PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CONSTRUCCIÓN Y GESTIÓN DE PORTAFOLIOS MEDIANTE EL MODELO BLACK-LITTERMAN: UNA APLICACIÓN A LAS AFP EN PERÚ DURANTE EL PERIODO 2007-2015

Tesis para optar el grado de Magíster en Economía que presenta

CARLOS MEDINA ASTETE

GUSTAVO MANUEL CÁCERES HILARIO

Dirigido por

GUILLERMO MOLOCHE VELARDE

San Miguel, 2016

RESUMEN

El presente documento evalúa el proceso de inversión de las administradoras de fondos de pensiones (AFP) en el Perú durante el periodo comprendido entre el 2007 y el 2015, inclusive. De este modo, busca proveer evidencia empírica referente a que hubiese sido posible obtener mayores rendimientos en los fondos que los observados históricamente por las AFP, de no existir restricciones como los límites a invertir en el extranjero o las ventas en corto.

En este proceso, se analiza el portafolio de mercado a nivel del sistema para el fondo 2, por ser este el más representativo, y se determinan las clases de activos que lo constituyen, para luego, utilizando optimización inversa, hallar los retornos implícitos de estos.

Asimismo, a través del *momentum* de las series de activos, con tres periodos de rezago, se especifican las opiniones o predicciones sobre el retorno de los mismos para luego ser combinadas con los retornos implícitos a través del modelo Black-Litterman. Así, se obtienen nuevos pesos de las clases de activos para cada uno de los meses de estudio y se calcula la rentabilidad del portafolio Black-Litterman acumulada, la cual resulta siendo considerablemente mayor a la rentabilidad acumulada histórica del sistema.

"La primera regla es nunca perder dinero. La segunda regla es nunca olvidar la primera"

Warren Buffett, 1930 – actualidad

Para Ana Astete, mi madre, a quien le dedico este trabajo por haberme apoyado durante estos veinticuatro años de vida. Para mi hermana, Peppa Pig, y para todos mis amigos que pensaron que nunca lo lograría.

Carlos Medina Astete

A mis padres, mi motor, por su incesante lucha, creencia y constancia, a ellos les debo todo desde nacer hasta quien seré mañana. Gracias.

Gustavo Manuel Cáceres Hilario

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

En el Perú, a partir del año 1992, coexisten dos modalidades de ahorro previsional para garantizar una pensión al aportante al momento de su jubilación: el sistema público, cuya administración se encuentra a cargo de la Oficina de Normalización Previsional (ONP) y sigue un esquema *pay as you go*[1] y el Sistema Privado de Pensiones. Este último creado a través del Decreto Ley 25897 sigue el esquema de Cuentas Individuales de Capitalización (CIC) donde la gestión de los fondos queda en mano de agentes privados conocidos como Administradoras Privadas de Fondos de Pensiones (AFP). De esta manera, se permitió al sector privado participar en la gestión de los portafolios de inversión provenientes del ahorro previsional; con esto, se buscaba intentó resolver aquellos problemas inherentes de la administración pública.

Así, al trabajar bajo una modalidad de cuentas individuales de capitalización para los ahorros previsionales se eliminan los problemas del sector público, limitando el rol del Estado al de un ente regulador, mientras que los afiliados gozan de una pensión basada únicamente en sus aportes y la rentabilidad acumulada por estos.

Sin embargo, la implementación del SPP trajo consigo otro problema: la heterogeneidad del universo de aportantes. Es decir, debido al perfil de riesgo de estos, los fondos provenientes del ahorro previsional de un afiliado joven y de un afiliado de edad avanzada no deberían ser administrados igualmente. Por tal motivo, fue necesaria la introducción del esquema de Multifondos[2], con lo cual cada AFP era facultada de administrar tres carteras distintas de inversión[3]: Fondo 1 (Conservador o Preservación de Capital), Fondo 2 (Balanceado o Mixto) y Fondo 3 (Crecimiento o Apreciación de capital).

La regulación de este esquema implica imponer ciertos límites de inversión para cada uno de los fondos de modo tal que se logre mitigar el riesgo de cada cartera. Estudios que serán descritos más adelante demuestran que estos límites no son óptimos y reducen los niveles de rentabilidad de las AFP.

Las carteras administradas por las AFP registraron un nivel de S/ 124,135 millones al cierre del 2015 y el tamaño de dicha cartera podrá continuar incrementándose a medida que las políticas en búsqueda de reducir la informalidad en las empresas se

[1] En este sistema, las personas que se encuentran trabajando son quienes pagan impuestos y se destina a los jubilados a manera de una renta.
[2] Creado mediante la Ley 27988 del 4 de junio del 2003.
[3] Tipos de fondos de acuerdo con la Asociación de AFP.

traduzcan en un incremento del número de afiliados, trayendo consigo un efecto en la economía real. A su vez, se debe tomar en cuenta que los fondos administrados no crecen solo debido al ingreso de nuevos aportantes, sino también por la rentabilidad que estos generan. Por tal motivo, es primordial contar con una administración eficiente de estos fondos.

El objetivo de la presente investigación es analizar los pesos de portafolio en el fondo 2 que administraron cada una de las AFP durante el periodo enero del 2007 y diciembre del 2015[4] donde operaron las AFP Horizonte, Integra, Prima y Profuturo; y posteriormente, Habitat, y así demostrar que estas siguen un patrón de inversión similar al del portafolio de mercado, debido principalmente a los límites de inversiones que obligan a los inversores a tomar decisiones similares, y este portafolio promedio puede ser replicado y mejorado mediante el modelo Black-Litterman. En este sentido, la hipótesis de la investigación es que la metodología Black-Litterman puede obtener portafolios con mayores retornos que los portafolios históricos de las AFP. Se aplica para esto el modelo Black-Litterman el cual cuenta con un enfoque "bayesiano" en la estimación, mas no al hallar los pesos de portafolios, con el fin de solucionar las limitaciones inherentes al enfoque de media-varianza. Así, luego de encontrar los pesos del portafolio óptimo, es posible contrastar los retornos de la cartera Black-Litterman con los pesos de los portafolios de cada una de los portafolios que administran las AFP y ver que efectivamente administrarlos mediante esta metodología resulta en mayores rendimientos.

El resto del documento se divide de la siguiente manera. El primer capítulo desarrolla brevemente los trabajos más importantes donde las AFP son las entidades estudiadas; asimismo, se aborda un trabajo, único en Sudamérica, donde se utiliza el modelo Black-Litterman para elegir una cartera óptima en el SPP de Colombia. El segundo capítulo aborda la revisión de literatura o marco teórico, dividida a su vez en seis secciones: Base de la teoría de portafolio, asignación dinámica de activos multi-periodo (asignación estratégica de activos y asignación táctica de activos), relacionando el modelo a las observaciones, (métodos Bayesianos e inferencia Bayesiana), incorporando opiniones económicas, estimación combinada y el modelo Black-Litterman. En el tercer capítulo se describe propiamente la hipótesis y se analizan los datos a utilizar en el siguiente capítulo. En el cuarto capítulo se describe la metodología cuantitativa; dividida a su

[4] El periodo de tiempo que se utilizó en el presente trabajo incluye la crisis financiera del 2008; de acuerdo con Mendoza (2014), gracias a ello, el portafolio óptimo que se halla se encuentra sometido a periodos de estrés financiero, donde los volúmenes de negociación en los mercados bursátiles se ven reducidos. Disponible en: http://www.bcrp.gob.pe/docs/Publicaciones/Documentos-de-Trabajo/2014/documento-de-trabajo-05-2014.pdf

vez en cuatro secciones: retornos esperados, vectores de retornos de equilibrio implícitos (Π), opiniones del inversionista (P, Q, Ω) y resultados de Black-Litterman ($E[R]$). Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones.

1. MARCO INSTITUCIONAL Y EVIDENCIA PREVIA

En el año 2002 Camargo y Rivas-Llosa comparan dos portafolios óptimos de inversión, utilizando el enfoque media varianza: el primero de ellos no considera las restricciones legales (restringido) y el segundo no toma en consideración ninguna restricción impuesta por el regulador (sin restricciones). Se concluye que las diferentes combinaciones de rentabilidad-riesgo eficientes del portafolio restringido se encuentran totalmente dentro del conjunto que es factible del portafolio no restringido y alejado de la frontera eficiente del mismo; es decir, que ninguna combinación de activos bajo todos los límites legales generaría una asignación de activos óptima. Otro hallazgo fue que el ratio de Sharpe óptimo accesible a los inversionistas regulados fue de 0.32, mientras que el índice óptimo accesible sin restricciones era de 0.46, es decir, claramente se evidenció un aumento potencial del 43%. Lo que quiere decir que si se eliminan restricciones legales, por cada unidad de riesgo asumido es probable obtener una rentabilidad más de dos quintas partes superior, manteniendo constante el nivel de riesgo de la cartera.

Sin embargo, se evidencian ciertos límites en la investigación, puesto que el tamaño de la muestra comprende un intervalo de tiempo reducido, esto es únicamente de abril a setiembre del 2002. Esta situación genera sesgos y errores de estimación, además de mostrar una inconsistencia con los horizontes de inversión de largo plazo de las AFP así lo deja saber Broadie (1993).

Marola Castillo y Fredy Rojas (2007) utilizan un análisis contrafactual donde se asume que los agentes no sufren de miopía y que saben perfectamente las técnicas en finanzas para asignar eficientemente sus fondos por riesgo. En este sentido, los autores cuantifican el impacto de lo fondo privado de pensiones sobre el mercado de capitales mediante una metodología novedosa que se basa en carteras eficiente y en preferencias por el ciclo de vida.

En el 2007, Javier Pereda realiza un exhaustivo estudio desde la perspectiva del modelo de portafolio de Markowitz, en este sentido estima una frontera eficiente de los fondos administrados por todas las AFP, en un horizonte de tiempo que va de 1995 al 2004. Este análisis permite un marco de referencia teórica para analizar el efecto que tiene la regulación (SBS) sobre el comportamiento de los fondos de pensiones a largo plazo. Este estudio concluye que es preferible un portafolio de mayor riesgo, debido al objetivo primordial de maximizar la rentabilidad del fondo administrado.

Ortiz et al. (2010) incorpora una modificación categórica al enfoque media-varianza, algo que no se tomaba en cuenta en estudios previos. De esta manera, se permiten ventas en corto, a pesar de la prohibición regulatoria, sin embargo como las AFP operan en mercados completos en donde se puede replicar un activo financiero, mediante una estrategia que evidencie el mismo resultado del activo primordial. En este sentido, si se toma en consideración las mismas series de datos revisadas por Pereda (2007), se encontró que la pérdida generada en rentabilidad debido a la regulación fue del 1.73%, mientras que la gestión generó una pérdida del 3.06%.

Guillermo Moloche (2012) analiza la gestión de carteras de las AFPs, enfocado en la maximización del fondo acumulado para los afiliados, en términos reales, además toma el riesgo de instrumentos financieros utilizados para mantener los ahorros. Se encuentra que los portafolios no son intertemporalmente óptimos, esto realizando una comparación entre el SPP y el portafolio óptimo que la teoría financiera moderna recomienda. Se evidencia que el marco regulatorio y los deficientes mecanismos de monitoreo son las causas principales de sus resultados.

