FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

Conocimiento lógico – matemático en niños de una comunidad Shipibo – Konibo de Ucayali

Tesis para optar por el título de Licenciado en Psicología con mención en Psicología Educacional que presenta el bachiller:

Jorge Villalba Garcés

Asesora: Susana Frisancho

LIMA-PERÚ

2016

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es identificar y describir el conocimiento lógico matemático implicado en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y noción de mitad en un grupo de niños de una comunidad Shipibo-Konibo de Ucayali. Para esto, se realizó una evaluación de estas competencias matemáticas haciendo uso del método clínico – crítico de Jean Piaget, contando con material representativo y material concreto manipulable y por medio de problemas contextualizados en la realidad del pueblo Shipibo – Konibo. Adicionalmente, se realizó una evaluación escrita de naturaleza cuantitativa que evaluó la adición, sustracción y noción de mitad. Los resultados muestran falencias en el desarrollo de las competencias matemáticas evaluadas. Sin embargo, se pueden observar mejores resultados por medio de la evaluación cualitativa en contraste con la evaluación cuantitativa. Finalmente, los niveles de desarrollo de las competencias matemáticas encontrados se condicen con la teoría Piagetiana. Los resultados se discuten utilizando la teoría Piagetiana y haciendo un análisis crítico de las necesidades de la educación intercultural bilingüe en la región Ucayali de la Amazonia del Perú.

Palabras Clave: Conocimiento lógico–matemático, Jean Piaget, evaluación cualitativa.

ABSTRACT

This study seeks to identify and describe the mathematical knowledge held by Shipibo-Konibo children of the Ucayali region, in Peru, when solving addition, subtraction and multiplication problems, and also problems involving the concept of “half”. These operations were assessed through the “clinical – critic” method of Jean Piaget, using concrete material and culturally contextualized problems. Additionally, a traditional written, pencil and paper test, was used to evaluate addition, subtraction and the notion of “half”. The results show some difficulties in the development of the four mathematical skills; however, better results were obtained through qualitative, piagetian assessment, in contrast to the quantitative, pencil and paper assessment. Developmental levels for addition, subtraction, multiplication and the concept of “half” were identified, which are consistent with Piagetian theory. The results are discussed using Piaget’s theory, and critically analyzing the needs of intercultural bilingual education in the Ucayali region of Peru.

Key Words: Logical-mathematics knowledge, Jean Piaget, qualitative assessment.

Tabla de contenidos

El conocimiento lógico –matemático y las operaciones matemáticas básicas 1

Evaluación de los logros de aprendizaje en matemáticas 4

Método 10

Participantes 10

Técnicas de recolección de la información 11

Procedimiento 20

Resultados 29

Primera Sección: Resultados referentes a la adición 29

Segunda Sección: Resultados referentes a la sustracción 38

Tercera Sección: Resultados referentes a la multiplicación 44

Cuarta Sección: Resultados referentes a la noción de mitad 48

Quinta Sección: Resultados en la prueba de lápiz y papel 53

Discusión 62

Referencias 71

Apéndices 80

Apéndice A: Transcripción de la operación de adicción 80

Apéndice B: Transcripción de la operación de sustracción 95

Apéndice C: Transcripción de la operación de multiplicación 105

Apéndice D: Transcripción de la noción de mitad 109

Apéndice E: Protocolos para la evaluación basada en tareas 113

Apéndice F: Protocolo para la evaluación del pensamiento multiplicativo 118

Apéndice F: Prueba de lápiz y papel 125

El conocimiento lógico matemático y las operaciones matemáticas básicas

Para Jean Piaget (1950/1975, 1967/1971) el conocimiento puede ser de tres tipos: físico, social (o convencional), y lógico matemático. Este último se construye por medio de las relaciones que el propio niño ha creado gracias a su interacción con los objetos (Kamii, 1985; Piaget, 1967/1971). Por ejemplo, si tenemos frente a nosotros dos fichas, una de color rojo y otra de color azul, y notamos que son diferentes, nos encontramos con el conocimiento lógico matemático. Las fichas pueden ser observadas, pero las relaciones que se establecen entre ellas (ser diferentes o ser iguales, por ejemplo), no. Las relaciones son construidas mentalmente por los individuos (Kamii, 2000).

El niño irá desarrollando su conocimiento lógico – matemático en la medida en que vaya estableciendo y coordinando relaciones simples que ha construido entre distintos objetos. Relaciones como “más”, “diferentes” o “iguales” le permitirán descubrir, por ejemplo, que hay más flores en el mundo que rosas o más animales que perros. Otro ejemplo de relación que será creada por el niño es el número, que debe ser entendido como una abstracción de la organización que el mismo sujeto construye para darle sentido al mundo. Una vez creado el número, distintos números podrán ser relacionados entre sí llevando a deducir, por ejemplo, relaciones aditivas (Kamii, 2000; Piaget, 1967/1971). La construcción del número se apoya en las operaciones mentales que el niño va logrando y estas operaciones, a su vez, dependen del desarrollo de su pensamiento lógico.

En la teoría Piagetiana una operación mental es una acción interiorizada y reversible que se encuentran organizada en estructuras de conjunto (Piaget e Inhelder, 1980). Se dice que estas acciones son interiorizadas debido a que el individuo las ejecuta mentalmente sin necesidad de acciones físicas, y son reversibles porque tienen la característica de poder ser anuladas o compensadas mentalmente. Esto puede ejemplificarse por medio de la prueba de conservación del líquido. Cuando los niños que se encuentran en el periodo pre-operacional vierten el contenido de un vaso de agua en otro vaso mucho más angosto y con mayor altura, sólo pueden hacer referencia al estado inicial (agua en el primer vaso) y el final (agua en el vaso largo y angosto) luego de realizar la acción (verter el agua en el reciente largo y angosto). Esto se debe a que sus acciones no están coordinadas en una estructura operatoria de conjunto y en consecuencia, el niño no entiende que al estar el agua en un vaso más angosto la altura aumenta sin modificar la cantidad de líquido. Para poder relacionar los dos estados (primer vaso pequeño y ancho, y vaso largo y angosto) el niño deberá haber desarrollado las "leyes de compensación", necesarias para entender el paso de un estado al otro conectando el estado inicial con el estado final. Los niños que no han desarrollado aún estas leyes de compensación manifiestan su opinión, respecto de la cantidad de líquido, basándose solamente en la información que obtienen por medio de los sentidos (Piaget, 1967/1971).

El desarrollo del pensamiento operatorio, al que se hace referencia en el párrafo anterior, abre paso a la posibilidad de que el individuo realice operaciones aritméticas. La capacidad de poder sumar, restar, dividir o multiplicar es una consecuencia de las acciones que el niño realiza previamente, cuando todavía concibe los elementos de manera cualitativa. Estos deberán transformarse en unidades con cuantificación numérica para dar inicio a las operaciones aritméticas (Flavell, 1976).

Para Kamii (1994), los niños deberían aprender aritmética mediante un proceso constante de reinvención de los procedimientos. Esto se debe a la propia naturaleza del conocimiento lógico – matemático, conocimiento que se construye al interior del sujeto. En coherencia con esto, recomienda eliminar la enseñanza de los algoritmos, pues estos llevan a los estudiantes a valerse más por una estrategia impuesta que por su propio pensamiento, y suelen generar problemas respecto del valor posicional en los números.

En el mismo sentido, el objetivo de la suma no debe ser la memorización de los "hechos de la adición" (como 3+5=8), sino que los niños lleven a cabo la acción mental de sumar, siendo la memorización una consecuencia directa de este proceso y no una meta pedagógica (Kamii, 2000). Piaget (1967/1971) estudió la composición aditiva de los números encontrando, por medio de diferentes experimentaciones, tres niveles de desarrollo: un nivel de no-composición aditiva, una etapa media en la cual la adición se realiza de manera intuitiva y una etapa final en la cual la noción de adición de los números se encuentra consolidada, es decir que la cantidad no es variable y el evaluado maneja un pensamiento reversible. Piaget considera necesarias estas dos características para poder hablar de una verdadera composición aditiva de los números, pues otras manifestaciones numéricas, desprovistas de estas características, no demuestran una verdadera capacidad aditiva. Un ejemplo de esto puede ser el desarrollo del recurso de conteo, pues este implica únicamente una "conciencia de sucesión", pero carece de las características nombradas anteriormente.

En el caso de la sustracción, Piaget (1978) afirma que los niños suelen tener dificultades para pensar en negativo, pues todas las acciones que el niño realiza al principio solo funcionan positivamente. Además, la sustracción exige también tener claras las nociones referentes a la relación parte-todo (Piaget, 1977b), por lo que esta se presenta como una meta muchas veces demasiado compleja e inadecuada para los primeros cursos de la primaria (Kamii, 2000).

Por otro lado, la multiplicación, es una operación mucho más compleja que la adición, pues requiere mayores niveles de abstracción y relaciones de inclusión, las que muchas veces deben darse en simultáneo (Piaget, 1987). Diversos estudios demuestran que esta operación es un objetivo demasiado complejo incluso para niños de 9 años de edad (Clark & Kamii 1996; Kamii, 1994). Kamii (1994) realiza una comparación que ilustra la afirmación de Piaget: al sumar (4+4+4) es necesario un solo nivel de abstracción, pues cada grupo de unidades de cuatro se encuentran en el mismo nivel. Por el contrario multiplicar (3x4) implica, primero, elaborar unidades de 4 y, segundo, establecer dos relaciones: la correspondencia entre 4 y 1 entre unidades de 4 y unidades de 1, así como luego incluir una unidad de 4 en dos unidades de 4 y dos unidades de 4 en tres unidades de 4. Esta diferencia entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo puede observarse en la figura que se presenta a continuación (Kamii, 1994, p.42).

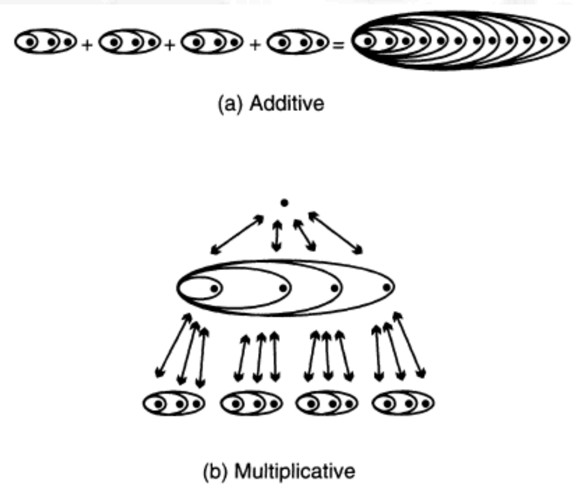


Figura 1. Pensamiento aditivo y pensamiento multiplicativo
(Kamii & Clark; 1994, p.42)

Al igual que sucede con la suma, resulta también una mala estrategia apelar a la memorización de las tablas de multiplicar, pues esto anula la iniciativa de los niños por realizar el ejercicio mental de operar de manera multiplicativa (Duckworth, 1987).

Finalmente, una noción importante en la formación de conceptos matemáticos es la noción de mitad, que como diversos estudios indican, es compleja de enseñar para muchos docentes (Ball, 1990; Castro Rodríguez, Rico Romero & Gómez; 2014; Gairín, 2013; Newton, 2008; Simón, 1993). Debido a esto se pueden observar esfuerzos pedagógicos por motivar el aprendizaje de esta noción (May, 1994). Piaget, Inhelder & Szeminska (1960), trabajando con cantidades discretas, investigaron la división de una totalidad en dos partes iguales. En sus experimentaciones encontraron que la noción de mitad se desarrolla paulatinamente a lo largo del desarrollo conforme se van complejizando las capacidades cognitivas de los niños. En concreto, los niños de cuatro o cinco años que fueron evaluados presentaban dificultades para dividir una totalidad en dos partes iguales, debido a una incapacidad para poder concebir simultáneamente las partes y el todo. Los niños otorgaban respuestas aproximadas, ayudados por su percepción, y no presentaban conservación de la cantidad cuando los materiales eran modificados a un nivel perceptual (espaciándose, agrupándose de modos distintos, etc.). Esto resulta importante, puesto que la conservación de la cantidad tiene como consecuencia el desarrollo de la noción de mitad. En su trabajo con cantidades discontinuas, Piaget (1967/1971) encontró tres niveles de desarrollo de esta noción. En la primera etapa, el evaluado puede dividir una totalidad en dos partes iguales mientras su percepción se lo permita, pero si la cantidad es grande tiende a equivocarse. Sin embargo, en cualquier caso, el evaluado no acepta que la totalidad se conserva al haber sido dividida en dos partes. En la segunda etapa, el evaluado puede lograr la división de una totalidad en dos partes iguales por medio de la comparación cualitativa, es decir por medio de una correspondencia término a término. Sin embargo, puede aún presentar dificultades para conservar el número cuando la totalidad es dividida. Finalmente en la tercera etapa, los evaluados logran dividir una totalidad en dos partes iguales y conservar la cantidad más allá de las modificaciones perceptuales.

Resulta importante añadir que los estudiantes podrían encontrar soluciones para problemas en los que esté implicada la noción de mitad, pero no comprender en realidad las relaciones parte – todo. Es decir que encontrar la respuesta correcta a un problema de este tipo no garantiza la consolidación de la noción (Parrat & Voneche, 1992).

Evaluación de los logros de aprendizaje en matemáticas

En América Latina existen grandes diferencias entre países de la región al respecto del aprendizaje de las matemáticas (Cáceres, De la Peña, Pineda, Di Prisco & Solotar, 2014). Sin embargo, en líneas generales los jóvenes no cuentan con un adecuado dominio de los conocimientos matemáticos, lo que es perjudicial para su desempeño como ciudadanos globales. Esta situación se debe a la existencia de planes curriculares deficientes, materiales de aprendizaje inadecuados y poco conocimiento de los profesores respecto de la matemática y su enseñanza. Adicionalmente, dentro de las aulas se ha podido encontrar que prima la memorización y la mecanización, así como la poca retroalimentación por parte de los profesores hacia los estudiantes (Valverde & Näslund-Hadley, 2010).

Evaluaciones realizadas, tanto por evaluadores peruanos como extranjeros (Morales & Frisancho, 2013; PISA, 2009, 2012; SICRECE 2015; UMC, 2013, 2014, 2015; UNESCO 2014; Valverde et al., 2010), muestran un bajo nivel en el desarrollo de las competencias matemáticas. Específicamente en primaria, la Evaluación Censal Escolar (ECE; 2013, 2014, 2015), realizada por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) en segundo de primaria, muestra que los conocimientos matemáticos no se están desarrollando de manera adecuada en la mayoría de los estudiantes. A continuación, en la *Tabla 1* se describen los resultados encontrados en los años 2013, 2014 y 2015 a nivel nacional. Se podrá observar que la prueba ECE posiciona a los estudiantes en tres niveles de desempeño: "en inicio", "en proceso" y "satisfactorio". Los estudiantes que se encuentran en el nivel "en inicio" no han logrado los aprendizajes esperados, pues solo pueden realizar tareas de poca exigencia. Los estudiantes que se encuentran en el nivel "en proceso" solo han logrado parcialmente los aprendizajes, se encuentran en el camino de lograrlos, pero aún manifiestan dificultades. Finalmente, en el nivel "satisfactorio" se puede encontrar a los estudiantes que han logrado los aprendizajes esperados para su grado.

Tabla 1
Resultado sobre la competencia matemática en de la prueba ECE a nivel nacional

Niveles	2013	2014	2015
En inicio	50,9%	38,7%	31%
En proceso	32,3%	35,3%	42,3%
Satisfactorio	16,8%	25,9%	26,6%

Como se puede observar, a pesar de que del año 2013 al 2015 se han presentado mejorías en la competencia matemática a nivel nacional, sólo poco más de la cuarta parte de los estudiantes peruanos logra ubicarse en el nivel "satisfactorio".

Debido a que los niños evaluados en este estudio son estudiantes que pertenecen a una comunidad Shipibo-Konibo de la región Ucayali, en la siguiente tabla se pueden observar los resultados globales de la competencia matemática en esta región.

Tabla 2
Resultados sobre la competencia matemática en la prueba ECE en la región Ucayali

Niveles	2013	2014	2015
En inicio	71,6%	68,7%	53,6%
En proceso	23,3%	23,5%	36,1%
Satisfactorio	5,1%	7,8%	10,3%

En el caso de la región Ucayali, se puede observar, en los últimos resultados, una mejoría con respecto a los años 2013 y 2014. Sin embargo, es resaltante que únicamente el 10,3% de los estudiantes haya logrado un aprendizaje "satisfactorio". Como consecuencia, la región Ucayali es una de las regiones del Perú con los peores resultados en estos tres años.

Finalmente, debido a que los estudiantes con los que se trabajó en este estudio se encuentran más relacionados al sector rural que al sector urbano, se considera pertinente exponer las diferencias entre estos dos sectores en la última evaluación realizada en el año 2015. La siguiente tabla expone una comparación de estos dos sectores.

Tabla 3
Resultados sobre la competencia matemática en la prueba ECE 2015 en la región Ucayali: comparación entre urbano y rural

Niveles	Urbano	Rural
En inicio	49,8%	79,4%
En proceso	38,7%	18,3%
Satisfactorio	11,4%	2,3%

Se puede apreciar una diferencia considerable entre el rendimiento de los estudiantes del sector urbano y los estudiantes del sector rural, encontrando un menor desarrollo de las competencias matemáticas en el sector rural. Esto puede llevarnos a deducir que el desarrollo de las competencias matemáticas en comunidades indígenas, como con la que trabaja este estudio, no se están dando de manera adecuada. Además, nuestra experiencia de trabajo en el Grupo de investigación en cognición, aprendizaje y desarrollo (G-CAD) en comunidades Shipibo-Konibo y Asháninka de la región Ucayali nos han mostrado también las dificultades que presentan para realizar cálculos matemáticos sencillos. Si bien no se ha evaluado la competencia matemática en niños de escuelas interculturales bilingües (EIB), sí existen experiencias de evaluación de matemática en castellano, en segundo grado, en las Provincias de Atalaya, Coronel Portillo, Padre Abad y Purús en Ucayali, en las que hay población indígena (SICRECE 2015). La mayoría de los estudiantes evaluados se encuentran en el nivel más bajo de la competencia matemática (nivel "en inicio"), lo que indica que no han desarrollado las capacidades matemáticas esperadas para su edad.

Una de las razones que explican el bajo desempeño de los estudiantes peruanos en matemáticas es que lo que ocurre en los salones de clase dista mucho de lo que plantea el Diseño Curricular Nacional, tanto para la educación básica como para la educación intercultural bilingüe (EIB) (Ministerio de Educación, 2013a, 2009). Existe evidencia de que en las clases los docentes priorizan algunos temas en desmedro de otros y brindan retroalimentación equivocada, además de que muchos de los ejercicios que se plantean son de muy baja demanda cognitiva (Cueto, Ramírez, León & Pain, 2003) y que las evaluaciones de aula resultan desorganizadas y sin mayor impacto (Ravela, 2009). Adicionalmente, la variable socioeconómica se asocia con los bajos resultados de aprendizaje en matemáticas, así como en las expectativas que tiene el estudiante respecto de sus propios aprendizajes, siendo los estudiantes con menores recursos los que obtienen los resultados más bajos y los que manifiestan las expectativas más bajas sobre sus aprendizajes (Ravela, 2002; Cueto, Guerrero, León, Zapata & Freire, 2013).

Las evaluaciones estandarizadas no son completamente adecuadas para estudiantes indígenas (Nelson-Barber & Trumbull, 2007; Villareal, 2006) al no tomar en cuenta sus conocimientos particulares ni sus modos de pensar. En este tipo de evaluaciones, los estudiantes con mayores recursos económicos obtienen mejores resultados que los estudiantes en situación de pobreza (Bos, Ganimian & Vegas, 2013; Barrenechea, 2010; Carnevale, 2005). Diversas investigaciones se inclinan a pensar que el aprendizaje de la matemática puede tener mejores resultados cuando se encuentra contextualizado culturalmente (Adams, Luitel, Afonso, & Taylor, 2008; Dewah, & Van Wyk, 2014; Tillema, 2012; Nunes, 1993a, 1993b; Nunes, Carraher, & Dias Schliemann, 1982; Nunes & Bryant, 1996) ya que, si bien las matemáticas son un conocimiento de naturaleza universal (Piaget, 1964/1985), el contexto sociocultural en el que se desarrollan, las prácticas matemáticas cotidianas con las que el niño está familiarizado, las actividades tradicionales que implican nociones matemáticas, y las actividades de conteo de los adultos, son importantes e influyen en su aprendizaje. Un caso ilustrativo del punto anterior se puede encontrar en los estudios respecto de las relaciones espaciales que las niñas Mayas Zinacantecas demostraban al tejer, en comparación con niños estadounidenses que no tejían. Las jóvenes tejedoras Mayas, carentes de escolaridad, construyeron representaciones de mayor complejidad en comparación a estudiantes estadounidenses que construyeron representaciones abstractas y con detalles muy pobres (Greenfield & Childs, 1977; Greenfield, Maynard, & Childs, 2003; Maynard & Greenfield, 2003). En este sentido, evaluaciones de la capacidad matemática que incluyan situaciones y actividades culturalmente pertinentes identifican mejor el verdadero potencial de los niños y deberían usarse para enseñarles y evaluarlos. Lamentablemente, los profesores suelen tener creencias sobre las matemáticas, su naturaleza epistemológica y los apoyos que son necesarios para su proceso de construcción, que impiden que se usen recursos pedagógicos innovadores de manera flexible y que se produzcan aprendizajes significativos en esta área (Becker 2012, 2001; Gascón, 2001; Moreano, Asmad, Crus & Cuglievan, 2008). Esto último resulta preocupante, puesto que los docentes cumplen un rol fundamental en la consolidación de las nociones matemáticas en los estudiantes (Lerman, 1993).

Investigar la construcción del conocimiento lógico – matemático es de suma importancia, puesto que los niños deben aprender matemáticas para organizar los intercambios con la realidad física y social y para desarrollar una mejor compresión del mundo que los rodea (Piaget, 1950/1975; Inhelder & Piaget, 1955). Lamentablemente, el rendimiento de los estudiantes peruanos en matemáticas es deficiente, lo que se acentúa en los estudiantes de la región de Ucayali, aún más cuando se trata de estudiantes de comunidades nativas.

A pesar de la importancia que tiene el conocimiento lógico - matemático, existen muy pocas evaluaciones en el contexto Amazónico peruano. Las evaluaciones a gran escala que realiza el MINEDU son de corte cuantitativo, lo que no permite profundizar en los procedimientos que los niños utilizan para resolver problemas aritméticos. Por su propia naturaleza, este tipo de evaluación no recoge los procedimientos que ha construido el niño para enfrentar los problemas que se le presentan, sino que se enfoca solo en las respuestas finales y desatiende los procesos. Debido a esto, y al rendimiento particularmente bajo que los estudiantes de la Amazonía tienen en estas evaluaciones, en este estudio se ha considerado importante utilizar problemas contextualizados, también llamados problemas con argumentos, ya que los niños construyen sus nociones aritméticas mediante su contacto con la realidad y los problemas contextualizados son fácilmente resueltos por ellos sin que se les haya enseñado modos de resolución formales (Kamii, 2000).

Este estudio se suma a la escasa investigación piagetiana en la academia peruana (Meza & Sirlopú, 1997), así como a las investigaciones que se han dedicado a estudiar el desarrollo del pensamiento desde la perspectiva constructivista en contextos interculturales diversos (Adjei, 1977; Bovet, 1974; Bruner, 1966; Dasen, 1984; Opper, 1977; Price-Williams, 1961). El objetivo de esta investigación es identificar y describir el conocimiento lógico matemático implicado en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y noción de mitad en un grupo de niños de una comunidad Shipibo-Konibo de Ucayali. Para esto, se evaluó a los estudiantes, en dichas operaciones, por medio de la entrevista clínica – crítica de Jean Piaget, haciendo uso de ejercicios matemáticos contextualizados con material concreto manipulable o material representativo. Además, se buscó establecer una comparación entre el desempeño de los estudiantes con este tipo de evaluación de naturaleza cualitativa y su desempeño en una prueba de lápiz y papel, es decir, una evaluación cuantitativa. El objetivo ha sido planteado basándonos en el Diseño Curricular Nacional (2009) y las Rutas de aprendizaje (2015), así como los contenidos que son evaluados en la Evaluación Censal Escolar (ECE).

Método

Participantes

Los participantes de este estudio son 7 estudiantes de nivel primario, de entre 7 y 11 años, que pertenecen a una escuela multigrado EIB de una comunidad Shipibo-Konibo de Ucayali. Su lengua materna es el Shipibo-Konibo, aunque todos los participantes demostraron tener domino del español. La selección fue accidental, pero procurando contar con un rango de edades que permitan observar diferencias en el desarrollo de las nociones matemáticas evaluadas. Para acceder a la muestra se contó con el consentimiento de la comunidad, incluyendo al jefe de la misma, el profesor responsable de la escuela, y los padres de los estudiantes. A los niños se les explicó el objetivo de la evaluación y se les pidió su asentimiento.

El pueblo Shipibo - Konibo es el producto de una combinación cultural de tres grupos distintos, los Shipibos, los Konibos y los Shetebos. Este pueblo se encontraba tradicionalmente asentado en las costas del río Ucayali y sus afluentes, aunque actualmente se ubica en el oriente peruano, en las regiones Ucayali, Madre de Dios, Loreto y Huánuco, y también en la ciudad de Lima debido a la migración. En el año 2007 la población de las comunidades Shipibo – Konibo llegaba a los 22,517 habitantes (Ministerio de Cultura, 2014; Unicef, 2012).

Las principales características de los participantes del estudio se presentan en la tabla siguiente:

Tabla 4

Principales características de los participantes del estudio

Nombre	Edad	Sexo	Grado
Wil	7 años	Masculino	Segundo
Luc	7 años	Femenino	Segundo
Roc	7 años	Femenino	Segundo
Les	9 años	Femenino	Tercero
Man	9 años	Masculino	Tercero
Dal	11 años	Femenino	Quinto
Sha	11 años	Femenino	Sexto

Técnicas de recolección de información

Este estudio utiliza dos técnicas de recolección de información: la entrevista y la prueba de lápiz y papel. El tipo de entrevista utilizada fue la entrevista clínica-crítica de Jean Piaget y se hizo uso, en algunos casos, de material concreto representativo y en otros, material concreto manipulable. Ducret (2004) define el método clínico-crítico como una entrevista que posee características similares a la entrevista clínica, pero que presenta como objetivo principal indagar en la lógica y el conocimiento del evaluado. Parrat (2016) plantea que este método centra su interés en los niveles de organización sucesivos de la conducta y valoriza los cambios cualitativos por encima de los cuantitativos. Es por esto que este método resulta relevante para esta investigación, pues se desea observar los procedimientos mentales y la lógica usada por los evaluados y no únicamente sus respuestas finales cuando resuelven problemas.

Una de las ventajas del método clínico-crítico es que permite al evaluador formular contra-ejemplos o contra-sugestiones para profundizar en el razonamiento del evaluado (Ducret, 2004). Por ejemplo, si se plantea una situación en la cual el estudiante debe encontrar la mitad de 8 y él da como respuesta el número 4, el método clínico-crítico permitirá formular contra-ejemplos o contra-sugestiones para averiguar si el niño se encuentra seguro de su respuesta, si considera que es la única posible, o no. El objetivo principal de estas preguntas es averiguar el nivel de comprensión de la noción evaluada. En el caso elegido como ejemplo la noción evaluada sería la noción de mitad. Un ejemplo de pregunta para este caso podría ser: *¿Puede ser posible dividir 8 en dos mitades de 3 y 5?* Si el niño contestara que esta es una opción posible podríamos deducir que, a pesar de dar en una primera instancia la respuesta correcta, el estudiante no ha consolidado aún la noción de mitad. Con el método clínico-crítico el evaluador puede preparar un número específico de preguntas pero dentro de la dinámica de la entrevista estás pueden multiplicarse en función de las respuestas del estudiante (Parrat, 2016). Otro punto importante en el método clínico-critico es que el evaluador no solo llegará a conclusiones en torno a lo que el evaluado manifieste verbalmente; observar la manipulación que realiza de algún material puede ser otra forma de encontrar respuesta a nuestras interrogantes (Delval, 2001). En el caso específico de este estudio, las manipulaciones que los evaluados realizaron del material representativo o del material concreto manipulable brindaron información respecto de sus procedimientos y comprensión de la operación o noción evaluada.

Tareas para la evaluación

Para identificar y describir el conocimiento lógico matemático implicado en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y noción de mitad en un grupo de niños de una comunidad Shipibo-Konibo de Ucayali se ha planteado una evaluación basada en tareas contextualizadas. En estas evaluaciones se brindó a los estudiantes material representativo con el fin de que pudieran ayudarse de este para resolver los problemas y que a su vez, el manejo de este material evidenciara el desarrollo de las nociones evaluadas. En el caso de la multiplicación, se utilizó una tarea propuesta por Clark & Kamii (1996) que utiliza material concreto manipulable (tarea 2).

Tareas de adición, sustracción y noción de mitad

Se plantearon problemas aritméticos sobre operaciones de adición, sustracción y noción de mitad, contextualizados en actividades cotidianas del pueblo Shipibo – Konibo. En el momento de la aplicación se hizo uso de material representativo para que el estudiante pueda utilizarlo para hallar la respuesta. Este material consistió en figuras que representaban a los animales u objetos a los que hacía referencia el problema planteado. Solo en un caso específico (el armado de collares) se utilizaron bolitas (blancas y negras) y una pita. En la siguiente figura se visualiza algunos de los materiales utilizados.

Figura 2. Ejemplo de materiales utilizados en la evaluación de adición, sustracción y noción de mitad.

En las siguientes tablas se pueden observar los contextos en los que se sitúan los problemas, el problema en sí, la pregunta planteada al evaluado, la operación que este debió realizar y las características del problema:

Tabla 5

Ejercicios aritméticos de suma

Contexto	Problema	Pregunta	Operación	Características del problema
Perdices para el almuerzo	El lunes pude cazar 4 perdices y el martes 5	¿Cuántas perdices tengo en total?	Operación: Suma (Resolver 4 + 5)	1 dígito + 1 dígito (la suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número menos a 10)
	Un papá y un hijo salieron a cazar perdices y en un momento se separaron. El padre cazó 13 perdices y el hijo 5.	¿Cuántas perdices habrá finalmente en casa?	Operación: Suma (Resolver 14 + 5)	2 dígitos + 1 dígito (La suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número menor a 10)
	Cazamos 21 perdices y el vecino nos regaló 15.	¿Con cuántas perdices tenemos en total?	Operación: Suma (Resolver 21 + 15)	2 dígitos + 2 dígitos (La suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número menor a 10)
Elaboración de collares y pulseras	Tengo este collar que se compone por 8 bolitas, queremos agregarle 9 bolitas más.	¿Cuántas bolitas tendría el collar?	Operación: Suma (Resolver 8 + 9)	1 dígito + 1 dígito (La suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número mayor a 10)
	Un collar se compone por 18 bolitas rojas, si le agregamos 7 azules	¿Cuántas bolitas tiene el collar en total?	Operación: Suma (Resolver 18 + 7)	2 dígitos + 1 dígito (La suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número mayor a 10)
	Un collar se compone por 15 bolitas y deseamos agregarle 18 bolitas más.	¿Con cuántas bolitas nos quedaremos en el collar?	Operación: Suma (Resolver 15 + 18)	2 dígitos + 2 dígitos (La suma de las unidades de los sumandos tiene como resultado un número mayor a 10)

Tabla 6
Ejercicios aritméticos de resta

Contexto	Problema	Pregunta	Operación	Características del problema
Flechas para cazar animales	Queremos ir a cazar animales, teníamos 8 flechas pero nuestro hermano se llevó 3.	¿Cuántas flechas tenemos en casa ahora?	Operación: Resta (Resolver 8 - 3)	1 dígito – 1 dígito
	Salimos a cazar llevando con nosotros 14 flechas y solo usamos 6.	¿Con cuántas flechas regresamos a casa?	Operación: Resta (Resolver 14 - 6)	2 dígitos – 1 dígito (Las unidades del sustraendo son menores a las unidades del minuendo)
	Teníamos en casa 18 flechas, pero tu papá llevó 12 para cazar perdices.	¿Cuántas flechas hay en casa ahora?	Operación: Resta (Resolver 18 - 12)	2 dígitos – 2 dígitos (Las unidades del sustraendo son menores a las unidades del minuendo)
Tapetes para reuniones	Se utilizaron 9 tapetes para una reunión. Tu mamá te dice que 5 tapetes se deben devolver a la vecina y los demás guardarlos en casa.	¿Cuántos tapetes se deben guardar en casa?	Operación: Resta (Resolver 9 - 5)	1 dígito – 1 dígito
	Teníamos 17 tapetes en casa, pero nos olvidamos de guardarlos luego de una reunión y la lluvia mojó 9 tapetes.	¿Cuántos tapetes tenemos secos?	Operación: Resta (Resolver 17 - 9)	2 dígitos – 1 dígito (Las unidades del sustraendo son mayores a las unidades del minuendo)
	Mi mamá tenía 22 tapetes en casa, pero le hemos prestado 14 a la vecina.	¿Cuántos tapetes tenemos en casa?	Operación: Resta (Resolver 22 - 14)	2 dígitos – 2 dígitos (Las unidades del sustraendo son mayores a las unidades del minuendo)

Tabla 7

Ejercicios para mitad

Contexto	Problema	Pregunta	Operación	Características del problema
Pescados para el almuerzo	Hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad.	¿Cuántos peces necesitamos?	Operación: Encontrar la mitad de	Número de un dígito
	Hoy pescamos 16 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad .	¿Cuántos peces necesitamos?	Operación: Encontrar la mitad	Número de dos dígitos: el dígito de las decenas es impar
	Hoy pescamos 23 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad.	¿Cuántos peces necesitamos?	Operación: Encontrar la mitad de	Número de dos dígitos: el dígito de las decenas es par y el de la unidad impar
	Hoy pescamos 24 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad.	¿Cuántos peces necesitamos?	Operación: Encontrar la mitad de	Número de dos dígitos: el dígito de las decenas es par y el de la unidad es también par

Situación para la evaluación de la operación de multiplicación

Se hizo uso de una situación elaborada por Clark & Kamii (1996) para evaluar el pensamiento multiplicativo. Se utilizaron tres peces de madera de 5, 10 y 15 centímetros y cuentas de color azul que simulaban su alimento. En la siguiente figura se observan los materiales utilizados.

