

Pontificia Universidad Católica del Perú  
Escuela de Posgrado



## Dinámica de las líneas de curvatura

Tesis para optar el grado de  
Magíster en Matemáticas

AUTOR

**Br. Alan Ysique Quesquén**

ASESOR

Dr. Roland Rabanal Montoya

JURADO

Dr. Jaime Cuadros Valle

Dr. Percy Fernández Sánchez

**LIMA - PERÚ**

2015

DINÁMICA DE LAS LÍNEAS DE CURVATURA<sup>1</sup>**Alan Ysique Quesquén**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemáticas.

Miembros de Jurado:

---

Dr. Jaime Cuadros (presidente)

---

Dr Percy Fernandez (miembro)

---

Dr. Roland Rabanal (asesor)

Lima - Perú

2015

---

<sup>1</sup>Este trabajo forma parte del proyecto DGI:(CAP 2015–209)

# Resumen

Se estudian las líneas de curvatura de superficies compactas, orientables y conexas del espacio euclidiano. La estrategia consiste en usar las ideas de la Estabilidad Estructural y dar condiciones suficientes para la estabilidad de las líneas de curvatura cuando la superficie se perturba en la topología  $C^3$ . Para tal efecto se estudia los puntos umbílicos Darbouxiano y sus separatrices, al igual que los ciclos hiperbólicos. La estructura de las líneas principales cerca de estos puntos será establecida, reduciendo su análisis a los puntos hiperbólicos singulares de los campos de Línea en el plano. Con esto se busca crear condiciones para que el conjunto de superficies compactas  $\Sigma(a, b, c, d)$  sea estructuralmente estable y abierto en el sentido  $C^3$ .

Graduando: Alan Ysique Quesquén



... A MI FAMILIA...

# Índice general

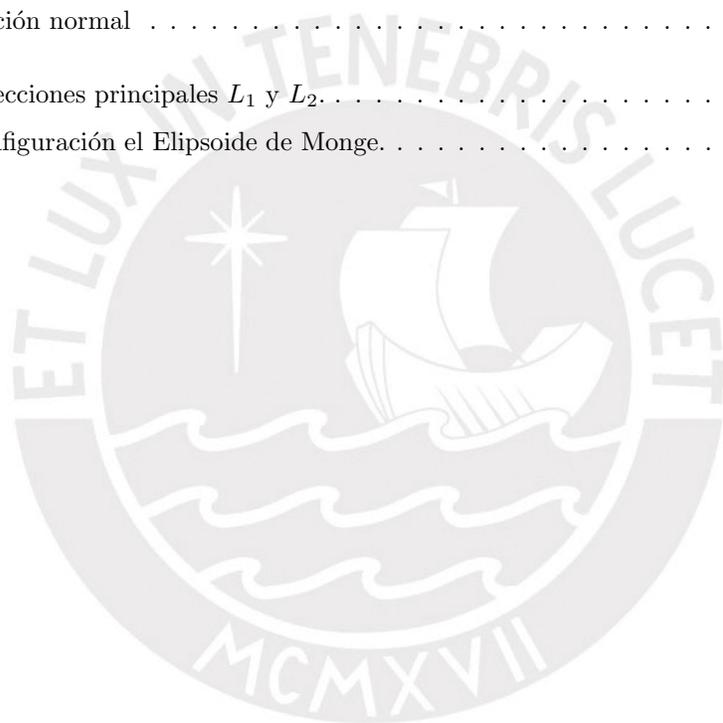
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Definiciones previas</b>	<b>3</b>
1.1 Curvaturas principales . . . . .	3
1.1.1 Clasificación geométrica de los puntos de una superficie. . . . .	5
1.2 Carta de Monge . . . . .	10
1.3 Curvaturas principales y sus vectores asociados . . . . .	12
1.3.1 Ecuación de los vectores principales. . . . .	13
1.3.2 Ecuación de las curvaturas principales . . . . .	15
1.4 Fórmula de Euler . . . . .	16
1.5 Campos de direcciones principales. . . . .	17
<b>2 Configuraciones principales</b>	<b>20</b>
2.1 Foliaciones Principales . . . . .	20
2.1.1 Ecuaciones diferenciales para las líneas Principales . . . . .	21
2.2 Configuraciones Principales. . . . .	24
2.2.1 Sistema triple ortogonal de superficies y superficies regladas . . . . .	27
2.3 Problema planteado en este trabajo . . . . .	31
<b>3 Puntos umbílicos</b>	<b>34</b>
3.1 Ecuaciones diferenciales binarias . . . . .	34
3.2 Puntos umbílicos Darbouxianos. . . . .	40
3.3 Invarianza de las condiciones T y D. . . . .	41
3.3.1 Condición T. . . . .	41
3.3.2 Condición D. . . . .	43
3.4 Configuraciones principales en umbílicos Darbouxianos. . . . .	47
3.5 Generacidad de las condiciones Darbouxianas . . . . .	49
<b>4 Ciclos Principales</b>	<b>52</b>
4.1 Cartas Principales y la aplicación de transición. . . . .	52

4.2	Derivada de aplicación de transición . . . . .	53
4.3	Ciclos Principales Hiperbólicos . . . . .	54
4.3.1	Construcción de un Ciclo Principal Hiperbólico . . . . .	55
4.4	La variación infinitesimal . . . . .	56
4.4.1	Cálculos preliminares . . . . .	56
4.4.2	Fórmula para una variación infinitesimal . . . . .	61
4.5	Curvatura variable en líneas principales . . . . .	62
<b>5</b>	<b>El teorema de estabilidad</b>	<b>68</b>
5.1	Regiones canónicas . . . . .	69
5.2	Continuación Natural y Apertura . . . . .	70
5.3	Construcción de la equivalencia principal . . . . .	72
<b>A</b>	<b>Geometría en espacios euclidianos</b>	<b>3</b>
A.1	El espacio euclidiano $\mathbb{E}^3$ . . . . .	3
A.2	Elementos del álgebra exterior . . . . .	5
A.3	Superficies orientables en $\mathbb{E}^3$ . . . . .	9
A.4	La primera forma fundamental . . . . .	11
A.5	Geometría de la aplicación de Gauss . . . . .	13
A.6	La segunda forma fundamental . . . . .	16
A.7	Curvatura gaussiana y curvatura media . . . . .	18
A.8	Curvatura y sección normal . . . . .	19
A.8.1	Interpretación geométrica de la curvatura Gaussiana. . . . .	22
	<b>Comentarios históricos</b>	<b>23</b>
<b>B</b>	<b>Comentarios históricos sobre líneas de curvatura</b>	<b>24</b>
B.1	Momentos históricos [SG08, Sot] . . . . .	24
B.1.1	Los momentos antes de Poincaré: Euler, Monge y Dupin. . . . .	24

# Índice de figuras

1.1	Todo punto de $\mathbb{S}_r^2$ es umbílico. . . . .	6
1.2	Curvaturas principales en el cilindro circular recto $\mathbb{C}_r$ . . . . .	7
1.3	Paraboloide hiperbólico . . . . .	8
1.4	Un campo de direcciones no orientable en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
1.5	Direcciones principales $L_1$ y $L_2$ . . . . .	19
2.1	Movimiento rígido en la esfera. . . . .	26
2.2	Homotecias en la esfera. . . . .	26
2.3	Inversión en el cilindro. . . . .	26
2.4	Inversión del elipsoide triaxial: con $1 > a > b > c > 0$ . . . . .	27
2.5	Familia ortogonal con foco común. [GS09] . . . . .	29
2.6	Configuración elipsoidal. [GS09] . . . . .	30
2.7	Puntos umbílicos en el Elipsoide. [GS09] . . . . .	30
2.8	Hiperboloide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . . . . .	31
3.1	Soluciones ortogonales de la ecuación 3.1 en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . . . . .	35
3.2	Proyectivo afín en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . . . . .	36
3.3	$(dx, dy)$ en la forma $(1, p)$ . . . . .	37
3.4	Singularidades aisladas de la ecuación binaria, [FNB12]. . . . .	40
3.5	Línea principal en el $(u, v)$ -plano. . . . .	44
3.6	Punto umbílico Darbouxiano: tipo $D_1$ . . . . .	45
3.7	Punto umbílico Darbouxiano: tipo $D_2$ . . . . .	46
3.8	Punto umbílico Darbouxiano: tipo $D_3$ . . . . .	46
3.9	Perturbación de un punto umbílico no Darbouxiano a un umbílico Darbouxiano. . . . .	51
4.1	Ciclo hiperbólico y semi-hiperbólico. . . . .	54
5.1	Región paralela . . . . .	69
5.2	Región cilíndrica . . . . .	69
5.3	Arcos de separatrices umbilicales . . . . .	71
5.4	D2: Arco transversal . . . . .	71

5.5	Ciclo principal mínimo: multiplicidad del ciclo principal . . . . .	71
5.6	Etapa 1 . . . . .	73
5.7	Etapa 2, b) ([GS82]) . . . . .	74
5.8	Etapa 3, [GS82] . . . . .	75
5.9	Etapa 4 . . . . .	75
5.10	Etapa 5 . . . . .	76
A.1	vector es una clase (color) que se identifica con una terna . . . . .	4
A.2	$p$ , cero del espacio $\mathbb{E}_p^2$ . . . . .	5
A.3	La aplicación de Gauss . . . . .	10
A.4	Base de $T_p S$ asociada a $\Phi$ . . . . .	11
A.5	$T_p S$ y $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ planos paralelos . . . . .	13
A.6	Curvatura normal . . . . .	20
A.7	Sección normal . . . . .	21
B.1	Direcciones principales $L_1$ y $L_2$ . . . . .	25
B.2	Configuración el Elipsoide de Monge. . . . .	25



# Agradecimientos

Empezar agradeciendo al Creador por haberme permitido culminar este proyecto. A mis familiares, por su apoyo incondicional, y a mi asesor Dr. Roland Rabanal, por su paciencia, comprensión y su valiosa ayuda; sin ello no hubiese sido posible culminar este trabajo.

Alan Ysique Quesquén



# Introducción

El estudio de las líneas de curvatura y puntos umbílicos en superficies, tiene sus raíces históricas en la Geometría y en las Ecuaciones Diferenciales. Las ideas de Estabilidad Estructural y Generacidad en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, aunque ya se conocían, fueron impulsadas por los trabajos de Mauricio M. Peixoto (Referencia [GS82])

En este trabajo, se pretende estudiar la dinámica de las líneas de curvatura en pequeños entornos de los puntos umbílicos, al igual que su estabilidad a causa de ligeras perturbaciones de la superficie en estos puntos; los cuales buscaremos que sean del tipo Darboux. Para ello, se partirá de algunos resultados clásicos de Geometría y Ecuaciones Diferenciales hacia resultados más unificados, como los de Estabilidad Estructural. Con esto, se busca estudiar condiciones suficientes para la estabilidad de las líneas de curvatura cuando la superficie se perturba en la topología  $C^3$ .

Haremos una revisión a fondo del problema y se plantea el escenario para resolverlo. Para tal efecto se estudia los puntos umbílicos Darbouxianos y sus separatrices. La estructura de las líneas principales cerca de estos puntos son establecidos, reduciendo su análisis a las singulares hiperbólicas de los campos de Línea en el plano.

Tratamos con líneas de curvatura cerradas, llamadas ciclo límite principal por ser el ciclo límite de una línea principal. Todas las superficies con las que trabajaremos serán suaves conexas, compactas y orientadas. Así, denotaremos por  $\Sigma(a, b, c, d)$  al conjunto de este tipo de superficies que además verifican las condiciones (a), (b), (c) y (d) siguientes:

- (a) Todos los puntos umbílicos son Darbouxianos,
- (b) Todos los ciclos límite son hiperbólicos,
- (c) Los conjuntos límites de toda línea principal están contenidos en el conjunto de puntos umbílicos o ciclos principales de la superficie, y
- (d) Todas las separatrices umbilicales son separatrices de un punto umbílico singular.

El problema fundamental en este trabajo consiste en probar que esta clase es un conjunto abierto y cada uno sus elementos es  $C^3$ -principal estructuralmente estable. Es decir, el trabajo consiste en asumir estabilidad en una superficie y evaluar que condiciones deben

prevalecer para que, por medio de una ligera deformación de la superficie original, la estabilidad se mantenga. Estas condiciones son las descritas en (a), (b), (c) y (d).

A la pareja de foliaciones principales junto con los puntos umbílicos se le conoce como la configuración principal de la superficie. Un resultado de este trabajo consiste en probar que, en función del campo vectorial asignado, existen tres clases genéricas de configuraciones principales, llamadas configuraciones Darbouxianas. Estas resultan ser abiertas en el espacio de las configuraciones principales con la topología de  $C^3$ , aunque también resultan ser densas. Esto último se expone al final como un resultado, el cual detalla en [GS98] capítulo 5.

El capítulo 1 introduce los conceptos básicos que serán utilizados a lo largo del trabajo, también establece notaciones y presenta algunos resultados técnicos necesarios.

El capítulo 2 está enfocado al estudio de las configuraciones principales de la superficie. La configuración principal reúne las propiedades cualitativas de las foliaciones principales en una superficie y representa la forma en que sus líneas se aproximan al conjunto umbilical. Naturalmente esto es análogo al retrato de fase de un campo vectorial sobre una superficie. Se establecen las definiciones básicas y terminología en relación con las líneas de curvatura principales.

El capítulo 3 está enfocado al estudio de los puntos umbílicos. En un punto umbílico, las curvaturas normales son constantes y su dirección principal es indeterminada. Nuestro interés principal se centra entonces en las líneas de curvatura, es decir, las curvas integrales del campo de dirección de la curvatura determinada por las direcciones principales. Lo que se busca es ver el comportamiento de las líneas de curvatura en la vecindad de un punto umbílico genérico (Darbouxiano). Claramente, lejos de un umbílico estas líneas de curvatura pueden ser modelados localmente por líneas  $u = \text{constante}$ ,  $v = \text{constante}$  en el  $(u, v)$ -plano.

El capítulo 4 está enfocado al estudio a la construcción de ciclos hiperbólicos para ciclos principales; requisito para el Teorema de Estructura. Así mismo, se estudia la variación infinitesimal de las líneas principales mínimas pasando a través de un punto, bajo una deformación de la superficie en dicho punto, y se culmina con un estudio sobre las líneas principales de curvatura constante, al igual que su conjunto límite.

El capítulo 5 está enfocado a la prueba del Teorema de Estructura. Se empieza dando una descripción detallada de los tipos de regiones (regiones canónicas) presentes en este tipo de superficies, para luego, mediante, un proceso de continuación natural con aproximaciones  $C^3$ , extender propiedades: de un punto umbílico y separatrices, a los elementos de la clase  $\Sigma$  a la cual pertenece la superficie.

# Capítulo 1

## Definiciones previas

En el presente capítulo se presentan definiciones, se establecen notaciones y resultados previos referentes a curvaturas principales que son el punto de partida en el entendimiento de las configuraciones principales, los cuales se verán en el siguiente capítulo. Luego, se hace una construcción de la llamada Carta de Monge, la cual origina una descripción explícita local de la superficie. Finalmente, se culmina este capítulo con la ecuación que verifican las curvaturas principales y la ecuación que verifican sus direcciones principales asociados.

### 1.1 Curvaturas principales

Sea  $S$  una superficie con las propiedades requeridas (suave, conexa, compacta y orientada),  $p \in S$  un punto de la superficie y  $T_p S$  el espacio tangente a la superficie en el punto  $p$ . A continuación se definen las curvaturas y vectores principales asociados a la superficie en este punto.

**1.1.1.** Sea  $\mathbb{S}^1 \subset T_p S$ , círculo unitario formado por los vectores  $\vec{v} \in T_p S$ , con  $\|\vec{v}\| = 1$ . La curvatura normal  $k_n(p)$  al ser continua en  $\mathbb{S}^1$ , alcanza sus valores extremos mínimo y máximo, y se les llama **curvaturas principales de  $S$  en  $p$** . La mínima se denota por  $k_1 = k_1(p)$  y la máxima por  $k_2 = k_2(p)$ , respectivamente. Las correspondientes direcciones  $\pm \vec{e}_1(p)$  y  $\pm \vec{e}_2(p)$  en cual se da los valores extremos  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ , son llamados **vectores principales mínimo y máximo de  $S$  en  $p$** , respectivamente. Estos están bien definidos y son mutuamente ortogonales (vea proposición A.18) fuera de un conjunto  $U_S = \{q \in S : k_1(q) = k_2(q)\}$  al cual llamaremos **conjunto de puntos umbílicos de  $S$** . Es decir,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \text{la curvatura normal mínima en } p, \\
 &= \min_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}), \\
 k_2 &= \text{la curvatura normal máxima en } p, \\
 &= \max_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

**Proposición 1.2.** Sea  $-DN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ , con  $DN_p$  la diferencial normal de Gauss. Existe una base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de  $T_pS$  tal que,

$$-DN_p(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1 \quad y \quad -DN_p(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2 ,$$

donde  $k_1 = II_p(\vec{e}_1) \leq k_2 = II_p(\vec{e}_2)$  son respectivamente los valores mínimo y máximo de  $II_p$  en el círculo  $\mathbb{S}^1 = \{v : \|v\| = 1\} \subset T_pS$  (vea **A.2**).

*Demostración.* A consecuencia de A.18 parte c), existe  $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$  una base ortonormal del  $T_pS$ . Es decir, existen  $\lambda_1, \lambda_2$  talque  $DN_p(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1$  y  $DN_p(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_1$ . Así, se tiene que

$$k_1 = II_p(\vec{e}_1) = \langle \vec{e}_1, -DN_p(\vec{e}_1) \rangle = \langle \vec{e}_1, -\lambda_1\vec{e}_1 \rangle = -\lambda_1,$$

con lo que se obtiene

$$-DN_p(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1.$$

Análogamente, al usar  $\lambda_2$  se obtiene  $-DN_p(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2$ . □

**1.3.** Con la base de la proposición 1.2, se escribe

$$\begin{aligned} -DN_p(\vec{e}_1) &= k_1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 , \\ -DN_p(\vec{e}_2) &= 0\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 , \end{aligned}$$

siendo  $k_1$  y  $k_2$  los autovalores de  $DN_p$ . Así, la matriz asociada al endomorfismo  $-DN_p$  (vea **A.23**), respecto a esta base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , se simplifica a:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la curvatura gaussiana  $K$  y la curvatura media  $H$ , tienen la forma

$$\begin{aligned} K &= \det(-DN_p) = k_1k_2 , \\ H &= \frac{1}{2}\text{traza}(-DN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2} . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Note que los autovalores  $k_1$  y  $k_2$  son los ceros del polinomio

$$P(k) = k^2 - \text{tr}(A) + \det(A), \text{ con } A = [-DN]. \tag{1.2}$$

Es decir:

$$k_1 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}^2(A) - 4\det(A)}}{2} \quad y \quad k_2 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{tr}^2(A) - 4\det(A)}}{2},$$

asu vez, usando la ecuación (1.1), se identifican como:

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad y \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}.$$

### 1.1.1 Clasificación geométrica de los puntos de una superficie.

1.4. Sea  $p \in S$ . Según el signo que asuman las curvaturas principales  $k_1(p)$ ,  $k_2(p)$  en ese punto, estos se clasifican en:

**Punto Elíptico:**  $k_1(p).k_2(p) > 0$ .

**Punto Hiperbólico:**  $k_1(p).k_2(p) < 0$ .

**Punto Parabólico:**  $k_1(p).k_2(p) = 0$ , donde ó  $k_1(p) \neq 0$  ó  $k_2(p) \neq 0$ .

**Punto Planar:**  $k_1(p).k_2(p) = 0$ , donde  $k_1(p) = 0$  y  $k_2(p) = 0$ .

**Punto Umbílico:**  $k_1(p) = k_2(p)$ .

Una superficie  $S$  es llamada **plana** en  $p$  si  $K(p) = 0$ . Así  $p$  es un **punto plano** si y sólo si es o  $p$  parabólico o es planar.

**Ejemplo 1.5.** (Vea figura 1.1) Sea  $S = \mathbb{S}_r^2 = \{p : \|p\| = r\}$  la esfera de radio  $r > 0$ , como en el ejemplo ejemplo A.16, en la cual se elige a  $N(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\|(x_1, x_2, x_3)\|}$  como la aplicación normal unitaria. Su derivada  $DN_p(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|p\|} = \frac{\vec{v}}{r}$  hace que sus curvaturas principales sean negativas; es decir, las secciones normales se doblan en sentido contrario a la de la normal. Así,

$$\begin{aligned} II(\vec{v}) &= \pm \text{curvatura de la sección normal en dirección de } \vec{v}, \\ &= \langle \vec{v}, -DN_p(\vec{v}) \rangle = -\frac{1}{r} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = -\text{curvatura del círculo máximo}, \\ &= -\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} k_1 &= \min_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}) = -\frac{1}{r}, \\ k_2 &= \max_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}) = -\frac{1}{r}, \end{aligned}$$

Pot tanto, en vista de que el punto elegido es arbitrario, todo punto de la esfera además de ser punto elíptico, es un punto umbílico.

**Observación 1.6.** Algebraicamente, se tiene que el operador  $DN_p = -\frac{1}{r}Id$ , tiene como único autovalor a  $-\frac{1}{r}$ , para cualquier  $\vec{v} \in T_pS$ .

**Ejemplo 1.7.** (Figura 1.2) Sea  $S = \mathbb{C}_r = \mathbb{E} \times \mathbb{S}_r^1 (\subset \mathbb{E}^3)$  el cilindro circular recto de radio  $r > 0$ , como en el ejemplo A.17. Si  $\vec{v} = (x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0))$ , un vector en su espacio tangente, entonces se pueden resaltar los siguientes casos:

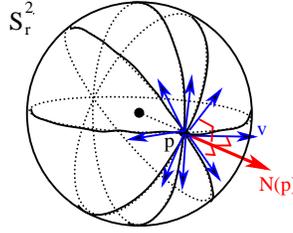


Figura 1.1: Todo punto de  $S_r^2$  es umbílico.

- Cuando  $\vec{v}$  es paralelo al hiperplano  $\{0\} \times \mathbb{E}^2$ , es decir cuando  $\vec{v} = \vec{v}_2 = (0, x'_2(0), x'_3(0))$ , se tiene que  $DN_p(\vec{v}_2) = -\frac{\vec{v}_2}{r}$ . Así:

$$\begin{aligned} II(\vec{v}_2) &= \pm \text{curvatura de la sección normal en dirección de } \vec{v}_2, \\ &= \langle \vec{v}_2, -DN_p(\vec{v}_2) \rangle = -\langle \vec{v}_2, -\frac{\vec{v}_2}{r} \rangle = \text{curvatura del círculo de radio } r, \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

- Cuando  $\vec{v}$  es paralelo a la recta  $\mathbb{E} \times \{0\} \times \{0\}$ , es decir cuando  $\vec{v} = \vec{v}_1 = (x'_1(0), 0, 0)$ , se tiene que  $DN_p(\vec{v}_1) = \vec{0}$ . Así:

$$\begin{aligned} II(\vec{v}_1) &= \pm \text{curvatura de la sección normal en dirección de } \vec{v}_1, \\ &= \text{curvatura de la línea}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Cuando  $\vec{v} \neq \vec{v}_1, \vec{v}_2$ , se obtiene:

$$II(\vec{v}) = \text{curvatura de la elipse}^1 \text{ que contiene a } p.$$

La elipse que pasa por  $p$ , tiene menor curvatura que la del círculo de radio  $r$ , que contiene a  $p$ . Esto se debe a que el círculo se dobla más en el sentido de la normal a la superficie en  $p$  (vea figura 1.10). Así, las curvaturas varían de 0 a  $\frac{1}{r}$ , es decir

$$0 \leq II(\vec{v}) \leq \frac{1}{r}, \text{ para todo } v \in T_p S,$$

tener en cuenta que  $\|\vec{v}\| = 1$ , según se expuso en 1.1. Por tanto

$$k_2 = \max_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}) = \frac{1}{r},$$

$$k_1 = \min_{\|\vec{v}\|=1} II(\vec{v}) = 0.$$

<sup>1</sup>Aquí la elipse está generada por la sección normal a la superficie en  $p$  (vea proposición A.28).

De aquí, cualquier punto del cilindro es de tipo parabólico. Además en el cilindro  $\mathbb{C}_r$ , se tiene que:

$$K = 0 \text{ y } H = \frac{1}{2r}.$$

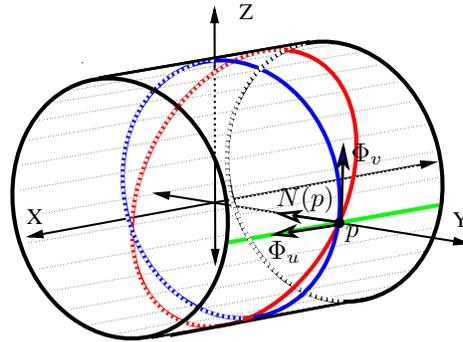


Figura 1.2: Curvaturas principales en el cilindro circular recto  $\mathbb{C}_r$ .

*Observación 1.8.* Lo anterior también es visto desde un punto de vista algebraico, para ello se procede a calcular los autovalores del operador  $DN_p$ . En efecto, consideremos la siguiente parametrización del cilindro:

$$\Phi(u, v) = \left( u, r \cos\left(\frac{v}{r}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{v}{r}\right) \right).$$

Los cálculos de sus derivadas parciales, son:

$$\begin{aligned} \Phi_u &= (1, 0, 0), \\ \Phi_{uu} &= (0, 0, 0), \\ \Phi_{uv} &= (0, 0, 0), \\ \Phi_v &= \left( 0, -\operatorname{sen}\left(\frac{v}{r}\right), \cos\left(\frac{v}{r}\right) \right), \\ \Phi_{vv} &= \left( 0, -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{v}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{v}{r}\right) \right). \end{aligned}$$

Así, la normal unitaria queda definida por:

$$N(u, v) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\left(\frac{v}{r}\right) & \cos\left(\frac{v}{r}\right) \end{pmatrix} = \left( 0, -\cos\left(\frac{v}{r}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{v}{r}\right) \right).$$

Al calcular los coeficientes de las formas fundamentales resulta que:

$$E = 1, F = 0, G = 1, e = 0, f = 0, \text{ y } g = \frac{1}{r}.$$

Además, por **1.3**, resulta que la matriz asociada al operador diferencial  $D_p N$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

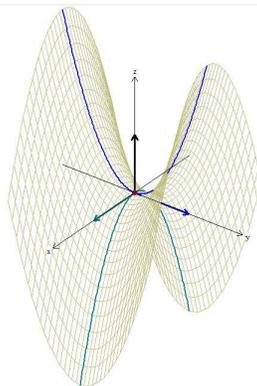


Figura 1.3: Paraboloido hiperbólico

De aquí resulta que los autovalores son  $k_1 = 0$  y  $k_2 = \frac{1}{r}$ , los cuales son justamente las curvaturas principales.

**Ejemplo 1.9.** (Figura 1.3) Consideremos el paraboloido hiperbólico  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : z = y^2 - x^2\}$ , a fin de calcular sus curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  en  $p = (0, 0, 0)$ . Para ello, consideremos a  $S$  como el valor regular de  $f(x, y, z) = z - y^2 + x^2$ , y con normal unitaria a  $N(x, y, z) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\|(2x, -2y, 1)\|}$  (gradiente como en **A.11**) con lo cual su derivada es  $DN = \frac{(2, -2, 0)}{\|(2x, -2y, 1)\|}$ . En el punto  $p = (0, 0, 0)$  el vector normal a la superficie es  $N(p) = (0, 0, 1)$ . Esto nos indica que la curvatura mínima se obtiene en la dirección del vector  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ , y la máxima en la dirección del vector  $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ . A su vez, se tiene que  $DN_p = (2, -2, 0)$ . Así,

$$\begin{aligned} II(\vec{e}_2) &= \pm \text{curvatura de la sección normal en dirección de } \vec{e}_2, \\ &= + \text{curvatura de } z = y^2, \\ &= \langle \vec{v}_2, -DN_p(\vec{v}_2) \rangle = \langle (0, 1, 0), -(2, -2, 1) \rangle, \\ k_2 &= 2. \end{aligned}$$

De modo similar se obtiene  $II(\vec{e}_1) = k_1 = -2$ . Con ello, se tiene:

$$k_1 = -2 = II(\vec{e}_1) \leq II(\vec{v}) \leq II(\vec{e}_2) = 2 = k_2, \text{ para todo } \vec{v} \in T_p S.$$

Por tanto, el punto  $p = (0, 0, 0)$  es un punto hiperbólico o punto silla.

*Observación 1.10.* Lo anterior también es visto desde un punto de vista algebraico, para ello se procede a calcular los autovalores del operador  $DN_p$ . En efecto, consideremos la siguiente parametrización del paraboloido hiperbólico (figura 1.3):

$$\Phi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2).$$

Los cálculos de sus derivadas parciales, son:

$$\begin{aligned}\Phi_u &= (1, 0, -2u), \\ \Phi_{uu} &= (0, 0, -2), \\ \Phi_{uv} &= (0, 0, 0), \\ \Phi_v &= (0, 1, 2v), \\ \Phi_{vv} &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

Así, la normal unitaria queda definida por:

$$N(u, v) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} = (2u, -2v, 1).$$

Al calcular los coeficientes de las formas fundamentales resulta que:

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = -4uv, \quad G = 1 + 4v^2, \quad e = -2, \quad f = 0, \quad y \quad g = 2.$$

Además, por **1.3**, resulta que la matriz asociada al operador diferencial  $D_p N$  es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De aquí resulta que los autovalores son  $k_1 = -2$  y  $k_2 = 2$ , los cuales son justamente las curvaturas principales.

**Proposición 1.11.** *El conjunto de las curvaturas normales a un punto  $p_0 \in S$  es el intervalo  $[k_1(p_0), k_2(p_0)]$ ; y si  $k_1(p_0) < k_2(p_0)$ , entonces el mínimo y máximo de esas curvaturas normales son precisamente las curvaturas principales en  $p_0$ , las cuales ocurren en los vectores principales asociados a los autovalores  $k_1(p_0)$  y  $k_2(p_0)$ , respectivamente.*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  una curva en  $S$  tal que  $\gamma(s_0) = p_0$  y  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  una base ortonormal de  $T_p S$  formada a partir de los autovectores de  $-DN_{p_0}$ . Escribiendo  $\gamma'(s_0) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ , donde  $a^2 + b^2 = 1$ , se tiene

$$\begin{aligned}k_n(\gamma'(s_0)) &= \langle a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, -DN_{p_0}(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \rangle \\ &= a^2 \langle \vec{e}_1, -DN_{p_0}(\vec{e}_1) \rangle + b^2 \langle \vec{e}_2, -DN_{p_0}(\vec{e}_2) \rangle \\ &= a^2 k_1 + b^2 k_2.\end{aligned}$$

Así se obtienen las desigualdades

$$k_1 = k_1(a^2 + b^2) \leq k_n(\gamma'(s_0)) \leq k_2(a^2 + b^2) = k_2. \quad (1.3)$$

De este modo las curvaturas normales cubren todo el intervalo  $[k_1, k_2]$ . Además si  $k_1 < k_2$ , resulta que la curvatura mínima solo es alcanzada en  $\gamma'(s_0) = \pm\vec{e}_1$  (es decir cuando  $b = 0$ ) y la máxima solo cuando  $\gamma'(s_0) = \pm\vec{e}_2$  (es decir cuando  $a = 0$ ).  $\square$

*Observación 1.12.* Más adelante, se muestra una forma alternativa de hallar las curvaturas normales en función al ángulo que forme el vector tangente a la curva con el vector principal mínimo; esta es conocida como fórmula de Euler (1.24).

## 1.2 Carta de Monge

**1.13.** Una superficie  $S$  que es vista como el cero de una función  $f(x, y, z) = 0$ , donde  $f$  es una función diferenciable con derivadas parciales continuas de todo orden, es el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

Si  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , por el teorema de la función implícita se sabe que existe un entorno  $D$  del punto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  de manera que en ese entorno se puede ver la superficie como la gráfica de una función  $h(x, y)$  con  $(x, y) \in D$ . Esto es, se tiene una representación paramétrica de la superficie de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D \subset \mathbb{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, h(x, y)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dicha representación, induce lo que se denomina **carta de Monge** o representación explícita de  $S$ .

**Proposición 1.14.** *Sea  $S$  una superficie y  $p \in S$ , un punto, donde  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  son los vectores principales en  $p$ , de tal manera que  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, N(p)\}$  forme una base ortonormal positiva. Por una traslación y orientación de la superficie se puede asumir que:*

$$p = (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad N(p) = (0, 0, 1).$$

Entonces, cerca a  $p = (0, 0, 0)$  la superficie es el gráfico de una función  $z = h(x, y)$ , definida por

$$z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \text{términos de grado mayor},$$

donde  $h : V \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  es suave y  $h(0, 0) = 0$ . Con esta función  $h$ , la carta inducida por (1.4) se denomina **carta de Monge**.

*Demostración.* La serie de Taylor de grado 2, para la función  $h : V^2 \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  (dado por el teorema de la función implícita) alrededor del  $(0, 0)$  es:

$$\begin{aligned} z &= h(0, 0) + h_x(0, 0)x + h_y(0, 0)y + \frac{1}{2}h_{xx}(0, 0)x^2 + h_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}h_{yy}(0, 0)y^2 + \\ &\quad + \text{términos de grado mayor.} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Al considerar la representación dada en la ecuación (1.4), con  $p = (0, 0, 0)$  y  $N(p) = (0, 0, 1)$ , la superficie puede ser expresada como el gráfico de una función diferenciable  $z = h(u, v)$ .

Así, la carta inducida

$$(u, v)^{-1} = \Phi : \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

satisface  $\Phi(u, v) = (u, v, h(u, v))$ . Sean

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \Phi_u = (1, 0, h_u), \\ \vec{v}_2 &= \Phi_v = (0, 1, h_v), \\ \Rightarrow N &= \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} \quad (\text{vea (A.2)}), \end{aligned}$$

Al elegir

$$N(p) = (0, 0, 1) \Rightarrow h_u = h_v = 0, \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 0, 0) = \vec{e}_1, \\ \vec{v}_2 = (0, 1, 0) = \vec{e}_2. \end{cases}$$

A fin de simplificar los cálculos, considere las coordenadas  $N = (N^1, N^2, N^3)$  :

$$\begin{aligned} N^1 &= -\frac{h_u}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \\ N^2 &= -\frac{h_v}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \\ N^3 &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_u^1 &= \frac{-(1 + h_v^2)h_{uu} + h_u h_v h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}, \\ N_u^2 &= \frac{-(1 + h_u^2)h_{uv} + h_v h_u h_{uu}}{1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}, \text{ y} \\ N_u^3 &= \frac{-(h_u h_{uu} + h_v h_{uv})}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}; \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_v^1 &= \frac{-(1 + h_v^2)h_{uv} + h_u h_v h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}, \\ N_v^2 &= \frac{-(1 + h_u^2)h_{vv} + h_u h_v h_{uv}}{1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}, \\ N_v^3 &= \frac{-(h_u h_{uv} + h_v h_{vv})}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Con esto, el Jacobiano de  $N$  para  $u = 0$  y  $v = 0$ , es

$$DN_p = \begin{bmatrix} -h_{uu}(0, 0) & -h_{uv}(0, 0) \\ -h_{uv}(0, 0) & -h_{vv}(0, 0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Por otro lado, un vector  $v \in T_p S \subset \mathbb{E}^3$ , en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de  $T_p S$ , se escribe  $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ , donde  $a$  y  $b \in \mathbb{E}$ ; es decir en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ,  $\vec{v} = (a, b)$ . De modo que si  $\vec{v} = \vec{e}_1$ . Entonces de la proposición 1.2 y de la ecuación 1.6, se obtiene:

$$\begin{aligned} -k_1 \vec{e}_1 &= DN_p(\vec{e}_1) = -h_{uu}(0,0)\vec{e}_1 - h_{uv}(0,0)\vec{e}_2, \\ \Rightarrow k_1 &= h_{uu}(0,0) \quad \wedge \quad h_{uv}(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} -k_2 \vec{e}_2 &= DN_p(\vec{e}_2) = -h_{uv}(0,0)\vec{e}_1 - h_{vv}(0,0)\vec{e}_2, \\ \Rightarrow h_{uv}(0,0) &= 0 \quad \wedge \quad k_2 = h_{vv}(0,0). \end{aligned}$$

Finalmente, la prueba concluye al sustituir lo obtenido en el Polinomio de Taylor.  $\square$

*Observación 1.15.* La matriz Hessiana de la función (para mayores detalles vea [Zor09])

$$z = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2 + \text{término de grado mayor},$$

para  $x = 0$  y  $y = 0$  es

$$H_z(0,0) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

De aquí,  $\Delta H_z(0,0) = k_1 k_2$ . Y con ello,

Si  $\Delta H_z(0,0) > 0 \Rightarrow p = (0,0,0)$  es un extremo máximo o mínimo relativo, dependiendo del signo de  $k_1$ .

Si  $\Delta H_z(0,0) < 0 \Rightarrow p = (0,0,0)$  es un punto silla.

### 1.3 Curvaturas principales y sus vectores asociados

Inicialmente se estudia el ángulo entre dos curvas para caracterizar las curvas principales.

**1.16.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas en la superficie que se interceptan en un punto  $p \in S$ . Si  $\vec{w}_i$ ,  $i = 1, 2$  es el vector tangente a  $C_i$  en  $p$ . Entonces el **ángulo**  $\theta$  que forman las dos curvas es el ángulo que forman sus respectivas rectas tangentes en  $p$ . Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_1\| \|\vec{w}_2\|} = \frac{I_p(\vec{w}_1, \vec{w}_2)}{I_p(\vec{w}_1, \vec{w}_1)^{1/2} I_p(\vec{w}_2, \vec{w}_2)^{1/2}},$$

de aquí, las curvas  $C_1$  y  $C_2$  **son ortogonales** si  $\theta = \pi/2$ . Cuando se elige  $C_1 = \Phi(u, v_0)$  y  $C_2 = \Phi(u_0, v)$  como las curvas paramétricas (vea Figura A.4) sus vectores tangentes asociados  $\vec{w}_1 = (1, 0) = \Phi_u$ , y  $\vec{w}_2 = (0, 1) = \Phi_v$  muestran<sup>2</sup> que

$$\cos \theta = \frac{F}{EG}.$$

<sup>2</sup>En la primera forma fundamental (vea **A.14**), use  $\vec{w}_1 = (1)\Phi_u + (0)\Phi_v$  y  $\vec{w}_2 = (0)\Phi_u + (1)\Phi_v$ .