Los estudios previamente analizados están enfocados en los efectos de los límites de inversión sobre el comportamiento del portafolio de inversiones administrado por la AFP en el periodo previo a la vigencia del esquema multifondos, si bien toman en consideración los portafolios de todo el sistema previsional en su conjunto, pero no entran en detalle a evaluar cada una de las AFP, esto es focalizado en un análisis macro. Es evidente que estas investigaciones no contemplan el hecho que los límites de inversiones tienen impactos diferenciados para cada uno de los portafolios de las AFP, esto debido a las diferentes variables como el tamaño de cartera de inversión o la destreza para el *market timming*, es decir anticipar las altas y bajas del mercado. Sumado a ello, el horizonte de tiempo que evalúan solo contempla una única cartera de inversión, lo cual evidencia un sesgo, ya que es indispensable analizar detalladamente cada AFP y específicamente las carteras por separado debido a la heterogeneidad propia del sistema.

En países como Chile y Colombia también se evidencia el esquema Multifondos, así por ejemplo se encuentra el análisis que realiza Mateo Trujillo (2009) en la aplicación del modelo Black-Litterman para el caso del fondo de pensiones obligatorias en Colombia. Evidencia la importancia y funcionalidad del enfoque de Black-Litterman con un conjunto de activos diferente y portafolios señalados en la literatura internacional.

La existencia de los límites de rentabilidad impuesta por el regulador hace posible que las AFPs no alcancen niveles óptimos de eficiencia financiera, sumado a una penalización en caso la AFP no llegue a estos límites impuestos, así lo deja saber Raddatz y Schmuckler (2011). Esto tiene un claro impacto en el comportamiento de las AFP quienes con un efecto manada emulan estrategias de inversión en sus pares, lo que implica una solución sub óptima. Para el caso peruano se evidencia la misma particularidad de una garantía vinculada a una rentabilidad mínima y no se cuenta con un mecanismo eficiente que permita medir correctamente el comportamiento de los portafolios de inversión; en cambio, la única manera en que las AFP pueden cuantificarlo es haciendo un comparativo de sus propios valores cuota con los de la competencia. Esta carencia de un índice de referencia o benchmark óptimo que ha planteado el regulador fomenta el efecto manada, esto se traduce en una elevada correlación entre los valores cuota de las AFP. Este reto siempre se encuentra en la agenda pendiente para mejorar el Sistema de Pensiones Previsionales.

Como se ha visto, los estudios donde se aplique la metodología Black-Litterman son escasos o nulos en nuestro país; sin embargo, sí existe literatura sobre el modelo per se, la cual será abordada en el siguiente capítulo.

2. MARCO TEÓRICO

El presente capítulo aborda los conceptos generales necesarios para llegar a comprender el modelo Black-Litterman. En primer lugar se desarrollan lo concerniente a la base de la teoría moderna de portafolio iniciada por Markowitz (1952). Posterior a ello, se desarrolla la asignación dinámica de activos multi-periodo donde se tocan dos temas centrales como son la asignación estratégica de activos (de largo plazo) y la asignación táctica de activos (de corto plazo); luego se busca relacionar el modelo con las observaciones para lo cual se brinda una introducción a los métodos Bayesianos e inferencia Bayesiana. Continúa el tema de incorporar las opiniones económicas y la estimación combinada para finalmente introducir el modelo de Black-Litterman.

2.1 Base de la teoría de portafolio

La teoría tradicional de portafolio se encarga del problema de asignación estática cuyas bases fueron sentadas por Markowitz (1952) y posterior desarrollo por Tobin (1958), Sharpe (1964) y Lintner (1965) al ya conocido Modelo CAPM[6]. La teoría de portafolio guía al inversionista en sus decisiones de asignación y lleva a tres importantes ideas acerca de las finanzas modernas.

La primera de ellas es que los activos correlacionados imperfectamente pueden ser combinados en portafolios tales que estos tengan un menor nivel de riesgo para un nivel dado de retorno esperado que cualquiera de los activos individuales por su cuenta. Este efecto es conocido como diversificación (Brandt, 2010). La segunda idea es que una vez que el portafolio se encuentra óptimamente diversificado, no es posible hallar otro portafolio que ofrezca un mayor retorno dado cierto nivel de riesgo o un menor riesgo dado cierto nivel de retorno esperado. Entonces, un mayor retorno puede ser solamente obtenido al tomar mayor riesgo. Este hallazgo lleva a la siguiente ley fundamental de las finanzas modernas: siempre existe un trade-off entre riesgo y retorno en mercados financieros que funcionen apropiadamente (Brandt 2010). Finalmente, la última idea es más técnica en naturaleza, indica que la asignación óptima puede ser expresada como una función de distribución de momentos.

Estos tres hallazgos fueron originados a partir del trabajo seminal de Markowitz (1951, 1991). Su análisis de media y varianza sirvió como base de la teoría moderna de portafolio. Es de lejos la formulación más común de del problema de

[6] Estos modelos son de un solo periodo y sufren del problema de miopía clásica (Brandt, 2010)

elección de portafolio de un solo periodo y representa una maximización de la utilidad esperada para el caso especial de utilidad cuadrática. Dentro de las extensiones importantes al análisis de media-varianza incluyen el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM por sus siglas en inglés), acreditado a Tobin (1958), Treynor (1961), Sharpe (1964) y Lintner (1965) y la Teoría del Arbitraje (APT por sus siglas en inglés) desarrollada por Ross (1976).

2.2 Asignación dinámica de activos multi-periodo

Una variación importante involucra la decisión de asignación como un problema inter temporal multi-periodo. Esta opinión fue originalmente propuesta por Merton (1969, 1971) y Cox, Ingersoll & Ross (1985) en tiempo continuo y Samuelson (1969) y Fama (1970) en tiempo discreto. Mientras que las contribuciones previas estudian el problema de inversión con la utilidad sobre el consumo intermedio (Ingersoll, 1987), el trabajo de Mossin (1968) y Hakansson (1970, 1971) ignoran el consumo intermedio y por el contrario optimizan la riqueza al final del horizonte de inversión. Otra contribución importante es la extensión multi-periodo del CAPM, el llamado Modelo de Valoración de Activos Financieros Inter-temporal (ICAPM por sus siglas en inglés), sugerido por Cox, Ingersoll & Ross (1985). Frauendorfer (1995ª), Frauendorfer & Siede (1997, 2000), y Siede (2000) sugirieron una extensión del análisis de media varianza al caso multi-periodo.

La formulación multi-periodo del problema da al inversionista mayor libertad con respecto a la asignación estratégica que desea seguir y le permite tomar una perspectiva de largo plazo. Es importante reconocer que los portafolios óptimos para inversionistas de largo plazo no tienen que ser necesariamente los mismos que para los inversionistas de corto plazo (miopes) (Campbell & Viceira, 2003).

El inversionista multi-periodo debe elegir siguiendo una regla de decisión acerca de las condiciones bajo las cuales se va a llevar a cabo el rebalanceo (por ejemplo, la longitud del horizonte de inversión[7], los intervalos de decisión[8], las opciones del inversionista y las restricciones presupuestarias inter-temporales). La regla de decisión guía al inversionista hacia decisiones intermedias de asignación. Es necesario ser específico acerca de las opciones exactas que el inversionista, con un horizonte multi-periodo, está permitido a adquirir. La literatura ha presentado términos y definiciones que caracterizan diferentes estrategias de inversión multi-

[7] El horizonte de inversión en un marco multi-periodo se define como la longitud total de tiempo de la inversión, por ejemplo, el inversionista quiere retirar de una inversión luego de un periodo de tiempo, sean cinco años.
[8] En un marco multi-periodo, el horizonte de inversión usualmente se divide en muchos intervalos de decisión más cortos. Dependiendo del contexto, los intervalos de decisión son llamados intervalos de rebalance.

periodo. La diferencia más común es con respecto a las longitudes de los intervalos de decisión y las acciones que el inversionista puede tomar en cada punto de decisión.

Sharpe (1987) fue uno de los primeros en poner las estrategias de asignación de activos dentro de un marco presentable al contrastar las estrategias de inversión: asignación estratégica de activos y asignación táctica de activos.

2.2.1 Asignación estratégica de activos

La asignación estratégica de activos, como se entiende, es una estrategia de inversión que asume que el inversionista va a re balancear su portafolio cada pocos años. El riesgo es administrado usando una perspectiva de largo plazo. El concepto subyacente asume que el mercado de valores es totalmente impredecible en el corto plazo. En este ambiente, Perold & Sharpe (1988) identificaron tres sub-estrategias: comprar y mantener, mezcla constante[9] y estrategias de seguros de portafolio. La primera de estas consiste en que el inversionistas no hará nada, solo escoge una mezcla de portafolio al inicio del horizonte de inversión, sabiendo que no va a lo re balancear su portafolio en ningún momento intermedio hasta que el horizonte de inversión sea alcanzado. Por su parte, un inversionista de la segunda estrategia, selecciona un portafolio al inicio del horizonte de inversión sabiendo que este va a resetear su asignación a esta misma mezcla en cada punto subsecuente de decisión; este problema de decisión es uno multi-periodo ya que el inversionista toma una acción en cada punto pero no pude incorporar nueva información en sus decisiones.

2.2.2 Asignación táctica de activos

Cuando los inversionistas intentan predecir ciertas variables económicas e incorporar nueva información en el corto plazo, ellos están escogiendo la asignación táctica de activos. La estrategia de asignación financiera es dinámica si el inversionista re balancea óptimamente su portafolio a lo largo del tiempo. El inversionista re balancea su portafolio continuamente o al menos cada ciertos meses. Esta estrategia activa le permite al inversionista ajustar su portafolio periódicamente e incorporar nueva información de mercado en cada punto de

[9] Esta estrategias es también llamada re balanceo miope, adaptada por Kandel & Stambaugh (1996), Barberis (2000), Rey (2004b), Rey & Zimmermann (2005).

decisión. Modelos de tiempo continuo asumen que el re balanceo toma lugar en cada instancia hasta el horizonte de inversión.[10]

Lee (2001) reconoce que la complejidad y dimensión del problema de asignación inter-temporal hace que las aplicaciones reales del marco multi-periodo dinámico sean prácticamente imposibles. Desafortunadamente, las soluciones explícitas de forma cerrada generalmente no están disponibles. Los modelos de asignación dinámica son usualmente difíciles de resolver a menos que haya una solución miope.[11]

2.3 Relacionando el modelo a las observaciones

Un paso crítico al resolver problemas de asignación de activos es relacionar la formulación teórica y su solución con la data observada (Brandt, 2010). Hay una serie de maneras de completar esta tarea. El análisis estadístico es empleado desde el punto de vista de alguna de las dos tradiciones filosóficas – frecuentista y Bayeasiana. Una importante diferencia entre estas dos recae en la interpretación del concepto de probabilidad (Bauwens, Lubrano & Richard, 1999; Robert, 2001). Como el nombre lo sugiere, os defensores de la estadística frecuentista adoptan una interpretación frecuentista: La probabilidad de un evento es el límite de su frecuencia relativa de largo plazo (por ejemplo, la frecuencia con la que ocurre, como la cantidad de data se incrementa sin límite). Adherencia estricta a esta interpretación es raramente posible en la práctica. La visión Bayesiana del mundo está basado en la interpretación subjetiva de la probabilidad: Probabilidad es subjetiva, un grado de creencia que se actualiza conforme se adquiere data o información (Rachev et al., 2008). La naturaleza subjetiva de un enfoque Bayesiano puede ser controlado al aplicar priors no informativos (o difusos), lo cual significa que no existe un conocimiento previo acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento (Robert, 2001). En este caso, los posteriors de los parámetros están condicionados únicamente a la data observada. Mientras que las distinciones filosóficas y metodológicas entre la estadística clásica (frecuentista) y Bayesiana es un tema permanente de debate, la práctica moderna de econometría Bayesiana es mucho más pragmática. Esta lleva a resultados eficientes sin precedentes a muchos problemas econométricos (Greene, 2008).