Figura 3. Materiales utilizados en la evaluación de pensamiento multiplicativo.

Cada pez "come" de acuerdo a su tamaño, en una proporción de 1 a 3 (por ejemplo, si el pez A come 3 bolitas, el pez B come 6 bolitas y el pez C 9 bolitas). En cada ejercicio, el evaluador alimentó a uno de los peces y seguidamente el estudiante debió alimentar a los otros dos. Las instrucciones que el evaluador siguió en la aplicación de este ejercicio se presentan a continuación:

Instrucciones para la aplicación de ejercicio del pensamiento multiplicativo.

a) Colocar los tres peces frente al estudiante.

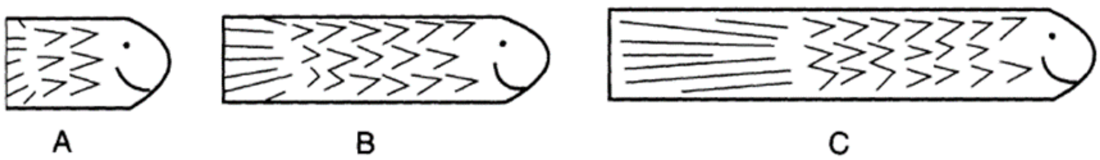


Figura 4. Peces para prueba de pensamiento multiplicativo. Tomada de Clark & Kamii (1996, p.42).

b) Señalando el "pez B", se le dice al evaluado: "Este pez come dos veces lo que este otro pez", señalando ahora al "pez A".

c) Seguidamente, señalando el "pez C", se le dice al evaluado: " Y este pez come tres veces lo que este otro pez", señalando ahora al "pez A"

d) Luego, con respecto al "pez B" se dice: "Este pez come dos veces que lo que este otro pez ("pez A"), pues es dos veces más grande". Luego de realizar esta afirmación el evaluador deberá colocar el "pez A" sobre el "pez B" de tal manera que se haga notorio que el "pez B" es dos veces el "pez A".

e) Nuevamente, el evaluador dice, refiriéndose ahora al "pez C": "Este pez come tres veces que lo que este otro pez ("pez A"), pues es tres veces más grande". Luego de realizar esta afirmación el evaluador deberá colocar el "pez A" sobre el "pez C" de tal manera que se haga notorio que el "pez C" es tres veces el "pez A".

f) Para verificar que el evaluado ha comprendido las proporciones antes explicadas se le plantea se le dice: "Si el pez A come 3 bolitas de alimento, ¿cuántas bolitas come el pez C?"

g) Después de haber comprobado que el evaluado ha comprendido la consigna se aplicará el procedimiento con las siguientes cantidades:
   - Cuando el pez B recibe 4 bolitas.
   - Cuando el pez C recibe 9 bolitas.
   - Cuando el pez A recibe 4 bolitas
   - Cuando el pez A recibe 7 bolitas.

Siguiendo a Clark & Kamii (1993), existen cinco posibles niveles de respuesta:

Tabla 8

Niveles de respuesta para ejercicio de pensamiento multiplicativo

Nivel	Descripción del nivel
Nivel 1: Ausencia del correspondencia serial o correspondencia serial cualitativa.	Las respuestas de este nivel no se encuentran seriadas según el tamaño de los peces. De encontrarse seriadas, solo se observa una correspondencia cualitativa, es decir, un orden por medio de los enunciados “más” o “menos”
Nivel 2: Pensamiento aditivo con secuencia numérica.	Las respuestas de este nivel presentan un pensamiento aditivo que sirve para crear una secuencia utilizando el (+1) o el (+2). El evaluado solo piensa en la pareja A - B y en la pareja B - C, le resulta complicado establecer la relación A – C. Adicionalmente, cuando se le pregunta por B, opta por darle (A+1) o (A+2), si es que se le pregunta por C opta por darle (B+1) o (B+2).
Nivel 3: Pensamiento aditivo que implica (+2) en el caso de B y (+3) en el caso de C	Las respuestas de este nivel evidencian un entendimiento superior de la consigna propuesta por el entrevistador, es decir, darle a B dos veces que a A y a C tres veces que a A. Sin embargo al ejecutar la tarea recurren a la suma para representar ese “dos veces” y “tres veces”.
Nivel 4a: Pensamiento multiplicativo sin éxito inmediato.	Las respuestas evidencian un pensamiento multiplicativo, sin embargo no se encuentra del todo logrado. Los evaluados que se encuentran en este nivel de desarrollo necesitan de la estimulación y la repregunta para poder lograr respuestas acertadas.
Nivel 4b: Pensamiento multiplicativo con éxito inmediato.	Las respuestas evidencian haber logrado con éxito construir el pensamiento multiplicativo. Se responde a las preguntas de manera acertada y no cambian sus respuestas a pesar de ser sugestionados.

Evaluación de lápiz y papel sobre adición, sustracción y noción de mitad.

Este instrumento consta de 15 ejercicios, 6 de adición, 6 de sustracción y 3 de la noción de mitad. En la tabla siguiente se presentan los ejercicios que figuraron en la prueba.

Tabla 9

Ejercicios incluidos en la prueba de lápiz y papel

Operación	Ejercicios propuestos
Adicción	(4+5), (14+5), (21+5), (8+9), (18+7), (15+18)
Sustracción	(8-3), (14-6), (18-12), (9-5), (17-9), (22-14)
Noción de mitad	(Mitad de 8), (Mitad de 16), (Mitad de 24)

Es importante indicar que las tareas propuestas para la adición, sustracción y noción de mitad en esta prueba, tienen las mismas características que las tareas que forman parte de la evaluación cualitativa. Estas características son: la cantidad de dígitos de los sumandos (en la tarea de suma) y del minuendo y sustraendo (en la tarea de resta), los números que se dividen en la mitad (en la tarea de mitad), y el resultado que se obtiene al sumar o restar las dos unidades de los números propuestos (resultado mayor o menor de 10).

Procedimiento

Los pasos que fueron seguidos a lo largo de la investigación se describen a continuación.

Paso 1. Consentimiento informado.

El protocolo de consentimiento informado que se siguió a lo largo de esta investigación es el propuesto por Frisancho, Delgado y Lam (2015). Este procedimiento se considera pertinente puesto que ha sido construido en base a las experiencias de investigación de estos autores en comunidades amazónicas del Perú. Los pasos que componen este protocolo pueden observarse en la siguiente figura.

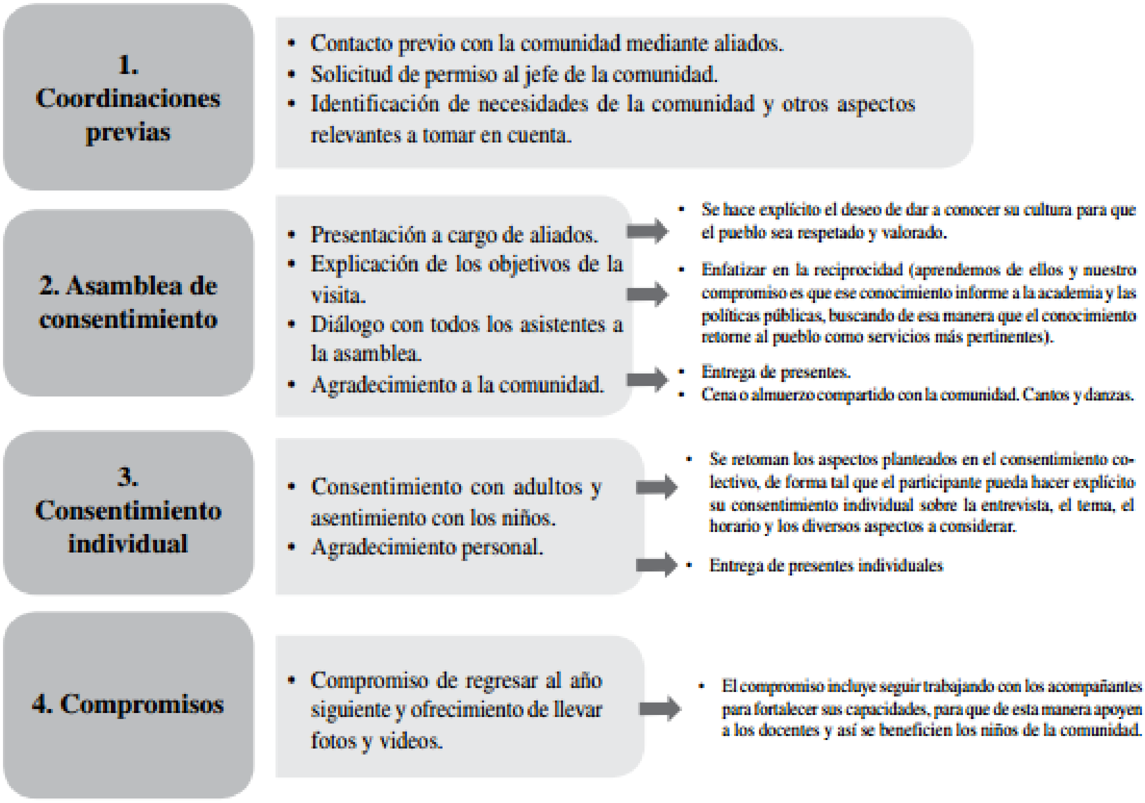


Figura 5. Ruta propuesta para el proceso de consentimiento informado en comunidades indígenas de la Amazonía del Perú (Frisancho, Delgado y Lam; 2015)

Como indica la figura anterior, el protocolo de consentimiento informado de esta investigación se realizó transversalmente a todo el estudio. En la etapa de "Coordinaciones previas" se realizó un primer contacto con un profesor de la comunidad Shipibo-Konibo seleccionada. Este contacto gestionó el permiso al grupo investigador para acceder a la comunidad y anunció la llegada de los investigadores en una fecha pactada. Adicionalmente, brindó información a los encargados del estudio sobre las características y necesidades de la comunidad, la que permitió realizar los preparativos para la siguiente fase del consentimiento informado: la “Asamblea de consentimiento”. Esta fase se llevó a cabo un día después de la llegada de los investigadores. Se realizó una reunión a la que asistieron los docentes y padres de familia de la comunidad, en la que se compartió el almuerzo. La reunión tuvo como meta comunicar el objetivo de las investigaciones que el equipo deseaba realizar (entre ellas ésta), comunicar las acciones que esas investigaciones implicaban, obtener la aprobación de la comunidad y finalmente, agradecer a la comunidad por el permiso que se brindó para realizar el trabajo de investigación; como parte de este agradecimiento se avisó a la comunidad que se entregarían materiales de trabajo para la escuela y que estos no se trataban de un pago por el acceso a la misma. En la siguiente fase, el “Consentimiento Individual”, se pidió a cada uno de los estudiantes evaluados su asentimiento antes de empezar la evaluación y se agradeció a los estudiantes al terminar la aplicación. Finalmente, en la fase de “Compromisos” se comentó con los profesores los detalles de la aplicación y las primeras impresiones de los aplicadores sobre el desempeño de los estudiantes. Se pactó también una devolución de los resultados de la evaluación, la que se llevó a cabo el último día de la visita en un aula de la escuela, y contó con la participación de todos los docentes y una especialista pedagógica de UNICEF. En esa reunión se aprovechó para capacitar a los docentes en estrategias constructivistas para el desarrollo del conocimiento matemático en primaria.

Paso 2. Elaboración de las tareas y materiales.

El contexto de las tareas con las cuales se evaluó las nociones de adición, sustracción y noción de mitad fueron elaboradas en base a una revisión bibliográfica de los modos de vida y costumbres del pueblo Shipibo-Konibo. Adicionalmente, la experiencia del Grupo de investigación en cognición, aprendizaje y desarrollo (G-CAD) en el contexto amazónico fue de gran ayuda al momento de plantearlas. Estas incluyen el armado de collares, la caza de perdices, el uso de tapetes para reuniones, la pesca y el uso de flechas. La evaluación por medio de estas tareas consistió en insertar la operación o noción a evaluar en uno de estos contextos y brindar al estudiante material representativo o concreto manipulable de los objetos que debían sumar, restar o dividir por la mitad. Este material tuvo como objetivo favorecer el entendimiento de los estudiantes del contexto planteado y permitir al evaluador visualizar el razonamiento del evaluado por medio de las manipulaciones que realizaba de este (Delval, 2001). En el caso de la evaluación de multiplicación se realizó una búsqueda bibliográfica sobre estudios que evalúen esta noción. Se consideró pertinente usar la situación planteada por Clark y Kamii (1996) puesto que se trata de una en la cual los estudiantes deben alimentar "peces" en base a sus proporciones, lo cual no es una actividad que transgreda las características culturales de los estudiantes.

Paso 3. Establecimiento del rapport.

Luego de haber realizado la "Asamblea de consentimiento" se utilizó uno de los recreos de la escuela para jugar con los niños. El lugar en el cual se realizaron los juegos fue "el salón comunal". Este espacio es un auditorio en el cual la comunidad realiza reuniones. Tiene una gran amplitud, lo que permitió a los estudiantes moverse libremente. En el "salón comunal", el evaluador del estudio y el asistente de la evaluación, propusieron a los niños un juego que consistía en "encestar" un huevo de plástico en una caja a una distancia de 6 metros aproximadamente. Se formaron equipos y, por turnos, un miembro de cada grupo intentaba "encestar" el huevo de plástico en la caja. Ni los niños ni los investigadores tomaron en cuenta qué equipo encestaba más veces. Luego de 15 minutos jugando por medio de esta dinámica se les pidió a los estudiantes que propusieran otro juego. Sin dar explicación previa, los niños se pusieron en círculo, se agarraron de las manos y empezaron a girar. Mientras tanto una persona caminaba alrededor del círculo en sentido contrario al giro del mismo. Luego de caminar un poco tocaba la cabeza de una de las personas que estaba en el círculo y esta debía perseguirlo. El niño que era perseguido podía correr alrededor del círculo o entrar en este si es que los niños, que permanecían formándolo y girando, se lo permitía levantando las manos para dejarlo pasar. Los niños deseaban recurrentemente ser perseguidos por los investigadores. Esta dinámica duró unos 20 minutos aproximadamente, luego los estudiantes tuvieron que regresar a sus clases.

Los tres niños de 7 años y los dos niños de 9 años a los que se evaluó formaron parte del grupo que participó de esta dinámica. Los dos estudiantes de 11 años, lamentablemente, no estuvieron presentes. Sin embargo, antes de la aplicación, se realizó un rapport individual con cada evaluado. En el caso de los estudiantes que participaron del juego se comentaban cosas relacionadas al mismo: si les pareció divertido, se les felicitaba por sus habilidades en el juego (como correr muy rápido) o se comentaba algún incidente particular en el desarrollo de la dinámica. En el caso de los estudiantes de 11 años, se les preguntaba por sus gustos en torno a cursos o las actividades que les gustaba realizar en sus ratos libres. Estos últimos manifestaban mayor seguridad desde las primeras interacciones. Es por esto que se considera que el hecho de no haber participado del juego previo no afectó su desempeño en la evaluación.

Paso 4. Selección de los participantes.

Los participantes fueron seleccionados tomando en cuenta un rango de edad entre 7 y 11 años. Se pidió a uno de los docentes que elija aleatoriamente a estudiantes en este rango de edad. Debido a que estos se encontraban en horario de clase en el momento en el que los investigadores, en otro ambiente, realizaban la evaluación, el docente le pedía a alguno de los niños que abandonara la clase por un periodo de tiempo para ser evaluado. Al ser consultado sobre su criterio para seleccionar a los estudiantes, el docente manifestó que no tenía uno en concreto. Los estudiantes que participaron del estudio son, en algunos casos, los que culminaban más rápido una actividad que se estuviera llevando en clase, en otros casos se trató de estudiantes que llegaron tarde a la escuela y, en vez de pasar a su clase, fueron enviados directamente al espacio donde se realizaba la evaluación; en otros casos, simplemente fueron elegidos al azar del grupo de estudiantes que el docente tenía en su aula. Los investigadores únicamente indicaban al docente las edades que necesitaban para completar la meta del estudio.

Paso 5. Fase de Aplicación.

Lugar de la aplicación.

En la mayoría de los casos la evaluación se llevó a cabo en una de las aulas de la escuela. Se seleccionó este espacio, puesto que, era familiar para los estudiantes. Solo dos evaluaciones, realizadas a *Wil* (7 años) y *Man* (9 años), se realizaron en el "salón comunal" (lugar donde se llevaron a cabo los juegos antes mencionados). En el caso específico de Wil, es importante mencionar que fue evaluado en la operación de adición, sustracción y noción de mitad en el "salón comunal" y en la operación de multiplicación en el aula. Este es el único caso en el que la evaluación se llevó a cabo en dos días distintos, puesto que la situación de multiplicación le fue presentada al día siguiente de su evaluación en las otras nociones. Los dos estudiantes que fueron evaluados en el "salón comunal" se sentaron en el piso junto con los evaluadores. Al ser consultados sobre su comodidad en referencia al espacio y la posición de sus cuerpos, los dos estudiantes manifestaron sentirse cómodos.

Rol de los evaluadores.

En todo el proceso de evaluación se contó con dos investigadores: el investigador principal, que tenía la tarea establecer el dialogo con el estudiante, y el investigador asistente, tuvo la función tomar apuntes haciendo uso de los protocolos preparados previamente. Sin embargo, el investigador asistente formuló repreguntas o, en algunos casos, pidió al evaluado que repita o explique alguna de sus afirmaciones.

El rol del traductor en lengua Shipibo-Konibo.

A lo largo de todas las evaluaciones se contó con un traductor hablante nativo de la lengua Shipibo-Konibo. Sin embargo, debido a que los estudiantes demostraron tener dominio del español, su participación no fue necesaria en la mayoría de los casos, y este traductor permaneció fuera de la vista del niño, a unos 3 metros del lugar de evaluación. Solo al principio de la evaluación, en caso de que los estudiantes no se desempeñaran adecuadamente en la resolución de los problemas, se le pedía al traductor que repitiera lo indicado por el evaluador en la lengua Shipibo-Konibo a fin de verificar que no se trataba de un problema de comprensión. En todos los casos el desempeño continuaba siendo el mismo, puesto que, como se ha mencionado anteriormente, los estudiantes no manifestaban ninguna dificultad para entender el español. Un ejemplo importante fue el caso de la evaluación de la noción de mitad: en este caso, se le pidió al traductor que tradujera la explicación de la consigna en Shipibo-Konibo luego de que el evaluador la hubiera hecho en español. Algunos estudiantes escuchaban atentamente asintiendo en todo momento (señal de que ya habían comprendido la información previamente), otros empezaban a maniobrar el material antes de que el traductor termine y otros, al ser consultados, manifestaban que sí habían entendido la explicación en español.

Duración de la evaluación.

La duración total de cada evaluación fue variable. Sin embargo, se pudo observar que con los estudiantes de mayor edad (11 años) hubo una menor duración que con los estudiantes de 9 años y con estos, una menor duración que con los estudiantes de 7 años. La evaluación más larga fue la de *Wil* que duró 40 minutos un día y 15 minutos al día siguiente. La evaluación más corta fue la de *Sha* (estudiante de 11 años), que tuvo una duración de 30 minutos aproximadamente.

Secuencia de la evaluación.

Las tareas fueron presentadas a los estudiantes siempre en el mismo orden: en primer lugar, la evaluación de adición; en segundo lugar, la evaluación de sustracción; en tercer lugar, la evaluación de la noción de mitad; en cuarto lugar, la evaluación de la operación de multiplicación y finalmente, la evaluación de lápiz y papel. En algunos casos se omitió la aplicación de alguna situación específica, cuando el evaluado manifestaba excesivas dificultades para resolver las operaciones anteriores (las cuales le exigían trabajar con números más pequeños). En el caso específico de la noción de mitad, luego de que un estudiante respondía dos veces consecutivas de manera correcta, en tareas que implicaban el trabajo con números pares, se planteaba una tarea con un número impar.

Antes de empezar cualquiera de las tareas se le enseñó al evaluado el material con el que debía trabajar. Por ejemplo, si es que se trataba de una situación en la que los estudiantes debían sumar las perdices que se atraparon, se le mostraba y entregaba una cajita con figuras de perdices (material manipulativo) y se le explicaba que podía hacer uso de este material para llegar a la respuesta de la situación que se le plantearía. Seguidamente se le planteaba la situación y se le repetía hasta que el niño manifestara haber comprendido la consigna. En algunos casos, luego de haber comunicado la situación el evaluado permanecía en silencio intentando obtener la respuesta sumando, restando o dividiendo por la mitad, mentalmente. En este caso el evaluador le daba un tiempo aproximado de un minuto para que intente realizar la operación de esta manera. Luego de este tiempo si es que no había dado una respuesta se motivaba al estudiante para que haga uso de material y obtener la respuesta y si había llegado a una respuesta se le pedía que utilice el material para mostrar a los evaluadores la operación que había realizado. La motivación, por parte de los evaluadores a los evaluados, para que hagan uso del material, fue muy necesaria, puesto que los estudiantes no se encontraban familiarizados con el uso de material representativo al momento de resolver problemas matemáticos. Luego de que el evaluado manifestaba su respuesta ante la situación planteada, haciendo uso del material, se le hacían repreguntas para indagar en la comprensión de sus acciones o en el entendimiento que tenía de las nociones evaluadas. La información sobre estas últimas dos cosas no solo se obtenía de las repreguntas, sino también del manejo que el evaluado tenía del material representativo. Es importante mencionar que el evaluador podía ir orientando al estudiante, que no demostraba ninguna estrategia ni procedimiento para hallar la respuesta, haciéndole preguntas o sugiriéndole procedimientos. Esto se fundamente en base a una variante de la entrevista clínica-crítica, creada por Bärbel Inhelder, a la cual le interesan los procedimientos de solución producidos por los estudiantes (Parrat, 2016). Las respuestas que los evaluados, que necesitaron de estas orientaciones, tuvieron, determina también el estado de sus aprendizajes en las nociones evaluadas.

El desempeño de los estudiantes en la evaluación antes descrita, para todas las tareas, se divide en los siguientes niveles de desempeño:

Tabla 10

Niveles de desempeño en las tareas evaluadas mediante el método clínico-crítico

Nivel de desempeño	**Descripción**
Logra espontáneamente (LE)	El evaluado llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) de manera espontánea y sin ayuda. En las repreguntas se mantiene firme en su respuesta.
Logra con ayuda (LA)	El evaluado llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) con la ayuda del evaluador. En las repreguntas se mantiene firme en la respuesta lograda.
Logra con ayuda, pero duda (LAD)	El evaluado llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) con la ayuda del evaluador, pero duda y/o cambia su respuesta ante la repregunta o contra ejemplos que le pone el evaluador.
No logra (NL)	El evaluado no llega a la respuesta correcta (no resuelve la operación) a pesar de las ayudas que le brinda el evaluador.

La fase final del proceso de aplicación consistió en una prueba de lápiz y papel. La descripción de esta prueba se presenta en el punto siguiente.

Aplicación de la prueba de lápiz y papel.

Luego de que todos los evaluados en el estudio pasaron por la evaluación basada en situaciones, se juntó a los 7 estudiantes en un aula. Se les sentó de manera separada y se les presentó una prueba de lápiz y papel que contenía 15 ejercicios: 6 de adición, 6 de sustracción y 3 de la noción de mitad. Los ejercicios se componían únicamente por los números que debían sumar, restar o dividir por la mitad. Estos ejercicios fueron presentados de manera horizontal, puesto que posicionar los números de manera vertical podría inducir un procedimiento específico. Los ejercicios propuestos tienen las mismas características que los ejercicios presentados en las situaciones antes descritas. Se les dijo a los estudiantes que podían disponer del tiempo que deseaban para resolver la prueba. Estas fueron recogidas en su totalidad a la media hora aproximadamente.

Es importante resaltar que la prueba no presenta ejercicios referentes a la operación de multiplicación. Esto se debe a que esta operación no es una meta para algunos de los grados a los que pertenecen los integrantes de este estudio. En consecuencia, no se espera que todos los evaluados se encuentren familiarizados con esta operación y con su símbolo.

El desempeño de los estudiantes en esta prueba se divide en los niveles descritos en la siguiente tabla:

Tabla 11

Niveles de desempeño en las tareas evaluadas mediante la prueba escrita.

Nivel de desempeño	**Descripción**
Logra la respuesta correcta (RC)	El evaluado resuelve la operación y llega a la respuesta correcta.
Intenta, pero falla (IF)	El evaluado intenta resolver la operación, pero no llega a la respuesta correcta.
Deja la tarea en blanco (B)	El evaluado no intenta resolver el ejercicio dejando en blanco la respuesta.

Paso 5. Análisis de la información.

Una vez obtenidos todos los resultados se procedió al análisis. En principio, en el caso de la evaluación basada en tareas, se catalogaron las respuestas de los estudiantes según los niveles de desempeño descritos en la Tabla 10, estos se encuentran basados en la manera como lograron o no lograron llegar a una respuesta. Luego analizaron de manera profunda las resoluciones de los estudiantes frente a las tareas planteadas y se elaboraron niveles relacionados a la comprensión y el dominio de la operación o noción evaluada. El primer nivel expresa una comprensión y un dominio muy bajo de la operación o noción evaluada, y los niveles más altos expresan las mayores comprensiones y dominios encontrados. Estos niveles se determinan en base a una observación del desempeño predominante del estudiante. Para posicionar a un estudiante en uno de los niveles se analizó los dos medios de información que provee el método clínico-crítico: el manejo que el estudiante realiza del material y las respuestas que expresa luego de las repreguntas o contra-sugestiones.

En el caso de la prueba de lápiz y papel, se hizo una primera categorización de los resultados en base los niveles descritos en la Tabla 11. Luego se analizaron los procedimientos que los estudiantes utilizaron para llegar a la respuesta.

Resultados

Los resultados de esta investigación se presentan en cinco secciones. En la primera se encuentran los que conciernen a la operación de adición, en la segunda los relacionados a la operación de sustracción, en la tercera sección los de la operación de multiplicación, en la cuarta los de la noción de mitad y, finalmente, los resultados de la prueba de lápiz y papel. En cada una de estas secciones se encontrará una primera tabla en la que se presentan los resultados cualitativos globales, seguidos de una descripción detallada del desempeño de cada niño.

Primera Sección: Operación de adición

Resultados globales

Ningún estudiante de 7 años llega a la respuesta correcta de manera espontánea. Aquellos que sí lo hicieron necesitaron, en todos los casos, la ayuda del evaluador, que consistió en ofrecerles andamiaje de los pasos requeridos para la adición, por ejemplo, ayudándolos con el conteo para que logren identificar, en un grupo de tarjetas con ilustraciones, el número exacto pedido en los sumando. Sin embargo, aun en estos pocos casos, los niños dudaron de su respuesta ante las repreguntas del evaluador, modificándolas frente a los contraejemplos y repreguntas.

En el caso de los estudiantes de 9 años, si bien algunos resuelven el problema presentado de manera espontánea, la mayoría aún necesita la ayuda del evaluador para sumar correctamente. Adicionalmente, cuando se les presenta una suma que incluye un número de dos dígitos, los estudiantes no logran llegar a la respuesta debido a que se resisten, a veces, a usar el material representativo e insisten en utilizar mentalmente el algoritmo, mostrando errores como por ejemplo no sumar las decenas (reportan, por ejemplo, que 13 + 5 es 8, o que indica que sumaron las unidades -5 y 3- pero no la decena).

Los estudiantes de 11 años presentan un mejor manejo de la operación y obtienen la respuesta correcta una mayor cantidad de veces. Sin embargo, se pueden observar errores al momento de realizar una suma que implique dos números de dos dígitos. Estos errores fueron de conteo, pues algunos fallaban al contar el material concreto para representar la suma, o en el uso del algoritmo, pues al intentar resolver el problema mentalmente fallaban al sumar las decenas. Sin embargo, estos errores se producen en menor medida que en el caso de los estudiantes de 9 años.

A continuación, la tabla 12 resume los resultados de la evaluación de la operación de suma:

Tabla 12

Operación de adición: resultados globales para la operación de suma

Edad	Evaluado	Suma (4+5)				Suma (13+5)				Suma (21+15)				Suma (8+9)				Suma (18+7)				Suma (15+18)			
		LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL
7 años	Luc				X			X					X			X				X				X	
	Roc		X						X				X				X				X				
	Wil				X				X				X				X				X				X
9 años	Les		X						X				X	X							X				X
	Man	X				X							X	X					X						X
11 años	Sha	X				X							X	X				X					X		
	Dal	X					X			X				X				X							X

Leyenda: Logra espontáneamente (LE), Logra con ayuda (LA), Logra con ayuda, pero duda (LAD), No logra (NL)

Resultados encontrados mediante el método clínico-crítico: operación de adición.

Los resultados del pensamiento aditivo concuerdan con las etapas encontradas por Piaget (1967/1971) en su libro "La génesis del número". Se puede observar una primera etapa de no-composición aditiva, una etapa intermedia de composición intuitiva y finalmente, una etapa de composición aditiva lograda

Etapa inicial de no-composición aditiva.

En los evaluados de 7 años se observa una ausencia de composición aditiva, lo que quiere decir que los niños son incapaces de unir dos cantidades distintas para construir una nueva. Además, los evaluados presentan errores al momento de efectuar un conteo, y en algunos casos pueden dar respuestas diferentes cada vez que se les pregunta, mostrando respuestas ilógicas y contradictorias entre sí. Por ejemplo:

> *Wil (7 años):* ***Supongamos que tú y yo salimos a cazar y hoy cazamos 4 perdices y mañana cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?*** *– Cuatro –***Hoy cazamos 4 perdices y mañana cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?*** *-Once*

Debido a que el evaluado no posee a capacidad de iterar (unir dos cantidades para formar una nueva), da respuestas al azar sin una lógica que las sustente. A continuación se le propone hacer uso del material para resolver el problema:

> - ***Si deseas puedes usar las figuras, para contar, por ejemplo*** *– (El evaluado pone una a una las figuras contando del uno al quince) –***Entonces decíamos que hoy miércoles, por ejemplo cazamos 4 perdices y mañana jueves cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?*** *–Seis.*

El evaluado no parece recordar las dos cantidades que debe adicionar, por esta razón realiza un conteo que no toma en cuenta estos números. Seguidamente, cuando se le repregunta, vuelve a dar respuestas carentes de lógica. Debido a esto el evaluador intenta otra estrategia para ayudar al estudiante a llegar a la respuesta.

> ***–A ver, dame 4 perdices*** *– (El evaluado pone 4 figuras en la mano izquierda del evaluador)* ***–Muy bien, ahora dame las 5 que cazamos al día siguiente*** *– (El evaluado pone 5 figuras en la mano derecha del evaluador)* **- Si yo uniera las perdices de esta mano (mano izquierda) con la de esta mano (mano derecha), ¿cuántas perdices tendría en total?** *– Diez* **–A ver vamos a comprobarlo (El evaluador pone todas las figuras, de la mano izquierda y derecha, en hilera y le**

> ***pide que las cuente)*** *– (El evaluado cuenta 9 figuritas)* ***- ¿Entonces cuántas perdices hay en total?*** *– (El evaluado ríe)* ***– Por ejemplo, si en un día cazamos estas (4 figuras) y en otro día estas de acá (5 figuras) ¿cuántas cazamos en total?*** *– Jueves* ***– Por ejemplo, si yo junto estas de acá (4 figuras) con estas de acá (5 figuras), ¿cuántas tendría en total?*** *– Miércoles.* ***-¿Tendría una perdiz?*** *– (Asiente con la cabeza)* ***– ¿Tendría dos perdices?*** *– (Asiente con la cabeza).*

Es importante notar que el evaluado no llega a la respuesta a pesar de que el evaluador lo induce a utilizar la estrategia de conteo. Parece no relacionar este conteo con el problema que se le está planteando. Finalmente, cuando se le pregunta nuevamente por el resultado de la suma vuelve a dar respuestas carentes de lógica, incluso respuestas no numéricas.

En el caso de Luc, se le pide desde un principio que utilice el material para representar el problema que se le plantea:

> *Luc (7 años):* ***Imagínate que vamos a cazar tú y yo, ¿Alguna vez has ido a cazar?*** *–Si –* ***¿Y has visto que otras personas cazan también?*** *– Si* ***–Ya, vamos a suponer que vamos a cazar tú y yo. Digamos que yo me voy por un lado y yo cazo 4 pájaros, ¿puedes poner 4 figuras de pájaros sobre la mesa?*** *– (el evaluado cuenta uno a uno hasta tener 4 figuras en hilera)* ***– Ahora tú te vas por otro lado y cazas 5 pájaros, ¿Puedes poner los 5 pájaros que has cazado?*** *– (El evaluado pone 5 figuras más sobre la mesa y en otra hilera)* ***– Ahora supongamos que tu mamá te pregunta ¿cuántos pájaros hemos cazado tú y yo en total? ¿Qué le dirías?*** *– (El evaluado se mantiene en silencio).*

A pesar de que el evaluado tiene al frente las dos cantidades, no puede adicionarlas. Debido a esto se le repregunta sobre dichas cantidades:

> ***– Digamos que te preguntan cuántos he cazado yo, ¿cuántos he cazado yo?*** *– Cuatro* ***– Y luego te pregunta cuántos has cazado tú ¿cuántos has cazado tú?*** *– Cuatro* ***- ¿También? A ver cuáles son mis cuatro, los que yo he cazado*** *– (El evaluado señala con el dedo la fila de 4 figuras*. ***– ¿Y los tuyos?*** *– (El evaluado señala con el dedo la hilera de 5 figuras)* ***- ¿Y cuántas hay ahí?*** *– Cinco* ***– O sea yo tengo ¿cuántas?*** *– Cuatro* ***– ¿Y tú?*** *– Cinco* ***– Perfecto, tú ya le has dicho que yo he cazado cuatro y tú has cazado 5 y luego te dicen "¿Pero cuánto han cazado los dos juntos?"*** *– (El evaluado permanece unos segundos en silencio) ¿Con*

todo? – ***Claro, contando lo tuyo y lo mío, tus pájaros y mis pájaros*** *– (El evaluado cuenta los pájaros y el conteo le da 9) –* ***Muy bien ahora supongamos que viene un niño que es así como que muy fastidioso, bien pesado y dice "No profesora, han cazado 5 los dos juntos", ¿Tú que le dirías a este niño? ¿Es verdad lo que dice?*** *– Si, es verdad*

Se puede notar que el niño evaluado hace uso del recurso de conteo cuando debe descubrir cuántos elementos tienen estos dos grupos por separado. Sin embargo, duda de usar el mismo recurso para averiguar cuántos elementos hay en total. Finalmente, cuenta todas las figuras y logra la respuesta, pero ante la repregunta da una respuesta que carece de lógica, lo que demuestra que no ha consolidado aún el pensamiento aditivo.

