;
3. Y_1 es cuadrado integrable;
4. La terna característica del proceso Y es (μ, c, ν).

2.1. Caracterización de un proceso de Lévy Simétrico

Definición 2.1. *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución simétrica si existe algún número real θ tal que las variables aleatorias*

$$(X - \theta) \quad y \quad -(X - \theta)$$

tienen la misma distribución.

Note que si X es integrable y simétrica entonces (en la definición anterior) θ debe ser la media de X.

Lema 2.2. *Sea X una variable aleatoria simétrica cuadrado integrable con medida μ y varianza σ^2. Entonces existe una única función $\varphi : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ tal que la función característica de X es dada por*

$$\psi_X(u) = e^{iu\mu}\varphi\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right), \quad \textit{para todo } u \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Demostración. X es simétrica con media μ. Entonces, por la definición anterior $\tilde{X} = X - \mu$ y $-\tilde{X} = -(X-\mu)$ tienen la misma ley y se cumple que

$$\psi_{X-\mu}(u) = E\left[e^{iu\tilde{X}}\right] = \psi_{-(X-\mu)}(u) = E\left[e^{iu-\tilde{X}}\right], \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Por su parte

$$E\left[e^{iu\tilde{X}}\right] = E\left[\cos(u\tilde{X})\right] + iE\left[\operatorname{sen}(u\tilde{X})\right],$$
$$E\left[e^{iu-\tilde{X}}\right] = E\left[\cos(u\tilde{X})\right] - iE\left[\operatorname{sen}(u\tilde{X})\right].$$

Entonces $E\left[\operatorname{sen}(u\tilde{X})\right] = 0$. Por tanto, $E\left[e^{iu\tilde{X}}\right] = E\left[e^{iu-\tilde{X}}\right] \in \mathbb{R}$.
Con esto concluimos que $\psi_{X-\mu}$ toma valores reales y es par. Entonces existe un único $\varphi : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi_{X-\mu} = \varphi\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right), \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Con esto queda probado que la función característica de X es dada por (2.1). □

En la situación del Lema 2.2, la ley de X se denotará por $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$. Los parámetros μ, σ^2 y φ son llamados posición, escala y generador característico de la familia simétrica, respectivamente.
Acerca de las distribuciones simétricas es importante notar que, si φ es un generador

característico entonces $\varphi(0) = 1$. A continuación, se muestran algunos ejemplos de variables aleatorias con distribuciones simétricas, las cuales han sido estudiadas y utilizadas en áreas como finanzas y economía.

Ejemplos 1.

1. **Distribución Normal**:

   Una variable aleatoria X con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ tiene como función característica

   $$E[e^{iuX}] = e^{i\mu u} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}},$$

   y su generador característico es $\varphi(s) = e^{-s}$.

2. **Distribución Varianza Gamma**:

   Una variable aleatoria X con distribución $VG(\theta, \lambda, \sigma)$ tiene como función característica

   $$E[e^{iuX}] = \left(\frac{1}{1 - \frac{iu\theta}{\lambda} + \frac{\sigma^2 u^2}{2\lambda}}\right)^{\lambda}.$$

   Si $\theta = 0$, su generador característico es dado por $\varphi(s) = \left(\frac{1}{1+\frac{s}{\lambda}}\right)^{\lambda}$.

Proposición 2.3. *Sea X una variable aleatoria simétrica con distribución $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$. Suponga que X tiene momentos exponenciales finitos, es decir, $E[e^{uX}] < \infty$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Entonces el generador caraceristico de X puede ser extendido de manera analítica a todo $\mathbb{R}$.*

Demostración. Por (2.1) se tiene que

$$E[e^{zX}] = e^{z\mu}\varphi\left(\frac{-z^2\sigma^2}{2}\right), \quad \text{para todo } z = ui,\ u \in \mathbb{R}.$$

Probaremos que la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $h(z) = E[e^{zY_1}]$ está bien definida y es holoforma en $\mathbb{C}$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ entonces

$$E\Big[\Big|e^{izX}\Big|\Big] = E\Big[e^{aX}\Big] < \infty.$$

Esto prueba que e^{zX} es integrable y, por tanto, h está bien definida.

Por otro lado, fijemos $z \in \mathbb{C}$. Para cada $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} e^{zX(\omega)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (X(\omega))^n}{n!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(zX(\omega))^n}{n!} \end{aligned}$$

Sea $S_k(\omega) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(zX(\omega))^n}{n!}$, entonces

$$\begin{aligned} |S_k(\omega)| &= \Big|\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n X^n(\omega)}{n!}\Big| \\ &\leq \sum_{n=0}^{k} \frac{|zX(\omega)|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|zX(\omega)|^n}{n!} = e^{|z||X(\omega)|} \\ &\leq e^{|z|X(\omega)} + e^{-|z|X(\omega)}. \end{aligned}$$

Como X tiene momentos exponenciales finitos, entonces $E\Big[e^{|z|X(\omega)} + e^{-|z|X(\omega)}\Big] < \infty$. Además, por el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{k\to\infty} E[S_k] = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{E[X^n]}{n!}\Big) z^n = E\Big[e^{zX}\Big], \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Con ello queda garantizado que la función $h(z) = E[e^{zX}]$ es holoforma en $\mathbb{C}$.

Por tanto, la función $E[e^{zY_1}]e^{-z\mu}$ también es holomorfa en $\mathbb{C}$. Finalmente, de (2.1) concluimos que φ posee una extensión analítica a $\mathbb{R}$. $\square$

Ahora en lo restante del presente capítulo, asumiremos que $Y_1 \sim S(\mu, \sigma^2, \varphi)$. Entonces la varianza de Y_1 está dada por la Proposición 1.27,

$$\sigma^2 = Var(Y_1) = c^2 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy) \tag{2.2}$$

De la expresión anterior se infiere que el comportamiento de las colas de la distribución de un proceso de Lévy y sus momentos están determinados por la medida de Lévy. Por otro lado, dado que Y_1 tiene distribución simétrica, con parámetro de posición μ y escala σ^2, por (2.1) la función característica de Y_1 toma la forma

$$\psi_X(u) = e^{iu\mu}\varphi\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right), \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Definición 2.4. *Se dice que Y es un proceso de Lévy simétrico si tiene distribuciones marginales simétricas. Es decir, si para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria Y_t tiene distribución simétrica.*

Teorema 2.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Y es un proceso de Lévy simétrico.*

2. *Y_1 es simétrica.*

3. *La medida de Lévy es simétrica, es decir,*

$$\nu(-B) = \nu(B), \qquad \textit{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde $-B = \{x \in \mathbb{R}; -x \in B\}$.

Demostración. (1.) $\rightarrow$ (2.). Por definición, si Y es un proceso de Lévy simétrico entonces Y_1 es simétrico.

(2.) $\rightarrow$ (3.). Las variables aleatorias

$$(Y_1 - \mu) \quad \text{y} \quad -(Y_1 - \mu)$$

son infinitamente divisibles. Además, como Y_1 es simétrica e integrable entonces dichas variables aleatorias tienen la misma distribución. Por la representación de Lévy-Khintchine dichas variables aleatorias tienen respectivamente ternas generadoras $(0, c, \nu)$ y $(0, c, \nu^*)$, donde $\nu^*(B) = \nu(-B)$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por la unicidad de la terna generadora $\nu(dy) = \nu^*(dy) = \nu(-dy)$. Por tanto, la medida de Lévy ν es simétrica.

Finalmente (3.) $\to$ (1.). Fijemos $t > 0$. Las variables aleatorias $Y_t - \mu t$ y $-(Y_t - \mu t)$ son infinitamente divisibles. Además, por la representación de Lévy-Khintchine, sus ternas generadoras son $(0, tc, t\nu)$ y $(0, tc, t\nu^*)$ respectivamente. Como la medida de Lévy ν es simétrica, entonces $\nu = \nu^*$. Por el Teorema de Lévy-Khintchine, $Y_t - \mu t$ y $-(Y_t - \mu t)$ tienen la misma la distribución. Esto prueba que el proceso de Lévy Y es símetrico.

$\square$

Teorema 2.6. *Si Y es un proceso de Lévy simétrico, entonces su exponente característico es de la siguiente forma:*

$$\Lambda(u) = iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 - 2\int_{[0,\infty)} (1 - \cos(uy))\nu(dy). \tag{2.4}$$

Demostración. De la fórmula de Lévy-Khintchine se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Lambda(u) &= iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1 - iuy1_{\{|y|\geq 1\}})\nu(dy) \\
&= iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}} (\cos(uy) - 1)\nu(dy) + \int_{\mathbb{R}} (i\,\mathrm{sen}(uy) - iuy1_{\{|y|\geq 1\}})\nu(dy) \\
&= iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}} (\cos(uy) - 1)\nu(dy),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que la función $h(u) = i(\mathrm{sen}(uy) - uy1_{\{|y|\geq 1\}})$ es impar y que la medida de Lévy ν es simétrica. Finalmente, dado que $g(u) = \cos(uy) - 1$ es una función par y que la medida de Lévy ν es simétrica obtenemos

$$\Lambda(u) = iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 - 2\int_{[0,\infty)} (1 - \cos(uy))\nu(dy).$$

□

El siguiente resultado es importante porque relaciona la terna característica de un proceso de Lévy simétrico Y con los parámetros de la distribución simétrica de Y_1.

Proposición 2.7. *Si Y es un proceso de Lévy simétrico entonces Y_1 tiene distribución $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$, con*

$$\sigma^2 = Var(Y_1) = c^2 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy) \tag{2.5}$$

$$\varphi(\upsilon) = \exp\left\{ -\frac{c^2\upsilon}{\sigma^2} - 2\int_{[0,\infty)} \left[1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right]\nu(dy)\right\}, \text{ para todo } \upsilon \geq 0. \tag{2.6}$$

Además, para todo $t > 0$, Y_t tiene distribución $S(\mu t, \sigma^2 t, \varphi_t)$ con

$$\varphi_t(\upsilon) = \left(\varphi\left(\frac{\upsilon}{t}\right)\right)^t, \quad \text{para todo } \upsilon \geq 0. \tag{2.7}$$

Demostración. La afirmación (2.5) es consecuencia de la Proposición 1.27. Tomando φ como en (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} e^{iu\mu}\varphi\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right) &= e^{iu\mu}\exp\left\{ -\frac{1}{2}c^2u^2 - 2\int_{[0,\infty)} \Big(1 - \cos(uy)\Big)\nu(dy)\right\} \\ &= e^{\Lambda(u)} \\ &= \psi_{Y_1}(u), \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de (2.4).

Finalmente, por la Proposición 1.27, $Var(Y_t) = \sigma^2 t$. Además por la Proposición 1.25,

$$\psi_{Y_t}(u) = E(e^{iuY_t}) = (\psi_{Y_1}(u))^t = e^{iu(\mu t)}\left(\varphi\Big(\frac{\sigma^2u^2}{2}\Big)\right)^t = e^{iu(\mu t)}\varphi_t\Big(\frac{u^2(\sigma^2 t)}{2}\Big).$$

□

El siguiente teorema describe cómo los nuevos parámetros de la familia simétrica se transforman bajo el cambio de medida.