[10] Campbell & Viceira (2003) usan el término asignación estratégica de activos para la asignación táctica de activos en tiempo continuo porque ellos ven el tipo de demanda por cobertura que obtienen al llevar una estrategia de seguros de portafolio.
[11] Una decisión multi-periodo es llamada miope si el problema de decisión lleva al mismo resultado sin importar la longitud del horizonte de inversión (Campbell & Viceira, 2003).

La mayoría de los modelos asumen que el problema de asignación puede ser dividido en dos etapas separadas. El primer paso estima los parámetros del modelo, frecuentemente con métodos de Máxima Verosimilitud (ML por sus siglas en inglés). En la segunda etapa, las estimaciones puntuales de los parámetros son usadas para resolver el problema de decisión. Los parámetros poblaciones del modelo son simplemente remplazados por sus estimadores puntuales. Un inversionistas que se subscribe a este enfoque, asume que los parámetros son conocidos e iguales a los estimadores puntuales obtenidos de la data. Sin embargo, los estimadores puntuales están sujetos a la incertidumbre de los parámetros. Claramente, todos los modelos financieros sufren del hecho de que los parámetros son estimadores más que valores reales. Si bien este hecho es indiscutible entre los investigadores y profesionales, las potenciales soluciones al problema son incluso más controversiales.

2.3.1 Métodos Bayesianos

Los métodos bayesianos han incrementado su popularidad en muchos campos, incluyendo los de la asignación de activos y valoración de activos. La teoría Bayesiana es una rama de la teoría de probabilidad que permite a los investigadores modelar la incertidumbre del mundo y los resultados de interés al incorporar conocimientos previos y evidencia observacional (Berger, 1999). El marco Bayesiana permite incorporar tanto la incertidumbre de los parámetros y aprendizaje en el problema de decisión de una manera natural.

Uno de los mecanismos básicos de aprendizaje es la asimilación de información de un ambiente externo y actualizar el conocimiento base existente con dicha información (Rachev et al., 2008). Este mecanismo se encuentra en el centro del marco Bayesiano. Un tomar de decisiones Bayesiano aprende mediante la revisión de las creencias a la luz de nueva data. Desde el punto de vista Bayesiano, las probabilidades son interpretadas como grados de creencia. Por ende, el proceso de aprendizaje Bayesiano consiste en revisar probabilidades.[12] El teorema de Bayes proporciona el medio formal para aplicar este mecanismo; se trata de una simple expresión de procesamiento de la información, combinando conocimiento acerca de la distribución de los parámetros del modelo y la información acerca de los parámetros contenidos en la data.

3.3.2 Inferencia Bayesiana

[12] Distinto al enfoque con la manera en que la teoría estadística clásica (frecuentista) interpreta las probabilidades: la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento en el límite cuando el número de observaciones tiende a infinito.

El enfoque econométrico para lidiar con la incertidumbre de los parámetros es usar la inferencia Bayesiana para mejorar la calidad de las estimaciones de los parámetros relevantes (Berger, 1999). La inferencia Bayesiana es un enfoque de estimación que no solo entrega estimadores puntuales de los parámetros, sino que brinda el error de estimación en la forma de una densidad posterior. Esto permite al econometrista incorporar información prior en su procedimiento de estimación. La información prior es combinada con la data muestral para construir la densidad posterior (Koop, Poirier & Tobias, 2007). Dependiendo de la motivación, el investigador se encuentra libre de usar las densidades posteriores en un contexto de decisión o para calcular los estimadores puntuales Bayesianos que sean eficientes bajo funciones de pérdida alternativas (Koop, Poirier & Tobias, 2007).

El modelo Black-Litterman es la aplicación más relevante de las estimaciones Bayesianas puntuales a la teoría de portafolio (Black & Litterman, 1992). Black & Litterman propusieron un modelo formal basado en el deseo de combinar opiniones consistentes con el equilibrio de mercado y observaciones individuales del mercado (Rachev et al., 2008). La idea básica del modelo es que las opiniones previas sobre el retorno esperado de un activo deben ser consistentes con el equilibrio de mercado y combinadas con opiniones subjetivas para construir posteriors (cvitanic et. Al, 2006).

Notar que cuando se utilizan los estimadores puntuales Bayesianos, los portafolios resultados son estimados[13] y, por ende, se mantienen inciertos. La etapa de decisión ignora la incertidumbre implícita en los parámetros estimados ya que el problema de estimación se mantiene estrictamente separado del problema de decisión. Las asignaciones resultantes se mantienen condicionadas a parámetros que son inherentemente inobservables.

Cuando las densidades posteriores, en lugar de los estimadores puntuales, son usadas en un contexto de decisión, llamamos a este procedimiento como uno de enfoque de decisión teórica. El riesgo inherente combinado en observaciones futuras es capturado en lo que es conocido en análisis Bayesiano como densidad predictiva. Cuando se optimiza el objetivo bajo la función de densidad predictiva, el problema de asignación es conocido como Bayesiano condicional (Kandel & Stambaugh, 1996). La idea básica de la asignación de activos Bayesiana es que, en lugar de maximizar una función objetivo condicionada a estimadores puntuales, se condiciona solamente a data conocida u observada.

[13] Un portafolio es “estimado” si se define como una distribución de probabilidad o densidad.

2.4 Incorporando opiniones económicas

El entendimiento de las aplicaciones del análisis Bayesiano en un contexto de portafolio como el desarrollado en secciones anteriores, puede ser útil al derivar la distribución prior de los parámetros. La introducción de priors informativos y estimadores por contracción tiene consecuencias importantes en la selección de portafolio ya que los analistas (o inversionistas) tienen la opción de combinar información no muestral con evidencia muestral para producir densidades posteriores de los parámetros, lo cual puede indicar la densidad predictiva de las observaciones futuras. Como se indicó anteriormente, la selección de un prior significativo y potencialmente informativo es el corazón del análisis Bayesiano.

Un prior sensato el contexto de elección de portafolio se basa en las implicancias teóricas de un modelo económico. El ejemplo más famoso de este enfoque es el de Black & Litterman (1992), quienes usan las primas de riesgo implícitas en el equilibrio de mercado como prior. El modelo Black-Litterman se aborda en la sección 2.6. Primero, sin embargo, consideramos un modelo más general de estimación combinada en la sección 2.5 propuesto por Theil & Goldberger (1961).

2.5 Estimación combinada

El enfoque de estimación combinada fue presentado por primera vez por Theil & Goldberger (1961) como una manera de actualizar las inferencias Bayesianas obtenidas de data antigua con la información contenida en un conjunto de nueva data (Brandt, 2010). El mecanismo de actualización Bayesiano es comparable al proceso mediante el cual un prior informativo es actualizado usando data. La siguiente descripción de estimación combinada se encuentra adaptada a un problema de pronóstico de retornos y nos prepara para considerar el marco econométrico subyacente al modelo Black-Litterman descrito en la siguiente sección. Una organización similar es descrita por Satchell & Scowcroft (2000), Scowcroft & Sefton (2003) y Theil & Goldberger (1961).

Asumiendo que los retornos en exceso de m activos cuentan con capitalización continua y son i.i.d. normalmente multivariados con una densidad muestral:

$$\mathrm{p}(\mathrm{r_t}|\mathrm{u}, \Sigma) = \mathrm{N}(\mathrm{u}, \Sigma),$$

Donde $\mathrm{r_t}$ es el vector m x 1 de retornos observados en el tiempo t para cada $\mathrm{t} = 1, \dots, \mathrm{T}$. u es un vector de m x 1 de promedios y Σ es una matriz de covarianzas simétrica definida positiva (PDS por sus siglas en inglés). Se asume que la covarianza Σ es conocida. El inversionista tiene un conjunto de conocimientos prior acerca de las primas de riesgo:

$$p(u) = N(m_0, \Lambda_0)$$

Donde m_0 y Λ_0 son hiper parámetros que pueden estar basados en predicciones teóricas, análisis empírico previo o pronósticos a la fecha. Adicionalmente a estas creencias prior (benchmark), el inversionista posee un conjunto de opiniones o pronósticos v con respecto al vector m x 1 de retornos de cualquier combinación lineal. Se asume que estas nuevas opiniones son insesgadas pero imprecisas con densidad

$$p(v|u) = N(Pu, \Omega),$$

Donde P es un arreglo matricial de orden m x m que elige y combina retornos en portafolios acerca de los cuales el inversionista está en la capacidad de expresar sus opiniones.[14] v es un vector de opiniones de orden m x 1 y Ω expresa la incertidumbre de estas opiniones.

Combinar creencias prior (benchmark) acerca del vector de retornos promedio $p(u)$ y las opiniones dadas estas creencias benchmark $p(v|u)$ usando la regla de Bayes,

$$p(v|u) \propto p(v|u)p(u),$$

Entonces, el posterior $p(u|v)$ es

$$p(u|v) = N(m_v, \Lambda_v),$$

Donde

$$m_v = \left({\Lambda_0}^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right)^{-1}\left({\Lambda_0}^{-1}m_0 + P'\Omega^{-1}v\right)$$

$$\Lambda_v = \left({\Lambda_0}^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right)^{-1}.$$

La densidad predictiva de las observaciones futuras $p(r_{T+1}|v, \Sigma)$ se obtiene al resolver la integral sobre el conjunto del posterior de la densidad poblacional y el posterior en u dadas las opiniones v:

$$p(r_{T+1}|v, \Sigma) = \int_{\Theta} p(r_{T+1}|u, \Sigma)p(u|v)du.$$

[14] Notar que las opiniones económicas pueden ser acomodadas en un subconjunto de $k \leq m$ combinaciones lineales (portafolios). El álgebra matricial en este caso puede ser ligeramente distinto para algunas de las fórmulas.

Notar la estructura particular de los términos de la integral. Ambos la densidad muestral $p(r_{T+1}|u,\Sigma) = N(u,\Sigma)$ y el posterior $p(u|v)$ son normal multivariados. A partir de esto, es claro que

$$p(r_{T+1}|\Sigma, v) = N(m_v, \Sigma + \Lambda_v)$$

La densidad predictiva integra el u desconocido para el cual hemos expresado un prior y algunas opiniones. Una característica notable de estimación combinada es que la densidad predictiva no se encuentra condicionada a las observaciones $Y = [r_1, \dots, r_T]'$. La evidencia muestral puede ser parte del prior si elegimos los hiper-parámetros m_0 y Λ_0 de acuerdo al vector de medias muestrales $\hat{u}$ y la matriz de covarianza muestral $\hat{\Sigma}$, respectivamente. Esta elección del prior es llamada Bayesiana empírica (Carlin & Louis, 2009). Sin embargo, la elección de priors no se encuentra limitada a los estimadores muestrales. Puede basarse en predicciones teóricas, análisis empírico previo, pronósticos a la fecha o cualquier otro método subjetivo (Brandt, 2010).