Etapa de composición aditiva intuitiva

En el caso de los niños que se encuentran en esta etapa, se puede observar un conocimiento más desarrollado del concepto de suma y además, menos errores en el conteo. Ya se presentan intentos de resolver el problema por medio de algoritmos mentales; sin embargo, cuando hacen uso de este recurso suelen cometer errores. Los evaluados de este nivel tienen claro que, para llegar a la respuesta, deben iterar los elementos, pero tienen dificultades para trabajar con cantidades grandes y en ocasiones suelen cambiar su respuesta ante las repreguntas. A continuación, se presentan algunos ejemplos.

En el siguiente caso, se le propone a *Man* una situación en la que debe realizar la operación (4+5):

Man (9 años): - ***Vamos a suponer que el lunes yo cacé 4 perdices y el martes cacé 5 perdices, ¿cuántas perdices tengo en total?*** *– (el evaluado pone en hilera 4 tarjetas, luego pone una más y dice súbitamente que el resultado es 9).* ***¿Cómo has llegado a esta respuesta?*** *– He juntado.*

Se puede notar que *Man* realiza naturalmente la acción de iterar elementos y que, inclusive, no necesita hacer un uso completo del material para llegar a la respuesta. Sin embargo, su desempeño cambia cuando se le pide resolver un problema que implica trabajar con números de mayor tamaño:

Man (9 años): ***Ahora resulta que tú y yo salimos a cazar y logramos cazar 21 perdices, pero cuando estamos regresando nos encontramos con un vecino y***

nos regala 15 perdices más, ¿cuántas perdices tenemos ahora en total? *– (El evaluado pone 21 perdices en hilera sobre la mesa contando una por una, luego pone 15 perdices también en hilera contando una por una. Finalmente cuenta todas una por una, sin embargo omite un número en su conteo) – Treintaicinco.*

A diferencia de la situación anterior, el evaluado no puede llegar a la respuesta mentalmente, sino que necesita hacer uso del material. Además, se puede notar que el recurso de conteo no se encuentra de todo consolidado, pues *Man* tiende a fallar al momento de trabajar con números de mayor tamaño. Otra característica presente en esta etapa, como mencionábamos anteriormente, es que el uso de algoritmos induce al error. Esto se puede evidenciar en el siguiente ejemplo:

Les (9 años): ***Supongamos que un papá y un hijo salieron juntos a cazar perdices y en un momento se separaron, el papá se fue por un lado y el hijo por otro lado. Resulta que el papá, como es más hábil, cazó 13 perdices y el hijo cazó 5. Cuando llegan a su casa junta todas las perdices, ¿cuántas perdices tienen en total?*** *– Ocho* ***- ¿Y cómo lo sabes?*** *– Así, todo he juntado.* ***– Si juntas las 13 más las 5 te dan 8, ¿quieres mostrarnos con las tarjetitas? Yo te contaba que el papá cazó 13 y el hijo cazó 5 -*** *¿Trece di?* ***– Si, trece*** *– (El evaluado va poniendo una a una en un montículo hasta llegar a 13 perdices. Luego en otro montículo pone 5 figuras. Finalmente cuenta los dos montículos de corrido) Son 19.*

Se observa que *Les* no logra llegar a la respuesta correcta, pues hace un mal uso del algoritmo. Se puede deducir de su primera respuesta (13+5=8) que intentó llegar a la solución por medio de un algoritmo mental, sin embargo solo sumó las unidades de los dos números. Finalmente, cuando hace uso del material para llegar a la respuesta presenta un error de conteo al igual que *Man.*

Finalmente, otra característica que se presenta en esta etapa es que los estudiantes no han desarrollado del todo un pensamiento reversible. En el siguiente caso se presenta la operación (8+9) y el estudiante logra llegar a la respuesta. Sin embargo, cuando se plantea la operación inversa (9+8), no deduce que el resultado es el mismo y en consecuencia, realiza nuevamente todo el procedimiento para llegar a la respuesta.

Man (9 años): ***Ahora me gustaría que me ayudes a hacer unos collares, ¿te parece?*** *– Si –****Supongamos que tengo un collar que tiene 8 bolitas y le quiero agregar 9 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría el collar?*** *– (El evaluado intenta* *mentalmente)* **– ¿No te gustaría armar el collar para saber la respuesta?** *– (El evaluado pone 8 bolitas en el hilo, de una en una)* **– Ahora a ese collar le queríamos agregar 9 bolitas más ¿no?** *– (El evaluado agrega 9 bolitas de una en una)* **- ¿cuántas bolitas tiene ahora en total el collar?** *– (El evaluado cuenta todas las bolitas de una en una y logra saber que el resultado es 17).* **Supongamos ahora que tengo un collar que tiene 9 bolitas y quiero agregarle 8 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría el collar en total?** *– (El evaluado retira todas las bolitas del collar y procede a realizar el procedimiento nuevamente, esta vez empezando por el número 9) Son 17.*

A diferencia de los niños de la etapa anterior, estos enfrentan los problemas con una idea clara de que deben iterar los elementos. Sin embargo, los errores que se presentan suelen estar relacionadas a un mal uso del recurso de conteo o al mal uso del recurso algorítmico y además, en algunos casos, una ausencia de la reversibilidad del pensamiento. Esta ausencia de reversibilidad es la que no le permite a *Man* entender que el orden de los sumandos no altera el resultado.

Etapa de composición aditiva lograda

Los niños que se encuentran en esta etapa han consolidado el concepto de suma y no tienen dificultades para operar mentalmente con números pequeños. Sin embargo, se puede notar una inclinación por llegar a la respuesta mentalmente y por esto, presentan resistencias al momento de hacer uso del material representativo. Es claro también que conciben como estrategia natural el conteo para llegar a la respuesta. Además, comprenden que cambiar el orden de los factores en una adición no altera el resultado de la misma.

En el siguiente caso, *Dal* resuelve mentalmente un problema de adición que implica trabajar con dos números de una cifra:

Dal (11 años): **Supongamos que tenemos un collar que tiene 8 bolitas negras y a ese collar le agregamos 9 bolitas blancas, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?** *– (El evaluado intenta mentalmente) Diecisiete* **– Si un niñito menor que tú, que no entiende muy bien estas cosas te preguntara cómo llegaste a la respuesta, ¿qué le dirías?** *– (El evaluado guarda silencio)* **– O quizá le podrías mostrar con las bolitas** *– (El evaluado pone 8 bolitas negras en una mano y 9* *bolitas blancas en otra mano) De ahí vamos a sumar todo esto* ***– Se junta*** *– Si, vamos a contar (El evaluado cuenta las bolitas una por una hasta llegar a 17).*

Los resultados indican que los estudiantes que se encuentran en esta etapa no tienen dificultades para operar mentalmente con números de esta magnitud. Sucede de igual manera si se les presenta un problema en el que deben adicionar un número de una cifra con un número de dos cifras:

Dal (11 años): ***Supongamos que ahora que tenemos un collar de 18 bolitas, pero queremos hacerlo más grande así que le agregamos 7 bolitas más. ¿Cuántas bolitas tendría en total este collar?*** *– (el evaluado intenta resolver mentalmente)* ***– Si quieres puedes usar las bolitas para ayudarte*** *– Son veinticinco –* ***Veinticinco, ¿Y cómo supiste eso?*** *– Sumando*

Ya que el evaluado ha resuelto el problema mentalmente (sin hacer uso del material) a continuación el evaluador indaga la forma como el estudiante ha llegado a la respuesta:

- ¿Qué era lo que ibas haciendo mientras estabas en silencio? *– Pensando* ***- ¿Y qué hiciste? ¿Qué hacías en tu cabeza? -*** *Siete más… quince más siete… vamos a sumar con… dieciocho más siete… vamos a sumar con ocho y luego vamos a sumar con uno.* ***– A ver, vamos a ver si te entendí, ¿tú hiciste algo más o menos así? (el evaluador escribe en un papel 18+7 poniendo el 7 debajo del 18)*** *– Si, sumas el ocho más el siete, quince, luego uno.* ***– ¿Hay otra manera de hacerlo? –*** *(El evaluado permanece en silencio)* ***- Esta es la manera que te parece más cómoda.*** *– Si.*

Se puede notar que el evaluado utiliza el un método algorítmico para sumar mentalmente y logra llegar a la respuesta. Sin embargo, cuando los números con los que debe trabajar son más grandes, al igual que los estudiantes de 9 años, los estudiantes de esta etapa pueden equivocarse. En el caso siguiente, se le plantea una operación al estudiante (15+18). Se le propone hacer uso del material para llegar a la respuesta, pero *Sha* intenta resolver el problema mentalmente.

Sha (11 años): ***Ahora, si tenemos un collar que tiene 15 bolitas blancas y luego le agregamos 18 bolitas negras, ¿cuántas bolitas tendríamos en total?*** *– (El evaluado permanece en silencio intentado sumar mentalmente)* ***- ¿Deseas armar***

> ***el collar?*** *– Si (El evaluado empieza agregando una por una las 18 bolitas negras)* ***- ¿cuántas bolitas tiene el collar?*** *– Dieciocho* ***– Perfecto, ahora tenemos que agregarle 15 blancas. A ver aquí tengo 5 bolitas blancas, ¿si le agrego 5 más cuántas son?*** *– Diez* ***- ¿Y si le agrego 5 más cuántas son?*** *– Quince* ***– Muy bien, ahora tenemos estas 15 bolitas blancas y estas 18 bolitas negras, si juntamos todo ¿cuántas bolitas hay en total?*** *– (El evaluado intenta llegar a la respuesta mentalmente)* ***- ¿cómo harías para saber cuántas bolitas tendría el collar?*** *– (El evaluado permanece en silencio)*

A pesar de que *Sha* tiene a su disposición el material concreto manipulable para contarlo (en este caso las bolitas del collar), intenta llegar al resultado sumando mentalmente, sin usar el material. En vista de esto, el evaluador intenta inducir al evaluado a utilizarlo:

> ***– Supongamos que tú tienes 15 bolitas blancas y te encuentras con una amiga que tiene 18 bolitas negras. Para poder hacer un collar más grande juntan todas las bolitas. Luego ella te pregunta, ¿y ahora cuántas bolitas tiene el collar? ¿Tú qué le dirías?*** *– Treintaiuno* ***- ¿Y cómo supiste eso?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***- ¿cómo harías para revisar y estar segura?*** *– Contar* ***– A ver, muéstranos cómo contarías*** *– Aquí hay 18 (refiriéndose a las negras) entonces 19, 20, 21, 22, 23 ,24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 (refiriéndose a las blancas)* ***– Muy bien, entonces primero tu contaste las 18 y luego empezaste con las blancas y dijiste 19, 20, 21… ¿Y si lo hicieras al revés? Si contaras primero las 15 y luego las 18, ¿daría el mismo resultado?*** *– Si* ***- ¿no importa que esté al revés?*** *–No*

La primera respuesta de *Sha* (treintaiuno) fue obtenida sumando mentalmente. Luego, al revisar dicha afirmación, por medio del recurso de conteo, el evaluado llega a la respuesta correcta. Esto muestra que los estudiantes que se encuentran en la etapa más avanzada en cuanto a la operación de adición, todavía presentan dificultades para sumar mentalmente dos números de dos dígitos. Sin embargo, es importante resaltar que en esta etapa los niños no solo suelen cometer menos errores que los de la etapa anterior, sino que sus respuestas incorrectas son más lógicas. Por ejemplo, afirmar que trece más ocho es igual a cinco (13+8=5) es sin duda menos lógico que decir que quince más dieciocho es igual a treinta y tres (15+18=33), ya que es imposible que se obtenga como respuesta un número de un dígito (menor a la decena) a partir de la suma de dos números, uno de los cuales es mayor que 10. Finalmente, es importante resaltar que, como se expresa en el caso de *Sha*, los estudiantes de esta etapa presentan un pensamiento reversible que les permite entender en integridad la propiedad conmutativa de la adición.

Segunda sección: Operación de sustracción

Resultados globales

Los estudiantes de 7 años en ningún caso logran resolver las sustracciones de manera espontánea; en todos los casos en los que llegaron a la respuesta correcta necesitaron del apoyo del evaluador, quien por ejemplo los ayudó con el conteo de las cifras involucradas en la resta, o les repitió varias veces el problema cuando evidenciaban no haberlo entendido. Existe también un número considerable de casos en los cuales los niños no logran llegar a la respuesta, siendo el error más común no entender que el sustraendo debería sacarse del minuendo (por ejemplo, en la resta 8-3 en lugar de quitar 3 tarjetas del grupo de 8, lo que hacían era coger 3 tarjetas nuevas, convirtiendo así la operación en una suma). En el grupo de 9 años, algunos llegan a la respuesta correcta de manera espontánea, pero siguen siendo mayoría los casos que resuelven la resta correctamente solo con la ayuda del evaluador. Son minoría los casos en los cuales no se logra llegar a la respuesta correcta. Los estudiantes de 11 años logran una resolución espontánea y exitosa en todos los casos.

A continuación se presenta la tabla que resume los resultados de la evaluación de la operación de sustracción:

Tabla 13

Resultado globales: sustracción

Edad	Evaluado	Resta (8-3)				Resta (14-6)				Resta (18-12)				Resta (9-5)				Resta (17-9)				Resta (22-14)			
		LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL
7 años	Luc			X			X					X				X				X					
	Roc				X				X				X				X				X				
	Wil		X				X						X		X				X						X
9 años	Les		X				X				X				X				X				X		
	Man		X			X				X				X							X				X
11 años	Sha	X				X				X				X				X				X			
	Dal	X				X				X				X				X				X			

Logra espontáneamente (LE), Logra con ayuda (LA), Logra con ayuda, pero duda (LAD), No logra (NL)

Resultados encontrados mediante el método clínico-crítico: Operación de sustracción

A continuación se presentan los resultados de sustracción organizados según las edades de los evaluados.

Ausencia de la sustracción.

Los evaluados de 7 años de edad, en muchos de los casos, no emplean una estrategia para realizar la sustracción. Sucede a menudo que dicen números al azar y diferentes cada vez que se les pregunta, los que parecen ser disparados en ese momento por la pregunta que les hace el evaluador.

> *Wil (7 años):* ***Supongamos que salimos a cazar y llevamos catorce flechas, ¿puedes poner catorce flechas?*** *– (El evaluado pone una a una las 14 flechas)* **- De esas catorce flechas usamos 6, ¿con cuántas flechas regresamos a casa?** *– Siete* **– Si tenemos catorce flechas y perdemos 6 en el bosque, ¿con cuántas regresamos a casa?** *– Seis.* **– A ver, ¿puedes darme las 6 flechas que utilizamos?** *– (El evaluado pone en la mano del evaluador 6 flechas una a una y contando en voz alta)* **- ¿con cuántas flechas regresamos a casa?** *– (El evaluado cuenta las flechas que el quedan una a una) Ocho.*

En este ejemplo se puede notar que el niño no logra la respuesta por sí solo y necesita de la ayuda del evaluador para entender que el procedimiento correcto es retirar 6 flechas del grupo de 14.

En el caso de otro estudiante de 7 años, el evaluador lo guía para que utilice el material y pueda efectuar el procedimiento de sustraer elementos.

> *Luc (7 años):* ***Vamos a suponer que en casa tenemos 18 flechas, ¿puedes poner las 18 flechas?*** *– (el evaluado pone una a una y en hilera las 16 flechas, luego cuenta todas para verificar cuántas tiene hasta ahora, seguidamente agrega dos más)* **– Bien, acá tenemos 18 flechas. Ahora supongamos que tu papá se lleva 12 flechas de estas 18, ¿con cuántas flechas nos quedamos en casa?** *– (El evaluado cuenta 12 flechas y las separa de las restantes, luego cuenta una a una las restantes) Seis*

Sin embargo, cuando se le pide una explicación al respecto de su acción no puede elaborar una respuesta.

- ¿Y qué es lo que has hecho para saber que eran 6? *– (El evaluado permanece en silencio)* **– Si un niñito te pidiera que le explicaras cómo llegaste a la respuesta, ¿qué le dirías?** *– (El evaluado permanece en silencio)*

Luego, cuando se le repregunta sobre la acción contraria a la que ha realizado, es decir juntar nuevamente las 6 flechas con las 12 flechas, comete un error, pues afirma que al juntar de nuevo las dos cantidades habría menos que antes.

- ¿cuáles son las flechas que se quedaron en casa? *– (El evaluado señala el grupo de 6 flechas)* **- ¿Y cuáles son las que se llevó el papá?** *– (El evaluado señala el grupo de 12 flechas)* **- ¿Si juntamos las que quedan con las que se llevaron tenemos menos, más o igual que las que habían antes?** *– Menos.* **- ¿qué faltaría para tener igual que antes?** *– (el evaluado permanece en silencio).*

Se puede concluir que los estudiantes de este nivel no pueden realizar la operación de sustracción sin la ayuda del evaluador. Además, se observa que cuando han sustraído consideran que al juntar nuevamente las cantidades no resultará nuevamente el mismo número. Esto puede indicar que la resta y la suma no son conceptualizadas como recíprocas.

Sustracción en proceso.

En el caso de los niños de 9 años de edad existe una mayor claridad respecto de la estrategia que se debe usar para resolver el problema. Existe una comprensión de que se debe extraer una cantidad de una totalidad mayor.

Man (9 años): **Supongamos ahora que para una reunión utilizamos 9 tapetes** *– (El evaluado pone 9 tapetes, uno a uno, sobre la mesa)* **– Cuando termina la reunión tu mamá te dice que de esos 9 tapetes 5 son de la vecina y hay que devolvérselos ¿con cuántos tapetes nos quedamos en casa?** *– (El evaluado retira 5 tapetes del grupo de 9 tapetes, luego cuenta los tapetes que le quedan) Son 4*

Sin embargo sucede también en muchos de los casos que los niños, a pesar de haber tenido éxito, no tienen la capacidad de explicar sus acciones. Por ejemplo:

– Bien. Supongamos ahora que un niño más pequeñito que tú te pregunta cómo supiste que son cuatro los que se quedan en casa, ¿qué le dirías? *– (El evaluado permanece en silencio).*

En este sentido, a pesar de que no pueden explicar las acciones que han realizado, sí pueden reconocer plenamente los números con los que han operado. Esto puede evidenciarse en este otro caso, en el cual *Les* puede reconocer las flechas que se quedaron en casa y las que no.

> *Les (9 años):* ***Supongamos que queremos ir a cazar animales y para esto tenemos en casa 8 flechas*** *– (El evaluado pone 8 flechas, una por una, sobre la mesa)* ***– Pero, resulta que cuando vamos a buscar esas 8 flechas descubrimos que alguien se ha llevado 3, ¿cuántas flechas hemos encontrado?*** *– (El evaluado separa 3 flechas de las 8 flechas que puso inicialmente sobre la mesa, luego cuenta las flechas que le quedan después de haber quitado 3) Cinco* ***- ¿Cinco, no? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué es lo que has hecho para saber que deberíamos encontrar 5?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Y cuáles son las que le quedan?*** *– (El evaluado señala el grupo de las 5 flechas)* ***- ¿Y cuáles son las que se han llevado?*** *– (El evaluado señala el grupo de las 3 flechas).* ***- Ahora, una pregunta, si es que nos devuelven las tres flechas que se llevaron ¿cuántas flechas tendríamos?*** *– (El evaluado permanece en silencio)*

Adicionalmente, se puede observar que los evaluados no siempre pueden ser conscientes de que la suma y la resta son operaciones complementarias. Esto se evidencia cuando se realiza una pregunta que hace referencia al estado inicial de la situación.

Sustracción lograda.

Los estudiantes son capaces de llegar a la respuesta correcta de una resta mentalmente (es decir, sin hacer uso del material), cuando esta implica operar con dos números de una cifra. Además, se puede observar que cuentan con pensamiento reversible:

> *Sha (11 años):* ***Ahora supongamos que vamos a ir a cazar, así que tenemos que ir a buscar nuestras flechas. Supongamos que teníamos 8 flechas, pero tu papá se llevó 3 flechas, ¿cuántas flechas tenemos?*** *– Cinco.* ***- ¿nos podrías mostrar con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone 8 flechas sobre la mesa en hilera)* ***- Si tu papá se lleva 3 flechas, ¿cuántas flechas nos quedarían?*** *– Cinco* ***- Y si juntamos nuevamente las que se llevó tu papá con las que se quedan, ¿tendríamos la misma cantidad de antes?*** *– Si.*

Por otro lado, cuando los estudiantes se enfrentan a números de dos dígitos ya no les es posible realizar el cálculo mental y se ven obligados a obtener el resultado utilizando las tarjetas de apoyo. En estos casos se puede observar también un pensamiento reversible. El dominio de la operación de sustracción de los estudiantes de 11 años, se puede observar claramente en el siguiente ejemplo:

> *Dal (11 años):* ***Supongamos que tienes en casa 22 tapetes, pero la vecina te pide 14 tapetes prestados, ¿cuántos tapetes te quedan en casa?*** *– (El evaluado pone una a una 22 tarjetas)* ***– Le prestamos 14 a la vecina*** *– Sacamos 14 (El evaluado cuenta 14 tapetes y los retira)* ***- ¿cuántos tenemos en casa?*** *– (El evaluado cuenta los restantes uno por uno) Ocho* ***– Y por ejemplo, ¿si juntamos esto (los 14 tapetes) con estos (los 6 tapetes) tendremos lo mismo que antes?*** *– Si, lo mismo* ***– Un vez le pregunte esto a una niña de tu edad y me dijo que habría una cantidad diferente****. – No* ***- ¿cómo nos mostrarías que está equivocada?*** *– Lo junto así y cuento (el evaluado junta todos los tapetes).*

El evaluado necesita del material representativo para resolver el problema, pero su manipulación de dicho material y sus explicaciones demuestran que ha comprendido plenamente la operación que realiza. Inclusive luego de las repreguntas mantiene su respuesta inicial.

Tercera sección: operación de multiplicación

Resultados globales

A continuación se presenta la tabla que resume los resultados de la evaluación de la operación de multiplicación. Se podrá observar que los estudiantes de 11 años son los que llegan a la respuesta correcta una mayor cantidad de veces, mientras que los otros, en la mayoría de casos, no logran llegar con éxito a la respuesta.

Tabla 14

Resultados globales: pensamiento multiplicativo

Edad	Eval	Consigna	El pez A come 1				El pez B come 4				El pez C come 9				El pez A come 4				El pez A come 7			
			LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL
7 años	Luc	Consigna 1					X				X							X				X
		Consigna 2								X				X				X				X
	Roc	Consigna 1				X																
		Consigna 2				X																
	Wil	Consigna 1	X							X				X				X				X
		Consigna 2	X							X				X				X				X
9 años	Les	Consigna 1	X				X							X				X				X
		Consigna 2	X							X				X				X				X
	Man	Consigna 1	X				X							X				X				X
		Consigna 2	X							X				X				X				X
11 años	Sha	Consigna 1		X			X							X				X				X
		Consigna 2	X								X							X				X
	Dal	Consigna 1					X				X				X				X			
		Consigna 2					X				X				X				X			

Logra espontáneamente (LE), Logra espontáneamente, pero duda (LED), Logra con ayuda (LA), Logra con ayuda, pero duda (LAD), No logra (NL)

Resultados encontrados mediante el método clínico – crítico: operación de multiplicación

Las soluciones y explicaciones expresadas por los participantes en esta evaluación presentan la secuencia de desarrollo encontrada por Clark & Kamii (1996) para esta operación. Estas se presentan a continuación organizadas según los niveles de construcción del pensamiento multiplicativo.

Nivel 1: Ausencia de correspondencia serial o correspondencia serial cualitativa.

Las explicaciones que dan los evaluados que se encuentran en este nivel pueden ser de dos tipos. En el primer caso, no presentan una correspondencia serial, es decir que piensan que un pez grande puede comer igual que uno pequeño o que un pez pequeño puede comer más que un pez grande. En el segundo caso, presentan la correspondencia serial, pero solo en un sentido cualitativo, lo que significa encontrar un orden por medio de los enunciados: "más" o "menos". Esto puede expresarse en los ejemplos siguientes:

> *Wil (7 años):* ***-Supongamos que yo le doy al (pez B) 4 bolitas de alimento, ¿Cuánto le darías al (pez A) y al (pez C)?*** *El evaluado le da una bolita al (Pez A) y 4 bolitas al (Pez C).* ***- Ahora, yo te hago una pregunta, ¿quiénes comen más, los más grandes o los más chiquitos?*** *– Los más grandes.* ***– ¿Y por qué si este (Pez C) es más grande que este otro pez (Pez B) los dos comen igual?*** *– Está mal* ***– Entonces ¿cuántas bolitas debería comer este pez (Pez C)?*** *– Tres bolitas*

Se puede observar en el ejemplo anterior que *Wil* no presenta una correspondencia serial, pues considera en principio que el pez B y el pez C deberían comer la misma cantidad de alimento. Ante la repregunta, no subsana el error sino que propone que el pez C (el más grande) debería recibir menos alimento que el pez B. El niño asigna cantidades indistintamente, dejando de lado las proporciones de los peces. Esto puede observarse nuevamente en el siguiente ejemplo, en el que ahora el evaluador empieza alimentando al pez A (el pez más pequeño).

> *Wil (7 años):* ***-Ahora supongamos que le doy al pez más pequeño 7 bolitas ¿Cuántas bolitas debería darle a este otro pez (Pez B)?*** *–Dos bolitas* ***–Y a este otro pez (Pez C) que come 3 veces lo que come este otro pez (Pez A), ¿cuánto debería comer?*** *– Tres bolitas.*

Nivel 2: Pensamiento aditivo con secuencia numérica.

Los evaluados de este nivel presentan un pensamiento aditivo que sirve para crear una secuencia utilizando el (+1) o el (+2). Solo tienen en mente la pareja A - B y la pareja B - C, y les resulta muy difícil pensar en la relación A – C. En este sentido, se puede deducir que los estudiantes de este nivel no han desarrollado la transitividad. Adicionalmente, cuando se les pregunta por B, optan por darle (A+1) o (A+2), si es que se les pregunta por C optan por darle (B+1) o (B+2). Esto puede observarse en el ejemplo siguiente:

Luc (7 años): ***-Mira, ahora yo quiero darle 4 bolitas de alimento a este pez (Pez A), ¿cuántas bolitas le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– 5 bolitas -* ***¿****Y cuántas bolitas de alimento le darías a este otro pez (Pez C)? – 6 bolitas de alimento.*

En el caso de *Luc* se observa que tiene conciencia de que si un pez es más grande debe comer necesariamente más que uno de menor en tamaño. Sin embargo, no logra aún comprender las nociones de doble o triple al momento de resolver el problema. Es por esto que plantea como solución dar una bolita más cada vez que se encuentra con un pez más grande. Esto se expresa también en el siguiente ejemplo:

Les (9 años): ***-Yo le voy a dar de comer a un pez y tú le vas a dar de comer a los otros dos. Supongamos que yo le doy a este pez (Pez B) 4 bolitas, ¿Cuánto le deberíamos dar a este pez (Pez A)?*** *– 2 bolitas -* ***¿Y cuánto le deberíamos dar a este de acá (Pez C)?*** *– 4 bolitas.* ***– ¿Y cuál es el pez que debe comer más?*** *– Este de acá (Pez C) -* ***¿Entonces cuánto le darías de comer?*** *– 5 bolitas.*

Nivel 3: Pensamiento aditivo que implica (+2) en el caso de B y (+3) en el caso de C.

Los evaluados que se encuentran en este nivel demuestran mayor comprensión de la consigna propuesta por el entrevistador, es decir, darle a B dos veces lo que recibe A y a C tres veces que a A. Sin embargo, al ejecutar la tarea recurren a la suma –y no a la multiplicación- para representar ese “dos veces” (que se convierte en más 2) y “tres veces” (que se convierte en más tres). Esto puede observarse en el ejemplo siguiente:

Sha (11 años): ***Ahora yo le quiero dar 7 bolitas de alimento a este pez (Pez A) ¿cuánto le darías de alimento a este otro pez (Pez B)?*** *– 9 bolitas de alimento. -* ***¿Y cuánto le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 12 bolitas.*

Es evidente que *Sha* ha comprendido que debe alimentar a los peces según su tamaño y que no debe haber, únicamente, más alimento para el que es más grande, sino que existe una relación proporcional entre ellos. Pero, al no haber construido del todo las nociones de doble y triple, en algunos casos, las traduce adicionando dos y adicionando tres bolitas de alimento.

Nivel 4a: Pensamiento multiplicativo sin éxito inmediato.

En este nivel los niños evidencian ya un pensamiento multiplicativo. Sin embargo, este no se encuentra del todo logrado. Los evaluados que se encuentran en este nivel de desarrollo necesitan de la estimulación y la repregunta para poder lograr respuestas acertadas, tal como se ve en el ejemplo siguiente:

> *Sha (11 años):* ***- Ahora, yo quiero dar de comer a este pez de en medio (Pez B) y le doy de comer 4 bolitas de alimento, ¿cuánto le darías tú a este pez (Pez A)?*** *– (Le da dos bolitas de alimento)* ***-¿Y cuánto debería comer este si este (Pez C) come tres veces lo que este (Pez A)?*** *– Cinco bolitas* ***– Entonces este (Pez A) come dos, este (Pez B) come 4 y este (Pez C) come 5*** *– Si* ***- ¿Y estaría bien si yo le doy de comer a este (Pez B) cinco bolitas y a este (Pez C) 4 bolitas?*** *– No* ***- ¿Y si le doy de comer 4 bolitas a este (Pez A) y 2 bolitas a este (Pez B)? ¿Estaría bien?*** *– No* ***- ¿Y qué tal si le doy de comer a este (Pez C) 8 y a este (Pez B) lo dejo en 4 bolitas? ¿Estaría bien?*** *– No* ***- Ahora, ¿recuerdas que este pez (Pez C) debe comer tres veces lo que come este pez (Pez A)?*** *–Si* ***-¿cuánto come este pez (Pez A)?*** *– 2 bolitas* ***- ¿Entonces cuánto debe comer este pez (Pez C)?*** *– 6 bolitas.*

En el ejemplo presentado, el niño evaluado da al principio una respuesta errada, pero ante las repreguntas sobre los criterios que se deben usar para resolver con éxito este ejercicio, logra finalmente resolver el problema con éxito.

Nivel 4b: Pensamiento multiplicativo con éxito inmediato.

Los niños que se encuentran en este nivel han logrado con éxito construir el pensamiento multiplicativo. Responden a las preguntas de manera acertada y no cambian sus respuestas a pesar de ser sugestionados. A continuación presentamos algunos ejemplos:

> *Dal (11 años):* ***- Ahora yo quiero darle de comer al pez más grande (Pez C), le voy a dar 9 bolitas de alimento, ¿con cuánto alimentarías a los otros dos?*** *– (le*

da al pez B seis bolitas de alimento y al pez C tres bolitas de alimento) ***- ¿Y estaría bien si le damos a este pez (Pez A) 4 bolitas?*** *– No* ***–Y si le damos 5 a este (Pez B)*** *– No.*

El estudiante presenta una comprensión absoluta de la consigna establecida para resolver el ejercicio. Esto puede observarse nuevamente en el siguiente caso:

Dal (11 años): ***- Ahora le quiero dar de comer a este pez (Pez A) 4 bolitas de alimento, ¿cuánto le darías de comer a este pez (Pez B)?*** *– (le da de comer 8 bolitas)* ***– ¿Y cuánto le darías de comer a este otro pez (Pez C)?*** *– 12 bolitas* ***– ¿cómo sabes cuánta comida darle a cada uno? si te encontraras con un niño pequeño que no sabe darles de comer, ¿cómo le explicarías?*** *– Le diría que le dé así, 4 bolitas a este (Pez A), 8 bolitas a este (Pez B) y 12 bolitas a este (Pez C).*

Se puede observar que el evaluado entiende que las proporciones dictaminan la cantidad de alimento que cada "pez" debe recibir y que estas proporciones están ligadas a conceptos de doble (en el caso del pez B) y triple (en el caso del pez C).

Cuarta sección: noción de mitad

Resultados globales

En el caso de los estudiantes de 7 años, estos no logran resolver el problema que se les presenta en la mayoría de las tareas, y en los pocos casos en los que sí logran llegar a la respuesta correcta, necesitan de la ayuda del evaluador para representar el problema con el material concreto (en muchos casos debido a que evidencian errores de conteo). En el caso de los estudiantes de 9 años, se presentan también muchas dificultades para llegar a la respuesta correcta y en el caso en el que esta se alcanza es porque ha habido siempre una intervención del evaluador (por medio de andamiaje, ayudándolo a representar los números indicados en el problema, o repitiendo la consigna varias veces hasta que el niño la comprenda). Respecto a los estudiantes de 11 años, estos llegan a la respuesta correcta de manera espontánea en la mayoría de los casos. Sin embargo, uno de los estudiantes de 11 años de edad demuestra una incapacidad para dividir una totalidad impar.

A continuación se presenta la tabla que resume los resultados de la evaluación de la noción de mitad:

Tabla 15

Resultados globales: noción de mitad

		Mitad (8)				Mitad (16)				Mitad (24)				Mitad (23)			
		LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL	LE	LA	LAD	NL
7 años	Luc		X				X						X				
	Roc				X												
	Wil				X				X				X				
9 años	Les				X				X								
	Man			X					X								
11 años	Sha	X				X								X			
	Dal	X				X											X

Logra espontáneamente (LE), Logra con ayuda (LA), Logra con ayuda, pero duda (LAD), No logra (NL)

Resultados encontrados mediante el método clínico – crítico: noción de mitad

En esta sección se presentan los resultados de la noción de mitad organizados según los tipos de respuesta de los niños evaluados.