Por tanto,

$$F = 0 \Leftrightarrow C_1 = \Phi(u, v_0) \text{ y } C_2 = \Phi(u_0, v) \text{ son ortogonales.}$$

**1.17.** La curvatura normal en la dirección de  $\vec{v} = \gamma'(t)$ , con  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , se puede calcular (vea **A.31**) como:

$$k_n(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = \frac{e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2}{E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2}.$$

Por lo tanto,

$$k_n\left(1, \frac{\dot{v}}{\dot{u}}\right) = \frac{e + 2f\frac{\dot{v}}{\dot{u}} + g\frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2}}{E + 2F\frac{\dot{v}}{\dot{u}} + G\frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2}},$$

y

$$k_n\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}, 1\right) = \frac{e\frac{\dot{u}^2}{\dot{v}^2} + 2f\frac{\dot{u}}{\dot{v}} + g}{E\frac{\dot{u}^2}{\dot{v}^2} + 2F\frac{\dot{u}}{\dot{v}} + G}.$$

En consecuencia, en un punto umbílico  $p \in S$ , donde sus direcciones son iguales, se obtiene que

$$k_n = \frac{e}{E} = \frac{g}{G}. \quad (1.7)$$

*Observación 1.18.* A partir de **1.17**, es fácil ver que en un punto umbílico  $p$ , las formas fundamentales son proporcionales; esto es

$$II_p(\vec{v}) = k_n(\vec{v})I_p(\vec{v}) = k_n I_p(\vec{v}), \text{ para todo } \vec{v} \in T_p S.$$

Como la segunda forma fundamental es definida en términos de  $-DN$ , se tiene que si  $p$  es un punto umbílico, entonces  $-DN_p/T_p S$  es un múltiplo por un factor  $k = k_1 = k_2$  del operador identidad en  $T_p S$ . Por tanto, en un punto umbílico la curvatura normal es igual en todas las direcciones, y todas las direcciones son principales (de acuerdo con **1.4**).

### 1.3.1 Ecuación de los vectores principales.

**1.19.** Sea  $p \in S$ . Elijamos un vector  $\vec{v} \in T_p S$  con  $\|\vec{v}\| = 1$ ; que en la base  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  de  $T_p S$  se expresa  $\vec{v} = \overrightarrow{(a, b)}$  (vea **A.13**). La curvatura normal a la superficie en  $p$ , en función del vector  $\overrightarrow{(a, b)}$  esta dado por (vea **A.31**)

$$k_n(\overrightarrow{(a, b)}) = \frac{II_p(\overrightarrow{(a, b)})}{I_p(\overrightarrow{(a, b)})} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

Como la función curvatura es continua y además está restringida a  $\mathbb{S}^1$ , entonces

$$0 = \frac{\partial k_n}{\partial a}(\overrightarrow{(a, b)}) = \frac{2}{I_p(\overrightarrow{(a, b)})^2} ((ea + fb) - (Ea + Fb)k_n),$$

$$0 = \frac{\partial k_n}{\partial b}(\overrightarrow{(a, b)}) = \frac{2}{I_p(\overrightarrow{(a, b)})^2} ((fa + gb) - (Fa + Gb)k_n).$$

Por ello, los vectores principales deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ea + fb = (Ea + Fb)k_n \\ fa + gb = (Fa + Gb)k_n. \end{cases} \quad (1.8)$$

Despejando  $k_n$  en ambas ecuaciones, se obtiene la triple igualdad

$$k_n = \frac{ea + fb}{Ea + Fb} = \frac{fa + gb}{Fa + Gb}. \quad (1.9)$$

Por tanto, para que un vector  $\overrightarrow{(a, b)} \in T_p S$  sea un vector principal debe satisfacer

$$(Fg - Gf)b^2 + (Eg - Ge)ab + (Ef - Fe)a^2 = 0, \quad (1.10)$$

que es lo mismo a decir que

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad (1.11)$$

Hay que notar que la ecuación (1.10) desaparece para el caso de puntos umbílicos; a consecuencia de lo visto en **1.17** y lo que se verá en **1.24**.

*Observación 1.20.* Aprovechando la ecuación (1.10), se establece otra forma alternativa de probar que los vectores principales son ortogonales (vea **A.18**). En efecto, si se opta por la dirección  $\overrightarrow{(1, \lambda = a/b)}$ , entonces la ecuación (1.10) se escribe como un polinomio en  $\lambda$ ,

$$P(\lambda) = (Fg - Gf)\lambda^2 + (Eg - Ge)\lambda + (Ef - Fe) = 0.$$

Si  $Fg - Gf \neq 0$ , con las soluciones  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  del polinomio  $P(\lambda)$ , se tienen dos vectores principales  $\overrightarrow{(1, \lambda_1)}$  y  $\overrightarrow{(1, \lambda_2)}$ . Estos dos vectores son ortogonales, pues

$$\begin{aligned} I_p(\overrightarrow{(1, \lambda_1)}, \overrightarrow{(1, \lambda_2)}) &= E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2, \\ &= E + F \frac{gE - Ge}{Fg - Gf} + G \frac{Ef - Fe}{Fg - Gf} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A su vez, son los autovectores de  $-DN_p$  en la base  $\{\phi_u, \phi_v\}$  de  $T_p S$  (como en la proposición 1.2).

**Ejemplo 1.21.** Para el siguiente ejemplo, considere la parametrización de la esfera en coordenadas esféricas:

$$\Phi(u, v) = (r \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \cos(v)), \quad (1.12)$$

donde  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, \pi]$  y  $r > 0$ .

- En la esfera  $\mathbb{S}^r$  de radio  $r$  del ejemplo A.16, consideremos un vector  $\overrightarrow{(a,b)} \in T_pS$ , son  $a^2 + b^2 = 1$ , siendo  $p = (0, r, 0)$  y  $\{\phi_u = (r, 0, 0), \phi_v = (0, 0, -r)\}$  es la base que genera  $T_pS$ . Se tiene además, que la normal unitaria en ese punto es  $N(0, r, 0) = (0, 1, 0)$ , y los coeficientes de las formas fundamentales son:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad e = -r, \quad f = 0 \quad y \quad g = -r.$$

Reemplazando en la ecuación (1.10), se tiene

$$(Eg - Ge)ab = (-r^3 + r^3)ab = 0.$$

Por tanto,  $(a, b)$  pueden asumir cualquier vector unitario. De aquí, el porqué cualquier vector unitario  $\overrightarrow{(a,b)} \in T_pS$ , es una dirección principal.

- Análogamente, en cilindro del ejemplo A.17, consideremos un vector  $\overrightarrow{(a,b)} \in T_pS$ , donde  $p = (0, r, 0)$  y  $\{\phi_u = (1, 0, 0), \phi_v = (0, 0, 1)\}$  es la base que genera  $T_pS$ . Además, los coeficientes de las formas fundamentales son (vea 1.10):

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad e = 0, \quad f = 0 \quad y \quad g = \frac{1}{r}.$$

Reemplazando en la ecuación (1.10), se tiene

$$E.g.a.b = \frac{1}{r}ab = 0.$$

Por tanto, se tiene que  $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(1,0)}$  ó  $\overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(0,1)}$ . Así, se tienen dos direcciones principales en el espacio tangente al cilindro en el punto  $p = (0, r, 0)$ .

### 1.3.2 Ecuación de las curvaturas principales

1.22. Si en 1.19 elegimos la dirección del vector  $\overrightarrow{(1,\lambda)}$ , la ecuación (1.9) se escribe

$$k_n(\overrightarrow{(1,\lambda)}) = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda} = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda}.$$

De esto último, obtenemos el sistema en la variable  $k_n$

$$\begin{cases} (e + f\lambda) - k_n(E + F\lambda) = 0; \\ (f + g\lambda) - k_n(F + G\lambda) = 0. \end{cases}$$

Y después de despejar y eliminar  $\lambda$  se obtiene la ecuación que buscamos

$$(EG - F^2)k_n^2 - (Eg + Ge - 2Ff)k_n + eg - f^2 = 0. \quad (1.13)$$

cuyas soluciones  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas principales<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Note que a partir de las ecuaciones (1.13) y (1.2), se obtiene directamente la curvatura Media y Gaussiana obtenido en A.23, esto es:

$$H(p) = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)} \quad y \quad K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

**Ejemplo 1.23.** Para el siguiente ejemplo, considere la parametrización de la esfera dada en la ecuación (1.12).

- En la esfera  $\mathbb{S}^r$  de radio  $r$ , al reemplazar los coeficientes de las formas fundamentales:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad e = -r, \quad f = 0 \quad y \quad g = -r,$$

en la ecuación (1.13), se tiene

$$EGk_n^2 - (Eg + Ge)k_n + eg - f^2 = r^4k_n^2 + 2r^3k_n + r^2 = 0.$$

Como  $r > 0$ , las curvaturas principales son las raíces de la ecuación  $(rk_n + 1)^2 = 0$ . Así, las curvaturas principales resultan ser iguales,  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}$ .

- Análogamente, en cilindro circular recto, al reemplazar los coeficientes de las formas fundamentales:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad e = 0, \quad f = 0 \quad y \quad g = \frac{1}{r},$$

en la ecuación (1.13), se tiene

$$k_n^2 - \frac{1}{r}k_n = 0.$$

Así, las curvaturas principales son  $k_1 = 0$  y  $k_2 = \frac{1}{r}$ .

## 1.4 Fórmula de Euler

**1.24.** Consideremos una representación paramétrica regular  $\Phi$  en que las líneas de curvatura sean las líneas paramétricas, es decir,  $\Phi(u_0, v)$  y  $\Phi(u, v_0)$  son las líneas de curvatura en el punto  $\Phi(u_0, v_0)$ . Por tanto,  $\overrightarrow{(1, 0)}$  y  $\overrightarrow{(0, 1)}$  son las direcciones principales. Y las curvaturas principales son

$$k_1 = \frac{II_p(\overrightarrow{(1, 0)})}{I_p(\overrightarrow{(1, 0)})} = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{II_p(\overrightarrow{(0, 1)})}{I_p(\overrightarrow{(0, 1)})} = \frac{g}{G}.$$

En la ecuación de las líneas principales

$$\begin{vmatrix} (\dot{v}(t))^2 & -\dot{u}(t)\dot{v}(t) & (\dot{u}(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

$F = 0$  (pues las líneas principales son ortogonales), y como  $\overrightarrow{(1, 0)}$  es una dirección principal.

Se tiene

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = Ef.$$

También como  $\overrightarrow{(0, 1)}$  es la otra dirección principal, se tiene

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = -Gf.$$

Pero  $G > 0$  y  $E > 0$  (ecuación A.4), entonces se concluye que

$$F = 0^4.$$

Por tanto, la curvatura normal en la dirección de un vector  $\overrightarrow{(m, n)}$  es

$$\begin{aligned} k_n(\overrightarrow{(m, n)}) &= \frac{II_p(\overrightarrow{(m, n)})}{I_p(\overrightarrow{(m, n)})} = \frac{em^2 + gn^2}{Em^2 + Gn^2} \\ &= \frac{e}{E} \frac{em^2}{Em^2 + Gn^2} + \frac{g}{G} \frac{gn^2}{Em^2 + Gn^2}, \end{aligned}$$

Y si  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $\overrightarrow{(m, n)}$  con el vector  $\overrightarrow{(1, 0)}$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{I_p(\overrightarrow{(m, n)}, \overrightarrow{(1, 0)})}{I_p(\overrightarrow{(m, n)})I_p(\overrightarrow{(1, 0)})} = \frac{Em^2}{Em^2 + Gn^2}, \\ \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = \frac{Gn^2}{Em^2 + Gn^2}. \end{aligned}$$

Y con ello, se obtiene la **fórmula de Euler**

$$k_n(\overrightarrow{(m, n)}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

## 1.5 Campos de direcciones principales.

**Definición 1.25.** Un **campo vectorial** en un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$  es un aplicación que asigna a cada  $q \in V$  un vector  $w(q) \in \mathbb{R}^2$ . Se dice que el campo vectorial  $w$  es diferenciable si escribiendo  $q = (u, v)$  y  $w(q) = (a(u, v), b(u, v))$  las funciones  $a$  y  $b$  serán diferenciables en  $V$ . Un **campo de direcciones**  $R$  en un conjunto abierto  $V \subset \mathbb{R}^2$  es una correspondencia que asigna a cada  $q \in V$  una recta  $R(q)$  en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por  $q$ . Se dice que  $R$  es diferenciable en  $q$  si existe un campo vectorial diferenciable y no nulo  $w$ , definido en un entorno  $V_q \subset V$  de  $q$  tal que para cada  $\bar{q} \in V_q$ ,  $w(\bar{q}) \neq 0$  es una base de  $R(\bar{q})$ ;  $R$  es diferenciable en  $V$  si es diferenciable en cada punto  $q \in V$ .

*Observación 1.26. (No siempre existe un campo diferenciable.)* A cada campo vectorial diferenciable y no nulo  $w$  en  $V \subset \mathbb{R}^2$  le corresponde un campo de direcciones dado por  $R(q) = \text{Recta generada por } w(q), q \in V$ . También, por la propia definición, cada

<sup>4</sup> Por tanto,  $f = 0 = f$  es una condición necesaria y suficiente para que un vector sea principal.

campo de direcciones diferenciable da lugar, localmente, a un campo vectorial diferenciable. Sin embargo, no siempre existe un campo diferenciable asociado a un campo de direcciones. Por ejemplo, consideremos el campo de direcciones en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dado por las rectas tangentes a las curvas de la figura 1.4; vemos que no es posible orientar a las curvas a fin de obtener un campo vectorial diferenciable tangente a cada uno de ellos.

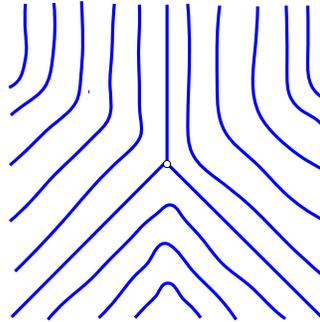


Figura 1.4: Un campo de direcciones no orientable en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 1.27.** Para una superficie  $S$ , considere  $S \setminus U_S$  como el conjunto donde en cada uno de sus puntos existe un par de direcciones bien definidas, que además son ortogonales. Para esto basta considerar  $U_S = \{\text{conjunto de puntos umbílicos}\}$  y las direcciones principales. Los vectores principales  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  dada en la proposición 1.2 satisfacen  $k_1(p) = II_p(\vec{e}_1) < II_p(\vec{e}_2) = k_2(p)$ . Luego, las líneas que se generan

$$L_1(p) = R(\pm \vec{e}_1) \quad \text{y} \quad L_2(p) = R(\pm \vec{e}_2),$$

están bien determinadas; y son llamadas las **direcciones principales mínima y máxima** de  $S$  en  $p$ , respectivamente. Sobre estas líneas se puede definir campos de línea suaves

$$L_1 : p \longrightarrow L_1(p) \quad \text{y} \quad L_2 : p \longrightarrow L_2(p),$$

mutuamente ortogonales<sup>5</sup> llamados **campo de línea mínima y campo de línea máxima** de  $S$  en  $p$ , respectivamente.

**1.28.** Si  $\overrightarrow{(a, b)} \in T_p S$  es un vector principal, la ecuación (1.10) caracteriza las pendientes  $a/b$  o  $b/a$  de estos campos de líneas como funciones suaves en el dominio de las cartas  $(u, v)$  de  $S \setminus U_S$ . Los campos de línea  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  del párrafo anterior coinciden con los autoespacios de el operador  $-DN_p/T_p S$ , correspondientes a los autovalores  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ . Esto es por causa de la simetría de la segunda forma y de su expresión en términos de  $DN_p$ . Esto último es conocido como la **ecuación de Rodrigues**:

$$(DN + kI)\vec{v} = \vec{0}, \tag{1.15}$$

<sup>5</sup>Esto sucede cuando el punto  $p$  es no umbílico.

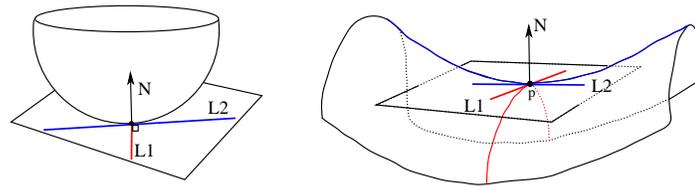


Figura 1.5: Direcciones principales  $L_1$  y  $L_2$ .

que caracteriza a los vectores  $\vec{v}$ , y curvatura principales  $k$  (vea observación 1.20). En  $S \setminus U_S$  las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  son suaves; y en todo  $S$  son continuas. Al hacer una interpretación de los autovalores (curvaturas) del sistema dado por la ecuación (1.15), resulta que:

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad \text{y} \quad k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} ,$$

donde  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  y  $K = k_1 \cdot k_2$  son la curvatura Media y Gaussiana, respectivamente.

*Observación 1.29.* Al analizar el discriminante  $H^2 - K = [\frac{(k_1 - k_2)}{2}]^2$ , vemos que los puntos umbílicos están caracterizado por los ceros de esta función no negativa (vea **1.3**).



## Capítulo 2

# Configuraciones principales

*La configuración principal reúne las propiedades cualitativas de las foliaciones principales en una superficie y representa la forma en que sus líneas se aproximan al conjunto umbilical. Naturalmente esto es análogo al retrato de fase de un campo vectorial sobre una superficie.*

### 2.1 Foliaciones Principales

**2.1.** Una **curva integral** del campo de línea  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) es llamada una **curva principal mínima**<sup>1</sup> (resp. una máxima) de  $S$ . Es decir una curva regular  $\gamma$  en  $S \setminus U_S$  que cumple:

- (a) en cada uno de sus puntos es tangente a  $L_1$  (resp. a  $L_2$ ). Es decir, el vector tangente  $\gamma'(t)$  genera  $L_1$  (resp.  $L_2$ ), y
- (b) si existe otra curva con esta propiedad, entonces sucede que  $\gamma$  la contiene.

La condición de tangencia de una curva integral  $\gamma$  a un campo de línea  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , es también expresado diciendo que, cuando está parametrizada por la longitud de arco, esta es una curva solución del campo vectorial local  $\vec{e}_i$ . Es decir, es una curva solución de la ecuación diferencial

$$\gamma' = \vec{e}_i(\gamma), \quad i = 1, 2.$$

En términos de una carta  $(u, v)$ , en donde la curva es localmente escrita de la forma  $\gamma = (u(t), v(t)) \subset S \setminus U_S$  (vea figura A.4). La condición para ser una curva principal está caracterizada por la ecuación (1.10)

$$(Fg - Gf)(\dot{v})^2 + (Eg - Ge)\dot{u}\dot{v} + (Ef - Fe)(\dot{u})^2 = 0. \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Si la forma de la ecuación diferencial es la que origina las líneas de curvatura, entonces la curva integral coincide con la línea de curvatura, al menos en su parte suave.

**2.2.** Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales; por cada punto  $p \in S \setminus U_S$  se tiene una única curva principal mínima  $\gamma_1(p)$  y una única curva principal máxima  $\gamma_2(p)$ , ambos en  $S \setminus U_S$  y con la propiedad **(b)** de **2.1**. Y por el teorema de dependencia suave, con parámetros y condiciones iniciales; si la curva  $\gamma_1 = \gamma_1(p, s)$  está orientada y parametrizada por la longitud de arco  $s$ , empezando en  $p$ , en su intervalo máximo de definición  $\mathcal{J}(p) = (\alpha_-(p), \alpha_+(p))$ . Entonces para cualquier subintervalo compacto  $K$  de  $\mathcal{J}(p)$ , se tiene una vecindad  $V(p)$  de  $p$  en  $S$  tal que la curva principal mínima  $\gamma_1(q) = \gamma_1(q, s)$  en  $V$  empezando en  $q$  puede ser orientada y parametrizada por la longitud de arco empezando en  $q$ , así su intervalo máximo de definición  $\mathcal{J}(q) = (\alpha_-(q), \alpha_+(q))$  contiene al intervalo  $K$  y la aplicación  $\gamma_1 : V \times K \rightarrow \gamma_1(q, s)$  es suave. Lo mismo sucede con la curva máxima  $\gamma_2$ .

**Definición 2.3.** La familia de curvas principales máximas y mínimas serán llamadas respectivamente las **foliaciones principales máximas y mínimas de  $S \setminus U_S$**  y serán denotadas por  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente.

*Observación 2.4.* Note que las foliaciones principales son definidas solo en  $S \setminus U_S$ . Los puntos umbílicos forman la parte singular de las foliaciones.

**Definición 2.5.** Una curva regular conexa  $C \subset S$  es llamada una **línea de curvatura** si en cada punto  $q \in C$ , la respectiva recta tangente es una dirección principal.

**Ejemplo 2.6.** Una circunferencia máxima en  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  es un ejemplo de línea de curvatura.

**2.7.** En  $S \setminus U_S$  los vectores principales  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  pueden ser elegidos a fin de definir campos vectoriales suaves (vea ejemplo 1.27). La ecuación (1.10) determina las componentes de estos campos vectoriales en el dominio de sus cartas. Los vectores principales, sin embargo no pueden definir globalmente campos vectoriales; la razón es que los campos de línea  $L_i^+ = R^+(\vec{e}_i)$ ,  $i = 1, 2$  generados por estos vectores principales pierden su orientabilidad alrededor de los puntos umbílicos (vea figura 1.4). Por esta razón las formulaciones globales son hechas en términos de los campos de línea  $L_1$  y  $L_2$ . Sin embargo, la prueba de muchos resultados serán reducidos localmente a los vectores principales  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  o directamente a la ecuación (1.10).

### 2.1.1 Ecuaciones diferenciales para las líneas Principales

**Proposición 2.8.** La curva regular  $\gamma = \gamma(s)$ , con  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , es una línea de curvatura en la superficie  $S$  si y solamente si

$$[\gamma', N, DN] = 0;$$

i.e.  $(DN + kI)\gamma' = \vec{0}$ .

*Demostración.*  $[\Leftarrow]$  : Si la condición  $[\gamma', N, DN] = 0$  es verdad, entonces se probará que la curva  $\gamma = \gamma(s)$  es una línea de curvatura en la superficie  $S$ . Para ello, note que

$$[\gamma', N, DN] = [\gamma', DN, N] = 0 \Rightarrow \langle \gamma' \times DN, N \rangle = 0. \quad (2.2)$$

De aquí,  $\gamma' \times DN = \vec{0}$ ; es decir para cada punto de  $\gamma$  se tiene que  $\gamma'(s)$  esta contenida en una dirección principal y por tanto,  $\gamma'(s)$  es un autovector de  $DN_{\gamma(s)}$ ; esto es,  $DN_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = -k\gamma'(s)$ , con lo cual se tiene que  $\gamma$  es una línea de curvatura.

$[\Rightarrow]$  Si  $\gamma = \gamma(s)$  es una línea de curvatura de la superficie  $S$ , entonces

$$(DN + kI)\gamma' = \vec{0}. \quad (1.15)$$

De aquí se obtiene  $DN\gamma' = -k\gamma'$ , para luego sustituir en  $[\gamma', N, DN] = [\gamma', DN, N] = 0$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

**2.9.** Las ecuaciones diferenciales más comunes para las líneas principales son las siguientes:

- a. **Forma implícita:** Para  $p \in S$  y  $dp = (dx, dy, dz)$ , la interpretación de los autoespacios de las líneas principales dados por la fórmula de Rodrigues (1.15), pueden ser establecidos como

$$\langle N(p), DN_p(dp) \wedge dp \rangle = 0, \quad \langle N(p), dp \rangle = 0.$$

De manera más explícita, para una superficie  $S = \{f = 0\}$ , la igualdad anterior es equivalente a

$$\langle \nabla f(p), D\nabla f(p) \cdot (dp) \wedge dp \rangle = 0, \quad \langle \nabla f(p), dp \rangle = 0.$$

- b. **Para una carta local:** Por lo visto en 1.19, dada una carta local  $(u, v)$  para  $S$ , la condición que tiene que satisfacer las componentes  $du, dv$  de una dirección principal esta caracterizada por

$$(Fg - Gf)dv^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)du^2 = 0. \quad (2.3)$$

- c. **Para una carta de Monge:** De acuerdo a la sección 1.2, usando la carta de Monge  $(x, y)$ , con  $(x, y)^{-1} = \Phi(x, y)$ , en donde la superficie puede ser expresada como el gráfico de la función  $z = h(x, y)$ , los coeficientes de las formas fundamentales  $I$  y  $II$  para superficie están dadas por (vea ejemplo A.20):

$$E = \langle \Phi_x, \Phi_x \rangle = 1 + h_x^2, \quad F = \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle = h_x h_y, \quad G = \langle \Phi_y, \Phi_y \rangle = 1 + h_y^2,$$

$$e = \langle \Phi_{xx}, N \rangle = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \quad f = \langle \Phi_{xy}, N \rangle = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \quad y$$

$$g = \langle \Phi_{yy}, N \rangle = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}.$$

Por tanto, después de sustituir los coeficientes en la ecuación (2.3), la ecuación diferencial de las líneas principales se convierte en

$$A dy^2 + B dx dy + C dx^2 = 0, \quad (2.4)$$

donde:

$$A = -(1 + h_y^2)h_{xy} + h_x h_y h_{yy},$$

$$B = (1 + h_x^2)h_{yy} - (1 + h_y^2)h_{xx} \quad \text{y}$$

$$C = (1 + h_x^2)h_{xy} - h_x h_y h_{xx}.$$

**Teorema 2.10. (TERQUEM-JOACHIMSTHAL.)** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies no disjuntas en  $\mathbb{E}^3$ ; y  $c$  una curva en  $S_1 \cap S_2$ , tal que  $c$  es línea de curvatura en  $S_1$ . Entonces  $c$  es un línea de curvatura en  $S_2$  si y sólo si  $S_1$  y  $S_2$  se interceptan en un ángulo constante a lo largo de  $c$  (es decir, las normales de  $S_1$  y  $S_2$  tienen el mismo ángulo a lo largo de  $c$ ).

*Demostración.* Si  $N_i$  es el campo normal unitario sobre  $S_i$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle &= \left\langle \frac{d}{ds} N_1(c(s)), N_2(c(s)) \right\rangle + \left\langle N_1(c(s)), \frac{d}{ds} N_2(c(s)) \right\rangle, \\ &= \left\langle -k(s) \frac{dc}{ds}, N_2(c(s)) \right\rangle + \left\langle N_1(c(s)), \frac{d}{ds} N_2(c(s)) \right\rangle \\ &\quad \text{por ser } c \text{ línea de curvatura de } S_1, \\ &= 0 + \left\langle N_1(c(s)), \frac{d}{ds} N_2(c(s)) \right\rangle, \end{aligned}$$

por ser  $c$  una curva en  $S_2$ .

[ $\Rightarrow$ ] Si  $c$  es una línea de curvatura en  $S_2$  entonces por  $c$  una curva en  $S_1$ , se tiene que el segundo lado de la igualdad anterior es igual a 0, y por eso  $\langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle$  es constante.

[ $\Leftarrow$ ] Si  $S_1$  y  $S_2$  se interceptan en un ángulo constante a lo largo de  $c$ , es decir si  $\langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle$  tiene derivada 0, entonces  $dN_2(c(s))/ds$  es perpendicular a  $N_1$ . Por otro lado  $dN_2(c(s))/ds$  también es perpendicular a  $N_2$ . Si  $N_1$  y  $N_2$  son linealmente independientes entonces  $dN_2(c(s))/ds$  es un múltiplo de  $c'(s)^2$ , y por la igualdad de Rodrigues,  $c$  es una línea de curvatura de  $S_2$ . Si  $N_1$  y  $N_2$  son linealmente dependientes entonces  $N_2(c(s)) = \pm N_1(c(s))$  para todo  $s$ , y por eso  $c$  también es una línea de curvatura de  $S_2$ .  $\square$

<sup>2</sup>pues de lo contrario, no se cumpliría la ortogonalidad de  $dN_2(c(s))/ds$  con  $N_1$  y  $N_2$

## 2.2 Configuraciones Principales.

**Definición 2.11.** La *configuración principal* en una superficie  $S$  es definida por la terna  $P_S = P(U_S, F_1, F_2)$ , donde  $U_S$  es el conjunto de puntos umbílicos,  $F_1$  y  $F_2$  denotan respectivamente las foliaciones principales mínima y máxima en  $S \setminus U_S$ . Dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  con configuraciones principales  $P(U(1), U(1), U(1))$  y  $P(U(2), U(2), U(2))$  tienen la misma estructura cualitativa, con respecto a las foliaciones principales, si son *P-equivalentes* (principally equivalent): es decir, si existe un homeomorfismo  $H : S_1 \rightarrow S_2$ , que envía  $U(1)$  en  $U(2)$ , las líneas de  $F_1(1)$  en  $F_1(2)$ , y las líneas de  $F_2(1)$  en  $F_2(2)$ . A dicho homeomorfismo  $H$  se le llama una *P-equivalencia* (principal equivalence) entre  $S_1$  y  $S_2$ .

**Ejemplo 2.12.** Las configuraciones principales triviales se obtienen de la esfera  $\mathbb{S}^2$  y del plano  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ , pues en cada una de estas superficies todos sus puntos son umbílicos (vea ejemplos 1.5 y A.30). Por tanto, sus configuraciones principales se reducen a  $U_S$ .

**Proposición 2.13.** Si  $S \subset \mathbb{E}^3$  es una superficie conexa, en donde todos sus puntos son umbílicos, entonces  $S$  es parte de un plano o una esfera.

*Demostración.* Sea  $p \in S$  y  $\Phi(u, v)$  una parametrización de  $S$  en  $p$ , tal que  $V = \Phi(U)$ ,  $U \subset \mathbb{E}^2$ , sea conexo. Como todo  $q \in V$  es umbílico, tenemos que para todo

$$w = c_1 \Phi_u + c_2 \Phi_v \in T_p S, \quad dN(w) = \lambda(q)w,$$

donde  $\lambda = \lambda(q)$  es una función real, diferenciable en  $V$ . Como todo punto es umbílico, es lógico concluir que  $\lambda(q)$  es constante. En efecto, de las igualdades dadas arriba, se tiene que

$$c_1 N_u + c_2 N_v = c_1 \lambda \Phi_u + c_2 \lambda \Phi_v, \quad \text{con } \lambda = \lambda(u, v),$$

de donde, por la arbitrariedad de  $w$  se sigue que

$$N_u = \lambda \Phi_u, \quad N_v = \lambda \Phi_v,$$

derivando respecto a  $v$  y  $u$  respectivamente se tiene

$$\begin{aligned} N_{uv} &= \lambda_v \Phi_u + \lambda \Phi_{uv}, \\ N_{vu} &= \lambda_u \Phi_v + \lambda \Phi_{vu}. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro estas dos últimas igualdades se obtiene

$$0 = \lambda_v \Phi_u - \lambda_u \Phi_v.$$

Como  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  es una base de  $T_p(S)$ , se sigue que

$$\lambda_v = \lambda_u = 0, \quad \forall q \in V,$$

y siendo  $V$  conexa, entonces,  $\lambda = \text{constante}$  en  $V$ . Ahora, si  $\lambda = 0$ , entonces  $N_u = N_v = 0$ . Por tanto,  $N = \text{constante}$  para todo  $q \in V$ , y así, todos los puntos  $\Phi(u, v)$  de  $V$  están en el mismo plano. Si  $\lambda \neq 0$ , entonces consideremos

$$\Phi(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v) = g(u, v),$$

se tiene que  $g(u, v)$  es constante, pues

$$\left\{ \Phi(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v) \right\}_u = \Phi_u - \frac{1}{\lambda}N_u = 0 = \left\{ \Phi(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v) \right\}_v.$$

Como  $|\Phi(u, v) - g(u, v)|^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ , se sigue que todos los puntos de  $V$  están contenidos en una esfera de centro  $g$  y radio  $\frac{1}{|\lambda|}$ . El teorema está demostrado localmente, esto para una vecindad conexa de un punto  $p \in S$ . Para extender el resultado a todo punto de  $S$ , basta notar que, como  $S$  es conexa, dado otro punto cualquiera  $q \in S$ , existe una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ , con  $g(0) = p$  y  $g(1) = q$ . Para cada punto  $\gamma(t) \in S$  de esa curva, existe una vecindad  $V_t$  de  $S$ , contenida en un plano o en una esfera y tal que la imagen inversa  $\gamma^{-1}(V_t)$  es un intervalo abierto de  $[0, 1]$ . Como  $[0, 1]$  es compacto es posible cubrirlo con un número finito de vecindades  $g^{-1}(V_t)$ . Si para dos tiempos  $t, t_1$  son tales que  $V_t, V_{t_1}$ , están contenidos en planos, entonces están contenidos en el mismo plano y todos los demás puntos de la curva están contenidos en el mismo plano. Esto es debido a la diferenciabilidad de  $S$ . Ahora, si para dos tiempos  $t, t_1$  son tales que  $V_t, V_{t_1}$ , están contenidos en esferas, el mismo argumento demuestra que  $V_t, V_{t_1}$ , están en la misma esfera, y por lo tanto todos los puntos de la curva. □

**Ejemplo 2.14. (Movimientos rígidos)** En  $\mathbb{E}^3$ , un movimiento rígido  $M = T + R$ , donde  $T$  es una traslación y  $R$  es una rotación representada por una matriz ortogonal, para cualquier superficie orientable  $S$ , con normal positiva  $N$ , induce una  $P$ -equivalencia sobre su imagen  $M(S)$ . Cabe indicar que cuando el movimiento rígido la orientación se preserva, y por tanto las curvaturas principales.

**Ejemplo 2.15. (Homotecia)** Sea  $S$  una superficie y  $p \in S$  un punto. Una homotecia  $H_\lambda : S \rightarrow H_\lambda(S)$ , definida por  $H_\lambda(p) = \lambda p$ , es una  $P$ -equivalencia, a pesar de no preservar las curvaturas principales, pues se ven afectados en proporción al valor de  $\lambda$ .

**Ejemplo 2.16. (Traslaciones paralelas)** Sea  $r \in \mathbb{R}$ , y  $S$  una superficie orientable. La traslación paralela  $T_r : S \rightarrow S$ , definida por

$$T_r(p) = p + rN(p),$$

con  $p \in S$ , es una  $P$ -equivalencia de  $S$  sobre su imagen  $S_r$ , a pesar que este caso tampoco se preservan la curvaturas principales. Pero, esto no significa un problema pues para que sea una  $P$ -equivalencia, se necesita que el homeomorfismo preserve las líneas principales.

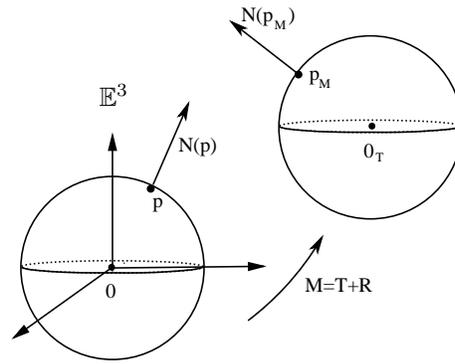


Figura 2.1: Movimiento rígido en la esfera.

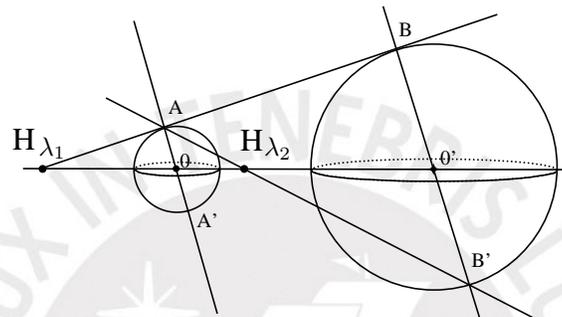


Figura 2.2: Homotecias en la esfera.

**Ejemplo 2.17. (Inversiones)** Sea  $S$  una superficie y  $p \in S$  un punto. La función  $G(p) = \frac{p}{\langle p, p \rangle}$  es llamada una inversión de  $S$  con respecto a la esfera unitaria centrada en  $0$ . Esta función, es un homeomorfismo que preserva las líneas principales; sin embargo invierte la orientación cambiando las foliaciones principales. Por tanto, es un ejemplo de un homeomorfismo que no es una  $P$ -equivalencia.

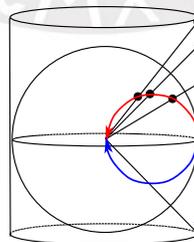


Figura 2.3: Inversión en el cilindro.

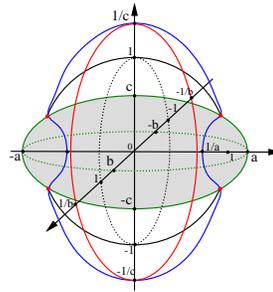


Figura 2.4: Inversión del elipsoide triaxial: con  $1 > a > b > c > 0$ .