El punto esencial acerca de la estimación combinada es que dos fuentes de información (priors y opiniones) pueden ser combinadas. Mientras que la covarianza Σ se asuma que es conocida, el vector de medias u es tratado como incierto. La incertidumbre acerca del verdadero vector de medias se expresa a través de los hiper-parámetros que describen la variación en el prior y la opinión, Λ_0 y Ω.

2.6 El modelo Black-Litterman

El modelo Black & Litterman (1992) es una aplicación del enfoque de estimación combinada usando creencias benchmark económicamente motivadas $p(u)$ y pronósticos propios v. Los pronósticos propios usualmente son obtenidos mediante estudios empíricos, análisis de valores u otras técnicas de pronósticos (Brandt, 2010; Avramov & Zhou, 2010; Scowcroft & Sefton, 2003).

Black & Litterman (1992) asumen que el inversionista inicia con opiniones iniciales al respecto del mercado y luego las actualiza con sus propias opiniones a través de la regla de Bayes. Por ejemplo, si sus opiniones de mercado se encuentran basadas en el Modelo De Valoración De Activos Financieros (CAPM por sus siglas en inglés), el portafolio implícito es el valor ponderado del índice (Black & Litterman, 1992). Entonces, si el inversionista tiene opiniones idénticas a aquellas del mercado, el portafolio de mercado será la mejor opción. Sin embargo, si el inversionista tiene distintas opiniones comparado con las opiniones del mercado, las opiniones subjetivas del inversionista son usadas para actualizar las opiniones de mercado.

La legitimidad del modelo Black-Litterman se encuentra bien documentada en la literatura. Referencias importantes incluyen Black & Litterman (1990, 1991, 1992), así como Avramov & Zhou (2010), Bagasheva et al. (2008), Brandt (2010), He & Litterman (1999), Lee (2000), Meucci (2005), Rachev et al. (2008), Scowcroft & Sefton (2003) y Sharpe (1985), solo para nombras unos cuantos. Interpretaciones de la metodología Black & Litterman desde el punto de vista Bayesiano son escasas (He & Litterman, 1999; Lee, 2000; Meucci, 2005), a pesar que el tomador de decisiones Black-Litterman es indudablemente Bayesiano (Bagasheva et al., 2008).

El modelo de valoración de activos sirve como punto de referencia sobre el cual el inversionista construye creencias prior. Existe un trade-off entre el grado de confianza en la validez del modelo y el contenido de la información de la data muestral observada. El influyente trabajo de Black & Litterman (1990, 1991, 1992) es presumiblemente el primer análisis que empleó este enfoque. Dicho modelo les permitió una combinación suave y flexible de un modelo de valoración de activos, el modelo de valoración de activos financieros (CAPM) y las opiniones del inversionista. El CAPM se asume para mantener en general y las creencias del inversionista acerca de los retornos de las acciones pueden ser expresadas en la forma de desviaciones de las predicciones del modelo.[15]

Las creencias benchmark se obtienen al inferir las primas de riesgo que inducen a un inversionista de media – varianza a mantener todos sus activos en proporción a su capitalización de mercado observada. Ya que las primas de riesgo despejan el mercado al ajustar la oferta de acciones igual a la demanda al precio actual, se conoce como prima de riesgo de equilibrio $\mathrm{u}_{\mathrm{equ}}$. Este procedimiento se conoce como optimización inversa (Sharpe, 1985).

Más específicamente, las primas de riesgo de equilibrio se calculan al revertir los inputs y outputs en el problema de optimización de media-varianza. En el problema de media-varianza, los inputs son el vector de medias u, la matriz de covarianzas Σ

[15] Black & Litterman consideran un modelo de equilibrio como el CAPM el más apropiado objetivo neutral de encogimiento para retornos esperados; los retornos de equilibrio despejan el merca cuando todos los inversionistas tienen opiniones homogéneas.

y la aversión al riesgo Υ. El output es el vector óptimo de pesos de portafolio (Brandt 2010; Rachev et al. 2008):

$$w^* = \frac{1}{\Upsilon}\Sigma^{-1}u,$$

Donde w^* es un vector de pesos de portafolio de orden m x 1, u es un vector de medias y Σ es la matriz de covarianzas PDS de orden m x m.

Ahora, suponiendo que el mercado actúa como un optimizador de media-varianza; entonces, en equilibrio, las primas de riesgo y la matriz de covarianzas debe ser tal que los pesos del portafolio óptimo correspondiente sean iguales a los pesos de la capitalización de mercado observada denotada como w^*_{mkt}. Asumiendo una matriz de covarianza conocida (usualmente la covarianza de la muestra), la relación entre los pesos de capitalización de mercado y las primas de riesgo de equilibrio u^*_{equ} es dada por $w^*_{mkt} = \frac{1}{\Upsilon}\Sigma^{-1}u_{equ}$. Resolviendo para la prima de riesgo de equilibrio se obtiene (Rachev et al. 2008)

$$u_{equ} = \Upsilon\Sigma w^*_{mkt}.$$

Los inputs para este cálculo son los pesos de capitalización de mercado w^*_{mkt} obtenidos de la capitalización de mercado, la matriz de covarianza resultante Σ, y la aversión al riesgo agregada Υ. El output es un vector de primas de riesgo de equilibrio implícito u_{equ}. Black & Litterman (1992) centran las creencias benchmark m_0 en estas primas de riesgo de equilibrio u_{equ} y asumen una matriz de precisión Λ_0 proporcional a la matriz de covarianza de los retornos Σ tal que $m_0 = u_{equ}$ y $\Lambda_0 = \lambda_0\Sigma$. Luego, Black & Litterman asumen un prior natural conjugado para el vector de medias tal que (Rachev et al. 2008)

$$p(u) = N\left(u_{equ}, \lambda_0\Sigma\right).$$

La constante λ_0 mide la fuerza de la creencia del inversionista en el equilibrio. Por ejemplo, un valor de $\lambda_0 = \frac{1}{T}$ coloca a las creencias benchmark a la par con las medias muestrales (Brandt, 2010).

El inversionista expresa algunas opiniones propias sobre u, como en el enfoque de estimación combinada. Las opiniones son dadas por la siguiente densidad:

$$p(v|u) = N(Pu, \Omega),$$

Donde P es un arreglo matricial de orden m x m que selecciona y combina retornos en portafolios para los cuales el inversionista se encuentra en la capacidad de expresar opiniones. Ω es una matriz m x m que representa la incertidumbre asociada con las opiniones. Se asume que no es singular.

Combinando las creencias benchmark $p(u) = N(u_{equ}, \lambda_0\Sigma)$ con opiniones propias $p(v|u) = N(Pu, \Omega)$ usando los resultados del teorema de Bayes en una densidad posterior para las primas de riesgo que se demuestra que son normal multivariadas (Black & Litterman, 1992; Rachev et al., 2008):

$$p(u|v) = N(u_v, \Lambda_v),$$

Donde

$$u_v = ((\lambda_0\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}\left((\lambda_0\Sigma)^{-1}u_{equ} + P'\Omega^{-1}v\right)$$

$$\Lambda_v = ((\lambda_0\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}$$

Los resultados son obtenidos directamente de la estimación combinada. La densidad predictiva para los retornos de un periodo hacia adelante $p(r_{T+1}|v, \Sigma) = N(u_v, v + \Lambda_v)$.

Notar que el estimador de los retornos esperados u_v toma la forma de un estimador por contracción. Cuando el nivel de confianza acerca de los retornos de equilibrio se incrementa (λ_0 tiende a 0), su peso $((\lambda_0\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}(\lambda_0\Sigma)^{-1}$ se incrementa y el inversionista mantiene óptimamente el portafolio de mercado. Si, por el contrario, las creencias en las desviaciones respecto de los retornos de equilibrio son más fuertes, se imputa un mayor peso en las opiniones.

El modelo Black-Litterman no provee lineamientos con respecto a la elección de λ_0 y elementos de Ω. Dado que la incertidumbre acerca de los retornos esperados es menor que la variabilidad de los retornos mismos, λ_0 es usualmente fijada a valores menores a 1. Black & Litterman (1992) recomiendan un valor cercano a 0, expresando que el inversionista tiene un nivel de confianza mucho mayor en las primas de riesgo u_{equ} implícito por un equilibrio de mercado (creencias benchmark) que en opiniones subjetivas; λ_0 se interpreta como la incertidumbre remanente en u_{equ}. Para minimizar la subjetividad de la elección de λ_0, uno puede $\lambda_0 = \frac{1}{T}$, poniendo así a las primas de riesgo de equilibrio en la misma condición con las medias muestrales (Brandt, 2010). Otro enfoque sería calibrar λ_0 a partir de data histórica de retornos (Rachev et al., 2008).

Otra dificultad es la elección de Ω o los elementos de su diagonal. Un enfoque factible es realizar suposición estadística acerca de la distribución de la opinión. Por ejemplo (ver Rachev et al., 2008), suponer que el inversionista expresa la opinión de que un activo va a tener un retorno de 6%, y suponer que este puede evaluar el nivel de confianza de su proyección, la cual va a caer entre 5% y 7% con un 95% de probabilidad. Si las proyecciones son normalmente distribuidas, el intervalo $[0.05,0.07]$ es el intervalo de confianza con un nivel del 95% de confianza, y la estadística elemental da un desviación estándar implícita de 0.5%. Por ello, el inversionista va a fijar el elemento de la diagonal que represente a este activo en (0.005).

Una extensión interesante del modelo Black-Litterman y estimación combinada es la propuesta por Pástor (2000) y Pástor & Stambaugh (2000, 2002). Ellos notan que la metodología Black-Litterman no hace uso de toda la información disponible en los retornos históricos, particularmente en las medias muestrales. Pástor (2000) y Pástor & Stambaugh (2000, 2002) abordan esta situación desarrollando un marco en el cual la incertidumbre en la validez del modelo de valoración de activos se cuantifica en términos de la cantidad de valoraciones erróneas del modelo. El estimado de retornos esperados es un promedio ponderado de las predicciones del modelo y la media muestral, incorporando así los beneficios de las metodologías de Bayes-Stein y de Black-Litterman (Bagasheva et al., 2008).

En el siguiente capítulo se abordará la definición de la hipótesis así como los datos que servirán de input para el capítulo V. Metodología cuantitativa.

3. LA HIPÓTESIS Y DATOS

El presente capítulo definirá en primer lugar la hipótesis del estudio, definida como lo que se busca probar en este, para luego presentar los datos que servirán como input para la estimación de los portafolios mediante la metodología Black-Litterman.

3.1 Hipótesis

Tal como se planteó en el capítulo I. Introducción, la hipótesis de la investigación es probar que la metodología Black-Litterman puede obtener portafolios con mayores rendimientos que los portafolios históricos de las AFP.