Ausencia de la noción de mitad

Los niños de 7 años de edad no han consolidado la noción de mitad, siendo este concepto para ellos cualquier tipo de división que seccione en dos partes una totalidad, sin que estas partes deban ser necesariamente iguales entre sí.

> *Wil (7 años):* ***Supongamos que hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, ¿puedes poner 8 peces?*** *– (El evaluado cuenta uno a uno ocho peces y los pone sobre la mesa)* ***– Muy bien. Pero luego nos damos cuenta que solo necesitamos la mitad, entonces decidimos darle la mitad a nuestro vecino, ¿cuántos peces debemos darle a nuestro vecino?*** *– Dos* ***- ¿podrías mostrarnos con las tarjetas?*** *– (El evaluado separa dos peces del grupo de ocho peces)* ***- ¿Y si le diéramos estos 6 peces también le estaríamos dando la mitad?*** *– Si* ***- ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluador junta los 8 peces nuevamente y luego separa 3) ¿Si le damos estos tres le estaríamos dando también la mitad?*** *– Si.*

Dentro de este grupo también pueden encontrarse otro tipo de error; por ejemplo este se encuentra ligado al concepto de decenas y unidades:

> *Luc (7 años):* ***Ahora imagínate que has pescado 24 peces, ¿puedes poner 24 peces?*** *– (El evaluado alinea uno a uno 24 peces)* ***– Supongamos que tú quieres repartir estos peces entre dos personas de tal manera que cada uno tenga la mitad ¿cómo lo harías?*** *– (el evaluado separa 4 peces de los 24 de tal manera que tiene un grupo de 20 peces y otro de 4).*

En este caso particular, el evaluado divide el total, al parecer, influenciado por la idea de que el número veinticuatro se encuentra compuesto por dos decenas y cuatro unidades. Se puede concluir que en este nivel los estudiantes utilizan criterios ajenos a la definición real de mitad para dividir totalidades.

Noción de mitad en proceso

Se observa una noción de mitad en proceso cuando los niños responden a la pregunta sobre la mitad de una cantidad de manera acertada, pero cuando se les repregunta sobre su respuesta plantean otras opciones, mostrando inseguridad sobre su respuesta inicial. Esto se puede apreciar en el caso siguiente:

> *Les (9 años):* ***Supongamos que hoy pescamos ocho peces*** *– (el evaluado pone ocho peces sobre la mesa)* ***– Pero como no necesitamos tantos peces decidimos regalarle la mitad de estos peces a la vecina, ¿cuántos peces le debemos dar a la vecina?*** *– (El evaluado separa 4 peces para la vecina) Cuatro* ***- ¿Y si le damos así? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 4 y lo pone en el otro grupo, de tal manera que se tenga un grupo de 3 peces y otro de 5) ¿Si le damos estos (grupo de 5 peces) le estaríamos danto la mitad*** *– Si* ***- ¿Y si le damos estos (grupo de 3 peces) le estaríamos danto la mitad?*** *– Si.*

En este caso la noción de mitad no se encuentra del todo desarrollada, puesto que, más allá de que la primera respuesta que brinda el evaluado siempre es la correcta, se conciben otras opciones como correctas. Pareciera ser que el concepto de mitad no es considerado de manera unívoca, sino como algo que puede variar dentro de un intervalo.

Noción de mitad solo con números pares

En el caso de los estudiantes que se encuentran en este nivel, se observa una noción de mitad (con números pares) lograda, pues incluso ante las repreguntas el evaluado no duda de su respuesta. Esto puede ser observado en el siguiente caso:

> *Dal (11 años):* ***Supongamos que ahora que pescamos 16 peces y como son muchos para nosotros decidimos darle la mitad al vecino. ¿Cuánto sería la mitad?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Si quieres puedes usar las tarjetas*** *– (El evaluado saca 16 peces y los pone sobre la mesa, luego cuenta 8 y los separa del grupo total)* ***– ¿Cuánto sería la mitad?*** *– Ocho* ***- ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 8 y lo pasa al otro grupo. Esto genera un ordenamiento de dos grupos, uno de 7 y uno de 9)*** *– No, está mal. Hay un grupo que tiene más.*

El evaluado demuestra tener claridad en que la idea de dividir una totalidad por la mitad implica necesariamente generar dos partes iguales. Sin embargo, cuando se aumenta el nivel de dificultad y se le plantea obtener la mitad de un número impar, no logra llegar a la respuesta:

> *Dal (11 años):* ***Supongamos que pescamos 23 peces, pero nos parece que es mucho para nosotros, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino ¿cuántos peces debemos darle?*** *– Doce.* **- ¿Puedes mostrarnos con las tarjetas?** *– (El evaluado pone sobre la mesa 23 peces) –* ***Ahora queremos darle la mitad a nuestro vecino, ¿podrías separar lo que le vamos a dar a nuestro vecino?*** *– (El evaluado separa 12 peces)* ***- ¿Y en cada grupo hay la mitad?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿O hay uno que tiene más?*** *– Uno tiene más* ***- ¿Cómo podríamos hacer repartir y tengamos la mitad para la vecina?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Cuántos peces hay en este grupo?*** *– Doce* ***- ¿Y en este grupo?*** *– Once* ***- ¿Y podemos decir que cada uno tiene la mitad?*** *– Si* ***- ¿Y esta mitad (grupo de 11) es igual a esta mitad (grupo de 12)?*** *– No* ***- ¿cómo podríamos hacer para que sean mitad y mitad?*** *– (El evaluado retira un pez del grupo de 12) Así.*

En este caso se puede observar que el elemento que convierte la cantidad en impar no logra ser dividido, por lo cual el niño ve como solución dejarlo de lado o ignorarlo. El estudiante de este nivel no concibe como solución dividir una totalidad (el número sobrante) para dar una respuesta que exprese totalmente la idea de mitad.

Noción de mitad con números impares

Los niños que se encuentran en este nivel de desarrollo de la noción de mitad pueden obtener el resultado tanto de números pares como impares. A continuación se presenta un caso en el que se ha planteado a *Sha* el problema que *Dal* no puedo resolver en el nivel anterior:

> *Sha (11 años):* ***Ahora supongamos que hemos pescado 23 peces, pero nos parece que es mucho para nosotros, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino ¿cuántos peces debemos darle?*** *– (El evaluado pone, uno a uno, 23 peces sobre la mesa, luego con esos 23 peces hace dos grupos de once y se queda con un pez fuera de los dos grupos) Este sobra* ***– ¿Y en cada grupo cuantos peces hay?*** *– Once* ***-¿Y hay otra forma de que nos des la mitad o es la única?*** *– Este lo tendríamos que partir (en referencia al pez que sobró)* ***- ¿Y qué haríamos si lo partimos?*** *– Darle una parte a cada uno.*

A pesar que el evaluado obtuvo la respuesta que caracteriza este nivel luego de las repreguntas el evaluador, se puede notar que ya concibe la idea de dividir una totalidad en dos partes para llegar a la respuesta.

Quinta sección: Resultados en la prueba de lápiz y papel

Resultados globales de la operación de adición

Los estudiantes de 11 años muestran tener dominio de la operación de adición. Se observó que optan por sumar de manera algorítmica u obtienen la respuesta mentalmente. Los estudiantes de 9 años llegan a la respuesta correcta en menos ocasiones que los de 11 años, y evidencian dos tipos de resoluciones: la primera, sumando de manera algorítmica y la segunda, haciendo uso de palotes. Finalmente, en los estudiantes de 7 años de edad no se observa ningún tipo de resolución, ya que dejaron todas las operaciones en blanco.

A continuación, en la siguiente tabla, se presenta los resultados de la prueba escrita indicando en qué casos se llegó a la respuesta correcta, se falló o se dejó en blanco.

Tabla 16

Resultados de la prueba escrita: adición

Edad	Evaluado	(4+5)			(14+5)			(21+15)			(8+9)			(18+7)			(15+18)		
		RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B
7 años	Luc			X			X			X			X			X			X
	Roc			X			X			X			X			X			X
	Wil			X			X			X			X			X			X
9 años	Les	X				X			X			X			X			X	
	Man	X			X			X			X				X		X		
11 años	Sha	X			X			X			X			X			X		
	Dal	X			X			X			X			X			X		

Leyenda: Respuesta correcta (RC), Intenta, pero falla (IF), En blanco (B)

Comparación de los dos tipos de evaluaciones en el caso de la adición

Los estudiantes de 7 años demostraron un mejor desempeño en las tareas planteadas por medio del material representativo y la entrevista clínico-crítica. A pesar de que en muchos casos los niños no llegan a la respuesta correcta, en otros logran la respuesta con la ayuda del evaluador. Esto contrasta con su desempeño en la prueba de lápiz y papel, la que dejaron en blanco.

En el caso de los estudiantes de 9 años, sí se pueden observar resoluciones en los dos tipos de evaluaciones. A continuación presentaremos dos ejemplos que muestran el tipo de soluciones que se pueden encontrar en las pruebas de lápiz y papel de los estudiantes de esta edad. La *Figura 6* nos muestra resoluciones de *Man*, en las que llega a la respuesta correcta por medio del uso de palotes:

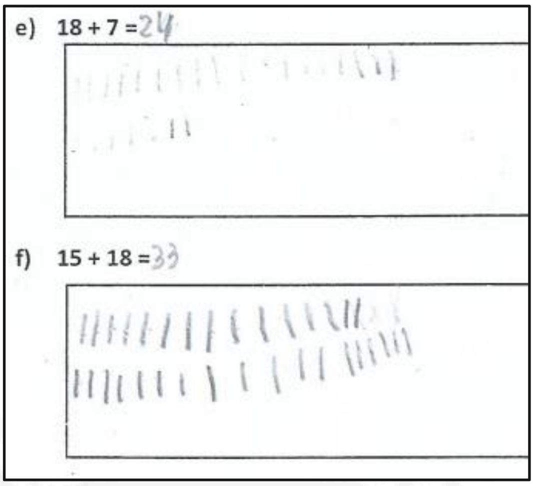


Figura 6. Resolución de operación de adición (1) (estudiante de 9 años)

Esta figura muestra que el recurso que utiliza el estudiante es deficiente, pues no tiene ningún orden para llegar a la respuesta. Por ejemplo, no agrupa los palotes para facilitar el conteo, lo que puede explicar los errores que comete. Así mismo, el procedimiento usado demanda demasiado tiempo, pues implica representar cada uno de los números y luego contar la totalidad. Recordemos que cuando se le presentó la operación (15+18), con material representativo y por medio de la entrevista clínico-crítica, el estudiante sí llega a la respuesta correcta:

> *Man (9 años):* ***Ahora vamos a suponer que tenemos un collar de 18 bolitas y a este collar decidimos agregarle 7 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (el evaluado intenta resolver la pregunta mentalmente, pero luego de un rato desiste. El evaluado empieza a poner bolitas en el collar y no se detiene hasta haber puesto 27, en ese momento las cuenta)* **-** ***¿Recuerdas que queríamos agregarle 7 bolitas a un collar de 18 bolitas?*** *– (El evaluado empieza de nuevo y pone 18 bolitas en el collar de una en una)* ***– Ahora queremos agregarle a ese collar 7 bolitas*** **-** *(El evaluado pone 7 bolitas en el collar de una en una y contando en voz alta)* **-** ***¿cuántas bolitas tenemos en total?*** *– (El evaluado cuenta las bolitas de una en una y obtiene como resultado 25).*

En el caso particular de *Man*, la estrategia que utiliza para resolver las operaciones en la prueba de lápiz y papel y en la evaluación basada en tareas es la misma. Esta estrategia consiste en representar los números propuestos (en la evaluación de lápiz y papel por medio de palotes y en la evaluación basada en tareas por medio del material representativo) y luego contarlo todo. Es por eso que los errores que se presentan en las dos evaluaciones están relacionados al mal uso del recurso de conteo. Además se pueden encontrar casos en los que la estrategia funcionó en la prueba de lápiz y papel y falló en la evaluación basada en tareas, y otros casos (como el caso expuesto anteriormente) en el que falló en la prueba de lápiz y papel, pero se obtuvo la respuesta correcta en la evaluación basada en tareas.

En la *Figura 7*, que se presenta a continuación, se puede apreciar otro tipo de resolución realizada por *Les*, estudiante de 9 años:

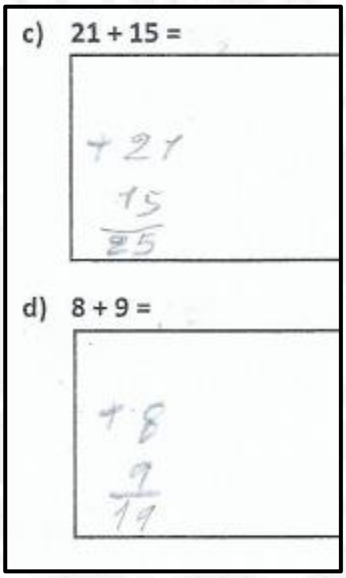


Figura 7. *Resolución de operación de adición (2) (estudiante de 9 años)*

En esta figura se muestran intentos por resolver la operación por medio del procedimiento algorítmico: posicionando un número arriba del otro para luego sumar primero las unidades y luego las decenas. Sin embargo, a pesar de que pone los números en la posición correcta para efectuar este procedimiento, no efectúa los pasos correctamente y por esto, no obtiene la respuesta correcta en ninguno de los dos casos. Sin embargo, por medio de la prueba basada en tareas *Les* obtiene respuestas más lógicas, por ejemplo, en el caso de la suma 21+15 afirma que la respuesta es 37, el cual es un número más cercano a la respuesta correcta y en el caso de la suma 8+9 obtiene la respuesta correcta:

*Les (9 años): **- ¿Tú has hecho collares alguna vez?** – Si **– ¿Te parece si hacemos collares?** – Si – **Bueno, supongamos que tenemos un collar que tiene 8 bolitas.** – (El evaluado de inmediato empieza a poner ocho bolitas, una por una, en el collar) Ya **– Muy bien. Ahí tienes un collar con ocho bolitas. Supongamos ahora que queremos agregarle 9 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendrían el collar?** – (El evaluado agrega 9 bolitas al collar, contando una por una. Luego procede a contar todas las bolitas que tenía el collar de una en una) Son 17 bolitas **- ¿Y cómo lo sabes?** – He juntado todo. **–Has juntado todo, ¿no es cierto? ¿Y luego de que has juntado todas qué es lo que has hecho?** – (El evaluado permanece en silencio) **– Has contado, ¿no?** – Si.*

Los estudiantes de 11 años pueden escribir el resultado de forma directa, simplemente sumando mentalmente. En otros casos hacen uso del procedimiento algorítmico. En la *Figura 8* se muestran resoluciones de *Dal*, estudiante de 11 años, que son un ejemplo de lo segundo:

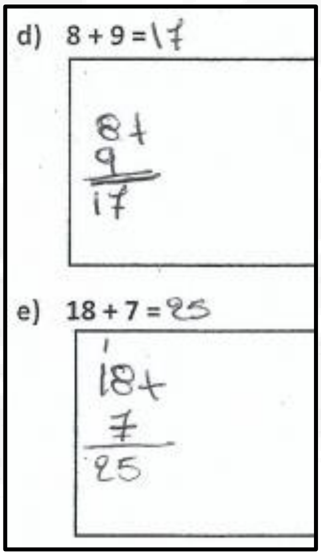


Figura 8. *Resolución de la operación de adición (estudiante de 11 años)*

En la figura anterior se evidencia un dominio del procedimiento algorítmico mucho más desarrollado, es decir que el evaluado entiende los pasos y reglas que componen dicho procedimiento. Esto disminuye considerablemente la posibilidad de error.

De igual manera, en la prueba basada en tareas los niños de 11 años suelen llegar a la respuesta correcta. Esto puede evidenciarse en el siguiente diálogo en el cual se le plantea a *Dal* la adición de 8+9 (operación que se puede observar en la figura anterior):

Dal (11 años): ***Supongamos que tenemos un collar que tiene 8 bolitas negras y a ese collar le agregamos 9 bolitas blancas, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (El evaluado intenta mentalmente) Diecisiete* ***– Si un niñito menor que tú, que no entiende muy bien estas cosas te preguntara cómo llegaste a la respuesta, ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado guarda silencio)* ***– O quizá le podrías mostrar con las bolitas*** *– (El evaluado pone 8 bolitas negras en una mano y 9 bolitas blancas en otra mano) De ahí vamos a sumar todo esto* ***– Se junta*** *– Si, vamos a contar (El evaluado cuenta las bolitas una por una hasta llegar a 17).*

Resultados globales de la operación de sustracción

A continuación se presentan los resultados globales de la operación de sustracción:

Tabla 17

Resultados de la prueba escrita: sustracción

Edad	Evaluado	(8-3)			(14-6)			(18-12)			(9-5)			(16-9)			(22-14)		
		RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B
7 años	Luc			X			X			X			X			X			X
	Roc			X			X			X			X			X			X
	Wil			X			X			X			X			X			X
9 años	Les		X			X			X			X			X			X	
	Man		X			X			X			X			X			X	
11 años	Sha	X			X			X			X				X		X		
	Dal		X		X			X			X				X			X	

Leyenda: Respuesta correcta (RC), Intenta, pero falla (IF), En blanco (B)

Como se puede observar en la Tabla 17, los estudiantes de 11 años llegan a la respuesta correcta, en la mayoría de los casos, haciendo uso del algoritmo o resolviendo la resta mentalmente. La mayoría de errores aparecen cuando se hace uso del algoritmo. Por otro lado, en el caso de los estudiantes de 9 años, se puede observar que fallaron en todos sus intentos. Esto se debe, en la mayoría de los casos, a que realizaron una adición en vez de una sustracción. Finalmente, en los estudiantes de 7 años no se puede observar ningún tipo de resolución.

Comparación de los dos tipos de evaluaciones en el caso de la sustracción

Los estudiantes de 7 años, al igual que en la operación de adición, demostraron un mejor desempeño en las tareas planteadas por medio del material representativo y la entrevista clínico-crítica. Esto se expresa en los procedimientos orientados a encontrar la respuesta correcta y en algunas ocasiones en las que se logra llegar a esta respuesta. Esto contrasta con su desempeño en la prueba de lápiz y papel, en la que dejaron toda la prueba en blanco.

En el caso de los estudiantes de 9 años se puede observar también un mejor desempeño en la evaluación basada en tareas. En la *Figura 9* se presentan resoluciones de *Man* que ejemplifican un tipo de resolución efectuada por los estudiantes de 9 años de edad en la prueba de lápiz y papel:

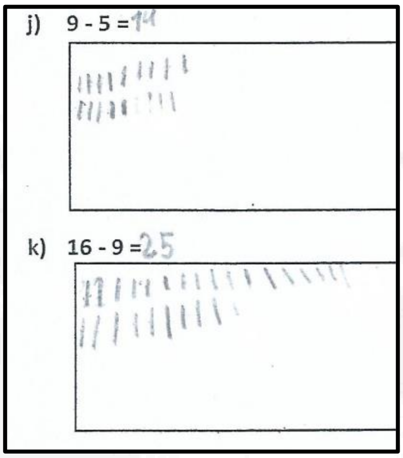


Figura 9. Resolución de operación de sustracción (1) (estudiante de 9 años)

Se pretende llegar a la respuesta haciendo uso de palotes, pero estos se adicionan, no se sustraen. Esto puede deberse a que el estudiante no reconoce el símbolo de sustracción. En la evaluación basada en tareas se le plantea la operación 9-5:

Man (9 años): ***Supongamos ahora que para una reunión utilizamos 9 tapetes*** – *(El evaluado pone 9 tapetes, uno a uno, sobre la mesa)* – ***Cuando termina la reunión tu mamá te dice que de esos 9 tapetes 5 son de la vecina y hay que devolvérselos, ¿con cuántos tapetes nos quedamos en casa?*** – *(El evaluado retira 5 tapetes del grupo de 9 tapetes, luego cuenta los tapetes que le quedan) Son 4* – ***Bien. Supongamos ahora que un niño más pequeñito que tú te pregunta cómo supiste que son cuatro los que se quedan en casa, ¿qué le dirías?*** – *(El evaluado permanece en silencio).*

Como se puede observar, el estudiante llega a la respuesta correcta. Se puede deducir que la situación contextualizada y el uso de material representativo lo ayuda a lograr el resultado esperado.

En el siguiente caso, *Les* intenta usar un método algorítmico:

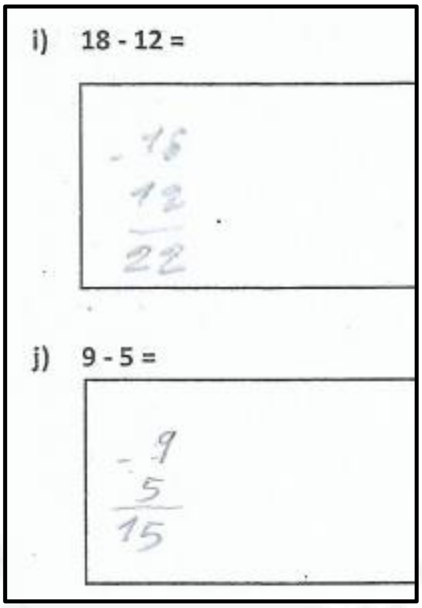


Figura 10. *Resolución de operación de sustracción (2) (estudiante de 9 años)*

En este caso, el niño escribe el símbolo de sustracción como parte de su procedimiento, pero basándonos en sus respuestas pareciera querer adicionar los números. Sin embargo, tampoco obtiene el resultado correspondiente a una adición. Es de resaltar que esto sí sucede en el caso anterior con el estudiante que hace uso de palotes. Además, cuando se evaluaron estas operaciones por medio de la evaluación basada en tareas, el estudiante logró resolver los dos problemas de manera satisfactoria. A continuación, se presenta como ejemplo la operación 18-12:

> *Les (9 años):* ***Teníamos en casa 18 flechas*** *– (El evaluado pone sobre la mesa 18 flechas contando una por una)* ***– Pero resulta que tu papá se lleva para cazar 12 flechas, ¿cuántas nos quedan en casa?*** *– (El evaluado separa 12 flechas del grupo de 18 contando una por una, luego cuenta las que no fueron separadas) Seis.*

Finalmente, en la *Figura 11* se pueden observar dos ejemplos del uso de algoritmos realizados por *Dal*, estudiante de 11 años:

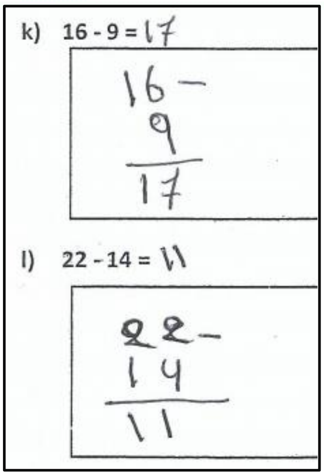


Figura 11. Resolución de operación de sustracción (estudiante de 11 años)

El estudiante no domina el procedimiento algorítmico. En el primer caso (16-9), por ejemplo, entiende que la respuesta es siete, pero olvida que ya no debe bajar el uno que representa a las decenas del número dieciséis. El uso de algoritmos, que aparentemente se ha mecanizado sin haber sido plenamente comprendido, lleva al estudiante a dar como resultado una respuesta ilógica para la operación planteada. En el caso de la evaluación basada en tareas, el evaluado sí obtiene las respuestas correctas. A modo de ejemplo, se presenta el diálogo enmarcado en la operación 22-14:

> *Dal (11 años):* ***Supongamos que tienes en casa 22 tapetes en casa, pero la vecina te pide 14 tapetes prestados, ¿cuántos tapetes te quedan en casa?*** *– (el evaluado pone una a una 22 tarjetas)* ***– Le prestamos 14 a la vecina*** *– Sacamos 14 (El evaluado cuenta 14 tapetes y los retira)* ***- ¿cuántos tenemos en casa?*** *– (El evaluado cuenta los restantes uno por uno) Ocho* ***– Y por ejemplo, ¿si juntamos esto (los 14 tapetes) con esto (los 6 tapetes) tendremos lo mismo que antes?*** *– Si, lo mismo* ***– Un vez le pregunte esto a una niña de tu edad y me dijo que habría una cantidad diferente****. – No* ***- ¿cómo nos mostrarías que está equivocada?*** *– Lo junto así y cuento (el evaluado junta todas los tapetes).*

Resultados globales de la noción de mitad

Como muestra la *Tabla 18*, los estudiantes de 11 años llegan a la respuesta correcta en la totalidad de los casos. En el caso de los de 9 años, la mayoría de los ejercicios que se le propusieron fueron dejados en blanco, siendo solo resuelto el ejercicio con el dígito más pequeño. Finalmente, en los estudiantes de 7 años no se puede observar ningún tipo de resolución.

Tabla 18

Resultados de la prueba escrita: noción de mitad

Edad	Evaluado	Mitad (8)			Mitad (16)			Mitad (24)		
		RC	IF	B	RC	IF	B	RC	IF	B
7 años	Luc			X			X			X
	Roc			X			X			X
	Wil			X			X			X
9 años	Les	X					X			X
	Man	X					X			X
11 años	Sha	X			X			X		
	Dal	X			X			X		

Leyenda: Respuesta correcta (RC), Intenta, pero falla (IF), En blanco (B)

Comparación de los dos tipos de evaluaciones en el caso de la noción de mitad

En el caso de los estudiantes de 7 años, la evaluación de lápiz y papel no brinda información sobre los conocimientos de los evaluados en esta noción. Por el contario la evaluación basada en tareas nos permite posicionar a los evaluados en un nivel de desarrollo de esta noción (Ausencia de la noción de mitad). En el caso de los estudiantes de 9 años, algunos logran los dos logran llegar a la respuesta correcta en el caso del número más pequeño que se les pidió dividir. Sin embargo, la evaluación basada en tareas nos permite observar que esta noción en realidad no se encuentra consolidada, pues ante la repregunta (que no permite la prueba de lápiz y papel pero sí la basada en tareas) los estudiantes cambian su respuesta:

> *Les (9 años):* ***Supongamos que hoy pescamos ocho peces*** *– (el evaluado pone ocho peces sobre la mesa)* ***– Pero como no necesitamos tantos peces decidimos regalarle la mitad de estos peces a la vecina, ¿cuántos peces le debemos dar a la vecina?*** *– (El evaluado separa 4 peces para la vecina) Cuatro* ***- ¿Y si le damos así? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 4 y lo pone en el otro grupo, de tal manera que se tenga un grupo de 3 peces y otro de 5) ¿Si le damos estos (grupo de 5 peces) le estaríamos danto la mitad*** *– Si* ***- ¿Y si le damos estos (grupo de 3 peces) le estaríamos danto la mitad?*** *– Si.*

Finalmente, en el caso de los estudiantes de 11 años se puede encontrar un buen desempeño en las dos pruebas.

Discusión

En el presente trabajo se ha investigado el desarrollo del conocimiento lógico – matemático, específicamente las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, así como la noción de mitad. Los participantes fueron siete estudiantes de una comunidad Shipibo – Konibo de la región de Ucayali, que fueron evaluados por medio del método clínico – crítico de Jean Piaget (Delval, 2001; Ducret, 2004; Parrat, 2016). El razonamiento de los evaluados frente a cada problema se analizó para identificar secuencias de desarrollo. Adicionalmente, se aplicó una prueba de lápiz y papel que evaluaba el desempeño de los niños en las operaciones de adición, sustracción y noción de mitad, con el fin de realizar una comparación con la primera evaluación.

Los niveles encontrados en la evaluación de la operación de adición mediante el método clínico-crítico son los siguientes:

> **Nivel 1:** Etapa inicial de no composición aditiva. **Nivel 2:** Etapa de composición aditiva intuitiva. **Nivel 3:** Etapa de composición aditiva lograda.

Estos tres niveles son similares a los que se discuten en *La génesis del número* (1967/1971) respecto de la operación de adición. En este dicho trabajo, Jean Piaget plantea una primera etapa que se caracteriza por la imposibilidad de iterar (adicionar) elementos, una segunda en la cual los niños pueden iterar pero cambian sus respuestas frente a contra sugestiones y finalmente, una tercera en la que la operación se encuentra consolidada. En el caso de los participantes de este estudio, sus respuestas responden a estos tres niveles de desarrollo, encontrándose que los estudiantes de 7 años se ubican en el primer nivel, los de 9 años en el segundo y los de 11 en el tercero.

Los niveles encontrados en la evaluación de la operación de sustracción mediante el método clínico-crítico son los siguientes:

> **Nivel 1:** Ausencia de la sustracción. **Nivel 2:** Sustracción en proceso. **Nivel 3:** Sustracción lograda.

Estos niveles responden también a la teoría piagetiana (1978), pues describen el desarrollo de la capacidad para pensar en negativo y el desarrollo de la reversibilidad del pensamiento. Se puede observar, en este estudio, un primer nivel en el que los niños manifiestan una incapacidad para sustraer elementos, dan como respuesta números al azar y no cuentan con un pensamiento reversible. Luego, se identifica un segundo nivel en el que ya conciben la posibilidad de sustraer aunque suelen dudar de su respuesta y aún se presentan errores relacionados con la reversibilidad y finalmente, un tercer nivel en el que la operación de sustracción se encuentra consolidada.

Los niveles encontrados en la evaluación de la operación de multiplicación mediante el método clínico-crítico son los siguientes:

Nivel 1: Ausencia de la correspondencia serial o correspondencia serial cualitativa. **Nivel 2:** Pensamiento aditivo con secuencia numérica. **Nivel 3:** Pensamiento aditivo que implica (+2) en el caso de B y (+3) en el caso de C. **Nivel 4 a:** Pensamiento multiplicativo sin éxito inmediato. **Nivel 4 b:** Pensamiento multiplicativo con éxito inmediato.

Los niveles de desarrollo del pensamiento multiplicativo encontrados en este estudio son los mismos que los encontrados por Clark & Kamii (1996).

Los niveles encontrados en la evaluación de la noción de mitad mediante el método clínico-crítico son los siguientes:

Nivel 1: Ausencia de la noción de mitad. **Nivel 2:** Noción de mitad en proceso **Nivel 3:** Noción de mitad con números pares **Nivel 4:** Noción de mitad con números impares.

Los resultados encontrados se corresponden con los niveles de desarrollo de la noción de mitad propuestos por Parrat (1980).

Se puede observar que en todas las operaciones evaluadas, así como en el caso de la noción de mitad, se encontraron niveles de desarrollo que van de la mano con la teoría piagetiana y con lo que proponen estudios previos. En este sentido, esta investigación puede considerarse una evidencia más de la universalidad del conocimiento lógico-matemático propuesta por Jean Piaget (1972). Esta universalidad tiene sentido debido a que todas las personas, más allá de la cultura en la que se encuentran, cuentan con el mismo aparato psíquico para entender el mundo y en consecuencia, las mismas estructuras lógico-matemáticas para organizarlo (Hallpike, 1986; Piaget, 1982). Más allá de la cultura en la que nos encontremos, ciertos procesos universales se darán en la mente de los individuos. Un ejemplo de esto puede ser la equilibración de las estructuras cognitivas que tiene como función regular la adquisición de nuevos conocimientos, orientándose siempre hacia una mayor lógica. Este proceso, específicamente, puede ser un factor explicativo de la existencia de niveles de desarrollo universales, pues al tener todos los seres humanos una orientación hacia las explicaciones cada vez más racionales (y además, contando todos con el mismo aparato psíquico) es esperable que la construcción del conocimiento lógico-matemático se efectúe en los mismos niveles de desarrollo. Por esto, más allá de la naturaleza cultural de los elementos que se sumen, resten, multipliquen o dividan (por ejemplo, ya sean manzanas, semillas de huito, carritos de juguete, palos o piedras), las operaciones que se realizan son universales y la secuencia de desarrollo de estas operaciones también lo son (Piaget, 1967/1971).

En relación con lo anterior, los resultados de esta investigación promueven la reflexión crítica sobre corrientes teóricas como la “etnomatemática”, que considera la existencia de tantas “matemáticas” como culturas existen (D’Ambrosio, 2014) y que además, entiende la universalidad de este conocimiento como un atentado a la individualidad de las culturas (Peña-Rincón, 2015). Este error parte de no diferenciar entre prácticas culturales relacionadas a la matemática, las cuales sí son distintas en cada cultura, y las estructuras lógico matemáticas que tiene todo individuo para organizar el mundo. La explicación de fondo es una visión empirista del conocimiento, que considera que este es una abstracción del mundo exterior y no una construcción que se realiza mediante la interacción de nuestras estructuras cognitivas y el medio (Piaget, 1972). Un ejemplo de los problemas que puede causar este tipo de mirada puede verse en el análisis realizado por Horsthemke & Shäfer (2007) sobre la inmersión de la etnomatemática en el contexto Sudafricano. Encuentran dos problemas (adicionales al epistemológico) en la denominada “matemática africana”. En primer lugar, la aparición de una predominancia práctica por encima de la teorización y formalización del conocimiento. Y en segundo lugar, darle un lugar privilegiado a la “matemática africana” considerándola valiosa por pertenecer a la región y no porque alguna fundamentación teórica valide su capacidad para mejorar la enseñanza. Sin duda, todos estos cuestionamientos no son ajenos al contexto en el que se produce este estudio. Por ejemplo, el documento elaborado por el Ministerio de Educación del Perú (2013b), que ofrece orientaciones pedagógicas a los docentes de escuelas interculturales bilingües sobre la enseñanza de las matemáticas, manifiesta que existen no una, sino muchas matemáticas, entre ellas la matemática occidental, y se propone privilegiar la matemática perteneciente a cada región. Lamentablemente, no entender que la matemática es una y universal puede llevar, por ejemplo, a considerar un concepto matemático como no propio de un contexto cultural específico y decidir no enseñarlo en la escuela. Un ejemplo de esto se encuentra en Blanco (2013) cuando afirma que el concepto de área es propio de sociedades capitalistas, pues serviría para delimitar terrenos y luego comercializarlos, y que por eso no es apropiado para comunidades indígenas. Investigaciones como esta, que resaltan la universalidad del conocimiento matemático, son importantes para corregir una visión excesivamente particularista de las matemáticas y evitar así prácticas pedagógicas erradas en contextos interculturales.