Teorema 2.8. *Suponga que Y es un P-proceso de Lévy simétrico.*

Sean $\eta \in \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible que satisface (1.16) y $Q = Q^{\eta,\phi}$ la medida en (1.20). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *Y es Q-proceso de Lévy simétrico.*

2. *ϕ es una función par, ν-c.s.*

Además, si se satisface alguna (y por tanto ambas) de estas afirmaciones y se cumple que

$$\int_{|y|>1} y^2 e^{\phi(y)} \nu(dy) < \infty, \tag{2.8}$$

entonces Y_1 tiene Q-distribución $S(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\varphi})$, con

$$\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta \tag{2.9}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = c^2 + \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{\phi(y)} \nu(dy) \tag{2.10}$$

$$\tilde{\varphi}(\upsilon) = \exp\left\{ \frac{c^2\upsilon}{\tilde{\sigma}^2} - 2\int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) e^{\phi(y)} \nu(dy) \right\} \tag{2.11}$$

Demostración. (1.) $\to$ (2.) Por el Teorema 2.5, las medidas de Lévy $\tilde{\nu}$ y ν son ambas símetricas. Además, por el Teorema 1.61, Y tiene Q-terna característica $(\tilde{\mu}, \tilde{c}, \tilde{\nu})$ con $\tilde{\nu}(dy) = e^{\phi(y)}\nu(dy)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_B e^{\phi(-y)} \nu(dy) &= \int_{-B} e^{\phi(y)} \nu(dy) \\
&= \tilde{\nu}(-B) \\
&= \tilde{\nu}(B) \\
&= \int_B e^{\phi(y)} \nu(dy).
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\int_B \left(e^{\phi(-y)} - e^{\phi(y)} \right) \nu(dy) = 0\,.$$

Esto nos permite concluir que $(e^{\phi(-y)} - e^{\phi(y)}) = 0$, ν-c.s., por lo que $\phi(-y) = \phi(y)$, ν-c.s.
(2.) $\to$ (1.) Dado que se cumple $\tilde{\nu}(dy) = e^{\phi(y)}\nu(dy)$, es claro que si ϕ es una función par y la medida de Lévy ν es símetrica, entonces la medida de Lévy $\tilde{\nu}$ es también simétrica. Así, por el Teorema 2.5 el proceso Y es un Q-proceso de Lévy simétrico.
Además, por el Teorema 1.61, se cumple que

$$\tilde{\mu} - \mu + \int_{|y|\leq 1} y(\tilde{\nu} - \nu)(dy) = c^2\eta$$

y dado que las medidas de Lévy $\tilde{\nu}$ y ν son ambas simétricas, se tiene que

$$\int_{|y|\leq 1} y\tilde{\nu}(dy) = \int_{|y|\leq 1} y\nu(dy) = 0.$$

Por tanto, $\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta$. Por su parte, el parámetro $\tilde{\sigma}^2$ es obtenido de la ecuación (2.2) y el generador característico $\tilde{\varphi}$ de la familia simétrica de Y_1 es obtenido de (2.6). $\square$

2.2. Cambio de Medida Equivalente Natural

A lo largo de esta sección, Y representará a un P-proceso de Lévy simétrico fijo y φ a su generador característico.

Definición 2.9. *Sea Q una medida de probabilidad en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que Q es una medida equivalente natural (MEN) para el P-proceso de Lévy simétrico Y si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$Q|_{\mathcal{F}_t} \approx P|_{\mathcal{F}_t}$, para todo $t \geq 0$.*
2. *Y es un Q-proceso de Lévy simétrico.*
3. *El Q-generador característico de Y_1 es igual a φ.*

A continuación se presentan dos teoremas principales acerca de la existencia y unicidad de las medidas equivalentes naturales. En la búsqueda de estas medidas surge un hecho interesante. La medida equivalente natural toma una forma dicotómica que depende de la presencia del componente browniano.

Definición 2.10. *Dada ρ medida de Borel y $\beta > 0$, definimos*

$$\rho_\beta(A) = \rho\Big(\frac{A}{\beta}\Big), \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2.12}$$

Teorema 2.11.

1. *Suponga que $c \neq 0$. Si $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función idénticamente nula ($\phi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y $\eta \in \mathbb{R}$ entonces la medida $Q = Q^{\eta,\phi_0}$ dado por (1.20) es una MEN. En este caso, la Q-terna característica de Y es de la forma $(\tilde{\mu}, c, \nu)$, con $\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta$ y la Q-distribución de Y_1 es $S(\tilde{\mu}, \sigma^2, \varphi)$.*

2. *Supongamos que $c = 0$. Sea $\beta > 0$ tal que ν_β (definido en (2.12)) es equivalente a ν. Si $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_\beta}{d\nu}\right)$ entonces la medida $Q = Q^{\eta,\phi}$ dada por (1.20) es una MEN y la Q-terna característica de Y es de la forma $(\mu, 0, \nu_\beta)$. En este caso, la Q-distribución de Y_1 es $S(\mu, (\beta\sigma)^2, \varphi)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.8 y las ecuaciónes (2.6) y (2.11), podemos concluir que las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $Q = Q^{\eta,\phi}$ es una medida equivalente natural.

b) ϕ es una función par y, para todo $\upsilon > 0$, se cumple la siguiente ecuación:

$$\int_{[0,\infty)} \left[\left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) e^{\phi(y)} - \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right)\right] \nu(dy) + \frac{c^2\upsilon}{2}\Big(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} - \frac{1}{\sigma^2}\Big) = 0. \tag{2.13}$$

(1) Consideremos el caso $c \neq 0$. Como $\phi = 0$ se cumple que $\tilde{\nu} = \nu$ y por (2.10), $\tilde{\sigma} = \sigma$. Por tanto la ecuación (2.13) se cumple. La Q-terna característica de Y esta dada por $(\tilde{\mu}, c, \tilde{\nu})$

con $\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta$ y $\tilde{\nu} = \nu$.

(2) Consideremos el caso $c = 0$. Sea $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_\beta}{d\nu}\right)$, podemos verificar que la ecuación (2.13) se cumple.

En efecto, si $c = 0$ entonces para garantizar (2.13) basta probar que

$$\int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) e^{\phi(y)}\nu(y) = \int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right) \nu(dy).$$

Note que $e^{\phi(y)}\nu(dy) = \nu_\beta(dy)$. Además, de (2.10) y de (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{\phi(y)}\nu(dy) \\
&= 2\int_{[0,\infty)} y^2 e^{\phi(y)}\nu(dy) \\
&= 2\int_{[0,\infty)} y^2 \nu_\beta(dy) \\
&= 2\int_{[0,\infty)} (\beta y)^2 \nu(dy) \\
&= \beta^2\sigma^2.
\end{aligned}$$

Entonces $\tilde{\sigma} = \beta\sigma$. Con este resultado se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) e^{\phi(y)}\nu(y) &= \int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) \nu_\beta(dy) \\
&= \int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{\beta y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right) \nu(dy) \\
&= \int_{[0,\infty)} \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right) \nu(dy).
\end{aligned}$$

Con esto garantizamos que la ecuacion (2.13) se cumple. Además, la Q-terna característica de Y es $(\mu, 0, \nu_\beta)$. □

Corolario 2.12. *Supongamos que $c = 0$ y ν es equivalente a la medida de Lebesgue λ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Para todo $\beta > 0$, se cumple la conclusión de la parte (2) del teorema anterior.*

Demostración. Basta probar que $\nu_\beta \ll \nu$. En efecto, sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\nu(A) = 0 \leftrightarrow \lambda(A) = 0 \leftrightarrow \lambda\Big(\frac{1}{\beta}A\Big) = 0 \leftrightarrow \nu\Big(\frac{1}{\beta}A\Big) = \nu_\beta(A) = 0.$$

Con esto se prueba que ν_β es equivalente a ν. □

Entonces, se puede concluir que la existencia de una MEN Q depende de la presencia del componente browniano y eso implica cambiar la media de Y_1 en un caso y cambiar la medida de Lévy en el otro.
Antes de mostrar el teorema de unicidad, presentaremos el siguiente resultado que será de utilidad en la prueba de dicho teorema.

Lema 2.13. *Sean ν una medida de Lévy, $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible que satisface (1.16) y (2.8). Sean σ y $\tilde{\sigma}$ dadas por (2.5) y (2.10) respectivamente. Entonces se cumple que*

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\upsilon}\left[\left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right)e^{\phi(y)} - \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right)\right]\nu(dy) = 0. \tag{2.14}$$

Demostración. Para cada $y > 0$ y cada $\upsilon > 0$, sea

$$f_\upsilon(y) = \frac{1}{\upsilon}\left[\left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right)e^{\phi(y)} - \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right)\right].$$

Para cada valor de y fijo,

$$\lim_{\upsilon\to\infty} f_\upsilon(y) = 0$$

Como $1 - \cos(z) \leq \frac{z^2}{2}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, se tiene que,

$$|f_\upsilon(y)| \leq \frac{y^2 e^{\phi(y)}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{y^2}{\sigma^2} = G(y) \quad , \quad \text{para todo } \upsilon > 0.$$

Como Y_1 es P-cuadrado integrable, por la Proposición 1.27 y por ser ν una medida de

Lévy, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy) < +\infty.$$

Además, por (2.8) y ya que $\tilde{\nu}$ es una medida de Lévy, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 \tilde{\nu}(dy) < +\infty,$$

por tanto Y_1 es Q-cuadrado integrable también.

Entonces, G es una función positiva integrable y, por el teorema de convergencia dominada, se tiene que

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_\upsilon(y)\nu(dy) = 0.$$

$\square$

Lema 2.14. *Sean Z y $\tilde{Z}$ variables aleatorias positivas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que*

$$E\Big[\frac{1}{\lambda + Z}\Big] = E\Big[\frac{1}{\lambda + \tilde{Z}}\Big], \quad \textit{para todo } \lambda > 0.$$

Enmtonces, Z y $\tilde{Z}$ tienen la misma ley.

Demostración. Ver [14]. $\square$

Lema 2.15. *Sean ν y $\tilde{\nu}$ dos medidas en $(0, +\infty)$ con segundos momentos finitos:*

$$k = \int_0^\infty y^2 \nu(dy) < +\infty \quad y \quad \tilde{k} = \int_0^\infty y^2 \tilde{\nu}(dy) < +\infty.$$

Sean $\beta = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}}$ y ν_β dada por (2.12). Suponga que

$$\int_{[0,\infty)} (1 - cos(\omega y))\tilde{\nu}(dy) = \int_{[0,\infty)} (1 - cos(\beta\omega y))\nu(dy), \quad \textit{para todo } \omega > 0. \tag{2.15}$$

Entonces $\tilde{\nu} = \nu_\beta$.