## 2.2.1 Sistema triple ortogonal de superficies y superficies regladas

### Sistema triple ortogonal de superficies.

**2.18.** Un resultado interesante sobre líneas de curvatura corresponde a los **triples sistemas ortogonales de superficies**. Estos son triples familias de 1–parámetro de superficies con la propiedad de que en cada punto, los planos tangentes a las superficies de cualquier par de familias son perpendiculares. Algunos ejemplos triviales son los siguientes:

**Ejemplo 2.19.** (*Curvas planas*) Sea  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , cualquier arco regular parametrizada por la longitud de arco  $u$  y con normal positiva  $\mathbf{b}$ , en un plano con normal positiva  $\mathbf{n}(u) = (\gamma'_1, \gamma'_2)(u)$ , i.e.  $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{b}$ , donde  $\gamma' = \mathbf{t}$ . Una cálculo directo prueba que las siguientes superficies:

$T_r$ : tubos de radio  $r > 0$  y centrados en  $\gamma$ ;

$N_u$ : planos normales a  $\gamma$  en  $\gamma(u)$ ;

$A_v$ : superficies regladas generadas por los rayos positivos sobre la normal  $N_u$  en la dirección de el vector unitario

$$\mathbf{a}(u, v) = \cos v \mathbf{n}(u) + \operatorname{sen} v \mathbf{b}.$$

constituyen un sistema ortogonal de superficies.

**Ejemplo 2.20.** Cuando cada familia consiste de los planos paralelos a uno de los ejes coordenados.

**Ejemplo 2.21.** Cuando la primera familia consiste de planos paralelos a el  $(x, y)$ –plano, la segunda consiste de cilindros circulares con el eje  $z$  como eje en común y la tercera consiste de planos que contienen al eje  $z$ .

**Ejemplo 2.22.** Cuando la primera familia consiste de todas las esferas centradas en el 0; la segunda consiste de todos los conos contenidos en  $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ , formados al girar alrededor del eje  $z$  todas las rectas que pasan por el 0; y la tercera consiste de planos que contienen al eje  $z$ .

**2.23. (Sistema de coordenadas Elipsoidal).** Un ejemplo menos trivial es el formado por el conjunto de todas las superficies que satisfacen la ecuación

$$g(\lambda) = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1, \quad 0 < c^2 < b^2 < a^2. \quad (2.5)$$

Observe que cuando  $\lambda < c^2$  se obtiene elipsoides, cuando  $c^2 < \lambda < b^2$  se obtiene hiperboloides de una hoja y para  $b^2 < \lambda < a^2$  se obtiene hiperboloides de dos hojas. Para cualquier  $(x, y, z)$ , con  $x, y, z \neq 0$ , la función que asigna a cada  $\lambda \mapsto g(\lambda) - 1$  es continua excepto en  $a^2, b^2, c^2$ , y un análisis directo muestra que esta función pasa de  $+\infty$  a  $-\infty$ , cuando pasa de la izquierda a la derecha ya sea de  $a^2, b^2$  ó  $c^2$ . Además,  $g(\lambda) - 1 \rightarrow -1$  cuando  $\lambda \rightarrow -\infty$  y al  $+\infty$ . Por tanto, la función que definimos como  $g(\lambda) - 1$  se anula en tres solo en ocasiones:

$$\lambda_1 < c^2, \quad c^2 < \lambda_2 < b^2 \quad y \quad b^2 < \lambda_3 < a^2.$$

Es decir,  $g(\lambda_i) - 1 = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; lo cual puede ser visto como los ceros de una ecuación cúbica en  $\lambda$ . A su vez, si se define una función real  $F$  en variables  $x, y, z$  y  $\lambda$ , como  $F(x, y, z, \lambda) = g(\lambda) - 1$ , con la imagen inversa del valor regular  $0 \in \mathbb{R}$ ,  $F^{-1}(0)$ , se tienen tres superficies bien determinadas. Observe que estas superficies son ortogonales, es decir, para cada punto  $(x, y, z)$  de la superficie  $g(\lambda_i) = 1$ , el vector normal tiene la dirección

$$\nabla F|_{\lambda_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} g(\lambda_i), \frac{\partial}{\partial y} g(\lambda_i), \frac{\partial}{\partial z} g(\lambda_i) \right) = \left( \frac{x}{a^2 - \lambda_i}, \frac{y}{b^2 - \lambda_i}, \frac{z}{c^2 - \lambda_i} \right),$$

con lo cual, en cada punto  $(x, y, z)$  perteneciente a la intersección de las superficies  $g(\lambda_i) = 1$  y  $g(\lambda_j) = 1$ , el producto interno  $\langle \nabla F|_{\lambda_i}, \nabla F|_{\lambda_j} \rangle$  se anula, esto es:

$$\frac{x^2}{(a^2 - \lambda_i)(a^2 - \lambda_j)} + \frac{y^2}{(b^2 - \lambda_i)(b^2 - \lambda_j)} + \frac{z^2}{(c^2 - \lambda_i)(c^2 - \lambda_j)} = \frac{g(\lambda_i) - g(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

Por tanto, el sistema es ortogonal.

*Observación 2.24.* Observe que siempre se puede tener un elipsoide del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en la ecuación 2.5. Ahora, al fijar dicho elipsoide, y hacemos variar las otras dos familias ortogonales, se obtiene sobre el elipsoide un retrato de fase formado por las líneas de curvatura.

**2.25.** Describiremos la configuración principal sobre el elipsoide, trabajando directamente sobre la ecuación diferencial de las líneas principales de curvatura. Consideremos el elipsoide  $\mathbb{E} = f^{-1}(0)$ , donde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad a > b > c.$$

La ecuación diferencial de las líneas principales en su forma implícita esta dada por (vea **2.9**)

$$\langle \nabla f(p), D\nabla f(p) \cdot (dp) \wedge dp \rangle = 0, \quad \langle \nabla f(p), dp \rangle = 0.$$

Aquí,

$$\nabla f(p) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right), \quad D\nabla f(p).(dp) = \left( \frac{2dx}{a^2}, \frac{2dy}{b^2}, \frac{2dz}{c^2} \right) \quad \text{y} \quad dp = (dx, dy, dz).$$

En la carta  $(x, y)$  la ecuación diferencial queda expresada por:

$$-a^2c^2(b^2 - c^2)xydy^2 + (a^2 - c^2)b^2c^2xydx^2 + [b^2c^2(c^2 - a^2)x^2 + c^2a^2(b^2 - c^2)y^2 + a^2b^2c^2(a^2 - b^2)]dxdy = 0. \tag{2.6}$$

Reescribiendo las coordenadas por  $x = Au, y = Bv$ , con  $A > 0, B > 0$ , la ecuación diferencial se reduce a

$$uvdv^2 + (u^2 - v^2 - \lambda^2)dudv - uvdu^2 = 0,$$

donde:

$$A^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)B^2}{b^2(a^2 - c^2)} \quad \text{y} \quad \lambda^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{(a^2 - c^2)B^2}.$$

Para efectos de calcular los puntos umbílicos, se tiene en cuenta que estos están dados por las singularidades de la ecuación diferencial; siendo así, elijamos  $v = 0$ . Con ello, se obtiene que  $(\lambda, 0)$  y  $(-\lambda, 0)$  son singularidades y el intervalo  $\langle -\lambda, \lambda \rangle \times \{0\}$  puede ser considerado como una elipse degenerada. Los intervalos  $\langle -\infty, -\lambda \rangle \times \{0\}$  y  $\langle \lambda, \infty \rangle \times \{0\}$  puede ser considerados como hipérbolas degeneradas (figura2.5). La parametrización explícita para el elipsoide  $\mathbb{E}$ , está dado por:

$$\alpha(u, v) = \left( \pm \sqrt{\frac{M(u, v, a)}{W(a, b, c)}}, \pm \sqrt{\frac{M(u, v, b)}{W(b, a, c)}}, \pm \sqrt{\frac{M(u, v, c)}{W(c, a, b)}} \right),$$

donde,

$$M(u, v, w) = w^2(-u + w^2)(-v + w^2), \quad W(a, b, c) = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2), \\ u \in \langle c^2, b^2 \rangle, \quad \text{y} \quad v \in \langle b^2, a^2 \rangle.$$

Más adelante, estos puntos umbílicos, se clasificadas como del tipo  $D_1$  (vea **3.12**) y son:

$$\left( \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}} \right).$$

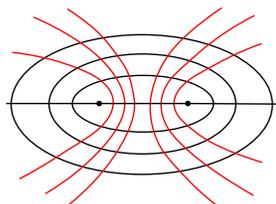


Figura 2.5: Familia ortogonal con foco común. [GS09]

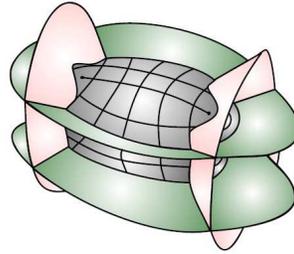


Figura 2.6: Configuración elipsoidal. [GS09]

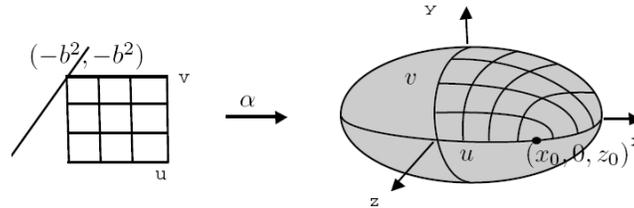


Figura 2.7: Puntos umbílicos en el Elipsoide. [GS09]

**Teorema 2.26.** *Las líneas de intersección de las superficies de un sistema triple ortogonal son las líneas de curvatura de las superficies.*

*Demostración.* Referencia [Spi79, pág.300]. □

**Teorema 2.27.** (Darboux). *Supóngase que dos familias de superficies ortogonales se interceptan a lo largo de una línea de curvatura. Entonces existe una tercera familia de superficies ortogonales a las primeras dos familias.*

*Demostración.* Referencia [GS09]. □

### Superficies regladas.

**2.28.** Una familia uniparamétrica (diferenciable) de rectas  $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$ <sup>3</sup> es una correspondencia que asigna a cada  $t \in I$  un punto  $\alpha(t) \in \mathbb{E}^2$  y un vector  $\vec{w}(t) \in \mathbb{E}^3$ ,  $\vec{w}(t) \neq 0$ , de tal forma que, tanto  $\alpha(t)$  como  $\vec{w}(t)$  son diferenciables respecto a  $t$ . Para cada  $t \in I$ , la recta  $L_t$  que pasa por  $\alpha(t)$  y es paralela a  $\vec{w}(t)$  se denomina **recta de la familia en  $t$** . Dada una familia  $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$ , la superficie parametrizada por

$$\phi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \vec{w}(t), \quad t \in I, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

se denomina **superficie reglada** generada por la familia  $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$ . Las rectas  $L_t$  se denominan **generatrices**, y a la recta  $\alpha(t)$  una **directriz** de la superficie  $\phi$ . Hay que notar que la superficie  $\phi$  puede tener puntos singulares, es decir puntos  $(t, \lambda)$ , donde  $\phi_t \wedge \phi_\lambda = \vec{0}$ .

<sup>3</sup>Cada recta pasa por un punto de la curva  $\alpha : t \in I \mapsto \alpha(t) \in S$  y tiene como vector dirección a  $\vec{w}(t)$ .

**Ejemplo 2.29.** Sea  $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ , y sea  $\alpha(t)$  una parametrización de  $\mathbb{S}^1$  por la longitud de arco. Para cada  $s$ , sea  $\vec{w}(s) = \alpha'(s) + \vec{e}_3$ , donde  $\vec{e}_3$  es paralelo al eje  $z$ . Entonces el trazo de

$$\phi(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda(\alpha'(s) + \vec{e}_3)$$

es una superficie reglada. Al escribir

$$\phi(s, \lambda) = (\cos s - \lambda \sin s, \sin s + \lambda \cos s, \lambda),$$

se observa que  $x^2 + y^2 - z^2 = 1 + \lambda^2 - \lambda^2 = 1$ . Por tanto, el trazo de  $\phi$  es un hiperboloide de revolución.

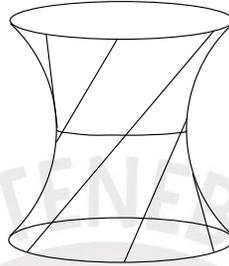


Figura 2.8: Hiperboloide de revolución  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

*Observación 2.30.* Un cálculo directo a partir de la ecuación (2.7) muestra que en una superficie reglada, la curvatura gaussiana puede ser expresada como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{EG - F^2} = \frac{-\langle \alpha', \vec{w} \times \vec{w}' \rangle^2}{\|(\alpha' + t\vec{w}') \times \alpha\|^2}.$$

**Teorema 2.31. (BONET.)** Una curva  $c$  en  $S$  es un línea de curvatura si y solo si la superficie  $\tilde{S}$  formada por las normales a la superficie a lo largo de  $c$  es plana.

*Demostración.* La superficie  $\tilde{S}$  puede ser parametrizada por

$$\phi(s, \lambda) = c(s) + \lambda N(c(s)),$$

(vea ecuación (2.7)). Un cálculo directo prueba que

$$\langle c'(t), N(c(s)) \times dN(c(s))/ds \rangle = 0.$$

Así, según la observación 2.30, la curvatura Gaussiana  $K = 0$ . Por tanto, la superficie  $\tilde{S}$  es plana (vea 1.4).  $\square$

## 2.3 Problema planteado en este trabajo

En esta sección se darán algunas definiciones importantes para enunciar el principal resultado de esta investigación. Para ello, se debe de tener en cuenta que las superficies consideradas serán suaves, compactas y orientadas.

**2.32.** Una sucesión  $S_n$  de superficies suaves **converge** a una superficie  $S$  en el **sentido**  $C^r$  si existe una sucesión de funciones reales  $f_n$ , definidas en  $S$ , tal que  $S_n = (I + f_n N)(S)$ , donde  $f_n$  tiende a 0 en el sentido  $C^r$ . Para la convergencia en el sentido  $C^r$ , se debe tener en cuenta que para cada carta  $(u, v)$ , con parametrización inversa  $X$ , se tiene que tanto  $f_n \circ X$  como sus derivadas parciales de orden  $r$  convergen 0, en cada parte compacta de el dominio de  $X$ .

**Definición 2.33.** Un conjunto  $\Sigma$  de superficies se dice **abierto** en el **sentido**  $C^r$  si, para cada sucesión de superficies  $S_n$  que convergen a  $S \in \Sigma$  en el sentido  $C^r$ , se tiene que para un  $n$  suficientemente grande  $S_n \in \Sigma$ . Un conjunto  $\Sigma$  de superficies se dice **denso** en el **sentido**  $C^r$  si, para cada superficie  $S \in \Sigma$ , existe una sucesión de superficies  $S_n$  en  $\Sigma$  convergiendo a  $S$  en el sentido  $C^r$ .

**Definición 2.34.** Una superficie  $S$  se dice  $C^r$ -principal estructuralmente estable si para cada sucesión  $S_n$  convergiendo a  $S$  en  $\Sigma$  en el sentido  $C^r$ , se tiene una sucesión de homeomorfismos  $H_n$  desde  $S_n$  sobre  $S$ , convergiendo a la identidad de  $S$ , tal que para  $n$  suficientemente grande,  $H_n$  es una equivalencia principal ( $P$ -equivalencia) entre  $S_n$  y  $S$ .

**2.35. Principal Problema de Estabilidad Estructural.** Caracteriza a las superficies compactas orientadas en  $\mathbb{E}^3$  que son  $C^r$  principal estructuralmente estables, para  $r \geq 3$ . Una solución parcial para este problema plantea condiciones suficientes, las cuales serán sintetizadas en el Teorema 2.37. Llamemos  $\Sigma(a, b, c, d)$  al conjunto de superficies compactas orientadas  $S$  que verifican las condiciones  $a, b, c$  y  $d$  siguientes:

- a) Todos los puntos umbílicos son Darbouxianos.
- b) Todos los ciclos principales son hiperbólicos.
- c) El conjunto límite de cada línea principal está contenida en el conjunto de puntos umbílicos y ciclos principales de  $S$ .
- d) Toda separatriz umbílica es separatriz de un solo punto umbílico.

Separatrices que no cumplen con la propiedad (d) son llamadas **conexiones umbílicas**; un ejemplo de esto, son las separatrices umbílicas en el elipsoide de tres ejes diferentes (vea figura 2.6).

**Definición 2.36.** El conjunto  $\alpha$ -límite (resp.  $\omega$ -límite) de una línea principal orientada  $\gamma$ , definido en su intervalo máximo  $\mathcal{I} = (w_-, w_+)$  y parametrizada por la longitud de arco  $s$ , es la colección  $\alpha(\gamma)$ -límite (resp.  $\omega(\gamma)$ -límite) de puntos de una sucesión de la forma  $\gamma(s_n)$ , convergiendo en  $S$ , cuando  $s_n$  tiende al extremo izquierdo (resp. derecho) de  $\mathcal{I}$ . El **conjunto límite** de  $\gamma$  es el conjunto  $\Omega = \alpha(\gamma) \cup \omega(\gamma)$ .

**Teorema 2.37. (Estabilidad Estructural de las Configuraciones Principales).** *El conjunto de superficies  $\Sigma(a, b, c, d)$  es abierto en el sentido  $C^3$  y cada elemento es  $C^3$ -principal estructuralmente estable.*

La prueba de este teorema será desarrollada en el capítulo 5. El conjunto de superficies  $\Sigma(a, b, c, d)$  es además denso en el sentido  $C^2$ , el cual no será desarrollado en este trabajo, sin embargo, el lector interesado puede recurrir a [GS98] para mayores detalles.

**Teorema 2.38. (Densidad de Superficies Principales Estructuralmente Estables).** *El conjunto  $\Sigma(a, b, c, d)$  es denso en el sentido  $C^2$ .*

**2.39.** Un estudio similar forma parte del trabajo presentado en [Gui88], considerando formas diferenciales cuadráticas positivas de clase  $C^r$  sobre variedades compactas orientadas de dimensión 2, busca describir una clase de formas en la cual cada uno de sus elementos tiene configuración estable, para probar que bajo pequeñas perturbaciones que es estructuralmente estable,  $C^3$ -abierto y  $C^2$ -denso en el espacio  $C^\infty$  de formas diferenciales cuadráticas positivas.

**Definición 2.40.** *Una forma diferencial cuadrática de clase  $C^r$  en  $S$  es un elemento de la forma  $\omega = \sum_{i=1}^n \phi_i \psi_i$ , donde  $\phi, \psi$  son 1-formas de clase  $C^r$  en  $S$ . Si  $(x, y) : U \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $(x, y)^*(\omega) = a(x, y)dx^2 + b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2$ , donde  $dx, dy$  son las proyecciones canónicas  $dx(x, y) = x, dy(x, y) = y$ , siendo  $a, b, c : (x, y)(U) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^r$ . Una **forma diferencial cuadrática positiva** en  $S$  es una forma diferencial cuadrática en  $S$  tal que para cada punto  $p \in M$  el subconjunto  $\omega^{-1}(p)$  de  $T_p S$  es una de las siguientes opciones:*

- a) *La unión de dos líneas transversales (en cuyo caso  $p$  es llamado punto regular de  $\omega$ ).*
- b) *Todo  $T_p S$  (en cuyo caso  $p$  es un punto singular de  $\omega$ ).*

**Observación 2.41.** [Gui88] Sea  $\omega$  una forma cuadrática diferencial de clase  $C^r$  en  $S$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a)  $\omega$  una forma cuadrática diferencial positiva de clase  $C^r$  en  $S$ .
- (b) Para cada  $p$  en  $S$ , existe una carta local en  $p$ ,  $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que si  $(x, y)^*(\omega) = a(x, y)dy^2 + b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2$  entonces  $b^2 - 4ac \geq 0$  en  $(x, y)(U)$  y  $(b^2 - 4ac)^{-1}(0) = a^{-1}(0) \cap b^{-1}(0) \cap c^{-1}(0)$ .
- (c) Para cada punto  $p$  en  $S$ , lo afirmado en (b) es cierto para cada carta local en  $p$ .

## Capítulo 3

# Puntos umbílicos

*En una superficie suave de un espacio euclidiano, genéricamente la mayoría de los puntos (todos salvo un conjunto discreto) tienen dos direcciones principales, las direcciones correspondientes a los valores máximos y mínimos de curvatura normal. Estas direcciones principales, que surgen como vectores propios de una matriz simétrica, son ortogonales. Sin embargo, en un punto umbílico las curvaturas normales son constantes y su dirección principal es indeterminada. Nuestro interés principal se centra entonces en las líneas de curvatura, es decir, las curvas integrales del campo de dirección de la curvatura determinada por las direcciones principales. Lo que se busca es ver el comportamiento de las líneas de curvatura en la vecindad de un punto umbílico genérico (Darbouxiano). Claramente, lejos de un umbílico estas líneas de curvatura puede ser modelado localmente por líneas  $u = \text{constante}$ ,  $v = \text{constante}$  en el  $(u, v)$ -plano. Se empieza el capítulo haciendo una clasificación genérica de las ecuaciones diferenciales binarias, para culminar haciendo una clasificación de los puntos umbílicos. Luego se hace una clasificación similar, a partir de una Carta de Monge, y se culmina haciendo un estudio sobre la configuración principal y generacidad de estos puntos umbílicos darbouxianos.*

### 3.1 Ecuaciones diferenciales binarias

**3.1.** Para estudiar el comportamiento de una aplicación en la vecindad de un punto, resulta útil la noción de **germen**<sup>1</sup>. Por medio de  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(0))$ , se denota a un germen en  $0 \in \mathbb{R}^n$ . El conjunto de gérmenes suaves  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, f(0))$  en 0, definen un anillo, el cual denotaremos por  $\mathfrak{D}(x_1, \dots, x_n)$ . Este anillo tiene un ideal maximal  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathfrak{D}(x_1, \dots, x_n)$ , generado por las funciones coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  y formado por los gérmenes en 0 suaves  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(0) = 0$  (vea [dPW95]), es

<sup>1</sup>Llamamos germen en un punto  $x$ , de una función continua (diferenciable)  $f$  definida en un entorno abierto de  $x$ , a la clase de equivalencia de todas las funciones continuas (diferenciables) definidas en entornos abiertos de  $x$ , que coincidan con  $f$  en algún entorno de  $x$ .

decir, está formado por aquellos gérmenes que admiten al origen como un cero. Por ello, al estudiar ecuaciones diferenciales binarias de la forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx - a(x, y)dx^2 = 0, \quad (3.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones suaves  $0 \in \mathbb{R}^2$ , supondremos que se anulan en  $0$ , es decir,  $(a, b) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^4)$ .

Ahora se mostrará una propiedad importante referente a los campos vectoriales que satisfacen esta ecuación diferencial binaria.

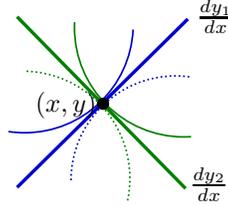


Figura 3.1: Soluciones ortogonales de la ecuación 3.1 en cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

**Lema 3.2.** Si el origen es un cero aislado de  $(a, b) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^4, 0)$ . Entonces, se cumple:

- a) La forma cuadrática  $a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dydx - a(x, y)dx^2$  es positiva en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  (vea observación 2.41).
- b) La ecuación (3.1) define dos campos de direcciones suaves, mutuamente ortogonales en  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

*Demostración.* Para la parte a), basta observar que  $4b^2 - 4a(-a) \geq 0$ , como en [Gui88, pag.479]. La prueba para b) se hará para el caso cuando  $a(x, y) \neq 0$ ; pues si  $a(x, y) = 0$  y  $b(x, y) \neq 0$  la demostración es similar usando  $\frac{dx}{dy}$  en la ecuación (3.1). Si  $a(x, y) \neq 0$ , la ecuación (3.1) se puede resolver para  $\frac{dy}{dx}$  haciendo:

$$a(x, y) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2b(x, y) \frac{dy}{dx} - a(x, y) = 0, \quad (3.2)$$

y obtener como solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left( -b(x, y) \pm \sqrt{a^2(x, y) + b^2(x, y)} \right)}{a(x, y)}.$$

Estas dos soluciones para  $\frac{dy}{dx}$  son localmente suaves y se verifica que el producto de estas es  $-1$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

*Observación 3.3.* Si  $a(x, y) = a_1x + a_2y + O(2)$  y  $b(x, y) = b_1x + b_2y + O(2)$ , donde  $O(2)$  muestra términos de orden mayor o igual a dos. Entonces, la condición  $a_1b_2 \neq a_2b_1$  es equivalente a decir que  $(a, b) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^4)$  admiten un cero aislado, como en el lema anterior. Además cada uno genera a  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$ .

3.4. El conjunto

$$\mathbb{M}_1 = \left\{ ((x, y), [\alpha, \beta]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 : a\beta^2 + 2b\alpha\beta - a\alpha^2 = 0 \right\},$$

es un subconjunto del fibrado tangente proyectivizado; determinado por la ecuación (3.1) e incluye a  $(0, 0) \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ . En cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se construye un espacio proyectivo afín, y siempre que  $\alpha \neq 0$ , resulta un conjunto formado por todos los  $p = dy/dx$ . El cual es un espacio vectorial:  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, p)$ . En este espacio solo es de interés la superficie

$$\mathbb{M} = \left\{ (x, y, p = dy/dx) : ap^2 + 2bp - a = 0 \right\}.$$

Cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta \neq 0$ , se construye un espacio para  $q = dx/dy$ , obteniendo el  $(x, y, q = dx/dy)$ -espacio. También, en este espacio solo es de interés la superficie

$$\tilde{\mathbb{M}} = \left\{ (x, y, q) : a + 2bq - aq^2 = 0 \right\}.$$

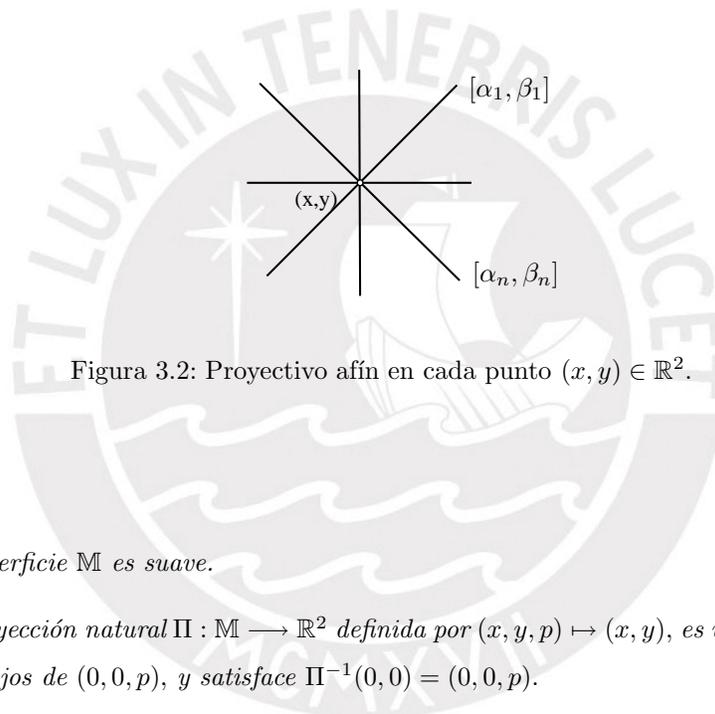


Figura 3.2: Proyectivo afín en cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lema 3.5.**

- (a) La superficie  $\mathbb{M}$  es suave.
- (b) La proyección natural  $\Pi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ , es un difeomorfismo local lejos de  $(0, 0, p)$ , y satisface  $\Pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, p)$ .

*Demostración.* (a) Si se define  $F : (x, y, p)\text{-espacio} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $F(x, y, p) = ap^2 + 2bp - a$ , entonces se ve que  $\{F = 0\}$ , el nivel cero de  $F$ , es justamente  $\mathbb{M}$ . Por eso, basta probar que 0 es un valor regular para  $F$ . Así, si  $\partial F / \partial p = 2ap + 2b = 0$  se obtiene  $p = -b/a$ , pero a la vez, la solución en  $p$  de  $ap^2 + 2bp - a = 0$  es  $p = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ , y por el Lema 3.2, resulta que  $a^2 + b^2 = 0$ . Esto implica que  $a = b = 0$ , ocasionando que  $x = y = 0$ . Cuando  $x = y = 0$  se tiene que  $\partial F / \partial x \neq 0$  ó  $\partial F / \partial y \neq 0$ , pues de lo contrario se tendría que  $a_1 = a_2$  y  $b_2 = b_1$ , pero esto no puede darse porque  $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$  (vea observación 3.3). Por eso  $\mathbb{M}$  es suave.

(b) El único caso donde  $\Pi$  no sería un difeomorfismo, es en aquellos puntos  $(x, y, p)$  donde  $\partial F / \partial p$  es tangente a  $\mathbb{M}$ , pero por la parte (a) esto sucede cuando  $\partial F / \partial p = 0$ ; es decir solo en  $(0, 0, p)$ . Por eso  $\Pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, p)$ . □

**3.6.** Ahora se construirá un levantamiento del campo de direcciones suaves (mutuamente ortogonales), a uno de una sola dirección en  $\mathbb{M}$ . Tener en cuenta que en el  $(x, y)$ -espacio, la dirección  $(dx, dy)$  en el punto  $(x, y)$  se expresa como  $(1, p)$ , siempre que  $dx \neq 0$  como en **3.4**.

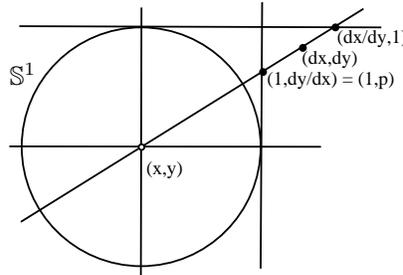


Figura 3.3:  $(dx, dy)$  en la forma  $(1, p)$ .

**Proposición 3.7.** *El campo vectorial*

$$\xi = 2(ap + b)\partial/\partial x + 2p(ap + b)\partial/\partial y - (\partial F/\partial x + p\partial F/\partial y)\partial/\partial p$$

es el mejor levantamiento en la superficie  $\mathbb{M}$ .

*Demostración.* Como ya se dijo, necesitamos una sola dirección, pero que sea paralela a la dirección  $(1, p) \equiv (1, p, 0)$  en  $\mathbb{R}^2$ , y que sea ortogonal al gradiente de  $F$ , es decir, que sea ortogonal tanto a  $(-p, 1) \equiv (-p, 1, 0)$  como al  $\nabla F$ . Por eso, solo basta con hacer una multiplicación vectorial

$$\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial p \\ -p & 1 & 0 \\ \partial F/\partial x & \partial F/\partial y & \partial F/\partial p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial p \\ -p & 1 & 0 \\ \partial F/\partial x & \partial F/\partial y & 2(ap + b) \end{vmatrix}$$

para obtener el campo  $\xi$ . □

**3.8.** Los ceros del campo  $\xi$  tangente a la superficie  $\mathbb{M}$ , es decir los puntos singulares del campo  $\xi$ , están dados por

$$ap^2 + 2bp - a = ap + b = \partial F/\partial x + p\partial F/\partial y = 0. \tag{3.3}$$

Las dos primeras ecuaciones implican que  $x = y = 0$  (como en la demostración del Lema 3.5). Si  $a(x, y) = a_1x + a_2y + O(2)$  y  $b(x, y) = b_1x + b_2y + O(2)$  (como en **3.1**), entonces para  $x = y = 0$  la tercera expresión  $\partial F/\partial x + p\partial F/\partial y$  se escribe como una ecuación cúbica de la forma:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= (a_1p^2 + 2b_1p - a_1) + p(a_2p^2 + 2b_2p - a_2), \\ &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (-a_2 + 2b_1)p - a_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esta ecuación cúbica tiene o bien 1 raíz múltiple o 3 raíces (todas distintas o presentar una raíz doble). Así, el campo vectorial  $\xi$  tiene o bien 1 o 3 ceros (singularidades). En la siguiente proposición se busca linealizar el campo.

**Proposición 3.9.** ([BF89]) *La parte lineal del campo vectorial  $\xi$  en los ceros  $(0, p_1)$  ( $p_1$  es una raíz de  $\phi$ ) está dado por:*

$$(\alpha_1 y + \alpha_2(p - p_1))\partial/\partial x + (\beta_1 y + \beta_2(p - p_1))\partial/\partial p,$$

donde  $\alpha_1 = 2\{a_2 p_1^2 + (a_1 + b_2)p_1 + b_1\}$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = -\{F_{xx} + 2F_{xy}p_1 + F_{yy}p_1^2\}$ ,  $\beta_2 = -\phi'(p_1)$ , siendo  $\alpha_1$  y  $\beta_2$  sus valores propios.

*Demostración.* En los ceros del campo se usarán las coordenadas locales  $(x, p)$  en  $\mathbb{M}$ , siempre que en estos puntos  $\partial F/\partial y \neq 0$ , por eso se puede usar el teorema de la función implícita. Pero si  $\partial F/\partial y = 0$ , entonces  $\partial F/\partial x = 0$  (vea ecuación (3.3)). Lo que implicaría que  $a_1 b_2 = a_2 b_1$ , condición que por hipótesis ha sido excluido. Así, escribiendo  $y = g(x, p)$  se tendría que  $F(x, g(x, p), p) \equiv 0$ . Por ello, como el gradiente de  $F$  es ortogonal al campo, y en función de la regularidad, se tiene que

$$\partial F/\partial x + \partial F/\partial y \cdot \partial g/\partial x = 0 = \partial F/\partial y \cdot \partial g/\partial p + \partial F/\partial p. \quad (3.5)$$

Ahora al proyectar el campo  $\tilde{\xi}$  sobre el  $(x, p)$ -plano se obtiene

$$\tilde{\xi} = \partial F/\partial p \cdot \partial/\partial x - (\partial F/\partial x + p \partial F/\partial y) \partial/\partial p.$$

Para calcular la parte lineal del campo  $\tilde{\xi}$  en  $(0, p_1)$ , se procede a aproximar por serie de Taylor (hasta orden 2) tanto de  $\partial F/\partial p$  como de  $-(\partial F/\partial x + p \partial F/\partial y) \partial/\partial p$ . Para el primer caso la aproximación lineal es  $\partial F/\partial p(0, p_1) + [\partial^2 F/\partial p \partial x(0, p_1)]x + [\partial^2 F/\partial p^2(0, p_1)](p - p_1)$ , donde

$$\begin{aligned} \partial F/\partial p(0, p_1) &= 0, \quad \text{por ser tangente al plano,} \\ \partial^2 F/\partial p \partial x &= \partial^2 F/\partial p \partial x + \partial^2 F/\partial p \partial y \cdot \partial g/\partial x + \partial^2 F/\partial p \partial p[0], \\ \partial^2 F/\partial p \partial p &= \partial^2 F/\partial p^2[0] + \partial^2 F/\partial p \partial y \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial p^2[1]. \end{aligned}$$

En el segundo caso, si hacemos  $H(x, p) = -(\partial F/\partial x + p \partial F/\partial y)$ , la aproximación lineal es

$$H(0, p_1) + [\partial H/\partial x(0, p_1)]x + [\partial H/\partial p(0, p_1)](p - p_1),$$

donde

$$H(0, p_1) = 0; \quad \text{por condición (vea ecuación (3.3)),}$$

$$\begin{aligned} \partial H/\partial x &= -\left\{ \partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial x \partial y \cdot \partial g/\partial x + \partial^2 F/\partial x \partial p[0] + \right. \\ &\quad \left. + p(\partial^2 F/\partial y \partial x + \partial^2 F/\partial y^2 \cdot \partial g/\partial x + \partial^2 F/\partial y \partial p[0]) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial H/\partial p &= -\left\{ \partial^2 F/\partial x \partial p[0] + \partial^2 F/\partial x \partial y \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial x \partial p[1] + \right. \\ &\quad \left. \partial F/\partial y + p(\partial^2 F/\partial y \partial p[0] + \partial^2 F/\partial y^2 \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial y \partial p[1]) \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\tilde{\xi}$  se escribe como

$$\tilde{\xi} = (\alpha_1 x + \alpha_2(p - p_1) + O(2))\partial/\partial x + (\beta_1 x + \beta_2(p - p_1) + O(2))\partial/\partial p,$$

donde

$$\alpha_1 = \partial^2 F/\partial p \partial x + \partial^2 F/\partial p \partial y \cdot \partial g/\partial x(0, p_1),$$

$$\alpha_2 = (\partial^2 F/\partial p \partial y \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial p^2)(0, p_1),$$

$$\beta_1 = -\left\{ \partial^2 F/\partial x^2 + \partial^2 F/\partial x \partial y \cdot \partial g/\partial x + p(\partial^2 F/\partial y \partial x + \partial^2 F/\partial y^2 \cdot \partial g/\partial x) \right\}(0, p_1),$$

$$\beta_2 = -\left\{ \partial^2 F/\partial x \partial y \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial x \partial p + \partial F/\partial y + p(\partial^2 F/\partial y^2 \cdot \partial g/\partial p + \partial^2 F/\partial y \partial p) \right\}(0, p_1).$$

Desde que  $\partial F/\partial x + p\partial F/\partial y = 0$  en los ceros de  $\xi$ , a partir de la ecuación (3.5), se tiene que  $-\partial F/\partial y \partial g/\partial x + p\partial F/\partial y = 0$ , y de esto  $\partial g/\partial x = p_1$ . También  $\partial^2 F/\partial p^2 = 0 = \partial F/\partial p$ , así a partir de la ecuación (3.5), se tiene que  $\partial g/\partial p = 0$ , pues  $\partial F/\partial x \neq 0$ . Con lo que las ecuaciones de arriba se simplifican a las siguientes:

$$\alpha_1 = 2\left\{ (a_1 p_1 + b_1) + p_1(a_2 p_1 + b_2) \right\},$$

$$\alpha_2 = 0,$$

$$\beta_1 = -\left\{ \partial^2 F/\partial x^2 + 2p_1 \partial^2 F/\partial x \partial y + p_1^2 \partial^2 F/\partial y^2 \right\},$$

$$\beta_2 = -\left\{ 2a_1 p_1 + 2b_1 + a_2 p_1^2 + 2b_2 p_1 - a_2 + p_1(2a_2 p_1 + 2b_2) \right\},$$

$$= -\left\{ 3a_2 p_1^2 + 2(a_1 + 2b_2)p_1 + (2b_1 p_1 - a_2) \right\}.$$

□

**3.10.** En la proposición anterior se ve que los ceros  $\alpha_1, \beta_2$  del campo  $\xi$  están determinados por las partes lineales de  $a$  y  $b$ , y estos ceros son los autovalores del campo. Es decir, los autovalores del campo son los autovalores de la matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Según las raíces de  $\phi$  (dada en la ecuación (3.4)), los ceros del campo  $\xi$  pueden ser de tres tipos:

- Tipo I. Lemon : el campo  $\xi$  tiene solo un cero que es un silla.
- Tipo II. Star : el campo  $\xi$  tiene tres ceros: todos sillas.
- Tipo III. Monstar : el campo  $\xi$  tiene tres ceros: dos sillas y un nodo.