Aunque los participantes de este estudio presentan niveles de desarrollo de las operaciones lógico matemáticas similares a la secuencia encontrada por Jean Piaget (o sus seguidores) en sus estudios originales, es importante notar que estos niveles se están logrando tardíamente. Los niveles universales de desarrollo del conocimiento lógico-matemático son presentados en la teoría Piagetiana indicando edades aproximadas para el paso de un estadio al otro. Sin embargo, la velocidad en la que se desarrolla este tipo de conocimiento depende, en buena medida, de las características del contexto (Dongo, 2002; Hallpike, 1986; Piaget, 1977a). Por ejemplo, diversos estudios muestran que el grado de escolaridad de los padres influye en el desarrollo cognitivo del niño (Ignat & Nataly, 2015; Rindermann & Baumeister, 2015). Así mismo, existe evidencia de que los niños en situación de pobreza suelen tener un menor desarrollo cognitivo que los que crecen en contextos económicamente privilegiados (Lacunza, Contini & Castro; 2010), ya que las demandas cognitivas que se presentan en cada contexto determinan el desarrollo de habilidades de sus individuos (Lacasa, 1989; Rogoff, 1993). Toda esta información puede ayudarnos a entender el hecho de que los estudiantes evaluados en este estudio hayan mostrado niveles de desarrollo inferiores a los esperados para su edad en todas las nociones. Resulta importante mencionar que, tal como afirma Rogoff (1993), los niños que habitan en contextos culturalmente diversos (rurales por ejemplo, o en comunidades nativas como las de este estudio) suelen desarrollar otro tipo de capacidades diferentes a las que desarrolla un niño en un contexto occidental y urbano. Por ejemplo, en contextos donde las relaciones sociales tiene una fuerte importancia y la tecnología es prácticamente inexistente, los niños suelen tener una capacidad de observación mucho más desarrollada que en contextos occidentales altamente tecnologizados. Las capacidades que desarrolla un individuo serán, principalmente, las que su contexto cultural promueva.

Los argumentos anteriores pueden explicar los resultados obtenidos en este estudio y también los bajos niveles que han sido encontrados en la región de Ucayali, sobre todo en el área rural, en la Evaluación Censal Escolar (ECE; 2013, 2014, 2015) aplicada por el Ministerio de Educación (MINEDU). Sin embargo, existe otro factor que puede estar perjudicando el aprendizaje matemático de los estudiantes. Juan Delval (1982) afirma que buena parte de los problemas que se presentan en la escuela respecto del aprendizaje de los niños están relacionados con el hecho de que las metas que se plantean en los programas escolares no se encuentran guiadas por el desarrollo psicológico. En el caso particular peruano, se puede observar que el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) presenta metas que podrían no ser del todo apropiadas para las edades a las que están dirigidas En la misma línea, el Diseño Curricular Nacional presentado en el año 2016 no subsana estas metas inadecuadas. Por ejemplo, la operación de sustracción aparece como meta del primer grado de primaria, a pesar de que autores como Kamii (2000) y Piaget (1978) hayan demostrado que no es un objetivo oportuno para los primeros cursos ya que el pensamiento negativo (cualidad necesaria para afrontar la operación de sustracción) no se encuentra desarrollado en niños menores de 7 años. Otro ejemplo interesante es el de la multiplicación, que se presenta como meta pedagógica desde el segundo grado de primaria, esperando que el estudiante resuelva los problemas por medio de sumas repetidas, y desde tercer grado esperando que multiplique números de dos cifras con números de una cifra. Sin embargo, la literatura sobre la enseñanza de la multiplicación en la escuela sugiere que estas metas resultan demasiado elevadas para los primeros años de primaria (Clark & Kamii, 1996). Respecto a la noción de mitad, en el DCN se plantea que desde el primer año de primaria los estudiantes deberán comprender este concepto. No obstante, al revisar los estudios referentes a esta noción, se observa que el desarrollo de la misma implica un largo proceso que no se consolida en los primeros años de la educación primaria (Parrat, 1980; Parrat & Voneche, 1992), sino más adelante. Por otro lado, en La Propuesta de Diseño Curricular con Enfoque Ambiental (DCD, 2011), documento de la Dirección Regional de Educación de Ucayali (DREU) para las escuelas de la región, se pueden observar también algunas metas poco adecuadas para estudiantes de primaria. Por ejemplo, en este documento, si bien la sustracción no aparece como meta para el primer grado de primaria, en segundo grado se plantea que los estudiantes trabajen esta operación hasta con números de tres cifras. La sustracción puede ser planteada como una meta para el segundo año (Kamii, 2000), pero el trabajo con números de esa magnitud es recomendado para grados posteriores. De igual manera, la multiplicación se plantea como meta para el tercer grado de primaria y con el objetivo de realizar operaciones de hasta con cuatro cifras. Es también resaltante que en esta propuesta pedagógica no se haga mención a la noción de mitad. En vista de lo anterior, se puede deducir que el bajo rendimiento de los estudiantes de comunidades indígenas en matemáticas puede explicarse también, en cierta medida, por esta inadecuación curricular, ya que el desarrollo de las nociones matemáticas elementales se ve afectado por el planteamiento de metas que no son evolutivamente pertinentes para ciertas edades.

Si se contrastan los resultados obtenidos con las metas propuestas por la Dirección Regional de Educación de Ucayali (DREU) (DCD, 2011) para cada grado, se puede concluir que ninguno de los estudiantes evaluados cumple la meta de su grado específico. Los estudiantes de 7 años de edad pertenecen a segundo grado de primaria y tienen como meta realizar adiciones y sustracciones con números naturales de hasta tres cifras. Sin embargo, en el proceso de evaluación demostraron tener dificultades para resolver problemas que implicaban números de una cifra (ya sea haciendo uso del material representativo o en la prueba de lápiz y papel). A los estudiantes de 9 años, que ya se encuentran en tercer grado de primaria, se les plantea como meta realizar operaciones de adicción, sustracción y multiplicación con números de hasta cuatro cifras. Sin embargo, en este estudio demostraron tener dificultades para trabajar estas operaciones con los números propuestos (números de una o dos cifras), ya sea por medio del material representativo, manipulable o la prueba de lápiz y papel. Los niños de 11 años que participaron de la evaluación, se encuentran en el quinto y sexto grado de primaria. En el documento al que estamos haciendo referencia no se pueden apreciar metas respecto de la adicción y sustracción para estos grados, pero sí se plantea como meta, en los dos grados, el trabajo con números decimales. Sin embargo, en la evaluación de la noción de mitad se pudo observar que solo uno de los niños de 11 años logró dividir un elemento por la mitad. En base a esto, se puede deducir que los niños, incluyendo al que logró esta división, tendrán dificultades para trabajar con números decimales o fracciones. Sin duda, la noción de mitad es un concepto importante y debe ser añadida al currículum. Esto debe empezar desde el nivel inicial permitiendo que los estudiantes manipulen todo tipo de materiales. En contextos de diversidad cultural esto se puede hacer con material y tareas cotidianas de modo que se reivindique también la identidad cultural. Los niveles de desarrollo encontrados en esta investigación, que se condicen con la teoría piagetiana (Parrat, 1980), pueden servir de base para la inclusión de esta noción.

Debido a que esta investigación parte de la idea de que el aprendizaje de las matemáticas puede ser distinto si se encuentra contextualizado culturalmente (Adams, Luitel, Afonso, & Taylor, 2008; Dewah, & Van Wyk, 2014; Tillema, 2012; Nunes, 1993a, 1993b; Nunes, Carraher, & Dias Schliemann, 1982, 1993; Nunes & Bryant, 1996; Laurendeau-Bendavid, 1977), un punto importante es que las operaciones de adición, sustracción y mitad fueron evaluadas por medio del método clínico-crítico y luego por medio de una prueba de lápiz y papel. Los problemas planteados a los estudiantes en la primera evaluación estaban contextualizados, es decir, hablaban sobre la cotidianidad del pueblo Shipibo-Konibo, ya que autores como Kamii (2000) y Nunes, Carraher y Dias Schliemann (1982) muestran que esta clase de problemas favorecen el rendimiento de los estudiantes. Adicionalmente, se contó con material representativo y material manipulable con el fin de que estos revelaran el nivel de desarrollo de las nociones evaluadas (Delval, 2001; Ducret, 2004; Parrat, 2016).

Al comparar los resultados de estas dos evaluaciones se puede notar que el rendimiento de los estudiantes en la evaluación contextualizada y haciendo uso de material representativo es, en muchos casos, superior a su rendimiento en la prueba de lápiz y papel. Este hallazgo fortalece la evidencia que indica que en las evaluaciones estandarizadas los estudiantes en situación de pobreza tienen un rendimiento menor al promedio (Bos, Ganimian y Vegas, 2013). El primer tipo de evaluación permite, además, obtener información sobre la manera en la que el estudiante afronta un problema y sobre su nivel de desarrollo en las operaciones evaluadas. Esto es muy importante para el docente, pues le permitirá tomar mejores decisiones al momento de plantear las sesiones de clase y realizar un trabajo diferenciado según las necesidades de sus estudiantes. Por el contrario, las evaluaciones estandarizadas como las propuestas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) o la Evaluación Censal Escolar (ECE) están centradas en las respuestas correctas e incorrectas que dan los estudiantes y tienen una visión dicotómica del aprendizaje. Esto resulta un problema, pues si bien estas evaluaciones son muy importantes para contar con tendencias nacionales acerca del rendimiento general de los estudiantes, resultan insuficientes para identificar cualitativamente los procesos de pensamiento de los niños. El aprendizaje es un proceso y este debe ser observado y analizado para poder ser potenciado. Además, si bien las evaluaciones estandarizadas permiten abarcar muestras grandes, se ha discutido ampliamente que este tipo evaluación tiene múltiples limitaciones. En principio, contribuyen al aprendizaje memorístico y por ende poco funcional, y hace que los profesores entrenen a los estudiantes para afrontar pruebas similares y no para los problemas que presenta la realidad, ya que diversas investigaciones han mostrado que estas evaluaciones limitan al sesgan al profesor en su docencia y ejercen influencia en la manera como los docentes enseñan y en lo que los grupos aprenden (Monereo, 2010; Woolfolck, 2010; Zavala, 2012).

Los resultados de este estudio permiten concluir que los estudiantes participantes presentan un nivel de desempeño en matemáticas inferior al esperado para su edad y nivel escolar, y que, en muchos casos, logran mejores resultados cuando se les evalúa mediante ejercicios contextualizados y haciendo uso de material representativo. Además, este segundo tipo de evaluación brinda mayor información al evaluador sobre el conocimiento y desempeño de los estudiantes. Por lo tanto, resultaría pertinente hacer uso de este tipo de evaluaciones, que contrastan con evaluaciones descontextualizadas que se enfocan más en el resultado final que en el proceso de resolución del problema. Esto favorecerá el mejor desarrollo de los conocimientos matemáticos de los estudiantes, ya que brindará mayor información al docente sobre el verdadero estado de dicho conocimiento, permitiéndole así ajustar mejor su práctica pedagógica y potenciar aprendizajes.

Un segundo punto importante es que los resultados de este estudio mantienen relación con la teoría Piagetiana, pues los niveles de desarrollo encontrados se corresponden con las investigaciones realizadas por el mismo Piaget, o con las investigaciones de sus seguidores. Debido a esto, esta investigación se suma a la evidencia ya existente que demuestra la universalidad de los postulados de la teoría de Piaget, y nos permite concluir que la teoría piagetiana puede ser utilizada en este contexto tanto para comprender el proceso de construcción del conocimiento matemático de los niños, como para apoyar su desarrollo. Se recomienda, entonces, utilizar dicha teoría para el establecimiento de metas de aprendizaje escolar y tomar en cuenta orientaciones pedagógicas derivadas de la teoría piagetiana. Algunas de estas son: propiciar la construcción del conocimiento lógico matemático por medio de actividades (Kamii, 2000), sobre todo en los primeros grados, en lugar de enseñar directamente las relaciones numéricas y las operaciones; recordar que la socialización construida por el maestro entre los estudiantes es fundamental para el desarrollo del conocimiento lógico matemático (Kamii, 1985) y que todo estudiante es capaz de razonar matemáticamente de manera adecuada si es que se dirige su atención a actividades que son de su interés; tener en cuenta que uno de los mayores problemas que se puede encontrar en una clase de matemática es que se pida a los niños que acepten verdades aritméticas ya construidas y organizadas y que no comprenden, pues esa construcción y organización no ha sido hecha por el estudiante y al no comprenderla, solo la repetirá (Piaget, 1948).

Adicionalmente, se considera que la lectura de esta investigación es pertinente para cualquier profesional que se encuentre interesado en la evaluación de operaciones y nociones matemáticas en el contexto amazónico. Las tareas planteadas, los materiales usados y los niveles encontrados pueden ser de gran utilidad para futuras evaluaciones. Finalmente, se piensa que es necesario seguir profundizando en el tema del aprendizaje de los conocimientos matemáticos en contextos de diversidad cultural y repensar los modos en que se enseñan y evalúan las matemáticas en estos contextos.

Referencias

Adams, J., Luitel, B., Afonso, E., & Taylor, P. (2008). A cogenerative inquiry using postcolonial theory to envisage culturally inclusive science education. *Cultural Studies Of Science Education*, 3(4), 999-1019.

Adjei, K. (1977). Influence of specific maternal occupation and behavior on Piagetian cognitive development. En P. R. Dasen (Ed.), *Piagetian psychology: Cross-cultural contributions.* New York: Gardner Press.

Barrenechea, I. (2010). Evaluaciones Estandarizadas: Seis Reflexiones Críticas. *Education Policy Analysis Archives*, 18(8), 1-25.

Ball, D. L (1990). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132–144. http://doi.org/10.2307/749140

Becker, F. (2001) *Educação e construção do conhecimento*. Sao Paulo: Artmed

Becker, F. (2012). *Epistemologia do professor de matemática*. Petrópolis, RJ: Ed. Vozes

Benavides, M (2002). "Para explicar las diferencias en el rendimiento en matemáticas de cuarto grado en el Perú urbano: análisis de resultados en base a un modelo básico". En: Rodríguez, José (ed); Vargas, Silvana (ed). *Análisis y resultados y metodología de las pruebas CRECER 1998*. Lima: Ministerio de Educación; Programa MECEP. p. 93-107. Documento de trabajo, 13.

Benavides, M., Mena, M. & Ponce, C. (2010) Estado de la Niñez Indígena en el Perú. *Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) y Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF).*

Blanco, A. (2013). Matemáticas, diversas como los pueblos indígenas. Julio 26, 2016, de *Red Latinoamericana de Etnomatemática* Sitio web: http://www.etnomatematica.org/home/?p=3487

Bos, M. S.; Ganimian, A. J. & Vegas, E. (2013). América latina en Pisa 2012. Brief # 6: ¿Cómo se desempeñan los estudiantes pobres y ricos? BID, *Banco Interamericano de Desarrollo.* http://www.iadb.org/es/temas/educacion/resultados-pisa-2012-en-america-latina,9080.html

Bruner, J. (1966). *Studies in cognitive growth*. John Wiley: New York

Bovet, M. (1974). Cognitive processes among illiterate children and adults. En: J. W. Berry & P. R. Dasen (Eds.), *Culture and cognition: Readings in cross-cultural psychology*. London: Methuen.

Cáceres, L., De la peña, J., Pineda, A., Di Prisco, C & Solotar, A. (2014). Mathematics in Latin America and the Caribbean: So Much Happening, So Much to Do. Mayo 13, 2015, de *Notices of de AMS* Sitio web: http://www.ams.org/notices/201409/rnoti-p1052.pdf

Carnevale, A. P. (2005). Education and the Economy: If We're So Dumb, Why Are We So Rich? *Education Week*, 24(21), 52-41.

Castro Rodríguez, E., Rico Romero, L., & Gómez, P. (2014). La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, 0(18), 9-23.

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51. Doi: 1. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/749196 doi: 1

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5 [Figura]. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/749196 doi: 1

Cockcroft, W (1982). *Mathematics Counts, informe Del Commitee of Inquiry into the Training of Mathematics in Schools*. Londres: HMSO.

Cueto, S., Ramirez, C., León, J. & Pain, O. (2003). Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemáticas en una muestra de estudiantes del sexto grado de primaria de Lima. Mayo 20, 2015, de Grade Sitio web: http://repositorio.grade.org.pe/handle/GRADE/84

Cueto, S. Guerrero, G. León, J. Zapata, M. & Freire, S. (2013). ¿La cuna marca las oportunidades y el rendimiento educativo? Una mirada al caso peruano. Marzo 9, 2016, de *Grupo de análisis para el desarrollo (GRADE*) Sitio web: http://repositorio.grade.org.pe/bitstream/GRADE/61/1/ddt66.pdf

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana De Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales De La*

Educación Matemática, 7(2), 100-107. Consultado de http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/126

Dasen, P. (1984). The cross-cultural study of intelligence: Piaget and the Baoulé. *International Journal of Psychology*, 19, 407-434

Delval, J. (1982). Para qué sirve un psicólogo. Mayo 5, 2016, de *Diario el País* Sitio web: http://elpais.com/diario/1982/02/24/sociedad/383353201_850215.html

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños: Introducción a la práctica del método clínico-crítico*. Barcelona: Ediciones Paidos.

Dewah, C. & Van Wyk, M. M. (2014). The Place of Indigenous Cultural Games by Educators in the Teaching and Learning of Mathematics. *J Hum Ecol*, 48(1), 189-197.

Dongo, A. (2002). *Piaget y los niños marginados*. Lima: Editora Vozes, Petrópolis.

Duckworth, E (1987). “The having of wonderful ideas” and other essays on teaching and learning. Nueva York: Teacher College Press.

Ducret, J.J. (2004). Methode clinique-critique Piagetienne. Genève: Service de la Recherché en Education.

Flavell, J (1976). *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Buenos Aires: Paidós.

Frisancho, S., Delgado, E. & Lam, L. (2015). El consentimiento informado en contextos de diversidad cultural: trabajando en una comunidad Asháninka del Perú. *Revista interdisciplinaria de Filosofía y Psicología Límite*, 10, pp. 26-35.

Frisancho, S., Delgado, E. & Lam, L. (2015). El consentimiento informado en contextos de diversidad cultural: trabajando en una comunidad Asháninka del Perú [Figura]. Recuperado de: http://limite.uta.cl/index.php/limite/article/view/159/99

Gairín Sallán, J. (2013). Sistemas de representación de números racionales positivos: Un estudio con maestros en formación. Contextos Educativos. *Revista de Educación*, 0(4), 137-159. doi:http://dx.doi.org/10.18172/con.490

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2001 4(2), 129-159

Greenfield, P & Childs, C.P. (1977). Weaving, color terms and pattern representation: Cultural influences and cognitive development among the Zinacantecos of Southern Mexico. *Inter-American Journal of Psychology*, 11, 23–48

Greenfield, P; Maynard, A. & Childs, C.P. (2003). Historical change, cultural learning, and cognitive representation in Zinacantec Maya children. *Cognitive Development*, 18, 455–487.

Hallpike, F (1986). Fundamentos del pensamiento primitivo. Mexico: Fondo de Cultura Económica.

Ignat, S. & Nataly, S. (2015). Influence of family education on the mental development of the child. *Journal Plus Education / Educatia Plus*, 13(2), 241-248.

Inhelder, B & Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Buenos Aires: Paidós

Kamii, C. (1985). *La teoría de Piaget en la educación preescolar*. Madrid: Editorial Visor.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III: Implicaciones de la teoría de Jean Piaget*. Madrid: Visor.

Kamii, C. (1995). *El número en la educación preescolar*. Madrid: Editorial Visor.

Kamii, C. (1996). La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética. *Perspectivas*, vol. XXVI, pp.107-119.

Kamii, C. (2000). El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget. Madrid: Visor.

Laurendeau-Bendavid, M. (1977). Culture, schooling, and cognitive development: A comparative study of children in French Canada and Rwanda. En P. R. Dasen (Ed.), *Piagetian psychology: Cross-cultural contributions*. New York: Gardner Press.

Lacasa, P. (1989). Contexto y desarrollo cognitivo: Entrevista a Barbara Rogoff. *Journal for de study of Education and Development*, 12, 7-23. 2016, Mayo 16, De Taylor & Francis Online Base de datos.

Lacunza, A., Contini, N., & Castro, A. (2010). Las habilidades cognitivas en niños preescolares. Un estudio comparativo en un contexto de pobreza. *Acta Colombiana de Psicología*, 13(1), 25-34.

Lerman, S. (1993). The Role of the Teacher in Children's Learning of Mathematics. En *Significant influences on children's learning of mathematics*. (pp. 61-85). Paris: Education Sector.

May, L. (1994). Teaching Math: Get Cookin' with Fractions. ERIC, 5, 24-25. 2016, marzo 29, De *MathEduc* Base de datos.

Maynard, A. & Greenfield, P. (2003). Implicit cognitive development in cultural tools and children: lessons from Maya Mexico. *Cognitive Development*, 18, 489–510

Meza A. & Sirlopú D. (1997). La investigación psicológica peruana en temas piagetanos. En: Thorne, C. (comp.) *Piaget entre nosotros.* Lima: PUCP

Ministerio de Cultura del Perú (2014). Bases de Datos de pueblos indígenas u originarios. Mayo 21, 2015, de *Ministerio de Cultura* Sitio web: http://bdpi.cultura.gob.pe/pueblo/shipibo-konibo

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima: Minedu.

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2011). *Propuesta de Diseño Curricular Diversificado con Enfoque Ambiental*. Ucayali: Dirección Regional de Educación de Ucayali.

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2013a). Hacia una educación intercultural bilingüe de calidad propuesta pedagógica. Marzo 9, 2016, de *Dirección general de educación intercultural bilingue y rural* Sitio web: http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/a/002/01-general/2-propuesta_pedaggogica_eib_2013.pdf

Ministerio de Educación (2013b). Matemáticas en la Educación Intercultural Bilingüe: Orientaciones Pedagógicas. Lima: Ministerio de Educación del Perú.

Ministerio de Educación (2016). Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Lima: Ministerio de Educación del Perú.

Monereo. (2014). Dime cómo evalúas y te diré cómo aprenden tus alumnos. Mayo 26, 2016, *de El blog de educación y TIC* Sitio web: http://blog.tiching.com/carles-monereo-dime-como-evaluas-y-te-dire-como-aprenden-tus-alumnos/

Moreano, G.; Asmad, U.; Cruz, G. & Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*, 26(2), 299-334

Morales, J. A. & Frisancho, S. (2013). Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial. *Schème. Revista Electrónica de Psicología y Epistemología Genéticas*, 5, 2, 130-156.

Nelson-Barber, S. & Trumbull, E. (2007). Making Assessment Practices Valid for *Indigenous American Students. Journal of American Indian Education*, 46, 3, 132-147.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110.

Nunes, T.; Carraher, D. W. & Dias Schliemann, A. (1982). Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matematica. *Cadernos de Pesquisa São Paulo* 42, 79-86.

Nunes, T. (1993a). The Socio-cultural Context of Mathematical Thinking: Research Findings and Educational Implications. En: UNESCO (1993). Science and Technology Education. Document Series No. 47. *Significant influences on children's learning of mathematics.* http://www.unesco.org/education/pdf/323_47.pdf

Nunes, T. (1993b). The socio-cultural context of mathematical thinking: research findings and educational implications. En *Significant influences on children's learning of mathematics.* (pp. 27-42). Paris: Education Sector.

Nunes, T.; Carraher, D. W. & Dias Schliemann, A. (1993). Street Mathematics and School Mathematics (Learning in Doing: *Social, Cognitive and Computational Perspectives*). New York: Cambridge University Press.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). Children Doing Mathematics (Understanding Children's Worlds). Oxford: Wiley-Blackwell

Nunes, T. Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño.* Buenos Aires: Siglo veintiuno editores.

Nunes, T.; Bryant, P.; Evans, D.; Bell, D.; Gardner, S.; Gardner, A. & Carraher, J. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology*, 25, 147–166.

Opper, S. (1977). Concept development in Thai urban and rural children. En P. R. Dasen (Ed.), *Piagetian psychology: Cross-cultural contributions*. New York: Gardner Press.

Parrat, S. (1980). Etude génétique de la notion de moitié. Genève: J.-L. de Rougemont.

Parrat, S. (2016). Conversaciones libres con los niños: El método clínico Piagetiano. Relación entre teoría y método. En S. Frisancho (coord.), *Ensayos Constructivistas* (pp. 51-76). Lima: Fondo Editorial PUCP.

Parrat, S. & Voneche, J. (1992). Conservation and notion of half. En *Pathways to number* (67-82). Nueva Jersey: Lea.

Peña-Rincón, P; (2015). Descolonizar los saberes: Un gran desafío para la Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(1), 4-9. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274038612001

Piaget, J. (1948). *To understand is to invent.* New York: Grossman.

Piaget, J. (1950/1975). *Introducción a la Epistemología Genética. Tomo I: El Pensamiento Matemático*. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J; Inhelder, B & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Londres: Routledge.

Piaget, J. (1967/1971). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Piaget, J. (1972). *Psicología y epistemología*. Paris: Emencé Editores.

Piaget, J. (1977a). *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Editorial Seix Barral, S.A.

Piaget, J. (1977b). *El juicio y el razonamiento en el niño: estudio sobre la lógica del niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1978). *Investigaciones sobre la contradicción*. Mexico, DF: Siglo Veintiuno Editores.

Piaget, J (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Editorial Siglo XXI editores.

Piaget, J (1987). *Possibility and necessity*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1980). *Psicología del niño*. Madrid: Morata.

Price-Williams, D. R. (1961). A study concerning concepts of conservation of quantities among primitive children. *Acta Psychologica*, 18, 297–305ocumentos.

Programme for International Student Assessment (PISA). PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science. Extraído de http://www.oecd.org/document/44/0,3746,en_2649_35845621_44455276_1_1_1_1,00.html.

Programme for International Student Assessment (PISA). PISA 2012 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science. Extraído de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm

Ravela, P. (2002). ¿Cómo presentan sus resultados los sistemas nacionales de evaluación educativa en América Latina? *Documento de trabajo 22*. Santiago: PREAL.

Ravela, P (2009). "Consignas, devoluciones y calificaciones: los problemas de la evaluación en las aulas de educación primaria en América Latina." *Páginas de Educación* 2: 49–89.

Rindermann, H. & Baumeister, A. E. (2015). Parents' SES vs. parental educational behavior and children's development: A reanalysis of the Hart and Risley study. *Learning And Individual Differences,* 37133-138. doi:10.1016/j.lindif.2014.12.005

Rogof, B. (1993). *El desarrollo cognitivo en el contexto social*. Barcelona: Ediciones Paidós

SICRECE (2015). *Sistema de consulta de resultados de la evaluación censal de estudiantes*. http://sistemas02.minedu.gob.pe/consulta_ece/publico/index.php

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, 233-254.

Tillema, E. S. (2012). What Is the Difference? Using Contextualized Problems. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 17(8), 472-478.

UNESCO. (2014). *Tercer estudio regional comparativo y explicativo*. Santiago de Chile: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.

UNICEF. (2012). *Shipibo: Territorio, historia y cosmovisión*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC). (2013). *Resultados de la evaluación Censal de Estudiantes 2013*. Recuperado de: http://umc.minedu.gob.pe/?cat=11.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC). (2014). *Resultados de la evaluación Censal de Estudiantes 2014.* Recuperado de: http://umc.minedu.gob.pe/?cat=11.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC). (2015). *Resultados de la evaluación Censal de Estudiantes 2015*. Recuperado de: http://umc.minedu.gob.pe/?cat=11.

Valverde, G. & Näslund-Hadley, E. (2010). La condición de la educación en matemáticas y ciencias naturales en América Latina y el Caribe. *BID, Banco Interamericano de Desarrollo.* http://www.oei.es/salactsi/bidciencias.pdf

Villarreal, E. T. (2006). Evaluación del aprendizaje de los estudiantes indígenas en América Latina. (Spanish). *Revista Mexicana De Investigación Educativa*, 11(28), 225-268.

Woolfolk, A. (2010). *Psicología educativa.* Mexico: Person.

Zavala, V. (2012). Dilemas ideológicos en torno a la educación intercultural bilingüe: el caso de la lectura en quechua. *Revista Peruana de Investigación Educativa*, 4, 77-104.

Apéndices

Apéndice A: Evaluación de la operación de adicción

Wil (7 años): **Supongamos que tú y yo salimos a cazar y hoy cazamos 4 perdices y mañana cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?** *– Cuatro –***Hoy cazamos 4 perdices y mañana cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?** *-Once* **- Si deseas puedes usar las figuras, para contar por ejemplo** *– (El evaluado pone una a una las figuras contando del uno al quince) –***Entonces decíamos que hoy miércoles, por ejemplo cazamos 4 perdices y mañana miércoles cazamos 5, ¿cuántas perdices cazamos en total?** *–Seis* **–A ver dame 4 perdices** *– (El evaluado pone 4 figuras en la mano izquierda del evaluador)* **–Muy bien, ahora dame las 5 que cazamos al día siguiente** *– (El evaluado pone 5 figuras en la mano derecha del evaluador)* **- Si yo uniera las perdices de esta mano (mano izquierda) con la de esta mano (mano derecha), ¿cuántas perdices tendría en total?** *– Diez* **–A ver vamos a comprobarlo (El evaluador pone todas las figuras, de la mano izquierda y derecha, en hilera y le pide que las cuente)** *– (El evaluado cuenta 9 figuritas)* **- ¿Entonces cuántas perdices hay en total?** *– (El evaluado ríe)* **– Por ejemplo, si en un día cazamos estas (4 figuras) y en otro día estas de acá (5 figuras) ¿cuántas cazamos en total?** *– Jueves* **– Por ejemplo, si yo junto estas de acá (4 figuras) con estas de acá (5 figuras), ¿cuántas tendría en total?** *– Miércoles.* **-¿Tendría una perdiz?** *– (Asiente con la cabeza)* **– ¿Tendría dos perdices?** *– (Asiente con la cabeza).*

Wil (7 años): **Ahora supongamos que sale un hijo y un papá a cazar perdices y en un momento se separan. Resulta que cuando se encuentran el papá había cazado 13 perdices y el hijo había cazado 5 perdices, ¿cuántas perdices tienen en total?** *–Cuatro… Cinco* **– ¿Deseas utilizar las figuritas?** *– (El evaluado toma las figuritas y pone 13 en una hilera)* **–Muy bien, ahora el hijo caza 5** *– (El evaluado pone 5 figuritas en hilera)* **– Muy bien, ¿entonces estas son las que cazó el papá no? (refiriéndose a las 13)** *– (El evaluado asiente con la cabeza)* **- ¿Y estas otras quién las cazó? (refiriéndose a las 5)** *– (El evaluado no responde)* **– ¿Las cazó el hijo?** *– Si* **– Pero los dos viven en la misma casa** *–Si* **–Entonces, ¿cuántas perdices hay en total en la casa?** *– Uno* **- ¿En toda esta hilera hay una sola perdiz?** *– (El evaluado niega con la cabeza)* **- ¿cuántas hay?** *– (El evaluado cuenta las figuras, pero cuenta algunas más de una vez) Hay 20.*

*Wil (7 años***): Ahora supongamos que tú y yo cazamos 21 perdices y además el vecino nos regala 15 más, ¿cuántas tenemos en total?** *– 20* **-¿quieres usar las figuras para ver cuántas perdices hay?** *– (El evaluado pone perdices contando hasta 25, pero dentro de* *su conteo no incluye el número 17)* **-¿cuántas perdices has puesto en hilera?** – *(el evaluado cuenta las perdices que puso en hilera, el total del conteo le da 25 a pesar de haber en realidad 24. Esto se debe a que dentro de su conteo no incluye el número 17)* **– Pero el papá cazo 21 perdices ¿no?, no 25, ¿cuántas perdices le tienes que quitar para que sea 21?** – *Uno* **– A ver hay que quitarle uno** – *(El evaluado quita una figura)* **- ¿Cuántas perdices hay ahora?** – *(El evaluado recurre al conteo nuevamente y el resultado de su conteo es 24 perdices, sin embargo en realidad hay 23. El error se debe a que dentro de su conteo no incluye el número 17).*

Wil (7 años): **-¿Tú alguna vez has hecho collares?** *–Si* **–Supongamos que armamos un collar y le ponemos 8 bolitas, a ver pon 8 bolitas en el collar** – *(El evaluado va poniendo una a una las bolitas contando en voz alta, cuando ha puesto ya 7 bolitas dice 8 en voz alta pero no pone ninguna bolita que corresponda a ese número)* **– A ver cuenta cuantas bolitas tienes ahora en el collar** – *Ocho* **– A ver cuéntalas** – *(El evaluado cuenta las bolitas correctamente y el conteo le da 7, al notarlo ríe)* **- ¿Cuántas bolitas te faltan para llegar a 8?** – *Uno (el evaluado pone una bolita más en el collar y dice en voz alta "Ocho")* **– Ahora supongamos que a ese collar de 8 yo quiero agregarle 9 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?** – *Ocho* **– A ver, si yo tengo este collar de 8 bolitas y le quiero agregar 9 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?** – *Once* **– A ver agrégale 9 bolitas más al collar** – *(El evaluado agrega correctamente 9 bolitas al collar)* **– Antes teníamos un collar de 8 bolitas y ahora le hemos agregado 9 bolitas más ¿cuántas bolitas tiene en total el collar?** – *(El evaluado recurre al conteo para obtener la respuesta) Veintiuno (El evaluado obtiene como resultado de su conteo 21 bolitas, sin embargo tiene 17 en el collar. El evaluado cuenta más de una vez varias de las bolitas).*

Wil (7 años): **Ahora vamos a armar un collar con 18 bolitas, ¿puedes poner 18 bolitas en el collar?** – *(El evaluado va poniendo una en una las bolitas contando en voz alta, pero no utiliza en su conteo el número 15 y el 17, termina de poner bolitas afirmando tener 18 bolitas en el collar, sin embargo tiene 16)* **– Si queremos agregarle a este collar 7 bolitas más, ¿cuántas bolitas en total tendría este collar?** – *Veinte* **– Si tuvieras que explicarle a un niño más pequeño que tú cómo se obtiene la respuesta ¿cómo le explicarías?** – *(El evaluado ríe)* **– A ver, ¿cuántas bolitas tienes en el collar?** – *Dieciséis* **– Ósea que no habían 18, ¿cuántas te faltan para llegar a 18?** – *Una (el evaluado agrega una bolita al collar y cuenta nuevamente: el conteo le da 18 a pesar de tener 17, esto se debe a que no utiliza el número 17 en el conteo).*