Demostración. Calculamos primero las transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación (2.15).

$$\int_{(0,\infty]} e^{-\lambda\omega}\left(\int_{[0,\infty)}(1-cos(\omega y))\tilde{\nu}(dy)\right)d(\omega) = \int^{[0,\infty)}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\omega}(1-cos(\omega y))(d\omega)\right)\tilde{\nu}(dy)$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{y^2}{\lambda(\lambda^2+y^2)}\right)\tilde{\nu}(dy).$$

$$\int_{(0,\infty]} e^{-\lambda\omega}\left(\int_{[0,\infty)}(1-cos(\beta\omega y))\nu(dy)\right)d(\omega) = \int^{[0,\infty)}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda\omega}(1-cos(\beta\omega y))(d\omega)\right)\nu(dy)$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{\beta^2 y^2}{\lambda(\lambda^2+\beta^2 y^2)}\right)\nu(dy).$$

En ambos cálculos se utilizó la siguiente idéntidad

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda\omega}(1-cos(\omega y))\,d(\omega) = \frac{y^2}{\lambda(\lambda^2+y^2)}.$$

Esto muetra que

$$\int_{[0,\infty)} \frac{y^2}{\lambda^2+y^2}\tilde{\nu}(dy) = \int_{[0,\infty)} \frac{\beta^2 y^2}{(\lambda^2+\beta^2 y^2)}\nu(dy), \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Sean, $\tilde{L}$ y L las medidas de probabilidades con soporte en $(0,+\infty)$. Dichas medidas estan dadas por $\tilde{L}(dy) = \frac{1}{k}y^2\tilde{\nu}(dy)$ y $L(dy) = \frac{1}{k}y^2\nu_\beta(dy)$, respectivamente. Sean $\tilde{X}$ y X las variables aleatorias con distribución $\tilde{L}$ y L, respectivamente. Entonces, de la última ecuación se deduce que

$$E\left[\frac{1}{\lambda^2+X^2}\right] = E\left[\frac{1}{\lambda^2+\tilde{X}^2}\right], \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Por el Lema 2.14, X y $\tilde{X}$ tienen la misma ley. En particular, $L = \tilde{L}$ y $\tilde{\nu} = \nu_\beta$. □

Teorema 2.16. *Sea Q una MEN. Entonces existen $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface (1.16) tales que $Q = Q^{\eta,\phi}$. Más precisamente,*

1. *Si $c \neq 0$, la Q-distribución de Y_1 es $S(\tilde{\mu},\sigma,\varphi)$, $\eta = \frac{\tilde{\mu}-\mu}{c^2}$ y $\phi = 0$ ν-c.s.*

2. *Si $c = 0$, la Q-distribución de Y_1 es $S(\mu, \tilde{\sigma}, \varphi)$, $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_\beta}{d\nu}\right)$, con $\beta = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}$ y η es cualesquier número real.*

Demostración. Como Y es un Q-proceso de Lévy y $Q|_{\mathcal{F}_t} \approx P|_{\mathcal{F}_t}$, para cada $t \geq 0$, por el Teorema 1.61, existen $\eta \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que $Q = Q^{\eta,\phi}$. Además, por el Teorema 1.61 y (2.9), la Q-terna característica de Y está dada por $(\tilde{\mu}, c, \tilde{\nu})$ con $\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta$ y $\tilde{\nu}(dy) = e^{\phi(y)}\nu(dy)$.

Como Y es un Q-proceso de Lévy simétrico, por el Teorema 2.8, ϕ es una función par y, usando las expresiones (2.6) y (2.11), se puede notar que Q es natural si y solo se satisface la ecuación (2.13). Dividiendo la ecuación (2.13) por υ y luego tomando límite cuando $\upsilon \to \infty$, se obtiene por (2.14) que

$$\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) = 0 \tag{2.16}$$

Entonces, por (2.13) tenemos que para todo $\upsilon > 0$,

$$\int_{[0,\infty)} \left[\left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}\right)\right)e^{\phi(y)} - \left(1 - \cos\left(\frac{y\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}\right)\right)\right]\nu(dy) = 0. \tag{2.17}$$

(1) Consideremos el primer caso, cuando $c \neq 0$, de la ecuación (2.16) se obtiene $\sigma = \tilde{\sigma}$. Reparametrizando la ecuación (2.17) usando $\omega = \frac{\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}} = \frac{\sqrt{2\upsilon}}{\sigma}$ conseguimos que

$$\int_{[0,\infty)} (1 - \cos(\omega y))\tilde{\nu}(dy) = \int_{[0,\infty)} (1 - \cos(\omega y))\nu(dy)\,, \quad \text{para todo } \omega > 0.$$

Por el Lema 2.15, se obtiene que $\tilde{\nu}(dy) = \nu(dy)$. Entonces $\phi(y) = 0$ ν-c.s. y $\eta = \frac{\tilde{\mu}-\mu}{c^2}$. (2) Finalmente, consideremos el caso cuando $c = 0$.

Podemos notar que $\tilde{\mu} = \mu + c^2\eta = \mu$. Sean $\beta = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}$ y $\lambda = \frac{\sqrt{2\upsilon}}{\tilde{\sigma}}$. Entonces

$$\int_{[0,\infty)} (1 - \cos(\lambda y))\tilde{\nu}(dy) = \int_{[0,\infty)} (1 - \cos(\lambda y))\nu_\beta(dy)\,, \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Por el Lema 2.15, se obtiene que $\tilde{\nu}(dy) = \nu_\beta(dy)$. En este caso $\phi = \ln\left(\frac{d\nu_\beta}{d\nu}\right)$ $\square$

Capítulo 3

Modelo Generalizado de Black-Scholes

En el presente trabajo se considera el siguiente modelo para el precio del activo financiero $S_t = S_0 e^{Y_t}$, $t \geq 0$, donde S_0 es una constante y representa el precio del activo en el instante cero y $\{Y_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy simétrico. Además, se define la medida martingala equivalente natural (MMEN) como la medida equivalente natural para el P-proceso de Lévy simétrico Y tal que el proceso de precios e^{-rt}, $0 \leq t \leq T$, es una martingala bajo dicha medida.

La MMEN es un concepto importante en este trabajo porque con ella podremos valuar el precio de una opción. Para valuar una opción se utiliza el cambio de numerario, el cual es una unidad de cuenta en la cual otros activos son medidos. Un modelo de valuación de opciones puede ser complejo o simple dependiendo de la elección del numerario para el modelo. En principio, podemos tomar cualquier activo cuyo valor sea positivo en todo instante del tiempo como numerario y nominar a los otros activos en términos del numerario elegido. Asociado con cada numerario tendremos una medida de probabilidad Q, es decir, si la cuenta de ahorro $\beta_t = e^{rt}$ (con $r > 0$ fijo) es el numerario, entonces el precio S_t del activo financiero es expresado en unidades del numerario y el proceso $\frac{S_t}{e^{rt}}$ es una martingala bajo Q. Sin embargo, nosotros también podemos elegir el precio del activo S_t como numerario, entonces debemos cambiar la medida martingala equivalente (MME) Q a una nueva MME Q_1. Dicha medida hace que $\frac{\beta_t}{S_t}$ sea martingala. Por tanto, el precio de

una opción en el instante $t = 0$ con pago H en el tiempo T es $C = E^{Q}\left(\frac{H}{\beta_T}\right)$. Pero también puede ser calculado como $E^{Q_1}(\frac{H}{S_T})$.
A lo largo de este capítulo Y representará a un P-proceso de Lévy simétrico definido en el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F})$ y que toma valores en el espacio de los números reales. Además se asumirá que:

1. S_0 es una constante y representa el precio del activo financiero en el instante cero;
2. $r > 0$ es fijo y representa la tasa de interés;
3. $\beta_t = e^{rt}$, $t \geq 0$, es la cuenta de ahorro;
4. $S_t = S_0 e^{Y_t}$, $t \geq 0$, es el proceso de precios del activo financiero;
5. $\{\mathcal{F}_t;\ t \geq 0\}$ es la filtración natural generada por el proceso Y y todas las martingalas consideradas en este capítulo son con respecto a esta filtración;
6. $\mathcal{F} = \sigma(\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\})$;
7. La P-terna característica del proceso Y es (μ, c, ν);r
8. Para cada $t \geq 0$, Y_t tiene P-momentos exponenciales finitos. Es decir, $E^P[e^{uY_1}] < \infty$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

A continuación se enuncian y se prueban algunos resultados importantes para luego mostrar un teorema que muestra la forma de cambiar medidas y expresar los precios de una opción bajo diferentes numerarios.

Lema 3.1. *Sean Q y P dos medidas de probabilidad definidas sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\mathcal{G}$ un sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Suponga que $Q \ll P$ con $dQ = \xi dP$ y que X es una variable aleatoria Q-integrable. Entonces ξX es una variable aleatoria P-integrable y Q-c.s.,*

$$E^{Q}[X|\mathcal{G}] = \frac{E^{P}[X\xi|\mathcal{G}]}{E^{P}[\xi|\mathcal{G}]}. \tag{3.1}$$

Demostración. Recordemos que $Z = E^Q[X|\mathcal{G}]$ si y solamente si se cumple que Z es medible respecto a $\mathcal{G}$ y

$$E^Q[YX] = E^Q[YE[X|\mathcal{G}]],$$

para toda variable aleatoria Y medible respecto a $\mathcal{G}$ talque YX es Q-integrable

Si Y es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible entonces

$$\begin{aligned}
E^Q\left[\frac{E^P[X\xi|\mathcal{G}]}{E^P[\xi|\mathcal{G}]}Y\right] &= E^P\left[\xi\frac{E^P[X\xi|\mathcal{G}]}{E^P[\xi|\mathcal{G}]}Y\right] \\
&= E^P\left[E^P[\xi|\mathcal{G}]\frac{E^P[X\xi|\mathcal{G}]}{E^P[\xi|\mathcal{G}]}Y\right] \\
&= E^P[E^P[X\xi|\mathcal{G}]Y] \\
&= E^P[X\xi Y] = E^Q[XY].
\end{aligned}$$

Esto muestra (3.1). $\square$

Lema 3.2. *Sean P una medida de probabilidad sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\{\xi_t; t \geq 0\}$ una P-martingala positiva tal que $E^P[\xi_T] = 1$. Definimos la nueva medida de probabilidad Q mediante la relación $dQ = \xi_T dP$. Entonces, si X es una variable aleatoria Q-integrable,*

$$E^Q[X] = E^P[\xi_T X],$$

$$E^Q[X|\mathcal{F}_t] = E^P\left[\frac{\xi_T}{\xi_t}X\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.2}$$

Además, si X es $\mathcal{F}_t$-medible, entonces para $s \leq t$,

$$E^Q[X|\mathcal{F}_s] = E^P\left[\frac{\xi_t}{\xi_s}X\middle|\mathcal{F}_s\right]. \tag{3.3}$$

Finalmente, $1/\xi_t$, $0 \leq t \leq T$ es una Q-martingala.

Demostración. De la ecuación (3.1) se deduce la ecuación (3.2). Por tanto queda por mostrar la ecuación (3.3). De la ecuación (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned} E^Q[X|\mathcal{F}_s] &= E^P\Big[\frac{\xi_T}{\xi_s}X|\mathcal{F}_s\Big] = E^P\Big[E^P\Big[\frac{\xi_T}{\xi_s}X|\mathcal{F}_t\Big]|\mathcal{F}_s\Big] \\ &= E^P\Big[X\frac{1}{\xi_s}E^P\Big[\xi_T|\mathcal{F}_t\Big]|_{\mathcal{F}_s}\Big] = E^P\Big[\frac{\xi_t}{\xi_s}X|\mathcal{F}_s\Big]. \end{aligned}$$

Finalmente, probaremos que $1/\xi_t$, $0 \leq t \leq T$ es una Q-martingala. En efecto, por la ecuación (3.2),

$$E^Q\Big[\frac{1}{\xi_T}|\mathcal{F}_s\Big] = E^P\Big[\frac{\xi_T}{\xi_s}\frac{1}{\xi_T}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \frac{1}{\xi_s}.$$

Con ello queda finalizada la prueba. □

Definición 3.3. *El precio, C, en el instante $t \leq T$ de un reclamo contingente H con tiempo de maduración T es*

$$C_t = E^Q\left(\frac{\beta_t}{\beta_T}H\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

donde Q es una medida de probabilidad martingala equivalente.