Finalmente, de ser cierta la hipótesis, el modelo podría ser utilizado por el regulador SBS y administrar automáticamente los portafolios de los afiliados, incrementando así sus rentabilidades mediante este modelo automatizado.

3.2 Datos

Para probar esto, se tomará como periodo de estudio el comprendido entre enero del 2007 y diciembre del 2015 con 108 datos mensuales. Cabe resaltar que desde enero del 2007 hasta julio del 2013 se trabajará con las AFPs Horizonte, Integra, Prima y Profuturo; de agosto del 2013 hasta diciembre del 2014 se trabajará con las AFPs, Integra, Prima, Profuturo y una ficticia que vendría a tomar el lugar de la desaparecida Horizonte con un promedio geométrico entre Integra y Profuturo; finalmente, de enero del 2015 a diciembre del 2015 se trabajará con las AFPs Habitat, Integra, Prima y Profuturo.

Otro punto importante es que el análisis que se llevará a cabo será únicamente respecto del fondo 2 ya que es en este fondo donde se administra más del 70% del total de la cartera de acuerdo con cifras de la SBS y que se muestra en la Figura 1.

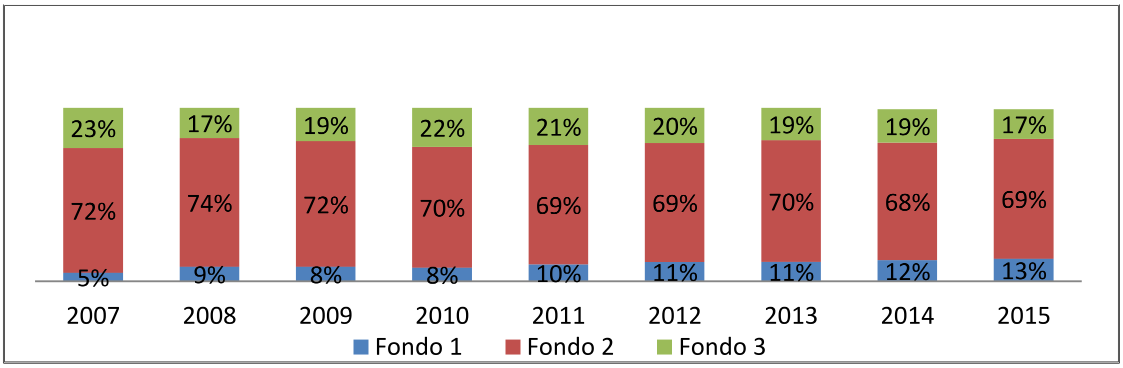

Figura 1. Estructura de la cartera por tipo de fondo en el periodo 2007 – 2015
Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

La primera variable a considerar para el análisis serán los retornos esperados anuales de cada una de las AFPs para el fondo 2 en los 108 periodos. Estar variable es obtenida de la página web de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS). El histórico, incluyendo un promedio ponderado del sistema, se muestra en la Figura 2.

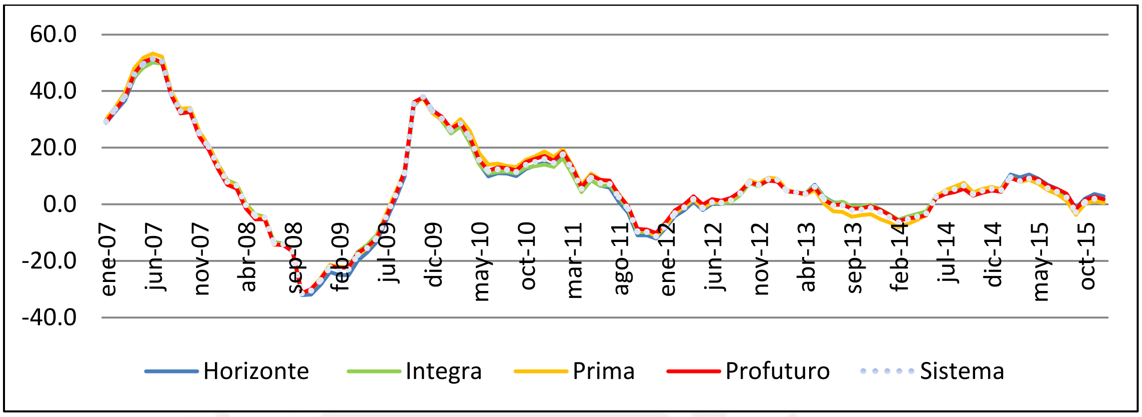

Figura 2. Evolución de la rentabilidad real anual del Fondo tipo 2 (en porcentaje) en el periodo 2007 – 2015
Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

Posteriormente, se descontará la tasa de los Certificados de Depósito del BCRP para obtener los retornos en exceso los cuales son parte primordial del input de la metodología Black- Litterman.

La segunda variable es obtenida también de la SBS y corresponde a los pesos de cada uno de las once clases de activos que se toman en consideración en el presente trabajo. En la Tabla 1 se muestra el promedio histórico de la composición de cada uno de estos para el periodo de trabajo desde enero del 2007 hasta diciembre del 2015.

Tabla 1. Cartera de inversión promedio del Fondo 2 de cada AFP por tipo de activo en el periodo 2007 – 2015

	Horizonte - Habitat	Integra	Prima	Profuturo
INVERSIONES EXTRANJERO	**26.04%**	**25.35%**	**26.38%**	**24.73%**
INVERSIONES NACIONALES	**73.72%**	**74.37%**	**73.45%**	**74.96%**
Certificados del BCRP	1.27%	1.71%	1.50%	1.09%
Otros del sistema Financiero y no Financiero	7.89%	7.57%	6.95%	9.51%
Bonos Gobierno	20.23%	22.00%	15.50%	19.88%
Otras Instituciones del Gobierno	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%
Acciones de empresas locales	25.35%	23.79%	24.57%	25.24%
Bonos Inst. Financieras	3.91%	5.28%	5.87%	4.34%
Bonos Hipotecarios	0.03%	0.05%	0.02%	0.00%
Bonos empresas no Financieras	7.00%	5.69%	9.27%	8.45%
Administradoras de Fondos	3.86%	4.88%	3.27%	2.26%
Sociedades Titulizadoras	4.18%	4.38%	6.53%	4.17%

Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

Asimismo, en la Figura 3 se muestra cómo ha ido cambiando de manera histórica la composición de los activos del portafolio del sistema a lo largo de estos nueve años de estudio, donde lo más resaltante es ver como las inversiones en el exterior han aumentado considerablemente, debido a la relajación de los límites a invertir en esta clase de activos a través de los años.

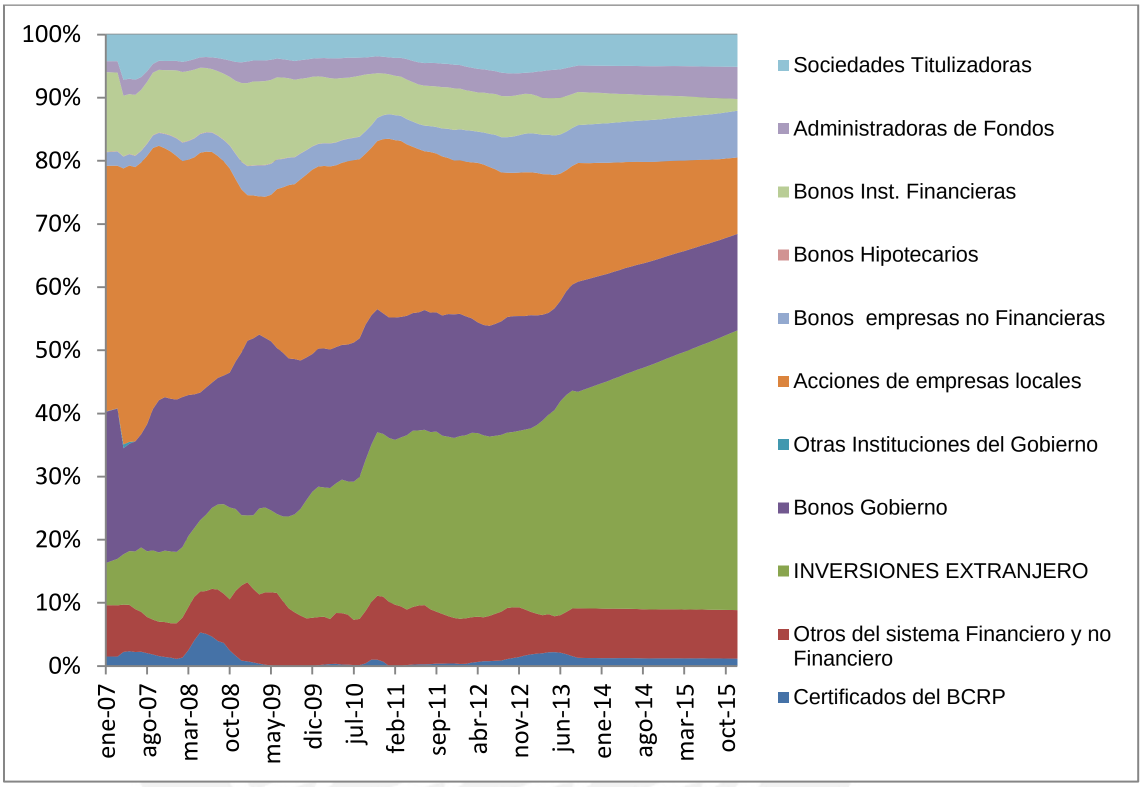

Figura 3. Composición histórica de los pesos de los activos del portafolio del sistema en el periodo 2007 – 2015
Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

Otro detalle importante a señalar es el rendimiento de cada clase de activo a través del periodo de estudio, lo cual se muestra en la Figura 4. En este resaltan la caída drástica de las inversiones extranjeras y acciones de empresas locales durante el periodo de la crisis financiera en la segunda mitad del 2008.