Luc (7 años): ***Imagínate que vamos a cazar tú y yo, ¿Alguna vez has ido a cazar?*** *–Si –* ***¿Y has visto que otras personas cazan también?*** *– Si –****Ya, vamos a suponer que vamos a cazar tú y yo. Digamos que yo me voy por un lado y yo cazo 4 pájaros, ¿puedes poner 4 figuras de pájaros sobre la mesa?*** *– (el evaluado cuenta uno a uno hasta tener 4 figuras en hilera)* ***– Ahora tú te vas por otro lado y cazas 5 pájaros, ¿Puedes poner los 5 pájaros que has cazado?*** *– (El evaluado pone 5 figuras más sobre la mesa y en otra hilera)* ***– Ahora supongamos que tu mamá te pregunta ¿cuántos pájaros hemos cazado tú y yo en total? ¿Qué le dirías?*** *– (El evaluado se mantiene en silencio)* ***– Digamos que te pregunta cuántos he cazado yo, ¿cuántos he cazado yo?*** *– Cuatro* ***– Y luego te pregunta cuántos has cazado tú ¿cuántos has cazado tú? – Cuatro - ¿También? A ver cuáles son mis cuatro, los que yo he cazado*** *– (El evaluado señala con el dedo la fila de 4 figuras****.*** ***– ¿Y los tuyos?*** *– (El evaluado señala con el dedo la hilera de 5 figuras)* ***- ¿Y cuántas hay ahí?*** *– Cinco* ***– Ósea yo tengo ¿cuántas?*** *– Cuatro* ***– ¿Y tú?*** *– Cinco* ***– Perfecto, tú ya le has dicho que yo he cazado cuatro y tú has cazado 5 y luego te dicen "¿Pero cuánto han cazado los dos juntos?*** *– (El evaluado permanece unos segundos en silencio) ¿Con todo?* ***– Claro, contando lo tuyo y lo mío, tus pájaros y mis pájaros*** *– (El evaluado cuenta los pájaros y el conteo le da 9)* ***– Muy bien ahora supongamos que viene un niño que es así como que muy fastidioso, bien pesado y dice "No profesora, han cazado 5 los dos juntos", ¿Tú que le dirías a este niño? ¿Es verdad lo que dice?*** *– Si es verdad*

Luc (7 años): ***Ahora imagínate que yo voy a cazar y cazo 13 pájaros, ¿Puedes poner 13 pájaros sobre la mesa?*** *– (Pone las figuras una a una, se detiene luego de poner 8 figuras y las cuenta, luego pone una a una 4 figuras más. Hay 12 figuras sobre la mesa, pero el evaluado afirma que ha puesto 13)* ***- ¿Cuántas figuras tienes ahí?*** *– Trece* ***– ¿Puedes contarlas para estar seguros?*** *–(El evaluado cuenta las figuras y descubre que son 12, al notarlo ríe)* ***- ¿Cuántas hay?*** *– Doce* ***- ¿Cuántas faltan para que hayan 13?*** *– Una (el evaluado pone una figura más en la hilera que ha formado)* ***- ¿Cuántos tenemos ahora?*** *–Trece* ***–Esos son mis pájaros que yo he cazado ¿no? Ahora imagínate que un amigo mío va a cazar también él ha cazado 5 pájaros, ¿puedes poner esos 5 pájaros?*** *– (El evaluado pone una a una las 5 figuras)* ***– Listo, ahora imagínate que un amigo te hace una pregunta: ¿cuánto han cazado ellos dos juntos? Ósea yo y mi amigo, ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado se mantiene en silencio)* ***– A ver, supongamos que te pregunta cuántos cacé yo ¿qué le dirías?*** *– Trece* ***– Y luego te pregunta, ¿cuántos ha cazado mi amigo?*** *– Cinco –* ***Perfecto. Y luego te pregunta cuántos hemos cazado los dos juntos,***

¿Qué le dirías? *– (El evaluado permanece en silencio)* ***–Digamos que te dice que juntos, yo y mi amigo, hemos cazado un pájaro ¿qué le dirías?*** *– Si –* ***¿Si junto todos estos pájaros tendría un pájaro?*** *– (El evaluado asiente con la cabeza)* ***– Y luego ella te dice: "pero acá no hay un pájaro, acá hay un montón de pájaros ¿Tú que le dirías?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Por ejemplo, si te dicen que yo y mi amigo hemos cazado 10 ¿tú que le dirías?*** *– Más* ***-¿Más? ¿Cuánto más?*** *– Primero trece y luego cinco* ***–Y si juntamos todo eso ¿cuánto hemos cazado?*** *– Dieciocho –* ***Muy bien, ¿cómo has hecho para saber eso?*** *– (El evaluado permanece en silencio).*

Luc (7 años): ***Imagínate ahora que tú cazas 21 pájaros ¿sabes cuánto es 21 pájaros?*** *– Si –* ***¿Puedes poner 21 pájaros para ti?*** *– (El evaluado va poniendo en una sola hilera cada uno a uno los pájaros y va contando de cuando en cuando. Al terminar afirma tener 21 figuras, pero en realidad tiene 20)* ***– Muy bien, ¿podrías contar para verificar que tienes 21?*** *– (El evaluado cuenta las figuras y nota que tiene 20****) -¿cuántas te faltan para llegar a 21?*** *–Una* ***–A ver pon una****. – (El evaluado pone una más y cuenta todas. Verifica finalmente que tiene 21)* ***– Esos son los 21 que tú has cazado, has cazado un montón de pájaros ¿no? Ahora imagínate que un amigo te trae 15 pájaros que él ha cazado, ¿puedes poner los 15 pájaros?*** *– (el evaluado va poniendo las 15 figuras de uno en uno. Pone 15 exactamente)* ***– Ahí tienes todos los pájaros de tu amigo ¿no?*** *–Si* ***–Ahora supongamos que tu mamá te pregunta ¿cuántos pájaros en total han cazado tú y tu amigo?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– Te pregunta por ejemplo primero ¿cuántos has cazado tú?*** *– Veintiuno* ***– Y te pregunta luego ¿cuántos ha cazado tu amigo?*** *– Quince* ***– ¿Y los dos juntos cuántos han cazado?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***–Si juntamos lo que cazaste tú y lo que cazó tu amigo ¿cuánto sería?*** *– (El evaluado cuenta la hilera de los 21 pájaros una por una, luego cuanta la hilera de los 15 pájaros empezando con el número 22. Finalmente obtiene como resultado 37, a pesar de que en realidad hay 36)* ***– Ahora supongamos que viene un niño que le gusta mucho hacer bromas y le dice a tu mamá que es mentira, que en realidad los dos juntos han cazado 21 nada más. Tu mamá te pregunta ¿es verdad lo que dice el niño?, ¿tú que le dirías?*** *– (El evaluado permanece en silencio por un momento)* ***-¿Es verdad lo que dice el niño?*** *–No –* ***¿Y cómo podemos hacer para saber quién dice la verdad?*** *– Yo* ***– Tú dices la verdad, pero ¿cómo la convencerías a tu mamá de que tú dices la verdad?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– ¿Le muestras a tu mamá a tu mamá esta hilera de***

15 y le dices acá hay 37? *–Si –* ***¿Le muestras a tu mamá 15 y ya va a estar convencida?*** *– Si.*

Luc (7 años): ***¿Tú has hecho collares alguna vez?*** *–Si –* ***Que bueno. Vamos a hacer collares juntos ¿ya? Vamos a hacer un collar con 8 bolitas. ¿Puedes poner 8 bolitas en este hilo?*** *– (El evaluado va poniendo las bolitas una a una hasta haber puesto 8)* ***– Ya está, un collar de 8. Pero ahora imagínate que ese collar se lo queremos dar a una persona más grande, así que ahora necesitamos agregarle 9 bolitas más ¿cuántas bolitas en total tendría ese collar?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***–Puedes agregar las bolitas si deseas*** *– (El evaluado agrega una a una las 9 bolitas al collar)* ***– Muy bien. ¿Ahora cuántas bolitas hay en el collar? ¿Si juntas las 8 que había con las 9 que has puesto?*** *– (El evaluado cuenta una por una las bolitas y dice que el total es 17)* ***– Digamos que un niño viene y te dice "que bonito tu collar con 10 bolitas" ¿ese niño está diciendo la verdad?*** *– No* ***- ¿En qué se equivoca el niño?*** *– (El evaluado guarda silencio)* ***- ¿qué debería decir el niño para decir la verdad?*** *– (El evaluado permanece en silencio) –* ***Supongamos que el niño viene y cuanta y le da 10 (El evaluador hace la mímica de contar mal, contando de 3 en tres o de dos en dos) ¿Estaría bien? ¿Cómo tiene que contar?*** *– (El evaluado cuenta las bolitas nuevamente de uno en uno) Diecisiete hay.*

Luc (7 años): ***Imagínate que alguien te pide hacer un collar con 18 bolitas, ¿puedes hacer un collar con 18 bolitas?*** *– (El evaluado pone 18 bolitas de una en una)* ***– Ahora imagínate que alguien te dice que quiere que le pongas 7 bolitas más (el evaluado pone en su mano 7 bolitas), si yo le agrego 7 bolitas a ese collar que has armado, ¿cuántas bolitas tendría el collar en total?*** *– (El evaluado piensa unos segundos y luego cuenta las siete bolitas que el evaluador tiene en su mano pero contando desde 19. El resultado de ese conteo es 25)* ***– Muy bien. ¿Y cómo lo sabes? ¿Has adivinado?*** *– Si –* ***Por ejemplo, una vez le pregunté esto a un niño y me dijo que si le ponía estas bolitas (las que tiene en su mano) a esas bolitas (las que están en el collar) iba a tener 10 bolitas ¿tú que piensas? ¿Es verdad?*** *– (El evaluado cuenta nuevamente todas as bolitas) Son 25.*

*Luc (7 años)****: Imagínate que alguien te dice que por favor le hagas un collar con 15 bolitas, ¿puedes hacer un collar con 15 bolitas?*** *– (El evaluado va poniendo las 15 bolitas de una en una. Cada cierto lapso de tiempo cuenta las bolitas que va poniendo para saber cuántas le faltan) –* ***Ahora imagínate que queremos que le agregues estas bolitas al collar (el evaluado le muestra 18 bolitas) para hacer un collar todavía más***

grande, ¿cuántas bolitas en total tendría el collar? *– (el evaluado permanece en silencio)* ***- ¿cómo harías para saberlo?*** *– (el evaluado cuenta las bolitas que tiene el evaluador entre sus manos y afirma que la suma sería 24)* ***– Yo he visto que has contado las bolitas que tengo en mis manos, ¿puedes contar en voz alta para que te escuchemos?*** *– (El evaluado va poniendo una a una las bolitas en su mano y contándolas. Al llegar a 15 bolitas estas empiezan a caer de su mano, así que suelta las bolitas en la mesa y se ve obligado a empezar de nuevo. Para facilitarle el trabajo el evaluador juntas sus manos y le dice que si desea puede depositar las bolitas en sus manos para que no se caigan y poder contar mejor. Finalmente logra saber que eran 18 bolitas)* ***– Muy bien. Ahora, si juntamos las bolitas que tú has puesto en mis manos con las que tiene el collar, ¿cuántas bolitas tendría ese collar?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– ¿Ese collar tendría más bolitas que las que has puesto entre mis manos?*** *–Si* ***- ¿Ese collar tendría más bolitas que las que hay en este momento en el collar?*** *– Si* ***- ¿Tendría igual de bolitas que si juntamos las que tengo en mis manos con las que hay en el collar?*** *–Si* ***- ¿Cómo podríamos saber cuántas bolitas tendría ese collar?*** *– (el evaluado cuenta de una en una las bolitas que están en el collar y luego continúa contando de una en una las que había depositado en las manos del evaluador poniéndolas junto al collar. Finalmente da con la respuesta) Son 33* ***–Muy bien. Ahora supongamos que un niño te dice que estas mintiendo y te dice que acá hay 5 bolitas nada más ¿es verdad?*** *– No* ***– ¿Y si te dice que acá hay 20?*** *– No* ***- ¿Hay más o hay menos?*** *– Hay más – ¿Y si te dice que hay 30? ¿Es verdad? ¿Hay más o hay menos o hay igual? – (el evaluado permanece en silencio)* ***-¿Cuántas hay?*** *– 34*

Roc (7 años): ***¿Te parece si jugamos? Mira yo he traído estas figuras de perdices, yo quisiera contarte algunos casos y hacerte algunas preguntas. Tú puedes usar este material para responderme ¿Te parece?*** *– Si* ***–Perfecto. Vamos a suponer que tú y yo salimos a cazar y yo cazamos 4 perdices y mañana cazamos 5 perdices, ¿cuántas perdices tenemos en total?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Quieres usar las figuritas? Puedes poner 4 perdices sobre la mesa.*** *– (el evaluado pone 4 perdices sobre la mesa una encima de la otra)* ***– Y mañana cazamos 5 -*** *(El evaluado pone 5 perdices sobre la mesa una encima de la otra)* ***- ¿Cómo podemos saber cuántas cazamos en total?*** *– (el evaluado cuenta las perdices de los dos montones una por una) Son 9* ***– Muy bien. ¿Y cómo has hecho para saberlo?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– Un niño me dijo a mí una vez que si juntas estas de acá (las 5 figuras) con estas de acá (las 4 figuras)***

hay en realidad dos perdices, ¿tú que piensas? *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Cómo podemos hacer para saber cuántas hay?*** *– (el evaluado cuenta nuevamente una por una) Nueve.*

Roc (7 años): ***Ahora supongamos que un hijo y un papá salen a cazar, pero en un momento se separan. Por un lado el padre caza 13 perdices y por otro lado el hijo caza 5 perdices, ¿cuántas perdices tienen los dos juntos?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– ¿Deseas utilizar las figuritas? El padre cazó 13 perdices, ¿puedes poner 13 perdices?*** *– (el evaluado pone 3 perdices una encima de la otra)* ***-¿cuántas perdices tenemos aquí?*** *– Tres* ***– Pero en padre en realidad cazó 13 perdices ¿sabes cuánto es 13?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Qué tal 10 perdices? ¿Puedes hacer que acá haya 10 perdices?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***-¿Puedes hacer que hayan acá 4 perdices?*** *– Si* ***– A ver*** *– (El evaluado agrega dos figuras a las 3 que ya tenía)* ***- ¿cuántas perdices tenemos ahora? -*** *5 perdices* ***– A ver pon una más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas tienes ahora?*** *– Seis* ***– A ver pon una más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas hay ahora?*** *– Ocho* ***– ¿Estás seguro? ¿No deseas contar?*** *– (el evaluado las cuenta) Son* ***7 – Muy bien. A ver agrega una más – (el evaluado pone una más) - ¿cuántas hay?*** *– Ocho* ***– A ver pon una más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas hay?*** *– (El evaluado las cuenta una por una) Son 9* ***– A ver pon una más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas tienes ahora?*** *– Diez* ***– A ver pon una más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas tienes ahora?*** *– (el evaluado cuenta todas nuevamente) Once* ***– Muy bien. A ver pon dos más*** *– (El evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas tienes ahora?*** *– Doce* ***– A ver una perdiz más*** *– (el evaluado pone una más)* ***- ¿cuántas hay ahora en total?*** *– (el evaluado cuenta nuevamente) Trece perdices* ***– Muy bien. Entonces el papá cazó en total trece perdices ¿no? ¿Y cuántas perdices has puesto tú sobre la mesa?*** *– (el evaluado cuenta nuevamente)* ***Trece – Claro, justo lo que ha cazado el padre, pero el hijo se había ido por otro lado y había cazado 5 perdices, ¿puedes poner 5 perdices?*** *– (El evaluado pone 5 perdices sobre la mesa en hilera)* ***– Muy bien, pero cuando ellos llegan a caza juntan todas las perdices ¿no? ¿Cuántas perdices tienen en total?*** *– (el evaluado cuenta en desorden) Son 18.*

Roc (7 años): ***Ahora supongamos que cazamos 21 perdices, ¿puedes poner 21 perdices?*** *– (El evaluado va poniendo las figuras de una en una. Finalmente pone 18)* ***- ¿cuántas tienes figuras tienes ahí?*** *– Veinte* ***– Ahora supongamos que el vecino nos regala 15 perdices más, si a estas perdices que tenemos acá les agregamos 15 perdices más,***

¿cuántas tendríamos en total? *– (el evaluado permanece por un momento en silencio) Veinte* ***– ¿Si le sumamos a estas perdices que tenemos acá 15 más nos daría 20?*** *– Dieciocho.*

Roc (7 años): ***Ahora queremos armar un collar con 18 bolitas negras y 7 bolitas blancas ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– Veinte.* ***¿No deseas agregar las bolitas para saber? Recuerda, 18 bolitas negras y 7 blancas ¿cuántas habría en total?*** *– (El evaluado agrega primero 6 bolitas, luego 5 más hasta llegar a 11 y finalmente 8 más hasta llegar a 19)* ***- ¿El collar tiene las 18 bolitas negras y las 7 bolitas blancas?*** *– (El evaluado permanece en silencio)*

Roc (7 años): ***Mira voy a poner a este lado un grupo de bolitas blancas (8 bolitas) y a este otro lado otro grupo de bolitas blancas (9 bolitas), ¿Puedes poner una cantidad de bolitas negras que sea igual que estos dos grupos?*** *– (el evaluado pone 25 bolitas negras juntas en un grupo)* ***– Entonces, ¿si yo junto los dos grupos de bolitas blancas tengo igual que las bolitas negras que tú has juntado?*** *– No* ***- ¿puedes hacer que haya la misma cantidad de bolitas negras que de blancas?*** *– (el evaluado cuenta las bolitas blancas y logra saber que son 18)* ***- ¿Entonces tenemos el mismo número de bolitas negras que de bolitas blancas?*** *–Si*

Man (9 años): ***- Vamos a suponer que el lunes yo cacé 4 perdices y el martes cacé 5 perdices, ¿cuántas perdices tengo en total?*** *– (el evaluado pone en hilera 4 tarjetas, luego pone una más y dice súbitamente que el resultado es 9).* ***¿Cómo has llegado a esta respuesta?*** *– He juntado.*

Man (9 años): ***-Supongamos que un papá y un hijo salieron a cazar perdices y en un momento se separan. El padre logra cazar 13 perdices y el hijo 5 perdices. Cuando llegan a caza juntan las perdices, ¿cuántas tienen en total?*** *– (El evaluado pone trece perdices en hilera, luego pone 5 perdices más en hilera, finalmente cuenta todo del 1 al 18)* ***–Ahora supongamos que sucedió al revés. Supongamos que el padre logra cazar 5 perdices y el hijo logra cazar 13*** *– (El evaluado saca otras tarjetas y las pone en otra hilera empezando esta vez desde el 5, luego pone 13 y finalmente cuenta todo. Sin embargo se equivoca al contar) Son 17.*

Man (9 años): ***Ahora resulta que tú yo salimos a cazar y logramos cazar 21 perdices, pero cuando estamos regresando nos encontramos con un vecino y nos regala 15 perdices más, ¿cuántas perdices tenemos ahora en total?*** *– (El evaluado pone 21* *perdices en hilera sobre la mesa contando una por una, luego pone 15 perdices también en hilera contando una por una. Finalmente cuenta todas una por una, sin embargo olvida contar una y obtiene como resultado 35)*

Man (9 años): ***Ahora me gustaría que me ayudes a hacer unos collares, ¿te parece?*** *– Si –****Supongamos que tengo un collar que tiene 8 bolitas y le quiero agregar 9 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría el collar?*** *– (El evaluado intenta mentalmente****) – ¿No te gustaría armar el collar para saber la respuesta?*** *– (El evaluado pone 8 bolitas en el hilo, de una en una****) – Ahora a ese collar le queríamos agregar 9 bolitas más ¿no?*** *– (El evaluado agrega 9 bolitas de una en una****) - ¿cuántas bolitas tiene ahora en total el collar?*** *– (El evaluado cuenta todas las bolitas de una en una y logra saber que el resultado es 17). Supongamos ahora que tengo un collar que tiene 9 bolitas y quiero agregarle 8 bolitas más ¿cuántas bolitas tendría el collar en total? – (El evaluado retira todas las bolitas del collar y realizar el procedimiento nuevamente, esta vez empezando por el número 9) Son 17..*

Man (9 años): ***Ahora vamos a suponer que tenemos un collar de 18 bolitas y a este collar decidimos agregarle 7 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (el evaluado intenta resolver la pregunta mentalmente, pero luego de un rato desiste. El evaluado empieza a poner bolitas en el collar y no se detiene hasta haber puesto 27, en ese momento las cuenta) -* ***¿Recuerdas que queríamos agregarle 7 bolitas a un collar de 18 bolitas?*** *– (El evaluado empieza de nuevo y pone 18 bolitas en el collar de una en una)* ***– Ahora queremos agregarle a ese collar 7 bolitas*** *- (El evaluado pone 7 bolitas en el collar de una en una y contando en voz alta) -* ***¿cuántas bolitas tenemos en total?*** *– (El evaluado cuenta las bolitas de una en una y obtiene como resultado 25).*

Man (9 años): ***Mira, supongamos que tenemos un collar de 15 bolitas y para hacerlo más grande le agregamos 18 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendría este collar?*** *– (El evaluado empieza agregando las quince bolitas una por una contando en voz alta)* ***– Muy bien, ahora recuerda que para hacer el collar más grande queríamos agregarle 18 bolitas más ¿no?*** *– (El evaluado agrega 18 bolitas más al collar de una en una y contando en voz alta) -* ***¿cuántas bolitas tiene este nuevo collar en total?*** *– (El evaluado cuenta todas las bolitas de una y en voz alta, sin embargo cuenta mal y obtiene como resultado del conteo 34).*

Les (9 años): ***Supongamos que yo salí a cazar el lunes y cacé 4 perdices y el martes volví a salir y cacé 5, ¿cuántas perdices tengo en total?*** *– (el evaluado permanece en silencio por un momento) Catorce* ***- ¿Y cómo lo sabes? ¿Cómo has llegado a la respuesta?*** *– Así todo...* ***– Y por ejemplo, yo te había dicho que aquí tenemos figuras de perdices ¿no? ¿Podrías mostrarnos con las tarjetas de perdices cómo has hecho? ¿Puedes contar las perdices con las tarjetas?*** *– (El evaluado saca de la cajita 4 figuras de perdices y las pone una sobre otra, luego saca 5 figuras de perdices y hace con ellas otro montículo. Finalmente cuenta una por una las figuras de los dos montículos) Son 9* ***- ¿Cuántas perdices tengo en total?*** *– Nueve* ***-¿Cómo lo has hecho?*** *– Todo he juntado.*

Les (9 años): ***Supongamos que un papá y un hijo salieron juntos a cazar perdices y en un momento se separaron, el papá se fue por un lado y el hijo por otro lado. Resulta que el papá, como es más hábil, cazó 13 perdices y el hijo cazó 5. Cuando llegan a su casa junta todas las perdices, ¿cuántas perdices tienen en total?*** *– Ocho* ***- ¿Y cómo lo sabes?*** *– Así todo he juntado.* ***– Si juntas las 13 más las 5 te dan 8, ¿quieres mostrarnos con las tarjetitas? Yo te contaba que el papá cazó 13 y el hijo cazó 5*** *- ¿Trece di?* ***– Si, trece*** *– (El evaluado va poniendo una a una en un montículo hasta llegar a 13 perdices. Luego en otro montículo pone 5 figuras. Finalmente cuenta los dos montículos de corrido) Son 19.*

Les (9 años): ***Supongamos ahora que salimos a cazar tú y yo y cazamos 21 perdices, pero además de eso nos encontramos con el vecino y este nos regala 15 perdices más, ¿cuántas perdices tenemos ahora en total?*** *- (El evaluado pone primero 21 perdices en un montículo, luego pone 15 perdices en otro montículo) Son 25* ***- ¿25? Entonces, ¿qué es lo que has hecho tú?*** *– He juntado* ***– Has juntado los dos grupos, ósea que si tú juntas este grupo (el grupo de 21 perdices) más este grupo (el grupo de 15 perdices), ¿cuántas perdices tenemos en total?*** *– Veinticinco.* ***– Veinticinco, ¿Y cómo sabes que son 25?, digamos que un niño más pequeño te dice "¿cómo lo has hecho?", ¿cómo le enseñarías?*** *– He juntado todo* ***- ¿Y luego de haber juntado todo qué es lo que has hecho?*** *– He contado* ***– Has contado, ¿has contado todas? ¿Puedes mostrarme cómo cuentas?*** *– (Esta vez el evaluado cuenta una por una las figuras de los dos montículos) Son 37.*

Les (9 años): ***- ¿Tú has hecho collares alguna vez?*** *– Si* ***– ¿Te parece si hacemos collares?*** *– Si* ***– Bueno, supongamos te tenemos un collar que tiene 8 bolitas.*** *– (El evaluado de inmediato empieza a poner ocho bolitas, una por una, en el collar) Ya* ***– Muy***

bien. Ahí tienes un collar con ocho bolitas. Supongamos ahora que queremos agregarle 9 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendrían el collar? *– (El evaluado agrega 9 bolitas al collar, contando una por una. Luego procede a contar todas las bolitas que tenía el collar de una en una) Son 17 bolitas* ***- ¿Y cómo lo sabes?*** *– He juntado todo.* ***–Has juntado todo, ¿no es cierto? ¿Y luego de que has juntado todas qué es lo que has hecho?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Has contado, ¿no?*** *– Si.*

Les (9 años): ***- Ahora supongamos que en un collar tenemos 18 bolitas y le queremos agregar 7 bolitas más, ¿cuántas tenemos en total?*** *– (el evaluado agrega 7 bolitas a un collar que ya contenía 17 bolitas por el trabajo anterior) Son 24.* ***-¿Cómo los sabes? Si un niño más pequeño te preguntara cómo lo sabes ¿qué le dirías?*** *– He juntado todo.* ***- ¿qué has juntado?*** *– las 17 con las con las 7 que agregué y da junto 24.*

Les (9 años): ***-Yo te preguntaba que si a un collar de 18 bolitas le agregamos 7 bolitas más ¿cuántas bolitas tiene en total el collar?*** *– (El evaluado pone por un lado 18 bolitas una por una, luego pone por otro lado 7 bolitas una por una. Debido a que las bolitas ruedan se ve obligado a contar solo las últimas 7 bolitas para obtener el total) Son 24.*

Les (9 años): ***- Ahora supongamos que tenemos un collar que tiene 15 bolitas negras*** *- (el evaluado cuenta una a una las bolitas y pone 15 bolitas en el collar) Ya, ahí está.* ***– Ahora supongamos que a ese collar de 18 bolitas le queremos agregar 18 bolitas blancas más ¿cuántas bolitas tendría en total?*** *– (el evaluado agrega 18 bolitas al collar de una en una) Dieciocho bolitas* ***– Muy bien ¿cuántas tendíamos en total?*** *– (el evaluado cuenta solo las bolitas negras) Son 28* ***- ¿Cómo sabes que son 28? ¿Haz contado todas las bolitas?*** *– (El evaluado cuenta ahora todas las bolitas blancas y luego las bolitas negras) Son 30.*

Sha (11 años): ***Vamos a suponer que tú y yo salimos a cazar ¿te parece?*** *– Si* ***- ¿Qué día estamos hoy?*** *– Jueves* ***– Supongamos que ayer, miércoles, salimos a cazar y cazamos 4 perdices y hoy jueves cazamos 5 ¿cuántas perdices cazamos en total?*** *– (el evaluado permanece en silencio, pues intenta operar mentalmente) Nueve* ***- Supongamos que un niño más pequeño que tú te pregunta cómo has llegado a la respuesta ¿qué le dirías? ¿Cómo le explicarías?*** *- (el evaluado permanece en silencio)* ***–Digamos que un niño y te dice que juntando las 4 perdices y las 5 perdices en total se han cazado 5 perdices ¿tú que le dirías al niño?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– O imagínate esto, que vamos a cazar tú y yo, yo cazo 4 y tu cazas 5, luego tu mamá te pregunta cuántos hemos***

cazado juntos *– Nueve –* ***Nueve, claro. Pero viene un niño y le dice a tu mamá que has mentido y que solo hemos cazado 5 juntos ¿tú que le dirías?*** *– (El evaluado permanece en silencio)*

Sha (11 años): ***Supongamos que un hijo y un padre salieron a cazar perdices, pero en un momento se separan, el papá se va por un lado y el hijo por otro lado. Por su lado el padre caza 13 perdices y por otro lado el hijo caza 5 perdices. Cuando llegan a la caza juntan todas las perdices, ¿cuántas tienen en total?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Si quieres puedes utilizar las figuras de perdices que tenemos en la caja ¿puedes poner 13 perdices?*** *– (El evaluado pone 13 perdices sobe la mesa)* ***- ¿esas son las que cazó el papá no?*** *– Si* ***– Y por su parte el hijo cazó 5*** *– (El evaluado pone 5 perdices sobre la mesa en una fila) –* ***Perfecto, ahora, cuando llegaron a casa juntaron las 13 perdices con las 5 perdices ¿cuántas perdices hay en total?*** *– Dieciocho* ***– Dieciocho. ¿Y cómo has llegado a la respuesta?*** *– Los dos han cazado las dieciocho* ***– Supongamos que viene un niño chiquito que todavía no sabe contar muy bien, entonces el ve 13 perdices acá, 5 perdices por acá y él dice que juntas todo y tienes 13 perdices, ¿qué le dirías?*** *– (el evaluado permanece en silencio)*

Sha (11 años): ***Supongamos que salimos tú y yo a cazar y juntos cazamos 21 perdices y cuando llegamos a la casa viene la vecina y nos dice que nos quiere regalar 15 perdices más, ¿cuántas perdices tenemos al juntarlas todas?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿puedes mostrarnos con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone 21 figuras de perdices sobre la mesa)* ***- ¿cuántas perdices tenemos aquí?*** *– Veintiuno* ***– Muy bien, esas son las que cazamos tú y yo, pero la vecina como es buena gente nos regaló 15 más.*** *– (El evaluado pone solo 13 figuras más en la mesa)* ***– Entonces si juntamos todo ¿cuántas tenemos en total?*** *– (El evaluado permanece en silencio) –* ***Vamos a ver, ¿cuántas perdices tenemos acá (refiriéndose a las 21)?*** *– Veintiuno* ***– ¿Y cuántas perdices tenemos acá (refiriéndose a la hilera de 13)?*** *– Quince* ***– A ver, ¿cómo comprobarías que son 15?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿puedes contarlas una a una en voz alta?*** *– (El evaluado cuenta una a una las figuras) Faltaría uno* ***- ¿cuántas faltan?*** *– Uno* ***– A ver ponle uno*** *– (el evaluado pone una figura más en la hilera)* ***– A ver, ahora cuéntalas de nuevo*** *– (El evaluado cuenta nuevamente) Catorce* ***– Catorce, ¿cuántas faltan?*** *– Uno* ***– ¿Te parece si contamos de nuevo para ver si está todo bien?*** *– (El evaluado cuenta nuevamente) Son 15.* ***– Perfecto, entonces tenemos un grupo de 21 y otro grupo de 15, ¿Y si juntamos todas cuánto tendíamos?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Si ya***

las tenemos todas aquí, ¿cómo podríamos saber la respuesta? *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Una vez un niño me dijo que si juntamos todo tendremos 5 perdices, ¿qué le dirías a este niño?*** *– (el evaluado permanece en silencio).*

Sha (11 años): ***Ahora me gustaría que armemos collares, ¿alguna vez has hecho collares?*** *– Si –* ***Yo he traído estas bolitas con huequitos para hacer collares y también este hilo de pescar. Yo te voy a ir diciendo algunos problemas con collares y tú puedes usar este material para encontrar las respuestas ¿te parece?*** *– Si –* ***Supongamos que tengo un collar de 8 bolitas y le aumento collar 9 bolitas más, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Supongamos que son 8 bolitas blancas y luego le agrego 9 bolitas negras, ¿cuántas tendría en total?*** *– (el evaluado permanece unos segundos en silencio) Diecisiete* ***- ¿Y cómo llegaste a la respuesta?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Por ejemplo hay niños que piensan que es más y niños que piensan que es menos. Un niño me dijo por ejemplo que eran 15 nada más y otro niño me dijo que eran 40, ¿tú qué piensas?*** *– Diecisiete nomás.*

Sha (11 años): ***Ahora vamos a suponer que tenemos un collar de 18 bolitas blancas, pero conocemos a una persona que necesita un collar más grande, entonces queremos aumentarle bolitas así que le agregamos 7 negras, ¿cuántas bolitas hay en total en el collar?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– Si quieres puedes construir el collar para saber la respuesta*** *– (el evaluado pone una a una las 18 bolitas blancas) Ya -* ***¿cuántas bolitas tienes ahí?*** *– Dieciocho –* ***Y si quisieras comprobar que realmente hay 18, ¿qué harías?*** *– Contarlas –* ***Haber cuéntalas por favor*** *- (el evaluado cuenta una a una las bolitas que puso en el collar) Son Dieciocho* ***– Y decíamos que a este collar le agregábamos 7 bolitas negras más (el evaluador pone 7 bolitas negras entre sus manos) si le agregamos estas bolitas negras, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (el evaluado permanece por un momento en silencio) Veinticinco* ***– Muy bien, ¿Y cómo has logrado saberlo?*** *– Contando –* ***¿qué has contado primero, las 18 o las 7?*** *– Las Dieciocho*. ***– ¿Y si hubieras contado primero las 7 hubiera dado la misma respuesta?*** *– Si.*

Sha (11 años): ***Ahora, si tenemos un collar que tiene 15 bolita blancas y luego le agregamos 18 bolitas negras, ¿cuántas bolitas tendríamos en total?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Deseas armar el collar?*** *– Si (El evaluado empieza agregando una por una las 18 bolitas negras)* ***- ¿cuántas bolitas tiene el collar?*** *– Dieciocho –* ***Perfecto, ahora tenemos que agregarle 15 blancas. A ver aquí tengo 5 bolitas blancas,***