Teorema 3.4 (Cambio de Numerario)**.** *Suponga que $\frac{S_t}{\beta_t}$, $0 \leq t \leq T$, es una Q-martingala positiva. Sea Q_1 dada por*

$$\frac{dQ_1}{dQ} = \xi_T = \frac{S_T/S_0}{\beta_T/\beta_0}$$

entonces $\frac{\beta_t}{S_t}$ es una Q_1-martingala. Además, el precio en el instante t de un reclamo contingente H con pago tiempo de maduración T es dado por

$$C_t = E^{Q_1}\left(\frac{S_t}{S_T}H\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

Demostración. Para cada $0 \leq t \leq T$, sea $\xi_t = \frac{S_t/S_0}{\beta_t/\beta_0}$. El proceso ξ_t, $0 \leq t \leq T$, es una Q-martingala positiva con $E_Q(\xi_T) = 1$. Entonces, por el lema anterior,

$$\frac{1}{\xi_t} = \frac{\beta_t/\beta_0}{S_t/S_0}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es una Q_1-martingala. En particular $\frac{\beta_t}{S_t}$, $0 \leq t \leq T$, es una Q_1-martingala. Por el Lema

3.2,

$$E^Q\Big(\frac{\beta_t}{\beta_T}H\Big|\mathcal{F}_t\Big) = E^Q\Big[\frac{\xi_T}{\xi_t}\frac{S_t}{S_T}H\Big|\mathcal{F}_t\Big] = E^{Q_1}\Big[\frac{S_t}{S_T}H\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

□

3.1. Valuación de Opciones con una MMEN

En la presente sección, se asume que Y_t tiene momentos exponenciales finitos, es decir, $E[euY_t] < \infty$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Recuerde de la Proposición 2.1 que bajo este supuesto, el generador característico se puede extender de forma analítica a $\mathbb{R}$.

3.1.1. Medida Martingala Equivalente Natural

Según los teoremas fundamentales de las finanzas, las opciones de acciones son valuadas usando una medida martingala equivalente Q bajo la cual el proceso de precios descontados $e^{-rt}S_t$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala. En este trabajo Q no sólo es una medida equivalente martingala, sino también natural.

Definición 3.5. *Se dice que Q es una MMEN si se cumple las siguientes afirmaciones:*

1. *Q es una MEN para el P-proceso de Lévy simétrico*

2. *El proceso de precios descontados $e^{-rt}S_t$, $0 \leq t \leq T$ es una Q-martingala Y.*

El siguiente resultado proporciona la relación entre los parámetros de la distribución de Y_1 bajo las medidas Q y P y las condiciones para la existencia y unicidad de Q.

Teorema 3.6. *Sea Q una MMEN para el P-proceso de Lévy simétrico Y con P-terna característica (μ, c, ν). Entonces, la siguiente relación entre los parámetros de la Q-distribución de Y_1 debe cumplirse.*

$$\tilde{\mu} + \ln\varphi\Big(-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\Big) = r. \tag{3.4}$$

Demostración. Por la propiedad martingala de $e^{-rt}S_t$ bajo Q, se tiene que,

$$\begin{aligned} E^Q[e^{-rt}S_t|\mathcal{F}_s] &= e^{-rs}S_s, \quad \text{para } 0 \le s \le t \\ E^Q[e^{Y_t - Y_s}|\mathcal{F}_s] &= e^{r(t-s)} \\ E^Q[e^{Y_t - Y_s}] &= e^{r(t-s)} \\ E^Q[e^{Y_{t-s}}] &= e^{r(t-s)}. \end{aligned}$$

Se utilizó el hecho que el proceso $Y_t - Y_s$ es independiende de $\mathcal{F}_s$ y la propiedad de incrementos estacionarios, es decir, $Y_t - Y_s \sim Y_{t-s}$. Por otro lado, la distribución de Y_1 bajo la MMEN Q es $S(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2, \varphi)$, con lo cual se tiene:

$$e^r = E_Q[e^{Y_1}] = e^{\tilde{\mu}}\varphi\Big(-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\Big),$$

la cual equivale a (3.4). □

Corolario 3.7. *Bajo las condiciones del teorema anterior*

1. *Si hay un componente Browniano* $(c \neq 0)$ *entonces*

$$\tilde{\mu} = r - \ln\varphi\Big(-\frac{\sigma^2}{2}\Big). \tag{3.5}$$

Además, Q *es única.*

2. *Si no hay un componente Browniano* $(c = 0)$ *entonces* $\tilde{\sigma}$ *es una raíz de la ecuación*

$$\ln\varphi\Big(-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\Big) = r - \mu. \tag{3.6}$$

Además, $r > \mu$*. En este caso, si* $\tilde{\sigma}$ *es la única raíz positiva de la ecuación (3.6) entonces* Q *es única.*

Demostración. Note que la ecuación (3.5) y (3.6) es consecuencia de (3.4) y del Teorema 2.16.

Si $c = 0$. Por la desigualdad de Jensen se obtiene $E_Q[e^{Y_1}] \geq e^{\mu}$, por tanto $\mu < r$. En este caso, si $\tilde{\sigma}$ es la única raíz positiva de la ecuación (3.6) entonces por la parte 2.) del Teorema 2.16, Q es única.

Si $c \neq 0$, la unicidad de Q es consecuencia de la parte 1.) del Teorema 2.16 y de la ecuación (3.5). □

3.1.2. Valuación de opciones con una MMEN

De acuerdo al método de valuación por ausencia de arbitraje, el valor de una opción en el tiempo 0 está dado por el valor esperado de la función de pagos:

$$C_0 = e^{-rT} E_Q[(S_T - K)^+], \tag{3.7}$$

donde T es el tiempo de vencimiento, K es llamado precio de ejercicio (strike price), y Q es una MMEN. Definimos Q_1 como la medida de probabilidad dada por

$$\frac{dQ_1}{dQ} = \frac{e^{-rT} S_T}{S_0}. \tag{3.8}$$

Note que bajo Q_1 el proceso $\frac{e^{rt}}{S_t}$, $0 \leq t \leq T$ es una martingala.

A partir de la fórmula (3.7), escribimos la fórmula de valuación de opciones usando cambio de numerario, obteniendo

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-rT} E^Q[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT} E^Q[(S_T - K) 1_{\{S_T > K\}}] \\ &= S_0 Q_1[(S_T > K)] - e^{-rT} K Q[(S_T > K)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Retornos para procesos de Lévy simétricos con componente browniano

Sea Y un proceso de Lévy simétrico con P-terna característica (μ, c, ν) tal que $c \neq 0$. Sea $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$ la P-distribución de Y_1 y Q la MMEN para Y. Entonces, bajo Q, Y

continua siendo un proceso de Lévy con terna característica $(\tilde{\mu}, c, \nu)$ y la distribución de Y_1 se convierte en $S(\tilde{\mu}, \sigma^2, \varphi)$, donde

$$\tilde{\mu} = r - \ln \varphi\Big(-\frac{\sigma^2}{2}\Big).$$

Proposición 3.8. *Sea $T > 0$, denotemos por F_T a la P-función de distribución de la variable estandarizada $\frac{(Y_T - \mu T)}{\sigma\sqrt{T}}$, es decir,*

$$F_T(y) = P\left(Y_T \leq \sigma\sqrt{T}y + \mu T\right).$$

Suponga que F_T es continua. Entonces

$$F_T(y) = Q\Bigg(Y_T \leq \sigma\sqrt{T}y + \tilde{\mu}T\Bigg).$$

Además, la fórmula de valuación de la opción (3.9) se transforma a

$$C_0 = S_0 Q_1[(S_T > K)] - e^{-rT} K F_T\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \ln\varphi(-\frac{\sigma^2}{2}))T)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Demostración. Como Q es MMEN, las distribuciones de las variables aleatorias

$$\frac{Y_T - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{Y_T - \tilde{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

bajo P y Q, respectivamente, son las mismas. Además, son simétricas.

Por la continuidad de F_T, $1 - F_T(a) = F_T(-a)$, para todo $a \geq 0$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
Q\left(S_T > K\right) &= Q\Bigg(Y_T > \ln\frac{K}{S_0}\Bigg) \\
&= Q\Bigg(\frac{Y_T - \tilde{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln\frac{K}{S_0} - \tilde{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\Bigg) \\
&= Q\Bigg(\frac{Y_T - \tilde{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}} < \Bigg(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \tilde{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$= \quad F_T\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \ln\varphi(-\frac{\sigma^2}{2}))T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Con ello queda probada la proposición. $\square$

Retornos para procesos de Lévy simétricos sin componente browniano

Ahora, consideremos el caso cuando Y es un proceso de Lévy simétrico con P-terna característica $(\mu, 0, \nu)$. Supongamos que la tasa de interés r es mayor que el parámetro de posición μ . Sea $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$ la P-distribución de Y_1 y Q la MMEN para Y. Entonces, la Q-distribución de Y_1 resulta $S(\mu, \tilde{\sigma}^2, \varphi)$, donde $\tilde{\sigma}$ es la solución a la ecuación (3.6).

Para casos específicos considerados en el presente trabajo (Varianza Gamma simétrico, Normal Inversa Gaussiana simétrico y Meixner simétrico) es posible identificar las distribuciones de $\frac{(Y_T-\mu T)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}$ bajo Q y la de $\frac{(Y_T-\mu_1 T)}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}$ bajo Q_1.

Sean F_T y F_T^1 sus respectivas funciones de distribución. Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
C_0 &= S_0 Q_1[(S_T > K)] - e^{-rT} K Q[(S_T > K)] \\
&= S_0\left[1 - F_T^1\left(-\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu_1 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}\right)\right] - e^{-rT} K F_T\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Modelo de Varianza Gamma Simétrico

En este capítulo consideramos que la dinámica del precio del activo está caracterizada por un proceso de Varianza Gamma simétrico (VGS). El proceso de precios del activo es modelado como $\{S_t = S_0 e^{Y_t}; t \geq 0\}$, donde $\{Y_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Varianza Gamma (VG), con marginales simétricas (es decir, la variable aleatoria Y_t es simétrica para todo $t \geq 0$).

El proceso VG es un ejemplo de un proceso de salto puro con un número infinito de saltos en cualquier intervalo de tiempo finito, muchos de los saltos son arbitrariamente pequeños con sólo un número finito de saltos de cualquier tamaño predefinido. La distribución marginal del proceso VG fue dada originalmente en [8] en términos de funciones especiales tales como funciones de Bessel modificadas de segundo tipo y la función hipergeometrica degenerada. En el caso particular del proceso VGS las distribuciones marginales resultan ser distribuciones de Bessel simétricas. Esto conlleva a una fórmula elegante.

4.1. Procesos de Varianza Gamma Simétrico

Definición 4.1. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución de Bessel con parámetros a, b, m, si su función de densidad es dada por*

$$f(x) = \frac{|1-a^2|^{m+\frac{1}{2}}|x|^m}{\sqrt{\pi}2^m b^{m+1}\Gamma(m+\frac{1}{2})} e^{-\frac{ax}{b}} K_m\left(\frac{|x|}{b}\right), \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

con $b > 0$, $|a| < 1$, $m > 1$ y donde

$$K_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}x^m}{2^m\Gamma(m+\frac{1}{2})}\int_{[1,\infty)}(t^2-1)^{m-\frac{1}{2}}$$

es la función de Bessel modificada de segundo tipo.