Algunos ceros de  $\xi$  tienen la  $p$ -dirección como uno de los autovectores. El otro autovector  $o$ , más bien su proyección al  $(x, y)$ -plano, se denominará una **dirección singular**.

*Observación 3.11.* Todos estos resultados locales fueron inicialmente estudiados en el caso de formas cuadráticas positivas, por V. Guíñez en [Guí94], donde aparecen las singularidades semi-simples. En esta misma dirección, en el trabajo [FNB12] se han introducido las llamadas formas totalmente reales de grado  $n$ , donde también aparece una clasificación genérica de las singularidades.

Singularidades aisladas de ecuaciones diferenciales de grado  $n$

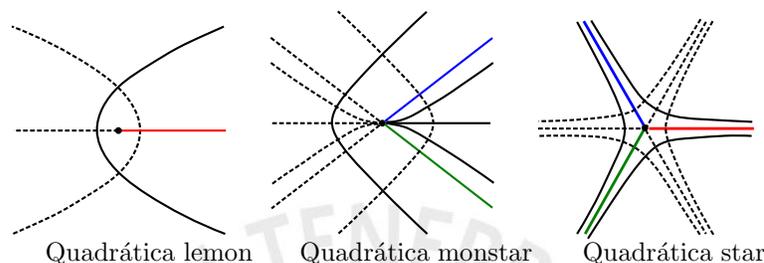


Figura 3.4: Singularidades aisladas de la ecuación binaria, [FNB12].

### 3.2 Puntos umbílicos Darbouxianos.

**3.12.** Sea  $q_0 \in S$  un punto umbílico. Se sabe (vea **A.10**) que un entorno de  $q_0$  se puede expresar como la gráfica de una función diferenciable; es decir, se puede considerar una carta de Monge  $(u, v) : (S, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  alrededor de este punto, en donde la superficie es la gráfica de la función  $w = h(u, v)$ . Con las condiciones asumidas en la proposición 1.14, el desarrollo de Taylor (hasta grado 3) de  $h$  alrededor de  $q_0 = (0, 0, 0)$  será:

$$w = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O[(u^2 + v^2)^2], \tag{3.6}$$

donde  $k = k_1 = k_2$  (por ser  $q_0$  umbílico),  $a = h_{uuu}(0, 0)$ ,  $b = h_{uvv}(0, 0)$ ,  $c = h_{vvv}(0, 0)$ . Aquí,  $w$  es obtenido proyectando  $S$  sobre  $T_{q_0}S$  a lo largo de la normal  $N(q_0)$  y eligiendo una carta ortonormal  $(u, v)$  en el cual el coeficiente del término cúbico  $u^2v$  desaparece.

**Definición 3.13.** Un punto umbílico es llamado **Darbouxiano** si en la ecuación (3.6), se satisface las dos siguientes condiciones:

**T) Condición de Transversalidad:**  $b(b - a) \neq 0$ ,

**D) Condición del Discriminante:** Una de las siguientes ocurre

- $D_1 : a/b > (c/2b)^2 + 2;$
- $D_2 : (c/2b)^2 + 2 > a/b > 1, a \neq 2b;$
- $D_3 : a/b < 1.$

### 3.3 Invarianza de las condiciones T y D.

**3.14.** De acuerdo a lo obtenido en la ecuación (2.4), las líneas principales para  $w$ , a partir de la ecuación (3.6) están dados por la ecuación

$$Adv^2 + Bdudv + Cdu^2 = 0,$$

donde:

$$A = -(1 + w_v^2)w_{uv} + w_u w_v w_{vv} = -w_{uv} - w_v^2 w_{uv} + w_u w_v w_{vv},$$

$$B = (1 + w_u^2)w_{vv} - (1 + w_v^2)w_{uu} = w_{vv} - w_{uu} + w_u^2 w_{vv} - w_v^2 w_{uu},$$

$$C = (1 + w_u^2)w_{uv} - w_u w_v w_{uu} = w_{uv} + w_u^2 w_{uv} - w_u w_v w_{uu}; \text{ y}$$

$$w_{uu} = 2k + au + O_{uu}, \quad w_{uv} = bv + O(4)_{uv}, \quad w_{vv} = k + bu + cv + O(4)_{vv}.$$

Luego de sustituir, y agrupando convenientemente la parte lineal en  $A, B$  y  $C$ , la ecuación de las líneas principales se escribe así:

$$[bv + L]dv^2 - [(b - a)u + cv + M]dudv - [bv + N]du^2 = 0, \quad (3.7)$$

donde  $L, M, N$  son suaves de orden  $O[(u^2 + v^2)^2]$ .

#### 3.3.1 Condición T.

**3.15.** Siendo  $p_0$  un punto umbílico entonces cualquier dirección es principal; razón por la cual las líneas principales en este punto son mutuamente transversales. Por eso, en la ecuación (3.7), para que se pueda dar la transversalidad en cualquier dirección basta que dos curvas se anulen en  $p_0$ . Es decir, la condición de transversalidad muestra que las curvas  $bv + L$  y  $(b - a)u + cv + M$  se anulan,

$$bv + L = 0 \quad \text{y} \quad (b - a)u + cv + M = 0,$$

y sus intersecciones serán los puntos umbílicos. Además, para que la superficie sea regular, se requiere que las curvas que se definen arriba sean regulares y mutuamente transversales  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . Para ello, solo basta ver que los vectores gradientes a estas curvas en  $(0, 0)$  son linealmente independientes, esto es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 0 & b & 0 \\ b - a & c & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -b(b - a)) \neq (0, 0, 0).$$

Por eso, la condición de transversalidad exige que  $b(b - a) \neq 0$ .

**3.16.** El conjunto

$$\mathbb{P}\mathcal{S} = \frac{TS \setminus \mathbf{O}}{\sim} = \left\{ [(q_1, \vec{v})] : q_1 \in S, \vec{v} \in T_{q_1}S \right\},$$

es el llamado **fibrado tangente proyectivo** de  $TS$  sobre la superficie  $S$ . Note que este conjunto ha sido construido removiendo la sección cero<sup>2</sup>  $\mathbf{O}$  del fibrado tangente, y sus elementos se identifican vía la relación de equivalencia  $\sim$  del siguiente modo: si  $[(q_1, \vec{v})]$ ,  $[(q_2, \vec{w})]$  son dos elementos en  $\mathbb{P}\mathcal{S}$ , entonces

$$[(q_1, \vec{v})] \sim [(q_2, \vec{w})] \quad \text{si y solo si} \quad q_1 = q_2 \text{ y } \vec{v} \times \vec{w} = 0, \text{ esto es } \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son paralelos.}$$

$\mathbb{P}\mathcal{S}$  es naturalmente una variedad diferenciable. La idea es proyectar  $\mathbb{P}\mathcal{S}$  sobre la superficie  $S$  y aquí elegir abiertos  $U$  que sean dominio de cartas  $(u, v)$ . Es decir, si  $P : \mathbb{P}\mathcal{S} \rightarrow S$  es la función proyección, entonces en  $P^{-1}(U)$  se puede definir un par de cartas paramétricas ortogonales  $(u, v, p)$  y  $(u, v, q)$ , con  $p = dv/du$  y  $q = du/dv$ ; además sus dominios constituyen un cubrimiento abierto de  $P^{-1}(U)$ . Es así como al variar los dominios  $U$  en  $S$ ,  $\mathbb{P}\mathcal{S}$  tiene estructura de variedad diferenciable; más aún  $P^{-1}(S)$  es un variedad diferenciable.

**3.17.** Sea  $\mathcal{L}\mathcal{S} \subset \mathbb{P}\mathcal{S}$ , el conjunto formado por las soluciones de la ecuación (3.7). Este conjunto esta definido por la ecuación de las direcciones principales (vea ecuación (2.3)), en la que si se divide entre  $du^2$  o entre  $dv^2$  se tendrían dos ecuaciones equivalentes con la misma solución  $\mathcal{L}\mathcal{S}$ . Por eso,  $\mathcal{L}\mathcal{S}$  es una superficie que en la carta  $(u, v; p = dv/du)$ ,  $\mathcal{L}\mathcal{S}$  puede ser escrita como

$$\mathcal{L}(u, v; p) = [bv + L]p^2 - [(b - a)u + cv + M]p - [bv + N],$$

donde  $\mathcal{L}\mathcal{S} = \mathcal{L}(-1)(0, 0; 0)$ . Con la carta  $(u, v; q = du/dv)$ ,  $\mathcal{L}\mathcal{S}$  se escribe

$$\mathcal{L}(u, v; q) = [bv + L] - [(b - a)u + cv + M]q - [bv + N]q^2.$$

Fuera de  $P^{-1}(U_S)$ ,  $\mathcal{L}\mathcal{S}$  es una subvariedad regular de  $P^{-1}(S)$ , por eso, se tiene un cubrimiento regular doble de  $S \setminus U_S$ .

**Lema 3.18.**  $\mathcal{L}\mathcal{S}$  es también regular en  $U_S$ .

*Demostración.* Para  $u = 0$ ,  $v = 0$  y para algún  $p$  en el tangente a  $p_0 = (0, 0, 0) \in S$ ; se tiene que si se tuviera que

$$\mathcal{L}_u = (b - a)p = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_v = bp^2 - cp - b = 0,$$

entonces

Si  $p = 0$  entonces  $b = 0$ , lo cual no es posible por condición **T**. Si  $p \neq 0$  entonces  $b - a = 0$ , también esto no es posible.

Si  $b \neq 0$  y  $p = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4b^2}}{2b}$  entonces  $b - a = 0$ , lo cual no es posible por condición **T**.  $\square$

<sup>2</sup>Se llama sección cero  $\mathbf{O} = s_0$  de un fibrado tangente de una superficie (o variedad) a la sección de la proyección del fibrado que hace corresponder a cada punto  $m \in S$  el vector cero  $\vec{0} \in T_m S$ . La sección cero es un campo vectorial: el campo vectorial nulo.

*Observación 3.19.* Un argumento similar en la demostración de la lema anterior, muestra que el resultado también es válido si se utiliza la coordenada  $q$ . Por eso, la condición de transversalidad solo depende de la superficie  $\mathbb{L}\mathbb{S}$  y no de la carta usada para escribir las direcciones principales en la ecuación (3.7).

*Observación 3.20.* En una carta arbitraria  $(u, v)$  en donde la ecuación (3.7) se escribe como

$$Adv^2 + Bdudv + Cdu^2 = 0,$$

los puntos umbílicos están caracterizados por  $A = B = 0$ , y la condición de transversalidad es:  $\frac{\partial(A, B)}{\partial(u, v)} \neq 0$ .

### 3.3.2 Condición D.

**3.21.** Como en **3.6**, se procede a construir un campo **Lie-Cartan**  $\mathfrak{L}'$ , que sea paralelo a  $(1, p)$  y ortogonal al gradiente de  $\mathfrak{L}$ , es decir, ortogonal tanto a  $(-p, 1)$  como al  $\nabla\mathfrak{L}$ , esto es, tangente a  $\mathbb{L}\mathbb{S}$ . Con un cálculo directo se obtiene

$$\mathfrak{L}_p = 2p[bv + L] - [(b - a)u + cv + M].$$

Así, el campo  $\mathfrak{L}'$  está dado por:

$$\mathfrak{L}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial p} \\ -p & 1 & 0 \\ \mathfrak{L}_u & \mathfrak{L}_v & \mathfrak{L}_p \end{vmatrix} = \mathfrak{L}_p \partial/\partial u + p \mathfrak{L}_p \partial/\partial v + (-\mathfrak{L}_u - p \mathfrak{L}_v) \partial/\partial p.$$

Si se define  $P_*\mathfrak{L}' : \mathbb{L}\mathbb{S} \rightarrow S$  como la función proyección del campo; entonces se ve que en el complemento de  $U_S$ , este genera los campos de línea principales de  $S$ ; esto es, para cada  $(u, v) \neq 0$ , las dos  $p$ -preimágenes  $(u, v, r_1), (u, v, r_2)$  verifican que  $P_*\mathfrak{L}'(u, v, r_i)$  generan líneas principales con dirección  $r_i$  (la demostración es similar al Lema 3.2). Pero en  $U_S$  el campo  $P_*\mathfrak{L}'$  desaparece.

**Lema 3.22.** *Las singularidades de  $\mathfrak{L}'$  son los ceros de  $p'$ .*

*Demostración.* Considere las siguientes notaciones

$$u'(u, v, p) = \mathfrak{L}_p = 2p[bv + L] - [(b - a)u + cv + M];$$

$$v'(u, v, p) = p \mathfrak{L}_p = p \left\{ 2p[bv + L] - [(b - a)u + cv + M] \right\};$$

$$p'(u, v, p) = (-\mathfrak{L}_u - p \mathfrak{L}_v).$$

Entonces, para  $(u, v) = 0$  se verifica que tanto  $u'$  como  $v'$  se anulan. Por tanto, las singularidades del campo  $\mathcal{L}'$  son los ceros de  $p'$  en el  $p$ -eje, es decir, los ceros del polinomio de tercer grado (*polinomio separatriz*)

$$(b - a)p - p(bp^2 - cp - b) = -p[bp^2 - cp + (a - 2b)] = 0,$$

cuyas raíces son:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_1 &= c/2b - \sqrt{(c/2b)^2 - a/b + 2}, \text{ y} \\ p_2 &= c/2b + \sqrt{(c/2b)^2 - a/b + 2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

**3.23.** Las raíces de  $p'$  representan las posibles direcciones mediante las cuales las líneas principales se aproximan al punto umbílico. En el  $(u, v)$ -plano las líneas principales que se aproximan al punto umbílico son semirectas de la forma  $v = pu$ , donde  $p$  es una dirección principal. Por tanto, si una curva  $C^1$  de la forma  $v = pu + O(u^2)$  es una solución de (3.7); entonces  $p$  es alguna de las raíces de  $p'$  dadas en la ecuación (3.8).

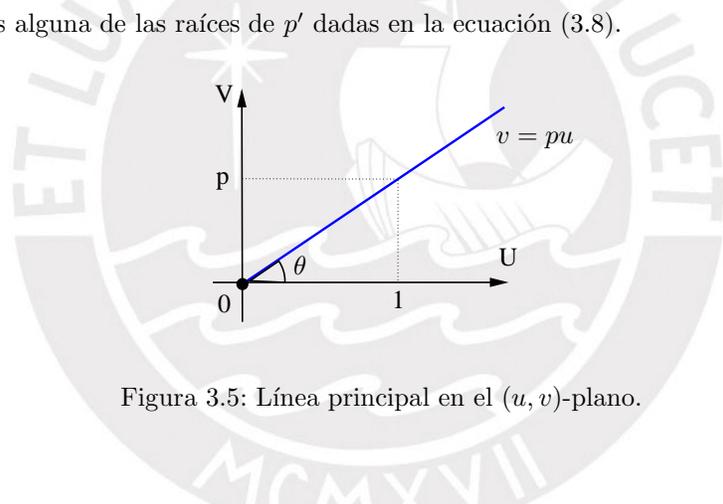


Figura 3.5: Línea principal en el  $(u, v)$ -plano.

**3.24.** Por la condición  $T$  (vea definición 3.13) se tiene que

$$a/b \neq 1 \text{ lo que implica que o bien } a/b > 1 \text{ o bien } a/b < 1.$$

Y del producto de  $p_1$  con  $p_2$  se obtiene:  $p_1 \cdot p_2 = a/b - 2$ . Por tanto,

$$\text{Si } a/b > 1 \text{ entonces } p_1 \cdot p_2 = a/b - 2 > -1, \tag{3.9}$$

$$\text{Si } a/b < 1 \text{ entonces } p_1 \cdot p_2 = a/b - 2 < -1. \tag{3.10}$$

Denotemos por  $l_i^+ = \{(u, p_i u) : u \geq 0\}$ ,  $l_i^- = \{(u, p_i u) : u \leq 0\}$  los rayos (semirectas), y por  $l_i$  la correspondiente línea completa que las contiene en el  $(u, v)$ -plano tangente. Estas líneas y rayos pertinentes permiten la siguiente traslación geométrica de la condición **D**:

- Condición  $D_1$ ,

$$a/b > (c/2b)^2 + 2,$$

muestra que solo la recta  $l_0 = 0$  es real y que es la única línea de posible dirección para la línea principal de aproximación al punto umbílico, es decir, en un punto umbílico del tipo  $D_1$  no pueden existir las direcciones  $p_1$  y  $p_2$ , pues según la condición  $D_1$  se tiene que estas son imaginarias.

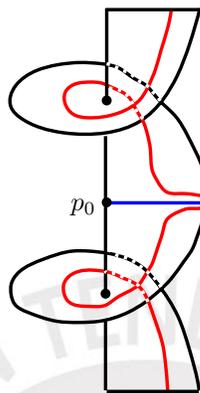


Figura 3.6: Punto umbílico Darbouxiano: tipo  $D_1$ .

- Condición  $D_2$ ,

$$(c/2b)^2 + 2 > a/b > 1 \text{ con } a \neq 2b,$$

muestra que se tienen tres líneas reales y distintas, además de un sector angular derecho que contienen los rayos  $l_i^+, i = 0, 1, 2$ . En un punto umbílico del tipo  $D_2$  se exige que  $a/b > 1$ . Por tanto, sus pendientes verifican que  $p_1.p_2 > -1$  (vea (3.9)). Además en términos de  $(a, b, c)$ , se presentan dos casos: cuando  $a/b > 2$  y cuando  $2 > a/b > 1$ . Para ello, supóngase que  $c/2b > 0$ ; luego cuando  $a/b > 2$  se tiene que  $p_1 > 0$  y  $p_2 > 0$ ; y si  $2 > a/b > 1$  se tiene que  $p_1 < 0$  y  $p_2 > 0$ .

- Condición  $D_3$ ,

$$a/b < 1,$$

muestra que se tienen tres líneas reales y que no se tiene sector angular derecho que contenga los tres rayos  $l_i^+, i = 0, 1, 2$ . En un punto umbílico del tipo  $D_3$  se exige que  $a/b < 1$ . Por tanto, sus pendientes verifican que  $p_1.p_2 < -1$  (vea (3.10)). Además en términos de  $(a, b, c)$ , cuando  $c/2b > 0$ , se tiene que  $p_1 < 0$  y  $p_2 > 0$ .

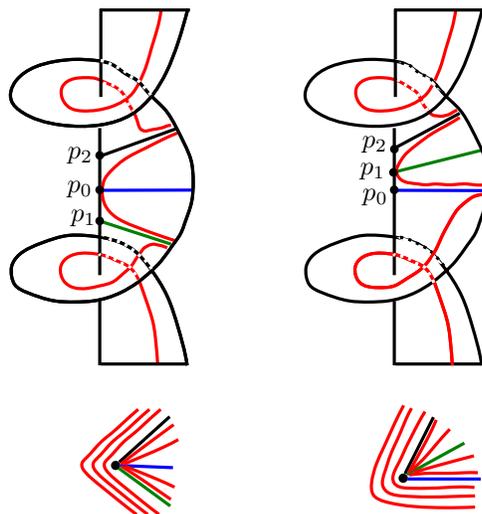


Figura 3.7: Punto umbílico Darbouxiano: tipo  $D_2$ .

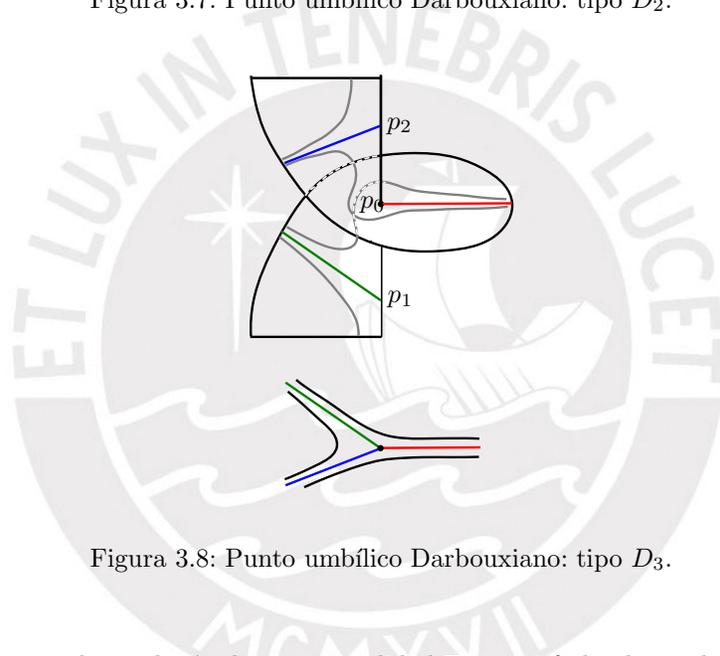


Figura 3.8: Punto umbílico Darbouxiano: tipo  $D_3$ .

**3.25.** Una vez que la condición de transversalidad  $T$  es satisfecha, la condición  $D$ , así como los tipos  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , no dependen de la carta  $(u, v)$  usada. Esto será de gran ayuda a la hora de clasificar las singularidades del campo  $\mathcal{L}'$ , y poder hallar la configuración principal de la superficie en puntos umbílicos Darbouxianos.

**Proposición 3.26.** Si la condición de transversalidad  $T$  es satisfecha, entonces la condición  $D$ , así como los tipos  $D_1, D_2, D_3$ , no dependen de la carta  $(u, v)$  usada.

*Demostración.* Sea  $(u', v')$  otra carta definida alrededor del mismo punto umbílico  $q_0$ ; en la cual la superficie, vista localmente como la gráfica de una función  $w' = h(u', v')$ , es de la forma

$$w' = \frac{k}{2}((u')^2 + (v')^2) + \frac{a'}{6}(u')^3 + \frac{b'}{2}(u')(v')^2 + \frac{d'}{2}(u')^2(v') + \frac{c'}{6}(v')^3 + O[((u')^2(v')^2)],$$

la cual, no obstante (vea **3.12**), esta relacionada con la carta  $(u, v)$ , por una rotación:

$$u = u' \cos \theta - v' \sin \theta, \quad v = u' \sin \theta + v' \cos \theta.$$

Por esto,  $w'$  se escribe

$$\begin{aligned} w' &= \frac{k}{2} [(u' \cos \theta - v' \sin \theta)^2 + (u' \sin \theta + v' \cos \theta)^2] + \\ &+ \frac{a}{6} (u' \cos \theta - v' \sin \theta)^3 + \frac{b}{2} (u' \cos \theta - v' \sin \theta)(u' \sin \theta + v' \cos \theta)^2 + \\ &+ \frac{c}{6} (u' \sin \theta + v' \cos \theta)^3 + O[(u^2 v^2)]. \end{aligned}$$

Haciendo las cuentas, se ve que el coeficiente del término  $(u')^2 v'$  debe ser justamente  $d'/2$ , esto es

$$d' = -a \cos^2 \theta \sin \theta + 2b \cos^2 \theta \sin \theta - b \sin^3 \theta + c \sin^2 \theta \cos \theta.$$

Además, si se supone que  $\cos \theta \neq 0$ , después de unos arreglos se llega a la forma siguiente

$$d' = -\tau \cos \theta^3 [b\tau^2 - c\tau + a - 2b],$$

donde  $\tau = \sin \theta / \cos \theta$ ; de otro modo  $d' = -(a - 2b) \neq 0$ , por condición  $D_2$ . Puesto que en la carta  $(u, v)$  elegida inicialmente,  $d' = 0$ , resulta que los ángulos de posibles rotaciones son precisamente las raíces  $p_i$  (vea (3.8)) de la ecuación

$$d' = -\tau [b\tau^2 - c\tau + a - 2b].$$

La interpretación geométrica de esto, por de la condición  $D_2$  en términos de los ángulos, es que los rayos  $l_i^+$  contenidos en un ángulo agudo son preservados por las dos posibles rotaciones. Otras demostraciones muestran que

$$(c'/2b')^2 + 2 > a'/b' > 1, a' \neq 2b',$$

por ello, la condición  $D_2$  no depende de la carta  $(u', v')$ ; donde el coeficiente del término  $(u')^2 v'$  desaparece. Similarmente para la condición  $D_3$ .  $\square$

### 3.4 Configuraciones principales en umbílicos Darbouxianos.

**3.27.** Gracias al lema 3.18, se puede pensar al igual que en **3.8**, que  $\mathfrak{L}_v \neq 0$ , y por tanto, usar las coordenadas locales  $u, p$  en  $LS$  para los ceros de  $\mathfrak{L}'$ . Es decir escribiendo  $v = g(u, p)$  se tiene que  $\mathfrak{L}(u, g(u, p), p = \frac{dv}{du}) \equiv 0$ . Por eso, al proyectar el campo  $\mathfrak{L}'$  sobre el  $(u, p)$ -plano, este campo se escribe como  $\tilde{\mathfrak{L}}' = \mathfrak{L}_p \partial / \partial u - (\mathfrak{L}_u + p \mathfrak{L}_v) \partial / \partial p$ . De aquí el Jacobiano de  $\tilde{\mathfrak{L}}'$  es

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{L}_{pu} & \mathfrak{L}_{pp} \\ -(\mathfrak{L}_u + p \mathfrak{L}_v)_u & -(\mathfrak{L}_u + p \mathfrak{L}_v)_p \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el determinante del Jacobiano de  $\mathcal{L}'$  en  $p_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  es  $\Delta = -(b - a)(2b - a)$ , o que es lo mismo  $\Delta = -b^2(1 - a/b)(2 - a/b)$ .

**3.28.** Las configuraciones ilustradas en las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 están hechas por el siguiente análisis:

- En el caso  $D_1$ , analizar que tipo de singularidad es  $p_0$  es sencillo, pues en  $p_0$  el determinante Jacobiano  $\Delta$  es negativo, y por ello, de acuerdo a lo analizado en **3.24** en un punto umbílico del tipo  $D_1$ , solo hay una dirección posible dada por  $p_0$ , con lo cual se tiene una única singularidad de  $\mathcal{L}'$  de tipo silla.
- En el caso  $D_3$ , se tienen tres singularidades. Si se analiza en particular, que tipo de singularidad es  $p_0$ , es también sencillo, pues en  $p_0$  el determinante Jacobiano  $\Delta$  también es negativo, con lo cual se tiene que  $p_0$  es una singularidad de  $\mathcal{L}'$  de tipo silla. Para las otras dos singularidades  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , considere la carta  $(u', v')$  que tome este punto como el origen, es decir, que considere la dirección  $p_i = p'_0$  como la dirección  $p_0$ . Además, como la condición  $D_3$  no depende de esta, entonces el determinante Jacobiano en términos de esta carta es  $\Delta = -(b')^2(1 - a'/b')(2 - a'/b')$ , que en  $p'_0 = 0$  es negativo. Por tanto, en un punto umbílico del tipo  $D_3$  todas las singularidades del campo  $\mathcal{L}'$  son de tipo silla.
- En el caso  $D_2$ , se tienen dos posibilidades para  $p_0$  :
  1. si  $1 < a/b < 2$ , entonces  $\Delta > 0$ . Por tanto,  $p_0$  es una singularidad de tipo nodo, pues la traza no puede anularse ya que no se tienen trayectorias periódicas, es decir los  $p_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  son todos reales.
  2. si  $a/b > 2$  entonces  $\Delta < 0$ . Por tanto,  $p_0$  es una singularidad de tipo silla.

Cualquier punto del campo  $\mathcal{L}'$ , por una carta apropiada, puede ser llevado al origen, y a su vez la condición  $D_2$  no depende de esta carta. Por eso, por el análisis previo, se tiene que una de las singularidades de  $\mathcal{L}'$ , la que se encuentra en el medio, debe ser un nodo, y las otras dos sillas. (vea figura 3.7).

*Observación 3.29.*

1. La interpretación de la condición  $T$  junto la apertura de cada una de las condiciones  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , implican que el punto umbílico del tipo  $D_i$  depende continuamente de pequeñas perturbaciones  $C^3$ .
2. Las separatrices umbilicales asociadas dependen continuamente sobre cada parte compacta de la superficie, al igual que las separatrices de sus levantamientos  $\mathcal{L}'$ , que se definen por proyección.

### 3.5 Generacidad de las condiciones Darbouxianas

**3.30.** Sea  $S$  una superficie compacta que posee puntos umbílicos. El conjunto umbilical  $U_S$  resulta ser: (1) un conjunto finito discreto, e.i. los puntos umbílicos son aislados, como es el caso del vértice en un paraboloides de revolución, del elipsoide triaxial de Monge, etc, (2) un conjunto infinito formando una curva en la superficie, en la cual la curvatura principal ( $k = k_1 = k_2$ ) es variable a lo largo de la curva, como es el caso de la superficie de Vieira  $S = (e^{au} \cos u \cos v, e^{au} \sin u \cos v, e^{au} \sin v)$ ,  $-4 < u < 2$ ,  $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ , o (3) una región bidimensional en la superficie, como es el caso de una esfera o un plano. Por tanto, este puede ser cubierto por un número finito de dominios de cartas de Monge  $(u, v)$ , centradas en el umbílico, cuyas imágenes son discos, y donde la vecindad parametrizada es la gráfica de una función  $h(u, v)$  (vea proposición 1.14, y **3.12**). Así, sea  $\mathbf{S}$  la superficie que es la gráfica de una función suave  $h : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  definida en un subconjunto abierto  $U \in \mathbb{R}^2$ .

Denote por  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu} = \mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}(\mathbf{h})$  la superficie que es la gráfica de la función

$$\tilde{h} = \tilde{h}(h; u, v; \varepsilon, \mu) = h(u, v) + \varepsilon uv + \frac{1}{2} \mu u,$$

con  $(\varepsilon, \mu) \in \mathbb{R}^2$  y  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lema 3.31.** Sean  $D \subset U$  un disco compacto en donde se cumple:

$$a_0 = v h_v h_{vv} + u h_u h_{vv} - 2 u h_v h_{uv} - 1 - (h_v)^2 \neq 0, \quad y$$

$$b_0 = 2 u h_u h_{vv} - 1 - (h_v)^2 \neq 0,$$

y  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(D)$  el conjunto de puntos  $(\varepsilon, \mu)$  con la cual todo punto umbílicos de la superficie  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$  en  $(u, v)^{-1}(D)$ , satisface la condición **T** de transversalidad. Entonces, existe  $r > 0$  pequeño tal que la intersección de  $\mathcal{T}$  con el disco de radio  $r$  tiene medida total de Lebesgue.

*Demostración.* Al igual que en 3.14, las líneas principales de la superficie  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$  descrita por  $\tilde{h}$  en términos de la carta  $(u, v)$ , están dadas por

$$A(u, v; \varepsilon, \mu) dv^2 + B(u, v; \varepsilon, \mu) du dv + C(u, v; \varepsilon, \mu) du^2 = 0,$$

donde

$$A = A(h; u, v; \varepsilon, \mu) = -(1 + \tilde{h}_v^2) \tilde{h}_{uv} + \tilde{h}_u \tilde{h}_v \tilde{h}_{vv},$$

$$B = B(h; u, v; \varepsilon, \mu) = (1 + \tilde{h}_u^2) \tilde{h}_{vv} - (1 + \tilde{h}_v^2) \tilde{h}_{uu},$$

$$C = C(h; u, v; \varepsilon, \mu) = (1 + \tilde{h}_u^2) \tilde{h}_{uv} - \tilde{h}_u \tilde{h}_v \tilde{h}_{uu}.$$

Aquí,  $C$  no juega un rol esencial en la transversalidad como se vio en **3.15** y en la observación 3.20.

Los ceros comunes de las funciones  $A$  y  $B$ ; es decir, el conjunto

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2(\mathbf{h}) = \{(u, v; \varepsilon, \mu) : A(u, v; \varepsilon, \mu) = 0 \text{ y } B(u, v; \varepsilon, \mu) = 0\}$$

representan los lugares donde la superficie  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$  tiene puntos umbílicos. Justamente en los umbílicos transversales,  $\mathbf{U}_2$  es regular y, localmente, es un gráfico sobre el  $(u, v)$ -plano. En este sentido,  $\frac{\partial(A, B)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , en particular se supondrá que  $a_0 < 0$  y  $b_0 < 0$ , con lo cual se tendrá  $\frac{\partial(A, B)}{\partial(u, v)} > 0$ .

Por su parte, si  $(\varepsilon, \mu)$  es lo suficientemente pequeño,  $\mathbf{U}_2$  también es regular en los puntos umbílicos no transversales, sobre  $D$ . Aquí los niveles  $A(h; u, v; \varepsilon, \mu) = 0$  y  $B(h; u, v; \varepsilon, \mu) = 0$  son mutuamente ortogonales a lo largo de de la superficie  $\mathbf{U}_2(\mathbf{h})$ .

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} A(h; u, v; \varepsilon, \mu) &= (h_u + \varepsilon v + \mu u)(h_v + \varepsilon u)h_{vv} - (1 + (h_v + \varepsilon u)^2)(h_{uv} + \varepsilon) \\ &= (h_u h_v h_{vv} - (1 + h_v)^2)h_{uv} + \\ &\quad + \varepsilon(v h_v h_{vv} + \mu u^2 h_{vv} + u h_u h_{vv} - 2u h_v h_{uv} - 1 - (h_v)^2) + \\ &\quad + \varepsilon^2(uv h_{vv} - u^2 h_{uv} - 2u h_v) - \varepsilon^3 u^2. \end{aligned}$$

Esto implica que en  $D$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(h; u, v; 0, 0) &= v h_v h_{vv} + u h_u h_{vv} - 2u h_v h_{uv} - 1 - (h_v)^2, \\ &= a_0 < 0, \end{aligned}$$

$$A_\mu(h; u, v; 0, 0) = 0.$$

También,

$$\begin{aligned} B(h; u, v; \varepsilon, \mu) &= (1 + (h_u + \varepsilon v + \mu u)^2)h_{vv} - (1 + (h_v + \varepsilon u)^2)(h_{uu} + \mu), \\ &= (1 + h_u + \varepsilon v)^2 h_{vv} - (1 + (h_v + \varepsilon u)^2)h_{uu} + \\ &\quad + \mu[2u h_u h_{vv} - 1 - (h_v)^2 - 2\varepsilon u h_v - (\varepsilon u)^2] + \mu^2 u^2 h_{vv}. \end{aligned}$$

Esto implica que en  $D$ ,

$$B_\varepsilon(h; u, v; 0, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} B_\mu(h; u, v; 0, 0) &= 2u h_u h_{vv} - 1 - (h_v)^2, \\ &= b_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $\frac{\partial(A, B)}{\partial(u, v)} > 0$ , para  $\|(\varepsilon, \mu)\| < r$  lo suficientemente pequeño, con  $(u, v) \in D$ . Por tanto, con esto se concluye la suavidad de  $\mathbf{U}_2$ .

Para finalizar la prueba, se puede notar que el conjunto  $\mathcal{T}$  se puede identificar con el conjunto de valores regulares de la proyección ortogonal de  $\mathbf{U}_2$  sobre el  $(\varepsilon, \mu)$ -plano. Finalmente, a consecuencia del Teorema de Sard, se tiene que el conjunto de valores regulares  $\mathcal{T}$  tiene medida total. Esto concluye la prueba.  $\square$

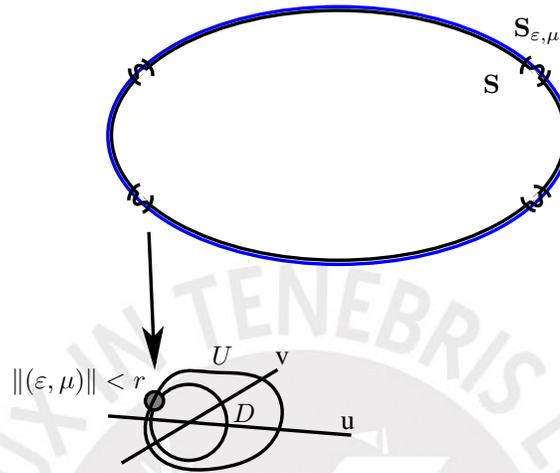


Figura 3.9: Perturbación de un punto umbílico no Darbouxiano a un umbílico Darbouxiano.

**Proposición 3.32.** ([GS82]) *El conjunto de superficies compactas suaves donde todos sus puntos umbílicos son Darbouxianos es  $C^3$  abierto y denso.*

*Demostración.* El conjunto  $\mathbb{L}\mathcal{S}$  es una subvariedad de  $P^{-1}(S)$ , siendo  $P : \mathbb{P}\mathcal{S} \rightarrow S$ , definida en  $\mathbb{P}\mathcal{S}$ . Requiriendo en el proceso que la función definida en 3.30 admita derivadas hasta de orden 3. Por eso, el conjunto  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$  es  $C^3$ -abierto.