¿si le agrego 5 más cuántas son? *– Diez* ***- ¿Y si le agrego 5 más cuántas son?*** *– Quince* ***– Muy bien, ahora tenemos estas 15 bolitas blancas y estas 18 bolitas negras, si juntamos todo ¿cuántas bolitas hay en total?*** *– (El evaluado intenta llegar a la respuesta mentalmente)* ***- ¿cómo harías para saber cuántas bolitas tendría el collar?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Supongamos que tú tienes 15 bolitas blancas y te encuentras con una amiga que tiene 18 bolitas negras. Para poder hacer un collar más grande juntan todas las bolitas. Luego ella te pregunta, ¿y ahora cuántas bolitas tiene el collar? ¿Tú qué le dirías?*** *– Treintaiuno* ***- ¿Y cómo supiste eso?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***- ¿cómo harías para revisar, para estar segura?*** *– Contar* ***– A ver, muéstranos cómo contarías*** *– Aquí hay 18 (refiriéndose a las negras) entonces 19, 20, 21, 22, 23 ,24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 (refiriéndose a las negras)* ***– Muy bien, entonces primero tu contaste las 18 y luego empezaste con las blancas y dijiste 19, 20, 21… ¿Y si lo hicieras al revés? Si contaras primero las 15 y luego las 18, ¿daría el mismo resultado?*** *– Si* ***- ¿no importa que esté al revés?*** *–No.*

*Dal (11 años)****): Vamos a suponer que yo salgo a cazar ayer en la noche y cazo 4 perdices. Hoy en la mañana vuelvo a salir a cazar y logro cazar 5 perdices, ¿cuántas perdices cacé en total?*** *– Nueve* ***– Nueve, ¿y cómo lo sabes?*** *– Contando* ***– ¿Has contado en tu cabeza?*** *–Si* ***– A ver, lo que hiciste en tu cabeza cuéntamelo en voz alta*** *– Cinco más cuatro, nueve.*

Dal (11 años): ***Supongamos que yo salgo con un amigo a cazar y en un momento nos separamos, mi amigo se va por un lado y yo me voy por otro lado. Mi amigo caza 13 perdices y yo solamente 5. Cuando llegamos a casa juntamos todas las perdices, ¿cuántas tenemos en total?*** *– Diecinueve* ***-¿nos podrías mostrar con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone trece tarjetas en un montículo contándolas rápidamente de una en una, luego por otro lado, agarra dos tarjetas de la caja y las pone en un solo montículo, luego agarra tres más de la caja y las pone encima del montículo de dos)* ***– Entonces, si junto éstas (montículo de 13 tarjetas) con éstas (montículo de 5 tarjetas), ¿cuánto me debería dar?*** *– Diecinueve* ***- ¿cómo harías para comprobar que realmente hay diecinueve?*** *– (El evaluado pone la mano encima de cada montículo de tarjetas y hace la mímica de juntarlas) Se junta así* ***– Y juntas debería de haber diecinueve*** *– Si* ***– A ver, juntémoslas (el evaluador junta todas las tarjetas) ¿Y ahora qué debemos hacer?*** *– Contar* ***– A ver, cuéntalas.*** *– (el evaluado cuenta una por una) Son dieciocho (el evaluado ríe)* ***- ¿cuánto es 13 más 5?*** *– Dieciocho.*

Dal (11 años): ***Ahora supongamos que yo tengo 21 perdices, pero cuando ya estoy en casa tú tocas la puerta y me dices que quieres regalarme 15 perdices más. ¿Ahora cuántas perdices tengo en total?*** *– Veintiséis* ***- ¿Nos podrías mostrar con las tarjetas?*** *– (El evaluado va poniendo una a una las 21 tarjetas en un montículo, luego en otro montículo pone dos y luego una por una hasta llegar a quince)* ***- Si juntamos este grupo (las 21 figuras) con este otro grupo (las 15 figuras), ¿cuántas debería haber?*** *– Veintiséis* ***- ¿Te parece si lo comprobamos? ¿Qué deberíamos hacer?*** *– (El evaluado junta los dos montículos de tarjetas y luego las cuenta una por una en voz alta hasta llegar a 36).*

Dal (11 años): ***Supongamos que tenemos un collar que tiene 8 bolitas negras y a ese collar le agregamos 9 bolitas blancas, ¿cuántas bolitas tendría en total el collar?*** *– (El evaluado intenta mentalmente) Diecisiete* ***– Si un niñito menor que tú, que no entiende muy bien estas cosas te preguntara cómo llegaste a la respuesta, ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado guarda silencio)* ***– O quizá le podrías mostrar con las bolitas*** *– (El evaluado pone 8 bolitas negras en una mano y 9 bolitas blancas en otra mano) De ahí vamos a sumar todo esto* ***– Se junta*** *– Si, vamos a contar (El evaluado cuenta las bolitas una por una hasta llegar a 17).*

Dal (11 años): ***Supongamos que ahora que tenemos un collar de 18 bolitas, pero queremos hacerlo más grande así que le agregamos 7 bolitas más. ¿Cuántas bolitas tendría en total este collar?*** *– (el evaluado intenta resolver mentalmente)* ***– Si quieres puedes usar las bolitas para ayudarte*** *– Son veinticinco* ***– Veinticinco, ¿Y cómo supiste eso?*** *– Sumando* ***- ¿Qué era lo que ibas haciendo mientras estabas en silencio?*** *– Pensando* ***- ¿Y qué hiciste? ¿Qué hacías en tu cabeza? -*** *Siete más… quince más siete… vamos a sumar con… dieciocho más siete… vamos a sumar con ocho y luego vamos a sumar con uno.* ***– A ver, vamos a ver si te entendí, ¿tú hiciste algo más o menos así? (el evaluador escribe en un papel 18+7 poniendo el 7 debajo del 18)*** *– Si, sumas el ocho más el siete, quince, luego uno.* ***– ¿Hay otra manera de hacerlo?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- Esta es la manera que te parece más cómoda.*** *– Si.*

Dal (11 años): ***Tenemos un collar que tiene 15 bolitas negras y le agregamos 18 bolitas blancas, ¿cuántas tendría en total?*** *– (Permanece en silencio por unos momentos) Veintitrés* ***- ¿Podrías enseñarnos con las bolitas?*** *– (el evaluado va poniendo 18 bolitas negras una por una sobre la mesa, luego pone sobre la mesa 15 bolitas blancas, por momentos de dos en dos o de tres en tres)* ***- si juntamos los dos grupos ¿cuántas tenemos***

total? *– (cuenta las bolitas al principio de 3 en 3, cuando ya se va acercando al final del conteo cuenta de una en una) Son treintaicuatro -* ***¿Y si lo hiciéramos al revés? Aquí tenemos 15 bolitas negras y 18 blancas, si fuera al revés, 18 negras y 15 blancas, ¿sería el mismo número de bolitas?*** *– Si.*

Apéndice B: Evaluación de la operación de sustracción

Wil (7 años): - ***Supongamos que hay una reunión en tu casa a la que asisten nueve personas, así que necesitamos nueve tapetes para que estas personas se sienten. ¿Puedes poner 9 tapetes?*** *– (El evaluado pone 9 tapetes uno por uno en una hilera)* ***– Cuando termina la reunión tú mamá te dice que de esos nueve tapetes, cinco hay que devolvérselos a la vecina, ¿cuántos tapetes quedarían en casa?*** *– Cinco* ***– Si de esos nueve tapetes cinco debemos devolverlos a la vecina ¿con cuántos nos quedamos en casa?*** *– (El evaluado cuenta cuatro tapetes uno por uno) Cuatro* ***– A ver, ¿podrías darme los que tienes que devolverle a la vecina?*** *– (El evaluado pone 5 tapetes uno por uno en la mano del evaluador) -* ***¿Y con cuántos te quedas tú?*** *– (El evaluado cuenta uno a uno los tapetes que le quedan) Cuatro.*

Wil (7 años)***: Ahora supongamos que tenemos diecisiete tapetes en casa, ¿podrías mostrarme cuántos tapetes tenemos en casa?*** *– (El evaluado pone uno a uno los tapetes en una hilera. Dentro de su conteo omite el número 17 y continúa agregando tapetes hasta el 22)* ***– Paremos un segundo, decíamos que teníamos diecisiete tapetes en casa, ¿cuántos tienes ahí?*** *– (El evaluado cuenta uno a uno, pero omite nuevamente el número 17 en su conteo) Veintidós.* ***– A ver, yo te quiero ayudar un poco. (El evaluador cuenta en voz alta uno a uno de los tapetes, el evaluado repite el conteo al unísono. Al llegar al número 16 para y retira todos los tapetes excedentes) ¿Cuántos tapetes tenemos hasta aquí?*** *– (el evaluado quiere cuenta tres tapetes, pero luego recuerda cuántos son) ¡Dieciséis!* ***– Muy bien. Si yo le agrego un tapete más ¿cuántos tenemos? (El evaluador agrega un tapete más a la hilera)*** *– (El evaluado cuenta de nuevo uno a uno los tapetes, pero esta vez omite en su conteo el número 15 y 17) Diecinueve* ***– (El evaluador cuenta en voz alta y le muestra que en realidad son 17 tapetes)*** *– (El evaluado ríe)* ***– Ahora que tenemos diecisiete tapetes resulta que hubo una lluvia muy fuerte y mojó nueve tapetes ¿cuántos quedan secos?*** *– (El evaluado cuenta 8 tapetes una a uno) Ocho* ***– Ocho secos. ¿Me puedes dar los nueve que se mojaron?*** *– (El evaluado pone en la mano del evaluador 9 tapetes) -* ***¿cuántos quedan secos?*** *– (el evaluado cuenta uno a uno los que le quedan) Ocho.*

Wil (7 años): ***Supongamos ahora que tenemos en casa veintidós tapetes, ¿puedes poner los veintidós tapetes?*** *– (El evaluado alinea 21 tapetes, pero cuenta veintidós, esto se debe a que omite en su conteo el número 17)* ***– De esos tapetes veintidós tapetes le hemos prestado 14 a la vecina, ¿con cuántos nos quedamos en casa?*** *– (El evaluado cuenta 15 tapetes)* ***- ¿Podrías darme los tapetes que se quedan en casa?*** *– (El evaluado entrega 7 tapetes al evaluador uno por uno).*

Wil (7 años): ***Imagínate que queremos cazar animales, así que vamos a buscar flechas. En mi casa yo tenía ocho flechas, ¿puedes poner 8 flechas? -*** *(El evaluado alinea 8 flechas una por una)* ***– Muy bien, ahora resulta que mi hermano se llevó tres flechas de esas ocho, ¿con cuántas flechas nos quedamos?*** *– (El evaluado saca 3 flechas y cuenta las restantes) Cinco.*

Wil (7 años): ***Supongamos que salimos a cazar y llevamos catorce flechas, ¿puedes poner catorce flechas?*** *– (El evaluado pone una a una las 14 flechas)* ***- De esas catorce flechas usamos 6, ¿con cuántas flechas regresamos a casa?*** *– Siete* ***– Si tenemos catorce flechas y perdemos 6 en el bosque, ¿con cuántas regresamos a casa?*** *– Seis.* ***– A ver, ¿puedes darme las 6 flechas que utilizamos?*** *– (El evaluado pone en la mano del evaluador 6 flechas una a una y contando en voz alta)* ***- ¿con cuántas flechas regresamos a casa?*** *– (El evaluado cuenta las flechas que el quedan una a una) Ocho.*

Wil (7 años): ***Supongamos que en casa tenemos dieciocho flechas, ¿puedes poner 18 flechas?*** *– (El evaluado pone en hilera 22 flechas)* ***- ¿cuántas flechas tienes ahí?*** *– (el evaluado cuenta todas las flechas una por una, sin embargo omite en su conteo el número 17) Veintitrés* ***– ¿Recuerdas cuántas flechas teníamos en casa?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Eran 18 flechas, ¿puedes dejar solo 18 flechas?*** *– (El evaluado retira, sin contar, 7 flechas)* ***- ¿Cuántas flechas tienes ahora?*** *– (El evaluado cuenta una a una las flechas) Son quince* ***- ¿Recuerdas que teníamos 18 en casa? ¿Cuántas faltan para llegar a 18?*** *– Una (El evaluado agrega una flecha a la hilera)* ***– ¿Cuántas flechas tienes ahora?*** *– (El evaluado cuenta nuevamente una a una las flechas) Dieciséis -* ***¿Cuántas te faltan para llegar a 18?*** *– Una. (Se decide detener la aplicación).*

Luc (7 años): ***Supongamos queremos ir a cazar animales, pero para cazar animales necesitamos flechas. Resulta sabemos que en casa tenemos ocho flechas, ¿puedes poner ocho flechas en la mesa?*** *– (El evaluado pone en hilera 7 flechas una por una, sin embargo afirma que ha puesto 8)* ***- ¿cuántas flechas tienes ahí?*** *– (El evaluado cuenta* *una a una las flechas) Siete* **- ¿Y cuántas faltan?** *– Una* **– Ahora supongamos que tu papá de estas flechas que tenemos aquí se llevó 3, ¿con cuántas nos quedamos?** *– (el evaluado permanece en silencio por un momento, luego cuenta una por una tres flechas, luego cuenta las flechas que no contó) Son cinco* **- ¿Y cómo lo sabes? ¿Qué has hecho para saber la respuesta?** *– (El evaluado permanece en silencio)* **– A ver dame las flechas con las que nos quedaríamos en casa** *– (El evaluado entrega, una a una 5 flechas al evaluador)* **– Muy bien. ¿Y esas flechas que quedan quién se las llevó?** *– Papá.*

Luc (7 años): **Vamos a suponer que en casa tenemos 18 flechas, ¿puedes poner las 18 flechas?** *– (el evaluado pone una a una y en hilera las 16 flechas, luego cuenta todas para verificar cuántas tiene hasta ahora, seguidamente agrega dos más)* **– Bien, acá tenemos 18 flechas. Ahora supongamos que tu papá se lleva 12 flechas de estas 18, ¿con cuántas flechas nos quedamos en casa?** *– (El evaluado cuenta 12 flechas y las separa de las restantes, luego cuenta una a una las restantes) Seis* **- ¿Y qué es lo que has hecho para saber que eran 6?** *– (El evaluado permanece en silencio)* **– Si un niñito te pidiera que le explicaras cómo llegaste a la respuesta, ¿qué le dirías?** *– (El evaluado permanece en silencio)* **- ¿cuáles son las flechas que se quedaron en casa?** *– (El evaluado señala el grupo de 6 flechas)* **- ¿Y cuáles son las que se llevó el papá?** *– (El evaluado señala el grupo de 12 flechas)* **- ¿Si juntamos las que quedan con las que se llevaron tenemos menos, más o igual que las que habían antes?** *– Menos.* **- ¿qué faltaría para tener igual que antes?** *– (el evaluado permanece en silencio).*

Luc (7 años): **Vamos a parar un momento y vamos a jugar con estos botones (el evaluador hace una fila con 7 botones azules) ¿puedes hacer una fila igual con los botones rojos?** *– SI (el evaluado hace una fila con 7 botones rojos en correspondencia con la fila de botones azules)* **– ¿quién tiene más, la final de botones rojos o la fila de botones azules?** *– Igual* **- ¿Y si yo hiciera esto? (el evaluador extiende la final de botones azules haciéndola más larga que la fila de botones rojos) ¿Quién tiene más, la fila de botones rojos o la fila de botones azules?** *– Los azules* **- ¿Y dónde hay menos?** *– Rojos* **– ¿Y qué pasa si yo hago esto? (el evaluador junta los botones azules formando una fila más corta que la de botones rojos) ¿Dónde hay más botones, en la final de los botones rojos o en la fila de los botones azules?** *– Rojos* **– Ahora me gustaría hacer esto (el evaluador agrega más botones ala fila de los botones azules de tal manera que las dos filas tienen ahora la misma extensión) ¿ahora quién tiene más botones, los rojos o los azules?** *– Tienen igual.* **– Supongamos que no son botones, supongamos que son**

caramelos. Si yo me como los caramelos azules y tú los rojos ¿comemos la misma cantidad o diferente? *– (el evaluado permanece en silencio por un momento) Diferente* ***- ¿Cómo podríamos hacer para que coman igual?*** *– (el evaluado agrega botones azules a la fila y pone en correspondencia uno a uno los botones de las dos filas)* ***- ¿así comeríamos el mismo número de caramelos?*** *– Si* ***- ¿Y si hago esto? (el evaluador hace más corta la fila de botones azules) Ahora, si yo como los azules y tú los rojos, ¿quién come más caramelos?*** *– Tú comes más.*

Luc (7 años): ***Supongamos que para una reunión necesito nueve tapetes, ¿puedes poner los 9 tapetes sobre la mesa?*** *– (el evaluado pone uno a uno los tapetes sobre la mesa. Cuando ha superado los 5 tapees cuenta constantemente para verificar cuántos ha puesto hasta ahora. Finalmente llega a poner los 8 tapetes)* ***– Cuando termina la reunión tu mamá te dice que de estos tapetes cinco eran de la vecina, así que te pide que los devuelvas, ¿con cuántas tapetes te quedas en casa después de devolver los 5?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– A ver supongamos que yo soy la vecina, ¿me puedes devolver los 5 tapetes?*** *– (el evaluado entrega 5 tapetes al evaluador, uno por uno. Al terminar de entregar los 5 cuanta nuevamente todos los que entregó para estar seguro)* ***- ¿Y con cuántos tapetes te has quedado en casa?*** *– (El evaluado permanece en silencio por un momento, luego cuenta los cuatro tapetes que le quedan sobre la mesa) Cuatro* ***– Una pregunta, Y si juntamos los tapetes que tengo yo con esos cuatro tapetes ¿tenemos más o menos tapetes que antes?*** *– Menos que antes.*

Luc (7 años): ***Ahora supongamos que tenemos en casa 17 tapetes ¿puedes mostrarme los 17 tapetes?*** *– (El evaluado pone 5 tapetes sobre la mesa)* ***- ¿cuántos tapetes tienes ahí?*** *– (el evaluado cuenta los tapetes) Cinco* ***- ¿Y tenemos que tener 17 no?*** *– Si (el evaluado pone uno a uno los tapetes en hilera sobre la mesa, pero luego de llegar a los 12 tapetes se ve obligado a contar todo nuevamente cada vez que pone un tapete más. Finalmente llega a los 17 tapetes)* ***– Ahora supongamos que tu mamá hace una reunión al aire libre con estos 17 tapetes, pero empieza a llover muy fuerte, así que se mojan 9 tapetes, ¿cuántos quedan secos?*** *- (el evaluado permanece en silencio por un momento, luego cuenta nueve tapetes y los separa un poco del resto, seguidamente cuenta el resto de tapetes) Ocho* ***– Bien, ¿Y cómo has hecho para saberlo?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– Si ponemos al sol los que se mojaron para que se sequen y los juntamos con los que nunca se mojaron ¿tendremos igual número de tapetes que antes?*** *– (el evaluado permanece en silencio)*

Roc (7 años): ***Supongamos que tú y yo queremos ir a cazar animales, pero para cazar animales necesitamos flechas. Resulta que en casa tenemos ocho flechas, ¿puedes poner ocho flechas en la mesa?*** *– (El evaluado cuenta 8 flechas una por una y las pone sobre la mesa una encima de la otra)* ***– Muy bien, ahí están las ocho flechas, pero resulta que de esas ocho flechas tú papá se llevó tres flechas, ¿cuántas flechas tenemos si tú papá se llevó tres flechas?*** *– (El evaluado cuenta todas las flechas nuevamente) Ocho* ***– A ver, ¿qué te parece si me das las tres flechas que tu papá se llevó?*** *– (El evaluado entrega al evaluador tres flechas, pero no las obtiene de las 10 que había puesto anteriormente)*

Roc (7 años): ***Ahora, supongamos que salimos a cazar y llevamos 14 flechas, ¿puedes poner 14 flechas en la mesa?*** *– (El evaluado apila 14 flechas sobre la mesa)* ***– Muy bien. Ahora resulta que cuando salimos a cazar llevando estas 14 flechas ya en el bosque usamos 6 y regresamos con las demás. ¿Con cuántas flechas regresamos?*** *– (El evaluado cuenta las 14 flechas que puso sobre la mesa) Catorce* ***– Claro, llevamos 14 flechas al bosque para cazar, pero en el bosque usamos 6, ósea que esas 6 se quedaron en el bosque. ¿Con cuántas flechas regresamos a casa?*** *– Catorce.*

Roc (7 años): ***Ahora supongamos que en casa tenemos 18 flechas, ¿puedes poner 18 flechas sobre la mesa?*** *– (El evaluado pone 17 flechas sobre la mesa)* ***– Pero resulta que de esas flechas que tienes sobre la mesa tú papá se llevó 12, ¿con cuántas flechas te quedas en casa?*** *– Dieciocho* ***– A ver, que te parece si me das las 12 que se llevó tu papá*** *– (El evaluado entrega 13)* ***–Si estas son las que se llevó tu papá, ¿con cuántas te quedas tú?*** *– (El evaluado cuenta las flechas que le quedaron) Cinco.*

Roc (7 años): ***Supongamos que en una reunión se utilizaron 9 tapetes, ¿puedes poner 9 tapetes sobre la mesa?*** *– (El evaluado apila 10 tapetes sobre la mesa)* ***- ¿cuántos tapetes tienes ahí?*** *– (El evaluado cuenta todas las figuras) Diez* ***- ¿cuántas tenemos que quitar para que sean 9?*** *– (El evaluado cuenta los tapetes uno por uno hasta llegar a nueve y los separa, luego entrega al evaluador el tapete que no contó)* ***– Muy bien, ahora de estos nueve tu mamá te dice cinco se los entregues a la vecina, ¿con cuántos se quedan en casa?*** *– Con Nueve.*

Roc (7 años): ***Ahora supongamos que tenemos 17 tapetes en casa, ¿puedes poner 17 tapetes sobre la mesa?*** *– (El evaluado pone 17 tapetes sobre la mesa, uno por uno) –* ***Muy bien. ¿Cuántos tapetes tienes ahí?*** *– (El evaluado cuenta nuevamente todos los* *tapetes que puso sobre la mesa. Esta vez cuenta mal, pues omite en su conteo el número 17) Dieciocho.* – **Bien. Ahora supongamos que usamos estos tapetes para una reunión afuera y de pronto empieza a llover. De estos tapetes se mojan 9, ¿cuántos quedan secos?** – *Nueve.*

Les (9 años): **Supongamos que queremos ir a cazar animales y para esto tenemos en casa 8 flechas** – *(El evaluado pone 8 flechas, una por una, sobre la mesa)* **– Pero, resulta que cuando vamos a buscar esas 8 flechas descubrimos que alguien se ha llevado 3, ¿cuántas flechas hemos encontrado?** – *(El evaluado separa 3 flechas de las 8 flechas que puso inicialmente sobre la mesa, luego cuenta las flechas que le quedan después de haber quitado 3) Cinco* **- ¿Cinco, no? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué es lo que has hecho para saber que deberíamos encontrar 5?** – *(El evaluado permanece en silencio)* **- ¿Y cuáles son las que le quedan?** – *(El evaluado señala el grupo de las 5 flechas)* **- ¿Y cuáles son las que se han llevado?** – *(El evaluado señala el grupo de las 3 flechas).* **- Ahora, una pregunta, si es que nos devuelven las tres flechas que se llevaron ¿cuántas flechas tendíamos?** – *(El evaluado permanece en silencio)*

Les (9 años): **Ahora supongamos que salimos a cazar y llevamos 14 flechas** – *(El evaluado pone sobre la mesa 14 flechas)* **– Listo, pero cuando llevamos esas flechas al bosque usamos solamente 6 flechas. ¿Con cuántas flechas regresamos a casa?** – *(El evaluado separa 6 flechas del grupo de 14 flechas, luego cuenta las que le quedaron) Ocho* **– Bien, ¿Y cómo lo sabes?** – *(el evaluado permanece en silencio)* **- ¿Qué es lo que has hecho para saberlo?** – *(el evaluado permanece en silencio).*

Les (9 años): **Teníamos en casa 18 flechas** – *(El evaluado pone sobre la mesa 18 flechas contando una por una)* **– Pero resulta que tu papá se lleva para cazar 12 flechas, ¿cuántas nos quedan en casa?** – *(El evaluado separa 12 flechas del grupo de 18 contando una por una, luego cuenta las que no fueron separadas) Seis.*

*Les (9 años***): Supongamos que para una reunión usamos 9 tapetes, pero cuando termina la reunión tu mamá te dice que 5 de esos tapetes son de la vecina, así que hay que devolverlos. ¿Con cuántos tapetes te quedas en casa?** – *(El evaluado pone 9 tapetes sobre la mesa, uno por uno)* **– Pero cuando termina la reunión, tu mamá te dice que de esos tapetes 5 se los debemos devolver a la vecina** – *(El evaluado retira 5 tapetes del grupo de 9, luego cuenta uno a uno los tapetes que no retiró) – Cuatro.*

Les (9 años): ***Supongamos ahora que en casa tenemos 17 tapetes** – (El evaluado pone uno a uno 17 tapetes sobre la mesa)* ***– Pero como los usamos para una reunión al aire libre 9 de estos se mojaron. ¿Cuántos tapetes quedaron secos?*** *– (El evaluado separa uno a uno 9 tapetes, luego cuenta los tapetes que no separó) Ocho.*

Les (9 años): ***Supongamos que en casa tenemos 22 tapetes*** *– (El evaluado pone, uno a uno, 22 tapetes sobre la mesa)* ***– Pero resulta que la vecina dice: "¿Me pueden prestar 14 tapetes?", ¿Con cuántos tapetes nos quedamos en casa?*** *– (El evaluado separa 14 tapetes del grupo de 22, luego cuenta los que le quedan) Ocho.*

Man (9 años): ***Supongamos que queremos ir a cazar animales, así que vamos a buscar 8 flechas que tenemos guardadas en casa*** *– (El evaluado pone 8 flechas sobre la mesa, una por una)* ***- Pero resulta que cuando vamos a ver descubrimos que alguien se ha llevado 3, ¿cuántas flechas tenemos?*** *– (El evaluado agrega 3 flechas más al grupo de 8 flechas)* ***– De esas ocho flechas que tenías antes, alguien se ha llevado 3, ¿cuántas flechas te quedan?*** *– (El evaluado retira las tres flechas que había puesto adicionalmente al grupo de 8 flechas, luego retira 3 más y cuenta las flechas restantes) Cinco.*

Man (9 años): ***Supongamos que salimos a cazar y llevamos 14 flechas*** *– (El evaluado pone, una a una, 14 flechas sobre la mesa)* ***– Y de esas 14 flechas usamos 6 en el bosque, ¿con cuántas regresamos a casa?*** *– (El evaluado retira 6 flechas del grupo de 14, luego cuenta las flechas que no retiró) Nueve.*

Man (9 años): ***Supongamos que tenemos 18 flechas en casa*** *– (El evaluado pone sobre la mesa 18 flechas)* ***– Pero, cuando vamos a recogerlas para ir a cazar descubrimos que alguien se ha llevado 12, ¿cuántas flechas tenemos en total ahora?*** *– (El evaluado retira 12 flechas una a una y luego cuenta las que le quedan) Seis.*

Man (9 años): ***Supongamos ahora que para una reunión utilizamos 9 tapetes*** *– (El evaluado pone 9 tapetes, uno a uno, sobre la mesa)* ***– Cuando termina la reunión tu mamá te dice que de esos 9 tapetes 5 son de la vecina y hay que devolvérselos, ¿con cuántos tapetes nos quedamos en casa?*** *– (El evaluado retira 5 tapetes del grupo de 9 tapetes, luego cuenta los tapetes que le quedan) Son 4* ***– Bien. Supongamos ahora que un niño más pequeñito que tú te pregunta cómo supiste que son cuatro los que se quedan en casa, ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado permanece en silencio).*

Man (9 años): ***Ahora supongamos que tenemos en casa 17 tapetes*** *– (El evaluado pone 17 tapetes sobre la mesa)* ***– Perfecto, pero ahora resulta que como los usamos para una reunión al aire libre y empezó a llover y se mojaron 9 tapetes, ¿cuántos tapetes quedaron secos?*** *– (El evaluado retira 7 tapetes del grupo de 17, luego cuenta uno a uno los tapetes que no retiró) Quedan 10.*

Man (9 años): ***Supongamos que en casa tienes 22 tapetes*** *– (El evaluado pone 22 tapetes uno a uno sobre la mesa)* ***– Pero de pronto llega la vecina y te pide prestados 14 tapetes, ¿con cuántos tapetes te quedas en casa?*** *– (El evaluado retira 15 tapetes y cuenta los tapetes que le queda) Siete.*

Sha (11 años): ***Ahora supongamos que vamos a ir a cazar, así que tenemos que ir a buscar nuestras flechas. Supongamos que teníamos 8 flechas, pero tu papá se llevó 3 flechas, ¿cuántas flechas tenemos?*** *– Cinco****. - ¿nos podrías mostrar con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone 8 flechas sobre la mesa en hilera)* ***- Si tu papá se lleva 3 flechas, ¿cuántas flechas nos quedarían?*** *– Cinco* ***- Y si juntamos nuevamente las que se llevó tu papá con las que se quedan, ¿tendríamos la misma cantidad de antes?*** *– Si.*

Sha (11 años): ***Supongamos que salimos a cazar y llevamos 14 flechas, pero solo usamos 6, ¿con cuántas flechas regresamos a casa?*** *– Con ocho* ***– ¿Y cómo llegaste a la respuesta?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– Tú dices que si tenemos 14 flechas y usamos 6 nos quedan 8.*** *– Si* ***- Y si juntamos esas 8 con las que ya usamos ¿tendremos lo mismo que antes?*** *– Si.*

Sha (11 años): ***Supongamos que salimos a cazar y llevamos 18 flechas, pero disparamos en el bosque 12, ¿con cuántas regresamos a casa?*** *– (el evaluado permanece en silencio por un momento) Seis* ***– Supongamos que viene un niño más pequeño que tú y te pide que le expliques cómo llegar a la respuesta ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado guarda silencio)* ***- ¿Te ayudaría usar las tarjetas?*** *– (El evaluado pone 18 flechas sobre la mesa)* ***– ¿Qué más podrías hacer para que sepa cómo llegaste a la respuesta?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Le aumentarías más flechas a este grupo?*** *– No* ***- ¿Le quitarías tarjetas?*** *– Si* ***- ¿Cuántas?*** *– Doce* ***- ¿Puedes hacerlo?*** *– (El evaluado separa 12 tarjetas, dejando por un lado 12 y por el otro 6)* ***- Yo pienso que el niño te preguntaría por qué hay por un lado 12 y por otro lado 6, ¿qué le dirías?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***– ¿Este grupo de 12 flechas son las que regresamos a casa?*** *– No* ***- ¿Cuáles son las que regresamos a casa?*** *– (El evaluado señala el grupo de 6 flechas)* ***– Un niño***

una vez me dijo que si juntamos este grupo de flechas de acá (grupo de 6 flechas) con este grupo de flechas de acá (grupo de 12 flechas) tenemos menos flechas que antes, ¿tú que piensas? *– No, tendríamos igual.*

Sha (11 años): ***Mira, tengo aquí unos tapetes. Supongamos que en una reunión se utilizaron 9 tapetes, pero cuando termina la reunión tu mamá te dice que de esos 9 tapetes 5 debemos devolverlos a la vecina, ¿con cuántos tapetes te quedas en casa?*** *– (el evaluado permanece en silencio por un momento) Con cuatro.* ***- Y si tú juntas esos 4 que te quedan con los que le devolviste a la vecina, ¿vas a tener lo mismo?*** *– Si* ***- ¿O vas a tener más o vas a tener menos?*** *– Voy a tener igual.*

Sha (11 años): ***Ahora supongamos que en casa hay 17 tapetes y los usamos para una reunión al aire libre, pero de pronto empieza a llover muy fuerte y se mojan 9 tapetes. ¿Cuántos tapetes quedan secos?*** *– (El evaluado permanece en silencio por un momento) Ocho* ***- ¿Y si ponemos a secar los nueve tapetes mojados vamos a tener secos los mismos tapetes que antes? – Si - ¿O vamos a tener más tapetes secos?*** *– Igual.*

Sha (11 años): ***Supongamos que en casa tenemos ahora 22 tapetes, pero la vecina nos pide prestados 14 tapetes, así que se los damos. Luego tu mamá se te acerca y te pregunta: ¿Cuántos tapetes tenemos ahora que le vecina se llevó 14?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Te ayudaría usar las tarjetas?*** *– Si (El evaluado pone 22 tapetes sobre la mesa y en hilera)* ***- ¿cuántos tapetes tienes ahí?*** *– Veintidós* ***- ¿cómo podrías estar segura?*** *– Contando (el evaluado cuenta uno a uno los tapetes y comprueba que son 22)* ***– Bien, esos son los 22 tapetes que tenías en casa, pero al vecina toca la puerta y te pide prestados 14 tapetes, ¿con cuántos tapetes nos quedamos en casa?*** *– (el evaluado permanece en silencio) Ocho****. - ¿Y si cuando la vecina nos devuelva los tapetes vamos a tener la misma cantidad de antes?*** *– Si, la misma.*

Dal (11 años): ***Supongamos que queremos ir a cazar animales y buscamos en el lugar donde guardamos las flechas en nuestra casa porque sabemos que tenemos ahí ocho flechas, pero cuando vamos a buscar resulta que nuestro papá se ha llevado 3, ¿cuántas flechas tenemos en casa?*** *– (el evaluado permanece un momento en silencio) Cinco* ***- ¿Y cómo llegaste a la respuesta? ¿Qué hiciste en tu mente?*** *– Ocho menos tres* ***- ¿Puedes mostrarnos con las tarjetas? ¿Cómo le explicarías a un niño más chiquito?*** *– (El evaluado pone por un lado ocho flechas y por otro lado 3 flechas) Ocho menos tres (luego se corrige y extrae las tres flechas del grupo de ocho flechas) Son 5* ***- ¿Cuándo tu quitas***