Dicha distribución es denotada por $B(a, b, m)$. Para esta distribución, la función generadora de momentos es

$$M(t) = \left[(1-a^2)(1-(c-tb)^2)^{-1}\right]^{m+\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

Las expresiones explícitas para la media, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis de esta distribución son

$$\text{Media} = (2m+1)ba(a^2-1)^{-1} \tag{4.2}$$

$$\text{Varianza} = (2m+1)b^2(a^2+1)(a^2-1)^{-2} \tag{4.3}$$

$$\text{Coeficiente de Asimetría} = 2a(a^2+3)(2m+1)^{-\frac{1}{2}}(a^2+1)^{-\frac{3}{2}} \tag{4.4}$$

$$\text{Curtosis} = 3+6(a^4+6a^2+1)(2m+1)^{-1}(a^2+1)^{-2} \tag{4.5}$$

Definición 4.2. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución de Bessel simétrica con media μ, varianza σ^2 y parámetro de forma λ, si $X - \mu \sim B(0, \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda}}, \lambda - \frac{1}{2})$.*

En este caso usaremos la notación $X \sim Bsim(\mu, \sigma^2, \lambda)$ para la distribución de X. Su función característica es de la forma

$$\psi(u) = \left(\frac{1}{1+\frac{u^2\sigma^2}{2\lambda}}\right)^{\lambda} \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R},$$

y su función de densidad es

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi\sigma^2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda x^2}{2\sigma^2}}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\lambda x^2}{2\sigma^2}}\right).$$

Además, esta distribución coincide con $S(\mu, \sigma^2, \varphi)$ cuyo generador característico es

$$\varphi(v) = \left(\frac{1}{1+\frac{v}{\lambda}}\right)^{\lambda}. \tag{4.6}$$

La evidencia empírica muestra que grandes movimientos en los precios de los activos ocurren con mayor frecuencia de lo que supone el modelo clásico de Black-Scholes con incrementos de los retornos distribuidos normalmente. Esta característica está referida al exceso de curtosis o a las colas pesadas. Esta es la principal razón para considerar modelos con saltos. Una forma de medir este comportamiento de colas pesadas es observar la curtosis. Para la distribución normal (mesocúrtica), la curtosis es 3. Si la distribución es plana en la parte superior (platicúrtica) la curtosis es menor a 3, y si la distribución tiene pico alto (Leptocúrtica), la curtosis es mayor a 3.

Nosotros notamos que la curtosis de la distribución simétrica de Bessel es $3+\frac{3}{\lambda}$, por tanto el parámetro λ está relacionado al exceso de curtosis mediante $\lambda = \frac{3}{\gamma}$, este resultado es debido a que el exceso de curtosis de una variable aleatoria Y es $\gamma = \frac{E[(Y-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3$.

Las marginales de un proceso VGS Y tienen función característica:

$$E(e^{iuY_t}) = e^{iu\mu t}\left(\frac{1}{1+\frac{u^2\sigma^2}{2\lambda}}\right)^{\lambda t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.7}$$

Inspeccionando la función característica tenemos lo siguiente:

Proposición 4.3. *Para cada $t > 0$, la distribución marginal en el instante t de un* *proceso VGS Y es dada por $Y_t \sim Bsim(\mu t, \sigma^2 t, \lambda t)$. En particular, para cada $t > 0$, $Y_t \sim S(\mu t, \sigma^2 t, \varphi_t)$ con el generador característico dado por*

$$\varphi_t(\upsilon) = \left(\varphi\left(\frac{\upsilon}{t}\right)\right)^t = \left(\frac{1}{1+\frac{\upsilon}{\lambda t}}\right)^{\lambda t}. \tag{4.8}$$

4.1.1. Valuación de opciones con un modelo VGS

Determinamos las distribuciones de Y_t bajo las medidas martingalas equivalentes Q y Q_1. Por el Teorema 2.16 y el Teorema 3.6, si $\mu < r$, la Q-distribución de Y_1 es $Bsim(\mu, \tilde{\sigma}^2, \lambda)$. De las ecuaciónes (4.6) y de (3.6) se tiene que

$$\tilde{\sigma}^2 = 2\lambda(1 - e^{\frac{-(r-\mu)}{\lambda}}). \tag{4.9}$$

La Q_1-distribución de Y_1 está determinada por el siguiente resultado.

Proposición 4.4. *Sea $f^Q_{Y_t}$ la Q-densidad de $Y_t \sim Bsim(\mu t, \tilde{\sigma}^2 t, \lambda t)$. Entonces, la Q_1-densidad de Y_t (dada por $e^{y-rt} f^Q_{Y_t}(y)$) es dada por*

$$f^{Q_1}_{Y_t}(y) = f(y - \mu t),$$

donde f es la función de densidad de la distribución $B(-\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}, \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}, \lambda t - \frac{1}{2})$.

Demostración. De (4.9),

$$e^{y-rt} f^Q_{Y_t}(y) = e^{y-rt}\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi\tilde{\sigma}^2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda(y-\mu t)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}\right)^{\lambda t - \frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\lambda t)} K_{\lambda t - \frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\lambda(y-\mu t)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}\right) \tag{4.10}$$

Usando el generador característico en (4.8) para la distribución simétrica de Bessel, se tiene que

$$e^{y-rt} = e^{y-\mu t}\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}\right)^{\lambda t}. \tag{4.11}$$

Sea $y* = y - \mu t$. Usando (4.11), la expresion (4.10) se convierte en

$$e^{y-rt} f_{Y_t}^Q(y) = e^{y*}\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}\right)^{\lambda t}\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi\tilde{\sigma}^2}}\left(\sqrt{\frac{\lambda(y*)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}\right)^{\lambda t - \frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\lambda t)}K_{\lambda t - \frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\frac{\lambda(y*)^2}{2\tilde{\sigma}^2}}\right) \quad (4.12)$$

Sean $m = \lambda t - \frac{1}{2}$, $a = -\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}$ y $b = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} e^{y-rt} f_{Y_t}(y) &= e^{y*}\left(1-a^2\right)^{m+\frac{1}{2}}\frac{1}{b\sqrt{\pi}}\left(\frac{|y*|}{2b}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}K_m\left(\frac{|y*|}{b}\right) \\ &= \frac{(1-a^2)^{m+\frac{1}{2}}|y*|^m}{\sqrt{\pi}2^m b^{m+1}\Gamma m + \frac{1}{2}} e^{-\frac{ay*}{b}}K_m\left(\frac{|y*|}{b}\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

□

Para cada $t \geq 0$, sea $Y_t^* = Y_t - \mu t$. De (4.13), Y_t^* tiene distribución $B\left(-\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}, \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\lambda}}, \lambda t - \frac{1}{2}\right)$. Asi de (4.9), (4.2) y (4.3) tenemos que,

$$E[Y_1^*] = \mu_1 = 2\lambda(e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1); \quad (4.14)$$

$$VAR[Y_1^*] = \tilde{\sigma}_1^2 = 2\lambda(e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1)(2e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1). \quad (4.15)$$

En particular, la media y la varianza de $Y_t = Y_t^* + \mu t$ bajo Q_1 son $\mu t + \mu_1 t$ y $\tilde{\sigma}_1^2 t$, respectivamente.

Denotamos con $B_{\lambda t}(y)$ a la Q-función de distribución de la variable aleatoria $\frac{Y_t - \mu}{\tilde{\sigma}\sqrt{t}}$ y $B_{\lambda t}^1(y)$ a la Q_1-función de distribución de la variable aleatoria $\frac{Y_t - \mu t - \mu_1 t}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{t}}$.

Con lo visto anteriormente, podemos concluir el siguiente resultado.

Proposición 4.5. *Suponga que $Y_t \sim Bsim(\mu t, \sigma^2 t, \lambda t)$ y $\mu < r$. Entonces, el precio libre de arbitraje de una opción de compra europea usando MMEN está dado por*

$$C_0 = S_0\left[1 - B_{\lambda T}^1\left(-\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T + \mu_1 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}\right)\right] - e^{-rT}KB_{\lambda T}\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right) \quad (4.16)$$

donde $\mu_1 = 2\lambda(e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1)$, $\tilde{\sigma}_1^2 = 2\lambda(e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1)(2e^{\frac{(r-\mu)}{\lambda}} - 1)$ y $\tilde{\sigma}^2 = 2\lambda(1 - e^{\frac{-(r-\mu)}{\lambda}})$.

4.2. Comparaciones Numéricas

Con el objetivo de hacer algunas comparaciones numéricas, aproximaremos la distribución estandarizada de Bessel de la variabla aleatoria $\frac{Y_T - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}$ por la distribución estándar normal, es decir cambiamos $B_{\lambda Y}$ por Φ. Asimismo, la distribución de Bessel que aparece en el modelo trabajado es aproximada por una normal estándar porque tiene un grado de asimetría mínimo que puede ser despreciable. Asumiremos que el valor del coeficiente de asimetría es pequeño. Por otro lado recordamos que el parámetro de forma λ y el parámetro de exceso de curtosis de la distribución de Bessel están relacionados por $\lambda = \frac{\gamma}{3}$. De esta manera, obtenemos una fórmula generalizada tipo Black-Scholes para la valuación de opciones que toma en cuenta el exceso de curtosis. La fórmula generalizada tipo Black-Scholes para el modelo VGS es

$$C_0 \approx S_0 \left[\Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T + \mu_1 T}{\tilde{\sigma}_1 \sqrt{T}} \right) \right] - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \right) \tag{4.17}$$

donde $\mu_1 = \frac{6}{\gamma}(e^{\frac{(r-\mu)\gamma}{3}} - 1)$, $\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{6}{\gamma}(e^{\frac{(r-\mu)\gamma}{3}} - 1)(2e^{\frac{(r-\mu)\gamma}{3}} - 1)$ y $\tilde{\sigma}^2 = \frac{6}{\gamma}(1 - e^{\frac{-(r-\mu)\gamma}{3}})$.
Es importante observar que la fórmula de Black-Scholes es un caso particular de (4.17), ya que cuando $\gamma \to 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{6}{\gamma}(e^{\frac{(r-\mu)\gamma}{3}} - 1) \to 2(r-\mu) \\
\tilde{\sigma}_1^2 &= \frac{6}{\gamma}(e^{\frac{(r-\mu)\gamma}{3}} - 1)(2e^{\frac{-(r-\mu)\gamma}{3}} - 1) \to 2(r-\mu) \\
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{6}{\gamma}(1 - e^{\frac{-(r-\mu)\gamma}{3}}) \to 2(r-\mu)
\end{aligned}$$

La fórmula para valuar una opción de compra en el modelo Black-Scholes (BS) es la siguiente:

$$C_0 = S_0 \left[\Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \right) \tag{4.18}$$

En el modelo clásico de Black-Scholes, $2(r-\mu)=\sigma^2$ bajo la medida Q (μ y σ son constantes). Por tanto, se puede ver que la fórmula de BS se obtiene cuando gamma tiende a cero.

Podemos concluir que el modelo VGS es una generalización del modelo de Black-Scholes porque considera que la distribución del logaritmo de los retornos bajo la medida martingala equivalente natural presenta un párametro adicional que es el exceso de curtosis; es decir, toma en cuenta los saltos de los precios, lo cual no es considerado en el modelo clásico de BS. Asimismo, podemos notar que para valores pequeños de exceso de curtosis el modelo de VGS coincide con el modelo BS. En el siguiente gráfico, comparamos el precio de una opción europea de compra usando los dos modelos de valuación en un periodo corto de un año. Podemos notar que para el mismo conjunto de parámetros, la diferencia entre el precio de la opción obtenido bajo el modelo VGS respecto al obtenido bajo el modelo BS aumenta a medida que el periodo de maduración de la opción aumenta. Los precios exactos y las diferencias porcentuales son presentadas en la Tabla 4.1.