Para demostrar la densidad, la idea es usar la técnica de perturbaciones de cada disco, usada en el lema anterior, garantizando que los puntos umbílicos sean del tipo Darboux y que en cada uno de estos se cumpla a condición de transversalidad. Aquí, una vez satisfecha la condición  $T$ , en todo punto umbílico, la condición  $D$  puede ser obtenida haciendo pequeños cambios locales, en un número finito, al coeficiente “a” en cada punto umbílico. Además que, el conjunto constituido por los puntos  $(\mu, \varepsilon)$  tiene medida total. Por tanto, el conjunto de superficies  $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$  es  $C^3$ -denso.  $\square$

## Capítulo 4

# Ciclos Principales

*Este capítulo, está enfocado al estudio de los ciclos hiperbólicos. Se empieza definiendo un ciclo hiperbólico, para luego hacer la construcción de ciclos hiperbólicos para ciclos principales; requisito para el Teorema de Estructura. Las referencias sobre el contenido del presente capítulo son [GS98, GS82].*

### 4.1 Cartas Principales y la aplicación de transición.

**4.1.** Un **arco de curvatura** de una línea principal mínima  $\gamma_1$ , es decir de  $F_1$ , es una porción de una línea principal mínima, que une un punto  $p_1$  a un punto  $p_2$  en  $S$ . Se puede establecer que puede ser orientado; esto se debe a que se puede elegir un campo vectorial  $e_1$  de vectores tangentes en una vecindad de  $\gamma_1$ . Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  líneas principales de  $F_2$ , parametrizadas por las longitudes de arco  $s_1$  y  $s_2$ , respectivamente, y orientadas de modo que  $e_2(p_1)$  y  $e_2(p_2)$  junto con  $e_1$  induzcan la misma orientación en la superficie  $S$ ; donde  $p_1 \in \Gamma_1$  y  $p_2 \in \Gamma_2$ . Esto se logra restringiendo el campo vectorial  $e_2$  a una vecindad de  $\gamma_1$ . Las integrales primeras  $u$  de  $e_1$  y  $v$  de  $e_2$ , en la vecindad de  $\gamma_1$ , definen una carta  $(u, v)$ ; siendo  $u = \text{constante}$  y  $v = \text{constante}$ , líneas coordenadas de  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente. Esta carta es llamada **carta principal**, que en términos de las formas fundamentales está caracterizada por las ecuaciones  $F = 0$  y  $f = 0$  (vea **1.16**). Con el propósito de poder medir la variación de la longitud de la curva a  $\Gamma_1(p_1)$ , cuando es trasladada hacia  $\Gamma_2(p_2)$ , se define la **aplicación de transición**, como sigue:

**Definición 4.2.** Sean  $\gamma_1$ , un arco de una línea principal mínima que une un punto  $p_1$  a un punto  $p_2$  en  $S$ , y sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  líneas principales de  $F_2$  con las propiedades descritas anteriormente. La **aplicación de transición** de  $\Gamma_1(p_1)$  a  $\Gamma_2(p_2)$ ,

$$\Pi : \Gamma_1(p_1) \longrightarrow \Gamma_2(p_2),$$

denotada por  $s_2 = \Pi(s_1)$ , en parametrización de longitud de arco, es definida por líneas de  $F_1$  en una vecindad de  $\gamma_1$ ; es decir, por el flujo del campo vectorial  $e_1$  alrededor de  $\gamma_1$ .

Usando la carta principal  $(u, v)$ , en donde se asume que las coordenadas  $u$  en  $\gamma_1$  y  $v$  en  $\Gamma_1$  son las longitudes de arco. Esto es,  $E(u, 0) = 1$  y  $G(0, v) = 1$ , que después de reemplazar en la primera forma fundamental, se obtiene una forma más explícita de la aplicación de transición:

$$s_2 = \Pi(s_1) = \int_{[0, s_1]} \sqrt{G(l, v)} dv,$$

donde  $l$  es la longitud de arco de  $\gamma_1$ .

## 4.2 Derivada de aplicación de transición

4.3. Para obtener la derivada de  $s_2 = \Pi(s_1)$ , se tiene en cuenta:

- (i)  $G_u = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle$ ,
- (ii)  $N_{uv} = N_{vu}$ , y
- (iii) Ecuación de Rodrigues  $(DN - kI)v = 0$ .

Usando (iii), se obtiene las Ecuaciones de Rodrigues

$$N_u = -k_1 X_u \quad \text{y} \quad N_v = -k_2 X_v. \quad (4.1)$$

Derivando con respecto a  $u$  y  $v$ , respectivamente, se obtiene:

$$N_{uv} = -k_{1v} X_u - k_1 X_{uv}, \quad \text{y} \quad N_{vu} = -k_{2u} X_v - k_2 X_{vu}.$$

Igualando,  $N_{uv} = N_{vu}$ , se obtiene:

$$X_{uv} = \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v. \quad (4.2)$$

Sustituyendo en (i),

$$\begin{aligned} G_u &= 2 \left\langle \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v, X_v \right\rangle = -2 \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} \langle X_v, X_v \rangle, \\ &\Rightarrow \frac{G_u}{G} = -2 \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Integrando en cada punto de cualquier curva  $\gamma$ , en la vecindad de  $\gamma_1$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{G_u}{G} &= \int_{\gamma} 2 \frac{-k_{2u}}{k_2 - k_1}, \\ \frac{1}{2} \ln G &= \int_{\gamma} \frac{-k_{2u}}{k_2 - k_1}, \end{aligned}$$

y por propiedad de la función logaritmo,

$$G^{\frac{1}{2}} = \exp \int_{\gamma} \frac{-k_{2u}}{k_2 - k_1}.$$

Por tanto, la derivada de la aplicación de transición

$$s_2 = \Pi(s_1) = \int_{\gamma} \sqrt{G},$$

en una vecindad de  $\gamma_1$ , queda definida así:

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \exp \int_{\gamma} \frac{-k_2 u}{k_2 - k_1}. \tag{4.4}$$

*Observación 4.4.* Si se quiere evaluar el comportamiento mirando las líneas de  $F_2$ , se hace el mismo análisis, cambiando  $F_1$  por  $F_2$ . Así, la aplicación de transición actúa a lo largo de una línea principal  $\gamma_2$  de  $F_2$ . También se usa la expresión  $E_v = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle$ , para finalmente obtener

$$\frac{ds_2}{ds_1} = \exp \int_{\gamma} \frac{k_1 v}{k_2 - k_1} = \exp \int_{\gamma} \frac{dk_1}{k_2 - k_1}.$$

### 4.3 Ciclos Principales Hiperbólicos

**Definición 4.5.** Sean  $\gamma_1$ , un ciclo principal mínimo orientado, y  $\Gamma_1, \Gamma_2$  líneas principales de  $F_2$  (como en la definición 4.2). Cuando  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ , se tiene la **Aplicación de Retorno o Aplicación de Poincaré** asociado a  $\gamma_1$ . La aplicación de primer retorno de Poincaré  $\Pi$  esta definida por líneas de la foliación a la cual  $\gamma_1$  pertenece, definido en un segmento de una línea ortogonal a la foliación a través de 0 en  $\gamma_1$ . **El exponente hiperbólico**  $\eta = \eta(\gamma_1)$ , asociado a  $\gamma_1$ , se define como el logaritmo de la derivada de la aplicación de transición  $s_2 = \Pi(s_1)$ , definido en líneas  $\gamma$  de  $F_1$ , en una vecindad de  $\gamma_1$ , esto es, siguiendo la dirección del campo vectorial  $e_1$  a lo largo de un recorrido positivo. Luego, usando la ecuación (4.4), se tiene una expresión para el exponente hiperbólico  $\eta = \eta(\gamma_1)$  asociado a  $\gamma_1$  :

$$\eta(\gamma_1) = \log \Pi'(0) = - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1}.$$

También, se puede expresar en la forma equivalente

$$\eta(\gamma_1) = \log \Pi'(0) = - \int_{\gamma} \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}},$$

donde  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  es la Curvatura Media y  $K = k_1 \cdot k_2$  es la Curvatura Gaussiana.

Un ciclo es llamado de tipo **H** o **hiperbólico** si  $\Pi'_0 \neq 1$ , y de tipo **SH** o **semi-hiperbólico** si  $\Pi'_0 = 1$  y  $\Pi''_0 \neq 0$  (vea figura 4.1). En términos del exponente hiperbólico, un ciclo principal es llamado **ciclo principal Hiperbólico** si su exponente hiperbólico no se anula.

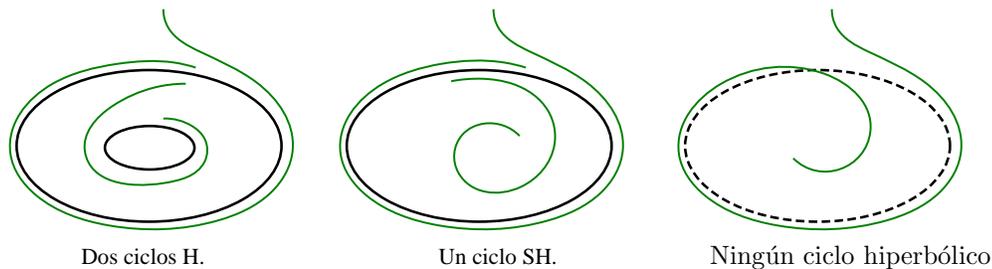


Figura 4.1: Ciclo hiperbólico y semi-hiperbólico.

### 4.3.1 Construcción de un Ciclo Principal Hiperbólico

**Definición 4.6.** Sea  $\gamma_1$  un ciclo principal mínimo, y sea  $T = T(\pi, r, \gamma_1)$  una vecindad tubular asociada a  $\gamma_1$ , donde  $\pi$  es la función proyección y  $r$  es el radio. En  $E^3$  se define el conjunto de aplicaciones

$$D_\varepsilon : E^3 \longrightarrow E^3$$

$$p \longmapsto \begin{cases} p + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\left(\frac{p-\pi(p)}{r}\right) \cdot k'_1(\pi(p))|p - \pi(p)|^2 N(\pi(p)), & p \in T; \\ p, & p \notin T \end{cases}$$

siendo llamado cada  $D_\varepsilon$ , **deformación** de la vecindad tubular asociada a  $\gamma_1$ . Aquí,  $\gamma_1$  esta orientado por la elección del campo tangente  $e_1$ . Por ello,  $k'_1$  adquiere la notación estándar  $e_1 \cdot k_1 = dk_1 \cdot e_1$ .

**4.7.** Para  $\varepsilon$  pequeño, sea  $D_\varepsilon$  un difeomorfismo tal que  $S_\varepsilon = D_\varepsilon(S)$  es una superficie tangente a  $S$ , a lo largo de  $\gamma_1$ . De ahí que  $\gamma_1$  también es un ciclo principal en  $S_\varepsilon$ . Las curvaturas principales a lo largo de  $S_\varepsilon$ , están dadas por

$$k_1(\varepsilon, s) = k_1(s), \quad k_2(\varepsilon, s) = k_2(s) + \varepsilon k'_1(s).$$

Con ello, el exponente hiperbólico<sup>1</sup>  $\eta(\gamma_1, \varepsilon)$  asociado a  $\gamma_1$  (vea definición 4.5) en la superficie  $S_\varepsilon$ , queda dado por

$$\eta(\gamma_1, \varepsilon) = \int_\gamma \frac{k'_1}{k_2 - k_1 + \varepsilon k'_1}$$

Esta expresión puede ser reescrita del siguiente modo

$$\frac{k'_1}{k_2 - k_1 + \varepsilon k'_1} = \frac{k'_1}{k_2 - k_1} - R_1$$

$$\text{donde } R_1 = \frac{\varepsilon(k'_1)^2}{(k_2 - k_1)^2 + (k_2 - k_1)\varepsilon k'_1},$$

la cual también puede ser reescrita como

$$= \frac{\varepsilon(k'_1)^2}{(k_2 - k_1)^2} - R_2$$

$$\text{donde } R_2 = \frac{\varepsilon^2(k'_1)^3}{(k_2 - k_1)^3 + (k_2 - k_1)^2\varepsilon k'_1} = O(\varepsilon^2),$$

Finalmente, la expresión del exponente hiperbólico asociado a  $\gamma_1$ , en  $S_\varepsilon$ , queda expresada por

$$\eta(\gamma_1, \varepsilon) = \int_\gamma \frac{k'_1}{k_2 - k_1} + \int_\gamma \frac{(k'_1)^2}{(k_2 - k_1)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.5)$$

Esto demuestra que si

$$k_1|_{\gamma_1} \text{ no es idénticamente constante,} \quad (4.6)$$

$\gamma_1$  es un ciclo principal hiperbólico de  $S_\varepsilon$ , para  $\varepsilon \neq 0$  pequeño (vea definición 4.5).

<sup>1</sup>La tangencia de las superficies  $S$  y  $S_\varepsilon$ , a lo largo de  $\gamma_1$ , origina que la perturbación de las líneas principales se vean afectadas principalmente en  $F_2$ . De ahí que usa la relación equivalente del exponente hiperbólico dada en la observación 4.4.

*Observación 4.8.* La condición obtenida en 4.6 será llamada **la propiedad de curvatura variable** a lo largo de  $\gamma_1$ ; este resultado será importante cuando se quiere aplicar el método de hiperbolización de ciclos principales, es decir, obtener mediante pequeñas deformaciones (perturbaciones) ciclos principales hiperbólicos a partir de ciclos principales no hiperbólicos. Al final de esta sección se verá el alcance que tiene esta propiedad para todo ciclo principal, por una pequeña deformación de la superficie.

La siguiente proposición muestra el camino para pasar de ciclos principales a ciclos principales hiperbólicos. Una versión más analítica, de este resultado se encuentra en [GS83, corolario 3.2.4].

**Proposición 4.9.** Sea  $\gamma_1$  un ciclo principal mínimo con multiplicidad  $n$ . Si  $\gamma_1$  tiene multiplicidad<sup>2</sup>  $n$  par (resp. impar) y  $k_1|_{\gamma_1}$  no es idénticamente constante, entonces existe una vecindad  $U_0$  de  $\gamma_1$  tal que para  $\varepsilon$  pequeño, de signo apropiado, la deformación del difeomorfismo  $D_\varepsilon$  tiene en  $U_0$  un solo ciclo principal diferente (resp. no tiene ciclo principal diferente) de  $\gamma_1$ , la cual es además hiperbólico.

*Demostración.* El en caso que  $\gamma$  tenga multiplicidad par, corresponde a un ciclo principal semiestable, en este caso se procede a realizar la deformación  $D_\varepsilon$ , (definición 4.6), con signo apropiado de  $\varepsilon$ , para el ciclo atractor. Obteniendo de esta forma un único ciclo hiperbólico repulsor en la vecindad de  $\gamma$ .

Para el caso que  $\gamma$  tenga multiplicidad impar, se puede asumir que  $\gamma$  sea un atractor, en cuyo caso se tendrá que elegir el signo de  $\varepsilon$  para hacer de este, por medio de la deformación  $D_\varepsilon$ , un ciclo hiperbólico atractor. Aquí,  $\varepsilon$  es elegido adecuadamente para asegurarse de no producir otro ciclo principal en las inmediaciones de  $\gamma$  a causa de la deformación.  $\square$

## 4.4 La variación infinitesimal

El objetivo de esta sección es obtener una expresión para la variación infinitesimal de las líneas principales mínimas, pasando a través de un punto, bajo una pequeña deformación de la superficie en dicho punto.

### 4.4.1 Cálculos preliminares

**4.10.** Sea  $S$  una superficie y  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$ , una carta principal; donde  $U \subset S$ ,  $V$  es el conjunto de líneas principales de  $U$ , e  $I = [-1, 1]$ . Considerar además que las líneas principales mínimas están dadas por  $v = c$  y que la orientación de la carta es positiva: la

<sup>2</sup>Es decir,  $\Pi^n(0) \neq 0$  y  $\Pi^i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, i-1$ . Aquí  $\Pi : L_0 \rightarrow L$  es la aplicación de Poincaré de primer retorno de  $\gamma$ , definido en el arco transversal  $L_0 \subset L$  que cruza  $L_0$  en 0, y que es definido por la foliación mínima de  $\alpha$ .

normal positiva es el vector dado por

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}}{\left| \frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} \right|}.$$

Sea  $\varphi$  una función suave en  $U$ , y supóngase que para todo  $r$  pequeño,

$$U_r = (I + r\varphi N)(U)$$

es una superficie.

Denótese por

$$\begin{aligned} E &= E(u, v; r), & F &= F(u, v; r), & G &= G(u, v; r), \\ e &= e(u, v; r), & f &= f(u, v; r) & y & g = g(u, v; r), \end{aligned}$$

a los coeficientes de las formas fundamentales en relación a la carta  $(u, v)$  en  $U_r$ . La parametrización inversa  $X$ , de la carta  $(u, v)$  en  $U_r$ , está dada por

$$X = X(u, v; r) = X(u, v; 0) + r\varphi(u, v)N(u, v). \quad (4.7)$$

**4.11.** La  $v$ -coordenada,  $v = v(u, q; r)$ , del punto donde la línea principal mínima de  $U_r$ ; pasando por  $q_r = q + r\varphi N$  en  $\{u = -1\} \cap \{-1 < v < 1\}$ , se encuentra con la curva de abscisa  $\{u\}$ , satisface el siguiente problema de Cauchy (i.e. Valor Inicial) con parámetro  $r$  (vea ecuación (2.1)):

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 [Fg - Gf] + \left(\frac{dv}{du}\right) [Eg - Ge] + [Ef - Fe] = 0; \quad v = (-1, r) = v(q). \quad (4.8)$$

Siendo  $(u, v)$  una carta principal en  $U_0$ , resulta que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{du}\right)(u, q; 0) &= 0, & e(\cdot; 0) &= E(\cdot; 0)k_1(\cdot; 0), \\ g(\cdot; 0) &= G(\cdot; 0)k_2(\cdot; 0) & y & F(\cdot; 0) = f(\cdot; 0) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

(vea **1.24**). Al derivar con respecto a  $r$  la expresión dada en la ecuación (4.8), en el punto  $(u, v(q); r)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{dv}{du}\right)\left(\frac{dv_r}{du}\right)[Fg - Gf] + [Fg - Gf]_r + \left(\frac{dv_r}{du}\right)[Eg - Ge] + \\ + \left(\frac{dv}{du}\right)[Eg - Ge]_r + [Ef - Fe]_r = 0; \quad v_r(-1) = 0. \end{aligned}$$

Luego de evaluar en  $r = 0$ , usando la ecuación (4.9) se reduce a lo siguiente:

$$\left(\frac{dv_r}{du}\right)[Fg - Gf] + [Fg - Gf]_r = 0; \quad v_r(-1) = 0.$$

Usando las restantes ecuaciones en 4.9, se obtiene:

$$\frac{dv_r}{du} = -\frac{Ef_r - F_r e}{EG(k_2 - k_1)}(u, v(q); 0); \quad v_r(-1) = 0. \quad (4.10)$$

**4.12.** Este párrafo, está enfocado en la obtención de una expresión para  $v_r(u)$ . A partir de la parametrización inversa  $X$ , de la carta  $(u, v)$  en  $U_r$ , (vea ecuación (4.7)), se obtiene:

$$\begin{aligned} X_u(\cdot; r) &= (1 - rk_1\varphi)X_u(\cdot; 0) + r\varphi_u N, \\ X_v(\cdot; r) &= (1 - rk_2\varphi)X_v(\cdot; 0) + r\varphi_v N. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A partir de aquí, se obtiene una expresión para  $F(\cdot; r) = \langle X_u, X_v \rangle$ ; esto es:

$$\begin{aligned} F(\cdot; r) &= (1 - rk_1\varphi)(1 - rk_2\varphi)\langle X_u(\cdot; 0), X_v(\cdot; 0) \rangle + (1 - rk_1\varphi)r\varphi_v\langle X_u(\cdot; 0), N \rangle + \\ &+ r\varphi_u(1 - rk_2\varphi)\langle N, X_v(\cdot; 0) \rangle + r^2\varphi_u\varphi_v\langle N, N \rangle, \end{aligned}$$

$$F(\cdot; r) = r^2\varphi_u\varphi_v\langle N, N \rangle.$$

Con esto, se ve que cuando se evalúa en  $(u, v(q); 0)$ , se anula. Por tanto, su aporte en la obtención de  $v_r(u)$  es nula (vea ecuación (4.10)). Ahora se obtendrá una expresión para  $f_r$ . Usando la ecuación (A.7), se tiene que  $f$ , coeficiente de la segunda forma fundamental, se obtiene mediante

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, X_{uv} \right\rangle,$$

de aquí,

$$|X_u \wedge X_v|f = \langle X_u \wedge X_v, X_{uv} \rangle.$$

Derivando esta última igualdad respecto a  $r$ , se obtiene:

$$|X_u \wedge X_v|_r f + |X_u \wedge X_v|f_r = \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle,$$

al evaluar en  $(\cdot; 0)$ , se obtiene:

$$|X_u \wedge X_v|f_r = \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle,$$

la cual, usando lo obtenido en la ecuación (A.4), se tiene:

$$\sqrt{EG}f_r = \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle + \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle. \quad (4.12)$$

Para hacer esto más explícito, es necesario conocer  $X_{uv}(\cdot; 0)$ ,  $X_{uvr}(\cdot; 0)$ ,  $X_{ur}(\cdot; 0)$  y  $X_{vr}(\cdot; 0)$ .

En la ecuación (4.2), se encontró una expresión para  $X_{uv}$ , con lo cual,

$$X_{uv}(\cdot; 0) = \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1}X_u(\cdot; 0) - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1}X_v(\cdot; 0). \quad (4.13)$$

A partir de la ecuaciones (4.12) y (4.11), se tiene:

$$\begin{aligned} X_{uvr} &= -k_1\varphi X_{uv}(\cdot; 0) + \varphi_{uv}N + r\varphi_{uv}N_r - \varphi_u k_2 X_v(\cdot; 0) + r\varphi_u k_2 X_{vr}(\cdot; 0) + \\ &- (k_{1v}\varphi + k_1\varphi_v)X_u(\cdot; 0) - r(k_{1v}\varphi + k_1\varphi_v)X_{ur}(\cdot; 0), \\ X_{ur} &= (-k_1\varphi)X_u(\cdot; 0) + (1 - rk_1\varphi)X_{ur}(\cdot; 0) + \varphi_u N + r\varphi_u N_r, \end{aligned}$$

y

$$X_{vr} = (-k_2\varphi)X_v(\cdot; 0) + (1 - rk_2\varphi)X_{vr}(\cdot; 0) + \varphi_v N + r\varphi_v N r.$$

Luego de evaluar para  $r = 0$ , y sustituir  $X(\cdot; 0)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} X_{uvr} \Big|_{r=0} &= -k_1\varphi \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) + k_1\varphi \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0) + \\ &\quad + \varphi_{uv} N - \varphi_u k_2 X_v(\cdot; 0) + (-k_{1v}\varphi - k_1\varphi_v) X_u(\cdot; 0), \\ X_{ur} \Big|_{r=0} &= -k_1\varphi X_u(\cdot; 0) + \varphi_u N, \end{aligned}$$

y

$$X_{vr} \Big|_{r=0} = -k_2\varphi X_v(\cdot; 0) + \varphi_v N.$$

Con todo esto, se procede a efectuar cada sumando de la ecuación (4.12),

$$\begin{aligned} \langle X_{ur} \wedge X_v, X_{uv} \rangle \Big|_{r=0} &= \langle X_{ur}, X_v \wedge X_{uv} \rangle \Big|_{r=0}, \\ &= \langle -k_1\varphi X_u(\cdot, 0) + \varphi_u N, -\frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} \|X_u(\cdot; 0) \wedge X_v(\cdot; 0)\| N \rangle, \\ &= \langle \varphi_u N, -\frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} \|X_u(\cdot; 0) \wedge X_v(\cdot; 0)\| N \rangle, \\ &= -\frac{\varphi_u k_{1v}}{k_2 - k_1} \sqrt{EG}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \langle X_u \wedge X_{vr}, X_{uv} \rangle \Big|_{r=0} &= \langle -k_2\varphi \sqrt{EG} N + \varphi_v X_u(\cdot; 0) \wedge N, \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0) \rangle, \\ &= \langle \varphi_v X_u(\cdot; 0) \wedge N, \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0) \rangle \\ &= -\langle N \wedge \varphi_v X_u(\cdot; 0), \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0) \rangle, \\ &= -\langle N, \varphi_v X_u(\cdot; 0) \wedge [\frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) - \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0)] \rangle, \\ &= -\langle N, -\varphi_v \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} \sqrt{EG} N \rangle, \\ &= \frac{\varphi_v k_{2u}}{k_2 - k_1} \sqrt{EG}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \langle X_u \wedge X_v, X_{uvr} \rangle \Big|_{r=0} &= \langle X_u(\cdot; 0) \wedge X_v(\cdot; 0), -k_1\varphi \frac{k_{1v}}{k_2 - k_1} X_u(\cdot; 0) + k_1\varphi \frac{k_{2u}}{k_2 - k_1} X_v(\cdot; 0) + \\ &\quad + \varphi_{uv} N - \varphi_u k_2 X_v(\cdot; 0) + (-k_{1v}\varphi - k_1\varphi_v) X_u(\cdot; 0) \rangle, \\ &= \langle \sqrt{EG} N, \varphi_{uv} N \rangle, \\ &= \varphi_{uv} \sqrt{EG}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Finalmente, al sustituir en la ecuación (4.12) lo obtenido en las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16), se obtiene:

$$f_r|_{r=0} = \frac{\varphi_v k_{2u} - \varphi_u k_{1v} + \varphi_{uv}(k_2 - k_1)}{k_2 - k_1}. \quad (4.17)$$

Sustituyendo la ecuación (4.17) en la ecuación (4.10), esta queda así:

$$\frac{dv_r}{du}(u, v(q); 0) = -\frac{\varphi_v k_{2u} - \varphi_u k_{1v} + \varphi_{uv}(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2 G}(u, v(q); 0). \quad (4.18)$$

Luego, se integra entre  $-1$  y  $u$ ,

$$v_r(u) = -\int_{-1}^u \frac{\varphi_v k_{2u} - \varphi_u k_{1v} + \varphi_{uv}(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2 G} du. \quad (4.19)$$

Aquí, se puede integrar por partes a:

$$\int_{-1}^u \frac{\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} du = -\int_{-1}^u \varphi \left[ \frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_u du + \left[ \frac{\varphi k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_1^u.$$

y

$$-\int_{-1}^u \frac{\varphi_{uv}}{(k_2 - k_1)G} du = \int_{-1}^u \varphi_v \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)G} \right]_u du - \left[ \frac{\varphi_v}{(k_2 - k_1)G} \right]_1^u.$$

Sustituyendo estos dos resultados en la ecuación 4.17, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_r(u) = & -\int_{-1}^u \varphi_v \left\{ \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)G} \right]_u - k_{2u} \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] \right\} du + \\ & -\int_{-1}^u \varphi \left[ \frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_u du + \left[ \frac{\varphi k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_{-1}^u - \left[ \frac{\varphi_v}{(k_2 - k_1)G} \right]_{-1}^u. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A su vez, usando lo obtenido en la ecuación (4.3), la primera integral en la ecuación (4.20), se puede reescribir así:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)G} \right]_u - k_{2u} \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] &= \frac{-G_u(k_2 - k_1) - G(k_{2u} - k_{1u})}{[G(k_2 - k_1)]^2} - k_{2u} \left[ \frac{1}{G(k_2 - k_1)^2} \right], \\ &= \frac{2Gk_{2u} - G(k_{2u} - k_{1u}) - k_{2u}G}{[G(k_2 - k_1)]^2}, \\ &= \frac{k_{1u}}{G(k_2 - k_1)^2}. \end{aligned}$$

Es así, como finalmente se obtiene una expresión para  $v_r(u)$ ,

$$\begin{aligned} v_r(u) = & \int_{-1}^u \varphi_v k_{1u} \left[ \frac{1}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] du - \int_{-1}^u \varphi \left[ \frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_u du + \\ & + \left[ \frac{\varphi k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_{-1}^u - \left[ \frac{\varphi_v}{(k_2 - k_1)G} \right]_{-1}^u. \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.4.2 Fórmula para una variación infinitesimal

**4.13.** Sea  $S$  una superficie y  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$  una carta principal de  $S$ , con  $I = [-1, 1]$ ; donde se asume que las líneas principales mínimas están dadas por las curvas  $\{v = c\}$  y que la carta es positiva. El siguiente lema caracteriza la fórmula para la variación infinitesimal de una línea principal, bajo una ligera deformación de la superficie, la que está dada por la ecuación (4.21).

**Lema 4.14.** Sea  $\varphi$  una función suave sobre  $U$  que se anula cuando  $\{u = \pm 1\}$ . Si para todo  $r$  pequeño,  $U_r = (I + r\varphi N)(U)$  es una superficie. Entonces las líneas principales mínimas de  $U_r$  sobre  $D_r = I + r\varphi N(D)$ , que pasan por  $q$  en  $\{u = -1\} \cap \{-1 < v < 1\}$ , cruzan el segmento de abscisa  $\{u\}$  en un punto  $q_r(q, u)$ , cuya  $v$ -coordenada tiene derivada respecto a  $r$  es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} q_r(u, v)|_{r=0} = & \int_{-1}^u \varphi_v \left[ \frac{k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] du - \int_{-1}^u \varphi \left[ \frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] du + \\ & + \left[ \frac{\varphi k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right]_{-1}^u - \left[ \frac{\varphi_v}{(k_2 - k_1) G} \right]_{-1}^u. \end{aligned}$$

*Demostración.* Si  $v(-1; 0) = q$  y  $v(-1; r) = q_r$  como en 4.11, entonces la relación obtenida en la ecuación (4.21), a partir de las condiciones y resultados obtenidos en 4.10, 4.11 y 4.12 prueba el lema.  $\square$

*Observación 4.15.* Note que las evaluaciones obtenidas en la ecuación (4.21) se anulan cuando  $u = \pm 1$ . Por tanto, la expresión para  $v_r(u)$  se simplifica a:

$$\frac{d}{dr} q_r(u, v)|_{r=0} = \int_{-1}^1 \varphi_v \left[ \frac{k_{1u}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] du - \int_{-1}^1 \varphi \left[ \frac{k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] du.$$

**Lema 4.16.** Sea  $S$  una superficie y  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$  una carta principal de esta, donde  $I = [-1, 1]$ . Sea  $q = \{u = -1\} \cap \{v = 0\}$  y supóngase que  $dk_1|_{L_1} \neq 0$  sobre  $D$ . Si existe una función suave  $\varphi : S \rightarrow [0, 1]$  con soporte compacto en  $D$  tal que, si  $\varepsilon > 0$  es lo bastante pequeño, entonces para cada  $\mu$  en  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $S_\mu = (I + \mu\varphi N)(S)$  es una superficie y los arcos principales mínimos para  $S_\mu$  sobre  $D_\mu = (I + \mu\varphi N)(D)$ , que pasando por  $q$  se encuentran con el segmento  $\{u = 1\}$  en un punto  $r_\mu(q)$ , generan la aplicación  $\mu \mapsto v(r_\mu(q))$ , la cual es estrictamente creciente.

*Demostración.* Sea  $m : I \rightarrow [0, 1]$  una función suave con valores en  $[0, 1]$ ; que es idénticamente igual a 1 en una vecindad de 0 y con soporte compacto en  $I$  ( $m(\pm 1) = 0$ ). Si se define a  $\varphi$  como

$$\varphi = \varphi(u, v) = bvm(u)m(v),$$

donde  $b \neq 0$ , se tiene que para  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño,  $S_\mu$  es una superficie suave, para cualquier  $\mu \in \varepsilon I$ . Además, en  $D$ , se tiene que  $dk_1|_{L_1} \neq 0$ , lo cual implica que  $k_{1u} \neq 0$

y  $\varphi_v = 0$ . Al derivar  $\varphi$  respecto a  $v$  y luego evaluar en  $(u, 0)$ , se obtiene

$$\varphi_v(u, 0) = bm(u) = 0$$

Así, existe un  $c > 0$  tal que:

$$\int_{-1}^1 bm(u) \left[ \frac{k_1 u}{(k_2 - k_1)^2 G} \right] (u, 0) du = c,$$

donde  $G$  es el coeficiente de  $dv^2$  en la  $(u, v)$ -expresión de la primera forma fundamental de  $S$ . Sea  $v(u), u \in I$ , la  $v$ -coordenada del arco principal mínimo en  $D_\mu = (I + \mu\varphi N(D))$  tal que,  $v(-1) = q$ . Como  $\varphi(u, 0) \equiv 0$ , se sigue del Lema 4.14<sup>3</sup> y de la observación 4.15 que

$$\frac{\partial v}{\partial u}(u) \Big|_{u=1} = c > 0.$$

Esto prueba que  $v(r_\mu(q))$  es estrictamente creciente. □

## 4.5 Curvatura variable en líneas principales

El propósito de esta sección es hacer un estudio sobre las líneas principales de curvatura constante, al igual que su conjunto límite.

**Lema 4.17.** *Sea  $S$  una superficie conteniendo una línea principal mínima  $\alpha$ , tal que  $k_1|_\alpha$  es idénticamente constante e igual a  $c$ . Entonces se cumple que:*

1. Si  $c \neq 0$  (resp.  $c = 0$ ), se tiene una esfera de radio  $\frac{1}{|c|}$  (resp. un plano) tangente a  $S$  a lo largo de la clausura de  $\alpha$ .
2. Si también en  $\alpha$  se tiene  $dk_1|_L \equiv 0$ , entonces existe un plano que cruza ortogonalmente a la superficie  $S$  a lo largo de la curva  $\alpha$ . Además, si  $c = 0$  (resp.  $c \neq 0$ )  $\alpha$  está contenido en una línea recta (resp. en una circunferencia de radio  $\frac{1}{|c|}$ ).
3.  $\alpha$  está incrustada en  $S$ .
4. Si la superficie es  $S$  es analítica,  $\alpha$  es un ciclo principal o su conjunto límite consiste de puntos umbílicos.

*Demostración.* Sea  $\alpha = \alpha(t); t \in I$  una parametrización regular de la línea principal mínima  $\alpha$ , y con curvatura igual a  $c$ . Como  $k_1|_\alpha$  es idénticamente constante e igual a  $c$ , según nuestra experiencia se tendrá que  $\alpha$  es una línea recta (que no presenta curvatura alguna; es decir su curvatura es cero puesto que no se dobla en absoluto) o es una circunferencia (que se dobla lo mismo en todos sus puntos; es decir su curvatura debe ser la misma en todos sus puntos). En el caso que la curvatura  $c \neq 0$ , se tendrá una circunferencia de radio  $\frac{1}{|c|}$  tangente a  $\alpha$ , y

<sup>3</sup>Aplicado a la familia de superficies  $D_\mu = (I + \mu\varphi N(D))$  dependientes del parámetro  $\mu$ .

como  $\alpha$  es la línea principal mínima, se tendrá una esfera envuelta por la superficie  $S$  y que solo es tangente a lo largo de  $\alpha$ . Esto es, por la fórmula de Rodrigues, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left( N(\alpha(t)) + c\alpha(t) \right) \equiv \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c} N(\alpha(t)) + \alpha(t) \right) \equiv \vec{0}.$$

Por tanto, existe un punto  $p \in \mathbb{E}^3$ , centro de la esfera, tal que

$$\frac{1}{c} N(\alpha(t)) + \alpha(t) \equiv p \Rightarrow \alpha(t) \equiv p - \frac{1}{c} N(\alpha(t)).$$

Lo cual implica que la superficie  $S$  es tangente al conjunto

$$\left\{ x : \|x - p\| = \frac{1}{|c|}; x = \alpha(t), t \in I \right\}$$

a lo largo de  $\alpha$ , y por consiguiente también es tangente a lo largo de la clausura de  $\alpha$ .

Análogamente, si  $c = 0$ , el conjunto

$$\left\langle x - \alpha(t_0), N(\alpha(t)) \right\rangle = 0,$$

donde  $t_0 \in \text{Dom}(\alpha)$ , es un plano que contiene a  $\alpha$  y por tanto tangente a  $S$  a lo largo de la clausura de  $\alpha$ . Esto prueba lo afirmado en 1.

Sean  $p \in S$  y  $(u, v) : (U, D, p) \rightarrow (V, I \times I)$ , un punto y una carta principal de  $S$ , respectivamente; donde  $I = [-1, 1]$ . Conociendo que

$$\|X_v(u, 0)\| = G^{1/2}(u, 0),$$

se tiene que después de derivar respecto de  $v$ , la identidad

$$\frac{X_v(u, 0)}{\|X_v(u, 0)\|},$$

al reemplazar en esta lo obtenido en las ecuaciones (4.11) y (4.3), teniendo en cuenta que  $\alpha$  es una línea principal mínima y que además  $dk_1|L \equiv 0$ , esta se anula; esto es:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{X_v(u, 0)}{\|X_v(u, 0)\|} \right) = \frac{X_{vu}(u, 0)G^{1/2}(u, 0) - \frac{1}{2}X_v(u, 0)G^{-1/2}(u, 0)G_u(u, 0)}{G(u, 0)} = 0.$$

Así  $X_v(u, 0)/\|X_v(u, 0)\| \equiv \mathbf{b}$  (movimiento constante) y  $\alpha$  está contenida en un plano ortogonal a  $\mathbf{b}$ , y por tanto, ortogonal a  $S$ . Además por el ítem 1, si  $c = 0$   $\alpha$  está contenida en una línea recta, pero si  $c \neq 0$ ,  $\alpha$  estará contenida en una circunferencia de radio  $\frac{1}{|c|}$ . Con esto se concluye la prueba de 2.

Para probar que  $\alpha$  esta incrustada en  $S$ , se demostrará que su conjunto límite está contenido en  $S$ . Supóngase que el conjunto límite de  $\alpha$  está contenido en la línea principal mínima  $\beta$ . Sea  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$ , una carta principal de  $S$ , donde  $I = [-1, 1]$ , tal que  $\{v = 0\} \subset \beta$ . Entonces se tienen dos posibilidades:

- Exista un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\alpha \cap \{-\varepsilon < v < \varepsilon\} = \{v = 0\}$ , o que
- Exista una secuencia  $\{v_n\}$  en  $I$  convergiendo a 0 tal que, para cada  $n$ ,  $\{v = v_n\} \subset \beta$ .