***tres de dónde los quitas?** – De los ocho **- ¿Y por qué habías sacado otros tres más antes?** – Me equivoqué.*

*Dal (11 años): **Supongamos ahora que salimos a cazar y llevamos 14 flechas, pero en el bosque solo usamos 6, ¿con cuántas regresamos a casa?** – (el evaluado permanece en silencio) **- ¿Te ayudaría usar las tarjetas?** – (el evaluado pone una a una las 14 tarjetas en hilera sobre la mesa) **– Y disparamos seis …** **-** (El evaluado cuenta 6 flechas una por una y las separa del grupo, luego cuenta una por una las flechas que sobran) Ocho.*

*Dal (11 años): **Supongamos que salimos a cazar perdices y llevamos 18 flechas, pero solo usamos 12 flechas, ¿con cuántas flechas regresamos a casa?** – (El evaluado permanece en silencio) **- ¿Te ayudaría usar las tarjetas?** – (El evaluado pone 18 flechas una por una en un montón, luego hace otro montón con 12 flechas) **– Estas son las 18 que tenemos ¿no? (en referencia al montón de 18), si disparamos 12 ¿cuántas nos quedan?** – (El evaluado permanece en silencio) **- ¿cómo podrías saber cuántas flechas nos quedan?** – No, me he equivocado (el evaluado agarra el montón de 12 flechas y las guarda nuevamente en la caja) **– No hay problema, ¿qué deberías hacer?** – Sacar 12 de este grupo (en referencia al grupo de 18) (el evaluado retira 12 flechas una a una del grupo de 18, luego cuenta las que le quedan) Seis **- ¿Y si juntaras estas 6 con estas 12 tendrías la misma cantidad de antes?** – Si, la misma.*

*Dal (11 años): **Para una reunión se utilizaron 9 tapetes, pero tú mamá te dice, cuando acaba la reunión, que 5 tapetes son de la vecina y hay que devolverlos, ¿con cuántos te quedas en casa?** – Cuatro.*

*Dal (11 años): **Supongamos que en casa tenemos 17 tapetes, así que los utilizamos para una reunión. De pronto, en plena reunión empezó a llover y se mojaron 9 tapetes, ¿cuántos quedaron secos?** – (el evaluado permanece en silencio) voy a usar las tarjetas (El evaluado pone una a una las 14 tarjetas) **– Y se mojaron 9, ¿cuántos tapetes quedan secos?** – (el evaluado cuenta 9 tapetes y lo separa del grupo, luego cuenta los restantes) Ocho **– ¿Y si los juntamos de nuevo vamos a tener lo que teníamos antes?** – Si.*

*Dal (11 años): **Supongamos que tienes en casa 22 tapetes en casa, pero la vecina te pide 14 tapetes prestados, ¿cuántos tapetes te quedan en casa?** – (el evaluado pone una a una 22 tarjetas) **– Le prestamos 14 a la vecina** – Sacamos 14 (El evaluado cuenta 14 tapetes y los retira) **- ¿cuántos tenemos en casa?** – (El evaluado cuenta los restantes uno* *por uno) Ocho* **– Y por ejemplo, ¿si juntamos esto (los 14 tapetes) con esto (los 6 tapetes) tendremos lo mismo que antes?** *– Si, lo mismo* **– Un vez le pregunte esto a una niña de tu edad y me dijo que habría una cantidad diferente**. *– No* **- ¿cómo nos mostrarías que está equivocada?** *– Lo junto así y cuento (el evaluado junta todas los tapetes).*

Apéndice C: Evaluación de la operación de multiplicación

Wil (7 años): **-Supongamos que yo le doy a este pez (pez B) 4 bolitas de alimento, ¿Cuánto le darías a este pez (pez A) y a este otro (pez C)?** *El evaluado le da una bolita al (Pez A) y 4 bolitas al (Pez C).* **- Ahora, yo te hago una pregunta, ¿quiénes comen más, los más grandes o los más chiquitos?** *– Los más grandes. –* **¿Y por qué si este (Pez C) es más grande que este otro pez (Pez B) los dos comen igual?** *– Está mal* **– Entonces ¿cuántas bolitas debería comer este pez (Pez C)?** *– Tres bolitas.*

Wil (7 años): **-Si yo le doy nueve bolitas de alimento al pez más grande (Pez C) ¿Cuántas debería darle a este pez (Pez B)?** *– Dos* **– ¿Y cuántas debería darle a este pez (Pez A)?** *– Uno.* **-¿Cuál de estos dos peces (Pez A y Pez B) es el que está comiendo más?** *– Este pez (Pez B)* **- ¿Y por qué come más?** *– Porque es más grandecito.*

Wil (7 años): **- Ahora yo le voy a dar 4 bolitas de alimento a este pez (Pez A), ¿Cuántas le darías tú a este otro (Pez B)?** *– 4 bolitas –***A ver dale, ¿Cuántas bolitas le has dado?** *– 4 bolitas* **- ¿Te parece si las contamos***? (Después de contarlas notamos que no le dio 4 bolitas sino 5)* **-¿Cuántas debemos darle entonces, 4 bolitas o 5?** *– 5 bolitas* **-¿Y a este otro pez (Pez C), cuánto le darías?** *– 10 bolitas* **– A ver dale** *(El evaluado le da 9 bolitas, luego de esto se cuentan las bolitas y se le hace notar al evaluado que dio 9 y no 10)* **- ¿Cuántas deberíamos dar 9 o 10?** *-10 bolitas.*

Wil (7 años): **-Ahora supongamos que le doy al pez más pequeño 7 bolitas ¿Cuántas bolitas debería darle a este otro pez (Pez B)?** *–Dos bolitas* **–Y a este otro pez (Pez C) que come 3 veces lo que come este otro pez (Pez A), ¿cuánto debería comer?** *– Tres bolitas.*

Luc (7 años): **-Supongamos que le doy a este pez (Pez B) 4 bolitas de alimento, ¿cuánto le daría a este pez (pez A) y a este otro pez (pez C)?** *(El evaluado le da 2 bolitas al Pez A y 4 bolitas al pez C). Se le cuestiona:* **¿Quién come más, este pez (Pez B) o este otro pez (Pez C)?** *–El más grande* **–Pero están comiendo igual -** *(La evaluada le da una bolita más de alimento al pez C)*

Luc (7 años): ***-Ahora yo le voy a dar 9 bolitas de alimento al este otro pez (Pez C), ¿cuántas bolitas le darías a este otro pez (Pez A)?*** *– 3 bolitas* ***– ¿Y cuántas bolitas de alimento le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– 4* ***bolitas - ¿Recuerdas que este pez (Pez B) debe comer el doble que este otro pez (Pez A)?*** *– Si* ***- ¿Cuánto le darías entonces?*** *– 4 bolitas.*

Luc (7 años): ***-Mira, ahora yo quiero darle 4 bolitas de alimento a este pez (Pez A), ¿cuántas bolitas le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– 5 bolitas* ***- ¿Y cuántas bolitas de alimento le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 6 bolitas de alimento.*

Luc (7 años): ***- Ahora, mira, le quiero dar a este pez (Pez A) 7 bolitas de alimento, ¿cuántas bolitas le darías a este otro (Pez B)?*** *-8 bolitas* ***- ¿Y cuántas bolitas le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 9 bolitas.*

Roc (7 años): ***-Mira, yo le quiero dar de comer una bolita de alimento a este pez (Pez A), ¿cuánto le darías de comer tú a este otro pez (Pez B)?*** *– (Le da una bolita)* ***-¿Y cuánto le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– (Le da una bolita)* ***-¿Te acuerdas quién es el que comía más? ¿Quiénes comen más, los más grandes o los más pequeños?*** *–Los más grandes* ***–Y entre todos estos ¿cuál es el más grande?*** *–Este (Pez C)* ***– ¿Y entre estos dos (Pez A y Pez B)?*** *–Este (Pez B)* ***- ¿Y por qué todos comen igual?*** *– Bolita.*

Les (9 años): ***-Yo le voy a dar de comer a un pez y tú le vas a dar de comer a los otros dos. Supongamos que yo le doy a este pez (Pez B) 4 bolitas, ¿Cuánto le deberíamos dar a este pez (Pez A)?*** *– 2 bolitas* ***- ¿Y cuánto le deberíamos dar a este de acá (Pez C)?*** *– 4 bolitas****. – ¿Y cuál es el pez que debe comer más?*** *– Este de acá (Pez C)* ***- ¿Entonces cuánto le darías de comer?*** *– 5 bolitas****.***

Les (9 años): ***-Supongamos que ahora que yo le quiero dar de comer al pez grande (Pez C) y le doy 9 bolitas de alimento, ¿Cuánto le darías de comer a este otro pez (Pez B)?*** *– 3 bolitas* ***- ¿Y cuánto le darías a este pez chiquito (Pez A)?*** *– Dos bolitas.* ***– ¿Y cuánto más está comiendo este pez (Pez A) que este otro pez (Pez B)?*** *– Uno.*

Leslie (9 años): ***- Ahora le quiero dar de comer a este pez chiquito (Pez A), le doy de comer 4 bolitas de alimento, ¿le puedes dar de comer a este otro pez (Pez B)?*** *– (Le da dos bolitas)* ***– ¿Y al otro pez (Pez C) cuánto le darías?*** *– 4 bolitas.* ***– Una pregunta, ¿cuál pez es más grande, este de acá (Pez B) o este otro de acá (Pez A)?*** *– Este de acá (Pez C)****. – Claro, ese es el más grande de todos, pero entre este de acá (Pez A) y este de acá***

(Pez B). *– Este (Pez B).* ***- ¿Y cuál está comiendo más ahorita?*** *– Este pez (Pez A)* ***– ¿Recuerdas cómo debemos darles de comer? ¿Se le da más comida al más grande o al más chiquito?*** *– Al más grande* ***- ¿Y cuánto le darías a este pez (Pez B) entonces?*** *– 4 bolitas* ***– Igual que a este pez (Pez A) entonces. ¿Y hora cuánto le darías a este (Pez C)? ¿Lo dejarías en 4 bolitas? ¿Cuánto le darías?*** *– 3 bolitas.*

Les (9 años): ***- Quiero alimentar al pez más chiquito (Pez A) con 7 bolitas de alimento, le voy a dar 7 bolitas de alimento. ¿Tú cuánto le darías a este (Pez B)?*** *– 10 bolitas* ***- ¿Y cuánto le darías a este de acá (Pez C)?*** *– 12 bolitas*

Man (9 años): ***-Ahora me gustaría darle 4 bolitas de alimento a este pez (Pez B), ¿cuánto le darías tú a este pez (Pez A)?*** *– 2 bolitas* ***- ¿Y cuántas bolitas le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 5 bolitas****. – Y qué te parece si le damos 7 bolitas a este pez (Pez C), ¿se podría?*** *– Si se puede.*

Man (9 años): ***-Ahora me gustaría darle de comer al pez más grande (Pez C). Si yo le doy 9 bolitas de alimento ¿cuánto le darías tú a este otro pez (Pez A)?*** *– 4* ***bolitas -¿Y cuánto le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– 5 bolitas* ***– Y qué tal si yo quisiera darle a este pez (Pez A) 5 bolitas de alimento y a este pez (Pez B) 4 bolitas de alimento ¿estaría bien?*** *– Sí.*

Man (9 años): ***-Yo quiero darle a este pez (Pez A) 4 bolitas de alimento ¿cuántas le darías tú a este otro pez (Pez B)?*** *– 3 bolitas.* ***- ¿Y cuánto le darías tú a este otro pez (Pez C)?*** *– 5 bolitas.* ***-¿Y quiénes deben comer más, lo más grandes o los más chiquitos?*** *–Los más grandes* ***- ¿Cuál pez es más grande?*** *– Este (Pez C)* ***– Y ente este pez (Pez A) y este pez (Pez B) ¿cuál es el más grande?*** *–Este (Pez B).* ***– ¿Entonces quién debe comer menos?*** *– Este (Pez B)* ***-¿Por qué?*** *– Porque es más chiquito.*

Man (9 años): ***- Ahora yo le voy a dar de comer a pez más chiquito (Pez A) 7 bolitas de alimento, ¿cuántas bolitas le darías tú a este otro pez (Pez B)?*** *-8 bolitas* ***– ¿cuántas bolitas de alimento le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 9 bolitas (Se le recuerdan las reglas de proporción y no modifica su respuesta)*

Dal (11 años): ***- Supongamos que yo le quiero dar de comer a este pez de acá (Pez B) y le doy de comer cuatro bolitas de alimento, ¿cuánto le darías de comer tú a este (Pez A)?*** *– Dos bolitas* ***- ¿Y a este?*** *– 6 bolitas* ***– Y por ejemplo, ¿Estaría bien si en vez de***

***darle 6 bolitas a este pez (Pez C) le damos 5?** – No **-¿cuánto tenemos que darle?** – 6 bolitas **- ¿Y si le damos 7 bolitas? ¿Estaría bien?** –No.*

*Dal (11 años): **- Ahora yo quiero darle de comer al pez más grande (Pez C), le voy a dar 9 bolitas de alimento, ¿con cuánto alimentarías a los otros dos?** – (Le da al pez B seis bolitas de alimento y al pez C tres bolitas de alimento) **- ¿Y estaría bien si le damos a este pez (Pez A) 4 bolitas?** – No **–Y si le damos 5 a este (Pez B)** – No.*

*Dal (11 años): **- Ahora le quiero dar de comer a este pez (Pez A) 4 bolitas de alimento, ¿cuánto le darías de comer a este pez (Pez B)?** – (Le da de comer 8 bolitas**) – ¿Y cuánto le darías de comer a este otro pez (Pez C)?** – 12 bolitas **– ¿cómo sabes cuánta comida darle a cada uno? si te encontraras con un niño pequeño que no sabe darles de comer, ¿cómo le explicarías?** – Le diría que le dé así, 4 bolitas a este (Pez A), 8 bolitas a este (Pez B) y 12 bolitas a este (Pez C). **(Estadio 4b)***

*Dal (11 años): **- Ahora le quiero dar a este pez (Pez A) 7 bolita de alimento, ¿cuánto le darías de comer a este pez (Pez B)?** – (Le da 14 bolitas) **- ¿Y si yo le quisiera dar 15 bolitas, estaría bien?** – No **- ¿Y cuánto le darías a este otro pez (Pez C)?** – 21 bolitas (llega a este resultado contando 3 veces 7) **- ¿Le podemos dar 20 bolitas en vez de 21?** – No.*

*Sha (11 años): **- Mira, ahora le voy a dar de comer al pez más chiquito (Pez A), le voy a dar una bolita de alimento, ¿cuántas bolitas le darías de comer a este otro pez (Pez B)?** – Tres bolitas de alimento **- ¿Recuerdas que este pez (Pez B) come dos veces lo que coma este otro pez (Pez A)?** –Si **– ¿Cuánto debe comer este pez (pez B)?** – 2 bolitas **– Y si este pez (Pez C) come 3 veces lo que este otro pez (Pez A), ¿cuánto le debería dar de comer?** – 3 bolitas.*

*Sha (11 años): **- Ahora, yo quiero dar de comer a este pez de en medio (Pez B) y le doy de comer 4 bolitas de alimento, ¿cuánto le darías tú a este pez (Pez A)?** – (Le da dos bolitas de alimento) -¿Y cuánto debería comer este si este (Pez C) come tres veces lo que este (Pez A)? – Cinco bolitas **– Entonces este (Pez A) come dos, este (Pez B) come 4 y este (Pez C) come 5** – Si **- ¿Y estaría bien si yo le doy de comer a este (Pez B) cinco bolitas y a este (Pez C) 4 bolitas?** – No **- ¿Y si le doy de comer 4 bolitas a este (Pez A) y 2 bolitas a este (Pez B)? ¿Estaría bien?** – No **- ¿Y qué tal si le doy de comer a este (Pez C) 8 y a este (Pez B) lo dejo en 4 bolitas? ¿Estaría bien?** – No **- Ahora, ¿recuerdas que***

este pez (Pez C) debe comer tres veces lo que come este pez (Pez A)? *–Si* ***-¿cuánto come este pez (Pez A)?*** *– 2 bolitas* ***- ¿Entonces cuánto debe comer este pez (Pez C)?*** *– 6 bolitas.*

Sha (11 años): ***-Mira, ahora le quiero dar a este pez (Pez C) 9 bolitas de alimento, ¿cuántas bolitas de alimento le darías tú a este pez (Pez A)?*** *– 4 bolitas de alimento.* ***-¿Y cuántas bolitas de alimento le darías a este otro pez (Pez B)?*** *– 6 bolitas de alimento.*

Sha (11 años): ***Ahora yo le quiero dar 7 bolitas de alimento a este pez (Pez A) ¿cuánto le darías de a este otro pez (Pez B)?*** *– 9 bolitas de alimento****. - ¿Y cuánto le darías a este otro pez (Pez C)?*** *– 12 bolitas*

Apéndice D: Evaluación de la noción de mitad

Wil (7 años): ***Supongamos que hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, ¿puedes poner 8 peces?*** *– (El evaluado cuenta uno a uno ocho peces y los pone sobre la mesa)* ***– Muy bien. Pero luego nos damos cuenta que solo necesitamos la mitad, entonces decidimos darle la mitad a nuestro vecino, ¿cuántos peces debemos darle a nuestro vecino?*** *– Dos* ***- ¿podrías mostrarnos con las tarjetas?*** *– (El evaluado separa dos peces del grupo de ocho peces)* ***- ¿Y si le diéramos estos 6 peces también le estaríamos dando la mitad?*** *– Si* ***- ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluado junta los 8 peces nuevamente y luego separa 3) ¿Si le damos estos tres le estaríamos dando también la mitad?*** *– Si.*

Luc (7 años): ***Supongamos que nosotros pescamos ocho peces para el almuerzo. A ver, pon ocho peces aquí*** *– (el evaluado pone uno a uno ocho peces sobre la mesa)* ***– Bien, tenemos estos ocho peces, pero en realidad solo necesitamos al mitad, la otra mitad se la vamos a regalar a la vecina ¿me podrías dar lo que le vamos a dar la vecina?*** *– (el evaluado le entrega 4 peces, uno por uno, al evaluador)* ***- Y si en vez de darme estos solo me das estos (el evaluado deja uno de los peces sobre la mesa y se queda solo con 3 peces) ¿Sería también la mitad?*** *– Si*

Luc (7 años): ***Supongamos ahora que tenemos 16. ¿Puedes poner 16 peces sobre la mesa?*** *– (El evaluado pone, uno a uno, los 16 peces sobre la mesa)* ***– Imaginémonos que tú quieres regalar estos peces a dos personas, pero como eres muy amiga de los dos quieres darle a cada uno la mitad ¿cómo lo harías?*** *– (El evaluado cuenta primero 8 peces y los separa, luego cuenta los peces que le quedan y los separa)* ***- ¿Cuántos peces le has dado a cada uno?*** *– Ocho* ***-¿Y si quitamos un pez de este grupo y lo ponemos en este otro grupo, sería también la mitad?*** *– No.*

Luc (7 años): ***Ahora imagínate que has pescado 24 peces, ¿puedes poner 24 peces?*** *– (El evaluado alinea uno a uno 24 peces)* ***– Supongamos que tú quieres repartir estos peces entre dos personas de tal manera que cada uno tenga la mitad ¿cómo lo harías?*** *– (el evaluado separa 4 peces de los 24 de tal manera que tiene un grupo de 20 peces y otro de 4).*

Roc (7 años): ***Supongamos que hoy pescamos 8 peces, ¿puedes poner 8 peces?*** *– (el evaluado pone uno a uno 8 peces sobre la mesa)* ***– Pero, en realidad es mucho para nosotros, solo necesitamos la mitad, ¿cuánto es la mita?*** *– Nueve* ***- ¿Nueve es la mitad?*** *– Si –* ***(El evaluador pone por un lado 3 peces y por otro lado 5. Señalando los 3 peces hace una pregunta) ¿Esto es la mitad?*** *– Si.*

Man (9 años): ***Supongamos que pescamos 8 peces. ¿Puedes poner 8 peces sobre la mesa? – (el evaluado pone 8 peces uno por uno sobre la mesa)*** *– Ahora, vamos a suponer que 8 peces es mucho para nosotros, así que queremos regalarle la mitad de estos peces al vecino, ¿puedes separar la mitad?* ***– (El evaluado separa del grupo total 4 peces) - ¿Cuánto sería la mitad?*** *– Cuatro* ***- ¿Y si hago esto también sería la mitad? (El evaluador crea ahora dos grupos, uno de 6 y uno de 2)*** *– Sí.*

Man (9 años): ***Imagínate que hoy pescamos 16 peces*** *– (El evaluado pone uno a uno 16 peces sobre la mesa)* ***– Pero como son muchos peces queremos darle la mitad a la vecina, ¿puedes darme los peces que serían para la vecina?*** *– (el evaluado permanece en silencio por un momento, luego separa 5 peces)* ***- ¿Cuáles serían los peces que le vamos a dar a la vecina?*** *– Estos (el evaluado señala los 5 peces).*

Les (9 años): ***Supongamos que hoy pescamos ocho peces*** *– (el evaluado pone ocho peces sobre la mesa)* ***– Pero como no necesitamos tantos peces decidimos regalarle la mitad de estos peces a la vecina, ¿cuántos peces le debemos dar a la vecina?*** *– (El evaluado separa 4 peces para la vecina) Cuatro* ***-¿Y si le damos así? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 4 y lo pone en el otro grupo, de tal manera que se tenga un grupo de 3 peces y otro de 5) ¿Si le damos estos (grupo de 5 peces) le estaríamos danto la mitad*** *– Si* ***- ¿Y si le damos estos (grupo de 3 peces) le estaríamos danto la mitad?*** *– Si.*

Sha (11 años): ***Supongamos que hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, pero nos damos cuenta que solo necesitamos la mitad, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino, ¿cuántos peces debemos darle a nuestro vecino?*** *– Cuatro* ***- ¿podrías***

mostrarnos con las tarjetas? *– (el evaluado pone 8 peces en hilera, uno a uno, sobre la mesa)* ***- ¿cuáles serían los peces que le vamos a dar a nuestro vecino?*** *– (El evaluado separa 4 peces) Estos* ***- ¿Y si hacemos esto? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 4 y lo pone en el otro grupo, de tal manera que se tenga un grupo de 3 peces y otro de 5) Si yo le doy este grupo (grupo de 4) ¿Le estaría dando la mitad?*** *– No* ***- ¿Y si le diéramos este grupo (grupo de 5)?*** *– Tampoco.*

Sha (11 años): ***Ahora, supongamos que hoy pescamos 16 peces, ¿puedes poner 16 peces sobre la mesa?*** *– (El evaluado pone uno a uno 16 peces sobre la mesa)* ***– Si quisiéramos darle la mitad al vecino, ¿cómo haríamos?*** *– (El evaluado separa 8 peces del grupo total)* ***- ¿Y si hiciéramos esto también sería la mitad? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 8 y lo pasa al otro grupo. Esto genera dos grupos, uno de 7 y uno de 9)*** *– No* ***- ¿Cómo debe ser?*** *– (El evaluado regresa los grupos a su estado anterior).*

Sha (11 años): ***Ahora supongamos que hemos pescado 23 peces, pero nos parece que es mucho para nosotros, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino ¿cuántos peces debemos darle?*** *– (El evaluado pone, uno a uno, 23 peces sobre la mesa, luego con esos 23 peces hace dos grupos de once y se queda con un pez fuera de los dos grupos) Este sobra* ***– ¿Y en cada grupo cuantos peces hay?*** *– Once* ***-¿Y hay otra forma de que nos des la mitad o es la única?*** *– Este lo tendríamos que partir (en referencia al pez que sobró)* ***- ¿Y qué haríamos si lo partimos?*** *– Darle una parte a cada uno.*

Dal (11 años): ***Supongamos ahora que pescamos 8 peces para el almuerzo y queremos regalarle la mitad de lo que pescamos al vecino. ¿Cuánto sería la mitad?*** *– Cuatro* ***- ¿Nos puedes mostrar con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone 4 peces a un al lado derecho y 4 al lado izquierdo)* ***- ¿Y si yo hiciera esto? (El evaluador genera dos grupos, uno de 3 y uno de 5 peces) ¿Le estaríamos dando la mitad al vecino?*** *- No* ***- ¿Cómo debe ser para que le estemos dando la mitad?*** *– Tienen que ser iguales.*

Dal (11 años): ***Supongamos que ahora que pescamos 16 peces y como son muchos para nosotros decidimos darle la mitad al vecino. ¿Cuánto sería la mitad?*** *– (el evaluado permanece en silencio)* ***– Si quieres puedes usar las tarjetas*** *– (El evaluado saca 16 peces y los pone sobre la mesa, luego cuenta 8 y los separa del grupo total)* ***– ¿Cuánto sería la mitad?*** *– Ocho* ***- ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 8 y lo pasa al otro grupo. Esto genera un ordenamiento de dos grupos, uno de 7 y uno de 9)*** *– No, está mal. Hay un grupo que tiene más.*

Dal (11 años): ***Supongamos que pescamos 23 peces, pero nos parece que es mucho para nosotros, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino ¿cuántos peces debemos darle?*** *– Doce.* ***- ¿Puedes mostrarnos con las tarjetas?*** *– (El evaluado pone sobre la mesa 23 peces) –* ***Ahora queremos darle la mitad a nuestro vecino, ¿podrías separar lo que le vamos a dar a nuestro vecino?*** *– (El evaluado separa 12 peces)* ***- ¿Y en cada grupo hay la mitad?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿O hay uno que tiene más?*** *– Uno tiene más* ***- ¿Cómo podríamos hacer repartir y tengamos la mitad para la vecina?*** *– (El evaluado permanece en silencio)* ***- ¿Cuántos peces hay en este grupo?*** *– Doce* ***- ¿Y en este grupo?*** *– Once* ***- ¿Y podemos decir que cada uno tiene la mitad?*** *– Si* ***- ¿Y esta mitad (grupo de 11) es igual a esta mitad (grupo de 12)?*** *– No* ***- ¿cómo podríamos hacer para que sean mitad y mitad?*** *– (El evaluado retira un pez del grupo de 12) Así.*

Apéndice E: Protocolos para la evaluación por medio del método clínico-crítico

Ejercicios de pensamiento lógico matemático

Suma

Nombre					
Número	Sexo		Edad	Grado	Lengua Dominante
	M	F			

Consigna: *El lunes pude cazar 4 perdices y el martes 5 ¿Cuántas perdices tengo en total?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 9
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: *Un papá y un hijo salieron a cazar perdices y en un momento se separaron. El padre cazó 13 perdices y el hijo 5. ¿Cuántas perdices habrá finalmente en casa?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 18
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: Cazamos 21 perdices y el vecino nos regaló 15 ¿Con cuántas perdices tenemos en total?	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 36
Argumentación del evaluado	Manejo del material

Consigna: *Tengo este collar que se compone por 8 bolitas, queremos agregarle 9 bolitas más. ¿Cuántas bolitas tendría el collar?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 17
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: *Un collar se compone por 18 bolitas rojas, si le agregamos 7 azulas ¿Cuántas bolitas tiene el collar en total?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 25
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: *Un collar se compone por 15 bolitas y deseamos agregarle 18 bolitas más. ¿Con cuántas bolitas nos quedaremos en el collar?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 33
Argumentación del evaluado	Manejo del material

Resta

<table>
<tr><td colspan="2">Consigna: Queremos ir a cazar animales, teníamos 8 flechas pero nuestro hermano se llevó 3. ¿Cuántas flechas tenemos en casa ahora?</td></tr>
<tr><td>Respuesta del evaluado:</td><td>Respuesta correcta: 5</td></tr>
<tr><td>Argumentación del evaluado</td><td>Manejo del material</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Consigna: Salimos a cazar llevando con nosotros 14 flechas y solo usamos 6. ¿Con cuántas flechas regresamos a casa?</td></tr>
<tr><td>Respuesta del evaluado:</td><td>Respuesta correcta: 8</td></tr>
<tr><td>Argumentación del evaluado</td><td>Manejo del material</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Consigna: Teníamos en casa 18 flechas, pero tu papá llevó 12 para cazar perdices. ¿Cuántas flechas hay en casa ahora?</td></tr>
<tr><td>Respuesta del evaluado:</td><td>Respuesta correcta: 6</td></tr>
<tr><td>Argumentación del evaluado</td><td>Manejo del material</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Consigna: *Se utilizaron 9 tapetes para una reunión. Tu mamá te dice que 5 tapetes se deben devolver a la vecina y los demás guardarlos en casa. ¿Cuántos tapetes se deben guardar en casa?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 4
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: *Teníamos 17 tapetes en casa, pero nos olvidamos de guardarlos luego de una reunión y la lluvia mojó 9 tapetes ¿Cuántos tapetes tenemos secos?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 8
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: *Mi mamá tenía 22 tapetes en casa, pero le hemos prestado 14 a la vecina ¿Cuántos tapetes tenemos en casa?*	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 8
Argumentación del evaluado	Manejo del material

Mitad

Consigna: Hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad ¿Cuántos peces necesitamos?	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 4
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: Hoy pescamos 16 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad ¿Cuántos peces necesitamos?	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 8
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: Hoy pecamos 24 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad. ¿Cuántos peces necesitamos?	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 12
Argumentación del evaluado	Manejo del material
Consigna: Hoy pecamos 23 peces para el almuerzo, pero solo necesitamos la mitad. ¿Cuántos peces necesitamos?	
Respuesta del evaluado:	Respuesta correcta: 11.5
Argumentación del evaluado	Manejo del material

Apéndice F: Protocolo para la evaluación de multiplicación

Nombre					
Número	Sexo		Edad	Grado	Lengua Dominante
	M	F			

<u>Prueba de los Peces de Constance Kamii para identificar el pensamiento multiplicativo</u>

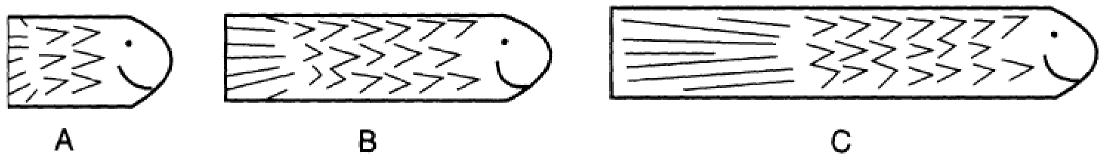
1) **<u>Descripción de los materiales:</u>**

Para poder realizar esta prueba el evaluador necesitará tres peces de madera con proporciones exactas, de tal manera que el pez más grande sea tres veces el pez más pequeño y el pez de tamaño intermedio sea dos veces el pez más pequeño. Adicionalmente, se necesitará pequeñas fichas que representen el alimento para los peces, estos deben tener igual tamaño, forma y color.

2) **<u>Explicaciones Iniciales:</u>**

Se deberán seguir las siguientes instrucciones:

a) Se deberá colocar los tres peces frente al sujeto.



b) Señalando el "Pez B", se le dice al evaluado: ***"Este pez come dos veces lo que este otro pez"***, señalando ahora al "Pez A".

c) Seguidamente, señalando el "Pez C", se le dice al evaluado: ***" Y este pez come tres veces lo que este otro pez"***, señalando al "Pez A"

d) Luego, con respecto al "Pez B" se dice: ***"Este pez come dos veces que lo que este otro pez ("Pez A"), pues es dos veces más grande"***. Luego de realizar esta afirmación el evaluador deberá colocar el "Pez A" sobre el "Pez B" de tal manera que se haga notorio que el "Pez B" es dos veces el "Pez A".

e) Nuevamente, el evaluador dice, refiriéndose ahora al "Pez C": ***"Este pez come tres veces que lo que este otro pez ("Pez A"), pues es tres veces más grande"***. Luego de realizar esta afirmación el evaluador deberá colocar el "Pez A" sobre el "Pez C" de tal manera que se haga notorio que el "Pez C" es tres veces el "Pez A".

3) **<u>Preguntas para el evaluado</u>:**

3.1) Si este "Pez A" obtiene 1 (bolita) de alimento, ¿Con cuántas fichas de alimento habría que alimentar a los otros peces?
(Se puede añadir las explicaciones anteriores al respecto de cuanto come el "Pez B" y el "Pez C" con respecto al "Pez A")

3.1.1) Respuesta para el "Pez B": ________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.1.2) Respuesta pare el "Pez C": _________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

Desde la siguiente pregunta si el evaluado no da la respuesta correcta se puede afirmar: "Otra chica / chico me dijo…"

3.2) Si este "Pez B" obtiene 4 bolitas de alimento, ¿Cuántas bolitas deberán ser entregadas a cada uno de los otros peces?

3.2.1) Respuesta para el "Pez A": ___________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.2.2) Respuesta para el "Pez C": ____________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.3) Si este "Pez C" obtiene 9 bolitas de alimento, ¿Cuántas bolitas deberán ser entregadas a cada uno de los otros peces?

3.3.1) Respuesta para el "Pez A": ________________________

Argumentación del evaluado:

Observaciones al respeto del traductor:

3.3.2) Respuesta pare el "Pez B": _________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.4) Si este "Pez A" obtiene 4 bolitas de alimento, ¿Cuántas bolitas deberán ser entregadas a cada uno de los otros peces?

3.4.1) Respuesta para el "Pez B": ______________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.4.2) Respuesta pare el "Pez C": ______________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.5) Si este "Pez A" obtiene 7 bolitas de alimento, ¿Cuántas bolitas deberán ser entregadas a cada uno de los otros peces?

3.5.1) Respuesta para el "Pez B": _________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

3.5.2) Respuesta pare el "Pez C": __________________________

Argumentación del evaluado:
Observaciones al respeto del traductor:

Observaciones Generales

Observaciones de entorno:

Observaciones de entorno:

Observaciones generales del evaluado:

Apéndice G: Prueba de lápiz y papel.

Ejercicios

a) 4 + 5 =

b) 14 + 5 =

c) 21 + 15 =

d) 8 + 9 =

e) 18 + 7 =

f) 15 + 18 =

g) 8 - 3 =

h) 14 - 6 =

i) 18 - 12 =

j) 9 - 5 =

k) 16 - 9 =

l) 22 - 14 =

m) ¿Cuánto es la mitad de 8?

n) ¿Cuánto es la mitad de 16?

o) ¿Cuánto es la mitad de 24?