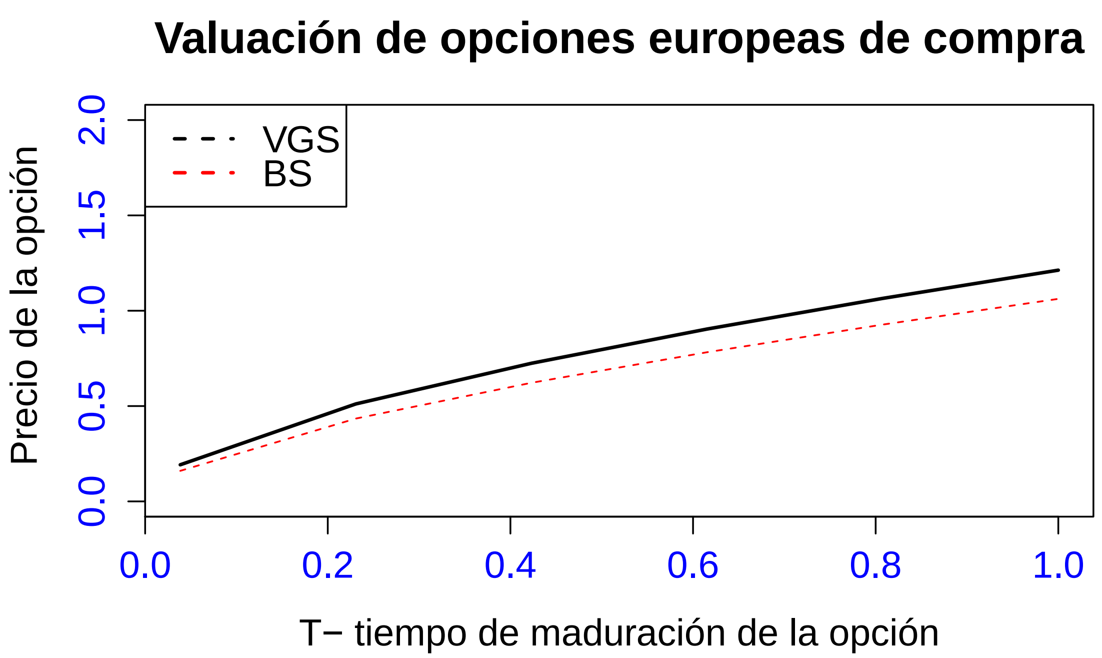

Figura 4.1: Precios de una opción europea de compra obtenido con los modelos VGS y BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Tiempo de Maduración (Años)	2/52	12/52	22/52	32/52	42/52	1
Modelo BS (i)	0.160	0.434	0.622	0.782	0.927	1.062
Modelo VGS (ii)	0.192	0.511	0.724	0.903	1.064	1.212
Diferencia (ii- i)	20.00	17.74	16.40	15.47	14.78	14.12

Tabla 4.1: Diferencia porcentual del precio de la opción europea de compra bajo el modelo VGS respecto al modelo BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Capítulo 5

Modelo Normal Inverso Gaussiano Simétrico

En este capítulo, consideramos que la evolución del precio del activo subayacente está caracterizada por un proceso Normal Inverso Gaussiano Simétrico (NIGS). Es decir, el proceso de precios del activo es modelado como $\{S_t = S_0 e^{Y_t}; t \geq 0\}$, donde $\{Y_t; t \geq 0\}$ es un proceso Normal Inverso Gaussiano (NIG), con marginales simétricas. Para modelar las colas pesadas, este modelo es el adecuado porque las colas decrecen más lentamente que la distribución gaussiana. En el modelo NIG los incrementos del proceso estan distribuidos como una distribución normal inversa gaussiana.
La distribución marginal del proceso NIG fue originalmente estudiado en [2] como una sub clase de la distribución generalizada hiperbólica (con parámetro de forma, $\lambda = -\frac{1}{2}$).

5.1. Proceso Normal Inverso Gaussiano

Definición 5.1. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución normal inversa gaussiana con parámetros α, β, δ, μ, si su función de densidad es dada por*

$$f_Y(y) = \frac{\alpha}{\pi} e^{\alpha\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(y-\mu)} \frac{\tilde{K}_1\left(\alpha\delta\sqrt{1+(\frac{y-\mu}{\delta})^2}\right)}{\sqrt{1+(\frac{y-\mu}{\delta})^2}}, \quad \textit{para todo } y \in \mathbb{R},$$

con $\mu \in R$, $\delta \leq 0$ y $0 \leq |\beta| \leq \alpha$ y donde

$$\tilde{K}_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{1}{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} e^{-x} \int_{[0,\infty)} e^{-t} t^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{2x}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}},$$

es la función modificada de Bessel de tercer tipo con índice λ.

Dicha distribución es denotada por $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ y su función característica es

$$\psi(u) = e^{iu\mu} \frac{e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}{e^{\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+iu)^2}}}. \tag{5.1}$$

Las expresiones explícitas para su media, varianza, curtosis y su coeficiente de asimetría son

$$\text{Media} = \mu + \frac{\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \tag{5.2}$$

$$\text{Varianza} = \frac{\alpha^2\delta}{\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^3} \tag{5.3}$$

$$\text{Coeficiente de Asimetría} = \frac{3\beta}{\alpha\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.4}$$

$$\text{Curtosis} = 3\left(1 + \frac{\alpha^2+4\beta^2}{\alpha^2\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right) \tag{5.5}$$

Definición 5.2. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución normal inversa gaussiana simétrica si y solo si $\beta = 0$.*

En este caso denotaremos a la distribución $NIG(\alpha, 0, \delta, \mu)$ por $NIGS(\alpha, \delta, \mu)$. Su función de densidad está dado por

$$f(y) = \frac{\alpha}{\pi} e^{\alpha\delta} \frac{\tilde{K}_1\left(\alpha\delta\sqrt{1+(\frac{y-\mu}{\delta})^2}\right)}{\sqrt{1+(\frac{y-\mu}{\delta})^2}} \tag{5.6}$$

y su funcion característica es

$$\psi(u) = e^{iu\mu} e^{\alpha\delta\left(1-\sqrt{1+(\frac{u}{\alpha})^2}\right)}. \tag{5.7}$$

Además, de (5.2), (5.3) y (5.5), su media es μ, su varianza es $\frac{\delta}{\alpha}$ y su curtosis es $3 + \frac{3}{\alpha\delta}$. Por una simple inspección de la función característica podemos notar que el generador característico de esta distribución es

$$\varphi(v) = e^{\alpha\delta\left(1-\sqrt{1+\frac{2v}{\zeta}}\right)}, \tag{5.8}$$

Un proceso NIG no tiene componente browniano y su terna característica está dado por $(m, 0, \nu_{NIG})$, donde

$$m = \frac{2\delta\alpha}{\pi}\int_0^1 \operatorname{senh}(\beta y)\tilde{K}_1(\alpha y)dy \tag{5.9}$$

5.1.1. Valuación de Opciones con un modelo NIG

Supongamos que $\mu < r$. Note que la Q- distribución de Y_1 es $NIGS(\alpha, \tilde{\delta}, \mu)$, donde $\frac{\tilde{\delta}}{\alpha} = \tilde{\sigma}^2$. De las ecuaciónes (3.6) y (5.8) se tiene

$$\tilde{\sigma}^2 = 2(r-\mu) - \left(\frac{r-\mu}{\alpha\sigma}\right)^2. \tag{5.10}$$

Bajo la medida Q, $Y_t \sim SNIG(\alpha, \tilde{\delta}t, \mu t)$ con media μt y varianza $\tilde{\sigma}^2 t = \frac{\tilde{\delta}}{\alpha}t$. La distribución de Y_t bajo la medida Q_1 es determinada con el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Para cada $t > 0$, la Q_1 distribución de Y_t es $NIG(\alpha, 1, \tilde{\delta}t, \mu t)$.*

Demostración. Del cambio de numerario definido en (3.8), se puede notar que la densidad de Y_t bajo Q_1 está dada por

$$\begin{aligned} e^{y-rt} f_{Y_t}^{Q}(y) &= e^{y-\mu t-\alpha\tilde{\delta}t+\tilde{\delta}t\sqrt{\alpha^2-1}} \frac{\alpha}{\pi} e^{\alpha\tilde{\delta}t} \frac{\tilde{K}_1\left(\alpha\tilde{\delta}t\sqrt{1+(\frac{y-\mu t}{\tilde{\delta}t})^2}\right)}{\sqrt{1+(\frac{y-\mu t}{\tilde{\delta}t})^2}} \\ &= e^{y-\mu t+\tilde{\delta}t\sqrt{\alpha^2-1}} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\tilde{K}_1\left(\alpha\tilde{\delta}t\sqrt{1+(\frac{y-\mu t}{\tilde{\delta}t})^2}\right)}{\sqrt{1+(\frac{y-\mu t}{\tilde{\delta}t})^2}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Esto muestra lo requerido. □

Este último resultado, (5.2) y (5.3), nos permiten concluir que

$$E^{Q_1}[Y_1] = \mu_1 = \mu + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}\tilde{\sigma}^2 \tag{5.12}$$

$$Var^{Q_1}[Y_1] = \tilde{\sigma}_1^2 = \left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^3 \tilde{\sigma}^2 \tag{5.13}$$

Denotamos por $F_{NIGS}(y)$ a la Q-función de distribución de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_t-\mu t}{\tilde{\sigma}\sqrt{t}}$ y por $F_{NIG}(y)$ a la Q_1-función de distribución de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_t-\mu_1 t}{\tilde{\sigma_1}\sqrt{t}}$. Dadas ambas funciones de distribución se obtiene la fórmula explicita para valuar una opción de compra europea cuando el proceso de los precios es un proceso NIGS.

Proposición 5.4. *Sea $Y_t \sim SNIG(\alpha, \delta t, \mu t)$ y $\mu < r$. Entonces, el precio libre de arbitraje de una opcion de compra europea usando MMEN está dado por*

$$C_0 = S_0\left[1 - F_{NIG}\left(-\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu_1 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}\right)\right] - e^{-rT} K F_{SNIG}\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right), \tag{5.14}$$

donde $\mu_1 = \mu + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_1^2 = \left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^3 \tilde{\sigma}^2$ *y* $\tilde{\sigma}^2 = 2(r-\mu) - \left(\frac{r-\mu}{\alpha\sigma}\right)^2$.

5.2. Comparaciones Numéricas

Con el objetivo de hacer algunas comparaciones numéricas, aproximaremos la distribución estandarizada de la variabla aleatoria $\frac{Y_T-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}$ por la distribución estándar normal, es decir cambiamos F_{NIGS} por Φ. Asimismo, aproximaremos la distribución estandarizada de la variable aleatoria $\frac{Y_T-\mu_1 T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}$, por la distribución normal, es decir cambiamos F_{NIG}, por Φ, porque tiene una grado de asimetría positivo mínimo que puede ser despreciable. Por tanto asumimos que el sesgo es cero. Además, el parámetro de forma $\zeta = \alpha\delta$ y el parámetro de exceso de curtosis γ de la distribución simétrica normal inversa gaussiana están relacionados por $\gamma = \frac{3}{\zeta}$. Asi, obtenemos una fórmula modificada tipo Black-Scholes (BS) para la valuación de opciones que toma en cuenta el exceso de curtosis. La fórmula para el modelo NIGS es

$$C_0 \approx S_0 \left[\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu_1 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}\right)\right] - e^{-rT} K \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + \mu T}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right), \tag{5.15}$$

donde $\mu_1 = \mu + \sqrt{\frac{3}{3-\gamma\sigma^2}}\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_1^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{3-\gamma\sigma^2}}\right)^3 \tilde{\sigma}^2$ y $\tilde{\sigma}^2 = 2(r-\mu) - \frac{\gamma}{3}(r-\mu)^2$. Estos resultados se obtuvieron del hecho que:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} = \frac{\alpha^2\sigma^2}{\alpha^2\sigma^2-\sigma^2} = \frac{\alpha\delta}{\alpha\delta-\sigma^2} = \frac{3}{3-\gamma\sigma^2}. \tag{5.16}$$

Es importante observar que la fórmula (5.15) es un tipo de generalización de BS, ya que cuando $\gamma \to 0$, $\tilde{\sigma}^2 \to 2(r-\mu)$ y $\frac{3}{3-\gamma\sigma^2} \to 1$. Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu + \sqrt{\frac{3}{3-\gamma\sigma^2}}\tilde{\sigma}^2 \to 2(r-\mu) \\
\tilde{\sigma}_1^2 &= \left(\frac{3}{\sqrt{3-\gamma\sigma^2}}\right)^3 \tilde{\sigma}^2 \to 2(r-\mu) \\
\tilde{\sigma}^2 &= 2(r-\mu) - \frac{\gamma}{3}(r-\mu)^2 \to 2(r-\mu)
\end{aligned}$$

Se puede notar que el modelo NIGS a diferencia del modelo BS, considera que la distribución del logaritmo de los retornos presenta valores moderados de exceso de curtosis. Asimismo, podemos notar que para valores cercanos a cero de exceso de curtosis el modelo NIGS converge al modelo Black-Scholes. En el siguiente gráfico, la brecha entre el precio de la opción obtenida bajo el modelo NIGS y el obtenido en el modelo BS aumenta a medida que el periodo de maduracion de la opción aumenta. Los precios exactos y las diferencias porcentuales son presentadas en la Tabla 5.1.