Si ocurre  $a$ ), como  $\alpha$  está contenida en su propio conjunto límite, entonces ocurre que  $\alpha = \beta$ , en cuyo caso se tendrá que  $\alpha$  es un ciclo principal mínimo. Por el contrario, si  $b$ ) ocurre, en cuyo caso se tendría que  $\alpha$  no es un ciclo principal, entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1(u, v_n) \equiv c$ , y por consiguiente  $k_1(u, 0) \equiv c$ . Así,  $k_{1v}(u, 0) \equiv 0$ , y por el ítem 2, se concluye que  $\beta$  está contenida en una línea estacionaria cuando  $c = 0$ , o está contenida en una circunferencia plana de radio  $1/|c|$  cuando  $c \neq 0$ . Finalmente, para ambos casos se tendría  $\alpha$  está incrustada en  $\beta$ , pues mínimo en ambas se tendría un punto en común, y en particular se puede suponer que  $\alpha = \beta$ . Esto prueba del ítem 3. Para la prueba del ítem 4, supóngase que  $S$  es analítica y que, como arriba, lo afirmado en  $b$ ) se cumple. Entonces, por el ítem 1,  $S$  es tangente o a una esfera o a un plano. Sea  $Q$  el conjunto formado por estos puntos de tangencia; es decir el conjunto formado por  $\{v = 0\} \cup \{v = v_n/n = 1, 2, \dots\} \subset \alpha \cup \beta$ . A su vez, como la superficie  $S$  es analítica, se tiene que  $S = Q$  lo cual es una contradicción. Esto prueba que si la superficie  $S$  es analítica y  $\alpha$  no es un ciclo principal, entonces su conjunto límite consiste solo de puntos umbílicos. Con esto concluye la prueba del lema.  $\square$

En el siguiente Lema se establece la apertura, en el sentido  $C^3$ , de la condición de hiperbolicidad de los ciclos principales.

**Lema 4.18.** *Sea  $S$  una superficie conteniendo una línea principal mínima  $\alpha$  tal que  $k_1|_{\alpha}$  es idénticamente constante e igual a  $c$ . Dada una carta principal  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$  de  $S$ , donde  $I = [-1, 1]$ , tal que  $\{v = 0\} \subset \alpha$  y una de las dos condiciones se cumple:*

$$(a) \text{ para todo } u \in I, k_{1v}(u, 0) \neq 0,$$

$$(b) \text{ para todo } u \in I, k_{1v}(u, 0) = 0,$$

entonces, existe  $\varepsilon > 0$  y una función suave  $\varphi$ ; con soporte en  $D$ , tal que, para todo  $r \in ]-\varepsilon, 0[ \cup ]0, \varepsilon[$ ,  $U_r = (I + r\varphi N)(U)$  es una superficie y, a lo largo de  $\{v = 0\}$ , la curvatura principal mínima de  $U_r$  no es constante.

*Demostración.* Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una función suave con soporte en  $I$ , la cual es igual a 1 en  $(1/2)I$  y tal que, para  $u \leq 0$ ,  $\psi'(u) \geq 0$ . Denote por  $\varphi(u, v) = \psi(u)\psi(v)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tan pequeño que, para todo  $r \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $U_r = (I + r\varphi N)(U)$  es una superficie.

La idea de la prueba, consiste en crear condiciones como las dadas en 4.11, afín de poder aplicar los resultados que se obtuvieron. En primer lugar, como  $\varphi$  restringido a

$$D' = \{-1/2 < u < 1/2\} \cap \{-1/2 < v < 1/2\} \subset D$$

es idénticamente igual a 1, se probará que

$$\text{en } D', k_1(\cdot; r) = \frac{k_1}{1 - rk_1}, \text{ y así } k_{1r}(u, 0; 0) = c^2, \quad (4.22)$$

donde  $k_1(u, v; r)$  es la curvatura principal mínima de  $U_r$  y  $k_1 = k_1(u, v; 0)$ . En efecto, a partir de lo obtenido en las ecuaciones (4.11), en  $D'$ , se cumple que

$$X_u(\cdot; r) = (1 - rk_1)X_u(\cdot; 0), \quad X_v(\cdot; r) = (1 - rk_2)X_v(\cdot; 0), \quad \text{y } N(\cdot; r) = N(\cdot; 0).$$

así:

$$F(\cdot; r) = 0, \quad E(\cdot; r) = (1 - rk_1)^2 E(\cdot; 0), \quad e(\cdot; r) = (1 - rk_1)e(\cdot; 0), \quad \text{y}$$

También, por lo visto en la ecuación (4.13), se tiene que  $f = 0$ . Por tanto, restringido a  $] - 1/2, 1/2[\times] - 1/2, 1/2[$ , la aplicación

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) + r\varphi N(u, v)$$

es una carta principal de  $U_r$ . En la cual se cumple la relación

$$\begin{aligned} e(\cdot; r) &= (1 - rk_1)e(\cdot; 0) = (1 - rk_1)k_1 E(\cdot; 0), \\ &= \frac{k_1 E(\cdot; r)}{(1 - rk_1)}, \end{aligned}$$

con ello, se concluye la prueba de (4.22) (vea **1.24**).

Ahora, se procederá a la prueba del lema; es decir, a lo largo de  $\{v = 0\}$ , la curvatura principal mínima de  $U_r$  no es constante. Considerando el caso (i), bastará con probar que

$$\left. \frac{d}{dr} (k_1(0, v(0, r); r)) \right|_{r=0} > 0, \quad (4.23)$$

donde  $v = v(u, r)$  denota la  $v$ -coordenada del punto  $p(u, r)$  donde la línea principal mínima de  $U_r$ , pasando por  $p$ , se encuentra con la curva  $\{u\}$ . En efecto, como para todo  $u \in I$ ,  $\varphi_v(u, 0) = 0$  y  $\varphi_{uv}(u, 0) = 0$ , a partir de lo obtenido en la ecuación (4.18), se tiene que a lo largo de  $\{v = 0\}$ ,

$$\frac{dv_r}{du}(u) = \frac{\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G}(u, 0; 0),$$

donde  $v_r = \left. \frac{\partial v}{\partial r}(u, r) \right|_{r=0}$ . Aquí, como por hipótesis  $k_{1v}(u, 0; 0) \neq 0$  y  $\varphi_u(u, 0) \geq 0$ , se tiene que  $\frac{dv_r}{du}(u)$  no es idénticamente 0. Sustituyendo lo obtenido en la derivada

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dr} (k_1(0, v(0, r); r)) \right|_{r=0} &= k_{1v}(0, 0; 0)v_r(0) + k_{1r}(0, 0; 0), \\ &= k_{1v}(0, 0; 0) \int_{-1}^0 \left[ \frac{\varphi_u k_{1v}}{(k_2 - k_1)^2 G} \right](u, 0; 0) du + c^2 > 0. \end{aligned}$$

Esto prueba el lema para el caso (a).

Consideremos el caso (b). Como  $k_{1v}(u, 0) = 0$ ,  $\varphi_v(u, 0) \equiv 0$  y  $\varphi_{uv}(u, 0) \equiv 0$ , se tiene que a partir de las ecuaciones (4.7) y (4.17), a lo largo de  $\{v = 0\}$ ,  $F(u, 0; 0) \equiv 0$  y  $f(u, 0; 0) \equiv 0$ . Esto implica que  $\{v = 0\}$  también es un arco principal mínimo de  $U_r$  (vea **4.1**). Así, por el ítem 2 del Lema 4.17, para todo  $r$  pequeño, existe un plano  $P$  ortogonal a  $U$  conteniendo el arco de línea principal de  $U_r$  siguiente:

$$\beta_r : u \rightarrow X = (u, 0; r) = X(u, 0; 0) + r\psi(u)N(u, 0; 0), \quad \text{con } u \in I.$$

De aquí, por la ecuación (4.7) resulta que

$$X_v = (u, 0; r) = (1 - rk_2\psi(u))X_v(u, 0; 0),$$

pues  $\psi_v(u) = 0$ . Ahora, como para todo  $u \in I$ ,  $P$  contiene a  $N(u, 0; 0)$  y  $X_u(u, 0; 0)$ , se concluye que para todo  $r$  pequeño,  $P$  es ortogonal a  $X_v(u, 0; 0)$  y por tanto, por la ecuación de arriba, ortogonal a  $X_v(u, 0; r)$ . Esto implica que  $N(u, 0; r)$  está contenido en  $P$ . Es decir, para todo  $r$  pequeño,  $P$  es ortogonal a  $U_r$  a lo largo de  $\beta_r$ . Sin embargo, a partir de la forma de la parametrización de  $\beta_r$ , si  $r \neq 0$  se sigue que  $\beta_r$  no es una línea recta, ni una circunferencia de radio constante. Lo cual, como consecuencia del ítem 2 del Lema 4.17, se concluye que la curvatura principal mínima de  $U_r$  a lo largo de  $\beta_r$  no es constante. Esto finaliza la prueba del lema.  $\square$

**Definición 4.19.** Se dirá que una línea principal mínima  $\alpha$  esta constantemente curvada si para alguna constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $k_1|_{\alpha} \equiv c$ .

**Proposición 4.20.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Existe una superficie  $S$  compacta que es el  $C^r$ -conjunto límite de una sucesión de superficies  $\{S_n\}$ , cuyas curvaturas principales mínimas no son constantes a lo largo de un arco de una línea principal mínima.

*Demostración.* Para empezar, que tiene que una superficie compacta  $\{f = 0\}$  puede ser  $C^r$ -aproximada por una analítica. En efecto, esto resulta a partir de aproximaciones de la función  $f$  por funciones polinómicas  $g$ , usando el Teorema de  $C^r$ -aproximación de Weirestrass [Loj88].

Todos los supuestos sobre la superficie  $S$ , que a continuación se indican, se pueden obtener aplicando apropiadamente el teorema de aproximación mencionado.

- (a) Asumir que en la superficie todos sus puntos umbílicos son Darbouxianos.
- (b) Por el Lema 4.18 asumamos que el conjunto de líneas principales mínimas con curvatura no constante, es no vacío y que contiene separatrices mínimas.
- (c) Por el Teorema de  $C^r$ -aproximación de Weirestrass [Loj88], asumamos que  $S$  es analítica.

Asumamos que la superficie  $S$  es un toro, que no tiene puntos umbilicales y que tiene líneas principales mínimas curvadas constantemente; que por el ítem 4 del Lema 4.17, debe ser un número finito de ciclos principales  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . En efecto, de no tener las líneas principales mínimas curvadas constantemente, por la analiticidad de la superficie  $S$ , todas sus líneas principales mínimas tendrán ciclos curvados constantemente, lo cual es probado por (b).

Considere  $(u, v) : (U, D) \rightarrow (V, I \times I)$ , donde  $I = [-1, 1]$ , una carta principal de  $S$  y  $p_i$  un punto en  $\alpha_i$ . Usando el Lema 4.18, la superficie  $S$  puede ser  $C^r$ -aproximada por una superficie  $S'$ . Así,  $S \setminus S'$  es una vecindad pequeña de  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  tal que, cada  $\alpha_i \setminus V$  es no

vacío y la línea principal de  $S'$ , conteniendo  $\alpha_i \setminus V$ , no está curvada constantemente. Observe que como la superficie es  $S$  es analítica, si  $\alpha \notin \{\alpha_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  está es una línea principal mínima de  $S$ . Entonces, ningún sub-arco de  $\alpha$  esta curvado constantemente. Por tanto, las líneas principales mínimas de  $S'$ , conteniendo  $\alpha_i \setminus V$ , no están curvados constantemente. Ahora, si  $V$  es lo suficientemente pequeño,  $S'$  es la aproximación requerida de la superficie, y se estaría probando la proposición cuando  $S$  es un toro que no presenta puntos umbílicos. Supóngase ahora que la superficie  $S$  posee puntos umbílicos. Entonces, como la superficie  $S$  es analítica, se tiene

- (d)  $S$  tiene solamente un número finito de ciclos principales mínimos curvados constantemente.

En efecto, de no ser así, estos estarán empilados formando cilindros de acumulación hacia las separatrices umbílicas, lo cual no es posible según lo descrito en [(b)].

- (e)  $S$  tiene solo una cantidad finita de líneas principales mínimas curvadas constantemente.

En efecto, a consecuencia del Lema 4.17, si una línea principal mínima curvada constantemente  $\alpha$  no es un ciclo, entonces su conjunto límite consiste de puntos umbílicos. Además por (b),  $\alpha$  no es una separatriz umbílica y así, a consecuencia del ítem 4 del Lema 4.17, su conjunto límite contiene un punto umbílico  $q$  del tipo  $D_2$ . esto implica que si  $\alpha$  acumula por líneas principales mínimas curvadas constantemente, entonces la línea de curvatura principal mínima a lo largo de todas estas es la misma que  $k_1(q)$ . Por analiticidad,  $k_1$  es constante a lo largo de cualquier línea que se acerca a  $q$  y, en particular, a lo largo de las separatrices de  $q$ . Sin embargo, esto no es admitido por (b). Por tanto,  $\alpha$  está aislada por otras líneas principales mínimas curvadas constantemente. Con esto se culmina la prueba de [(e)].

De manera explícita, de [(e)] se puede concluir que la superficie  $S$  puede ser  $C^r$ -aproximada por una superficie que satisface los requerimientos de esta proposición, y usar el Lema 4.18 para eliminar líneas de curvatura principal curvadas constantemente, como en el caso del toro dado.  $\square$

**Corolario 4.21.** *Sea  $\gamma$  un ciclo principal mínimo de la superficie  $S$  y  $V(\gamma)$  una vecindad de  $\gamma$  en  $S$ . Entonces  $\gamma_\varepsilon$ , el ciclo principal mínimo (resp. máximo) de  $S_\varepsilon$  en  $V(\gamma)$  es hiperbólico; es decir, cada ciclo principal mínimo (resp. máximo) se aproxima por medio de ciclos hiperbólicos.*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  un ciclo principal mínimo de la superficie  $S$ , y  $\gamma_\varepsilon$  un ciclo principal mínimo de  $S_\varepsilon$ , en la vecindad  $V(\gamma)$  de  $\gamma$  en  $S$ . Por lo visto en el parágrafo 4.7, una pequeña variación  $\varepsilon > 0$  del ciclo principal mínimo  $\gamma$ , origina una ciclo principal  $\gamma_\varepsilon$  en  $S_\varepsilon$ , el cual, por la ecuación (4.6), es un ciclo hiperbólico de  $S_\varepsilon$ . Esto demuestra que todo ciclo principal mínimo de  $S$  es aproximado por ciclos hiperbólicos de  $S_\varepsilon$  en  $V(\gamma)$ .  $\square$

## Capítulo 5

# El teorema de estabilidad

Este capítulo está enfocado a la prueba del Teorema de Estabilidad, que establece que la clase  $\Sigma = \Sigma(a, b, c, d)$  de superficies compactas, suaves y orientadas, definidas en una vecindad de la superficie  $S$ , que satisfacen las cuatro condiciones:

- a) todos los puntos umbílicos son Darbouxianos,
- b) todos los ciclos principales son hiperbólicos,
- c) el conjunto límite de todas líneas principales son puntos umbílicos o ciclos principales,  
y
- d) todas las separatrices umbilicales, como separatrices, tienen solo en uno de sus puntos extremos, a un solo punto umbílico,

constituye un conjunto abierto, y cada uno de sus elementos es estructuralmente estable, en el sentido  $C^3$ .

Un problema sin resolver es poder establecer (o refutar) que las superficies en  $\Sigma$  son las únicas en ser  $C^3$ -estables.

En el teorema, las condiciones  $a)$ ,  $b)$  y  $d)$  son necesarias para tener  $C^3$ -estabilidad, es decir, toda superficie en  $\Sigma$ , es estructuralmente estable si cumple con estas condiciones y el conjunto  $\Sigma$  será estructuralmente estable con la topología  $C^3$ . A su vez, al incluir la condición  $c)$  se establece toda línea principal que satisface esta condición es densa en su superficie, y el conjunto  $\Sigma$  es denso (Teorema de Densidad) en el sentido de la topología  $C^2$  únicamente para superficies suaves orientadas compactas. Esto al parecer proviene de las propiedades geométricas de la superficie, derivado de las formas fundamentales, pues ellas dependen de la segunda derivada. Sin embargo, esto es una conclusión débil concerniente a estabilidad principal pues las condiciones  $a)$  y  $b)$  están dependiendo, como ellas son, de las terceras derivadas, no son ni siquiera  $C^2$ -abierto. De aquí, se puede demostrar que no existen superficies compactas  $C^2$ -estable con puntos umbílicos o ciclos principales.

En las siguientes secciones, se establecen definiciones sobre las regiones que separan cada punto umbílico, llamadas regiones canónicas; las cuales serán las únicas presentes en este tipo de superficies, y se establecen condiciones para que la clase  $\Sigma$  sea un conjunto abierto.

### 5.1 Regiones canónicas

**Definición 5.1.** Sea  $\Sigma$  el conjunto de superficies que satisfacen las condiciones a), b), c) y d) dadas en 2.35, y sea  $S$  una superficie en  $\Sigma$ . Una **región canónica mínima** (resp. **máxima**) de  $S$  es una componente conexa del complemento de los conjuntos  $U_S$ , de puntos umbílicos,  $C_1$  (resp.  $C_2$ ), de ciclos mínimos (resp. máximos), y de  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ), de separatrices umbilicales mínimas (resp. máximas). Se tienen dos tipos de regiones canónicas: **paralelas** y **cilíndricas**. Las regiones paralelas están caracterizadas por el hecho de que, en estas,  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) es topológicamente equivalente a  $\frac{\partial}{\partial u}$  (resp.  $\frac{\partial}{\partial v}$ ) en  $\mathbb{R}^2$ . En las regiones cilíndricas, la equivalencia topológica requerida es con  $u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

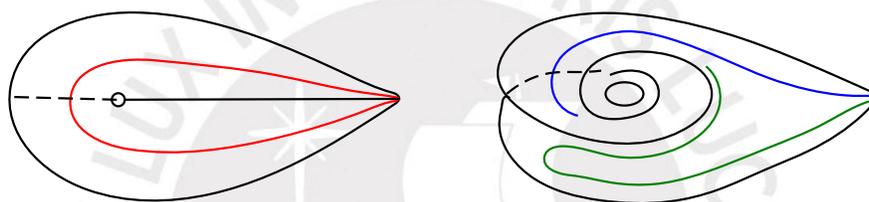


Figura 5.1: Región paralela

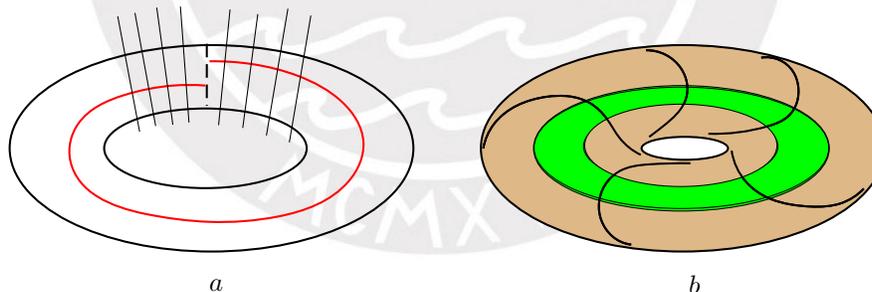


Figura 5.2: Región cilíndrica

**5.2.** Se tienen solo dos tipos de regiones canónicas para una superficie en  $\Sigma$ . Esto se debe a dos motivos, por un lado la conexidad de cada región obliga que el conjunto límite de todas las líneas en cada región sea la misma: un ciclo principal o un punto umbílico del tipo  $D_2$  (a través de su sector parabólico). Por otro lado, el campo de línea en esta es orientable, es decir, en el fibrado tangente el campo de línea es orientable en la vecindad del punto umbílico.

Una región es del tipo paralela cuando hay separatrices umbilicales en su frontera. Si intercepta al sector parabólico de un punto umbílico  $D_2$ , esta debe ser también de este tipo. Si la frontera de una región canónica consiste solo de ciclos principales, entonces esta es de el tipo cilíndrica. En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran algunos ejemplos típicos de estos dos tipos de regiones. En las figuras las líneas punteadas representan las **secciones cruz** de las foliaciones de cada región, las cuales están dadas por la foliación ortogonal.

En una región cilíndrica de una foliación principal, puede suceder una de las siguientes opciones:

- a) todas las líneas de la otra foliación cruzan la región, como en la Figura 5.2a,
- b) la región contiene al menos un ciclo principal de la otra foliación, como en la Figura 5.2 b.

**Definición 5.3.** *Las regiones cilíndricas máximas (resp. mínimas) del caso a) son llamadas regiones canónicas máximas (resp. mínimas) transversalmente irreducibles. Las del caso b) son descompuestas en la unión de un número finito de regiones canónicas mínimas (resp. máximas) irreducibles y dos semiregiones máximas irreducible transversalmente. La frontera de una semiregión máxima (resp. mínima) irreducible consta de la unión de un ciclo máximo, a la que tienden las líneas principales máximas, y un ciclo mínimo, a la cual la foliación es transversal.*

**Ejemplo 5.4.** *En la figura 5.2b aparece una región cilíndrica canónica máxima (resp. mínima) descompuesta en una región canónica mínima (resp. máxima) irreducible transversalmente y dos semiregiones máximas (resp. mínimas) irreducibles trasversalmente.*

## 5.2 Continuación Natural y Apertura

Para demostrar la apertura del conjunto  $\Sigma = \Sigma(a, b, c, d)$ , en la cual cada superficie satisface las condiciones  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  y  $d)$  dadas en **2.35**, partiremos por usar un método que extiende propiedades de una región de una superficie, a otras regiones de superficies vecinas. Finalmente, para extender este proceso a toda superficie en  $\Sigma$ , se hará por medio de la construcción de una equivalencia principal, la cual se dará en la siguiente sección.

En lo que sigue se usarán las foliaciones principales mínimas, pues de forma análoga, se obtienen los mismos resultados con las foliaciones principales máximas.

**5.5.** Sea  $S$  una superficie en  $\Sigma$ ,  $U_S$  el conjunto de sus puntos umbílicos y  $C_1$  el conjunto de sus ciclos principales mínimos. Se tienen vecindades  $V(U_S)$  y  $V(C_1)$  tal que cada componente conexa  $V_i$  de  $V(U_S)$  es un disco, con frontera suave, que contiene un único punto umbílico Darbouxiano  $u_i$  y arcos de las separatrices umbilicales mínimas  $\sigma_{ij}$ , donde  $j$  varía en  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$  ó  $\{1, 2, 3\}$ , de acuerdo al tipo de punto umbílico Darbouxiano  $D_1$ ,  $D_2$  o  $D_3$  que conecte

(vea Figura 5.3). Estos arcos cruzan transversalmente la frontera  $\partial V_i$  de  $V_i$  en los puntos  $b_{ij}$ . Además, para el caso que se tenga un punto  $D_2$ ,  $b_{i1}$  y  $b_{i2}$  se unen mediante un segmento que es parte del sector parabólico a la cual  $F_1$  es transversal (vea Figura 5.4).

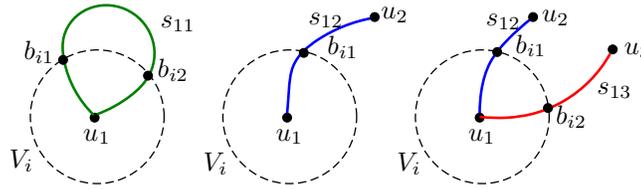


Figura 5.3: Arcos de separatrices umbilicales

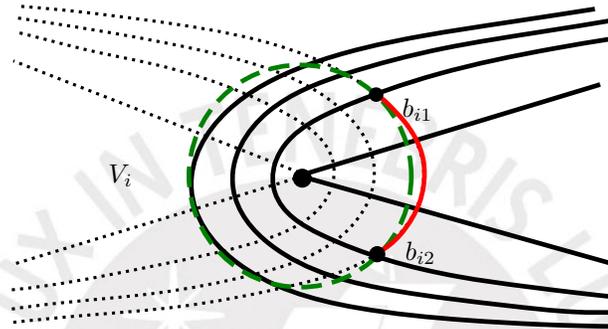


Figura 5.4: D2: Arco transversal

Por otro lado, cada componente conexa  $V_k$  de  $V(C_1)$  es un anillo, con frontera  $\partial V_k$  a la cual  $F_1$  es transversal, y contiene solo un ciclo principal hiperbólico mínimo  $\gamma_k$  (vea Figura 5.5).

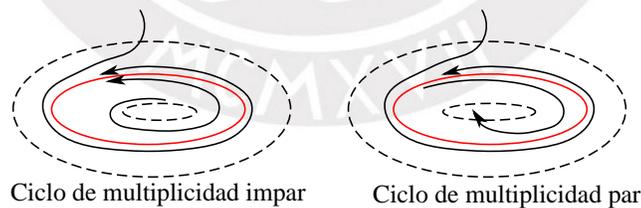


Figura 5.5: Ciclo principal mínimo: multiplicidad del ciclo principal

**5.6. Apertura de la clase  $\Sigma$ .** Sea  $N$  la normal positiva a la superficie  $S$ , con  $S \in \Sigma$ , y  $S_n = (I + f_n N)(S)$  una sucesión de superficies construidas a partir de  $S$ . Cuando  $S_n$  converge a  $S$  en el sentido  $C^3$ , los conjuntos  $U_{nS_n}$  convergen a  $U_S$ , es decir, para  $n$  lo suficientemente grande y para  $t \in [0, 1]$ , se tiene un único punto umbílico Darbouxiano  $u_i(t, n)$  de  $S_n(t) = (I + t f_n N)(N)(S)$  en cada componente conexa  $V_i$ . El punto  $u_i(t, n)$

resulta ser del mismo tipo que  $u_i$ , y sus separatrices umbilicales  $\sigma_{ij}(t, n)$  cruzan la frontera  $\partial V_i$  de  $V_i$  en los puntos  $b_{ij}(t, n)$ . Por tanto, por lo visto en la sección 3.3, a consecuencia de la interpretación de la condición de transversalidad y la apertura  $C^3$  de la condición  $D$ ,  $u_i(t, n)$  y  $b_{ij}(t, n)$  son suaves en  $t$ .

Análogamente, cuando  $S_n = (I + f_n N)(S)$  tiende a  $S$ , en cada componente conexa  $V_k$  de  $V(C_1)$ , los ciclos principales  $\gamma_k(t, n)$  de  $S_n$  tienden al ciclo principal hiperbólico  $\gamma_k$ . Por tanto, a consecuencia de la apertura  $C^3$  de las condiciones hiperbólicas (vea Lema 4.18) y de su interpretación en términos de la transversalidad (diagonal) de la aplicación de retorno, se tiene para  $n$  lo suficientemente grande y para  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma_k(t, n)$  es una función suave en  $t$ , con lo cual  $\gamma_k(t, n)$  resulta ser del mismo tipo que  $\gamma_k(t)$ .

**Definición 5.7.** En  $\Sigma$ , el proceso de extender una región canónica de una superficie  $S$  a otra región de otra superficie  $S_t$  mediante  $H_t$ , aproximaciones  $C^3$ , será conocido como *continuación natural*.

La continuación natural extiende propiedades de una región a otra, es decir, la nueva región es del mismo tipo que la original. Mediante este proceso se realiza la continuación natural de puntos umbilicos y separatrices, al igual que para ciclos y para la intersección de separatrices y ciclos con los mismos elementos para la foliación ortogonal.

Esto demuestra la **apertura de la clase**  $\Sigma$  y establece a través de continuación natural una correspondencia de uno a uno entre regiones canónicas de las foliaciones principales mínimas y sus fronteras de  $S$  con los mismos objetos para  $S_n$ . Este proceso de continuación está unicamente determinado solo en las esquinas de intersección las regiones mínimas con las regiones canónicas máximas; dicho proceso es denotado por  $H_t$ . Para completar la prueba, se tiene que extender esta aplicación al resto de  $S$ , así como a cada  $S_n$ , vía equivalencias principales. Este proceso será completado en la siguiente sección a través de etapas sucesivas para cubrir todas las situaciones admisibles.

### 5.3 Construcción de la equivalencia principal

Ahora se a construir (o se extenderá) una equivalencia topológica entre una superficie  $S \in \Sigma$ , y los elementos de una secuencia  $S_n$  convergiendo a esta en el sentido  $C^3$ . Esta construcción se hará por medio de 5 etapas, a fin de considerar todas las posibles regiones canónicas para efecto de realizar la extensión de la equivalencia principal de la sección anterior.

#### 5.8. Etapa 1. Definición en la intersección de regiones canónicas paralelas máximas y mínimas.

En cada región canónica paralela mínima  $A_1$  de  $S$ , se elige una sección cruz  $\tilde{S}$ , que puede ser asumido como un arco de una separatriz umbilical máxima  $\sigma$ . Definimos por

$$H_t : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}_t$$

al homeomorfismo que realiza la continuación natural de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}_t$ . De este modo, los extremos  $a$  y  $b$  de  $\tilde{S} \cap A_1$  tienen continuación natural  $H_t(a)$  y  $H_t(b)$  en  $\tilde{S}_t$ , que puede ser asumido como el arco  $\sigma_t$ , con esto se tiene que la continuación natural de  $\sigma$  es  $\sigma_t$ .

Análogamente,  $H_t$  se aplica para arcos  $\tau$  elegidos en separatrices mínimas  $\mathbb{T}$  que son secciones cruz de las regiones paralelas máximas  $B_2$  de  $S$ .

Sea  $p \in A_1 \cap B_2$ . Denote por  $\sigma(p)$  (resp.  $\tau(p)$ ) al punto de intersección de la línea principal paralela mínima (resp. máxima), que pasa por  $p$ , con la sección transversal  $\tilde{S}$  (resp.  $\mathbb{T}$ ). El conjunto  $A_1 \cap B_2$  está compuesto por componentes conexas  $C$ , con las características indicadas en la definición 5.1. En cada componente conexa  $C$  de  $A_1 \cap B_2$ , se define el homeomorfismo  $H_t$  de  $C$  en su continuación natural  $C_t$ . Este homeomorfismo está definido en las esquinas de  $C$ , los cuales pueden ser o puntos umbílicos o intersecciones de las foliaciones mínimas con las foliaciones máximas. Para un punto  $p$  de  $C$  se define  $H_t(p)$  como un punto en  $C_t$ , que está en la intersección de la línea principal mínima que pasa a por  $H_t(\sigma(p))$ , con la línea principal máxima, que pasa por  $H_t(\tau(p))$ . Vea Figura 5.6.

*Observación 5.9.* Dicho procedimiento de correspondencia punto a punto, define ya una equivalencia topológica entre  $S$  y  $S_t$ , en el caso que los ciclos no sean ciclos principales, pues falta aún evaluar la conjugación entre ciclos principales.

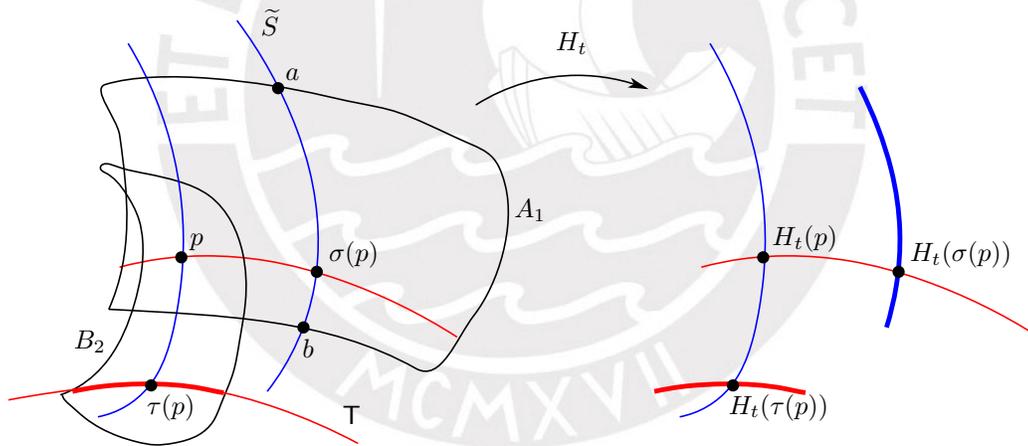


Figura 5.6: Etapa 1

**5.10. Etapa 2. Definición en los ciclos principales máximos (resp. mínimos) y en las regiones cilíndricas máximas (resp. mínimas) de tipo  $a$  que están contenidas en la unión de regiones paralelas mínimas (resp. máximas).**

*Observación 5.11.* Por lo visto en la Etapa 1,  $H_t$  también estaría definido en ciclos principales, esto es, cada punto de un ciclo principal contenido en una región paralela, es visto como un intercepto de entre arco mínimo o máximo, con una sección transversal. Sin embargo, falta ver que  $H_t$  sea una conjugación topológica entre ciclos principales.

Sea  $R$  una región cilíndrica del tipo  $a$ ). También  $H_t$  está definido en  $\partial R$ , de acuerdo con la Etapa 1 y la observación previa. Son por estas razones que existe una correspondencia uno a uno  $\sigma_{10} \rightarrow \sigma_{1t}$  entre las líneas de  $\mathbf{F}_{10}|R$  y su correspondiente  $\mathbf{F}_{1t}|R_t$ , donde  $R_t$  es la continuación natural de  $R$ . Es así que para un arco  $\alpha_{10}$  de  $\mathbf{F}_{10}|R$ , también se establece una correspondencia uno a uno con su correspondiente  $\alpha_{1t}$  de  $\mathbf{F}_{1t}|R_t$ , esto es, se define  $H_t : \sigma_{10} \rightarrow \sigma_{1t}$  como una conjugación entre las aplicaciones de retorno  $\Pi_0$ , inducida en  $\sigma_{10}$  por  $\mathbf{F}_{20}|R$ , y  $\Pi_t$ ; inducida en  $\sigma_{1t}$  por  $\mathbf{F}_{2t}|R_t$ . Esta aplicación extiende  $R \setminus \alpha_{10}$  a su continuación natural  $R_t \setminus \alpha_{1t}$ , de modo que el arco  $[p, \Pi_0(p)]$  de  $\mathbf{F}_{10}$  sea llevado al arco  $[H_t(p), \Pi_t(H_t(p))]$  de  $\mathbf{F}_{1t}$ , por la construcción en la Etapa 1 sobre regiones canónicas paralelas mínimas. Vea Figura 5.7.

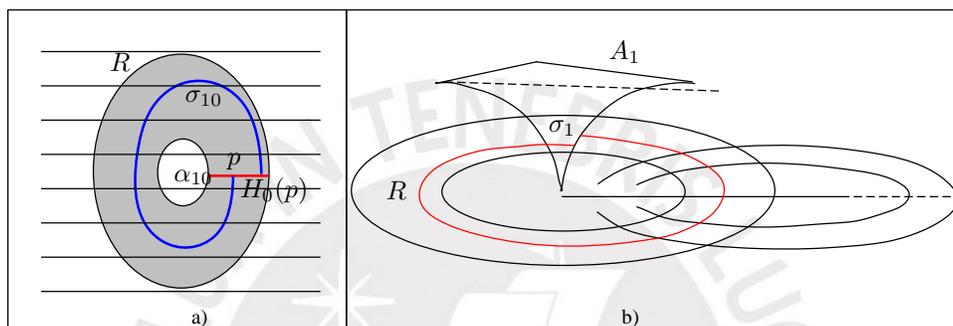


Figura 5.7: Etapa 2, b) ([GS82])

**5.12. Etapa 3. Definición de los ciclos principales máximas (resp. mínimas) y de las regiones cilíndricas máximas (resp. mínimas) de tipo  $a$  que están contenidas en la unión de regiones cilíndricas mínimas (resp. máximas) del tipo  $b$ .**

Sea  $R_0$  una región canónica cilíndrica mínima del tipo  $b$  de  $S$ . Definimos  $H_t$  como el homeomorfismo de un ciclo principal mínimo  $\gamma_0$  contenido en  $R_0$  y su continuación natural  $\gamma_t$  contenido en  $R_t$ . Dicho homeomorfismo, define una correspondencia uno a uno entre las líneas de  $F_{10}$ , en  $R_0$  y aquellas de  $F_{1t}$ , en  $R_t$ . A su vez, si  $R_0$  contiene regiones cilíndricas máximas del tipo  $a$ ), se define  $H_t$  siguiendo el procedimiento descrito en la Etapa 2, conjugando sus aplicaciones de retorno. Vea Figura 5.8.

**5.13. Etapa 4. Definición en las regiones semi-transversales irreducibles mínimas (resp. máximas) que están contenidas en regiones canónicas cilíndricas mínimas (resp. máximas) del tipo  $b$ .**

Sea  $R_0$  una región semi-transversal irreducible contenida en una región cilíndrica del tipo  $b$ ). Se tiene que el borde  $\partial R_0$  de  $R_0$  está contenido ya sea en en la unión de regiones canónicas paralelas o en una región canónica cilíndrica máxima del tipo  $b$ ), y por lo visto en

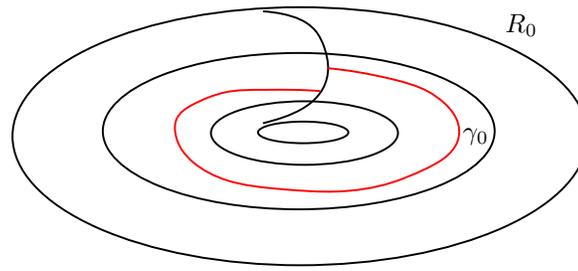


Figura 5.8: Etapa 3, [GS82]

las Etapas 2 y 3,  $H_t$  está definido en  $\partial R_0$ . Ahora, para los puntos  $p$  que se encuentran en el interior de la región  $R_0$ , son vistos como las intersecciones de curvas que cruzan la frontera mínima de  $R_0$ , con curvas que cruzan la frontera máxima de  $R_0$ . Es decir, sean  $p_1$  y  $p_2$ , respectivamente, puntos sobre los ciclos principales mínimo y máximo del borde  $\partial R_0$  de  $R_0$ . Definamos  $p_{1t} = H_t(p_1)$  así como  $p_{2t} = H_t(p_2)$ , los cuales están dependiendo continuamente de  $(p_1, t)$  y  $(p_2, t)$ , respectivamente. Sean  $\alpha_{1t}(p_1)$  y  $\alpha_{2t}(p_2)$ , respectivamente, las curvas de  $\mathbf{F}_{1t}$  y  $\mathbf{F}_{2t}$  que pasan por  $p_{1t}$  y  $p_{2t}$ , entonces para cualquier  $p$  en  $\alpha_{10}(p_1) \cap \alpha_{20}(p_2)$  se tiene un único punto  $p_t$  en  $\alpha_{1t}(p_1) \cap \alpha_{2t}(p_2)$  que es continuación natural de  $p$ . Así, se define  $H_t(p) = p_t$  (vea Figura 5.9).