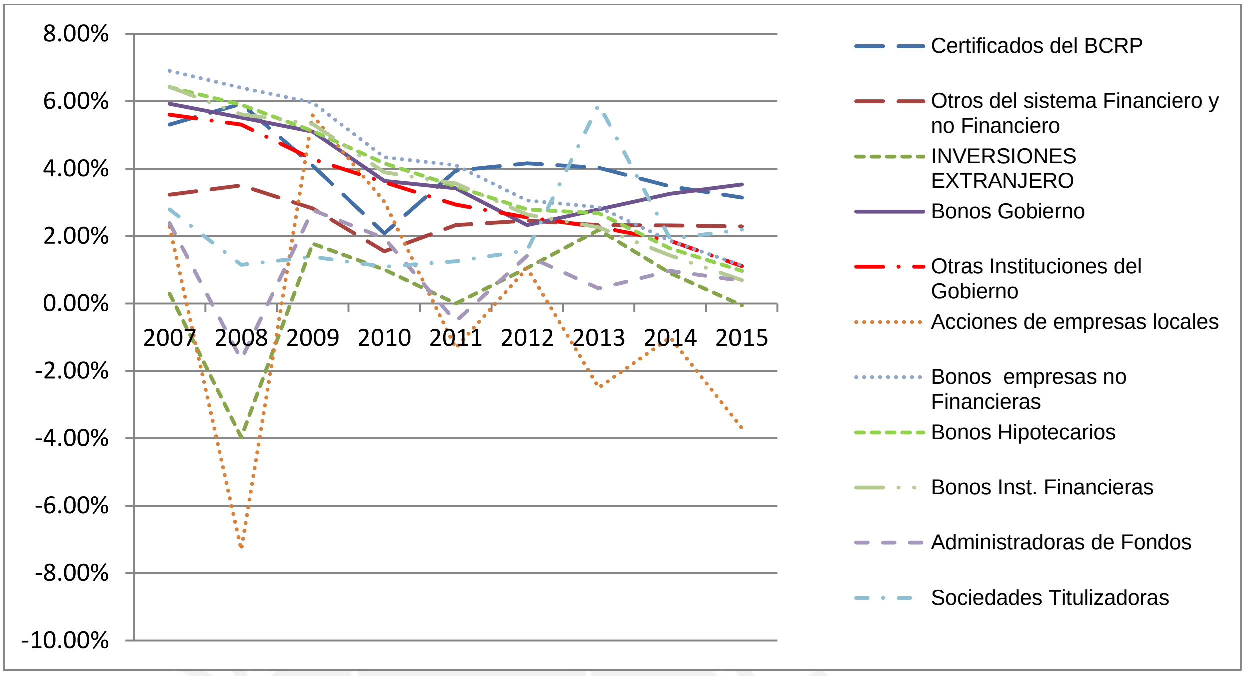

Figura 4. Evolución histórica del rendimiento de las clases de activos en el periodo 2007 – 2015
Fuente: Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS)

En el siguiente capítulo se describirá a detalle la metodología cuantitativa para finalmente llegar a las conclusiones en el sexto capítulo.

4. METODOLOGÍA CUANTITATIVA

En el presente capítulo se presenta la aplicación del modelo Black-Litterman al caso de las AFP en el Perú tomando en consideración lo visto en el tercer capítulo Marco Teórico y los datos vistos en el cuarto capítulo Hipótesis y Datos.

4.1 Retornos esperados

El modelo Black-Litterman crea portafolios estables y eficientes en el sentido de media-varianza basado en los insights de un inversionista, lo cual supera el problema de sensibilidad del input.

Los opositores a la teoría moderna de portafolio, iniciada por el Premio Nobel Harry Markowitz (1952), sustentan que los portafolios obtenidos mediante este enfoque son contraintuitivos, inexplicables y muy sensibles a los parámetros.

Chopra (1993) demuestra que incluso ligeros cambios en los estimados de los retornos esperados hace que el optimizador arroje portafolios con pesos totalmente distintos. Jobson y Korkie (1981) muestran que incluso un portafolio con iguales pesos puede tener un ratio de Sharpe mayor que un portafolio óptimo de media-varianza obtenido mediante cálculos con inputs estimados.

Broadie (1993) demuestra cómo la frontera eficiente sobreestima los retornos esperados de los portafolios por variar niveles de estimación de error.

Debido a todos estos inconvenientes encontrados en los errores de estimación en portafolios óptimos, Michaud[17] (1989) acuñó el término *error maximization* para la optimización de portafolio. Michaud sostiene que la optimización de media varianza sobrevalora a aquellos activos con un retorno estimado mayor al ratio de varianza estimada (subvalorando a aquellos con un bajo ratio) y son justamente estos activos los que probablemente tengan mayores errores de estimación.

El input más importante en la optimización de media-varianza es el vector de retornos esperados; sin embargo, Best y Grauer (1991) demuestran que un pequeño incremento en los retornos esperados de uno de los activos del portafolio puede forzar la mitad de los activos del portafolio. Ante este inconveniente, y en la búsqueda de un punto de partida para los retornos esperados, Black y Litterman (1992), He y Litterman (1999) y Litterman (2003) exploran distintas alternativas de

[17] http://www.axioma.com/downloads/incorporating_estimation.pdf

pronósticos: retornos históricos, retornos medios iguales para todos los activos y retornos medios ajustados por riesgo.

Ellos demuestran que estas alternativas de pronósticos llevan a portafolios extremos – cuando se encuentran restringidos, portafolios con posiciones cortas y largas; y, cuando están sujetos a una única restricción, portafolios que están concentrados en un número relativamente pequeño de activos.

4.2 Vectores de retornos de equilibrio implícitos (Π)

El modelo Black-Litterman utiliza los retornos de equilibrio implícitos como un punto de partida neutral. Los retornos de equilibrio implícitos son un set de retornos que clarifican el mercado, estos son derivados partiendo de la fórmula usada para el cálculo de los pesos de mercado de un portafolio:

$$w_{mkt} = \frac{S^{-1}\{\Pi - r_f\}}{\lambda}$$

Donde:

Π es el vector de retornos de equilibrio en exceso implícito (Nx1)

λ es el coeficiente de aversión al riesgo

S es la matriz de covarianza de retornos en exceso (NxN)

w_{mkt} es el peso de capitalización de mercado de los activos (Nx1)

r_f es la tasa libre de riesgo (Nx1)

De aquí, despejando, es posible obtener lo siguiente:

$$\Pi = \lambda S w_{mkt} + r_f$$

El coeficiente de aversión al riesgo (λ) caracteriza el tradeoff esperado entre retorno y riesgo. Este es el ratio al cual el inversionista dejará ir el retorno esperado para una menor varianza. En el proceso de optimización inversa, el coeficiente de aversión al riesgo se comporta como un factor que escala para el estimado de retornos en exceso de la optimización inversa; el ponderado de retornos en exceso de la optimización inversa igual a la prima de riesgo especificada. Un mayor retorno por exceso por unidad de riesgo (mayor lambda) incrementa el estimado de retornos en exceso.

Por su parte, la tasa libre de riesgo r_f para el presente estudio viene dada por el valor del rendimiento de los Certificados de depósito del BCRP.

En ausencia de opiniones, el vector de retornos de equilibrio implícito (Π), punto de inicio neutral de mercado para el modelo Black-Litterman, lleva de regreso al portafolio de capitalización de mercado. Esto se debe a que bajo este escenario, los inversionistas deberían mantener el portafolio de mercado.

La matriz de varianzas y covarianzas (S) es fácilmente obtenida a través de los retornos en exceso de cada uno de los activos mediante la siguiente fórmula:

$$S = \frac{[r_{ti} - r_f]'[r_{ti} - r_f]}{N - 1}$$

Donde:

S la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos en exceso (NxN)

r_{ti} es el rendimiento para cada periodo de tiempo de cada clase de activo (TxN)

r_f es la tasa libre de riesgo (1xN)

De acuerdo con los datos obtenidos en el cuarto capítulo, es posible sustraer a los retornos anualizados, la tasa de rendimiento de los certificados del BCRP, obteniéndose así los retornos en exceso.

El coeficiente de aversión al riesgo se obtendrá mediante el ratio de Sharpe en el periodo inicial de donde se toma el portafolio de mercado, y este irá cambiando periodo a periodo al ir obteniendo nueva información.

De esta manera, es posible obtener los valores de Π para cada mes dentro del periodo de análisis.

4. 3 Opiniones del inversionista (P, Q, Ω)

Muy comúnmente los inversionistas tienen opiniones específicas sobre los retornos esperados de algunos activos de su portafolio, los cuales difieren de los retornos de Π. El modelo Black-Litterman permite que aquellas opiniones sean expresadas tanto en términos absolutos como relativos.

Las opiniones relativas aproximan de manera mejor manera la manera en que los inversionistas se sienten sobre los diferentes activos. En general; y en ausencia de restricciones y opiniones adicionales, si la opinión es menor a la diferencia entre dos retornos de equilibrio implícitos, el modelo mueve el portafolio hacia el activo que rinde menos. De la misma manera, si la opinión es mayor que la diferencia entre los dos retornos de equilibrio implícitos, el modelo inclina el portafolio hacia el activo que rinde más.

El segundo tipo de opiniones, son las opiniones absolutas. Para el presente estudio tomaremos este tipo de opiniones y vendrán dadas por el método de *momentum* de las series de activos, con tres periodos de rezago. De esta manera, de acuerdo al rendimiento de cada clase de activo tres periodos atrás, se tendrán opiniones futuras respecto del rendimiento de dicha clase de activo.

Uno de los aspectos más complejos del modelo es pasar de las opiniones a los inputs que usaremos en la fórmula de Black-Litterman. En primer lugar, el modelo no requiere que los inversionistas especifiquen opiniones sobre todos los activos. En este caso con 11 clases de activos, el número de opiniones K; siendo el Vector de opiniones Q un vector K x 1. La incertidumbre de las opiniones resulta en un Vector de término de Error (ε) aleatorio, desconocido, independiente y normalmente distribuido con media 0 y matriz de covarianzas Ω. Por ende, la opinión tiene la forma $\mathrm{Q} + \varepsilon$.

Caso General:

$$\mathrm{Q} + \varepsilon = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

Exceptuando el hipotético caso en el cual un inversionista clarividente se encuentra 100% seguro en la opinión expresada, el término de error (ε) es un valor positivo o negativo distinto de 0. El Vector término de error (ε) no entra directamente a la fórmula de Black-Litterman. Sin embargo, la varianza de cada término de error (ω), la cual es la diferencia absoluta de los términos de error (ε) que se espera sea 0, no entra a la fórmula. Las varianzas de los términos de error (ω) de Ω, donde Ω es la diagonal de la matriz de covarianza con 0's en todas las posiciones fuera de la diagonal. Los elementos fuera de la diagonal de Ω son 0's porque el modelo asume que las opiniones son independientes unas de las otras. Las varianzas de los términos de error (ω), representan la incertidumbre de las opiniones. A mayor varianza en los términos de error (ω), mayor será la incertidumbre sobre la opinión.

Caso General:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_k \end{bmatrix}$$

Determinar las varianzas individuales de los términos de error (ω) que constituyen los elementos de la diagonal de Ω es uno de los aspectos más complicados del modelo y será simplificado en el presente trabajo posteriormente.

Las opiniones expresadas en el vector de columna Q se emparejan con las clases de activos específicos en la matriz P. Cada opinión expresada resulta en un vector de fila 1xN. Por ende, K opiniones resultan en una matriz KxN. A continuación se muestra la matriz P o "link matrix" que identifica los activos involucrados en las opiniones)

Caso General:

$$P = \begin{matrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{matrix}$$

Los métodos para asignar valores a la matriz P varían. Litterman (2003, p. 82) asigna valores porcentuales a los activos en cuestión. Satchell y Scowcroft (2000) usan un esquema de ponderación. Bajo este sistema, las ponderaciones son proporcionales a 1 dividido entre el número de activos respectivos que rinden más o rinden más. Este esquema de ponderación ignora la capitalización de mercado de los activos involucrados en la opinión.

Conceptualmente, el modelo Black-Litterman es complejo, promedio ponderado del Vector de retornos implícitos de equilibrio (Π) y el vector de opiniones (Q), en el cual las ponderaciones relativas son función de un escalar (τ) y la incertidumbre de las opiniones (Ω). Desafortunadamente, el escalar y la incertidumbre en las opiniones son los parámetros más abstractos y difíciles de especificar en el modelo. A mayor nivel de confianza (certeza) en las opiniones expresadas, lo más cercano estará el nuevo vector de retornos a las opiniones.