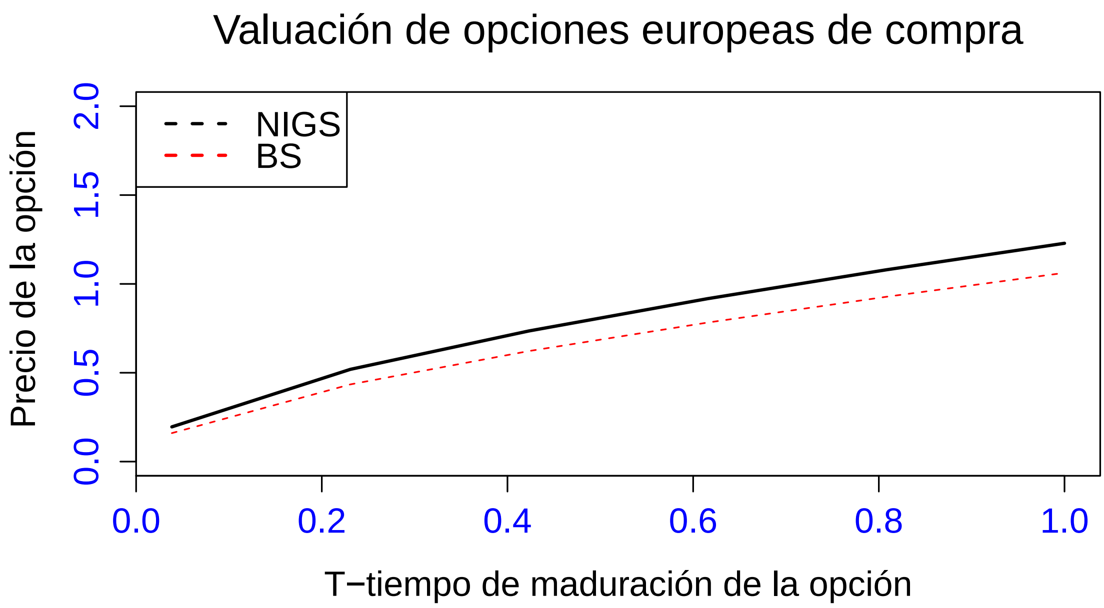

Figura 5.1: Precios de una opción europea de compra obtenido con los modelos NIGS y BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Tiempo de Maduración (Años)	**2/52**	**12/52**	**22/52**	**32/52**	**42/52**	**1**
Modelo BS (i)	0.160	0.434	0.622	0.782	0.927	1.062
Modelo NIGS (ii)	0.195	0.519	0.735	0.916	1.079	1.229
Diferencia (ii- i)	21.91	19.51	18.18	17.18	16.36	15.66

Tabla 5.1: Diferencia porcentual del precio de la opción europea de compra bajo el modelo NIGS respecto al modelo BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Capítulo 6

Modelo de Meixner

En este capítulo, mostramos el caso cuando el proceso de precio del activo subyacente está caracterizado por un proceso de Lévy cuyas distribuciones marginales son distribuciones de Meixner simétrico. A dicho proceso se le denomina proceso de Meixner Simétrico (MS). Para valuar derivados financieros, en particular opciones, es crucial tener un buen modelo de la distribución de probabilidad del activo subyacente. El más famoso modelo en tiempo continuo es el de Black-Scholes (BS), el cual usa la distribución normal para modelar los log-retornos del subyacente. En este modelo el precio del subyacente está dado por el movimiento Browniano Geométrico.

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

donde $W_t, t \geq 0$ es un movimiento browniano, es decir W_t tiene una distribución normal con media 0 y varianza t. Es ampliamente conocido que los log-retornos de muchos activos financieros tienen una curtosis más grande que la de la distribución normal. Por tanto, en este capítulo se propone un modelo que controla el exceso de curtosis y esta basado en la distribucion de Meixner.

La distribución de Meixner pertenece a la clase de distribuciones infinitamente divisibles y da lugar a un proceso de Lévy. El proceso de Meixner fue introducido por primera vez en las finanzas teoricas y propuesto como un modelo de data financiera en [19]. Además, este proceso se originó en base a la teoria de polinomios ortogonales presente en [15].

6.1. Proceso de Meixner Simétrico

Definición 6.1. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución de Meixner con parámetros α, β, δ, m, si su función de densidad está dada por*

$$f(x) = \frac{(2\cos(\frac{\beta}{2}))^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)} \exp\left[\frac{\beta(x-m)}{\alpha}\right]\left|\Gamma\left(\delta + \frac{i(x-m)}{\alpha}\right)\right|^2, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

con $\alpha > 0$, $|\beta| < \pi$, $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{R}$.

Esta distribución es denotada por $M(\alpha, \beta, \delta, m)$. El parámetro m es de posición, mientras α y δ tienen influencia en la forma puntiaguda de la distribución. Asimismo, β es el parámetro de forma el cual influye en la asimetría de la distribución.
Su función característica está dada por

$$\psi(u) = e^{ium}\left(\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha u - i\beta}{2})}\right)^{2\delta}. \tag{6.1}$$

Las expresiones explicitas para su media, varianza, curtosis y el coeficiente de asimetría son

$$\text{Media} = m + \alpha\delta\tan(\frac{\beta}{2}) \tag{6.2}$$

$$\text{Varianza} = \alpha^2\delta\cos^{-2}(\frac{\beta}{2}) \tag{6.3}$$

$$\text{Coeficiente de Asimetría} = \text{sen}(\frac{\beta}{2})\sqrt{\frac{2}{\delta}} \tag{6.4}$$

$$\text{Curtosis} = 3 + \frac{(2-\cos(\beta))}{\delta} \tag{6.5}$$

Definición 6.2. *Sea X una variable aleatoria. Se dice que X tiene distribución de Meixner simétrica si y solo si $\beta = 0$.*

En este caso denotaremos a la distribución $M(\alpha, 0, \delta, \mu)$ por $MS(\alpha, \delta, \mu)$. Su función de densidad está dado por

$$f(x) = \frac{2^{2\delta}}{2\alpha\pi\Gamma(2\delta)}\alpha\left|\Gamma\left(\delta + \frac{i(x-m)}{\alpha}\right)\right|^2 \tag{6.6}$$

Ademaás, de (6.2), (6.3) y (6.5), su media es m, su varianza es $\frac{\alpha^2\delta}{2}$ y su curtosis es $3+\frac{1}{\delta}$. Por una simple inspección de la función característica dada en (6.1), podemos notar que el generador característico de la distribución simétrica de Meixner es

$$\varphi(\upsilon) = \left(\frac{1}{\cosh(\sqrt{\frac{\upsilon}{\delta}})}\right)^{2\delta}. \tag{6.7}$$

6.1.1. Valuación de opciones con un modelo de Meixner Simétrico

Supongamos que $\mu < r$. En este caso, la Q-distribución de Y_1 es dada por $MS(\alpha, \tilde{\delta}, m)$, donde $\frac{\alpha^2\tilde{\delta}}{2} = \tilde{\sigma}^2$. De la ecuación (3.6) y de (6.7) se tiene

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(\arccos(e^{-(r-m)\kappa})\right)^2\frac{1}{\kappa}, \tag{6.8}$$

donde $\kappa = \frac{\alpha^2}{4\sigma^2}$.

Bajo la medida Q, $Y_t \sim MS(\alpha, \tilde{\delta}t, mt)$ con media mt y varianza $\tilde{\sigma}^2 t = \frac{\alpha^2\tilde{\delta}t}{2}$. La distribución de Y_t bajo la medida Q_1 esta determinada por el siguiente resultado.

Proposición 6.3. *Para cada $t > 0$, la Q_1 distribución de Y_t es $M(\alpha, \alpha, \tilde{\delta}t, \mu t)$.*

Demostración. Del cambio de numerario definido en (3.8), se puede notar que la densidad de Y_t bajo Q_1 está dada por

$$\begin{aligned} e^{y-rt} f^Q_{Y_t}(y) &= e^{y-mt}e^{-(r-m)t}\frac{2^{2\tilde{\delta}t}}{2\alpha\pi\Gamma(2\tilde{\delta}t)}\left|\Gamma\left(\tilde{\delta}t + \frac{i(y-mt)}{\alpha}\right)\right|^2 \\ &= e^{y-mt}\frac{(2\cos(\frac{\alpha}{2}))^{2\tilde{\delta}t}}{2\alpha\pi\Gamma(2\tilde{\delta}t)}\left|\Gamma\left(\tilde{\delta}t + \frac{i(y-mt)}{\alpha}\right)\right|^2. \end{aligned}$$

Se ha usado el generador característico (6.7) para la distribución simétrica de Meixner y el hecho que $\frac{\alpha^2\tilde{\delta}}{2} = \tilde{\sigma}^2$:

$$\begin{aligned} \left(\cosh\left(\sqrt{\frac{-\tilde{\sigma}^2}{2\tilde{\delta}}}\right)\right)^{2\tilde{\delta}} &= e^{-(r-m)} \\ \left(\cos\left(\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\tilde{\delta}}}\right)\right)^{2\tilde{\delta}} &= e^{-(r-m)} \\ \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{2\tilde{\delta}} &= e^{-(r-m)}. \end{aligned}$$

Esto muestra lo requerido. $\square$

Este último resultado, (6.2) y (6.3), nos permiten concluir que

$$E^{Q_1}[Y_1] = m_1 = m + \frac{2}{\alpha}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{\sigma}^2 \tag{6.9}$$

$$Var^{Q_1}[Y_1] = \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{2}{1+\cos\alpha}\tilde{\sigma}^2 \tag{6.10}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(\arccos(e^{-(r-m)\kappa})\right)^2 \frac{1}{\kappa}, \tag{6.11}$$

donde $\kappa = \frac{\alpha^2}{4\sigma^2}$. Denotamos por $F_{MS}(y)$ a la Q-función de distribución de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_t - mt}{\tilde{\sigma}\sqrt{t}}$ por $F_M(y)$ y a la Q_1-función de distribución de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_t - m_1 t}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{t}}$. Dadas ambas funciones de distribución se obtiene la fórmula explícita para valuar una opción de compra europea cuando el proceso de los precios es un proceso MS.