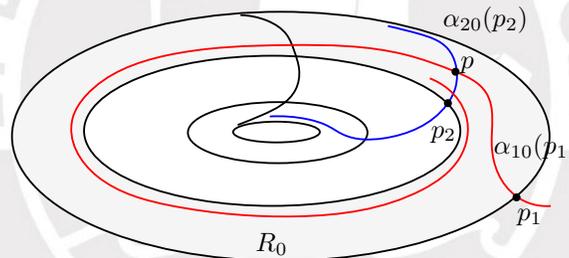


Figura 5.9: Etapa 4

**5.14. Etapa 5. Definición en las regiones canónicas cilíndricas máximas (resp. mínimas) que se interceptan con ciclos principales mínimos (resp. máximas).**

Sea  $R_0$  una región canónica máxima (resp. mínima), la cual se intercepta con un ciclo mínimo (resp. máximo)  $\gamma_0$ . Para una componente conexa  $\lambda_0$  de  $\gamma_0 \cap R_0$ , se define  $H_t|_{\lambda_0}$ , como en la Etapa 2, usando la aplicación de Poincaré. Esto es, si  $R_t$  y  $\lambda_t$  son, respectivamente, las continuaciones naturales de  $R_0$  y  $\lambda_0$ , se tiene que  $H_t : \lambda_0|_{\lambda_t}$  es una conjugación topológica entre las aplicaciones de retorno inducidas en  $\lambda_0$  por las foliaciones máximas de la superficie  $S$ , y que inducen en  $\lambda_t$  la foliación máxima  $\mathbf{F}_{2t}$  en  $S_t$ .

*Observación 5.15.* Note además que regiones canónicas paralelas mínimas y regiones canónicas cilíndricas máximas pueden solo interceptarse con regiones canónicas cilíndricas mínimas  $S_0$  del tipo considerado en la presente etapa.

Definamos  $H_t$  en una componente conexa de la intersección de  $R_0$  con la región canónica paralela mínima, por el mismo proceso visto en la Etapa 2. Ahora, sea  $S_0$  una región canónica cilíndrica mínima que se intercepta con  $R_0$ . Denote por  $\sigma_0$  la sección cruz global de  $S_0$  en la cual  $H_t$  queda bien definida con las descripciones dadas arriba. Dado un punto  $p$  en  $(R_0 \setminus \lambda_0) \cap (S_0 \setminus \sigma_0)$ , este se encuentra en una línea  $\alpha_2(p)$  de  $\mathbf{F}_2$  y  $\alpha_1(p)$  de  $\mathbf{F}_1$ , que se intercepta respectivamente con  $\lambda_0$  y  $\sigma_0$  en las órbitas de la respectiva aplicación de retorno. Las líneas  $\alpha_{2t}(p)$  de  $\mathbf{F}_{2t}$  y  $\alpha_{1t}(p)$  de  $\mathbf{F}_{1t}$  determinadas por las  $H_t$ -imágenes de estas órbitas, en  $\lambda_t$  y  $\sigma_t$ , son curvas continuas que se interceptan solamente en  $p_t$ , que pasa por  $p$  en  $t = 0$ . Así, se define  $H_t(p) = p_t$ . Vea Figura 5.10.

Es así, como finalmente se han considerado todas las posibles regiones canónicas para poder realizar la extensión de la equivalencia principal entre una superficie  $S \in \Sigma$  y los elementos de una secuencia  $S_n$  convergiendo a esta en el sentido  $C^3$ .

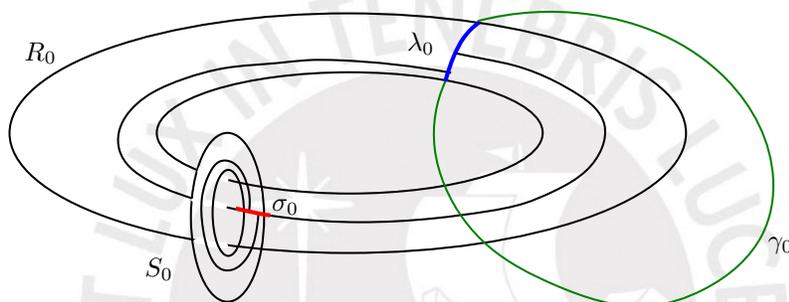


Figura 5.10: Etapa 5

Todas estas herramientas, sirven para fundamentar la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 5.16** (Teorema de Estabilidad Estructural de las Configuraciones Principales).  
Sea  $\Sigma(a, b, c, d)$  el subespacio de superficies suaves, compactas y orientadas, definidas en una vecindad de la superficie  $S$ , tales que satisfacen:

- a) Todos los puntos umbílicos son Darbouxianos,
- b) Todos los ciclos límite son hiperbólicos,
- c) Los conjuntos límites de toda línea principal esta contenido en el conjunto de puntos umbílicos o en ciclos principales de la superficie, y
- d) todas las separatrices umbilicales, como separatrices, tienen solo en uno de sus puntos extremos, a un solo punto umbílico.

Si el espacio total está provisto de la topología  $C^3$ , entonces  $\Sigma(a, b, c, d)$  es abierto y cada uno de sus elementos es  $P$ -estable en la topología  $C^3$

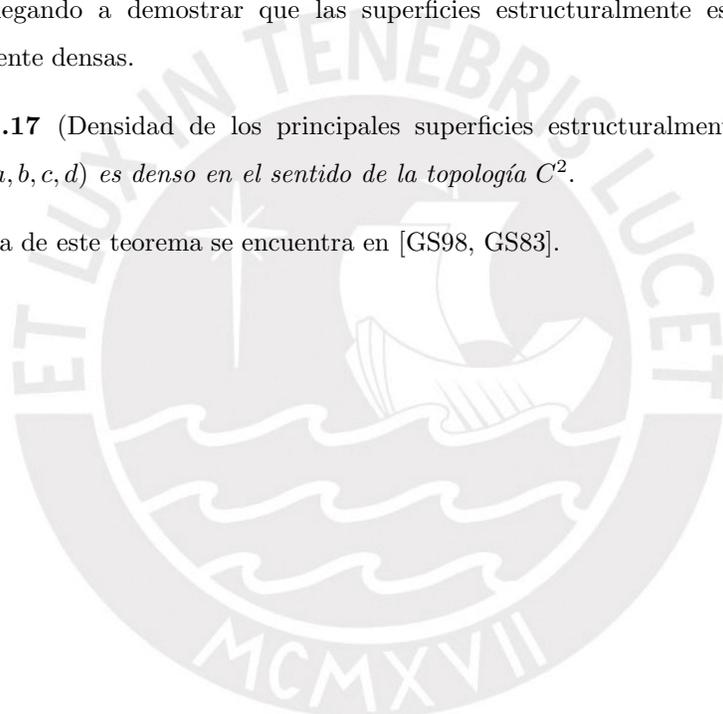
*Demostración.* Sea  $S$  una superficie y  $\Sigma(a, b, c, d)$  el subespacio de superficies suaves, compactas y orientadas definidas en una vecindad de la superficie  $S$ , las cuales satisfacen las condiciones indicadas en el teorema. En la sección 5.1 se demostró que las regiones canónicas son las únicas regiones existentes en estas superficies, y en la sección 5.2 se demostró que la clase  $\Sigma(a, b, c, d)$  es un conjunto abierto y establece, mediante el proceso de continuación natural  $C^3$ , que las foliaciones de las regiones canónicas y sus fronteras, se extienden a todas las demás superficies pertenecientes a la clase  $\Sigma(a, b, c, d)$ .  $\square$

En este teorema una superficie es  $P$ -estable, cuando admite una vecindad en la topología  $C^3$ , donde cada superficie admite la misma estructura dinámica a partir de las líneas de curvatura.

La continuación de estos estudios, fueron realizados por Jorge Sotomayor y Carlos Gutiérrez, llegando a demostrar que las superficies estructuralmente estables son  $C^2$ -topologicamente densas.

**Teorema 5.17** (Densidad de los principales superficies estructuralmente estables). *El conjunto  $\Sigma(a, b, c, d)$  es denso en el sentido de la topología  $C^2$ .*

La prueba de este teorema se encuentra en [GS98, GS83].



## Apéndice A

# Geometría en espacios euclidianos

*A continuación se presentan conceptos básicos que serán utilizados a lo largo del trabajo, también establece notaciones y presenta algunos resultados técnicos necesarios. Se empieza hablando de diferenciabilidad pues trabajaremos con estructuras diferenciables, y luego estudiamos la estructura métrica de las superficies. Se analiza la geometría diferencial de curvas y superficies en  $\mathbb{E}^3$ , y para efectos de simplificar los cálculos se usarán superficies regulares. Estudiar la forma que tiene una superficie en el espacio obliga a hacer uso de un elemento “externo a la superficie”: la aplicación generada por los vectores normales a la superficie. Para usar tal aplicación en toda la superficie, es necesario trabajar con superficies orientables.*

### A.1 El espacio euclidiano $\mathbb{E}^3$

**A.1.** El espacio  $\mathbb{E}^3$  está definido en el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial dado por las ternas de números reales con las operaciones usuales:  $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Un elemento de aquel espacio es una clase  $[\vec{pq}]$  formada por segmentos orientados de la forma  $\vec{pq}$  (flechas que empiezan en  $p \in \mathbb{R}^3$  y terminan en  $q \in \mathbb{R}^3$ ), donde la relación de equivalencia  $\sim$  satisface

$$\vec{AB} \in [\vec{pq}] \Leftrightarrow \vec{AB} \sim \vec{pq} \Leftrightarrow B - A = q - p \in \mathbb{R}^3.$$

Cada  $[\vec{AB}]$  tiene un único representante que empieza en el origen  $(0, 0, 0)$  y termina en  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , por eso se identifica

$$\mathbb{E}^3 \ni [\vec{AB}] \longleftrightarrow (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Gracias a esta identificación, descrita en la Figura A.1, la clase  $[\vec{AB}]$  se escribe  $[(a, b, c)]$ , y así,  $\mathbb{E}^3$  se torna en un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, cuando las operaciones (heredadas de  $\mathbb{R}^3$ ) se

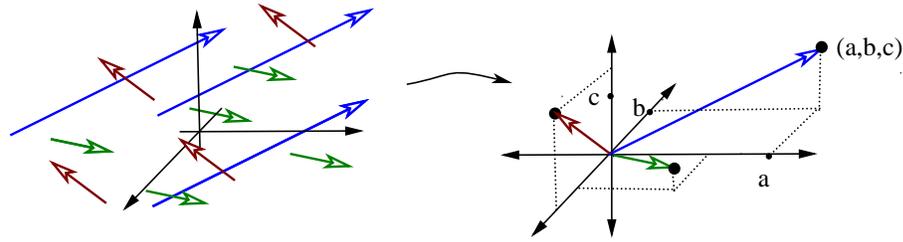


Figura A.1: vector es una clase (color) que se identifica con una terna

definen del siguiente modo:

$$[\overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)}] + [\overrightarrow{(y_1, y_2, y_3)}] = [\overrightarrow{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)}]$$

y

$$a \cdot [\overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)}] = [\overrightarrow{(ax_1, ax_2, ax_3)}], \quad a \in \mathbb{R}.$$

En este espacio tridimensional se tiene la noción de longitud de un vector

$$p = (x_1, x_2, x_3) \equiv [\overrightarrow{(x_1, x_2, x_3)}],$$

usualmente llamado **norma**  $\|p\|$  de  $p$  y definido por  $\|p\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Análogamente, a  $\mathbb{E}^3$  se le puede dotar de un producto interno; por ejemplo, el **producto interno canónico**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (también llamado usual) el cual satisface  $\langle p, q \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ , cuando  $p = (x_1, x_2, x_3)$  y  $q = (y_1, y_2, y_3)$  están en  $\mathbb{E}^3$ . Este espacio con producto interno

$$\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

tiene una base ortonormal ordenada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  – donde  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  – llamada **base usual** (o canónica), con la cual cualquier elemento  $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3$  se puede escribir de la forma  $p = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ .

**A.2.** El conjunto  $\mathbb{E}_p^3 = \{(p, \vec{v}); \vec{v} \in \mathbb{E}^3\}$ , con  $p \in \mathbb{E}^3$  es llamado **espacio tangente de  $\mathbb{E}^3$  en  $p$**  (o espacio afín); este conjunto es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, si

$$(p, \vec{v}) + (p, \vec{w}) = (p, \vec{v} + \vec{w}) \quad y \quad a \cdot (p, \vec{v}) = (p, a\vec{v}).$$

Como  $\vec{v} = [\vec{v}] \in \mathbb{E}^3$  es una flecha que empieza en 0 y termina en  $v$ ; un vector  $\vec{v}_p = (p, \vec{v}) \in \mathbb{E}_p^3$  representa una flecha con la misma dirección y longitud (de  $\vec{v} = [\vec{v}]$ ), pero ahora su punto de partida es  $p$  (vea la figura A.2). De esta forma, el punto  $p$  es el cero  $0_p$  de  $\mathbb{E}_p^3$ . Éste espacio está estrechamente vinculado con  $\mathbb{E}^3$  y ambos tienen propiedades análogas. Por ejemplo, el producto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en  $\mathbb{E}_p^3$ , definido por  $\langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle_p = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  hace que  $(\vec{e}_1)_p = (1, 0, 0)$ ,  $(\vec{e}_2)_p = (0, 1, 0)$  y  $(\vec{e}_3)_p = (0, 0, 1)$  formen una base ortonormal de  $\mathbb{E}_p^3$ .

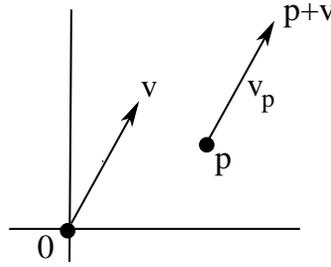


Figura A.2:  $p$ , cero del espacio  $\mathbb{E}_p^2$ .

**A.3.** Cada espacio tangente  $\mathbb{E}_p^3$  genera el espacio dual  $(\mathbb{E}_p^3)^*$  que está formado por todas las funciones lineales  $\varphi : \mathbb{E}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Una base para  $(\mathbb{E}_p^3)^*$  se obtiene usando la derivada de la proyección  $x_i : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $p \mapsto \langle p, \vec{e}_i \rangle$ . Específicamente, la base ordenada de  $(\mathbb{E}_p^3)^*$  es el conjunto  $\{(dx_i)_p; 1 \leq i \leq 3\}$  y satisface

$$(dx_i)_p(\vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Por lo tanto,  $\{(dx_i)_p\}_{i=1}^3$  es la base dual canónica de  $\{(\vec{e}_i)_p\}_{i=1}^3$  y escribimos

$$(dx_i)_p(\vec{e}_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}, \quad \forall p = (x_1, x_2, x_3).$$

## A.2 Elementos del álgebra exterior

**A.4.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno y  $V^k$  el producto cartesiano  $V \times V \times \dots \times V$ ,  $k$ -veces. Una aplicación  $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $k$ -**tensor** (o  $k$ -lineal), si  $f$  es lineal en cada factor; es decir: si  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$  y  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_k)$  son elementos de  $V^k$ , entonces para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $j = 1, \dots, k$ , se verifica

$$f(v_1 + w_1, \dots, \alpha v_j + \beta w_j, \dots, v_k + w_k) = \alpha f(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k) + \beta f(v_1, \dots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \dots, w_k).$$

De este modo, el espacio

$$\mathfrak{J}^k(V) = \{f : V^k \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } k\text{-tensor sobre } V\}$$

es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, y satisface

$$\mathfrak{J}^1(V) = V^*.$$

Más aún, si  $S \in \mathfrak{J}^k(V)$  y  $T \in \mathfrak{J}^l(V)$ , el **producto tensorial** de ambos

$$\begin{aligned} \otimes : \mathfrak{J}^k(V) \times \mathfrak{J}^l(V) &\longrightarrow \mathfrak{J}^{k+l}(V) \\ (T, S) &\longmapsto T \otimes S : V^{k+l} \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

es definido usando

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k)S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Observe que  $\otimes$  no es conmutativo.

**Proposición A.5.** Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal (ordenada) para  $V$ . Si  $dx_1, \dots, dx_n$  es la base dual asociada, el conjunto de todos los productos  $dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$  con  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$  forman una base para  $\mathfrak{J}^k(V)$ , por eso la dimensión de  $\mathfrak{J}^k(V)$  es  $n^k$ . En particular,

$$\{dx_1 \otimes dx_1; dx_1 \otimes dx_2; dx_2 \otimes dx_1; dx_2 \otimes dx_2\}$$

es una base de  $\mathfrak{J}^2(V)$ .

*Demostración.* Observe que la base dual cumple  $dx_{i_i}(e_{j_i}) = \delta_{i_i, j_i}$ , donde cada  $\delta_{i_i, j_i} \in \{0, 1\}$  satisface  $\delta_{i_i, i_i} = 1$  y 0 en otro caso. Por eso

$$\begin{aligned} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= \delta_{i_1, j_1} \dots \delta_{i_k, j_k}, \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } j_1 = i_1, \dots, j_k = i_k; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

De esto se obtiene la independencia lineal de  $\{dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$  con  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ . Por la misma razón, cada  $T \in \mathfrak{J}^2(V)$  se puede escribir como una combinación lineal de elementos de  $\{dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$  con  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ , pues si  $w_1, \dots, w_k$  son  $k$ -vectores en  $V$ , con  $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ , y  $T \in \mathfrak{J}^k(V)$ , se cumple

$$\begin{aligned} T(w_1, \dots, w_k) &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{1, j_1} \dots a_{k, j_k} T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}), \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}(w_1, \dots, w_k). \end{aligned}$$

Para mayores detalles vea el primer volumen de [Spi79, pág.279]. □

**A.6.** Una aplicación  $k$ -lineal  $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  es **alternada**<sup>1</sup> cuando  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$  siempre que  $\xi_i = \xi_j$  para algún  $i \neq j$ . El conjunto

$$\Lambda^k(V) = \{\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R} : k\text{-lineales y alternadas}\},$$

con las operaciones usuales es un espacio vectorial, para el cual

$$\Lambda^1(V) = \mathfrak{J}^1(V) = V^*.$$

<sup>1</sup>De manera similar podemos tomar una función  $\omega$  con  $w(p) \in \Lambda^k(V_p)$ ,  $p \in V$ ; tal función es llamada una  $k$ -forma, o simplemente una **forma diferenciable**.

Por ejemplo, en el  $k$ -ésimo producto cartesiano de  $V = \mathbb{R}^k$  sus elementos se escriben  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \dots, \xi_{k,i})$  y la función determinante usual, hace de la asignación

$$(\xi_i, \dots, \xi_k) \mapsto \det((\xi_{i,j})) = \det \begin{pmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{2,1} & \cdots & \xi_{k,1} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{k,1} & \xi_{k,2} & \cdots & \xi_{k,k} \end{pmatrix}$$

una aplicación  $k$ -lineal alternada. Observe que si  $\omega \in \Lambda^k(V)$  y  $\eta \in \Lambda^l(V)$ , entonces el producto cartesiano  $\omega \otimes \eta$  (definido en **A.4**) usualmente no está en  $\Lambda^{k+l}(V)$ ; para superar esto se define el **producto cuña**  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$  haciendo

$$\omega \wedge \eta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) = \frac{1}{k! l!} \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{sign}(\sigma) \omega \otimes \eta(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}),$$

donde  $S(k,l)$  es el conjunto de todas las permutaciones de  $\{1, \dots, k+l\}$  tales que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  y  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$ , y  $\text{sign}(\sigma)$  es el signo de la respectiva permutación. Cuando  $k = l = 1$

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2);$$

además, para las 1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(V)$ , se cumple

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\xi_2) & \cdots & \omega_1(\xi_k) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\xi_2) & \cdots & \omega_2(\xi_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(\xi_1) & \omega_k(\xi_2) & \cdots & \omega_k(\xi_k) \end{pmatrix}.$$

**Proposición A.7.** Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal para  $V$ . Si  $dx_1, \dots, dx_n$  es la base dual asociada, el conjunto

$$\{(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k \leq n\}$$

es una base para  $\Lambda^k(V_p^*)$ . En consecuencia, la dimensión de  $\Lambda^k(V_p^*)$  es dada por las combinaciones

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Demostración.* Como en la prueba de la proposición A.5, lo esencial es ver que  $\Lambda^k(V_p^*)$  es generado por  $\{(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k \leq n\}$ . Para ello, se sabe  $(dx_i)_p(e_j) = 0$  cuando  $i \neq j$ , y  $(dx_i)_p(e_i) = 1$ . Por eso

$$(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 0, & \text{si } (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k); \\ \text{sign}(\sigma), & \text{si } (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k), \end{cases}$$

<sup>2</sup>Observe que en la definición de  $S(k,l)$  sus elementos son unicamente determinados por  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ , y así la cardinalidad de  $S(k,l)$  es  $\binom{k+l}{l}$ .

donde  $\sigma$  es una permutación,  $\sigma(i_l) = j_l$ . La independencia lineal se consigue a causa de esta igualdad. También, si  $\omega \in \Lambda^k(V^*)$  y  $\sigma \in S(k)$ , entonces

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}^*, \dots, \xi_{\sigma(k)}^*) = \text{sign}(\sigma)\omega(\xi_1^*, \dots, \xi_k^*).$$

Por tanto,

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(k, n-k)} \omega(e_{\sigma(1)}^*, \dots, e_{\sigma(k)}^*) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)}.$$

para cualquier  $k$ -forma. Para mayores detalles, vea [MT97, pág.12], [Car72].  $\square$

**A.8.** Una **forma exterior de grado 1** (o campo de forma lineal) en  $V$  es una aplicación  $\omega$  que a cada  $p \in V$  le asocia  $\omega(p) \in V_p^*$ . Por la proposición A.7, tal  $\omega$  se escribe

$$\omega(p) := \omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i = a_1(p)(dx_1)_p + \dots + a_n(p)(dx_n)_p,$$

donde los  $a_i$  son funciones definidas en  $V$  y tomando valores en  $\mathbb{R}$ . Cuando las funciones  $a_i$  son  $C^\infty$  se deduce que  $\omega$  es una **forma diferencial de grado 1**.

**A.9.** Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base para  $V$  y  $\omega \in \Lambda^n(V)$ . Si  $w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j$  son  $n$  vectores en  $V$ , entonces

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{i,j})\omega(v_1, \dots, v_n).$$

Así, cada forma  $\omega \in \Lambda^n(V) \setminus \{cero\}$  divide a las bases de  $V$  en dos grupos, de acuerdo al signo de  $\omega(w_1, \dots, w_n)$ , es decir dos bases  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\{w_1, \dots, w_n\}$  están en el mismo grupo, o poseen la misma **orientación**, cuando el determinante de la matriz cambio de base satisface  $\det(a_{i,j}) > 0$ . La orientación a la cual pertenece la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  (que es independiente de la forma elegida,  $\omega$ ) se denota por  $[v_1, \dots, v_n]$  y la otra por  $-[v_1, \dots, v_n]$ . En particular,  $\omega = \tilde{\omega}_0 = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$  se la llama **forma de volumen en  $V$**  inducida por la base dual y cumple

$$\tilde{\omega}_0(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{i,j}).$$

Esto es una generalización de lo conocido por álgebra lineal ([Lim98, pág. 314]), pues el volumen usual de un paralelepípedo, con aristas  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , satisface

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

y se define usando la forma  $\omega_0 = dx \wedge dy \wedge dz$  inducida por la base dual de la base canónica, definida en **A.1**.

### A.3 Superficies orientables en $\mathbb{E}^3$ .

Las bases orientadas descritas en **A.9** permiten extender el concepto de orientación en la superficie.

**A.10.** Considere el espacio  $\mathbb{E}_p^3$  con la **orientación usual**  $[(\vec{e}_1)_p, (\vec{e}_2)_p, (\vec{e}_3)_p]$ , inducida por la base canónica. En particular, la orientación en  $\mathbb{E}^3$  se relaciona con la siguiente forma de volumen:  $\omega_0 = dx \wedge dy \wedge dz$ , inducida por la base dual de la base canónica <sup>3</sup>. Una **superficie** de clase  $C^r$  en  $\mathbb{E}^3$  es un subconjunto,  $S \neq \emptyset$  *localmente  $C^r$ -difeomorfo<sup>4</sup> al plano*: cada punto  $p \in S$  admite un abierto  $A \subset \mathbb{E}^3$  y un difeomorfismo de clase  $C^r$

$$(u, v) : U = A \cap S \rightarrow V \subset \mathbb{E}^2 \quad (\text{carta}),$$

con  $V$  un abierto en  $\mathbb{E}^2$  (vea figura A.4). Cuando la parametrización  $\Phi = (u, v)^{-1}$  siempre satisface<sup>5</sup>  $\Phi_u \wedge \Phi_v \neq 0$  se dice que la superficie es **regular**. Por ejemplo, si  $h : V \rightarrow \mathbb{E}$  es  $C^1$  y  $V \subset \mathbb{E}^2$  abierto, la gráfica

$$\left\{ (x, y, h(x, y)) : (x, y) \in V \right\}$$

es una superficie regular de clase  $C^1$ . Una superficie regular también se define como un conjunto  $S \neq \emptyset$  que *localmente es la inversa de un valor regular*: cada  $p \in S$  está en un abierto  $A \subset \mathbb{E}^3$  que es el dominio de una función de clase  $C^r$  la cual satisface  $A \cap S \subset f^{-1}(f(p))$  y

$$\nabla f(q) = (f_x(q), f_y(q), f_z(q)) \neq 0, \quad \forall q \in A \cap S.$$

En particular, la superficie regular  $\{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in V\}$  es  $f^{-1}(0)$ , con cero un valor regular de

$$f(x, y, z) = z - h(x, y).$$

En este trabajo se usan las superficies regulares de clase  $C^\infty$  a las que se denominan **suaves**. Esto es necesario pues en **A.29** se usarán las secciones normales como curvas regulares (admiten una reparametrización por longitud de arco).

<sup>3</sup>La base canónica de  $\mathbb{E}^3$  es ortonormal respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y la base dual  $\{dx, dy, dz\}$  satisface

$$\begin{aligned} p = (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 &\mapsto \langle \vec{e}_1, (x, y, z) \rangle = x = dx(p) \\ &\mapsto \langle \vec{e}_2, (x, y, z) \rangle = y = dy(p) \\ &\mapsto \langle \vec{e}_3, (x, y, z) \rangle = z = dz(p) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>La diferenciabilidad está asociada a funciones definidas en conjuntos  $K \subset \mathbb{E}^3$  (que pueden no ser abiertos):  $g : K \rightarrow \mathbb{E}$  es de clase  $C^r$  si existe un abierto  $A \supset K$  de  $\mathbb{E}^3$  y una aplicación  $G : A \rightarrow \mathbb{E}$  tal que  $G$  es de clase  $C^r$  y la restricción  $G|_K = g$ . En general (ver figura A.4) se usan las funciones coordenadas.

<sup>5</sup> $\Phi_u$  y  $\Phi_v$  son vectores que se obtienen usando las respectivas derivadas parciales de la función  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$

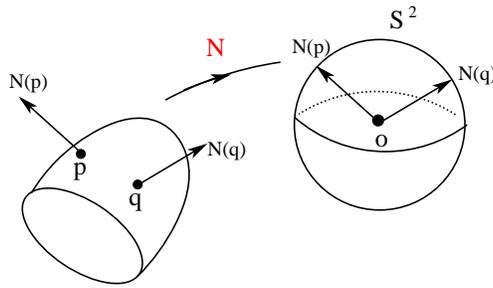


Figura A.3: La aplicación de Gauss

**A.11.** La **aplicación normal unitaria**  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  de una superficie regular se define por

$$N(u, v) = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Phi = (u, v)^{-1}$  es la inversa de la carta  $(u, v)$  definida en  $U$  (vea la figura A.3). Si la superficie es suave,  $N$  es  $C^\infty$ . En particular, cuando localmente la superficie es la gráfica de la función  $z = h(x, y)$  se obtiene  $\Phi(u, v) = (u, v, h(u, v)) = (x, y, z)$  y en consecuencia

$$N(x, y, z) = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)\right\|}. \quad (\text{A.2})$$

Esto implica que si localmente la superficie satisface  $f(x, y, z) = 0$  con  $f(x, y, z) = z - h(x, y)$ ,

$$N(x, y, z) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\|}. \quad (\text{A.3})$$

Una superficie  $S \subset \mathbb{E}^3$  es **orientable** si puede ser cubierta por los dominios de una familia de cartas, donde la superposición de los dominios implica que el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en cada punto de la intersección, es decir la correspondiente aplicación normal unitaria asociada coincide para ambos. En este sentido, la orientabilidad de la superficie es equivalente a la continuidad de la aplicación normal unitaria<sup>6</sup>, la cual será diferenciable automáticamente. ([dCdL90, sección 2.6]). Por ejemplo, orientables son las superficies globalmente definidas por la inversa de un valor regular: la superficie se expresa  $S = f^{-1}(0)$ , donde  $f$  es una función suave de valor real y definida en un conjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{E}^3$  tal que  $S \subset A$  y  $\nabla f(p) = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq 0$  para todo  $p \in S$  (esto es  $Df(p)$  es sobreyectiva para cada  $p \in S$ ). Aquí la orientación positiva es definida por la aplicación normal  $N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ . Observe que cada superficie es localmente orientable pero la orientación es una propiedad global en el sentido que involucra a la totalidad de la superficie, tal como muestra la clásica Banda de Möebius ([dCdL90, sección 2.6]) que no es orientable porque no admite una aplicación normal unitaria y continua, globalmente definida.

<sup>6</sup>La superficie es orientable cuando existe una aplicación normal no degenerada y definida en cada uno de sus puntos. No es necesario esta aplicación sea unitaria. Pedimos que sea unitaria tan sólo para posteriormente relacionarla con la aplicación de Gauss. En cualquier punto  $p \in S$  se tienen dos vectores normales unitarios, que difieren solo por el signo. Así la normal unitaria es la elección de uno de estas dos, en cada punto  $p$ .

## A.4 La primera forma fundamental

La estructura métrica, descrita en esta sección enriquece la noción de superficie y permite una clasificación más fina que aquella dada por los difeomorfismos.

**A.12.** Dada una superficie  $S \subset \mathbb{E}^3$ , un **vector tangente a  $S$  en  $p \in S$**  es el vector velocidad  $\gamma'(0) \in \mathbb{E}^3$  de una curva diferenciable  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  con  $\gamma(0) = p$ . Si  $\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset S$  es una parametrización de  $S$ , como en **A.10**, y  $q \in V$  entonces el subespacio bidimensional

$$d\Phi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{E}^3_{\Phi(q)} \subset \mathbb{E}^3$$

genera el conjunto de vectores tangentes a  $S$  en  $\Phi(q)$  e induce un plano que pasa por  $\Phi(q)$ , independiente de la parametrización  $\Phi$ . Este es el **plano tangente a  $S$  en  $\Phi(q) = p$**  que se denota por  $T_p S$ . Por **A.2**

$$T_p S = \{(p, \vec{w}) : \langle \vec{w}, N(p) \rangle = 0\} = p + N(p)^\perp \subset \mathbb{E}^3.$$

En consecuencia,  $T_p S$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{E}^3_p$  y su cero  $0_p \in T_p S$  se identifica con  $p$ . De este modo, la elección de  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$  genera

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} = \Phi_u, \frac{\partial}{\partial v} = \Phi_v \right\},$$

la **base de  $T_p S$  asociada a  $\Phi$** . En esta base, las coordenadas de  $\vec{w} \in T_p S$  se determinan del siguiente modo:  $\vec{w}$  es el vector velocidad  $\gamma'(0)$  de una curva  $\gamma = \Phi \circ \beta$ , donde  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$  se expresa por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , con  $\beta(0) = q = \Phi^{-1}(p)$ , así

$$\vec{w} = \gamma'(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\Phi(u(t), v(t))(0) = \Phi_u(q)\dot{u}(0) + \Phi_v(q)\dot{v}(0),$$

donde  $\dot{u}(0), \dot{v}(0)$  son las derivadas reales de  $u$  y  $v$  en cero.

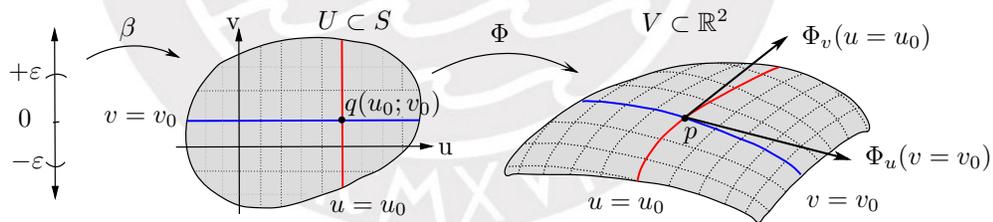


Figura A.4: Base de  $T_p S$  asociada a  $\Phi$ .

**A.13.** Una familia de cartas  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  que cubren la superficie ( $\cup_i U_i = S$ ) es un **atlas** si cada vez que el dominio de dos cartas se superponen ( $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset, i \neq j$ ), entonces ambas cartas son compatibles entre sí ( $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$  es un  $C^r$ -difeomorfismo). Un **atlas maximal** (o estructura diferenciable) es un atlas que contiene a cualquier otro que sea compatible con él. Este atlas maximal permite describir el **fibrado tangente** a  $S$  definido por

$$TS = \{(p, \vec{v}) : p \in S, \vec{v} \in T_p S\}$$

y su estructura diferenciable resulta ser de dimensión<sup>7</sup> cuatro. Esto es verdad pues cuando  $\{(U_\lambda, (u_\lambda, v_\lambda))\}_\lambda$  es una estructura diferenciable para  $S$  y  $\{\frac{\partial}{\partial u_\lambda}, \frac{\partial}{\partial v_\lambda}\}$  la base asociada a los planos tangentes en los puntos de  $\Phi_\lambda(V_\lambda)$ , donde  $\Phi_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)^{-1} : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$  es la respectiva parametrización (vea **A.12**), entonces existe la parametrización  $\Psi_\lambda : V_\lambda \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS$  para el fibrado, dada por

$$\Psi_\lambda(u_\lambda, v_\lambda, a, b) = \left( \Phi_\lambda(u_\lambda, v_\lambda), a \frac{\partial}{\partial u_\lambda} + b \frac{\partial}{\partial v_\lambda} \right), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{y } (u_\lambda, v_\lambda) \in V_\lambda.$$

Esto significa que las coordenadas de un punto  $(p, \vec{w}) \in TS$ , usando la carta  $\Psi_\lambda^{-1}$ , se obtienen al añadir a las coordenadas  $\Phi_\lambda(u_\lambda, v_\lambda)$  de  $p$ , las coordenadas de  $\vec{w}$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial u_\lambda}, \frac{\partial}{\partial v_\lambda}\}$ . Por lo tanto  $\{(V_\lambda \times \mathbb{R}^2, \Psi_\lambda)\}_\lambda$  es una familia de parametrizaciones que cubre  $TS$  y genera una estructura diferenciable para el fibrado tangente. Este fibrado es útil para definir las formas fundamentales que daremos a continuación.

**A.14.** La **primera forma fundamental de  $S$  en  $p \in S$**  es la forma bilineal simétrica definida positiva dada por,

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p, \end{aligned}$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es la restricción a  $T_p S$  del producto interno usual en  $\mathbb{E}_p^3$ , descrito en **A.2**. Cuando  $\vec{w} = \vec{v}$ , usaremos la notación

$$I_p(\vec{v}, \vec{v}) = I_p(\vec{v}).$$

Si  $\Phi(u, v)$  es una parametrización de  $S$  y  $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$  es una curva diferenciable, entonces

$$I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \langle \dot{u}(t)\Phi_u + \dot{v}(t)\Phi_v, \dot{u}(t)\Phi_u + \dot{v}(t)\Phi_v \rangle_{\alpha(t)} = E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2,$$

donde

$$E(u, v) = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle_{\Phi(u, v)}, \quad F(u, v) = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle_{\Phi(u, v)} \quad \text{y} \quad G(u, v) = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle_{\Phi(u, v)}. \quad (\text{A.4})$$

Estas funciones suaves  $E, F$  y  $G$  son los **coeficientes**<sup>8</sup> de  $I_{\Phi(u, v)}$  para la parametrización  $\Phi(u, v)$ . La carta  $(u, v) : U \rightarrow V$ , definida en un conjunto abierto  $U$  de  $S$  hacia el conjunto  $V$  abierto de  $\mathbb{R}^2$  induce una base  $\{du, dv\}$  para el espacio de formas lineales. Este conjunto  $\{du, dv\}$  es la base dual de la base  $\{\frac{\partial}{\partial u} = \Phi_u, \frac{\partial}{\partial v} = \Phi_v\}$  del espacio tangente,

<sup>7</sup>La dimensión de una estructura diferenciable es igual a la dimensión algebraica del espacio vectorial donde están las imágenes de las cartas.

<sup>8</sup>Observe que la matriz asociada a  $I_{\Phi(u, v)}$  respecto a la base  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  de  $T_{\Phi(u, v)}S$  es  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , pues

$$I_{\Phi(u, v)}(\cdot) = (\cdot) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (\cdot).$$

donde  $\Phi = (u, v)^{-1} : V \rightarrow U$  es la aplicación inversa (parametrización) de  $(u, v)$ . Por la Proposición A.5, la base  $\{du, dv\}$  genera una nueva base  $\{du \otimes du, du \otimes dv, dv \otimes du, dv \otimes dv\}$  para el espacio de formas bilineales. Por tanto, la primera forma fundamental (por ser una forma bilineal), se puede escribir en la forma:

$$I = Edu \otimes du + Fdu \otimes dv + Fdv \otimes du + Gdv \otimes dv,$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial de las 1-formas.