Si el inversionista se encuentra menos seguro de las opiniones expresadas, el nuevo vector de retornos debería estar más cerca al Vector de retornos implícito de equilibrio (Π).

El escalar (τ) es más o menos inversamente proporcional al peso relativo dado al Vector de retornos implícito de equilibrio (Π). Desafortunadamente, la literatura es escasa sobre como determinar un valor para este escalar. Ambos, Black y

Litterman (1992) y Lee (2000) citaron este problema: dado que la incertidumbre en la media es menos que la incertidumbre en el retorno, el escalar (τ) está cercano a cero. Uno esperaría que los retornos de equilibrio sean menos volátiles que los retornos históricos.

Lee, quien ha trabajado considerablemente con variantes del modelo Black-Litterman, por lo general establece un valor para el escalar (τ) entre 0.01 y 0.05 y luego calibra el modelo basado en un nivel objetivo de tracking error. Contrariamente, Satchell y Scowcroft (2000) indican que el valor del escalar (τ) es siempre cercano a 1. Finalmente, Blamont y Firoozye (2003) interpretan τS como el error estándar del estimado del Vector de retornos implícitos de equilibrio (Π); por ello, el escalar (τ) es aproximadamente 1 dividido por el número de observaciones.

En ausencia de restricciones, el modelo Black-Litterman sólo recomienda alejarse del peso de la capitalización de mercado de los activos si existen opiniones sobre estos. Para activos que se encuentran sujetos a opiniones, la magnitud del alejamiento del peso de la capitalización de mercado está controlado por el ratio del escalar (τ) entre la varianza del término de error (ω) de la opinión en cuestión. La varianza del término de error (ω) de una opinión se encuentra inversamente relacionado a la confianza del inversionista en esa opinión en particular. Por ello, una varianza del término de error (ω) de 0 representa una confianza de 100% (completamente seguro) en la opinión. La magnitud del alejamiento del peso de la capitalización de mercado se encuentra también afectada por otras opiniones. Opiniones adicionales lleva a un diferente Vector de retorno combinado $(E[R])$, lo cual lleva a un nuevo vector de pesos recomendados.

La manera más sencilla de calibrar el modelo Black-Litterman es partir de una suposición para el valor del escalar (τ). He y Litterman (1999) calibran la confianza de una opinión de manera tal que el ratio ω/τ es igual a la varianza de la opinión de dicho portafolio $(p_k \sum p_k')$.

Para calcular de manera sencilla Ω se propone la siguiente fórmula:

$$\Omega = \tau PSP'$$

Esto no sólo facilita la obtención de Ω mediante un cálculo sencillo, sino que al introducirlo a la fórmula del modelo Black-Litterman, el valor actual del escalar (τ) se vuelve irrelevante. Así, Ω es una matriz de la forma KxK.

4. 4 Resultados de Black-Litterman ($\mathrm{E}[\mathrm{R}]$)

Definidos los parámetros en 5.2 – 5.4 es posible calcular un nuevo vector de retornos combinado $\mathrm{E}[\mathrm{R}]$. La metodología fue resumida en la Figura 5 por Idzorek (2004).

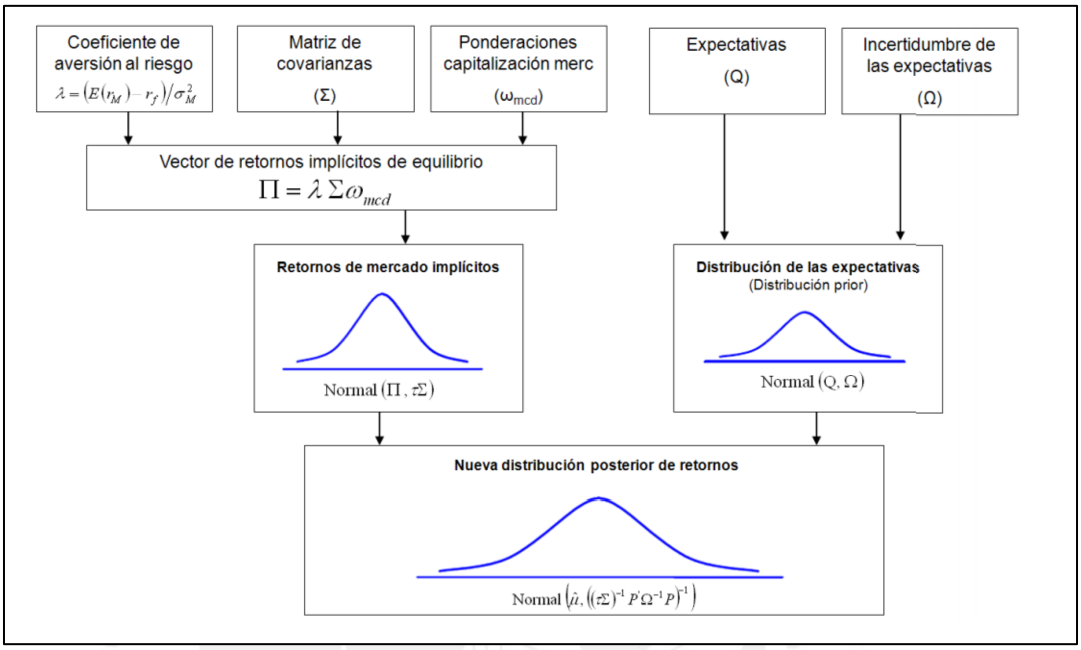

Figura 5. Metodología Black-Litterman
Fuente: Idzorek (2004)

Asimismo, conociendo ya los inputs del modelo, es posible computar el nuevo vector de retornos combinado $\mathrm{E}[\mathrm{R}]$ mediante la siguiente fórmula.

$$\mathrm{E}[\mathrm{R}] = [(\tau \mathrm{S})^{-1} + \mathrm{P}'\Omega^{-1}\mathrm{P}]^{-1}[(\tau \mathrm{S})^{-1}\Pi + \mathrm{P}'\Omega^{-1}\mathrm{Q}]$$

Donde:

$\mathrm{E}[\mathrm{R}]$ es el nuevo (posterior) vector de retornos combinado (Nx1)

τ es un escalar

S es la matriz de covarianza de retornos en exceso (NxN)

P es una matriz que identifica los activos involucrados en las opiniones (KxN o una 1xN en el caso de una sola opinión)

Ω es la diagonal de la matriz de covarianzas de los términos de error de las opiniones expresadas representando la incertidumbre de cada opinión (KxK)

Π es el vector de retornos de equilibrio en exceso implícito (Nx1)

Q es el Vector de opiniones (Kx1)

Como se explicó anteriormente, la fórmula puede ser reducida incluyendo el cálculo de Ω de manera simplificada, obteniendo lo siguiente:

$$E[R] = [\tau^{-1}S + P'\tau^{-1}(PSP')^{-1}P]^{-1}[\tau^{-1}S^{-1}\Pi + P'\tau^{-1}(PSP')Q]$$

De donde factorizando τ es posible obtener lo siguiente:

$$E[R] = [S^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[S^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Habiendo calculado Ω de una manera simplificada y obviando el escalar τ, todos los inputs son introducidos a la fórmula de Black-Litterman y el nuevo Vector de retorno combinado $(E[R])$ es derivado. Los nuevos pesos recomendados $(\hat{\omega})$ son calculados al resolver el problema de maximización sin restricciones:

$$\hat{\omega} = \frac{S^{-1}\{E[R] - r_f\}}{\lambda}$$

De esta manera, es posible obtener la Figura 6, la cual muestra cómo hubiese ido cambiando de manera histórica la composición de los activos del portafolio Black-Litterman a lo largo de estos nueve años de estudio, donde resalta lo volátil que llega a ser este portafolio, propio del rebalanceo periodo a periodo.

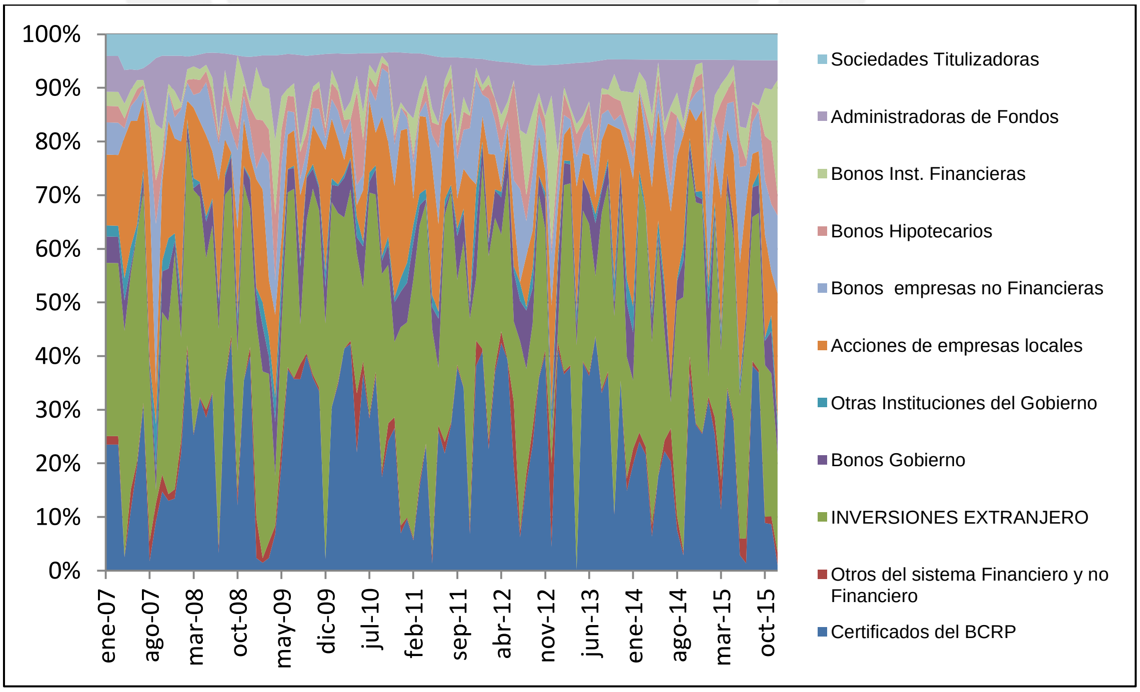

Figura 6. Composición histórica de los pesos de los activos del portafolio Black-Litterman en el periodo 2007 – 2015
Fuente: Elaboración propia

Asimismo, es posible obtener la Figura 7 donde se comparan los rendimientos históricos del promedio del sistema de las AFP en el Fondo 2, los mismos que se vieron en la Figura 2, con el respectivo portafolio Black-Litterman.