Proposición 6.4. *Sea $Y_t \sim MS(\alpha, \delta t, mt)$ y $\mu < r$. Entonces, el precio libre de arbitraje de una opcion de compra europea usando MMEN está dado por*

$$C_0 = S_0\left[1 - F_M\left(-\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + m_1 T}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T}}\right)\right] - e^{-rT}KF_{MS}\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + mT}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right), \tag{6.12}$$

donde $m_1 = m + \frac{2}{\alpha}\tan(\frac{\alpha}{2})\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{2}{1+\cos\alpha}\tilde{\sigma}^2$ *y* $\tilde{\sigma}^2 = \left(\arccos(e^{-(r-m)\kappa})\right)^2 \frac{1}{\kappa}$.

6.2. Comparaciones Numéricas

Con el objetivo de hacer algunas comparaciones numéricas sobre el precio de la opción bajo los modelos Black-Scholes y Meixner Simétrico, aproximaremos la distribución de Meixner de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_T - mT}{\sigma\sqrt{T}}$ por la distribución estandár normal, es decir cambiamos F_{MS} por Φ. Asimismo, aproximaremos la distribución de Meixner de la variable aleatoria estandarizada $\frac{Y_T - \mu_1 T}{\sigma\sqrt{T}}$ por una distribución normal estándar, es decir cambiamos F_M por Φ, porque tiene una grado de asimetría mínimo que puede ser despreciable. Además se tiene que el parámetro de forma δ y el parámetro de exceso de curtosis de la distribución de Meixner estan relacionados por $\gamma = \frac{1}{\delta}$. Así, obtenemos una fórmula modificada de Black-Scholes para la valuación de opciones que toma en cuenta el exceso de curtosis. La fórmula modificada de Black-Scholes para el modelo MS es

$$C_0 \approx S_0 \left[\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + m_1 T}{\tilde{\sigma}_1 \sqrt{T}} \right) \right] - e^{-rT} K \Phi \left(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + mT}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \right) \tag{6.13}$$

donde $m_1 = m + \frac{1}{\lambda}\tan\left(\sigma\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right)\sigma^2$, $\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{\cos^2(\lambda)}\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\sigma}^2 = \left(\operatorname{arc}\cos(e^{-(r-m)\frac{\gamma}{2}})\right)^2 \frac{2}{\gamma}$ y $\lambda = \sigma\sqrt{\frac{\gamma}{2}}$. Podemos notar que el modelo MS converge al modelo de Black-Scholes cuando el parámetro de exceso de curtosis γ tiende a cero. En el siguiente gráfico se aprecia la diferencia a través del tiempo en los precios de una opción de compra europea bajo los dos modelos de valuación usando el mismo conjunto de parámetros. La brecha entre el precio de la opción obtenida bajo el modelo MS y el obtenido en el modelo BS aumenta a medida que el periodo de maduracion de la opción aumenta. Los precios exactos y las diferencias porcentuales son presentadas en la Tabla 6.1.

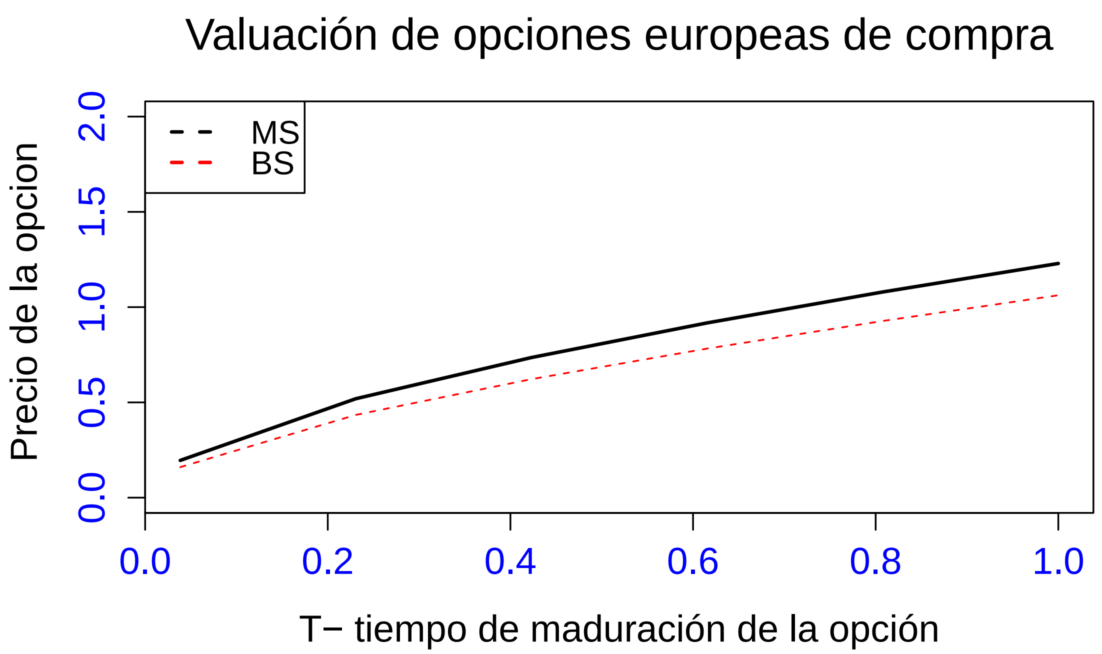

Figura 6.1: Precios de una opción europea de compra obtenidos con los modelos MS y BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Tiempo de Maduración (Años)	**2/52**	**12/52**	**22/52**	**32/52**	**42/52**	**1**
Modelo BS (i)	0.160	0.434	0.622	0.782	0.927	1.062
Modelo MS (ii)	0.195	0.519	0.735	0.916	1.079	1.229
Diferencia (ii- i)	21.88	19.59	18.17	17.26	16.40	15.73

Tabla 6.1: Diferencia porcentual del precio de la opción europea de compra bajo el modelo MS respecto al modelo BS. Los valores de los parámetros usados son: $So = K = 10$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}19$, $\mu = 0{,}03$, $\gamma = 4$.

Conclusiones

1. La propiedad de simetría de las distribuciones marginales del proceso de Lévy consideradas en el presente trabajo es una característica crucial para poder determinar la distribución marginal del proceso de Lévy simétrico en un instante de tiempo t bajo la medida martingala equivalente natural (MMEN) Q. La Q-distribución de Y_t, nos permite obtener una fórmula cerrada de valuación de opciones europeas de compra mediante el uso de cambio de numerario.

2. En el estudio de la existencia y la unicidad de la medida equivalente natural (MEN) surgen dos hechos importantes. Primero, si el proceso de Lévy simétrico posee un componente browniano entonces siempre es posible encontrar dicha medida. Asimismo, dado el supuesto de simetría de la variable aleatoria Y_t, la existencia de una MEN se caracteriza cambiando el parámetro de posición de la distribución simétrica de Y_1. Segundo, si el proceso de Lévy simétrico no tiene componente gaussiano entonces la existencia de una MEN depende del supuesto de equivalencia entre la P-medida de Lévy y la medida de Lebesgue. Si se consideran procesos de Lévy simétricos cuyas medidas de Lévy satisfacen dicho requerimiento entonces la existencia de una MEN se caracteriza cambiando el parámetro de escala de la distribución de Y_1. Además, se concluye que para cada proceso de Lévy simétrico existe una única MEN.

3. Para valuar un reclamo contingente, en el caso del presente trabajo, una opción europea de compra se requiere una medida equivalente tal que el proceso de precios

del activo subyacente sea martingala respecto a dicha medida. A dicha medida se le denomina medida martingala equivalente. En este contexto, si se consideran procesos de Lévy simétricos de salto puro, la MMEN podría no ser única, incluso podría no existir.

4. En casos específicos (modelo de Varianza Gamma Simétrico, modelo Normal Inverso Gaussiano Simétrico y modelo de Meixner Simétrico) considerados en este trabajo, es posible asegurar la unicidad de la MMEN.

5. Los modelos que se estudian en este trabajo son: el modelo de Varianza Gamma Simétrico, el modelo Normal Inverso Gaussiano Simétrico y el modelo de Meixner Simétrico. En la situación de estos tres modelos se obtiene una formula generalizada o modificada para valuar opciones de compra, que contempla a la fórmula de Black-Scholes como un caso particular. Estos modelos nos permiten tener control sobre el parámetro de exceso de curtosis, que es importante para controlar el comportamiento de las colas de la distribución.

6. Mediante simulaciones numéricas del precio de la opción bajo los tres modelos señalados líneas arriba y bajo el modelo clásico de Black-Scholes, se llega a la conclusión que el precio de la opción obtenido con la fórmula modificada en cada uno de los tres modelos trabajados es mayor al precio obtenido con la fórmula clásica de Black-Scholes. Además, la brecha entre dichos precios aumenta a medida que el periodo de maduración de la opción aumenta. El análisis se realiza para períodos cortos no mayores a un año.

Referencias

[1] Applebaum, D. (2009). *Lévy processes and Stochastic calculus* (2^{nd} ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

[2] Barndorff, N. (1995). *Normal Inverse Gaussian processes and the modelling of stock returns*. Research Report 300, Department of Theorical Statistics, university of Aarhus.

[3] Barndorff, N., and Shepard. (1999). *Non-Gaussian OU based models and some of their uses in financial economics*. Journal of the Royal Statistical Society B, *2001*(63), 167-241.

[4] Bates, D. (1991). *The Crash of '87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets*. The Journal of Finance, *3*(46), 1009-1044.

[5] B. Oskendal and A. Sulem. (2009). *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions* (3^{th} ed.). Springer-Verlag.

[6] Cambanis, S., Huang, S., and Simmons, G. (1981). *On the Theory of Elliptically Contoured Distributions*. The Journal of Multivariate Distributions, *3*(11), 368-385.

[7] Dilip, M., and Frank, M. (1991). *Option Pricing with Variance Gamma Martingale Components*. Mathematical Finance, *1*(4), 39-55.

[8] Dilip, M., Carr, P., and Chang, E. (1998). *The Variance Gamma Process and Option Pricing*. European Finance Review, *1998*(2), 79-85.

[9] Fang, K.T., Kotz, S., and Ng, K.W. (1990). *Symmetric multivariate and related distributions*. Chapman & Hall, London.

[10] Johnson, N., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (2^{nd} ed.), (Vol.1). New York: Wiley.

[11] Klebaner, F.C., and Landsman, Z. (2007). *Option Pricing for Log Symmetric Distributions of Returns*. Methodology and Computing in Applied Probability,*2009*(11), 339-357.

[12] Klebaner, F.C., Landsman, Z., Kais, H., and Ying-Oon, T. (2014). *Option Pricing for Symmetric Lévy Returns with Applications*. Asia-Pacific Financial Markets, *2015*(22), 27-52.

[13] Fimma, C. (2005). *Introduction to Stochastic Calculus With Applications* (2^{nd} ed.). London: Imperial College Press.

[14] Giffin, W.C. (1975). *Transform Techniques for Probability Modeling*. New York: Academic Press.

[15] Grigelionis, B. (1999). *Processes of Meixner Type*. Lithuanian Mathematical Journal, *39*(1), 33-41.

[16] Protter, P. (1990). *Stochastic integration and differential equations*. Springer Verlag.

[17] Tankov, P., and Cont, R. (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

[18] Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.

[19] Schoutens, W. and Teugels, J.L. (1998). *Lévy Processes Polynomials and Martingales*. Communications in Statistics. Stochastic Models *14*(1) , 335-349.

[20] Schoutens, W. and Leuven, K.U. (2001). *Meixner Processes in Finance*. Eurodam Report, *2001*(2), 1-22.

[21] Schoutens, W. (2003). *Lévy processes in Finance*. Willey Series in Probabilily and Statistics.