## A.5 Geometría de la aplicación de Gauss

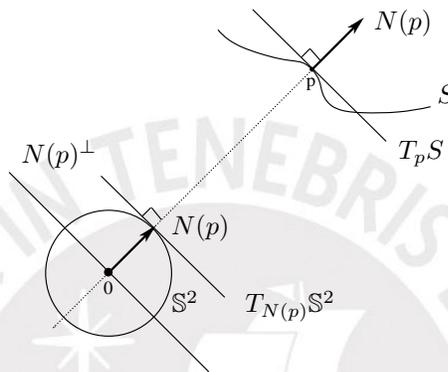


Figura A.5:  $T_p S$  y  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  planos paralelos

**A.15.** Dada una superficie orientable y conexa<sup>9</sup>  $S$ , la **aplicación normal de Gauss**, se define con la aplicación normal unitaria  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  (vea ecuación (A.1) y figura A.3):

$$G(p) = \text{punto final del vector } N(p), \quad p \in S.$$

La aplicación normal de Gauss no depende de la carta que define  $N$  y es diferenciable. Su derivada, llamada la **diferencial normal de Gauss** ( $DN$ ), queda entonces definida sobre toda la superficie; y para cada  $p \in S$  la respectiva  $DN_p$  es una aplicación lineal de  $T_p S = p + N(p)^\perp$  en  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = N(p) + N(p)^\perp$  (vea **A.12**). Como  $T_p S$  y  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  son planos paralelos, pues ambos son el complemento ortogonal de la recta generada por  $N(p)$ , se tiene que  $DN_p$  puede ser identificado como una aplicación lineal de  $T_p S$  en  $T_p S$  (Figura A.5),

$$DN_p : T_p S \rightarrow T_p S.$$

<sup>9</sup>El número de orientaciones que posee una superficie orientable es el doble al número de componentes conexas que posea; de aquí si es conexa posee dos orientaciones, en la cual podemos fijar solo una para determinar la orientación.

Las superficies orientables inducen una orientación en cada plano tangente. Si  $N$  satisface **A.11**, se define una base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \in T_p S$  como **positiva** cuando

$$\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, N \rangle > 0.$$

Y, por **A.9**, el conjunto de todas las bases positivas definirá una orientación para  $T_p S$ .

**Ejemplo A.16.** En la esfera de radio  $r > 0$ ,  $S = \mathbb{S}_r^2 = \{p : \|p\| = r\}$ , se escoge la asignación

$$\mathbb{S}^2 \ni p \mapsto N(p) = \frac{p}{\|p\|}$$

que define una aplicación normal de Gauss en  $\mathbb{S}^2$  y satisface  $DN_p(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{r}$ . En efecto, sea  $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}_r^2$  y  $\vec{v} \in T_p \mathbb{S}_r^2$ , entonces existe una curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_r^2$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = \vec{v}$ . Si hacemos  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , entonces al derivar  $\|\gamma(t)\| = r$  respecto de  $t$  se obtiene que

$$\langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle = 0,$$

esto muestra que  $p = \vec{p}$  es un vector normal a  $\mathbb{S}_r^2$  en el punto  $p$ . Por esto, podemos elegir como normal unitaria a  $\mathbb{S}_r^2$ , a la aplicación definida por

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\|(x_1, x_2, x_3)\|},$$

o también la otra orientación  $\tilde{N}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{\|(x_1, x_2, x_3)\|}$ . Por tanto, la diferencial normal de Gauss en  $p$  queda definida como  $DN_p(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\|p\|} = \frac{\vec{v}}{r}$  (si se elige el otro sentido para la normal, entonces  $D\tilde{N}_p(\vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{r}$ ).

**Ejemplo A.17.** En el cilindro circular recto de radio  $r > 0$ ,  $S = \mathbb{C}_r = \mathbb{E} \times \mathbb{S}_r^1 (\subset \mathbb{E}^3)$ , dado por

$$x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

si se escoge como aplicación normal a  $N(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(0, x_2, x_3)}{r}$ . Su aplicación normal de Gauss satisface  $DN_p(\vec{v}) = -\frac{(0, x'_2(0), x'_3(0))}{r}$ ,  $v = (x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0)) \in T_p S$ . En efecto, sea  $\vec{v} \in T_p S$ , entonces existe una curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}_r$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = \vec{v}$ . Si hacemos  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , donde  $x_2^2 + x_3^2 = r^2$ , entonces al derivar  $x_2^2 + x_3^2 = r^2$  respecto de  $t$  se obtiene

$$x_2(t).x'_2(t) + x_3(t).x'_3(t) = 0.$$

Esto sugiere elegir como aplicación normal unitaria a la aplicación definida por

$$N(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(0, x_2, x_3)}{\|(0, x_2, x_3)\|} = -\frac{(0, x_2, x_3)}{r},$$

o también la otra orientación  $\tilde{N}(x_1, x_2, x_3) = \frac{(0, x_2, x_3)}{\|(0, x_2, x_3)\|}$ . Elijamos como orientación a  $N(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(0, x_2, x_3)}{r}$ , entonces la diferencial de la normal unitaria queda definida por  $DN_p(\vec{v}) = -\frac{(0, x'_2(0), x'_3(0))}{r}$ , donde  $\vec{v} = (x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0))$ .

**Proposición A.18.** Sea  $p \in \mathbb{E}^3$  y  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{E}^3$ . Entonces:

- a) El diferencial  $DN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  es un endomorfismo autoadjunto<sup>10</sup>.
- b) La matriz relativa a la base  $\beta$  es simétrica.
- c)  $\mathbb{E}^2$  posee una base ortonormal formada por los autovectores de  $DN_p$ .

*Demostración.* a) Sea  $\Phi$  una parametrización local de la superficie, como en **A.10**. Haciendo  $N(u, v) = N \circ \Phi(u, v)$ , la regla de la cadena muestra

$$N_u = DN_{\Phi(u,v)}(\Phi_u) \quad \text{y} \quad N_v = DN_{\Phi(u,v)}(\Phi_v). \quad (\text{A.5})$$

Derivando las igualdades  $\langle \Phi_u, N \rangle = 0$  y  $\langle \Phi_v, N \rangle = 0$ , en relación a  $v$  y  $u$  respectivamente, se obtiene

$$\langle \Phi_{uv}, N \rangle + \langle \Phi_u, N_v \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \Phi_{vu}, N \rangle + \langle \Phi_v, N_u \rangle = 0.$$

Sustrayendo miembro a miembro y sabiendo que  $\Phi_{uv} = \Phi_{vu}$ , se obtiene  $\langle \Phi_u, N_v \rangle = \langle \Phi_v, N_u \rangle$ . Reescribiendo esta igualdad según (A.5) se obtiene

$$\langle \Phi_u, DN_{\Phi(u,v)}(\Phi_v) \rangle = \langle \Phi_v, DN_{\Phi(u,v)}(\Phi_u) \rangle = \langle DN_{\Phi(u,v)}(\Phi_u), \Phi_v \rangle,$$

y al ser  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  una base de  $T_{\Phi(u,v)}S$ , resulta que para cualquier par de vectores  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T_{\Phi(u,v)}S$ , se cumple

$$\langle \vec{w}_1, DN_{\Phi(u,v)}(\vec{w}_2) \rangle = \langle \vec{w}_2, DN_{\Phi(u,v)}(\vec{w}_1) \rangle.$$

Por tanto,  $DN_p$  es un endomorfismo lineal **autoadjunto** de  $T_p S$  relativo al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . Esto demuestra **a)**.

**b)** Para probar esto, recordemos que si  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  es base ortonormal de  $\mathbb{E}^3$ , entonces la matriz asociada al endomorfismo  $DN_p$  se escribe

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}, \quad \text{donde } a_{i,j} = \langle \vec{e}_i, DN_p(\vec{e}_j) \rangle.$$

Por **a)**,

$$a_{i,j} = \langle \vec{e}_i, DN(\vec{e}_j) \rangle = \langle DN(\vec{e}_i), \vec{e}_j \rangle = a_{j,i}.$$

Por tanto, la matriz asociada a  $DN$  es simétrica y **b)** es verdad.

- c) Sea  $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  la matriz (simétrica) de  $DN_p$  relativa a una base ortonormal de  $T_p S$ .

Los autovalores de  $DN_p$  son las raíces del polinomio característico  $P(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda +$

<sup>10</sup>En general un endomorfismo lineal  $L : E \rightarrow E$  de un espacio vectorial real de dimensión finita provista de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se dice autoadjunto (o simétrico) si para cada  $w_1, w_2 \in E$  se tiene

$$\langle w_1, L(w_2) \rangle = \langle L(w_1), w_2 \rangle.$$

$ab - c^2$ , cuyo discriminante  $\Delta = (a - b)^2 + 4c^2$  es no negativo  $\geq 0$ . Si  $\Delta = 0$  entonces  $c = 0$  y  $a = b$ , lo que muestra que  $DN$  es una homotecia, y entonces cualquier base de  $\mathbb{E}^3$  esta formada por autovectores de  $DN$ . En el caso que se tenga  $\Delta > 0$ ,  $DN_p$  posee dos autovalores reales distintos  $\lambda_1, \lambda_2$ , a los que estan asociados vectores unitarios  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , entonces  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  son necesariamente ortogonales,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle &= \langle DN_p(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, DN_p(\vec{e}_2) \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle, \\ \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto **c)** es verdad y se concluye la prueba de la proposición.  $\square$

## A.6 La segunda forma fundamental

**A.19.** A un endomorfismo  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  autoadjunto<sup>11</sup> se le asocia una aplicación bilineal  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $B(\vec{v}, \vec{w}) = \ll \vec{v}, L(\vec{w}) \gg$ , que además es simétrica, pues  $L$  es autoadjunto. Por la proposición A.18,  $-DN_p$  (ojo con el signo) es un endomorfismo autoadjunto en relación al producto interno en  $T_p S$ , por consiguiente admite una aplicación bilineal asociada. Esta es la **segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$** ,  $II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ . Específicamente  $II$  satisface

$$II_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, -DN_p(\vec{w}) \rangle_p, \quad (\text{A.6})$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  es la restricción a  $T_p S$  del producto interno usual en  $\mathbb{E}_p^3$  (descrito en **A.2**). Cuando  $\vec{w} = \vec{v}$  usaremos la notación

$$II_p(\vec{v}, \vec{v}) = II_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, -DN_p(\vec{v}) \rangle_p = -\langle \vec{v}, DN_p(\vec{v}) \rangle_p,$$

para la segunda forma fundamental en el punto  $p$  y siguiendo la dirección  $\vec{v}$ . Por otro lado, si  $\Phi(u, v)$  es una parametrización de  $S$  y  $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$  es una curva diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}II_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \langle \dot{u}(t)\Phi_u + \dot{v}(t)\Phi_v, -DN_{\alpha(t)}(\dot{u}(t)\Phi_u + \dot{v}(t)\Phi_v) \rangle_{\alpha(t)}, \\ &= \dot{u}(t)^2 \langle \Phi_u, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_u) \rangle_{\alpha(t)} + \dot{u}(t)\dot{v}(t) \langle \Phi_u, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_v) \rangle_{\alpha(t)} \\ &\quad + \dot{v}(t)\dot{u}(t) \langle \Phi_v, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_u) \rangle_{\alpha(t)} + \dot{v}(t)^2 \langle \Phi_v, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_v) \rangle_{\alpha(t)}, \\ &= e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2,\end{aligned}$$

<sup>11</sup>En general un endomorfismo lineal  $L : E \rightarrow E$  de un espacio vectorial real de dimensión finita provista de un producto interno  $\ll \cdot, \cdot \gg$  se dice autoadjunto (o simétrico) si para cada  $w_1, w_2 \in E$  se tiene

$$\ll w_1, L(w_2) \gg = \ll L(w_1), w_2 \gg.$$

donde  $e, f$  y  $g$  (que son funciones suaves de  $(u, v)$ ) son denominados **coeficientes de la segunda forma fundamental**<sup>12</sup> y cumplen<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} e &= \langle \Phi_u, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_u) \rangle = \langle \Phi_u, -N_u \rangle = \langle \Phi_{uu}, N \rangle, \\ f &= \langle \Phi_u, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_v) \rangle = \langle \Phi_v, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_u) \rangle = \langle \Phi_{uv}, N \rangle, \\ g &= \langle \Phi_v, -DN_{\alpha(t)}(\Phi_v) \rangle = \langle \Phi_v, -N_v \rangle = \langle \Phi_{vv}, N \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

En términos de la carta  $(u, v) : U \rightarrow V$  y la base  $\{du \otimes du, du \otimes dv, dv \otimes du, dv \otimes dv\}$  del espacio de formas bilineales, la segunda forma fundamental se puede escribir en la forma:

$$II = edu \otimes du + fdu \otimes dv + fdv \otimes du + gdv \otimes dv,$$

donde  $\otimes$  denota el producto tensorial de las 1-formas (vea proposición A.5).

**Ejemplo A.20.** Sea  $h : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}$  de clase  $C^\infty$ . Calcular los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental para  $S = \{(u, v, h(u, v)) : (u, v) \in \mathbb{E}^2\}$ . Por A.11,  $\Phi(u, v) = (u, v, h(u, v))$  es una parametrización de  $S$ , definida en  $\mathbb{E}^2$ . De (A.4) y (A.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} E &= \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = \langle (1, 0, h_u), (1, 0, h_u) \rangle = 1 + h_u^2, \\ F &= \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = \langle (1, 0, h_u), (0, 1, h_v) \rangle = h_{uv}, \\ G &= \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = \langle (0, 1, h_v), (0, 1, h_v) \rangle = 1 + h_v^2. \end{aligned}$$

Haciendo  $w = h(u, v)$ . Entonces

$$\begin{aligned} e &= \langle \Phi_{uu}, N(u, v, w) \rangle = \langle (0, 0, h_{uu}), \frac{(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|} \rangle = \frac{h_{uu}}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|}, \\ f &= \langle \Phi_{uv}, N(u, v, w) \rangle = \langle (0, 0, h_{uv}), \frac{(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|} \rangle = \frac{h_{uv}}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|}, \\ g &= \langle \Phi_{vv}, N(u, v, w) \rangle = \langle (0, 0, h_{vv}), \frac{(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|} \rangle = \frac{h_{vv}}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|}. \end{aligned}$$

**Teorema A.21.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo. Consideremos las dos formas fundamentales  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ,  $II = edu^2 +$

<sup>12</sup>Observe que la matriz asociada a  $II_{\Phi(u,v)}$  respecto a la base  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  de  $T_{\Phi(u,v)}S$  es  $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ , pues

$$II_{\Phi(u,v)}(\cdot) = (\cdot) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} (\cdot).$$

<sup>13</sup>La expresión para  $f$  usa la invarianza en el orden de las derivadas parciales, lo que demuestra la simetría de  $II$ .

$2fdudv + gdv^2$ , siendo  $I$  definida positiva. Supóngase que las funciones  $E$ ,  $F$  y  $G$  son de clase  $C^2$  y  $e$ ,  $f$  y  $g$  son de clase  $C^1$  satisfaciendo la compatibilidad de las ecuaciones dadas por

$$-E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2,$$

conocida como ecuación de Gauss Weingarten, y por

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2, \end{aligned}$$

llamadas ecuaciones de Codazzi; donde  $\Gamma_{jk}^i$  que aparecen en las ecuaciones son los usuales símbolos de Christoffel. Entonces se tiene una inmersión  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^3$  teniendo a  $I$  como primera forma fundamental y  $II$  como segunda forma fundamental, i.e.,  $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$ ,  $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$ ,  $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$ ,  $e = \langle \alpha_{uu}, N_\alpha \rangle$ ,  $f = \langle \alpha_{uv}, N_\alpha \rangle$ ,  $g = \langle \alpha_{vv}, N_\alpha \rangle$ , y  $N_\alpha = \frac{(\alpha_u \wedge \alpha_v)}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|}$ .

*Demostración.* Vea [dCdL90], [Kli83] y [Sto89]. □

**Teorema A.22.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo. Sea  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\bar{\alpha} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos inmersiones de clase  $C^3$  con formas fundamentales asociadas  $I_\alpha = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ,  $II_\alpha = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ ,  $I_{\bar{\alpha}} = \bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2$ ,  $II_{\bar{\alpha}} = \bar{e}du^2 + 2\bar{f}dudv + \bar{g}dv^2$ . Supóngase que  $I_\alpha = I_{\bar{\alpha}}$  y  $II_\alpha = II_{\bar{\alpha}}$ . Entonces se tiene que existe un vector  $v \in \mathbb{R}^3$  y una matriz ortogonal  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\bar{\alpha} = M\alpha + v$ .

*Demostración.* Vea [dCdL90], [Kli83] y [Sto89]. □

La continuidad de la inmersión  $\alpha$  con respecto a las formas  $I_\alpha = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  y  $II_\alpha = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ , para alguna topología natural apropiada en el espacio de funciones, para mayores detalles consulte [Cia02]. Este teorema fundamental, de existencia y unicidad, en el caso donde  $I$  es solo de clase  $C^1$  y  $II$  sea de clase  $C^0$  esta desarrollado en [HW50] y en [HW53].

## A.7 Curvatura gaussiana y curvatura media

**A.23.** La matriz  $\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{b} \end{pmatrix}$  asociada al endomorfismo  $-DN_{\Phi(u,v)}$ , con respecto a la base  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  de  $T_{\Phi(u,v)}S$ , se obtiene haciendo el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} -N_u &= \tilde{a}\Phi_u + \tilde{c}\Phi_v \\ -N_v &= \tilde{c}\Phi_u + \tilde{b}\Phi_v. \end{aligned}$$

Si efectuamos un producto interior de cada uno de estas con  $\Phi_u$  y  $\Phi_v$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} e &= \tilde{a}E + \tilde{c}F & f &= \tilde{a}F + \tilde{c}G \\ f &= \tilde{c}F + \tilde{b}G & g &= \tilde{c}F + \tilde{b}G, \end{aligned}$$

que en la forma matricial se escribe

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{b} \end{bmatrix},$$

despejando

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

O lo que es lo mismo

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ -Fe + Ef & -Ff + Eg \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

En particular

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{b} \end{pmatrix} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{y} \quad \text{traza} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{c} & \tilde{b} \end{pmatrix} = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{(EG - F^2)}.$$

Con esto, se define la **curvatura Gaussiana**  $K(p)$  de una superficie  $S$  en un punto  $p \in S$ , como el determinante de la matriz asociada a la aplicación lineal  $-DN_p$  :

$$K(p) = \det(-DN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Y la **curvatura media**  $H(p)$  es la semitraza de la matriz asociada a  $-DN_p$ :

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{traza}(-DN_p) = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}.$$

**Ejemplo A.24.** Siguiendo el ejemplo A.20, se calcula  $H(p)$  y  $K(p)$  para todo  $p \in S$ .

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{\left( \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|^2} \right)}{(1 + h_u^2)(1 + h_v^2) - h_{uv}^2} = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}. \\ H(p) &= \frac{(1 + h_v^2) \frac{h_{uu}}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|} - 2 \frac{h_{uv}^2}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|} + (1 + h_u^2) \frac{h_{vv}}{\|(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 1)\|}}{2[(1 + h_u^2)(1 + h_v^2) - h_{uv}^2]}, \\ &= \frac{h_{uu} + h_{uu}h_v^2 - 2h_{uv}^2 + h_{vv} + h_u^2h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

## A.8 Curvatura y sección normal

**A.25.** Sea  $t \mapsto \tilde{\gamma}(t)$  una curva regular sobre la superficie  $S$ , y  $T(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}$  su vector tangente unitario. La **curvatura normal de  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{\gamma}(t)$** , denotada por  $k_n(\tilde{\gamma}, t)$ , es la

componente del vector curvatura <sup>14</sup>  $\tilde{\gamma}''(t) = \frac{T'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}$  a lo largo de la normal unitaria  $N$  en  $\tilde{\gamma}(t)$ , es decir:

$$\begin{aligned} k_n(\tilde{\gamma}, t) &= \text{componente normal del vector curvatura,} \\ &= \left\langle \tilde{\gamma}''(t), N(\tilde{\gamma}(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{T'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}, N(\tilde{\gamma}(t)) \right\rangle = \frac{\|T'(t)\|}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} \|N(\tilde{\gamma}(t))\| \cos \theta, \\ &= k \cos \theta, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector curvatura  $T'$  y la normal a la superficie<sup>15</sup>  $N$ . Si  $k \neq 0$  entonces, podemos introducir la normal principal  $\vec{n}$  de  $\gamma$ , por la ecuación  $T' = k\vec{n}$ , en este caso  $\theta$  es el ángulo entre  $N$  y  $\vec{n}$ .

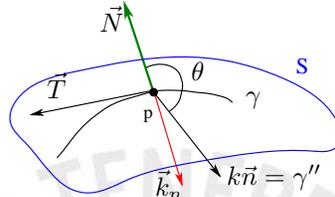


Figura A.6: Curvatura normal

**Proposición A.26.** Sea  $t \mapsto \tilde{\gamma}(t)$  una curva regular sobre la superficie  $S$ . La curvatura normal de  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{\gamma}(t)$  se calcula mediante

$$k_n(\gamma, t) = \left\langle \tilde{\gamma}''(t), N(\tilde{\gamma}(t)) \right\rangle = \frac{II_{\gamma(t)}(\gamma'(t))}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^2}.$$

*Demostración.* Sea  $N(t) = N \circ \tilde{\gamma}(t)$  y  $T(t) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}$ , el vector tangente unitario a  $\tilde{\gamma}$  en  $t$ . Derivando la igualdad  $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$  se obtiene  $\langle T'(t), N(t) \rangle = -\langle T(t), N'(t) \rangle$ , y si a esta igualdad se divide entre  $\|\tilde{\gamma}'(t)\|$  se llega a que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}, N(t) \right\rangle &= -\left\langle \frac{T(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|}, N'(t) \right\rangle = -\left\langle \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^2}, N'(t) \right\rangle. \\ \Rightarrow k_n(\gamma, t) &= \frac{II_{\gamma(t)}(\gamma'(t))}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|^2}. \end{aligned}$$

□

*Observación A.27.* A partir de las definiciones no es difícil ver que:

- La aclaración sobre el signo  $(-)$  que se incluyó en el **A.19**, es para asegurarnos que  $II(\vec{v})$  resulte  $+k_n$  (en lugar que  $-k_n$ ).
- El resultado de esta proposición muestra que  $k_n$  solo depende del vector tangente; resultado que se probará a continuación.

<sup>14</sup>Notemos que no depende de la orientación de la curva.

<sup>15</sup> $k_n$  da una medida de cuanto la curva  $\gamma$  se esta doblando en la dirección perpendicular a la superficie.

**Proposición A.28.** La curvatura normal  $k_n(\gamma, s)$  en  $\gamma(s)$  solo depende de la dirección de la tangente a la curva en el instante  $s$ . Es decir, si  $\gamma$  y  $\beta$  son dos curvas en  $S$  que son tangentes una a la otra en  $\gamma(s_0) = \beta(t_0) = p_0$ ; entonces  $k_n(\gamma, s_0) = k_n(\beta, t_0)$ .

*Demostración.* Es inmediato si se hace  $\vec{v} = \gamma'(s_0) = \beta'(t_0)$ . Pues por la proposición A.26, resulta

$$k_n(\gamma, s_0) = k_n(p_0) = \frac{II_{p_0}(\gamma'(s_0))}{\|\tilde{\gamma}'(s_0)\|^2} = \frac{II_{p_0}(\beta'(t_0))}{\|\tilde{\beta}'(t_0)\|^2} = k_n(\beta, t_0).$$

□

**A.29.** Sea  $p \in S$  y  $\vec{v} \in T_p S$ . Una **sección normal** a la superficie  $S$  en la dirección de  $\vec{v}$ , es una curva regular  $\gamma$  que resulta de la intersección de  $S$  con el plano  $\Pi$ , generado por  $\vec{v}$  y  $N(p)$  (vea figura A.29). A consecuencia de la proposición A.28, se puede definir la curvatura normal de una curva regular usando solo las secciones normales; y si se quiere, se puede pensar que estas ya están parametrizadas por la longitud de arco. Por eso, usando la proposición A.26, se define:

$$\begin{aligned} II_p(\vec{v}) &= \text{curvatura normal de la sección normal } \gamma \\ &= \langle \gamma'', N \rangle \\ &= k \cos \theta, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $N$  y  $T'$ . Puesto que  $\gamma$  se encuentra en el plano  $\Pi$ , el vector  $T'$  es tangente a  $\Pi$ , y como  $T'$  es perpendicular a  $\vec{v}$ , se sigue que  $T'$  es un múltiplo de  $N$ . Y con ello  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ , por tanto

$$\begin{aligned} II(\vec{v}) &= \pm k \\ &= \pm \text{curvatura de la sección normal en } p \text{ en la dirección de } \vec{v}. \end{aligned}$$

El signo de la curvatura normal  $k_n$  en el punto  $p$ , va a depender de la concavidad de la

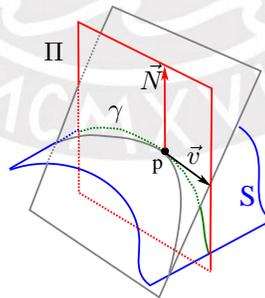


Figura A.7: Sección normal

sección normal en el punto; es decir si la concavidad esta dirigida en el sentido de la normal  $N_p$  o en el sentido opuesto. Por ejemplo, si  $k_n(p) > 0$  entonces  $\vec{n} = N(p)$ , esto nos indica dos cosas : que la sección normal se flexiona en el sentido de  $N(p)$ , y que a su vez la superficie en dirección del vector tangente se esta flexionando en el sentido de  $N(p)$ .

**Ejemplo A.30.** Dado el plano  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ , el vector normal unitario  $N(p) = \frac{(a, b, c)}{\|(a, b, c)\|}$  es constante, para todo  $p \in \Pi$ , por tanto  $DN_p = 0$ . Más aún, las secciones normales son rectas, y por consiguiente todas las curvaturas normales son cero.

**A.31.** Para curvas que no están parametrizadas por la longitud de arco, la curvatura normal  $k_n$ , según la proposición A.26, se escribirá

$$k_n(\gamma, t) = \frac{II_p(\gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{II_p(\gamma'(t))}{I_p(\gamma'(t))}, \quad (\text{A.9})$$

donde  $p = \gamma(t)$ . Y si la curva esta expresada en coordenadas locales  $\gamma(t) = \Phi(u(t), v(t))$ , la curvatura normal quedaría escrita como

$$k_n(\gamma, t) = \frac{e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2}{E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2}.$$

Además, por la observación A.27 (ítem 2), se puede escribir  $k_n$  en función del vector tangente  $\gamma'$  en la base  $\{\Phi_u, \Phi_v\}$  del espacio tangente, así

$$k_n(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = \frac{e\dot{u}(t)^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g\dot{v}(t)^2}{E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2}; \quad (\text{A.10})$$

o por

$$k_n(du, dv) = \frac{e du^2 + 2f dudv + g dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}.$$

Dividiendo el numerador y denominador por  $du^2$ , y escribir  $k_n$  en función de la razón  $\frac{dv}{du}$ , se consigue

$$k_n\left(\frac{dv}{du}\right) = \frac{e + 2f\frac{dv}{du} + g\frac{dv^2}{du^2}}{E + 2F\frac{dv}{du} + G\frac{dv^2}{du^2}},$$

la cual permite caracterizar los valores extremos de  $k_n$ , los cuales inducen las curvaturas principales que estudiaremos a continuación.

### A.8.1 Interpretación geométrica de la curvatura Gaussiana.

**A.32.** Sea  $p \in S$ . Se sabe por 1.3 que

$$K(p) = \det(-DN) = k_1(p) \cdot k_2(p).$$

La curvatura Gaussiana, es una propiedad intrínseca de la superficie, esta nos permitirá conocer localmente la forma de la superficie, es decir:

1. Si  $K > 0 \Leftrightarrow k_1$  y  $k_2$  tienen el mismo signo  $\Leftrightarrow$  las secciones normales, en las direcciones principales  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , se doblan ambas en la misma dirección.
  - $z = ax^2 + by^2$ , donde  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo (paraboloide elíptico). Si  $p = (0, 0, 0)$ , entonces  $K = ab > 0$ .
2. Si  $K < 0 \Leftrightarrow k_1$  y  $k_2$  tienen diferente signo  $\Leftrightarrow$  las secciones normales, en las direcciones principales  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , se doblan en direcciones opuestas.

- $z = ax^2 + by^2$ , donde  $a$  y  $b$  tienen diferente signo (hiperboloide parabólico). Si  $p = (0, 0, 0)$ , entonces  $K = ab < 0$ .

También, de los ejemplos vistos, se puede decir que:

Si  $K > 0$  en  $p \Rightarrow$  la superficie localmente en  $p$  ó es cóncava ó convexa,

Si  $K < 0$  en  $p \Rightarrow$  la superficie localmente en  $p$  es de tipo silla.



## Apéndice B

# Comentarios históricos sobre líneas de curvatura

### B.1 Momentos históricos [SG08, Sot]

#### B.1.1 Los momentos antes de Poincaré: Euler, Monge y Dupin.

**B.1. Leonhard Euler (1707-1783)**, creó la teoría de curvatura de superficies. Él definió la **curvatura normal**  $k_n(p, L)$  sobre una superficie orientada  $S$  en una dirección tangente  $L$  a un punto  $p$  como la curvatura, en  $p$ , de la curva plana de intersección de la superficie con el plano tangente generado por la línea  $L$  y la normal positiva unitaria  $N$  a la superficie en  $p$ . Las **curvaturas principales** en  $p$  son los valores extremos de  $k_n(p, L)$  cuando  $L$  varía en las direcciones tangentes a través de  $p$ . Por tanto, las **curvaturas normales** son:  $k_1(p) = k_n(p, L_1)$  la **curvatura normal máxima** y  $k_2(p) = k_n(p, L_2)$  la **curvatura normal mínima**, obtenidas a lo largo de las **direcciones principales**:  $L_1(p)$ , la **máxima**, y  $L_2(p)$ , la **mínima**.

La fórmula de Euler expresa la curvatura normal  $k_n(\theta)$  a lo largo de una dirección haciendo un ángulo  $\theta$  con la dirección principal mínima  $L_2$  como  $k_n(\theta) = k_1 \sin^2(\theta) + k_2 \cos^2(\theta)$ .

Euler, sin embargo parece no haber considerado las **curvas integrales** de los **campos de línea**  $L_i(p) : p \rightarrow L_i(p)$ ,  $i = 1, 2$ , y sobre todo del rol de los **puntos umbílicos** en la cual las curvaturas principales coinciden y los campos de línea son indefinidos.

**B.2. Garpar Monge (1746-1818)**, creó la familia de curvas integrales de los **campos de línea principales**  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , para el caso del elipsoide triaxial

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad a > b > c > 0.$$

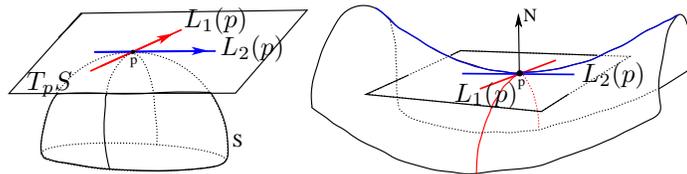


Figura B.1: Direcciones principales  $L_1$  y  $L_2$ .

Haciendo, por integración directa de las ecuaciones diferenciales de los campos de las líneas de curvaturas principales, Monge llegó al primer ejemplo de una **foliación con singularidades** sobre una superficie que (de ahora en adelante) será llamado la **configuración principal** de una superficie orientable. Las singularidades consisten de los **puntos umbílicos**, término matemático para designar a aquellos puntos donde las curvaturas principales coinciden y los campos de línea son indefinidos.

El Elipsoide, equipado con ésta configuración principal, será llamado Elipside de Monge.

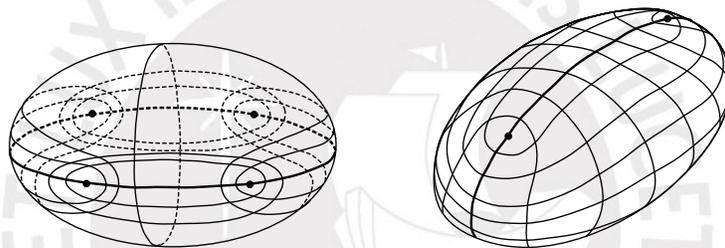


Figura B.2: Configuración el Elipsoide de Monge.

**B.3.** El elipsoide mostrado en la figura B.2 contiene algunos de los resultados típicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales como:

- **Puntos singulares y separatrices.** Los puntos umbílicos juegan el rol de puntos singulares de las foliaciones principales, cada uno de ellos tiene una separatriz para cada foliación principal. Estas separatrices producen una conexión con otro punto umbílico de el mismo tipo, para la cual esta es también una separatriz. En tal caso, se dice que es una **conexión separatríz umbilical**.
- **Ciclos.** La configuración principal tiene ciclos principales. En realidad, todas las líneas principales, con la excepción de cuatro conexiones umbilicales, son periódicas. Los ciclos llenan cilindros o anillos, para cada foliación.

Esta particularidad es común en todos los ejemplos clásicos, donde ninguna superficie *conocida* exhibe ciclos aislados conocidos. Esto se deriva de la simetría de la superficie considerada, o por la integrabilidad que esta presenta en la aplicación del Teorema de Dupin para familias triplemente ortogonales de superficies.

Se obtiene que la generacidad de los ciclos principales para una superficie suave son ciclos límite hiperbólicos.

- **Estabilidad estructural.** Las foliaciones principales no sufren cambios cualitativos bajo pequeñas perturbaciones en los coeficientes de el polinomio cuadrático que describe la superficie.
- **Bifurcaciones.** Los cambios drásticos en la configuraciones principales exhibidas por la transición de una esfera, a un elipsoide de revolución y a un elipsoide triaxial (como en Fig. B.2), que después de una muy pequeña perturbación, esta es una forma simple de un fenómeno de bifurcación.



# Bibliografía

- [BF89] J. W. Bruce and D. L. Fidal, *On binary differential equations and umbilics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), no. 1-2, 147–168. MR 985996 (90e:58141)
- [Car72] H. Cartan, *Formas diferenciales: aplicaciones elementales al cálculo de variaciones y a la teoría de curvas y de superficies*, Colección Métodos, Omega, 1972.
- [Cia02] Philippe G. Ciarlet, *The continuity of a surface as a function of its two fundamental forms*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Department of Mathematics, City University of Hong Kong, 83 Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong, 2002.
- [dCdL90] M.P. do Carmo and J.C.S. de Lis, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza universidad textos, Alianza Editorial, 1990.
- [dPW95] Andrew du Plessis and Terry Wall, *The geometry of topological stability*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 9, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, Oxford Science Publications. MR 1408432 (97k:58024)
- [FNB12] T. Fukui and J. J. Nuño-Ballesteros, *Isolated singularities of binary differential equations of degree  $n$* , Publ. Mat. **56** (2012), no. 1, 65–89. MR 2918184
- [GS82] C. Gutiérrez and J. Sotomayor, *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*, Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981), Astérisque, vol. 98, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 195–215. MR 724448 (85h:58006)
- [GS83] ———, *An approximation theorem for immersions with stable configurations of lines of principal curvature*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 332–368. MR 730276 (85b:53002)

- [GS98] ———, *Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces*, Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines [Monographs of the Institute of Mathematics and Related Sciences], vol. 3, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima; Universidad Nacional de Ingeniería, Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas, Lima, 1998. MR 2007065 (2004g:53007)
- [GS09] Ronaldo Garcia and Jorge Sotomayor, *Differential equations of classical geometry, a qualitative theory*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications], Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009, 27o Colóquio Brasileiro de Matemática. [27th Brazilian Mathematics Colloquium]. MR 2532372 (2011d:53006)
- [Gui88] V. Guíñez, *Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 2, 477–502. MR 961601 (89h:57021)
- [Gui94] ———, *Locally stable singularities for positive quadratic differential forms*, J. Differential Equations **110** (1994), no. 1, 1–37. MR 1275745 (95d:58105)
- [HW50] Philip Hartman and Aurel Wintner, *On the fundamental equations of differential geometry*, American Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press, 1950.
- [HW53] ———, *On the third fundamental form of a surface*, Amer. J. Math. **75** (1953), 298–334. MR 0055734 (14,1119c)
- [Kli83] W. Klingenberg, *A course in differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics Ser., Springer, 1983.
- [Lim98] E.L. Lima, *Algebra lineal*, Textos del imca, IMCA, 1998.
- [Loj88] Stanisław Łojasiewicz, *An introduction to the theory of real functions*, third ed., A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988, With contributions by M. Kosiek, W. Mlak and Z. Opial, Translated from the Polish by G. H. Lawden, Translation edited by A. V. Ferreira. MR 952856 (89e:26001)
- [MT97] Ib Madsen and Jørgen Tornehave, *From calculus to cohomology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, de Rham cohomology and characteristic classes. MR 1454127 (98g:57040)
- [SG08] Jorge Sotomayor and Ronaldo Garcia, *Lines of curvature on surfaces, historical comments and recent developments*, São Paulo J. Math. Sci. **2** (2008), no. 1, 99–143. MR 2502627

- [Sot] J. Sotomayor, *El elipsoide de monge y las líneas de curvatura*, Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, vol. 2007, MATerials MATemàtics, no. 1, 25 pp.
- [Spi79] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, second ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979. MR 532830 (82g:53003a)
- [Sto89] J. J. Stoker, *Differential geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989, Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication. MR 1013365 (90f:53002)
- [Zor09] Vladimir A. Zorich, *Mathematical analysis I*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Paperback reprint [of MR2033094]. MR 2730364