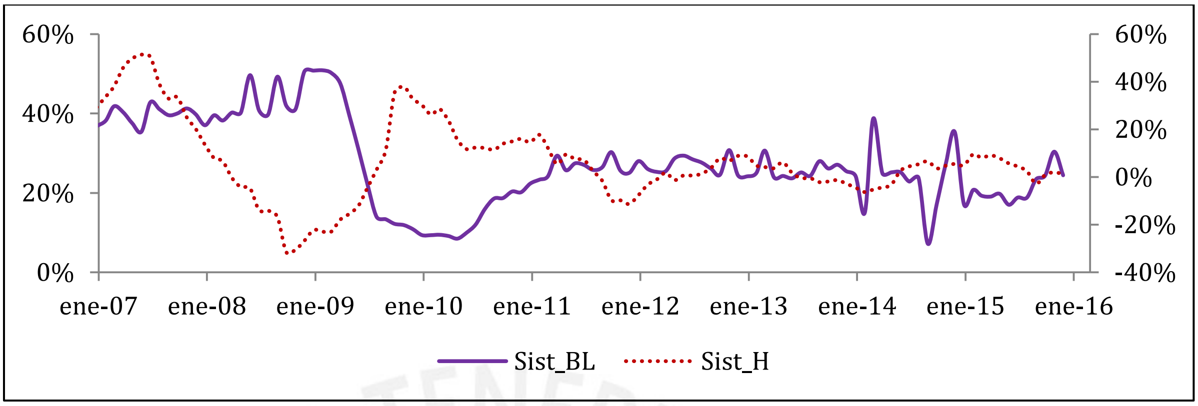

Figura 7. Comparación del rendimiento histórico vs. rendimiento Black – Litterman del sistema en el periodo 2007 - 2015
Fuente: Elaboración propia

De lo obtenido, se aprecia que, a nivel del sistema, en los nueve años de estudio, las AFP han rendido un 5.21% de manera real, mientras que de haberse optado por la metodología Black-Litterman, estas hubieran rendido un 27.20% anual, dados los supuestos con los que se trabajaron.

En el siguiente capítulo se presentarán las conclusiones y recomendaciones del estudio.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este último capítulo tiene por finalidad establecer las conclusiones del estudio, así como presentar las recomendaciones que este arroja.

5.1 Conclusiones

Se observa que al tener como modelo de predicción el método de *momentum*, los portafolios Black-Litterman de cada AFP de manera individual no diferirán del todo; sin embargo, el portafolio del sistema, llamado portafolio Black-Litterman del sistema sí difiere considerablemente al compararlo con los rendimientos históricos de las AFP a nivel del sistema.

En un escenario libre de las dos restricciones claves del SPP peruano como lo son los límites a las inversiones en el exterior y las prohibiciones de las ventas en corto, se demuestra que una gestión de portafolios basada en el modelo Black-Litterman, al variar los pesos de portafolios, logra en promedio rendimientos 22% superiores que los obtenidos por la gestión de las AFP a nivel del sistema en los nueve años de estudio.

Una simple opinión causa que el retorno de cada activo en el portafolio cambie de su retorno de equilibrio implícito ya que cada retorno individual está ligado a otros retornos vía la matriz de covarianzas de los retornos en exceso (S); sin embargo, el nuevo vector de pesos recomendados ($\hat{\omega}$), al derivarse del Vector de retornos combinado ($E[R]$) solo cambiará para los aquellos activos sobre los cuales se haya generado una opinión, y dichos cambios serán en las direcciones intuitivas.

5.2 Recomendaciones

Al poder obtener rendimientos considerablemente mayores que los históricos del sistema de las AFP, se sugiere que las AFP locales incluyan al modelo Black-Litterman con *momentum* dentro de su proceso de asignación de activos.

De no ser esto posible, y al ser notable como el efecto de los límites al exterior y la prohibición de las ventas aumentan la rentabilidad del portafolio Black-Litterman, se sugiere como medida de política permitir a las AFP posicionarse en corto y/o expandir los límites de inversión en el extranjero.

BIBLIOGRAFÍA

- Avramov, D., and G. Zhou (2010). Bayesian portfolio analysis. Annual Review of Financial Economics, Vol. 2: (Volume publication date December 2010).
- Bagasheva, B.S., Rachev, S.Z., Hsu, J.S., and F.J. Fabozzi (2008). Bayesian Applications to the Investment Management Process. In: Seese, D., Weinhardt, Ch., and F. Schlottmann, Handbook on Information Technology in Finance. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Bauwens, L., Lubrano, M., and J.F. Richard (1999). Bayesian inference in dynamic econometric models. Oxford: Oxford University Press.
- Berger, J.O. (1999). Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. (3rd ed.), New York: Springer Verlag.
- Best, M.J., and Grauer, R.R. (1991). "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results." The Review of Financial Studies, January, 315-342.
- Black, F. and Litterman, R. (1990). "Asset Allocation: Combining Investors Views with Market Equilibrium." Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company, September.
- Black, F. and Litterman, R. (1991) 'Global Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies', Fixed Income Research, Goldman Sachs.
- Black, F. and Litterman, R. (1992) 'Global Portfolio Optimization', Financial Analysts Journal, September-October, 28-43.
- Brandt, M. (2010). Portfolio choice problems. In Aït-Sahalia, Y., and L. Hansen (eds.). Handbook of Financial Econometrics, Volume 1. Amsterdam-London: North-Holland Press.
- Campbell, J., Lettau,M., Malkiel, B. y Xu, Y. (2001), "Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic", The Journal of Finance, 56(1), 1–43.
- Campbell, J.Y., and L.M. Viceira (2003). Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors. Oxford: Oxford University Press.
- Carlin, B.P., and T.A. Louis (2009). Bayesian Methods for Data Analysis. (3rd ed.), Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC.
- Castillo, M and Rojas, F. (2007) "Efecto del sistema privado de pensiones sobre el mercado de capitales peruano", Consorcio de Investigación Económica y Social, Lima, setiembre.

- Chopra, V. y W. Ziemba, W. (1993), "The effects of errors in means, variances, and covariance on optimal portfolio choice", Journal of Portfolio Management, 9(2), 6–11.
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and S.A. Ross (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. Econometrica, 51:363–383.
- Fama, E.F. (1970). Multiperiod consumption-investment decisions. American Econometric Review, 60:163–174.
- Fok, H. and Benzschawel, T. (2007) 'Asset Allocation Using the Black-Litterman Model', Quantitative Credit Analyst, Citigroup.
- Hakansson, N.H. (1970). Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions. Econometrica, 35, (5):401–416.
- Hakansson, N.H. (1971). Capital growth and the mean-variance approach to portfolio selection. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6:517–577.
- Frauendorfer, K. (1995a). The stochastic programming extension of the Markowitz approach. International Journal on Neural and Mass-Parallel Computing and Information Systems, 5:449–460.
- Frauendorfer, K., and H. Siede (1997). Mean-variance analysis in a multi-period setting. Working Paper, Institute of Operations Research and Computational Finance, Universität St. Gallen.
- Frauendorfer, K., and H. Siede (2000). Portfolio selection using multistage stochastic programming. Central European Journal of Operations Research, 7(4):277–289.
- Greene, W.H. (2008). Econometric Analysis. (6th ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- He, G. and Litterman, R. (1999). "The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios." Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company, December.
- Herold, U. (2003) 'Portfolio Construction with Qualitative Forecasts', The Journal of Portfolio Management, Fall, 61-72.
- Idzorek, T. (2004) 'A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user specified confidence levels', Zephyr Associates.
- Ingersoll, J.E. (1987). Theory of financial decision making. Totowa, NJ: Rowman and Littlefield.
- Koop, G., Poirier, D.J., and J.L. Tobias (2007). Bayesian Econometric Methods. Cambridge: Cambridge University Press.

- Lee, W. (2000) ‘Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation’, Frank J. Fabozzi Associates, Pennsylvania.
- Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolio and capital budgets. Review of Economics and Statistics, 47:13–37.
- Malkiel, B. (2002), “How Much Diversification Is Enough?” Proceedings of the AIMR seminar The Future of Equity Portfolio Construction, 26–27.
- Markowitz, H. (1952) ‘Portfolio Selection’, The Journal of Finance, 7 (1), 77-91.
- Markowitz, H.M. (1991). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Assets. (2nd ed.), Oxford: Blackwell Publishing.
- Mendoza, R (2014) “Eficiencia financiera en los portafolios de inversión de las AFP en el Perú: Un enfoque robusto de Multifondos”, Banco Central de Reserva del Perú.
- Merton, R.C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case. Review of Economics and Statistics, 51:247–257.
- Merton, R.C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model. Journal of Economic Theory, 3:373–413.
- Meucci, A. (2005). Risk and asset allocation. Berlin: Springer.
- Michaud, R.O. (1989). “The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal?” Financial Analysts Journal, January/February, 31-42.
- Moloche, G (2012). “Política óptima de inversiones de las AFPs: Implicancias del marco regulatorio y los esquemas de comisiones”, Consorcio de investigación económica y social. Lima.
- Moloche, G (2013). “Teoría del Portafolio: Notas sesiones 3.1-2”. Lima.
- Mossin, J. (1968). Optimal multiperiod portfolio policies. Journal of Business, 41:215–229.
- Pástor, L., and R.F. Stambaugh (2000). Comparing asset pricing models: An investment perspective. Journal of Financial Economics, 56:335–381.
- Pástor, L., and R.F. Stambaugh (2002). Mutual fund performance and seemingly unrelated assets. Journal of Financial Economics, 63:315–349.
- Pereda, J. (2007) ‘Estimación de la Frontera Eficiente para las AFP en el Perú y el impacto de los Límites de Inversión: 1995 – 2004’, Banco Central de Reserva del Perú.
- Perold, A.F., and W.F. Sharpe (1988). Dynamic strategies for asset allocation. Financial Analyst Journal, 44:16–27.

- Rachev, S.T., J.S. Hsu, B.S. Bagasheva, and F.J. Fabozzi (2008). Bayesian Methods in Finance. Hoboken, NJ: Wiley.
- Robert, C.P. (2001). The Bayesian Choice. (2nd ed.), New York: Springer Verlag.
- Ross, S.A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. Journal of Economic Theory, 13:341–360.
- Samuelson, P. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. Review of Economics and Statistics, 51:239–246.
- Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000). "A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction." Journal of Asset Management, September, 138-150.
- Scowcroft, A., and J. Sefton (2003). Enhanced indexation. In: Satshell, S., and A. Scowcroft (eds.), Advances in portfolio construction and implementation, 95–124. Burlington: Butterworth-Heinemann Finance.
- Sharpe, W.F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 19:425–442.
- Sharpe,W.F. (1987). Integrated asset allocation. Financial Analyst Journal, 43:25–32.
- Sharpe, W. (1994), "The Sharpe Ratio", Journal of Portfolio Management, 21(1), 49-58.
- Sharpe, W. (2007) 'Expected Utility Asset Allocation', Financial Analysts Journal, Volume 63, number 5.
- Theil, H., and A. Goldberger (1961). On pure and mixed estimation in economics. International Economic Review, 2:65–78.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preferences as behavior towards risk. Review of Economic Studies, 25:65–86.
- Treynor, J. (1961). Toward a theory of the market value of risky assets. Working Paper.
- Trujillo, M. (2009) 'Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia', Universidad de los Andes.
- Walters, J. (2008) 'The Black-Litterman Model: A detailed exploration', working paper.
- Zimmermann, H., Drobetz, W., and Oertmann, P. (2002). Global Asset Allocation: New Methods and Applications. New York: John Wiley & Sons.